

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

Du Master en Automatique

Thème

Commande par Modes Glissants d'ordre Fractionnaire
d'un Convertisseur DC/DC

Proposé par : **Mr. SI AMMOUR**
Mr. DJENNOUNE

Présenté par :

Mr. KAHIL Nabil

Dirigé par : **Mr. SI AMMOUR**

Mlle. CHEKARI Tassadit

Soutenu le : 11/07/2011

Promotion 2011

Ce travail a été préparé à la Faculté de Génie Electrique et Informatique.

Dédicaces

A la mémoire de ma chère grand-mère qui j'ai souhaité lui faire vivre cet évènement important dans ma vie.

A mes très chers parents auxquels, j'exprime ma reconnaissance et ma gratitude pour leur soutien et leur amour continuels, ma réussite leur revient.

A tous mes chers frères et sœurs, à ma belle sœur et tous mes proches et cousins

A mes camarades de la section Master 2 Automatique et tous ceux de la faculté de Génie électrique et d'Informatique et tous mes enseignants de l'Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou.

Je dédie ce travail également à mon binôme et à toute sa famille

Tassadit

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A

Mes très chers parents.

Ma grand-mère.

Mes sœurs et mon frère.

Tous mes proches.

Ma binôme et toute sa famille

Tous mes amis et collègues.

Tous les musulmans dans le monde entier.

Nabil

Remerciements

Nous remercions avant tout le bon Dieu de nous avoir permis de réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre promoteur Mr SI AMMOUR pour avoir dirigé ce travail pour son suivi, ses conseils et sa disponibilité à chaque instant ainsi que Mr DJENNOUNE pour son aide et ses orientations.

Nous remercions tout particulièrement Mr MAIDI, Mr MANSOURI et Mlle DJEGHALI pour leur aide et leur générosité.

Notre gratitude et reconnaissance s'adressent à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation pendant notre cursus universitaire.

Nos remerciements vont s'adresser également au président et membres de jury qui nous feront l'honneur d'évaluer notre travail.

Sans oublier tous les amis (ies) et camarades qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste projet.

Notations

Introduction générale.....	1
-----------------------------------	----------

Chapitre I : Théorie de la commande par modes de glissement

I.1 Introduction.....	4
I.2 Configuration de base des systèmes à structure variable	4
I.2.1 Changement de structure par commutation entre deux retours d'état différents.....	5
I.2.2 Variation de la structure du système par simple commutation d'interrupteur.....	5
I.2.3 Changement de structure par injection de commande équivalente.....	6
I.3 Exemple de la mise en oeuvre de la loi de commande à structure variable.....	6
I.4 Principe de la commande par mode glissants.....	9
I.5 Types de mode glissant.....	12
I.5.1 Trajectoire d'état idéale.....	12
I.5.2 Trajectoire d'état réelle.....	13
I.6 Synthèse de la loi de commande.....	13
I.6.1 Choix de la surface de commutation.....	14
I.6.2 Condition d'existence et de convergence.....	16
I.6.3 Détermination de la loi de commande.....	17
I.6.3.1 Commande équivalente.....	18
I.6.3.2 Commande discontinue.....	19
I.7 Propriété de la robustesse.....	20
I.8 Phénomène de réticence.....	22
I.9 Exemple d'application de la loi de commande par mode glissant.....	24
I.10 Conclusion.....	34

Chapitre II : Etude et simulation des systèmes d'ordre non entier

II.1 Introduction.....	35
II.2 Historique.....	36
II.3 Operateurs d'ordre non entier et propriétés.....	37
II.3.1 Intégration d'ordre non entier.....	37
II.3.2 Dérivation d'ordre non entier.....	39
II.3.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.....	39
II.3.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.....	40
II.3.2.3 Dérivation fractionnaire Grunwald –Letnikov.....	42
II.3.2.4 Propriété de la dérivée non entière	44
II.4 Transformée de Laplace des operateurs d'ordre fractionnaire.....	45
II.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....	45
II.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	46
II.5 Représentation des systèmes d'ordre non entier.....	47
II.5.1 Équation différentielle généralisée.....	47
II.5.2 Fonction de transfert d'ordre non entier.....	48
II.5.3 Représentation d'état d'ordre non entier.....	48
II.6 Stabilité des systèmes d'ordre non entier.....	50
II.7 Approximation des systèmes d'ordre non entier.....	50
II.7.1 Approximation du modèle fractionnaire par un modèle continu.....	51
II.7.1.1 Méthode d'Oustaloup.....	51
II.7.1.2 Méthode de Charef.....	55
II.7.2 Approximation du modèle fractionnaire par un modèle discret.....	57
II.8 Régulateurs robustes d'ordre non entier.....	62
II.9 Performances d'un système fractionnaire.....	65

II.10 Conclusion.....	66
-----------------------	----

Chapitre III : Synthèse de la loi de la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire d'un convertisseur DC/DC

III.1 Introduction.....	68
III.2 Convertisseurs de puissance continu- continu.....	68
III.2.1 Principe de hacheur série	70
III.2.2 Modélisation du hacheur série	70
III.3 Commande du hacheur par modes glissant en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état.....	73
III .3.1 Choix de la surface.....	73
III.3.2 Conditions de convergence.....	74
III .3.3 Détermination des coefficients de la surface.....	75
III .3.4 Rejet de perturbation.....	75
III .3.5 Résultats de simulation et interprétation	76
III.4 Commande par modes glissants en utilisant la structure du correcteur PID classique comme surface de glissement.....	82
III.4.1 choix de la surface.....	82
III.4.2 Conditions de convergence.....	84
III.4.3 Rejet de perturbations.....	84
III.4.4 Résultats de simulation et interprétation	84
III.5 la commande par mode glissants en utilisant la structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire comme surface de glissement.....	91
III.5.1 Choix de la surface.....	91
III.5.2 Conditions de convergence.....	92
III.5.3 Rejet de perturbations.....	93
III.5.4 Résultats de simulation et interprétation	93
III.6 Conclusion.....	104

Conclusion générale	105
----------------------------	------------

Annexes

A. Opérateurs d'ordre complexe

B. Compléments mathématiques

C. Approximation du dérivateur généralisé par un modèle continu

Bibliographie

Notations

$s(x)$: La surface de glissement

f^+, f^- : Les vecteurs de vitesse

$f(x)$: le vecteur d'état

$g(x)$: Le vecteur de commande

$h(x)$: Le vecteur de sortie

$p(x)$: le vecteur de perturbation

$e(t)$: L'écart

x_d : Trajectoire désirée

r : Degré relatif

u_{eq} : La commande équivalente

u_n : La commande discontinue

u : La commande globale

$sign(.)$: La fonction signe

$sat(.)$: La fonction saturation

$I^\alpha f(t)$: ($\alpha \in \mathcal{R}$), L'intégration non entière d'ordre α de la fonction $f(t)$

$\Gamma(z)$: Fonction Gamma

$P_\alpha(t)$: Facteur d'Oubli : fonction causale, elle pondère différemment chaque valeur de la fonction $f(t)$. L'intégration fractionnaire est un produit de convolution entre la fonction $P_\alpha(t)$ et $f(t)$.

${}^{RL}_{t_0}D^\alpha f(t)$: La dérivation non entière de Riemann-Liouville

${}^C_{t_0}D^\alpha f(t)$: La dérivation non entière de Caputo

$\binom{n}{j}$: ($j \in \mathbb{N}$), Désigne les combinaisons de j élément parmi n

$\binom{\alpha}{j}$: ($\alpha \in \mathcal{R}$), Désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels

D^α : Opérateur de la dérivation non entière

$D^\alpha f(kh)$: Désigne la valeur de la dérivé $\alpha^{ème}$ de $f(t)$ à l'instant kh

h : Période d'échantillonnage

s : Opérateur de Laplace

$D^{(\alpha)}(x) : x \in \mathfrak{R}^n, \alpha \in \mathcal{R}_+^n$, le $i^{ème}$ élément de vecteur $x(t)$ est dérivé à la $i^{ème}$ composante du vecteur α

$D^\alpha x : (x \in \mathfrak{R}^n)$, tous les éléments du vecteur $x(t)$ sont dérivées au même ordre α

$\arg(\lambda_i)$: Module de nombre λ_i

$D_{gen}(s)$: Fonction de transfert de la dérivation généralisée

$D_{borné}(s)$: Fonction de transfert de la dérivation borné en fréquence

λ, η : Les paramètres de récurrences

ε : Erreur d'approximation

a, b : Les paramètres de singularité

$w(z)$: La transformée en z de l'opérateur s

K_p, K_i, K_d : désigne respectivement la constante, proportionnelle, intégration, dérivation

La commande des procédés industriels connaît actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application des méthodes et des techniques considérées pour longtemps purement théoriques ; cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche scientifique dans divers domaines tels que l'analyse numérique et la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour la commande des systèmes.

Parmi les approches qui ont bénéficié de ce progrès remarquable, les dispositifs de commutation de l'électronique de puissance tels que les convertisseurs de puissance qui ne cessent d'être omniprésents dans l'industrie, ces convertisseurs qui sont connus pour leur structure variable due au fonctionnement discontinu de l'organe de commande, l'interrupteur, nécessitent une loi de commande appropriée à leur fonctionnement.

Les premiers travaux sur la commande des systèmes à structure variable (**VSS**) ont été effectués en Russie (ex-union soviétique) dans les années soixante. Les concepts de base de la théorie ont été publiés en Angleterre durant les années soixante dix, depuis, cette technique a été utilisée dans plusieurs branches de l'Automatique : la commande adaptative, la commande par observateurs d'état...etc.

La commande par mode de glissement est un cas particulier de la commande à structure variable, elle est connue pour sa robustesse vis-à-vis des perturbations et des variations paramétriques.

Le calcul fractionnaire est un concept nouveau bien qu'il soit ancien, il date du 17^{ème} siècle, et il a été considéré au début de son âge comme étant un problème de mathématiques pures sans intérêt pour l'ingénierie, grâce au progrès des méthodes de simulation et d'analyse numérique, on assiste dans ces dernières décennies à un regain d'intérêt considérable pour cette théorie par l'application de ses concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie. En effet plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques, thermiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivation non entière ; un exemple simple de mécanique des fluides montre que l'intégrale d'ordre $\frac{1}{2}$ apparaît tout naturellement quand on veut exprimer un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement de fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne, dans la diffusion de

chaleur à travers un solide semi infini, le flux de chaleur s'exprime par la dérivée $\frac{1}{2}$ de la température ; la dérivation non entière apparaît également lors de la modélisation des gommages et des caoutchoucs, ou toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées. En fait la dérivation non entière permet une modélisation meilleure et par conséquent une compréhension meilleure des phénomènes physiques.

La raison principale de l'usage des modèles entiers était l'absence des méthodes de résolution des équations différentielles fractionnaires.

En commande des systèmes, le calcul fractionnaire nous permet de définir la commande d'ordre fractionnaire qui sous entend l'introduction des dérivées et des intégrales non entières dans les expressions de la loi de commande ; elle s'étend à plusieurs stratégies de commande telles que le PID , H_2 et H_∞ ... etc.

Notre mémoire s'inscrit dans le cadre des études qui se font actuellement sur l'apport de la dérivation non entière introduite lors de la synthèse de la loi de commande par mode de glissement appliquée à un convertisseur électrique DC/DC dit hacheur série (**buck converter en anglais**) ; le choix de ce hacheur est du au fait qu'il constitue l'élément de base des autres types des hacheurs et ses applications sont multiples.

Le contenu de notre mémoire est organisé en trois chapitres principaux

Le 1^{er} *chapitre* comprend des rappels et des définitions de base de la théorie de la commande à structure variable (**CSV**) en illustrant avec un exemple de mise en œuvre de ce genre de systèmes ; un autre exemple est dédié à la synthèse de la commande par modes de glissement d'un système de second ordre avec des tests de robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures.

Le 2^{ème} *chapitre* englobe des notions générales sur le calcul fractionnaire (définitions, propriétés.. etc.) et des méthodes d'approximation de la dérivation non entière qui sont développées que se soit dans le domaine continu ou discret avec des exemples illustratifs, une introduction sera faite à la commande d'ordre fractionnaire en expliquant les propriétés du PID d'ordre fractionnaire. Une comparaison de point de vue performances dynamiques sera faite entre un système d'ordre fractionnaire et un autre d'ordre entier.

Pour ne pas alourdir ce chapitre, des suppléments mathématiques seront donnés en annexe *A*, quelques résultats théoriques sur la dérivation d'ordre complexe seront illustrés en annexe *B*, deux autres méthodes d'approximation de la dérivation généralisée seront exposées en annexe *C*.

Le 3^{ème} *chapitre* comporte une application de la commande par mode de glissement d'ordre classique et fractionnaire en choisissant comme surface de commutation la structure d'un *PID* classique et fractionnaire, la commande est appliquée à un hacheur série avec des tests de robustesse et des comparaisons des résultats.

I.1 Introduction

La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés est une technique de commande robuste et non linéaire, elle a été introduite pour remédier aux limitations engendrées par la commande classique lorsqu'il s'agit des systèmes qui présentent des non linéarités fortes, modélisés par des modèles mathématiques mal ou approximativement connus ou encore ayant des paramètres qui varient au cours de leurs fonctionnement.

L'apparition des oscillations très fortes au niveau de la grandeur de commande en régime permanent a longtemps entravé l'utilisation de cette commande, et ce n'est qu'à partir des années **80** que ce phénomène a été compensé et la technique des modes glissants est devenue très attractive pour les systèmes imprécis. Les incertitudes sur le système sont dues à deux raisons :

- Erreurs sur les paramètres du système (erreurs d'identification)
- Erreurs sur le choix du modèle et les hypothèses simplificatrices (erreurs de modélisation)

La commande par mode de glissement se classifie dans la catégorie des systèmes à structure variable **[SSV]**, les paramètres du correcteur commutent entre deux valeurs différentes selon le signe d'une fonction prédéfinie dite surface de glissement ou loi de commutation (**sliding surface en anglais**).

Ce chapitre est destiné à présenter les notions théoriques fondamentales et nécessaires à la compréhension du fonctionnement de la commande par modes glissants ; pour cela nous introduirons, en premier lieu les configurations de base des systèmes à structure variable, nous illustrerons avec un exemple l'intérêt apporté par cette technique, ensuite nous expliquerons le principe de fonctionnement des systèmes à structure variable, et la méthodologie de synthèse de la loi de la commande, sa robustesse sera mise en évidence.

Le phénomène de réticence qui est engendré par les fortes oscillations sera abordé, avec les différentes solutions proposées pour l'éliminer ou au moins le réduire.

Pour clôturer ce chapitre, nous synthétiserons une loi de commande par mode de glissement pour un système de second ordre avec des simulations sous le logiciel MATLAB.

I.2 Configurations de base des systèmes à structure variable

Dans les systèmes de réglage à structure variable, on distingue trois configurations de base différentes :

I.2.1 Configuration permettant un changement de structure par commutation entre deux retours d'état différents [Bul86]

La loi de commande est donnée par

$$u = \begin{cases} -k_1(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ -k_2(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

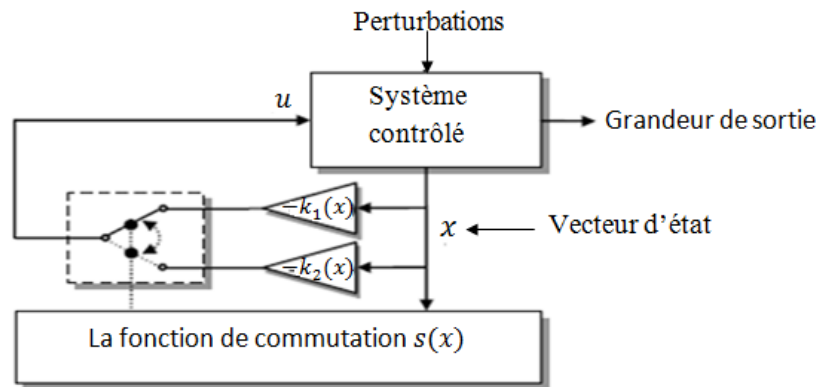


Figure I.1 : changement de structure avec commutation entre deux retours

Le système rentre dans le régime glissant lorsque $s(x) = 0$

I.2.2 Configuration permettant la variation de la structure du système par simple commutation d'interrupteur [Bul86], ce qui est le cas des convertisseurs électriques

Seule l'information sur le signe de la fonction de la surface $s(x)$, suffit pour générer la commande d'ouverture ou de fermeture de l'interrupteur pilotant le convertisseur. Donc la loi de commande est donnée par :

$$u(x) = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

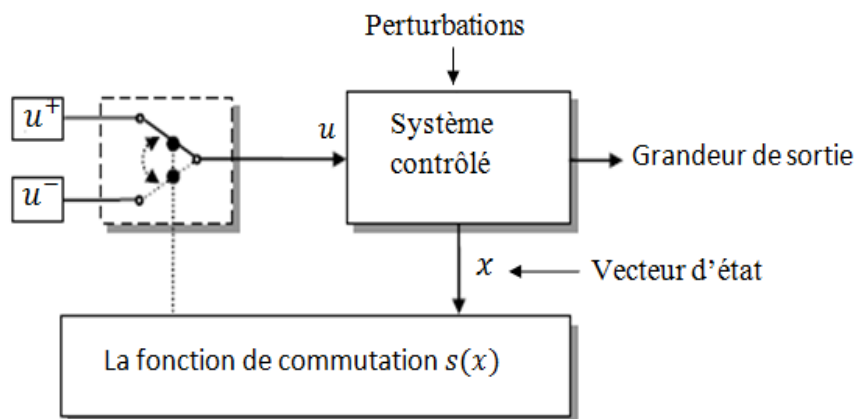
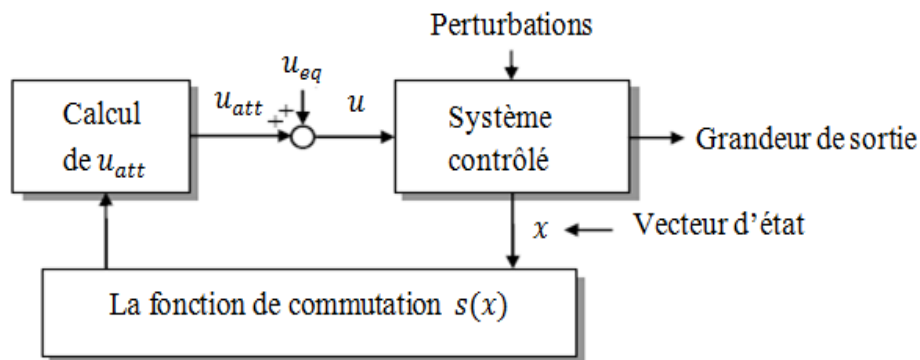


Figure I.2 : changement de structure avec commutation au niveau de l'organe de commande

La dynamique du système est déterminée en vérifiant la condition $s(x) = 0$

I.2.3 Configuration permettant un changement de structure par injection de la commande équivalente

Une troisième configuration de structure par injection de la commande équivalente est donnée par la **Figure I.3**

**Figure I.3** : changement de la structure par injection de la commande équivalente

Dans cette structure, un vecteur de contrôle équivalent u_{eq} est introduit. Ce vecteur n'est rien d'autre que la valeur désirée du vecteur d'entrée u en régime permanent. Au vecteur de contrôle équivalent est additionné le vecteur de contrôle attractif u_{att} dont le rôle est contrôler le système au régime transitoire de telle sorte que les grandeurs contrôlées tendent vers leurs références.

Ce type de structure est caractérisé par une commande indirecte du système. Dans ce cas, le vecteur contrôle total u est égale a la somme de u_{eq} et u_{att} .

L'idée du changement discontinu de la structure par retour d'état s'avère très intéressante. Elle permet d'optimiser la réponse d'un système en commutant entre deux structures d'asservissement, et voire transformer les systèmes instables en systèmes stables.

L'exemple suivant illustre clairement cette propriété.

I.3 Exemple de mise en oeuvre de la commande à structure variable

Considérons un système de second ordre modélisé par le schéma bloc suivant:

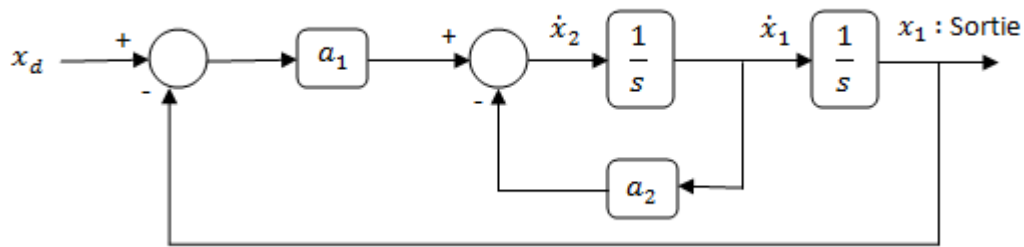


Figure I.4 : schéma bloc d'un système de second ordre

Ce système est régi par le modèle d'état suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 + a_1 (x_d - x_2)$$

$$y(t) = x_1$$

x_1 et x_2 : sont les variables d'état du système

x_d : entrée désirée

$y(t)$: la sortie du système

a_1 et a_2 Sont des coefficients constants du système.

Nous faisons la simulation pour les conditions initiales suivantes : $x_1(0)=10$ et $x_2(0)=0$ et une entrée de référence nulle.

Dans le premier cas : $a_1 = 50$ $a_2 = 0$ la sortie du système oscille autour du point d'équilibre indéfiniment, le système est à la limite de stabilité.

Dans le deuxième cas : $a_1 = 50$ $a_2 = 100$ la sortie du système converge lentement vers le point d'équilibre, le système est stable mais lent.

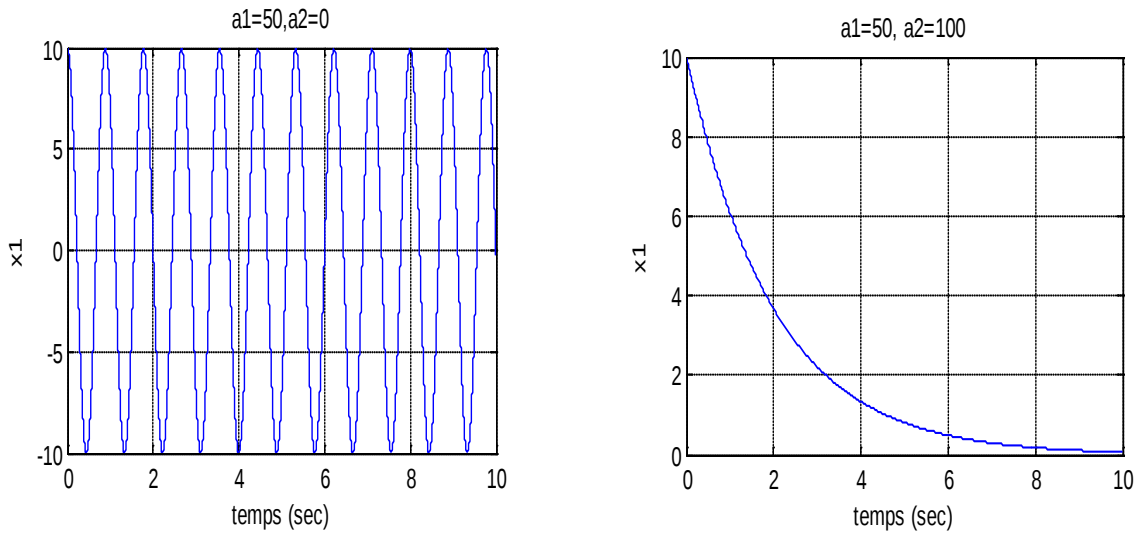


Figure I.5 : allure de sortie x_1 pour deux valeurs différentes du paramètre a_2 .

Afin d'améliorer la convergence du système vers le point d'équilibre, une solution consiste à faire correspondre au coefficient a_2 deux valeurs différentes dépendant d'une loi de commande prédéfinie ; la stratégie de contrôle utilisée est présentée sur **la figure 1.6**. L'interrupteur permet de choisir la valeur du coefficient a_2 en fonction de l'état du système.

La commande de l'interrupteur est générée par l'intermédiaire de la commande suivante :

$$u = \begin{cases} 1 \text{ quand } |x_1 - \text{réf}| > \varepsilon \Rightarrow a_2 = 0 \\ 0 \text{ quand } |x_1 - \text{réf}| < \varepsilon \Rightarrow a_2 = 100 \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Avec ε est une constante positive

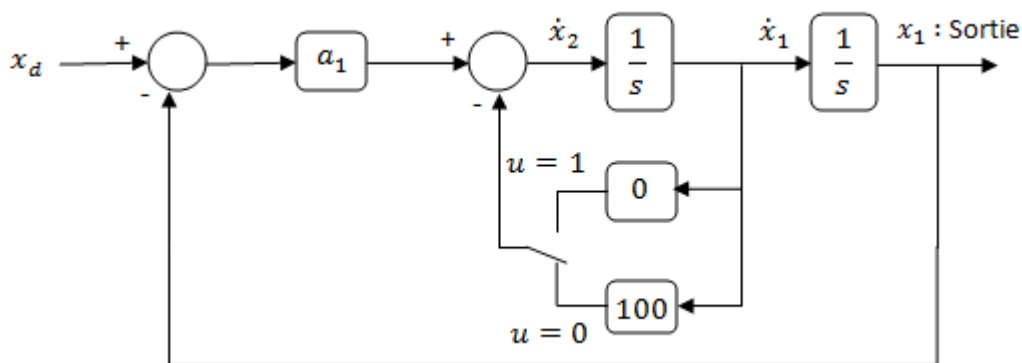


Figure I.6 : schéma bloc du système obtenu avec la condition (I. 3)

La figure I.7 montre qu'à l'aide de la commande à structure variable définie dans la loi de commutation (I.3), la réponse du système converge rapidement vers le point d'équilibre sans aucune oscillation , le système est stable et plus rapide.

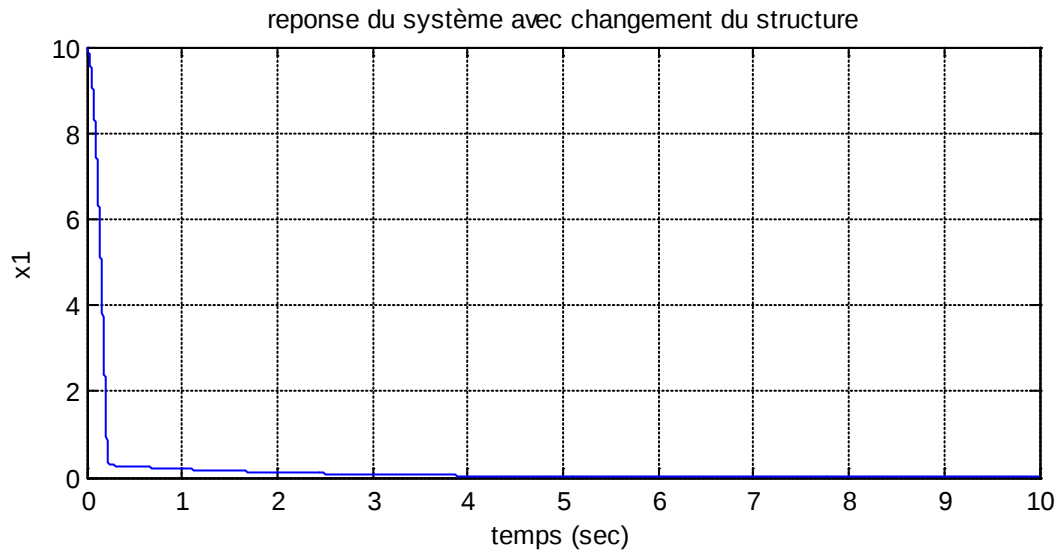


Figure I.7 : réponse du système avec la structure de contrôle donnée par la relation (I. 3)

Resultat : cet exemple met en évidence l'influence des paramètres du système sur la stabilité et la rapidité de la trajectoire d'état d'un système ; en outre, il met en valeur l'importance de la commande à structure variable qui nous permet d'améliorer la rapidité et la stabilité d'un système.

I.4 Principe de la commande par mode de glissement

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre d'où le phénomène de glissement, elle présente certaines propriétés importantes :

- En mode de glissement, la dimension du système est inférieure à celle de l'espace d'état, par conséquent, le système sera réduit et libre, indépendant de la partie commandée.
- La dynamique du système en mode de glissement est déterminée uniquement par le choix des coefficients de la surface de glissement d'où son importance.
- La technique des modes de glissement est robuste par rapport aux variations paramétriques et perturbations extérieures.
- La théorie des modes de glissement s'adapte bien aux systèmes dont la commande est discontinue. Ce qui est le cas pour les convertisseurs électriques qui sont bâtis autour d'interrupteurs qui ne fonctionnent qu'au mode discontinu « tout ou rien ».

Considérons le système non linéaire mono variable suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Avec $x(t_0) = x_0$

$x \in \mathcal{R}^n$: Vecteur d'état du système

f, h : Sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables

$u \in \mathcal{R}$: Commande du système

La surface de discontinuité est donnée par l'expression suivante :

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n \text{ tq: } S(x) = 0\} \quad (\text{I.5})$$

$s(x) = 0$ divise l'espace d'état en deux parties disjointes notées $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ tel que :

$$\mathcal{E}^+ = \{x \in \mathcal{R}^n \setminus s(x) > 0\} \text{ et } \mathcal{E}^- = \{x \in \mathcal{R}^n \setminus s(x) < 0\}$$

La commande à structure variable est définie par la formule suivante :

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

$$u \in]u^-, u^+[\text{ Si } s(x) = 0$$

Le système (I.4) avec la loi de commande (I.6) est à structure variable. Un système rendu discontinu par le choix d'une commande discontinue u est dit à discontinuité artificielle.

D'autres systèmes sont de conception naturellement discontinue à titre d'exemple les circuits électroniques ayant des commutateurs **[King 82]** et les systèmes mécaniques avec un frottement sec **[Utk78, Utki92]**.

Le système (I.4) avec la loi de commande (I.6) peut se ramener à l'écriture suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} f^+(x, u^+) & \text{si } s(x) > 0 \\ f^-(x, u^-) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Avec $f^+(x, u^+)$ et $f^-(x, u^-)$ sont des champs de vecteurs complets dans $\mathcal{R}^n$

Qu'ils soient à discontinuité naturelle ou artificielle, les systèmes à structure variable peuvent tous se ramener à la forme (I.7)

En dehors de la surface de discontinuité les vecteurs de vitesse f^+ et f^- peuvent avoir différents comportements :

- les vecteurs de vitesse f^+ et f^- traversent la surface d'un coté vers l'autre **Figure I.8.a**, **Figure I.8.b**
- Les vecteurs de vitesse f^+ et f^- sont pointés chacun vers la surface **Figure I.8.c**

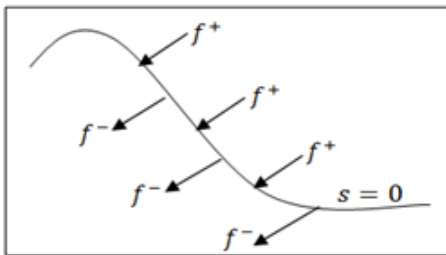


Figure I.8.a

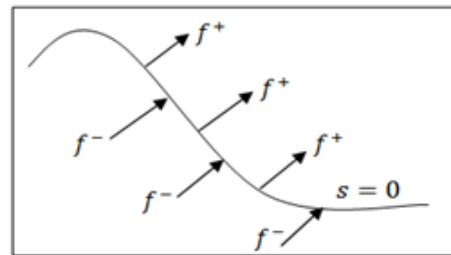


Figure I.8.b

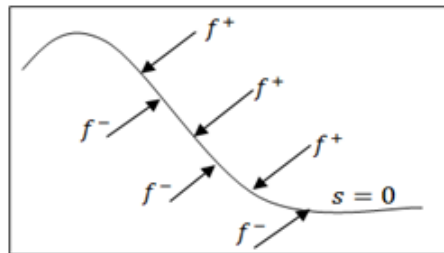


Figure I.8.c

Figure I.8 : différents comportements des vecteurs f^+ et f^- en dehors de la surface de discontinuité

Le cas qui nous intéresse est celui où les deux vecteurs de vitesse sont pointés chacun vers la surface de glissement, on dit que celle-ci est attractive **Figure I.8.c**.

Définition I.1

La surface $s = 0$ est attractive pour un domaine de convergence donné si toute trajectoire évoluant dans le domaine d'attraction est dirigée vers elle.

Définition I.2

La surface $s = 0$ est invariante si toute trajectoire débutant dans celle-ci ou l'atteignant ne peut en sortir et évolue donc sur elle.

Si l'état du système est de côté $\mathcal{E}^+$ de l'espace d'état (ou du côté $\mathcal{E}^-$), il rejoindra forcément la surface $s(x) = 0$. S'il dépasse de l'autre côté $\mathcal{E}^-$ (ou du côté $\mathcal{E}^+$), il se ramènera vers $s(x) = 0$. Cette surface $s(x) = 0$ est donc appelée surface de glissement et le mouvement sur cette surface est un mode glissant dont l'équation détermine la dynamique désirée du système.

Suivant que l'état du système sur $\mathcal{E}^+$ ou sur $\mathcal{E}^-$, il atteint la surface de glissement $s(x) = 0$ avec les vitesses f^+ ou f^- respectivement.

Ce principe peut être illustré graphiquement d'une manière assez simple dans le cas d'un système de deuxième ordre. En effet la surface de glissement est une courbe dans $\mathcal{R}^2$.

La figure 1.9 suivante montre le comportement de la trajectoire d'état du système autour de la surface de commutation $s(x) = 0$ en fonction de la commande.

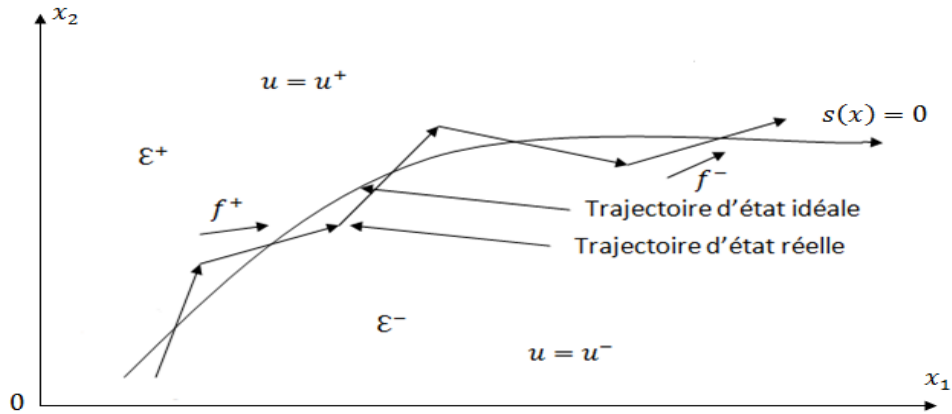


Figure 1.9 : illustration du mouvement de glissement

I.5 types de modes glissants

A partir de cette figure, on constate qu'il ya deux types de modes glissants [Emel 86, Frid 96, Frid 02, Leva 95]:

I.5.1 Trajectoire d'état idéale : la notion des modes glissants idéaux n'a pour but que d'exprimer une solution théorique avec une fréquence de commutation infinie, mais irréalisable pratiquement

à cause des imperfections et limitations physiques des organes de commutation, la trajectoire d'état idéale décrit parfaitement l'équation $s(x) = 0$.

I.5.2 Trajectoire d'état réelle : la notion des modes glissants réels permet d'exprimer la dépendance de l'algorithme des modes glissants par rapport aux imperfections physiques de système réel (retard d'un actionneur, la fonction signe, gain non infinie, etc....) avec une fréquence de commutation finie d'où la trajectoire d'état réelle se manifeste par des oscillations autour de la surface de commutation $s(x) = 0$. Cet aspect est très important pour les systèmes à structure variable quand il s'agit de passer à une application réelle.

Remarque I.1

Il est à noter qu'il existe deux catégories de régimes glissants :

- *Régime glissant statique : la commande est statique, absence des dérivées de la commande dans la synthèse de loi de commande.*
- *Régime glissant dynamique : la commande est dynamique, présence des dérivées de la commande dans la synthèse de loi de commande.*

Notre travail portera sur l'étude du régime glissant statique

I.6 Synthèse de la loi de commande

Considérons un système mono variable invariant non linéaire affine en entrée

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état du système vers la surface du glissement et la maintenir sur elle jusqu'à la convergence vers le point d'équilibre.

La réponse d'un système de type (I.8) soumis à une loi glissante de type (I.6) passe en général par trois modes distincts appelés mode de convergence (Reaching mode, RM), mode de glissement (Sliding mode, SM), et le mode de régime permanent (Steady-state mode, SS), ces modes sont illustrés dans le plan de phase sur **la figure I.10**

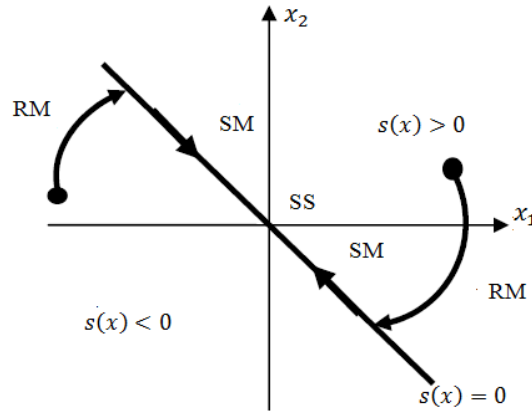


Figure I.10 : les modes de la trajectoire d'état d'un système de second ordre dans le plan de phase

- a- **Mode de convergence (RM)** : (Première étape de stabilisation), l'état du système se déplace d'un état initial quelconque vers la surface de glissement.
- b- **Mode de glissement(SM)** : (deuxième étape de stabilisation), l'état du système glisse sur la surface de glissement jusqu'au point d'équilibre.
- c- **Mode de régime permanent(SS)** : (troisième étape de stabilisation) l'état du système se stabilise au point d'équilibre.

La conception de la loi de commande par modes de glissement prend en compte les problèmes de stabilité et de bonnes performances, elle est réalisée en trois étapes :

I.6.1 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement ou la fonction de commutation (**switching function en anglais**) représente le comportement dynamique désiré du système en boucle fermée. Elle peut être choisie linéaire ou non linéaire.

Une fois le système est en mouvement de glissement sur la surface de commutation, sa dynamique ne dépend que des paramètres de celle ci, d'où l'importance du choix de cette surface.

J.J Slotine nous propose une équation générale pour déterminer la surface de discontinuité:

$$s(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)^{r-1} e(x) \quad (I.9)$$

Avec :

$$e(t) = y(t) - y_{ref}(t) \quad (I.10)$$

λ : Constante positive

r : degré relatif du système, plus petit entier positif tel que : $\frac{\partial s(x)}{\partial u(x)} \neq 0$

Cette équation établit la relation entre le degré relatif du système et le choix de la surface de glissement dont le but est d'assurer la convergence de $y(t)$ vers $y_{ref}(t)$.

Pour:

$$r = 1 \quad s(x) = e(x)$$

$$r = 2 \quad s(x) = \lambda e(x) + \dot{e}(x)$$

$$r = 3 \quad s(x) = \lambda^2 e(x) + 2\lambda \dot{e}(x) + \ddot{e}(x)$$

$s(x) = 0$: est une équation différentielle linéaire autonome dont la réponse $e(x)$ tend vers zéro pour le choix correct de la constante λ . En d'autres termes, la difficulté revient à un problème de poursuite de trajectoire dont l'objectif est de garder $s(x) = 0$. Ceci équivaut à une linéarisation exacte de l'écart $e(x)$ tout en respectant la condition de convergence (I.15).

Cette linéarisation a pour objectif de forcer la dynamique de l'écart à être une dynamique de système linéaire autonome de degré relatif r

L'équation générale de la linéarisation exacte de l'écart est donnée par la relation suivante :

$$e(x) + \lambda^{r-1} e^{(r-1)}(x) + \dots \lambda_1 e^1(x) + \lambda_0 e(x) = 0 \quad (\text{I.11})$$

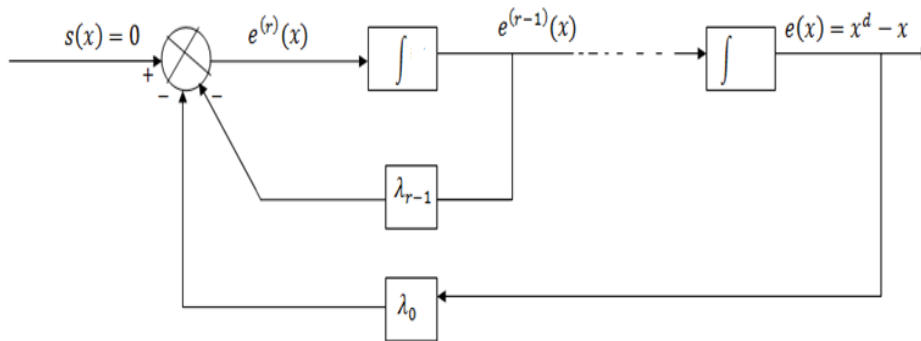


Figure I.11 : linéarisation exacte de l'écart

Une autre équation de surface est donnée par :

$$s(x) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i (x_i - x_{d(i)}) \quad (\text{I.12})$$

Cette équation donnée sous forme de combinaison linéaire des variables d'états assure la convergence de ces variables x_i vers leurs références $x_{d(i)}$ par un choix adéquat des coefficients c_i .

Remarque I.2

- 1- Les coefficients de l'équation de surface sont les coefficients de l'équation caractéristique de système en régime glissant.
- 2- Il faut définir m surfaces de commutation (vecteur de surface) pour un vecteur d'entrée de dimension m (Cas multi variables).

I.6.2 Les conditions d'existence et de convergence

Pour qu'il y ait un régime glissant, il faut que la surface de glissement $s(x) = 0$ soit attractive. Géométriquement (dans le plan de phase) les vecteurs de vitesse f^+ et f^- doivent être dirigés vers elle comme vu à la figure I.8.c.

Ces conditions correspondent au mode de convergence du système

Nous retenons deux méthodes d'établissement des conditions d'existence

I.6.2.1 La loi directe de commutation

On peut exprimer lors de la phase d'atteinte du mode glissant $s(x) \neq 0$ la condition d'existence du mode glissant $s(x) = 0$

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s}(x) > 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s}(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Ou bien :

$$s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad (\text{I.14})$$

Cette condition d'attractivité a été proposée par Utkin [Utki 78] sous cette forme :

$$\begin{cases} s(x) > 0 & \text{si } \dot{s}(x) < 0 \\ s(x) < 0 & \text{si } \dot{s}(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

I.6.2.2 La fonction de Lyapunov

L'étude de l'existence du mode de glissement est pareille à l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre basée sur la deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

Le but est d'assurer que les trajectoires d'état vont atteindre effectivement la surface $s(x) = 0$

Soit la fonction scalaire de Lyapunov définie positive donnée ainsi :

$$v(x) = \frac{1}{2} s^t(x) s(x) \quad (\text{I.16})$$

Ou: $s(x)^t$ est la transposée de $s(x)$

La dérivée de cette fonction est donnée par :

$$\dot{v}(x) = s^t(x) \dot{s}(x) \quad (\text{I.17})$$

Pour que la surface $s(x) = 0$ soit attractive sur tout le domaine de fonctionnement il suffit que :

$$\dot{v}(x) < 0 \Rightarrow \dot{v}(x) = \dot{s}(x) s(x) < 0$$

On aura la même condition donnée par (I.14)

Tant que (I.14) est vérifiée, la dynamique du système sur la surface de commutation $s(x)$ ainsi que sa stabilité sont indépendante du système (I.4), elles dépendent uniquement des paramètres de la surface choisie.

Cette condition fondamentale (I.14) explique que le carré de la distance vers la surface de discontinuité mesuré par $s^2(x)$, diminue tout le temps en contraignant les trajectoires d'état du système à se diriger vers cette surface des deux cotés comme illustré dans la **Figure I.8.c**.

I.6.3 Détermination de la loi de commande

Une fois la surface de glissement est choisie et la condition de convergence est vérifiée, on construit une loi de commande pour assurer l'attraction des trajectoires d'état vers la surface de glissement $s(x) = 0$.

La loi de commande en mode de glissement est composée de deux grandeurs : une première dite **commande équivalente** calculée pour maintenir le régime glissant une fois atteint, une deuxième nommée **commande discontinue** chargée de contraindre ces états à se diriger vers cette surface cette dernière est très importante car elle est utilisée pour éliminer les effets d'imprécision du modèle et rejeter les perturbations.

La loi de commande est donnée par la relation suivante

$$u = u_{eq} + u_n \quad (\text{I.18})$$

Avec :

u_{eq} : La commande équivalente

u_n : La commande discontinue

En régime glissant la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qui n'a pour but que de maintenir les conditions de glissement

I.6.3.1 Commande équivalente (composante en basses fréquences)

La commande équivalente est une fonction continue linéaire, peut être interprétée comme étant la valeur moyenne que peut prendre u lors des commutations successives entre u^+ et u^- **figure I.12**

Elle est déterminée en résolvant l'équation du comportement dynamique du système durant le mode de glissement $\dot{s}(x) = 0$

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.19})$$

Alors $\dot{s}(x)$ s'écrit par :

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} (f(x) + g(x) u) = 0 \quad (\text{I.20})$$

De l'équation (1.20) on tire l'expression de u

$$u = u_{eq} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \quad (\text{I.21})$$

Pour que la commande équivalente existe : $\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right) \neq 0$

On exprime la dynamique du système sur la surface de glissement par :

$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} f(x)\right) \quad (\text{I.22})$$

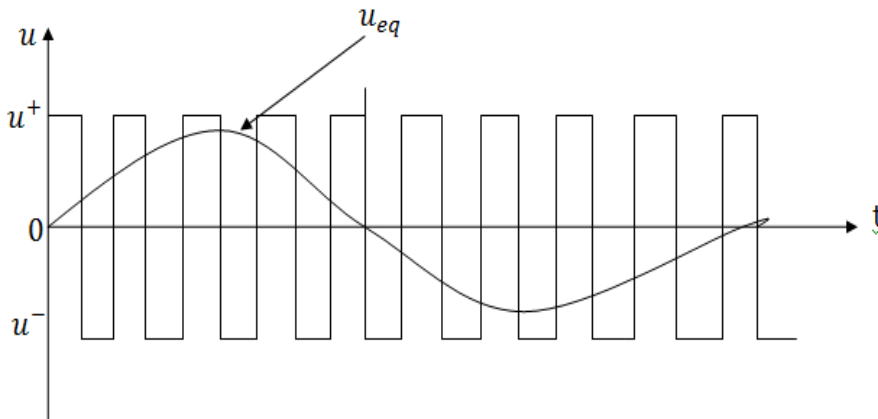


Figure I.12 : la commande équivalente

Le système est supposé en mode de glissement idéal, la commande équivalente garantit le maintien des trajectoires d'état sur ce mode, or en pratique les effets des imprécisions du modèle ou les perturbations extérieures feront quitter ces trajectoires de la surface, d'où la nécessité d'une commande discontinue dite à hautes fréquences pour compenser ces incertitudes.

I.6.3.2 Commande discontinue (composante en hautes fréquences)

Pour maintenir la trajectoire d'état sur la surface de commutation et satisfaire la condition de convergence :

On remplace l'expression de u_{eq} dans (I.18) on obtient :

$$u = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) + u_n \quad (I.23)$$

On remplace l'expression de u dans l'expression de $\dot{s}(x)$ on obtient :

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} \left(f(x) - g(x) \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) + g(x) u_n \right) \quad (I.24)$$

Après un bref calcul on aura

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} g(x) u_n \quad (I.25)$$

On a

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial u_n} = \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \neq 0 \quad (I.26)$$

Condition bien définie dans le choix de la surface de glissement pour assurer la commandabilité

Pour assurer la condition de l'attractivité :

$$\dot{s}(x)s(x) < 0 \Rightarrow s(x) \frac{\partial s}{\partial x} g(x) u_n < 0 \quad (I.27)$$

Il suffit que u_n soit de signe opposé à $s(x) \frac{\partial s}{\partial x} g(x)$

La solution la plus simple vérifiant cette condition est de la forme :

$$u_n = -k \text{ signe}(s(x)) \quad (I.28)$$

k : Gain positif

$\text{signe}(\cdot)$: La fonction signe

$$k \text{ signe}(s(x)) = \begin{cases} +k & \text{si } s(x) > 0 \\ 0 & \text{si } s(x) = 0 \\ -k & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (I.29)$$

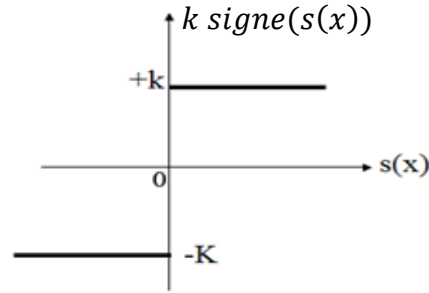


Figure I.13: la fonction signe

Par conséquent, la loi de commande par modes de glissement est donnée par la relation Suivante :

$$u = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} f(x)\right) - k \operatorname{signe}(s(x)) \quad (\text{I.30})$$

D'autres expressions de la commande discontinue ont été proposées:

$$1- u_n = \alpha \cdot \dot{e} + \gamma \cdot \operatorname{signe}(s) \quad (\text{I.31})$$

$$2- u_n = (\alpha \cdot |e| + \beta |\dot{e}| + \gamma) \cdot \operatorname{signe}(s) \quad (\text{I.32})$$

Remarque I.3

Cette démarche pour la détermination de la loi de commande est applicable pour les systèmes mono variables comme pour les systèmes multi variables. Pour ce dernier cas Le calcul de u_{eq} solution de $\dot{s}(x) = 0$ nécessite une partie de découplage afin d'obtenir m sous systèmes tel que : $\dot{s}(x_i) = u_{n_i}$ (avec $i = 1 \dots m$).

I.7 Propriétés de Robustesse

L'une des caractéristiques importantes de la commande par modes glissants est sa robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures et des incertitudes paramétriques.

Afin de mieux expliquer cette caractéristique, considérons le système perturbé suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x) \quad (\text{I.33})$$

Avec : $p(x)$ représente l'effet des incertitudes paramétriques et des perturbations extérieures sur le modèle

Sur la surface de glissement la robustesse du régime glissant vis-à-vis des perturbations est donnée par le théorème suivant :

Théorème I.1 : [Drazenovic]

Le régime glissant sur l'ensemble du système perturbé (I.33) est invariant vis-à-vis des perturbations $p(x)$ si et seulement si cette perturbation vérifie la condition suivante :

Le vecteur de perturbation $p(x)$ est engendré par $g(x)$

Donc :

$$p(x) \in \text{span} \{g(x)\} \quad (\text{I.34})$$

La condition (I.34) est appelée condition de recouvrement ou « **matching condition** » [Ramirez].

La commande équivalente calculée pour le système perturbé (I.33) est donnée par :

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} p(x) + \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \right) \quad (\text{I.36})$$

En substituant u_{eq} dans le système perturbé (1.34) :

$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} p(x) + \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \right) \right] + p(x) \quad (\text{I.37})$$

Avec :

$$p(x) = g(x) \alpha(x) \quad (\text{I.38})$$

$$\alpha(x) > 0$$

$$\dot{x} = f(x) - g(x) \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x) \alpha(x) + \frac{\partial s}{\partial x} f(x) \right) + \alpha(x) \right] \quad (\text{I.39})$$

On voit bien que la dynamique des trajectoires d'état du système est indépendante de l'expression des perturbations donc invariante vis-à-vis des incertitudes $p(x)$, d'où la robustesse de la commande par modes de glissement est bien vérifiée.

On verra dans l'exemple illustratif qui suivra dans ce chapitre que les pôles du système en boucle fermée dépendent des paramètres de la loi de surface et non du système, ainsi on conclut que la commande par modes glissants est également robuste par rapport aux variations des paramètres du système. En revanche, elle présente un phénomène indésirable dit réticence

I.8 Phénomène de réticence

En pratique, la commande discontinue peut exciter les dynamiques hautes fréquences non modélisées, qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle « **réticence** » ou « **broutement** » connu en anglais sous le nom « **chattering** » et se caractérise par de fortes oscillations autour de la surface.

Ce phénomène de réticence apparait car la commutation de la commande ne se fait pas à une fréquence infinie à cause des imperfections physique (les retards, limitation physique des actionneurs....etc.)

Pendant les premières années de son apparition la commande par modes glissants a été entravée par ce phénomène qui peut provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande, augmenter la consommation de l'énergie et voire engendrer l'instabilité du système en excitant des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation.

On peut illustrer ce phénomène de réticence par la **figure I.14** suivante :

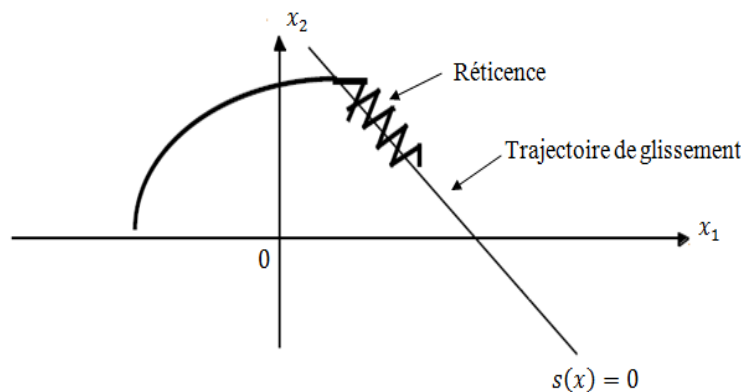


Figure I.14: le mode glissement avec réticence

Actuellement, de nombreuses solutions ont été développées [slot84], [Bond85], [Dra90] afin d'éliminer ou au moins réduire ce phénomène :

- 1- Remplacer la fonction $\text{signe}(s(x))$ par des fonctions sigmoïdes qui sont lisses (douces, **smooth** en anglais), telle que : les fonctions $\frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{s}{w}\right)$, $\tanh\left(\frac{s}{w}\right)$, $\frac{s}{|s|+w}$ ect
- 2- Remplacer la fonction $\text{signe}(s(x))$ par la fonction saturation représentée par la **figure I.15**

$$\text{sat}\left(\frac{s}{w}\right) = \begin{cases} \frac{s}{w} & \text{si } |s| \leq w \\ \text{signe}(s) & \text{si } |s| > w \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

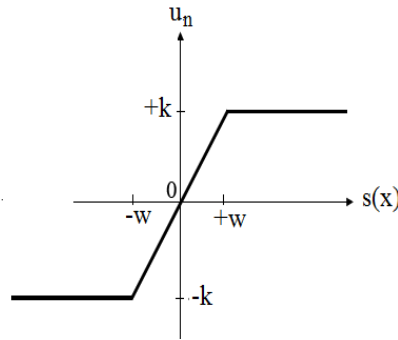


Figure I.15: la fonction saturation

Avec w représente l'épaisseur du voisinage de la surface dans lequel les composantes hautes fréquences sont filtrées, comme le seuil w est grand, il y a moins de commutation, mais plus la précision diminue. ainsi le développement d'une méthode par modes glissants nécessite un compromis entre la robustesse et les performances.

- 3- Utiliser des commandes à gain décroissant définies par $u = -k|s|^\alpha \text{signe}(s)$ où la commande diminue en amplitude à mesure que l'on s'approche de la surface de glissement.

Aussi pour cette méthode la précision, la robustesse et le temps de réponse sont dégradés.

- 4- Les modes glissants d'ordre supérieur (**higher order sliding en anglais**):

Cette méthode récente a été introduite dans les années 80 par [Levantovsky] et [Emelyanuv] consiste à introduire de nouvelles dynamiques dans la commande ainsi le problème de discontinuité dû à l'élément de commutation est déplacé sur les dérivées d'ordre supérieur de la commande.

Dans ce cas on contraint le système à évoluer sur la surface $s(x) = 0$ et maintenir ses $(p - 1)$ premières dérivées successives à zéro $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(p-1)} = 0$ où p désigne l'ordre du mode glissant et il fixe le degré de douceur du système, il est choisi supérieur ou égal au degré relatif de système.

Cette technique très efficace présente les avantages suivants:

- Préservation des caractéristiques de robustesse, de précision vues dans la loi de commande glissante d'ordre un.
- Elimination de la réticence
- Amélioration des performances de la commande

Cependant l'inconvénient majeur pour l'implémentation des algorithmes p- glissants est que le nombre d'informations nécessaires augmente avec l'ordre du régime glissant.

I.9 Exemple d'application de la commande par mode de glissement :(sliding-mode control)

A ce stade de notre étude, il nous a semblé utile d'effectuer un essai de simulation de la commande à structure variable en vue de confirmer les résultats théoriques prévus par la théorie.

On considère le système linéaire décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \quad (\text{I.41})$$

$$y = s(x) = [k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

x_1, x_2 : Sont les variables d'état

u : est la commande

y : est la sortie du système

L'objectif à travers cet exemple est d'illustrer les caractéristiques de la commande par modes glissants vues précédemment et de synthétiser une loi de commande robuste pour ce système, et c'en procédant par calcul ensuite faire des simulations sous le logiciel **Matlab.7**, et tirer des conclusions.

I.9.1 choix de la surface de commutation

On définit la loi de commutation par :

$$s(x) = k_1 x_1 + k_2 x_2 \quad (\text{I.42})$$

Avec : k_1 et k_2 sont des coefficients positifs

Sans perte de généralité, on prend $k_2 = 1$

$$s(x) = k_1 x_1 + x_2$$

En régime glissant : $s(x) = \dot{s}(x) = 0$

On dérive $s(x)$ on obtient :

$$\dot{s}(x) = k_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$$

On remplace $\dot{x}_1$ dans l'expression de $\dot{s}(x)$ on trouve :

$$k_1 x_2 + \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_2(0) \exp(-k_1 t) \quad (\text{I.43})$$

Pour que la trajectoire d'état x_2 atteigne zéro il faut que $k_1 > 0$

Pour une condition initiale $x_2(0) = 1$

On trace la courbe de la variable d'état pour différentes valeurs de k_1

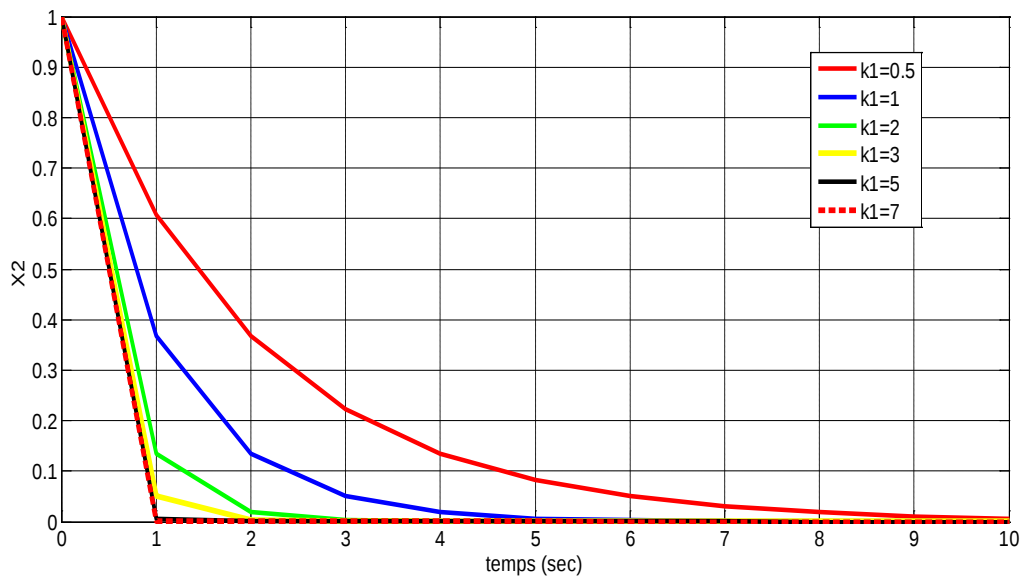


Figure I.16 : Courbe représentative de la fonction $x_2 = \exp(-k_1 t)$

A partir de cette courbe, on fait le choix de $k_1 = 2$

Donc : $s(x) = 2x_1 + x_2$

I.9.2 synthèse de la loi de commande

I.9.2.1 commande équivalente

On dérive l'équation (1.42)

$$\dot{s}(x) = k_1 \dot{x}_1 + k_2 \dot{x}_2$$

On remplace $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ on trouve :

$$\dot{s}(x) = k_1 x_2 + k_2 (a_0 x_1 + a_1 x_2) + k_2 b u \quad (\text{I.44})$$

En mettant $\dot{s}(x) = 0$ on trouve

$$u_{eq} = \frac{1}{k_2 b} (-k_1 x_2 - a_0 k_2 x_1 - a_1 k_2 x_2) \quad (\text{I.45})$$

La forme de la commande est donnée par :

$$u = u_{eq} + u_n$$

$$u = u_n + \frac{1}{k_2 b} (-k_1 x_2 - a_0 k_2 x_1 - a_1 k_2 x_2) \quad (\text{I.46})$$

On remplace l'expression de u dans (1.44)

$$\text{On trouve : } \dot{s}(x) = u_n = -k \operatorname{sign}(s(x))$$

On remplace u par u_{eq} dans le modèle d'état (1.41)

On obtient le modèle d'état du système en régime glissant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_1}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.47})$$

On voit bien que ce modèle est libre, indépendant de la loi de commande qui n'a pour but que de maintenir ce régime, sa matrice d'état est singulière ayant deux valeurs propres ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{-k_1}{k_2}$)

Ce modèle (I.47) permet d'étudier l'évolution des variables d'état du système sur la surface de commutation, la présence d'un pôle à zéro ($\lambda_1 = 0$) s'explique par le fait que la trajectoire d'état est amenée à évoluer sur la surface de commutation, la seconde valeur propre ($\lambda_2 = \frac{-k_1}{k_2}$) exprime le temps de glissement qui permet de fixer la dynamique avec laquelle la trajectoire d'état va atteindre le point d'équilibre.

La dynamique du système en mode de glissement ne dépend que des paramètres de la loi de commutation, ainsi la robustesse vis-à-vis variations paramétriques est vérifiée

1.9.2.2 commande discontinue

Supposant le modèle perturbé de la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} f$$

$$y = sx = [k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ε représente l'amplitude de la perturbation f

L'expression de u_{eq} devient :

$$u_{eq} = \frac{1}{k_2 b_1} (-k_1 x_2 - a_0 k_2 x_1 - a_1 k_2 x_2 - \varepsilon)$$

Pour que le système rejette la perturbation, il faut satisfaire la condition suivante :

$$k > \max \left| \frac{\varepsilon}{k_2 b} \right| \quad (\text{I.48})$$

I.9.3 Conditions de convergence et d'existence

Pour qu'un mode de glissement existe, il est nécessaire qu'une fois que la trajectoire d'état a atteint la surface de commutation, la commande l'y maintient, il faut alors vérifier que la condition de convergence $s(x)\dot{s}(x) < 0$ est satisfaite. On a trouvé précédemment :

$$\dot{s}(x) = u_n$$

$$u_n = -k \text{ signe } s(x)$$

$$\text{D'où : } s(x)\dot{s}(x) = s(x)(-k \text{ signe } s(x)) \quad (\text{I.49})$$

Alors : quelque soit le signe de $s(x)$ la condition de convergence est bien vérifiée. On conclut que le système est stable.

I.9.4 Résultats de simulation numérique

Les valeurs numériques des paramètres du système (a_0 , a_1 et b_1) sont données respectivement : (−0.5, −0.25 et 0.5)

La commande équivalente est donné par :

$$u_{eq} = \frac{1}{0.5} (-2x_2 + 0.5x_1 + 0.25x_2)$$

Nous analyserons le comportement dynamique du système en se basant sur les résultats de simulation donnés sur les figures **I.17.a**, **I.17.b**, **I.17.c**, et **I.17.d**.

D'après les courbes de la **figure I.17.a** : on constate que le système se déplace de l'état initial vers la surface de glissement, et glisse sur elle jusqu'à atteindre le point d'équilibre, donc on peut déduire que le régime transitoire du système égal à la somme du mode de convergence et du mode de glissement, et le régime permanent correspond à l'atteinte du point d'équilibre situé sur cette surface. En effet on peut diminuer la durée du régime transitoire du système en diminuant le temps de convergence ou de glissement. Ce régime glissant est atteint après un certain temps dit temps de glissement égal à $2sec$, selon les courbes des états et de commande. De la courbe de u_{eq} on vérifiée la condition de convergence : $u^- \leq u_{eq} \leq u^+$

La présence du phénomène de réticence en hautes fréquences entrave la loi de commande, il est dû au terme de discontinuité.

D'après les courbes de la **figure I.17.b** : en augmentant le gain de la commande discontinue, le système converge toujours vers son point d'équilibre mais avec un temps de glissement plus petit : $1.5sec$, le système devient plus rapide. La bande d'apparition du phénomène du broutement augmente d'où l'inconvénient d'augmentation du gain de la fonction signe.

Dans la **figure 1.17.c**, on vérifie la robustesse du système vis-à-vis des perturbations gaussiennes.

Pour ceci, nous simulons le système avec l'ajout du bruit gaussien sur les variables d'état ; Les courbes de celles-ci montrent bien que le système atteint le point d'équilibre au régime glissant avec le même temps de glissement $2 sec$, le système est stable et rapide, la condition de convergence est toujours vérifiée, d'où la perturbation n'a pas affecté la commande, on déduit que la condition de recouvrement est vérifiée est le système est insensible à cette perturbation gaussienne.

Dans la **figure I.17.d** : l'ajout d'une variation paramétrique de 30% sur les paramètres a_0 et a_1 du modèle permet d'illustrer la robustesse de cette technique, car on garde toujours les mêmes performances que précédemment. On conclut que le système est insensible aux variations paramétriques

Dans la **figure I.17.e** : on essaye d'atténuer le phénomène de réticence en remplaçant la fonction signe par la fonction de saturation.

Les courbes de la commande totale et de saturation montrent bien que ce phénomène est bien réduit. Le système converge toujours vers son point d'équilibre mais avec un temps de glissement supérieur ($3sec$)

Donc le système est stable mais devenu lent

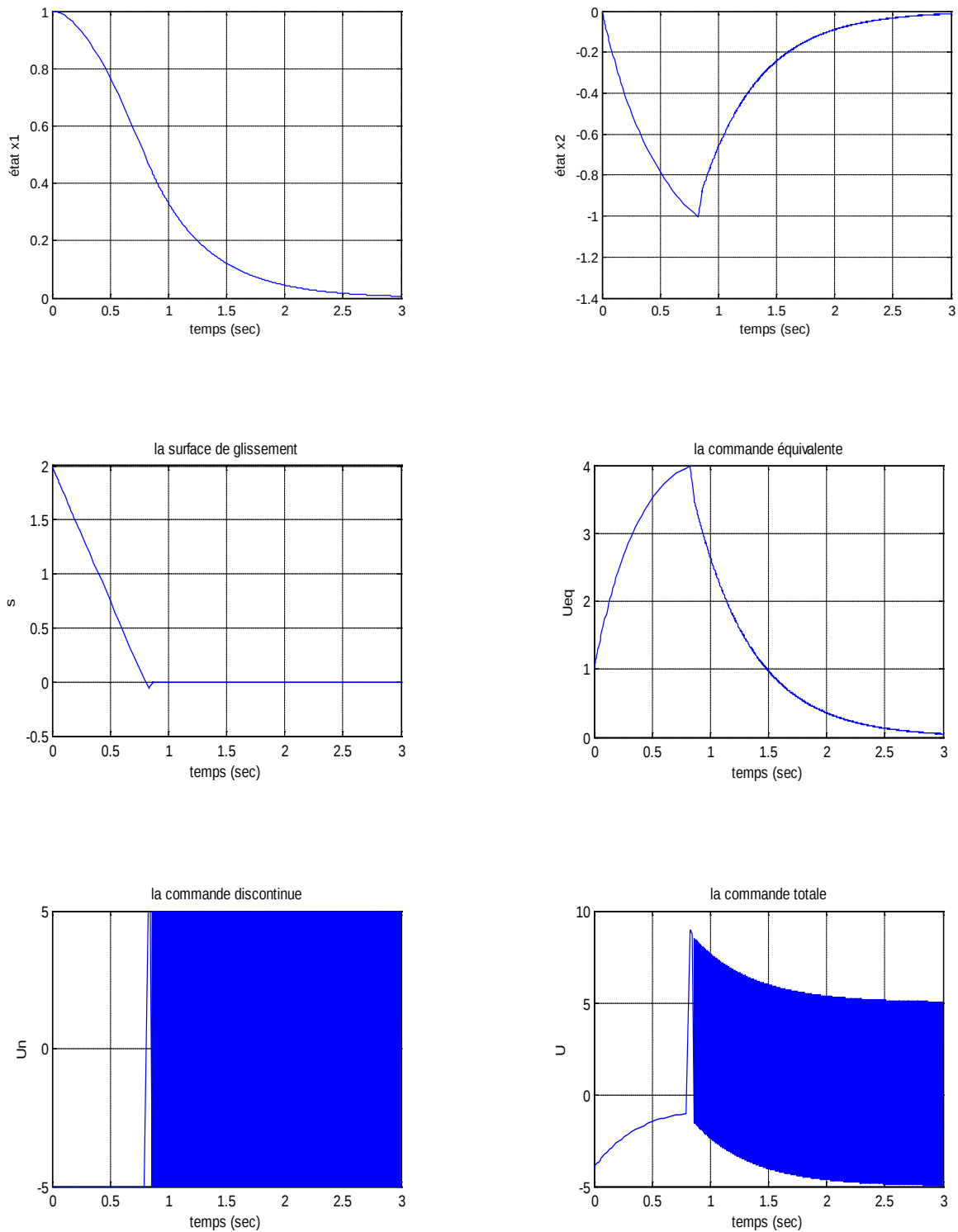


Figure I.17.a: réponse du système pour $u = u_{eq} - k \text{ signe}(s)$ et $k_1 = 2, k_2 = 1, k = 5$

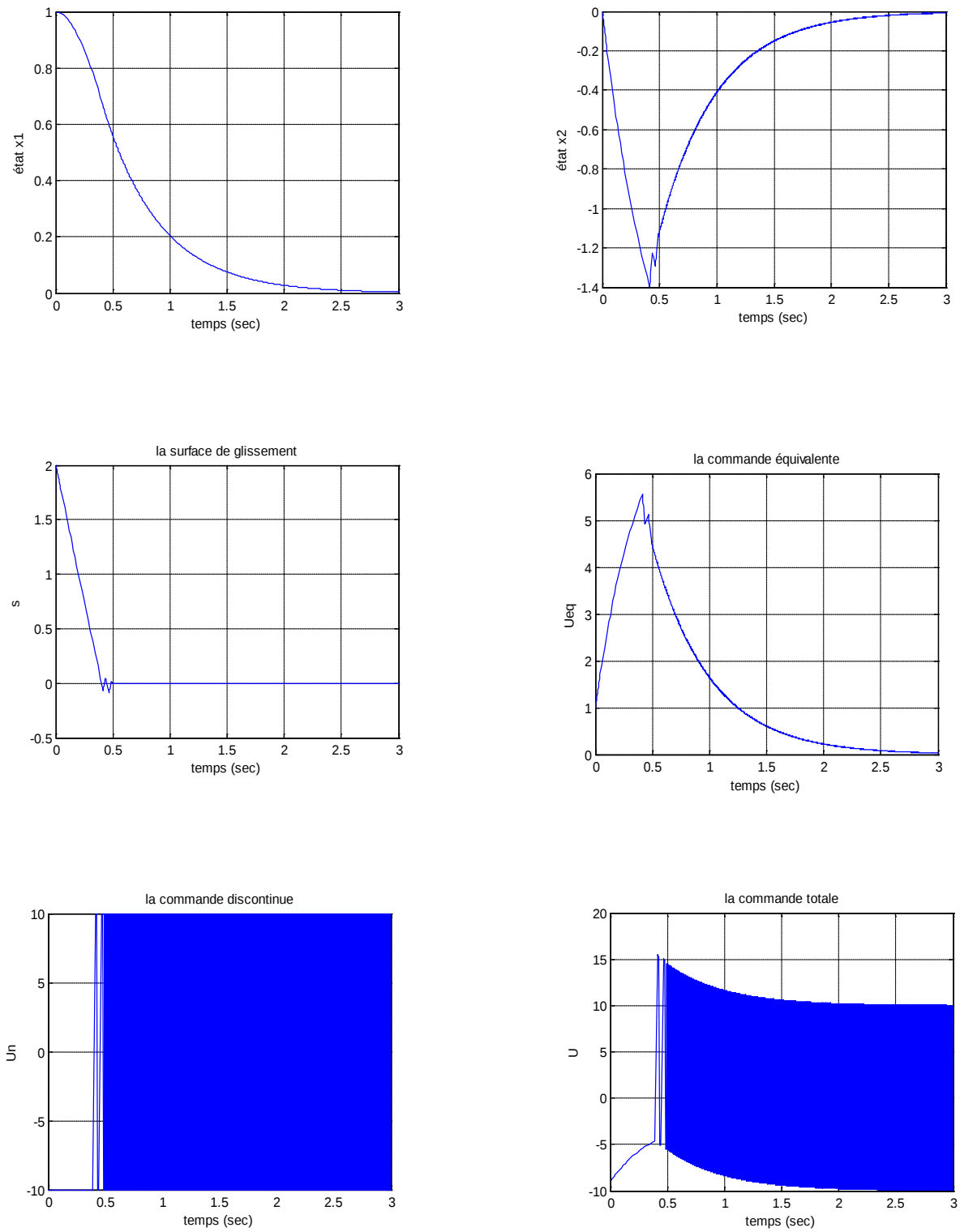


Figure I.17.b : réponse du système pour $u = u_{eq} - k \operatorname{sign}(s)$ et $k_1 = 2, k_2 = 1, k = 10$

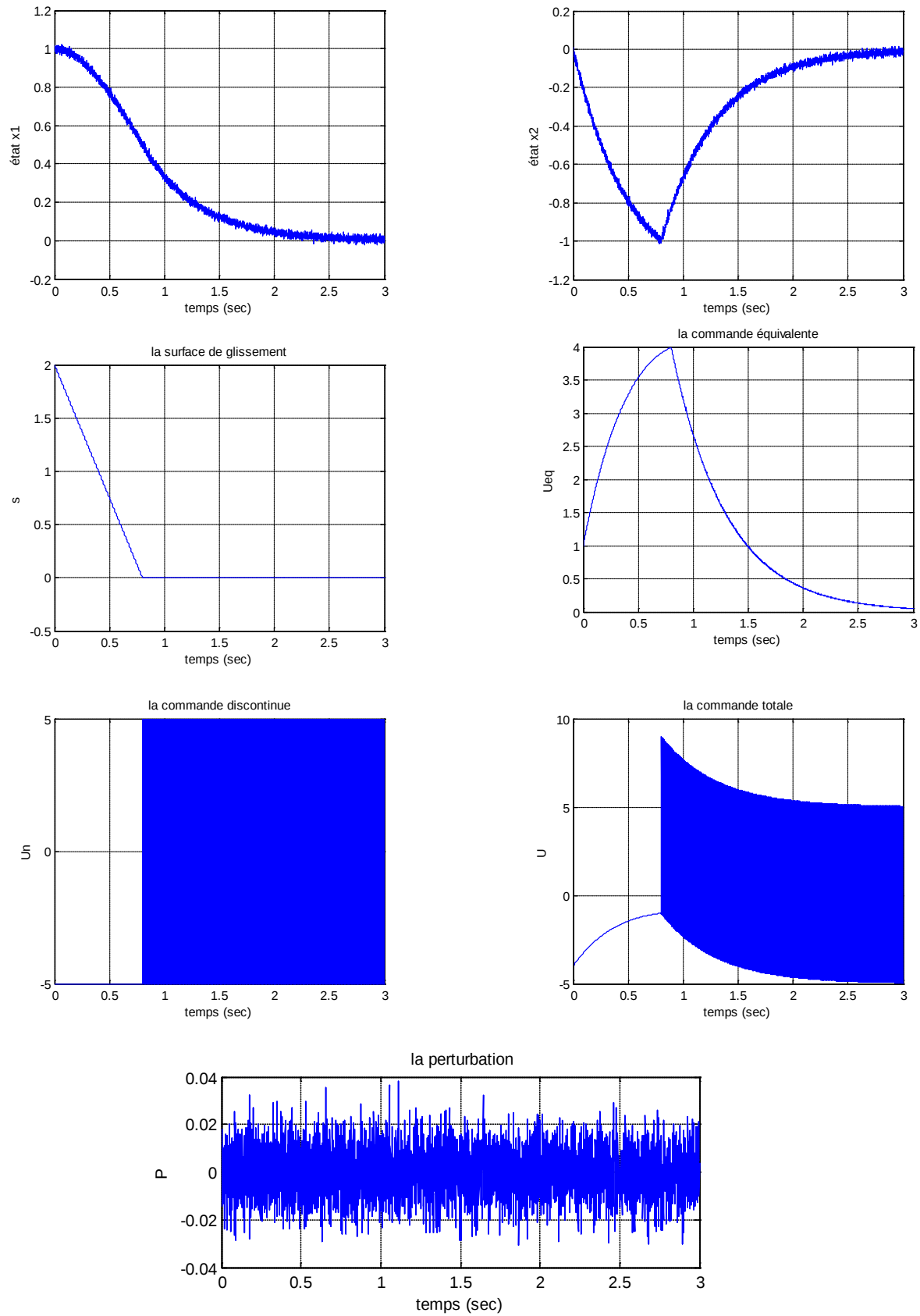


Figure I.17.c : réponse du système pour $u = u_{eq} - k \text{ signe}(s)$ et $k_1 = 2, k_2 = 1, k = 5$ avec une perturbation gaussienne appliquée sur les états

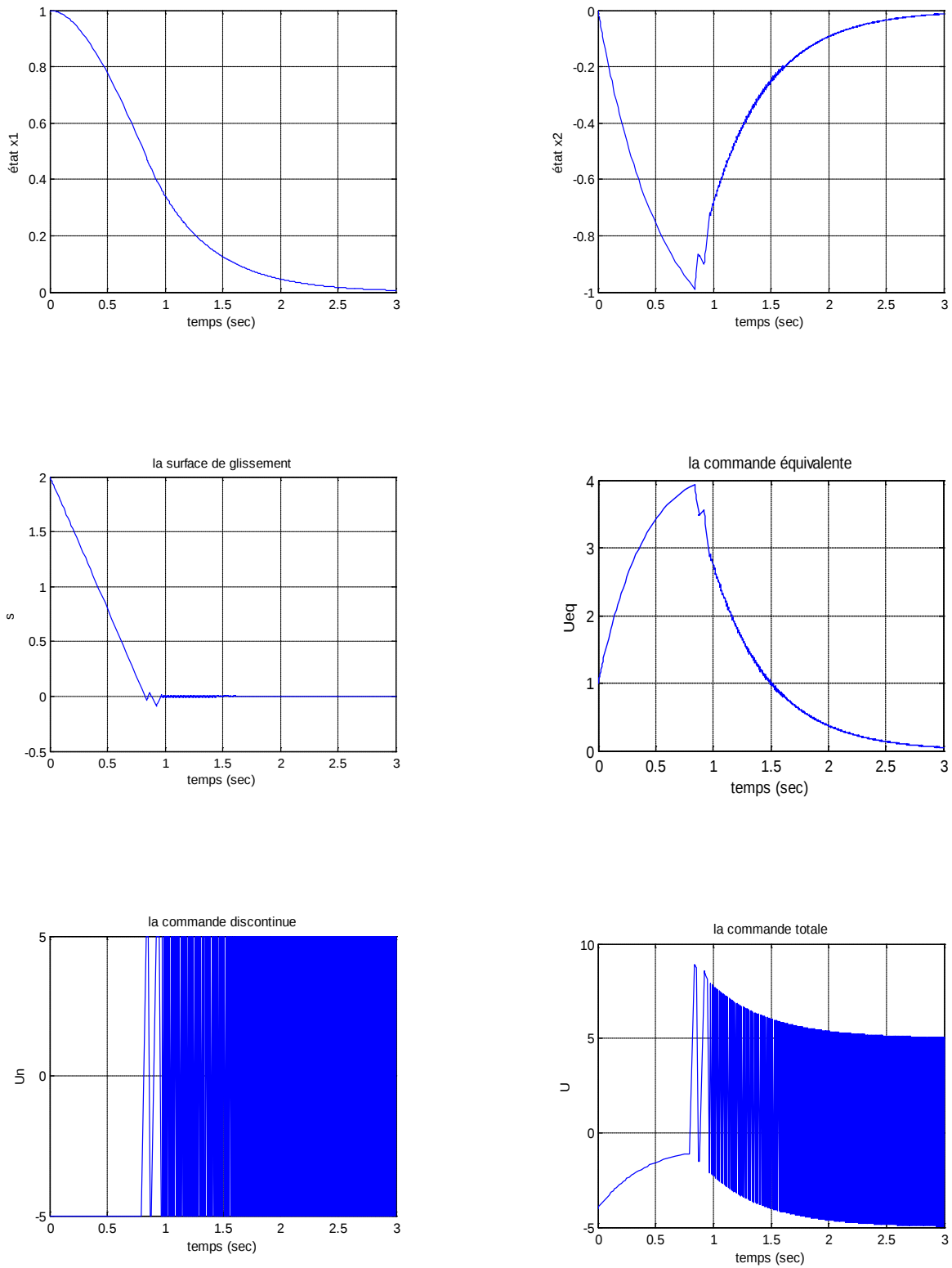


Figure I.17.d : réponse du système pour $u = u_{eq} - k \text{ signe } (s)$ et $k_1 = 2, k_2 = 1, k = 5$ avec une incertitude paramétrique de -30% sur a_0 et a_1

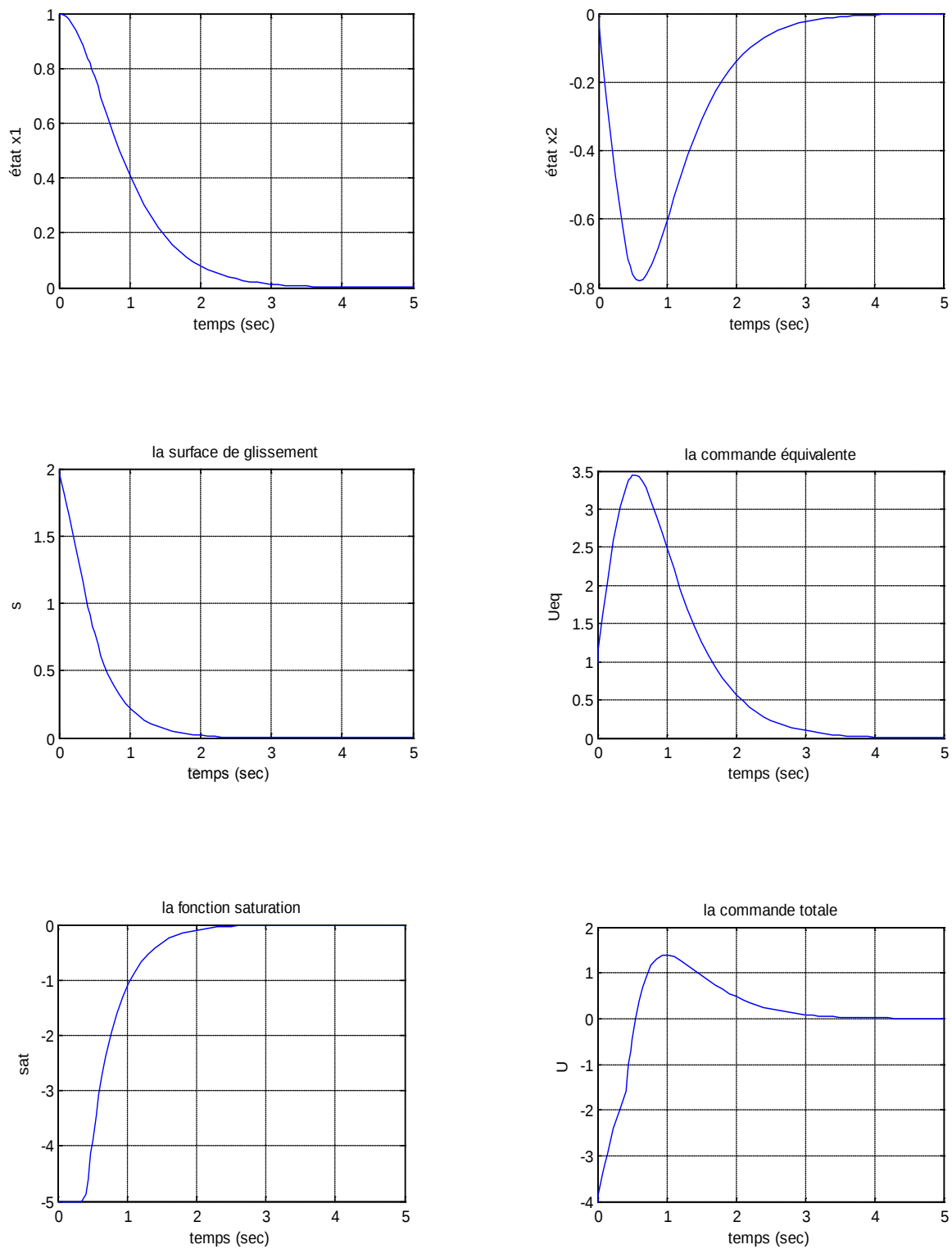


Figure I.17.e : réponse du système pour $u = u_{eq} - k \text{ sat}(s)$ et $k_1 = 2, k_2 = 1, k = 5$

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre ,nous nous sommes intéressés à présenter des rappels théoriques sur la commande des systèmes à structure variable et les modes glissants associés. En premier lieu nous avons introduit des généralités concernant ce type de système [SSV], nous avons illustré avec un exemple l'interret majeur apporté par cette commande[CSV], ensuite nous avons opté pour la méthode de la commande équivalente proposée par Utkin [Utki78, Utki92] pour déterminer le regime glissant, par ailleurs établir la loi de commande qui se réalise en trois étapes (choix de la surface de discontinuité, vérification des conditions d'existence et de convergence, calcul des grandeurs de commande) , la robustesse de la commande par mode de glissement a été bien mise en évidence par la verification des **conditions de recouvrement**.

L'apparition du phénomène de réticence est du à la présence du terme discontinu dans la commande totale pour y remédier plusieurs méthodes ont été évoquées . En dernier lieu une application d'un système du second ordre a été faite avec des résultats de simulation commentés pour mettre en évidence ces définitions et ces propriétés.

A partir du contenu de ce chapitre, on conclut que la commande par modes glissants presente des avantages majeurs pour l'automatique :

- Bien adapté aux éléments de l'électronique de puissance (convertisseurs de puissance).
- Robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation ou d'identification.
- Réduction de l'ordre du système.
- Bonne dynamique : rapidité, stabilité.

En revanche, elle présente deux inconvenients :

- le Phénomène de réticence qui a limité l'utilisation de cette commande pendant les premières années de son apparition, actuellement de nombreuses solutions ont été proposées mais elles aussi présentent des inconvenients que se soit la degradation de la robustesse et la rapidité du système ou l'augmentation du nombre d'informations nécessaires avec l'ordre du régime glissant pour l'implémentation des algorithmes des modes glissants d'ordre supérieur.
- Utilisation des dérivées des grandeurs à regler pour la détermination de la loi de commutation.

II.1 Introduction

Durant ces dernières décennies, nous observons un nombre croissant de travaux de recherche sur l'application de la dérivation non entière et du calcul fractionnaire dans beaucoup de domaines des sciences et des technologies tels que : le domaine thermique, mécanique, domaine de la chimie, de l'Electrotechnique, de la Robotique, ainsi que la Biologie, le Biomédical, l'Economie et les finances.

Le calcul fractionnaire est utilisé aussi en Automatique, notamment dans la modélisation des systèmes dont le comportement peut être régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et aussi pour la synthèse des systèmes de commande.

En modélisation, cette théorie se montre très utile pour une bonne représentation et donc une meilleure compréhension d'une grande gamme de procédés qui présentent des phénomènes de relaxation, de diffusion et de viscoélasticité, ainsi que les phénomènes qui sont fortement conditionnés par la géométrie du problème. Ces systèmes sont caractérisés par les propriétés de mémoire longue et de dimension infinie (systèmes à paramètres distribués), le calcul fractionnaire permet une représentation plus compacte en mettant en jeu un nombre de paramètres réduits.

Dans la synthèse des systèmes de commande, l'introduction de la dérivation et de l'intégration non entière a ouvert un nouvel horizon dans la conception des régulateurs robustes. En effet, en plus des paramètres classiques de conception comme les constantes proportionnelle, d'intégration et de dérivation, les ordres non entiers sont des degrés de liberté supplémentaires qui offrent la possibilité d'atteindre des performances en robustesse meilleures, parmi les régulateurs robustes d'ordre non entier, on cite le régulateur CRONE proposé par Oustaloup, et le $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire proposé par Podlubny.

Il est à noter que l'identification des systèmes en utilisant le calcul fractionnaire est un sujet de nombreux travaux de recherche, qui attire continuellement l'attention de plus d'automaticiens.

Dans ce chapitre nous donnerons un aperçu général sur le calcul fractionnaire qui nous servira dans le chapitre suivant pour synthétiser une loi de commande pour notre système.

Nous commencerons par introduire un bref historique sur le calcul fractionnaire, rappeler les différentes définitions et propriétés liées à la dérivation non entière, les modes de représentation des systèmes d'ordre fractionnaire à savoir l'équation différentielle, la fonction de transfert, seront

exposés brièvement, ensuite rappeler les différentes approximations développées pour la simulation et l'implémentation numérique de ces modèles.

L'analyse de la stabilité des systèmes fractionnaires sera donnée par la condition de Matignon,

L'apport de la commande d'ordre fractionnaire du point de vue robustesse des régulateurs non entiers sera mis en évidence en illustrant les propriétés du correcteur $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire. Enfin, un exemple de simulation de la réponse indicielle d'un système d'ordre fractionnaire et celle d'un système entier sera fait afin de comparer les performances de chacun.

II.2 Historique

L'idée de la dérivation d'ordre non entier date des correspondances qui se sont déroulées entre L'Hôpital et Leibnitz en 1695, lorsque L'Hôpital posa la question « Qu'en est il si $n = \frac{1}{2}$? ». Leibnitz qui est l'inventeur de la notation de dérivation $\frac{d^n x}{d^n y}$ répondit à cette question : « le résultat de $d^{1/2}x$ sera égal $x\sqrt{dx:x}$ qui dans la notation moderne représente $\frac{d^{1/2}x}{x^{1/2}} = 2\sqrt{x/\pi}$, un paradoxe duquel des résultats utiles seront tirés ».

Les premières contributions théoriques reviennent au début du 18^{ème} siècle, après les travaux de Gottfried Willem Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard, le calcul fractionnaire commence à être étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme Laplace (1812), Fourier (1822), Riemann (1847), Abel (1823-1826), Liouville (1832,1873), Leitneikov (1868,1872), sans oublier Grunwald et Krug qui étaient les premiers à unifier les résultats de Riemann et Liouville

Le paradoxe des définitions proposées et l'absence d'une interprétation physique et géométrique claire de la dérivation d'ordre non entier ont longtemps été des entraves du progrès des recherches sur le calcul fractionnaire.

Au début du 20^{ème} siècle, des travaux sur l'application ainsi que la théorie du calcul fractionnaire se sont apparus et dirigés par des chercheurs comme Weyl et Hardy sur les propriétés de l'opérateur intégral-différentiel, Erdély sur les équations avec des intégrales, Riesz sur les fonctions à plus d'une variable, Scott Blair en Rhéologie et Oldham et Spanier en Electrochimie.

La première conférence internationale sur le sujet s'est tenue en 1974, à l'université de New Haven aux états unis, il ya eu l'ouverture de nouveaux questionnements scientifiques approfondis

sur le thème. Depuis des congrès aussi importants que l'IFAC organisent régulièrement des sessions spéciales sur la dérivation non entière et ses applications. En 2004 un workshop a été créé, dédié au calcul fractionnaire ; il se déroule tous les deux ans. Des revues scientifiques et des articles se publient presque continuellement sur le thème.

Aujourd'hui, on assiste toujours au progrès continu des applications du calcul fractionnaire motivé principalement par les applications de l'ingénierie dans les domaines de la théorie des systèmes, traitement du signal et la commande par feedback.

II.3 Opérateurs d'ordre non entier et propriétés

La dérivation d'ordre non entier est la généralisation de la fonction de dérivation classique à des ordres non entiers quelconques (réels ou complexes) qui relèvent principalement des travaux de Riemann et Liouville [Old74], [Mil93]. Notre travail portera sur la définition de la dérivation d'ordre réel. Quelques résultats théoriques sur la dérivation d'ordre complexe seront donnés à l'annexe A

II.3.1 Intégration d'ordre non entier

Soit une fonction réelle $f(t)$, de la variable réelle t , continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$, notée $I^k f(t)$ s'exprime par la formule de Cauchy suivante :

$$\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt_1 = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{(k-1)} f(\tau) d\tau \quad (\text{II.1})$$

k : doit être un nombre entier positif à cause de l'utilisation de la fonction factorielle qui n'a de sens que pour les valeurs positives entières

Pour généraliser la formule de Cauchy à un nombre réel positif ($\alpha \in \mathcal{R}_+$), Riemann a proposé de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma définie comme suit

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Avec } \Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(0_+) = +\infty$$

Les propriétés de la fonction gamma seront exposées à l'annexe A

On obtient alors la fonction d'intégration sous cette forme

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau \quad (\text{II.3})$$

L'intégrale unilatérale d'ordre réel (II.3) est appelée l'intégrale de Riemann Liouville car Liouville a aussi proposé la même définition mais en remplaçant la borne inférieure d'intégration par $(-\infty)$, dans ce cas l'intégration est dite bilatérale

Pour $\alpha = 1$ on aura l'expression de l'intégration classique

$$I^1 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{(1-1)} f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad (\text{II.4})$$

L'équation (II.3) peut être réécrite sous la forme d'un produit de convolution

$$I^\alpha f(t) = p_\alpha(t) \otimes f(t) \quad (\text{II.5})$$

Avec : $\otimes$ produit de convolution

$$p_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{Fonction causale nommée par Oustaloup **facteur d'oubli**}$$

Si l'intégration classique de la fonction $f(t)$ correspond à l'aire délimitée par la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[t_0, t]$, en attribuant à toute valeur de $f(t)$ le même poids. La valeur de l'intégration d'ordre non entier peut alors être interprétée comme l'aire délimitée par la fonction $f(t)$ pondérée par le facteur d'oubli **Figure II.1** et l'axe des abscisses, sa valeur en un point t est plus influencée par les points de son voisinage que par les points plus éloignés, ainsi les valeurs les plus récentes ayant plus de poids que les anciennes. Cette prise en compte du passé montre bien l'aptitude naturelle de cet opérateur à décrire les phénomènes à mémoire longue.

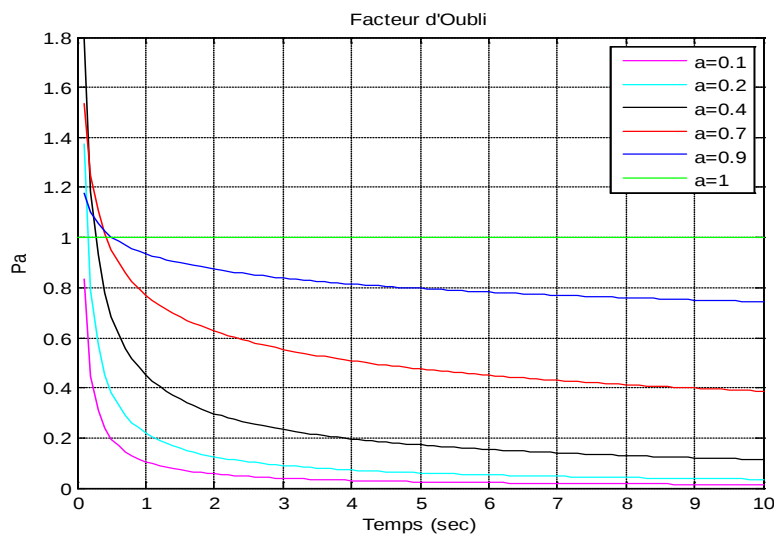


Figure II.1 : variation du facteur d'Oubli pour différents valeurs de l'ordre de dérivation α

L'intégration d'ordre non entier présente les mêmes propriétés connues pour l'intégration classique

1- intégration à un ordre $\alpha = 0$ est l'opérateur identité

$$I^0 f(t) = f(t)$$

2- L'opérateur d'intégration fractionnaire vérifie la propriété du semi groupe [SAM et AL, 1993]

$$I_{t_0}^\alpha I_{t_0}^\beta = I_{t_0}^{\alpha+\beta} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R}_+ \quad \text{Qui implique la propriété de commutativité}$$

$$I^\alpha I^\beta = I^\beta I^\alpha$$

II.3.2 Dérivation d'ordre non entier

Elle est obtenue à partir de l'expression de l'intégration non entière donnant ainsi la définition de **Riemann - Liouville** et celle de **Caputo**, ou bien à partir de l'expression de l'intégration usuelle donnant la définition de **Grunwald -Leitnikov**. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions

Nous désignons un nombre entier positif n telle que : $n - 1 < \alpha < n$ (II.6)

II.3.2.1 Dérivation non entière au sens de Riemann-Liouville

C'est la définition la plus connue et la plus répandue, elle est obtenue en deux étapes :

- 1- Intégrer d'abord la fonction $f(t)$ à l'ordre non entier $n - \alpha$
- 2- Dériver le résultat ainsi obtenu à l'ordre entier n

Son expression mathématique est donnée par

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{(n-\alpha-1)} f(\tau) d\tau \right\} \quad (II.7)$$

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{ I_{t_0}^{n-\alpha} f(t) \}$$

${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$: Cette notation symbolise la dérivée d'ordre non entier α par rapport au temps de la fonction $f(t)$ selon la définition de Riemann-Liouville dans l'intervalle du temps $[t_0, t]$

Exemple d'illustration

On considère la dérivation à l'ordre ($\alpha = 2.3$) d'une fonction $f(t)$ au moyen de la définition (II.7).

On utilise l'inégalité (II.6) pour calculer l'entier positif n . Soit $n = 3$

On fait l'intégration de $f(t)$ à l'ordre ($n - \alpha = 0.7$) ensuite la dérivation de la fonction résultante ($f_{(0.7)}(t)$) à l'ordre ($\alpha = 3$)

II.3.2.2 Dérivation non entière au sens de Caputo

A la fin des années 60, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation non entière, elle est aussi obtenue en deux étapes

- 1- Dériver la fonction $f(t)$ à l'ordre entier n
- 2- Intégrer le résultat ainsi obtenu à l'ordre non entier $n - \alpha$

L'expression mathématique de cette définition est

$${}_t^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{(n-\alpha-1)} f^n(\tau) d\tau \quad (\text{II.8})$$

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\}$$

${}_t^c D_t^\alpha f(t)$: Cette notation symbolise la dérivée d'ordre non entier α par rapport au temps de la fonction $f(t)$ selon la définition de Caputo dans l'intervalle du temps $[t_0, t]$.

$f^n(\tau)$ est la dérivée d'ordre entier n par rapport à τ de la fonction $f(t)$

La dérivation au sens de Caputo à l'ordre ($\alpha = 2.3$) de $f(t)$ consiste à dériver la fonction $f(t)$ à l'ordre ($n = 3$) puis intégrer $f^{(3)}(t)$ à l'ordre ($n - \alpha = 0.7$)

Ces deux définitions sont schématisées par la figure suivante :

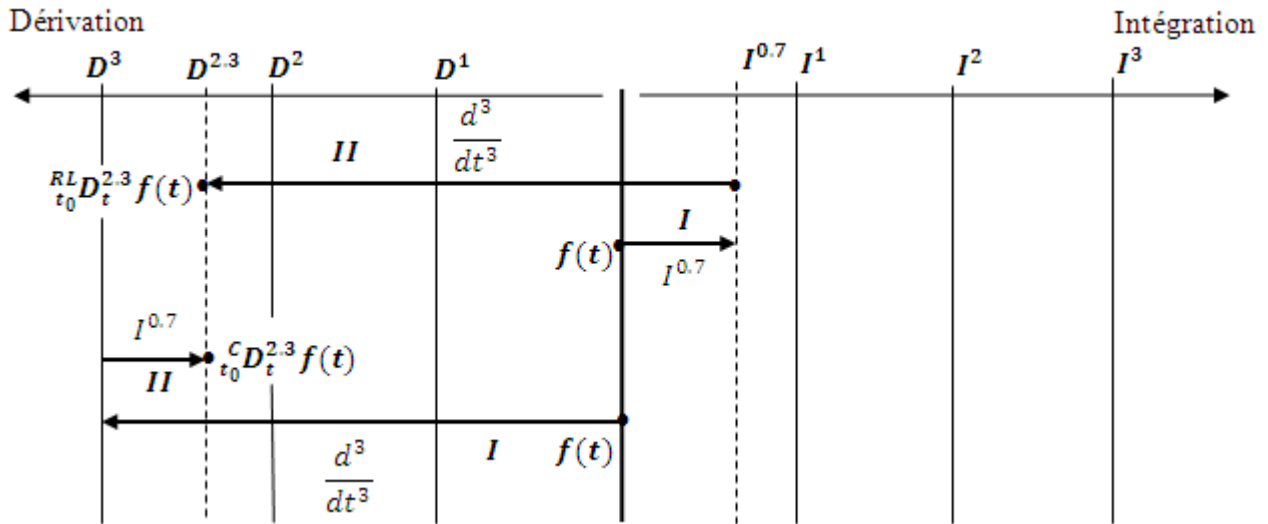


Figure II.2 : illustration de la dérivation au sens de Riemann-Liouville et de Caputo

Remarque II.1

1- Lorsque la fonction à dériver est une constante

Dans le cas de la définition de Riemann-Liouville

$$D_t^\alpha C = \frac{C(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \text{ est une fonction non nulle dépendante du temps}$$

Dans le cas de la définition de Caputo

$$D_t^\alpha C = 0$$

2- les définitions de Riemann-Liouville et du Caputo sont équivalentes pour des fonctions f telle que : $f(0) = 0$

Sinon on a

$$\frac{d^n}{dt^n} \{I^{n-\alpha} f(t)\} = I^{n-\alpha} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} + f(0^+) y_{n-\alpha}(t)$$

Avec

$$y_{n-\alpha}(t) = \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$$

II.3.2.3 Dérivation non entière au sens de Grunwald-Leitnikov

C'est la définition la plus appropriée au calcul numérique, elle est obtenue en utilisant la formule de la dérivation classique

Partons de la dérivée première

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (\text{II.9})$$

h : pas d'échantillonnage

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (\text{II.10})$$

La généralisation de cette expression à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ donne

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (\text{II.11})$$

Avec $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$

L'extension de l'équation (II.11) à des valeurs non entières $\alpha \in \mathbb{R}_+$ donne l'expression suivante

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (\text{II.12})$$

Avec $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)}$$

L'équation (II.12) montre que le calcul de la dérivée non entière d'une fonction $f(t)$ à un instant t donné prend en compte toutes les valeurs de cette fonction aux instants précédents ainsi la dérivation non entière donne une caractérisation globale de cette fonction, contrairement à la dérivation entière qui donne une caractérisation locale de la fonction (pente de la tangente de la courbe à l'instant t).

Ces deux propriétés de la dérivation entière et non entière seront clarifiées en présentant l'algorithme du calcul de la dérivation généralisée.

Algorithme du calcul

On trouve dans [Ous95] le détail de l'algorithme pour des ordres de dérivation réels et complexes, on se limite dans cette section à la présentation de l'algorithme pour des ordres réels, l'algorithme développé pour les ordres complexes sera abordé en annexe B.

Dans le cas où $f(t)$ est causale, en posant $t = Kh$, cette condition se traduit par $f((k-j)h) = 0$ pour $k-j < 0$, soit pour $j > k$, ainsi dans l'équation (II.12), la somme étendue de $j = 0$ à $j = \infty$ se réduit à la somme étendue $j = 0$ à $j = k$

Posons

$$C(j) = \frac{1}{h^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (\text{II.13})$$

La loi de récurrence entre les coefficients $C(j)$ et $C(j-1)$ est donnée par

$$\begin{cases} c(0) = \frac{1}{h^\alpha} \\ c(j) = c(j-1) \frac{j-\alpha-1}{j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.12) s'écrit alors sous une forme adéquate au calcul numérique comme suit

$$D^\alpha f(kh) = \sum_{j=0}^k C(j) f((k-j)h) \quad (\text{II.15})$$

$D^\alpha f(kh)$ représente la α^{eme} dérivée de $f(t)$ à l'instant kh

Calculons les valeurs de la dérivée α de la fonction $f(t)$, pour les quatre premières valeurs du temps échantillonné au pas h

Elles sont données par

$$D^\alpha f(0) = C(0)f(0)$$

$$D^\alpha f(h) = C(1)f(0) + C(0)f(1)$$

$$D^\alpha f(2h) = C(2)f(0) + C(1)f(1) + C(0)f(2)$$

$$D^\alpha f(3h) = C(3)f(0) + C(2)f(1) + C(1)f(2) + C(0)f(3)$$

On remarque que plus la variable temps augmente plus le nombre des coefficients à ajouter devient important, en outre, pour calculer la dérivée à $t = Kh$, les produits des coefficients $C(j)$ et des valeurs précédentes de la fonction $f((k-j)h)$ ne sont pas les mêmes que ceux utilisés pour

calculer les valeurs précédentes de la dérivée, cet algorithme nécessite un temps de calcul très important.

II .3.3 Propriétés de la dérivation non entière

La majorité des propriétés de la dérivation d'ordre entier peuvent être généralisées au cas non entier, les plus usuelles sont les suivantes :

- 1- Si $\alpha = 0$, l'opération $D^\alpha f(t)$ est l'opération identité

$$D^0 f(t) = f(t).$$

- 2- La propriété du semi groupe est vérifiée sous certaines conditions

$$D_0^\alpha \{D_0^\beta f(t)\} = D_0^{\alpha+\beta} f(t)$$

$$D_{t_0}^\alpha \{D_{t_0}^\beta f(t)\} = D_{t_0}^{\alpha+\beta} f(t) \quad \text{Si} \quad \begin{cases} \alpha \text{ entier positif} \\ \beta \text{ arbitraire} \end{cases}$$

- 3- Si $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée fractionnaire $D^\alpha f(t)$ est une fonction analytique de t et α .

- 4- La différentiation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha a f(t) + D^\beta b g(t) = a D^\alpha f(t) + b D^\beta g(t)$$

- 5- la dérivée non entière de l'intégrale du même ordre d'une fonction temporelle est telle que

$$D_{t_0}^\alpha \{I_{t_0}^\alpha f(t)\} = f(t) \quad \text{avec } \alpha \in R_+^*$$

Cette relation n'étant pas toujours vraie pour $\alpha < 0$

- 6- Règle de Leibniz

$$\frac{d^\alpha (f(t)g(t))}{dt^\alpha} \neq \frac{d^\alpha (f(t))}{dt^\alpha} g(t) + \frac{d^\alpha (g(t))}{dt^\alpha} f(t)$$

- 7- Règle de Chain

$$\frac{d^\alpha f(g(t))}{dt^\alpha} \neq \frac{d^\alpha f(t)}{dg^\alpha} \times \frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha}$$

II. 4 Transformée de Laplace des opérateurs fractionnaires

La transformée de Laplace est un outil puissant et indispensable dans l'étude des systèmes d'ordre entier, cette importance s'étend au cas des systèmes d'ordre non entier.

Dans le cas entier, on rappelle que la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ causale est donnée par

$$F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{II.16})$$

La transformée de Laplace de sa dérivée n^{eme} s'écrit comme suit

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(t = t_0) \quad (\text{II.17})$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}[f(t) \otimes g(t)] = F(s)G(s) \quad (\text{II.18})$$

II.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

L'interprétation de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville comme un produit de convolution du facteur d'oubli $p_\alpha(t)$ et $f(t)$ permet le calcul de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre non entier d'une fonction réelle et causale.

Lemme II.1

La transformée de Laplace de la fonction t^α , ($\alpha \in R_+$) est donnée par

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = s^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right\} = s^{-\alpha-1} \quad (\text{II.20})$$

La transformée de Laplace de l'équation (II.5) donne

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{p_\alpha(t)\} \times \mathcal{L}\{f(t)\} = P_\alpha(s) \times F(s)$$

Avec :

$$P_\alpha(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} = \frac{1}{s^\alpha}$$

Donc

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = \frac{1}{s^\alpha} F(s) \quad (\text{II.21})$$

II.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre α , au sens de **Riemann-Liouville** est donnée par

$$\mathcal{L}\{ {}^{RL}_0 D_t^\alpha f(t) \} = [s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{II.22})$$

$$n-1 < \alpha < n$$

Où $[D^{\alpha-i-1} f(t)]_{t=0}$ représente la dérivée $(\alpha - i - 1)^{\text{ème}}$ de $f(t)$, lorsque $t = 0$

Les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs en 0 des dérivées non entières $D^{\alpha-i-1} f(t)$ de $f(t)$ ($i = 0, \dots, n-1$)

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre α , au sens de **Caputo** par rapport à t est donnée par

$$\mathcal{L}\{ {}^C_0 D_t^\alpha f(t) \} = [s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} D^i f(t)]_{t=0} \quad (\text{II.23})$$

Où $[D^i f(t)]_{t=0}$ représente la dérivée $i^{\text{ème}}$ de $f(t)$ lorsque $t = 0$

Dans ce cas, les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs en 0 des dérivées entières $D^i f(t)$ de $f(t)$, ($i = 0, \dots, n-1$)

Remarque II.2

*dans la résolution d'une équation différentielle d'ordre non entier, la solution obtenue en utilisant la définition de Riemann-Liouville s'exprime en fonction des dérivées d'ordre non entier de sa valeur initiale $(y(t_0), \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} y(t_0), \dots)$, alors que l'utilisation de la définition de **Caputo** permet d'exprimer la solution en fonction des dérivées d'ordre entier de sa valeur initiale $(y(t_0), \frac{\partial^1}{\partial t^1} y(t_0), \dots)$. En pratique les valeurs initiales des dérivées d'ordre entier sont plus perceptibles que leurs dérivées d'ordre non entier, ainsi la définition de Caputo est plus adaptée pour modéliser des phénomènes physiques, alors que la définition de Riemann-Liouville est couramment utilisée en mathématiques en raison de son caractère global et plus général.*

Si considère les conditions initiales nulles, la transformée de Laplace des deux définitions se réduit indifféremment à :

$$\mathcal{L}\{ D^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (\text{II.24})$$

La transformé de Laplace de la dérivation d'ordre non entier au sens de **Grunwald-Leitnikov** égale à celle de **Riemann-Liouville**

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s)$$

Ainsi, l'intégration et la dérivation d'ordre non entier sont rassemblées dans un seul module appelé **dérivateur généralisé** ou opérateur **intègro-différentiel** défini comme suit

$$D_t^\alpha f(t) \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) & \text{si } \alpha > 0 \\ f(t) & \text{si } \alpha = 0 \\ \int_0^t f(t)^{-\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Où α est l'ordre de l'opérateur ($\alpha \in \mathcal{R}$)

II.5 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

Un système est dit fractionnaire lorsqu'il est décrit par une équation différentielle impliquant des dérivées d'ordre fractionnaire. On s'intéresse dans cette section aux systèmes d'ordre non entier mono variable linéaires causaux et invariants dans le temps.

Comme dans le cas entier, plusieurs modes de représentation des systèmes d'ordre fractionnaire existent que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel

- Equation différentielle généralisée
- Fonction de transfert fractionnaire
- Représentation d'état fractionnaire

II.5.1 Equation différentielle généralisée

Dans le cadre de la représentation temporelle du comportement dynamique d'un système fractionnaire linéaire mono variable, une équation différentielle non entière est établie sous la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} u(t) \quad (\text{II.26})$$

Où $u(t) \in \mathcal{R}$ et $y(t) \in \mathcal{R}$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $a_k, b_k \in \mathcal{R}$; $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{R}^+$.

D^{α_k} , Représente l'opérateur de dérivation à l'ordre α_k

D^{β_k} , Représente l'opérateur de dérivation à l'ordre β_k

Définition II.1

Un système d'ordre non entier décrit par l'équation différentielle précédente est strictement propre si $\beta_k < \alpha_k$, il est juste propre si $\beta_k = \alpha_k$.

Définition II.2

Le système précédent est d'ordre commensurable α si les ordres de dérivation β_k, α_k sont tous multiples du même nombre réel et positif α tel que $\beta_k = \alpha_k = k\alpha$

L'équation (II.26) devient

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (\text{II.27})$$

II.5.2 Fonction de transfert fractionnaire

La transformée de Laplace de l'équation différentielle (II.26), en considérant les conditions initiales nulles donne la fonction de transfert non entière suivante

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\alpha_k}} \quad (\text{II.28})$$

Dans le cas d'un système commensurable, la fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (\text{II.29})$$

II.5.3 Représentation d'état d'ordre fractionnaire

La représentation d'état d'un système entier est définie par le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Où $x \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ est le vecteur d'état ; $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'évolution ; $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ est la matrice de commande ; $C \in \mathcal{R}^{r \times n}$ est la matrice d'observation ; $D \in \mathcal{R}^{r \times m}$ est la matrice de transmission directe.

Le système d'équations (II.30) est une représentation condensée de n équations différentielles d'ordre 1.

L'extension de la représentation d'état aux systèmes non entiers fait intervenir des équations différentielles dont l'ordre fait l'objet de deux niveaux de généralisation [Oust 95], et une équation de sortie identique à celle du cas entier.

1^{er} Niveau de généralisation

Dans ce cas l'ordre de dérivation de toutes les équations différentielles sont les mêmes et donnés par l'ordre commensurable

La pseudo-représentation d'état s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)} x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Un changement de base approprié permet d'obtenir une forme diagonale ou de Jordan de cette représentation. Sous cette forme, la diagonale de la matrice d'évolution A , fait apparaître les valeurs propres qui sont toujours associés à l'ordre de dérivation α du vecteur d'état.

Remarques II.3 :

- 1- Dans la représentation d'état classique, l'état n'a besoin que de sa valeur précédente pour prédire l'état à l'instant suivant ; cependant, d'après la définition de la dérivation non entière celle-ci est tributaire de tout son passé afin de pouvoir prédire sa valeur à un instant futur. Dans ce cas les termes de la représentation d'état fractionnaire ou de pseudo représentation d'état sont plus adaptés.
- 2- La dimension de la matrice d'évolution d'un système régi par l'équation différentielle (II.27) est inversement proportionnelle à l'ordre commensurable α : $\dim(A) = \frac{k}{\alpha}$, ainsi le choix de α permet d'obtenir une représentation d'état de dimension minimale.

2^{eme} Niveau de généralisation :

Soit le vecteur d'état $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de dimension n

Et le vecteur $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de dimension n aussi

Alors : $x^{\underline{\alpha}}$ désigne la dérivée de chaque composante x_i du vecteur , à l'ordre α_i

$$x^{(\underline{\alpha})} = [x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}]$$

Cette notation permet d'aboutir au 2^{eme} Niveau de généralisation avec des ordres de dérivation des équations différentielles différents.

La pseudo-représentation d'état s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} x^{(\underline{\alpha})}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Cette généralisation permet une représentation plus compacte avec un nombre plus réduit de variables d'état, cependant il n'est plus possible d'effectuer des changements de base par des simples manipulations matricielles ce qui pénalise le passage d'une forme de représentation à une autre, par conséquent l'obtention d'une forme diagonale ou de Jordan est parfois impossible.

Remarque II.4 : vu la complexité de la théorie dans le domaine temporel et l'insuffisance des méthodes mathématiques, la majorité des travaux effectués à ce jour utilisent les modèles externes entrée sortie tel que les équations différentielles et considérant le plus souvent le cas des systèmes d'ordre commensurable.

II.6 Stabilité des systèmes fractionnaires

La définition de la stabilité au sens *BIBO* (Bounded Input, Bounded Output) dite aussi stabilité externe est donnée par la définition suivante :

Définition II.3

Un système est BIBO stable si et seulement si, pour une entrée bornée, il correspond à une sortie bornée.

Dans le cas des systèmes linéaire entiers, la condition de stabilité est telle que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive.

Dans le cas des systèmes non entiers d'ordre comensurable α ,
Maignon a établi le résultat suivant

Un système fractionnaire d'ordre commensurable α est *BIBO* stable si et seulement si toutes les racines p_i du polynome entier de la variable p , obtenu par changement de variable $p = s^\alpha$, correspondant à son polynome caractéristique de la variable s ont leurs arguments qui vérifient la condition suivante :

$$|\arg(p_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour } i = 1 \dots n \quad (\text{II.33})$$

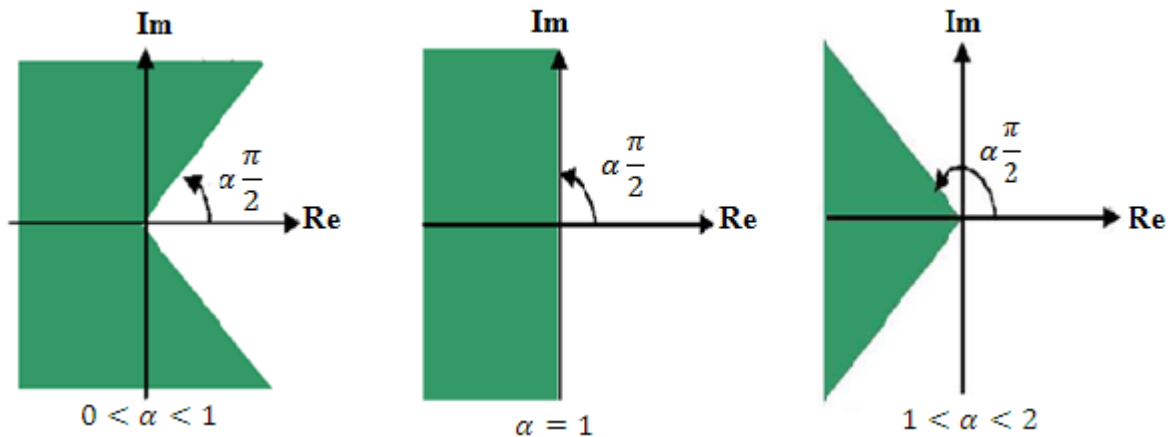


Figure II.3 : domaine de stabilité des systèmes commensurables dans le plan s^α

II.7 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

La propriété majeure des systèmes d'ordre non entier est qu'ils sont à mémoire illimitée (de dimension infinie), ceci est dû au caractère global de l'opération de dérivation et d'intégration fractionnaire nécessitant la connaissance de tout le passé de la fonction.

Par souci de réalisabilité physique et l'absence des outils mathématiques et numériques adéquats permettant l'analyse, la simulation des systèmes fractionnaires, l'approximation de l'opérateur intégral-différentiel sur une bande de fréquence est nécessaire, on distingue principalement deux catégories selon que le transfert obtenu est continu ou discret.

II.7.1 Approximation du modèle fractionnaire par un modèle rationnel continu

Oustaloup et Charef déterminent les zéros et les pôles du transfert entier en se basant sur le critère de récursivité de ses fréquences transitionnelles, celles-ci obtenues au moyen d'un calcul géométrique simple. D'autres méthodes utilisent les techniques d'interpolation, on mentionne la méthode de Carlson qui se base sur un processus itératif de Newton et la méthode de Matsuda qui utilise le principe de développement en fonctions continues. Dans cette section, on présentera les méthodes d'Oustaloup et Charef, la méthode de Matsuda et celle de Carlson seront exposées à l'annexe C.

II.7.1.1 Méthode d'Oustaloup [Ous91]

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé dont l'action différentielle s'étend sur toute la bande $[0, \infty[$ repose sur une distribution récursive de pôles et zéros réels négatifs d'ordre entier.

$$D_{gen}(s) = \left(\frac{s}{w_c}\right)^\alpha \quad (\text{II. 34})$$

w_c dite fréquence au gain unité, ou de croisement

Du fait que la plus part des systèmes physiques ont un comportement dynamique borné en fréquences, Oustaloup propose en premier lieu, de limiter le comportement de ce dérivateur généralisé sur une bande $[w_b, w_h]$ choisie selon des besoins pratiques, de manière à avoir w_c au centre de cet intervalle, le dérivateur généralisé ainsi obtenu est dit borné en fréquences

$$D_{born\acute{e}}(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{w_b}}{1 + \frac{s}{w_h}} \right)^\alpha \quad (\text{II.35})$$

w_b et w_h vérifient les relations suivantes :

$$C_0 = \frac{\omega_b}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \quad (\text{II.36})$$

Dans cette bande de fréquences, $D_{gen}(s)$ et $D_{born\acute{e}}(s)$ ont le même comportement dynamique, à titre d'exemple, on prend

$$D_{gen}(s) = \left(\frac{s}{10}\right)^{0.75}$$

Avec $\alpha = 0.75$, $w_c = 10 \text{ rad/sec}$

Son équivalent borné en fréquence est donné par :

$$D_{born\acute{e}}(s) = (0.0032 \frac{1+s/0.03162}{1+s/3162.278})^{0.75} .$$

Le tracé de Bode des deux fonctions de transfert est donné sur **la figure II.4**

Les deux diagrammes se superposent sur un intervalle fréquentiel centré sur $\omega_c = 10 \text{ rad/sec}$, beaucoup plus large pour l'amplitude que pour la phase. Toutefois, l'écart entre les diagrammes respectifs d'amplitude et de phase s'accroît en dehors de l'intervalle fréquentiel d'approximation.

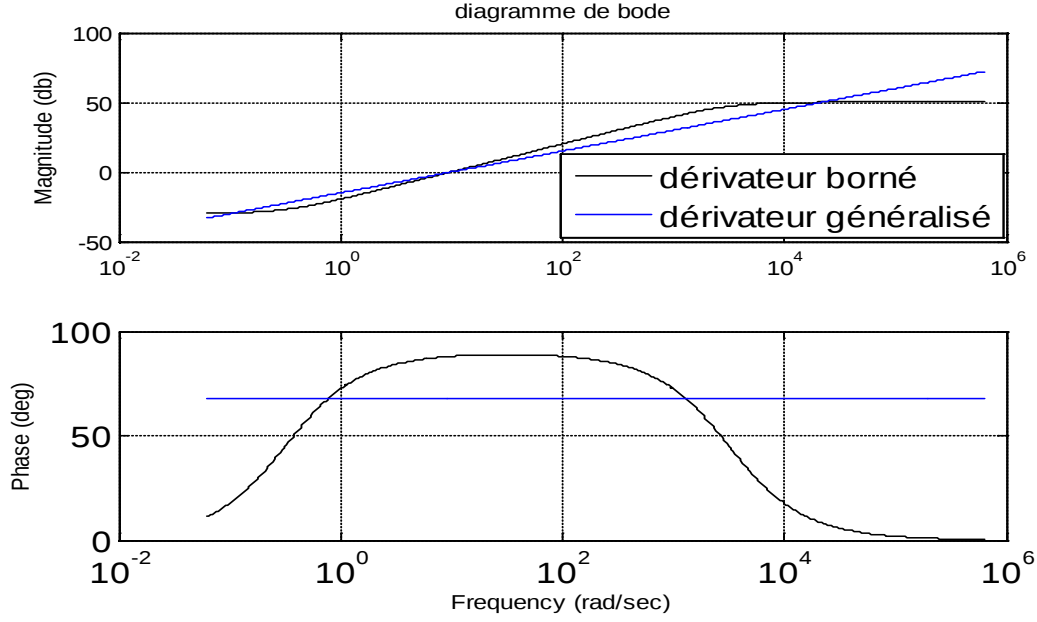


Figure II.4 : diagramme de Bode du $D_{gen}(s)$ et de $D_{borné}(s)$

L'approximation de $D_{borné}(s)$ dans cette bande est donnée par

$$H(s) = C_0 \prod_{i=-N}^{i=N} \left(\frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (II.37)$$

z_i est un zéro de rang i et p_i est un pôle de rang i , ces singularité (paires zéro- pôle) au nombre total $(2N + 1)$ sont distribuées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{p_i}{z_i} = \lambda > 0, \frac{z_{i+1}}{p_i} = \eta > 0 \\ \frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \lambda\eta > 1 \end{cases} \quad (II.38)$$

Les rapports λ et η qui impliquent un rapport constant $\lambda\eta$ entre deux zéros ou deux pôles consécutifs sont appelés facteurs récursifs.

Les pôles et les zéros sont déterminés par la relation suivante :

$$\alpha > 0: \begin{cases} z_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ p_i = z_i \lambda, \quad i = 1, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i \eta, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ w_h = p_N \sqrt{\eta} \end{cases}, \quad \alpha < 0: \begin{cases} p_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ z_i = p_i \lambda, \quad i = 1, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i \eta, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ w_h = z_N \sqrt{\eta} \end{cases} \quad (II.39)$$

$$N = \text{partie entière} \left\{ \frac{\log \left(\frac{w_h}{w_b} \right)}{\log \left(\frac{1}{\lambda \eta} \right)} \right\} \quad (\text{II.40})$$

Comme le montre la **figure II.5**, L'approximation est réalisée par un lissage de diagramme de Bode

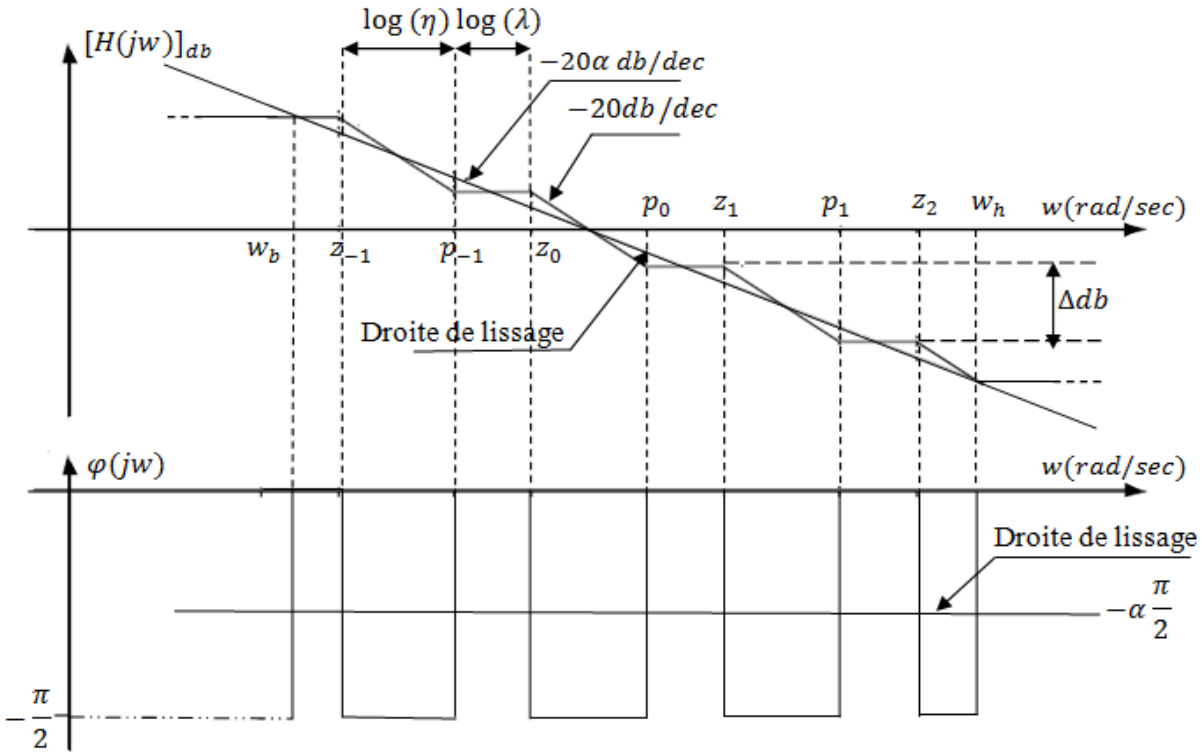


Figure II.5 : principe d'approximation par la fonction récursive

Les paramètres de récurrence sont donnée par :

$$\begin{cases} \lambda = \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{|\alpha|}{N}} \\ \eta = \left(\frac{w_h}{w_b} \right)^{\frac{1-|\alpha|}{N}} \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Deux possibilités s'offrent à nous pour déterminer la relation qui lie l'ordre α à ces coefficients récurrents

Droite de lissage de gain : nous avons la droite de lissage du gain à une pente de -20db/dec , à partir du diagramme asymptotique du gain, nous en déduisons les deux expressions suivantes :

$$\Delta \text{db} / \log \left(\frac{1}{\lambda \eta} \right) = -20\alpha \text{ db/dec} \quad (\text{II.42})$$

$$\Delta \text{db} / \log \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -20 \text{ db/dec} \quad (\text{II.43})$$

En faisant le rapport entre les deux équations 2.48 et 2.49 on tire :

$$\alpha = \frac{\log g(\lambda)}{\log \lambda \log \eta} = \frac{\log \lambda}{\log \lambda + \log \eta} \quad (\text{II.44})$$

Droite de lissage de phase : la valeur asymptotique de phase représentée par la droite de lissage de phase se déduit de la valeur moyenne des asymptotes des zéros et des pôles récursifs :

$$-\alpha \frac{\pi}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} \log \lambda + 0 + \log \eta}{\log \lambda \log \eta} \quad (\text{II.45})$$

Soit :

$$\alpha = \frac{\log g(\lambda)}{\log \lambda \log \eta} = \frac{\log \lambda}{\log \lambda + \log \eta} \quad (\text{II.46})$$

II.7.1.2 Méthode de Charef (1992)

La méthode d'approximation de Charef a été introduite pour représenter et analyser le comportement des systèmes fractals dits également pôles à puissance fractionnaire (PPF lorsque $\alpha < 0$) ou zéros à puissance fractionnaire (ZPF lorsque $\alpha > 0$). Le système fractal est approximé par une fonction de singularité constituée d'une série de pôle-zéro dont le nombre et la distribution fréquentielle dépendent, notamment, d'une erreur d'approximation définie au préalable.

La fonction du transfert d'un opérateur d'ordre fractionnaire élémentaire représenté dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante

$$T(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (\text{II.47})$$

Où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre tel que $-1 < \alpha < 1$

Dans une bande de fréquence donnée $[w_b, w_h]$ cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire PPF si ($\alpha > 0$) ou un zéro ZPF si ($\alpha < 0$) comme suit :

$$G(s) \approx \frac{k}{(1 + \frac{s}{w_c})^\alpha} \quad (\text{II.48})$$

Où w_c est la fréquence de coupure du PPF ou ZPF obtenue à partir de la basse fréquence w_b

$w_c = w_b \sqrt{10^{\frac{\varepsilon}{10\alpha} - 1}}$, ε est l'erreur maximale permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur (II.47) ou le PPF et le ZPF de (II.48), et $k = 1/w_c^\alpha$

En supposons que pour $w \in [w_b, w_h]$ on a $w \gg w_c$ on peut écrire

$$\frac{k}{(1+\frac{s}{w_c})^\alpha} \approx \frac{k}{(\frac{s}{w_c})^\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} = T(s)$$

La fonction d'approximation sera donnée par :

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (\text{II.49})$$

Cette approximation est obtenue en mettant en série plusieurs filtres passe bande, elle est d'autant plus précise que le nombre de filtres utilisés est très grand

Le diagramme de Bode obtenu est constitué d'un ensemble de droites ayant alternativement les pentes 0 db/dec et -20 db/dec pour PPF et 20 db/dec et 0 db/dec pour ZPF

Ces pentes représentent des contributions individuelles des singularités : pôles p_i et zéros z_i

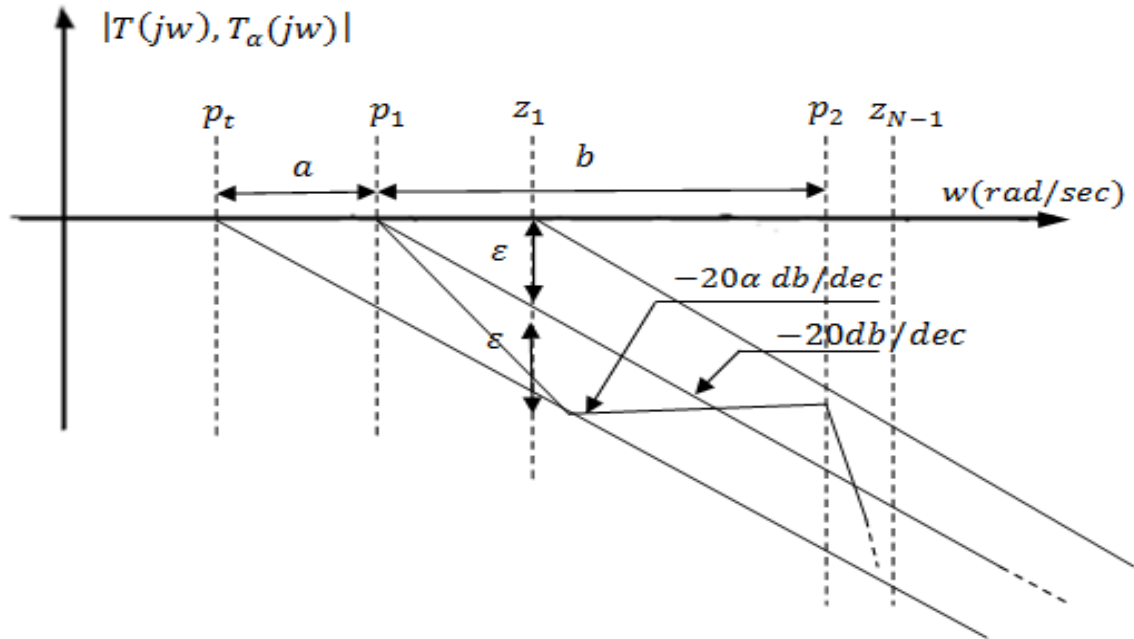


Figure II.6 : principe d'approximation par la fonction de singularité

Les pôles p_i et les zéros z_i de la fonction de singularité peuvent être obtenus comme suit :

$$\alpha > 0: \begin{cases} p_0 = w_c \sqrt{b} \\ p_i = (ab)^i \quad i = 1, 2, \dots, N \\ z_i = ap_0(ab)^i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad \alpha < 0: \begin{cases} z_0 = w_c \sqrt{b} \\ z_i = (ab)^i \quad i = 1, 2, \dots, N \\ p_i = az_0(ab)^i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

$$\begin{cases} a = 10^{\frac{\varepsilon}{10(1-\alpha)}} \\ b = 10^{\frac{\varepsilon}{10\alpha}} \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

$$N = \text{partie entière} \left\{ \frac{\log \left(\frac{w_{\max}}{p_0} \right)}{\log(ab)} \right\} + 1 \quad (\text{II.52})$$

$w_{\max}$ est la limite supérieure de la bande d'approximation.

II.7.2 Approximation du dérivateur généralisé par un modèle rationnel discret

L'étape clé dans l'implémentation des modèles numériques sur ordinateur est leur discrétisation. On distingue deux méthodes de discrétisation

La discrétisation indirecte : consiste à réaliser d'abord l'approximation continue du modèle, ensuite discrétiser cette dernière en utilisant les méthodes de discrétisation usuelles (Tustin, Euler,...)

La discrétisation directe : consiste à remplacer l'opérateur s^α par une fonction génératrice $[w(z)]^\alpha$ (dimension finie) dans la fonction de transfert du modèle.

$[w(z)]^\alpha$ Peut être calculée par développement en séries, en utilisant différentes méthodes, les plus répandues sont celles d'Al Alaoui, Euler, Tustin et Simpson.

Les divers expressions de $[w(z)]^\alpha$ proposées sont :

1- Fonction génératrice d'Euler (Grunwald)

$$[w(z)]^\alpha = \left(\frac{1}{T}\right) (1 - z^{-1})^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} (1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots) \quad (\text{II.53})$$

2- Fonction génératrice de Tustin

$$[w(z)]^\alpha = \left(\frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}\right)^\alpha = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha (1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha z^{-2} + \dots) \quad (\text{II.54})$$

3- Fonction génératrice de Simpson

$$[w(z)]^\alpha = \left(\frac{3}{T} \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1+4z^{-1}+z^{-2})}\right)^\alpha = \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha (1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots) \quad (\text{II.55})$$

4- Fonction génératrice d'Al-Alaoui

$$[w(z)]^\alpha = \left(\frac{8}{7T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+\frac{z^{-1}}{7})}\right)^\alpha = \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2\right)z^{-2} + \dots\right) \quad (\text{II.56})$$

Comme on peut le voir dans les expressions, un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert irrationnelle continue dans le domaine de Laplace est équivalent à une fonction de transfert de dimension infinie dans le domaine discret. Afin de remédier à ce problème, deux techniques ont été développées : l'approximation en utilisant l'expansion de séries entières (*CFE*) et l'approximation en utilisant l'expansion de fractions continues (*PSE*).

II.7.2.1 Approximation discrète en utilisant l'expansion de séries entières (*PSE*) :

En utilisant une fonction génératrice correspondante à une des méthodes précédentes (Tustin, Euler,...) et en utilisant l'expansion des séries entières de cette fonction, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$D^{\pm\alpha}(z) \approx A \cdot A_n(z^{-1}, \alpha) / A_n(z^{-1}, -\alpha) \quad (\text{II.57})$$

A change selon la fonction génératrice utilisée

$$A = \begin{cases} \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha & \text{Tustin} \\ \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha & \text{Al - Alaoui} \\ \left(\frac{1}{T}\right)^\alpha & \text{Euler (Grunwald)} \\ \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha & \text{Simpson} \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Le tableau suivant représente les expressions de $A_n(z^{-1}, \alpha)$ selon l'ordre n

n	$A_n(z^{-1}, r)$
0	1
1	$-r z^{-1} + 1$
3	$-(1/3)r z^{-3} + (1/3)r^2 z^{-2} - r z^{-1} + 1$
5	$-(1/5)r z^{-5} + (1/3)r^2 z^{-4} - [(r/3) + (r^3/15)] z^{-3} + (2/5)r^2 z^{-2} - r z^{-1} + 1$
7	$-(r/7)r z^{-7} + (r^2/7)z^{-6} - [(r/7) + (2r^3/35)] z^{-5} + [(26/105)r^2 + (r^4/105)]z^{-4} - [(1/3)r + (2/21)r^3] z^{-3} + (3/7)r^2 z^{-2} - r z^{-1} + 1$
9	$-(r/9) z^{-9} + (r^2/9)z^{-8} - [(r/7) + (r^3/21)]z^{-7} + [(34/189)r^2 + (2/189)r^4]z^{-6} - [(1/5)r + (16/189)r^3 + (1/945)r^5] z^{-5} + [(17/63)r^2 + (1/63)r^4]z^{-4} - [(1/3)r + (1/9)r^3] z^{-3} + (4/9)r^2 z^{-2} - r z^{-1} + 1$

Tableau II .1 : les expressions de $A_n(z^{-1}, \alpha)$ selon l'ordre n

II.7.2.2 Approximation discrète en utilisant l'expansion de fractions continues (CFE) :

Une autre méthode pour obtenir l'équivalent discret de l'opérateur d'ordre fractionnaire impliquant l'utilisation de la fonction génératrice $[w(z)]^\alpha$ a été développée.

On obtient la fonction de transfert suivante

$$D^{\pm\alpha}(z) \approx A.P_p(z^{-1})/Q_q(z^{-1}) \quad (\text{II.59})$$

A : Prend les mêmes expressions que précédemment

P et Q sont des polynômes de degré p et q correspondants à la variable z^{-1}

Les formules de P et Q sont données comme suit :

$p = q$	$P_p(z^{-1})$ ($k = 1$), et $Q_q(z^{-1})$ ($k = 0$)
1	$(-1)^k z^{-1} r + 1$
3	$(-1)^k (r^3 - 4r)z^{-3} + (6r^2 - 9)z^{-2} + (-1)^k 15z^{-1} + 15$
5	$(-1)^k (r^5 - 20r^3 + 64r)z^{-5} + (-195r^2 + 15r^4 + 225)z^{-4} + (-1)^k (105r^3 - 735r)z^{-3} + (420r^2 - 1050)z^{-2} + (-1)^k 945rz^{-1} + 945$
7	$(-1)^k (784r^3 + r^7 - 56r^5 - 2304r)z^{-7} + (10612r^2 - 1190r^4 - 11025 + 28r^6)z^{-6} + (-1)^k (53487r + 378r^5 - 11340r^3)z^{-5} + (99225 - 59850r^2 + 3150r^4)z^{-4} + (-1)^k (17325r^3 - 173250r)z^{-3} + (-218295 + 62370r^2)z^{-2} + (-1)^k 135135rz^{-1} + 135135$
9	$(-1)^k (-52480r^3 + 147456r + r^9 - 120r^7 + 4368r^5)z^{-9} + (45r^8 + 120330r^4 - 909765r^2 - 4410r^6 + 893025)z^{-8} + (-1)^k (-5742495r - 76230r^5 + 1451835r^3 + 990r^7)z^{-7} + (-13097700 + 9514890r^2 - 796950r^4 + 13860r^6)z^{-6} + (-1)^k (33648615r - 5405400r^3 + 135135r^5)z^{-5} + (-23648625r^2 + 51081030 + 945945r^4)z^{-4} + (-1)^k (-61486425r + 4729725r^3)z^{-3} + (16216200r^2 - 72972900)z^{-2} + (-1)^k 34459425rz^{-1} + 34459425$

Tableau II.2 : les expressions de $P_p(z^{-1})$ et $Q_q(z^{-1})$ selon l'ordre n

II.7.2.3 Exemples illustratifs:

Exemple 1 :

Le diagramme de Bode du dérivateur généralisé $s^{0.6}$ est donné par la figure suivant

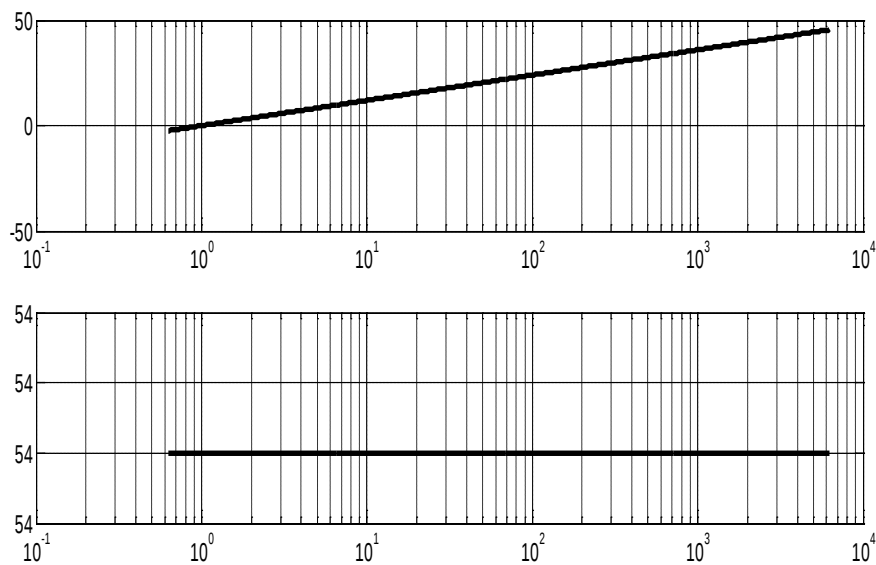


Figure II.7 : diagramme de Bode du dérivateur généralisé

La discrétisation de la dérivation $s^{0.6}$ avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.001\text{sec}$ en utilisant la méthode de Tustin approximé par l'expansion de fraction continue (**CFE**)

Pour $q = p = 1, 3, 7, 9$ les modèles sont donnés comme suit

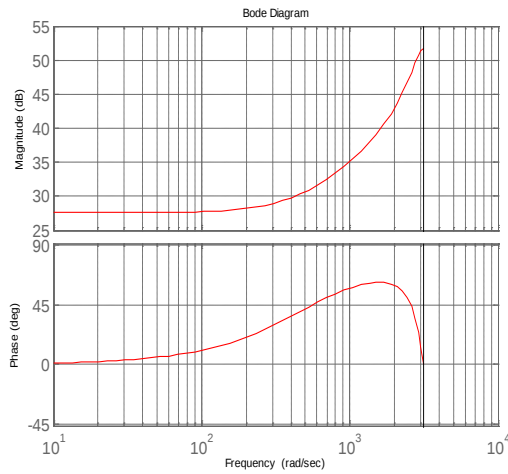
$$G_1(z) = \frac{94.64z - 57.38}{z + 0.6}$$

$$G_3(z) = \frac{94.64z^3 - 57.38z^2 - 43.61z + 13.92}{z^3 + 0.6z^2 - 0.456z - 0.1456}$$

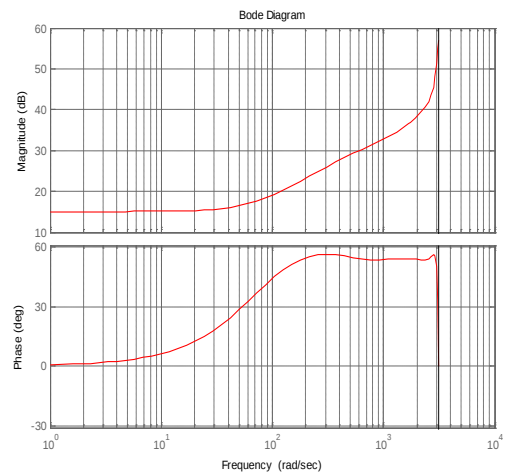
$$G_7(z) = \frac{95.64z^7 - 57.38z^6 - 138.6z^5 + 70.92z^4 + 55.26z^3 - 21z^2 - 5.207z + 0.8615}{z^7 + 0.6z^6 - 1.44z^5 - 0.7415z^4 + 0.5778z^3 + 0.2196z^2 - 0.05445z - 0.0090009}$$

$$G_9(z) = \frac{95.64z^9 - 57.38z^8 - 186.3z^7 + 99.55z^6 + 118.5z^5 - 52.82z^4 - 27.13z^3 + 8.708z^2 + 1.612z - 0.215}{z^9 + 0.6z^8 - 1.948z^7 - 1.041z^6 + 1.239z^5 + 0.5523z^4 - 0.2837z^3 - 0.0916z^2 + 0.01686z + 0.002248}$$

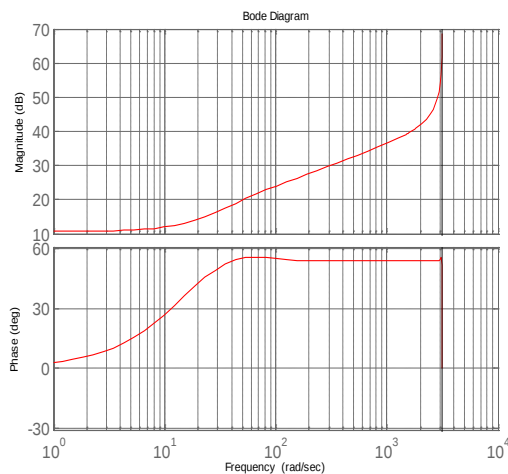
Les résultats de simulation sont donnés par les diagrammes de Bode suivant



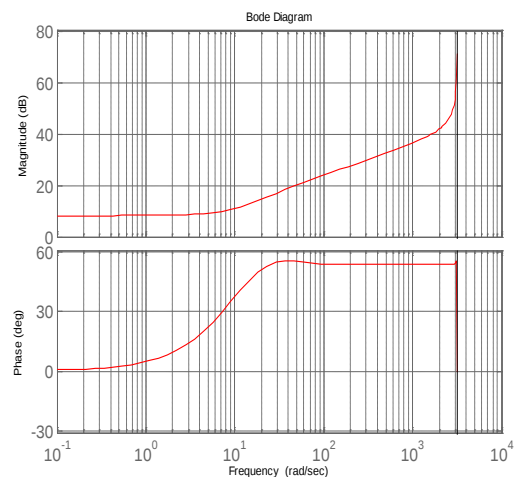
Tustin + CFE pour $n = 1$



Tustin + CFE pour $n = 3$



Tustin + CFE pour $n = 7$



Tustin + CFE pour $n = 9$

Figure II.7.a : discrétisation par la méthode *Tustin + CFE*

Exemple 2 :

La discrétisation de la dérivation $s^{0.6}$ avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.001\text{sec}$ en utilisant la méthode de Tustin approximée par l'expansion de la série entière (**PSE**)

Pour $n = 1, 3, 7, 9$ les modèles sont donnés comme suit :

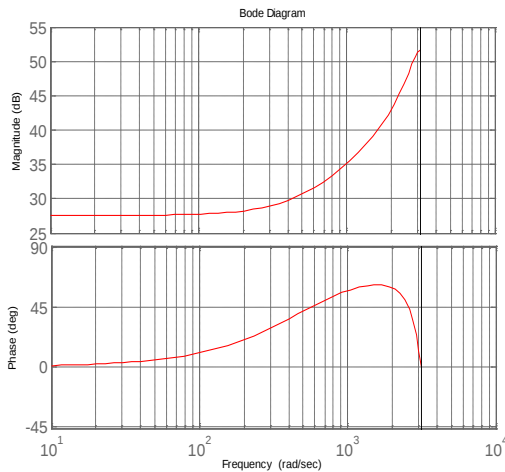
$$G_1(z) = \frac{94.64z - 57.38}{z + 0.6}$$

$$G_3(z) = \frac{94.64z^3 - 57.38z^2 + 11.48z - 19.13}{z^3 + 0.6z^2 + 0.12z + 0.2}$$

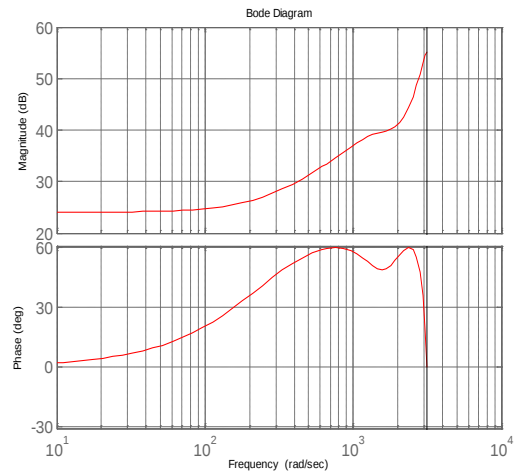
$$G_7(z) = \frac{95.64z^7 - 57.38z^6 + 14.76z^5 - 21.09z^4 + 8.643z^3 - 12.66z^2 + 4.918z - 8.197}{z^7 + 0.6z^6 + 0.1543z^5 + 0.2206z^4 + 0.09038z^3 + 0.1077z^2 + 0.05143z + 0.08571}$$

$$G_9(z) = \frac{95.64z^9 - 57.38z^8 + 15.3z^7 - 21.42z^6 + 9.487z^5 - 13.23z^4 + 6.325z^3 - 9.181z^2 + 3.825z - 6.376}{z^9 + 0.6z^8 + 0.16z^7 + 0.224z^6 + 0.0992z^5 + 0.1384z^4 + 0.06613z^3 + 0.096z^2 + 0.04z + 0.06667}$$

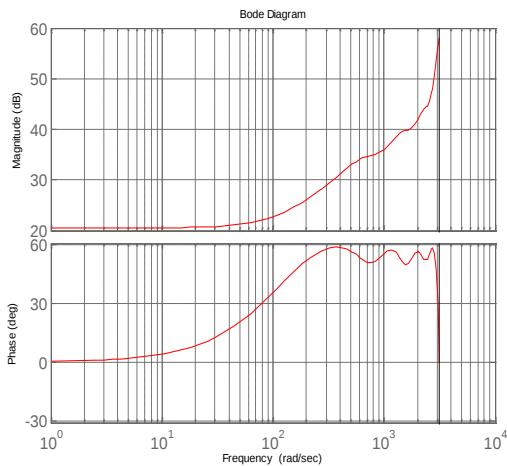
Les résultats de simulation sont donnés par les diagrammes de Bode suivants



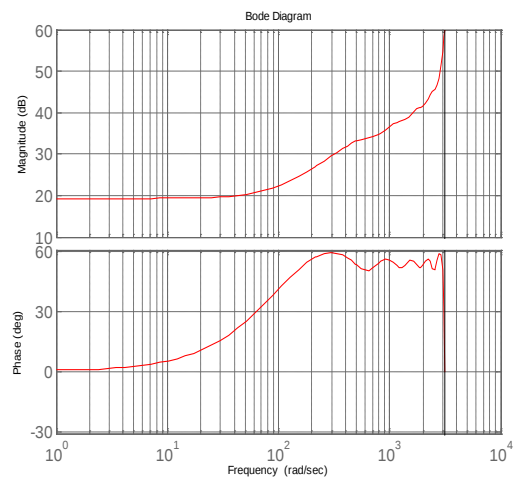
Tustin + PSE pour $n = 1$



Tustin + PSE pour $n = 3$



Tustin + PSE pour $n = 7$



Tustin + PSE pour $n = 9$

Figure II.7.b : discrétisation par la méthode *Tustin + PSE*

A partir des courbes des figures **II.7.a** et **II.7.b**, on constate que l'approximation en utilisant la CFE donne des résultats meilleurs que l'approximation donnée avec la PSE, de plus l'approximation devient meilleure lorsque son ordre augmente.

La méthode du Tustin combinée avec la CFE donne une approximation meilleure proche du cas fractionnaire non approximé, on constate également que l'approximation de cet opérateur est valable sur un certain nombre de décades (bande fréquentielle), qui dépend de la période d'échantillonnage et de l'ordre d'approximation. Il est à noter que la méthode de discrétisation introduite donne une fonction de transfert à phase minimale.

II.8 Régulateurs robustes fractionnaires

L'objectif d'introduire un régulateur dans une boucle de commande est la satisfaction des performances désirées pour le procédé conformément à un compromis entre ses exigences et les limitations physiques des actionneurs de la boucle. La synthèse de ce régulateur s'effectue à partir du modèle nominal du procédé et en présence des perturbations plus ou moins fortes, une modification de cet état non accompagnée d'une reparamétrisation du régulateur se traduit par une désadaptation du régulateur au procédé, c'est dans le cadre d'assurer la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations que s'inscrit l'introduction des régulateurs d'ordre non entier.

En effet, l'initiative d'introduire les régulateurs fractionnaires pour la commande des systèmes revient à Oustaloup au début des années 1990, avec le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [oust, 1995], trois stratégies de commande bien distinctes assurant d'excellentes performances ont fait l'objet de développements théoriques importants ; chacune d'elle définit une génération de la commande CRONE. La différence principale entre les trois générations est liée à la contribution du régulateur synthétisé aux variations de la marge de phase.

En 1999 podlubny [pod99] a proposé une généralisation du correcteur *PID* classique au régulateur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire comprenant une intégration d'ordre λ et une dérivation d'ordre μ

II.8.1 correcteur *PID* classique

Le régulateur proportionnel intégral et dérivé *PID* est le plus utilisé dans la commande des processus industriels grâce à sa simplicité fonctionnelle, à la robustesse de ses performances et la

diversité des méthodes du réglage de ses paramètres qui ne nécessitent pas une connaissance approfondie du système. Une étude a montré que 90% des boucles de commande dans l'industrie sont réalisées à base des régulateurs *PI* ou *PID*. Parmi les méthodes de réglage, on trouve celle de Zigler et Nichols qui donne des résultats empiriques, en se basant sur l'approximation de la fonction de transfert en boucle ouverte par un modèle à retard.

Généralement le correcteur *PID* classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire donné par la **figure II.8**, où $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $G(s)$ est le procédé, $C(s)$ est la fonction de transfert du correcteur dont l'expression est donnée par

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{t_i s} + t_d s\right) \quad (\text{II.60})$$

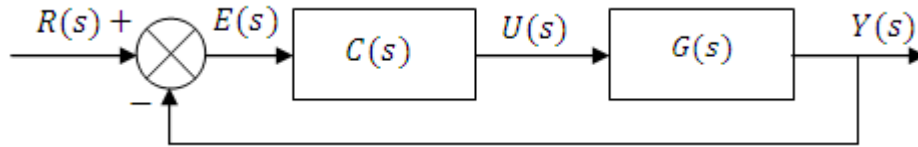


Figure II.8: schéma bloc de la boucle de commande

Les paramètres du régulateur *PID* sont le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration t_i et la constante de dérivation t_d

L'équation précédente peut être réécrite sous la forme :

$$C(s) = K_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (\text{II.61})$$

Dans le domaine temporel, le signal de commande $u(t)$ est donné par :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II.62})$$

Les trois actions proportionnelle, dérivée et intégrale possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire sur le comportement dynamique du procédé

L'action proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire du feedback, le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander multiplié par le gain k_p , en augmentant ce gain le signal de commande agit de manière plus forte sur le système et ainsi il atténue plus rapidement l'écart. De l'autre côté un correcteur agissant plus fortement sur

le système donnera naissance à des comportements oscillatoires temoins d'une diminution voire d'une perte de stabilité.

L'action intégrale permet la suppression de l'écart entre la consigne et la grandeur à commander en regime permanent, il génère à partir d'un moindre signal de l'erreur une commande dont l'amplitude ne cesse de croitre, mais qui pourrait engendrer un effet déstabilisant.

L'action dérivée permet d'accroître la stabilité en boucle fermée, et de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement sans attendre son apparition.

A partir de l'équation (II.61) on aura

$$G_c(s) = \frac{k_d s^2 + K_p s + k_i}{s} \quad (\text{II.63})$$

Le régulateur *PID* introduit deux zéros dans sa fonction de transfert, ces zéros dépendent des paramètres du réglage k_i et k_d .

II.8.2 régulateur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire

Le régulateur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est la généralisation du régulateur *PID* classique proposée par Podlubny [POD 94,96], dont les paramètres sont K_p le coefficient de proportionnalité, k_i et k_d sont les coefficients d'intégration et de dérivation, λ et μ sont les ordres non entier d'intégration et de dérivation respectivement, avec deux paramètres supplémentaires par rapport au régulateur *PID* classique.

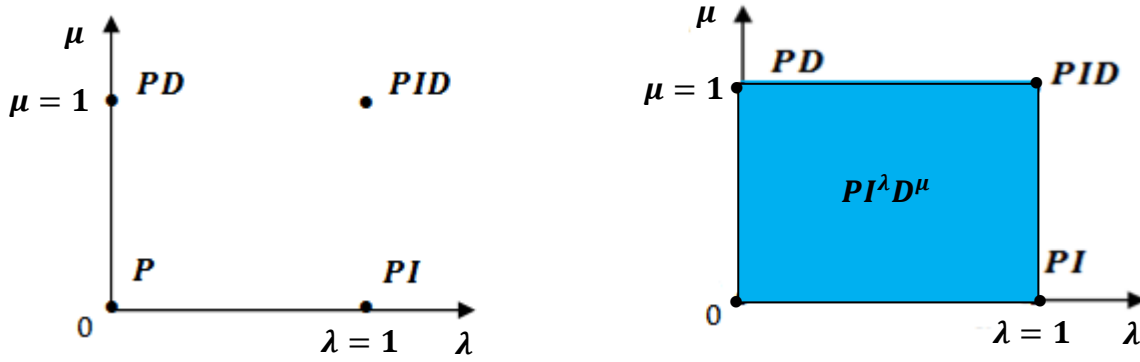
La fonction de transfert du régulateur $PI^\lambda D^\mu$ est définie comme suit :

$$C_f(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R} \quad (\text{II.64})$$

L'équation différentielle correspondante à cette fonction du transfert est donnée par

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D^{-\lambda} e(t) + K_d D^\mu e(t) \quad (\text{II.65})$$

Comme il sera montré sur la figure **figure II.9**, le $PI^\lambda D^\mu$ généralise le *PID* classique et l'étend du point à tout le plan, cette Propriété du régulateur fractionnaire fait preuve de sa flexibilité et de son aptitude à réaliser une commande performante pour une large gamme de procédé, car il possède deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques de système.

a) PID classiqueb) $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire**Figure II.9** : le $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire en comparaison avec le PID classique

II.9 Performances des systèmes fractionnaires

L'analyse fréquentielle et temporelle des systèmes fractionnaires a montré que ce type de système possède de bonnes performances en terme de robustesse [Ou 82],[Sum], pour illustrer ces performances, on s'intéresse à l'analyse et la comparaison de la réponse indicielle d'un système d'ordre entier et celle d'un système d'ordre fractionnaire.

On considère la fonction de transfert de seconde ordre décrite comme suit :

$$G(s) = \frac{k}{(\frac{s}{w_n})^\alpha + 2h(\frac{s}{w_n})^\beta + 1}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R} \quad (\text{II.66})$$

k : Gain statique, ($k = 1$)

w_n : Pulsation de système ($w_n = 1$)

h : Facteur d'amortissement

La réponse indicielle de ce système est effectuée en deux cas différents :

- Premier cas : l'ordre du système est entier $\alpha = 2, \beta = 1$
- deuxième cas : l'ordre du système est fractionnaire $\alpha = 1.5, \beta = 0.7$

Pour chaque cas, on fait varier le facteur d'amortissement h .

Les résultats de simulation sont illustrés sur la figure (III.9)

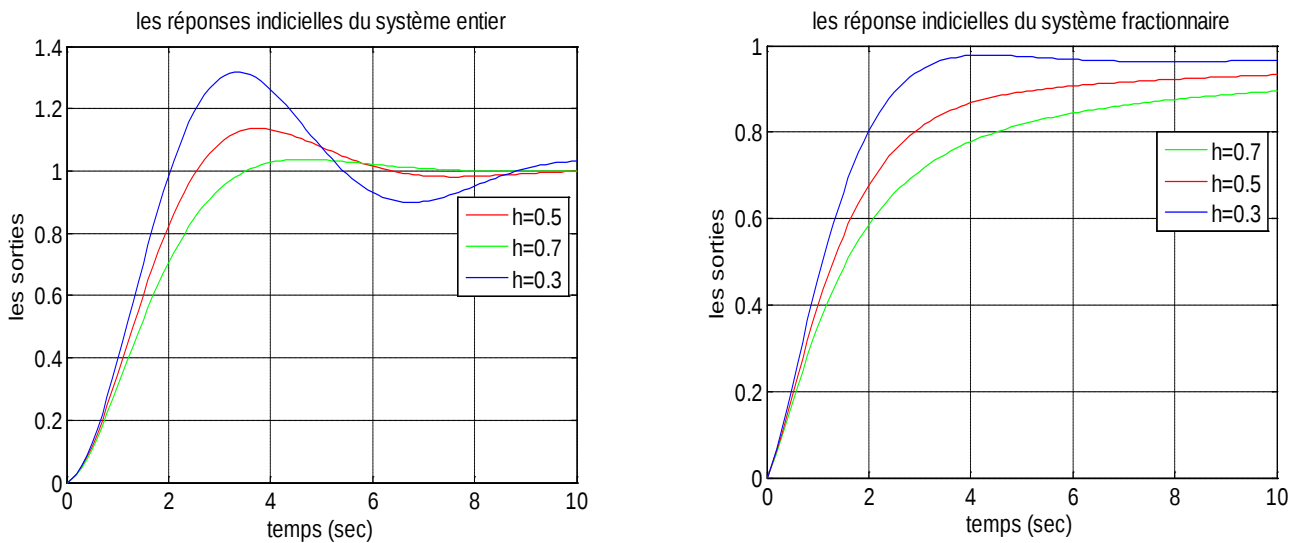


Figure II.9 : Réponse indicielle pour différentes valeurs du facteur d'amortissement h

L'analyse des courbes représentées ci-dessus montre que l'introduction des ordres fractionnaires pour un système du deuxième ordre classique rend le système robuste par rapport aux variations du facteur d'amortissement.

II.10 conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à introduire les notions de base du calcul fractionnaire qui ne cesse d'être appliquées dans plusieurs disciplines de l'automatique.

On a introduit les trois définitions de la dérivée fractionnaire (la définition de Grunwald Leitneikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo), ainsi que leurs propriétés. Puis on a essayé de donner les différentes représentations des systèmes fractionnaires (équation différentielle généralisé, fonction de transfert, représentation d'état), les méthodes d'approximation du dérivateur généralisé dans le cas continu ou discret ont été exposées.

L'apport de la commande d'ordre fractionnaire (COF) a été mis au point par l'introduction des propriétés du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ qui est une généralisation du PID classique avec deux degrés de liberté supplémentaires.

La simulation de la réponse indicielle d'un système fractionnaire nous a permis d'examiner sa robustesse vis-à-vis des variations du coefficient d'amortissement

III-1 Introduction

L'électronique de puissance est une partie de génie électrique qui traite la conversion statique de l'énergie électrique d'une forme à une autre selon le besoin de l'utilisateur, il existe quatre types de convertisseurs selon la nature de l'énergie fournie en entrée et celle obtenue en sortie, la propriété principale de ces dispositifs qui sont très répandus en industrie est leur structure variable, ils comportent des circuits électriques à changement de structure par commutation d'interrupteurs ; il est donc souhaitable d'appliquer à ces convertisseurs des lois de commande qui s'adaptent mieux à leur fonctionnement discontinu en particulier, la technique de la commande par modes glissants.

Ces dernières décennies ont connu des efforts de recherche très remarquables liés au calcul fractionnaire et leurs applications dans la théorie de la commande des systèmes en utilisant des correcteurs d'ordre non entier qui ont fait preuve de bonnes performances notamment en terme de robustesse.

Afin d'illustrer les performances de la commande d'ordre fractionnaire, ce chapitre portera sur la synthèse d'une loi de commande glissante d'un convertisseur DC/DC dit hacheur série en utilisant la structure du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire et celle d'un PID classique comme surface de glissement.

Dans un premier temps, nous donnerons un aperçu général sur le fonctionnement des convertisseurs de puissance DC/DC et leur modélisation. Ensuite, nous synthétiserons une loi de commande par modes glissants en utilisant comme surface de commutation :

- une combinaison linéaire des variables d'état
- la structure du PID classique
- la structure du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire

Nous terminons ce chapitre par des simulations sous le logiciel MATLAB et des comparaisons des résultats obtenus, du point de vue robustesse et performances des trois structures citées ci-dessus.

III-2 Convertisseur de puissance DC/DC

Un convertisseur de puissance continu / continu (direct curent /direct curent) est un

circuit électronique, il a pour but d'assurer la fluence de l'énergie entre une source de tension continue et une source du courant continu, ces convertisseurs sont très utilisés pour l'alimentation et le réglage de la vitesse d'un moteur à courant continu.

La représentation symbolique la plus couramment utilisée d'un convertisseur DC/DC est donnée par le schéma suivant

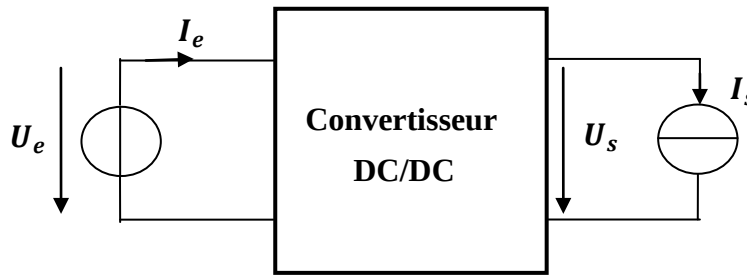


Figure III.1 : représentation symbolique d'un convertisseur DC/DC

Cette représentation nous montre que la source du courant I_s est la charge qui, suivant le mode de fonctionnement absorbe ou restitue de la puissance alors que la source de tension u_e est l'alimentation susceptible de fournir ou de stocker la puissance.

Suivant les signes respectifs des grandeurs de sortie du convertisseur qui définissent la puissance $P_s = u_s I_s$ absorbée par la charge le système se trouve dans l'un des quadrants du plan (u_s, I_s) défini sur la **figure III.2**

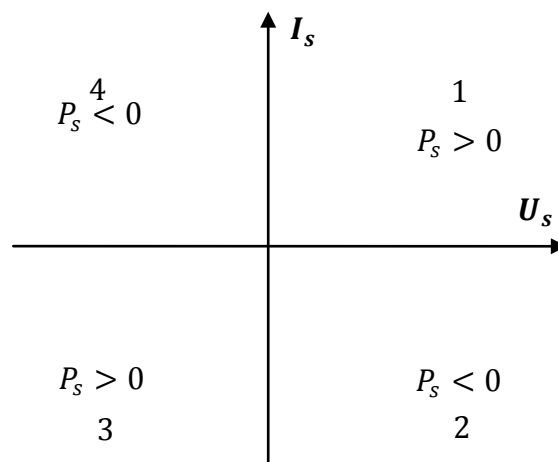


Figure III.2 : Transit de puissance

Dans les quadrants 1 et 3 la fluence de l'énergie se fait de la source de tension vers la source du courant alors que dans les quadrants 2 et 4, la fluence de l'énergie se fait de la source du courant

vers la source de tension, suivant la nature de chacune des sources, le convertisseur devra permettre le fonctionnement dans au moins un de ces quatre quadrants.

Dans notre étude, on s'intéresse à la commande d'un convertisseur DC/DC qui fonctionne dans un seul quadrant, unidirectionnel en courant et en tension, dit hacheur série, abaisseur ou encore dévolteur (**Buck converter en anglais**)

III.2.1 Principe du hacheur série

Le hacheur série permet la fluence de l'énergie entre une source de tension continue et une source du courant continu dans un seul sens. Par un tel convertisseur, on cherche à fixer une tension moyenne $\langle v_c \rangle$ aux bornes de la charge tel que :

- $0 < \langle v_c \rangle < v_g$
- $\langle v_c \rangle$ est réglable en respectant l'intervalle ci-dessus

III.2.2 modélisation du hacheur série

Le circuit électrique de base du hacheur série est schématisé sur la figure suivante :

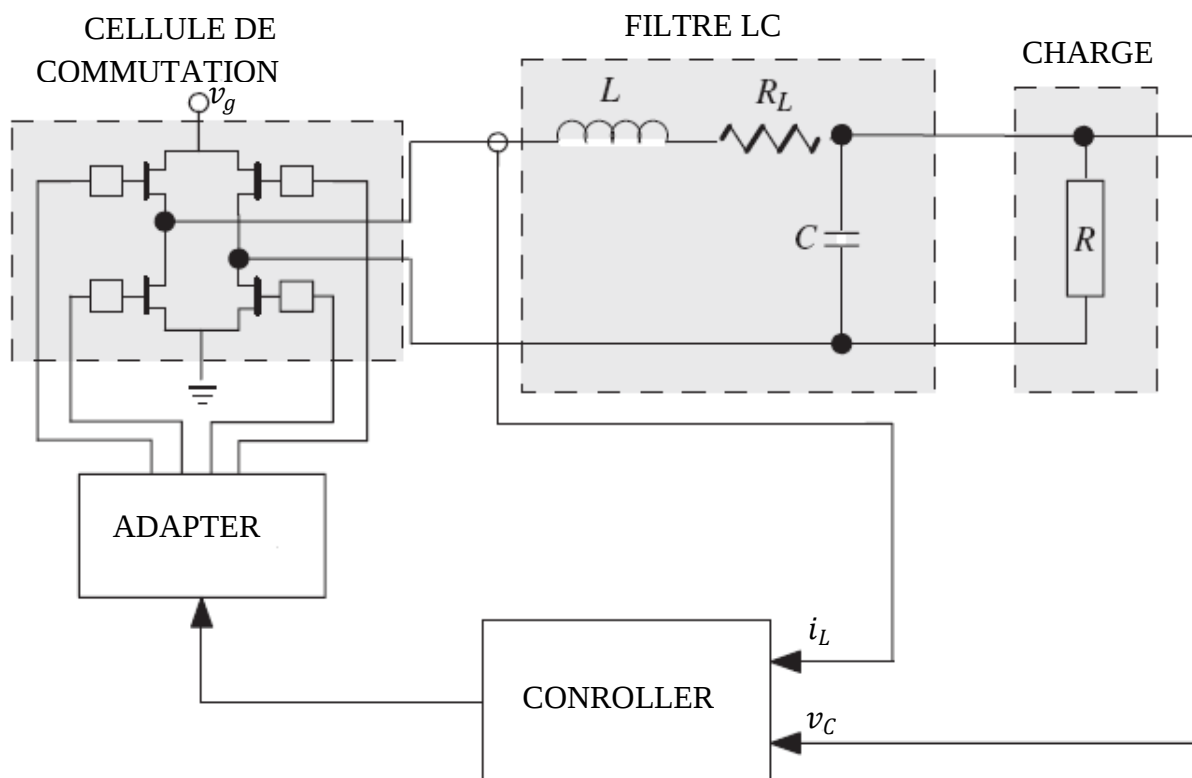


Figure III.3 : Convertisseur Buck

Avec :

L : Inductance

R_L : Résistance interne de l'inductance

C : Capacité

R : Résistance de charge

Pour synthétiser une loi de commande pour le convertisseur, il faut modéliser son comportement dynamique, Le modèle du convertisseur considéré comme un système bilinéaire est donné sous cette forme

$$\dot{x} = Ax + Bv_g u \quad (\text{III.1})$$

Avec $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, A et $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ sont des matrices d'état et de commandabilité respectivement, u est la commande scalaire $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ ($m = 1$), elle prend deux valeurs différentes $\{0,1\}$; pour chaque valeur correspond une structure distincte du hacheur, la tension désirée est obtenue par commutation entre ces deux topologies

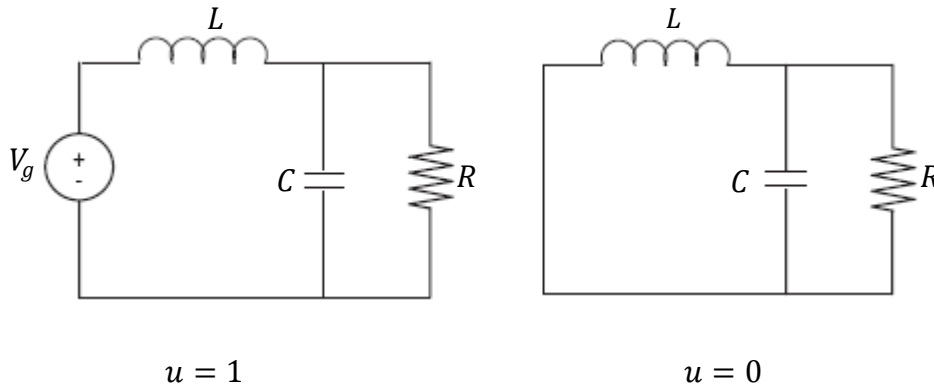


Figure III.4 : Topologies du convertisseur Buck

De la 1^{ère} structure on a

$$v_g = L \frac{di_L}{dt} + v_C \quad (\text{III.2})$$

De la 2^{ème} structure on a

$$0 = L \frac{di_L}{dt} + v_C \quad (\text{III.3})$$

Le système à structure variable est donné par

$$L \frac{di_L}{dt} + v_C = v_g u \quad (\text{III.4})$$

Avec $u \in \{0,1\}$

Si $u = 1$ on aura la 1^{ère} structure

Si $u = 0$ on aura la 2^{ème} structure

De l'équation (III.4) on trouve

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{v_C}{L} + \frac{v_g}{L} u \quad (\text{III.5})$$

On a

$$i_L = i_C + i_R = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} v_C \quad (\text{III.7})$$

Donc La mise sous forme d'état du système est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{III.8})$$

$\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}^T$ Vecteur d'état

i_L : Le courant dans la bobine

v_C : La tension aux bornes du condensateur

La mise sous forme canonique du modèle précédent donne

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_g}{LC} \end{bmatrix} u \quad (\text{III.9})$$

$\begin{bmatrix} v_C \\ \dot{v}_C \end{bmatrix}^T$ Vecteur d'état

L'équation différentielle régissant le comportement dynamique du système est

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_g u \quad (\text{III.10})$$

La transformée de Laplace de l'équation (III.10) nous donne

$$v_g u(s) = v_C(s) \left[LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1 \right] \quad (\text{III.11})$$

La fonction de transfert du système étant :

$$\frac{v_C(s)}{u(s)} = \frac{v_g}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \quad (\text{III.12})$$

Nous pouvons l'écrire aussi sous la forme suivante

$$\frac{v_C(s)}{u(s)} = \frac{v_g}{1 + \left(\frac{2h}{w_0}\right)s + \frac{1}{w_0^2}s^2} \quad (\text{III.13})$$

Avec :

$$\begin{cases} w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ h = \left(\frac{1}{2R}\right) \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

w_0 : Pulsation propre du système

h : Coefficient d'amortissement

On s'intéressera dans la simulation aux variations de la charge R , L et C étant fixes. Les racines de l'équation caractéristique dépendent de la valeur de la charge qu'on peut supposer appartenir à un intervalle limité

$$R_{min} < R < R_{max} \quad (\text{III.15})$$

Le convertisseur est utilisé pour suivre une tension de référence continue v_r .

L'objectif est de contrôler la tension de sortie du hacheur v_c

III.3 Commande du hacheur par modes glissants en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état

La commande par modes glissants s'adapte bien aux convertisseurs statiques grâce à leur structure variable, elle représente une loi de commande très performante pour ce genre de systèmes. La dynamique du système commandé par modes glissants dépend des paramètres de la surface de commutation, ainsi le choix de cette dernière est d'une grande importance.

III .3.1 choix de la surface

Définissons alors la surface de glissement comme suit

$$s = k_1 e_v + k_2 \dot{e}_v \quad (\text{III.16})$$

Où :

$$e_v = v_r - v_c$$

$$s = k_1 (v_r - v_c) + k_2 (\dot{v}_r - \dot{v}_c) \quad (\text{III.17})$$

La dérivée de s donne

$$\dot{s} = -k_1 \dot{v}_C - k_2 \ddot{v}_C \quad (\text{III.18})$$

En remplaçant l'expression de $\ddot{v}_C$ on trouve

$$\dot{s} = \left(-k_1 + \frac{k_2}{RC}\right) \dot{v}_C + \frac{k_2}{LC} v_C - \frac{k_2}{LC} v_g u \quad (\text{III.19})$$

En mettant $\dot{s} = 0$ on trouve

$$u_{eq} = \frac{v_C}{v_g} + \frac{LC}{k_2 v_g} \left(\frac{k_2}{RC} - k_1\right) \dot{v}_C \quad (\text{III.20})$$

En remplaçant l'expression de u_{eq} dans le modèle d'état sous forme canonique on aura le modèle d'état en mode de glissement donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \ddot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

On voit bien que la dynamique du système en mode de glissement dépend seulement des paramètres de la surface

III.3.2 Conditions de convergence

Définissons la loi de commande suivante

$$u = \begin{cases} u^+ = 1 & \text{si } s > 0 \\ u^- = 0 & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

La commande totale à appliquer au système est donnée par

$$u = u_{eq} + u_n \quad (\text{III.23})$$

On remplace u dans l'équation (III.19) on trouve

$$\dot{s} = \left(-k_1 + \frac{k_2}{RC}\right) \dot{v}_C + \frac{k_2}{LC} v_C - \frac{k_2}{LC} v_g (u_{eq} + u_n) \quad (\text{III.24})$$

$$\dot{s} = -\frac{k_2 v_g}{LC} u_n \quad (\text{III.25})$$

La condition de glissement est donnée par

$$s \dot{s} < 0 \quad (\text{III.26})$$

$$s \dot{s} = -s \frac{k_2 v_g}{LC} u_n < 0 \quad (\text{III.27})$$

Il suffit d'avoir

$$s u_n > 0 \quad (III.28)$$

Imposons à la commande de vérifier $u = u^+ > u_{eq} \Rightarrow u_n > 0$ avec $s > 0$

Donc : $s u_n > 0$

Imposons à la commande de vérifier $u = u^- < u_{eq} \Rightarrow u_n < 0$ avec $s < 0$

Donc : $s u_n > 0$

Ce qui implique que $s\dot{s} < 0$ est toujours vérifiée

III .3.3 Détermination des coefficients de la surface

A partir de l'équation (III.19), et de la condition de glissement(III.26), on a

Lorsque : $s > 0$, $u = u^+ = 1$

$$\dot{s} = \left(-k_1 + \frac{k_2}{RC}\right) \dot{v}_C + \frac{k_2}{LC} v_C - \frac{k_2}{LC} v_g < 0 \quad (III.29)$$

Lorsque $s < 0$, $u = u^- = 0$

$$\dot{s} = \left(-k_1 + \frac{k_2}{RC}\right) \dot{v}_C + \frac{k_2}{LC} v_C > 0 \quad (III.30)$$

En rassemblant les inégalités (III.29) et (III.30) on aura

$$0 < \left(-k_1 + \frac{k_2}{RC}\right) \dot{v}_C + \frac{k_2}{LC} v_C < \frac{k_2}{LC} v_g \quad (III.31)$$

Afin de satisfaire l'inégalité

$$\text{On prend } k_1 = 1 \text{ et } k_2 > RC \quad (III.32)$$

III .3 .4 rejet de perturbations

Considérons ce modèle d'état perturbé

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{v}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ v_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_g}{LC} \end{bmatrix} u + d \quad (III.33)$$

La commande équivalente est donnée dans ce cas par

$$u_{eq} = \frac{v_c}{v_g} + \frac{LC}{k_2 v_g} \left(\frac{k_2}{RC} - k_1 \right) \dot{v}_C - \frac{LC}{v_g} d \quad (III.34)$$

Afin de garantir le rejet de perturbation, il faut

$$k > \max \left| -\frac{LC}{v_g} d \right| \quad (\text{III.35})$$

III .3.5 résultats de simulation et interprétation

Les valeurs des paramètres du hacheur sont données ainsi

$$R = 117 \, \Omega, L = 3.24 \times 10^{-3} \text{ mH}, C = 48 \times 10^{-6} \, \mu\text{F}, v_g = 20 \text{ volt}, v_r = 10 \text{ volt}, R_L = 0 \, \Omega$$

On a choisi les paramètres de la surface en vérifiant la condition (III.32) comme suit

$$k_1 = 1 \text{ et } k_2 = 5.7 \times 10^{-3}$$

Le gain de la commande discontinue est fixée à $k = 0.009$

Le temps de simulation est fixé à $t_f = 0.1 \text{ secondes}$ avec un pas de simulation de 0.0001 secondes

On considère les conditions initiales nulles pour la tension de charge et le courant dans la bobine

Les résultats de simulation sont donnés sur **la figure III.5.a**, d'après les courbes obtenues, on constate bien que la tension de sortie du hacheur suit la tension désirée avec une erreur statique de 10%, le régime glissant est atteint après un temps de 0.045 seconde , le courant dans l'inductance, qui était initialement nul passe à 0.008 ampère

La commande équivalente atteint la valeur 0.5

Afin de vérifier la robustesse de cette commande vis-à-vis des incertitudes paramétriques, des variations de 40% et de 70% de la valeur nominale de la charge résistive ont été introduites, les courbes de **la figure III.5.b** montrent que la commande est insensible aux variations paramétriques.

Des perturbations sous forme sinusoïdale de période 0.02 secondes d'amplitude 10 et 100 ont été rajoutées sur la tension de sortie du hacheur, les courbes de **la figure III.5.c** représentatives des résultats de simulation montrent que la commande est robuste vis-à-vis de ces perturbations qui vérifient le théorème de recouvrement.

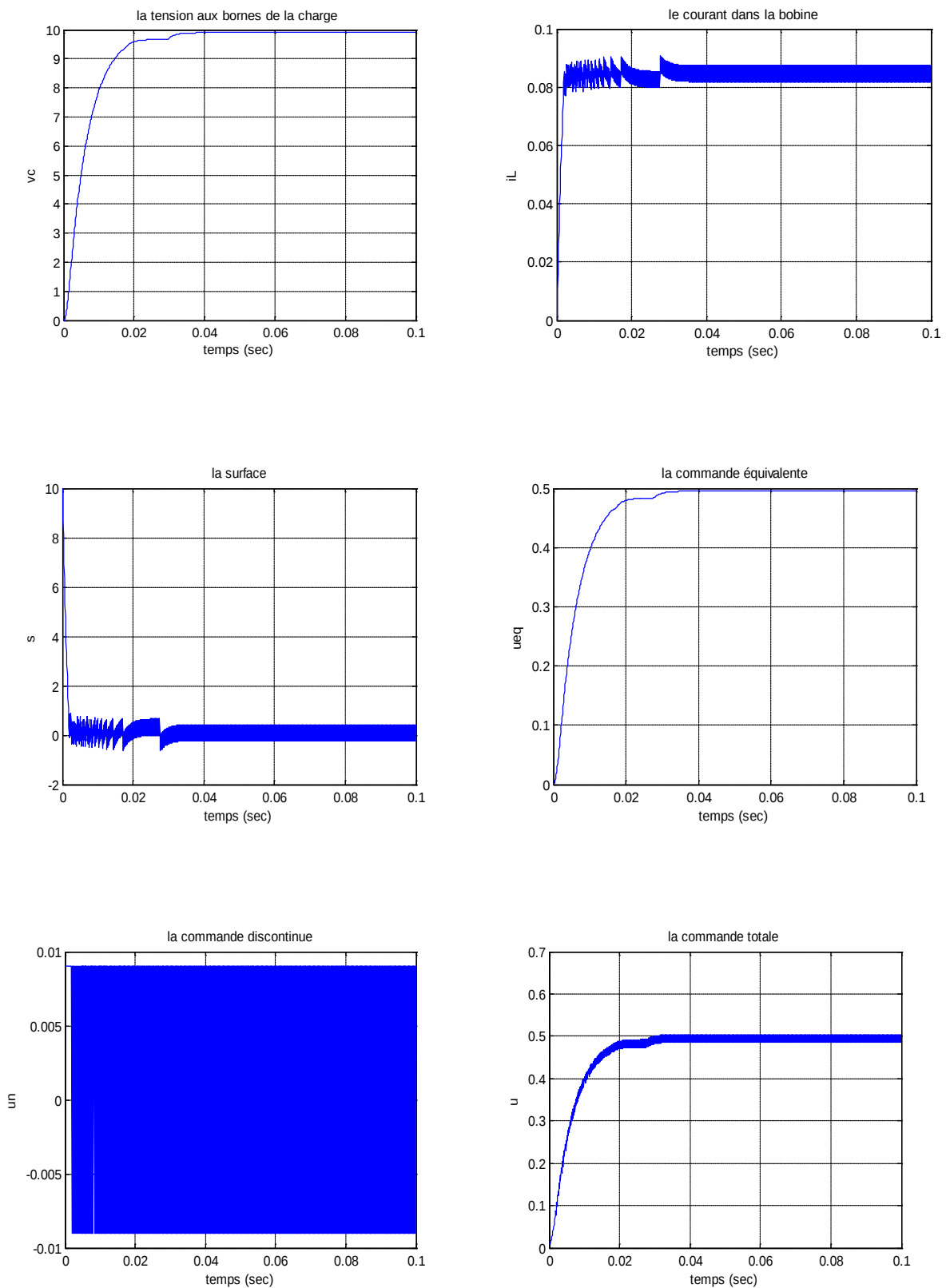


Figure III.5.a : Résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état

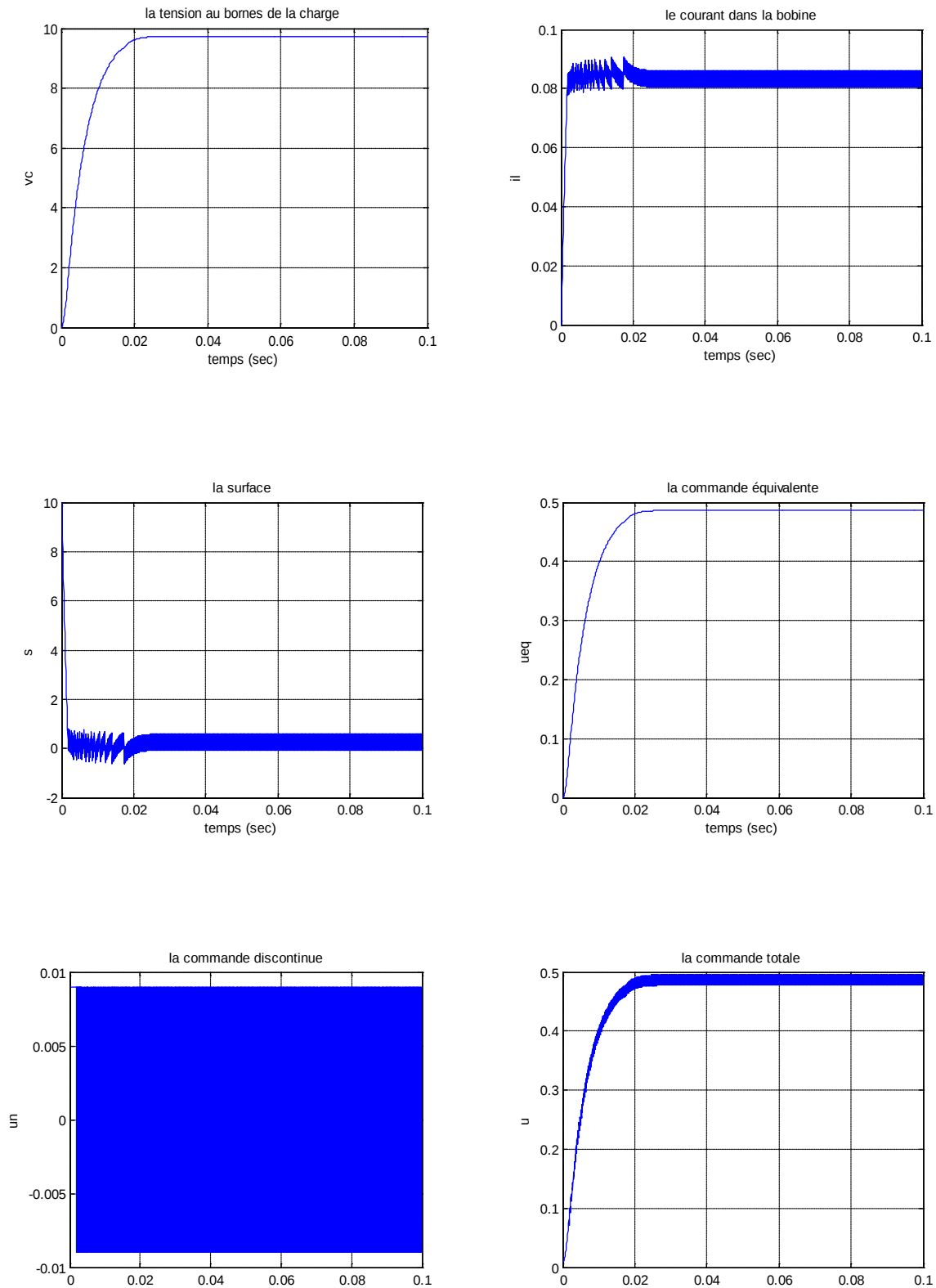


Figure III.5.b : résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état avec une variation paramétrique sur la charge 40%

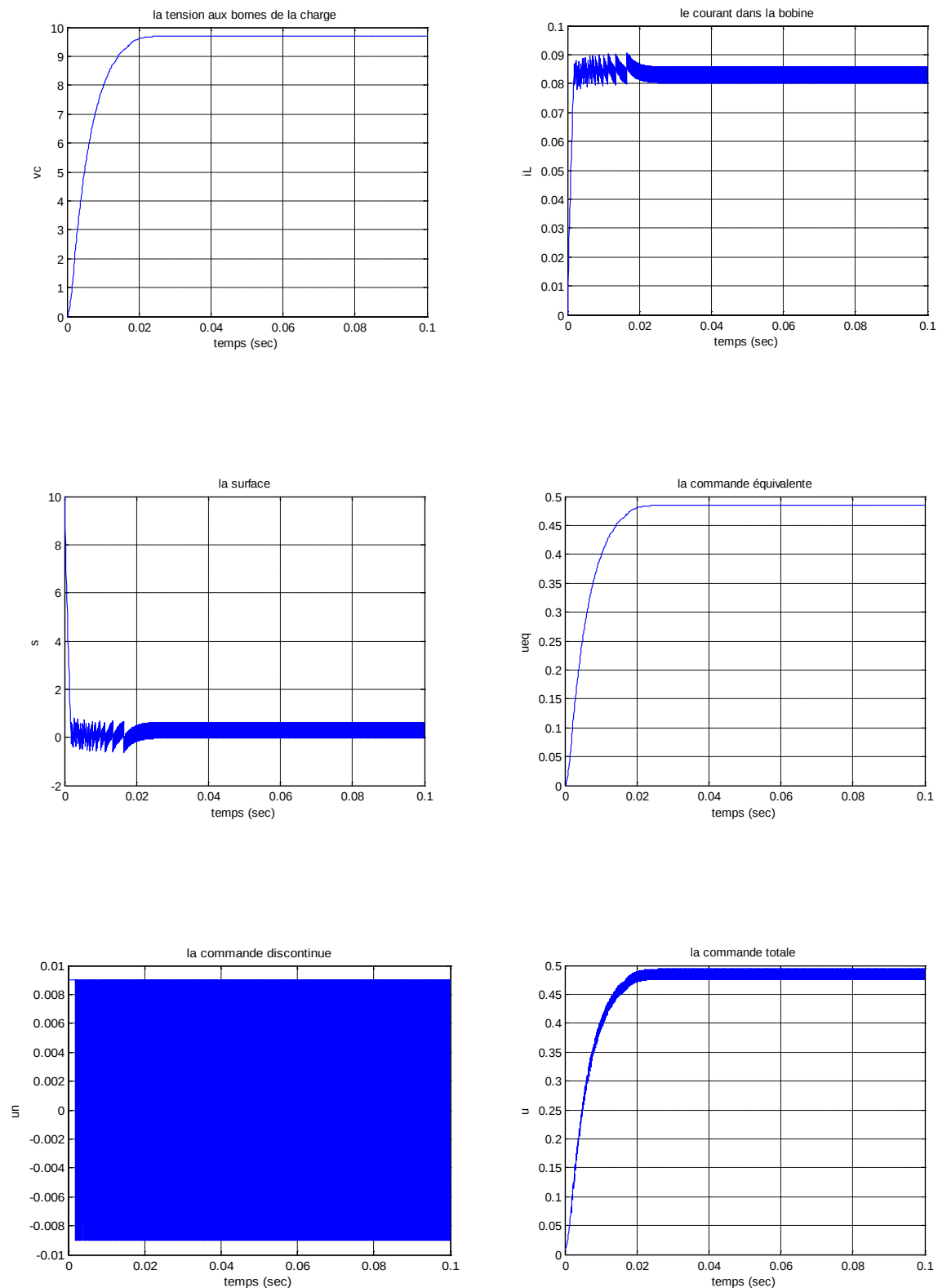


Figure (III.5.c) : résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état avec une variation paramétrique sur la charge 70%

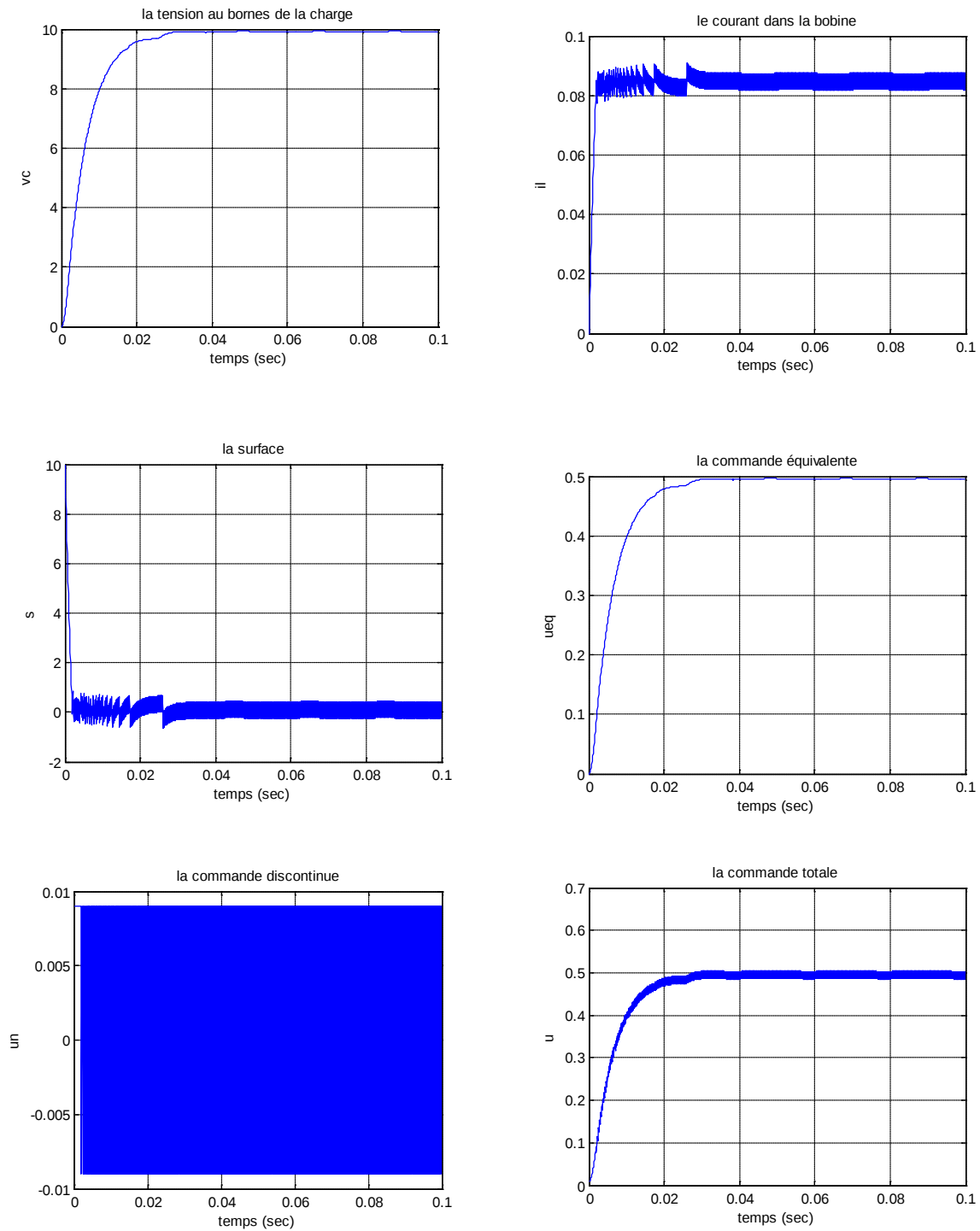


Figure (III.5.d) : résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état avec une perturbation d'amplitude de 10 sur la tension de sortie

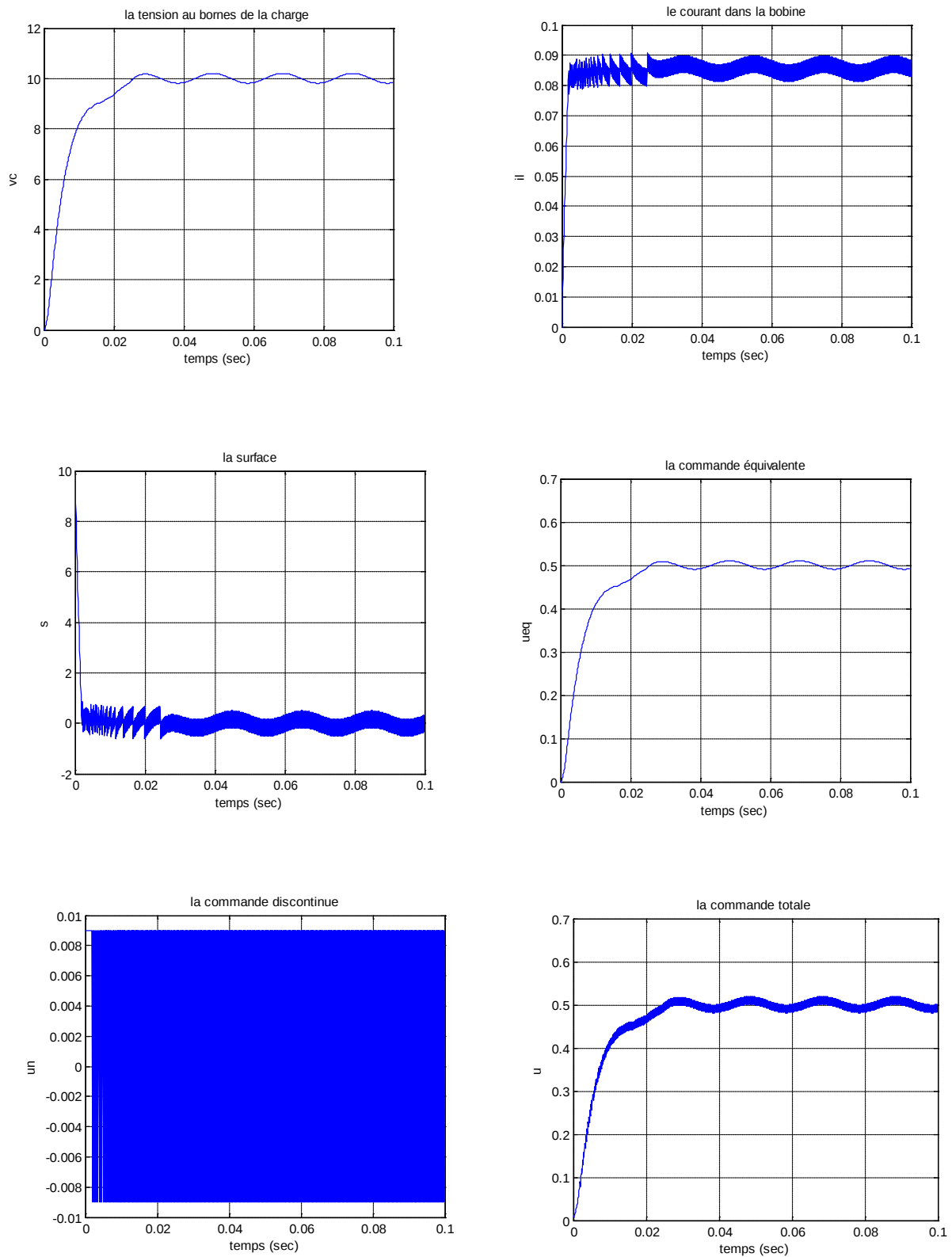


Figure III.5.e: résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement une combinaison linéaire des variables d'état avec une perturbation d'amplitude de 100 sur la tension de sortie

III.4 commande par modes glissants en utilisant la structure du correcteur *PID* classique comme surface de glissement

III.4.1 choix de la surface

Dans ce cas la surface de glissement choisie ainsi

$$s = k_p(v_r - v_c) + k_i \int (v_r - v_c) dt + k_d \frac{d(v_r - v_c)}{dt} \quad (\text{III.36})$$

k_p, k_i et k_d sont les paramètres de la surface à déterminer

En utilisant le modèle d'état du système sous forme canonique (III.9), la dynamique de la sortie v_c en boucle ouverte est donnée par

$$\ddot{v}_c + \frac{1}{RC} \dot{v}_c + \frac{1}{LC} v_c = \frac{v_g}{LC} u \quad (\text{III.37})$$

Le schéma block du convertisseur avec le système de commande est donné sur la figure suivante

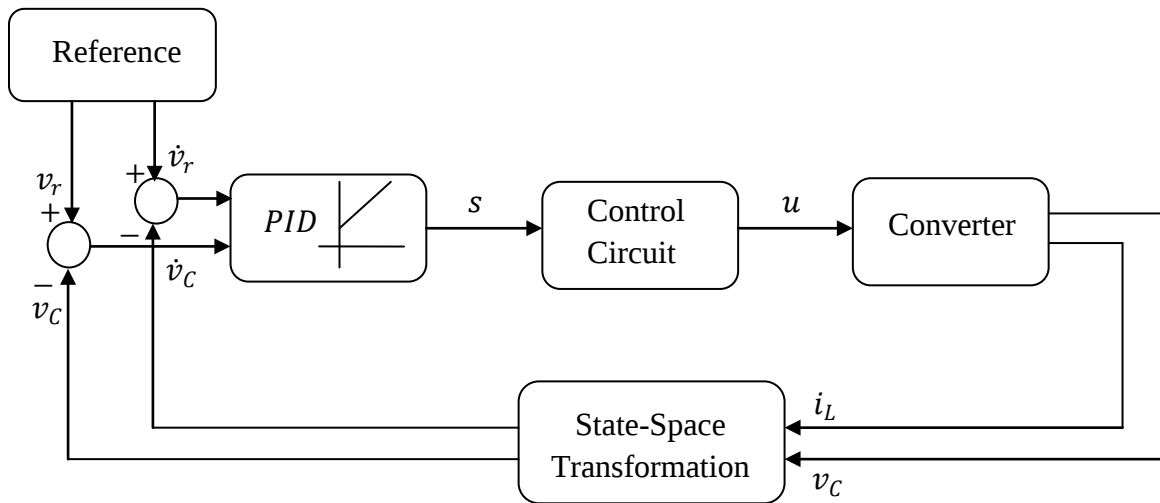


Figure III.6 : Schéma bloc de système de commande

A partir des mesures sur les variables i_L et v_c , et après une transformation d'état on aura le vecteur d'état $\begin{bmatrix} v_c \\ \dot{v}_c \end{bmatrix}^T$

La dérivée de s donne

$$\dot{s} = -k_p \dot{v}_c + k_i (v_r - v_c) - \ddot{v}_c \quad (\text{III.38})$$

On remplace les expressions de $\ddot{v}_c$, on aura

$$\dot{s} = \left(-k_p + \frac{k_d}{RC}\right) \dot{v}_c + k_i(v_r - v_c) + \frac{k_d}{LC} v_c - \frac{k_d}{LC} v_g u \quad (\text{III.39})$$

En mettant ($\dot{s} = 0$) on obtient l'expression de la commande équivalente donnée par

$$u_{eq} = \frac{v_c}{v_g} + \frac{k_i LC}{k_d v_g} (v_r - v_c) - \frac{LC}{k_d v_g} \left(k_p - \frac{k_d}{RC}\right) \dot{v}_c \quad (\text{III.40})$$

Avec : $\dot{v}_c = -\frac{v_c}{R} + \frac{i_L}{C}$ on aura

$$u_{eq} = \frac{v_c}{v_g} + \frac{k_i LC}{k_d v_g} (v_r - v_c) - \frac{L}{k_d v_g} \left(k_p - \frac{k_d}{RC}\right) \left(i_L - \frac{v_c}{R}\right) \quad (\text{III.41})$$

En remplaçant l'expression de u_{eq} donnée par (III.40) dans le modèle d'état sous forme canonique on aura le modèle d'état en mode de glissement donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_i}{k_d} & -\frac{k_p}{k_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_g}{LC} \end{bmatrix} v_r \quad (\text{III.42})$$

On voit bien que la dynamique du système en mode de glissement dépend seulement des paramètres de la surface.

Alors, la dynamique de v_c en boucle fermée est donnée par

$$\ddot{v}_c + \frac{k_p}{k_d} \dot{v}_c + \frac{k_i}{k_d} v_c = \frac{v_g}{LC} v_r \quad (\text{III.43})$$

Pour que v_c atteigne la surface de glissement, il faut vérifier

$$\frac{k_p}{k_d} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{k_i}{k_d} > 0 \quad (\text{III.44})$$

$$\text{Afin de satisfaire la condition de glissement} \quad 0 < u_{eq} < 1 \quad (\text{III.45})$$

En prenant en considération les conditions d'équilibre

- $v_c = 0$ et $i_L = 0$
- $v_c = v_r$ et $i_L = 0$

Les paramètres k_p, k_i et k_d vérifient les inégalités suivantes

$$0 < \frac{k_i}{k_d} < \frac{v_g}{LC v_r} \quad (\text{III.46})$$

$$0 < \frac{k_p}{k_d} < \frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \left(\frac{v_g}{v_r} - 1\right) \quad (\text{III.47})$$

III .4.2 Conditions de convergence

On remplace u (III.23) avec l'expression de u_{eq} (III.40) dans l'expression de $\dot{s}$, on trouve

$$\dot{s} = -\frac{k_d v_g}{LC} u_n \quad (III.48)$$

On refait la même démarche suivie dans la section précédente, on trouve que $s u_n > 0$ est toujours vérifiée, par conséquent la condition de glissement $s\dot{s} < 0$ est satisfaite

III .4 .3 rejet de perturbations

Supposant le modèle perturbé donné par (III.33)

L'expression de u_{eq} est donnée par

$$u_{eq} = \frac{v_c}{v_g} + \frac{k_i LC}{k_d v_g} (v_r - v_c) - \frac{LC}{k_d v_g} \left(k_p - \frac{k_d}{RC} \right) \dot{v}_c + \frac{dLC}{k_d v_g} \quad (III.49)$$

Afin de garantir le rejet des perturbations, il faut vérifier

$$k > \max \left| \frac{LC}{k_d v_g} \right| \text{ pour } d = 1 \quad (III.50)$$

III .4.4 résultats de simulation et interprétation

Avec les mêmes valeurs des paramètres du hacheur

Afin de satisfaire les conditions (III.44), (III.46), (III.47), on choisit les valeurs des paramètres de la surface ainsi

$$k_p = 1, k_i = 20, k_d = 0.25 \times 10^{-3}$$

Le gain de la commande discontinue

$$k = 0.03, \text{ le temps de simulation est fixé à } 0.2 \text{ secondes et le } \Delta t \text{ à } 0.0001 \text{ secondes}$$

Les résultats de simulation sont donnés sur **la figure III.7.a**, d'après la courbe de la tension de sortie on constate que l'erreur statique devient nulle grâce à l'introduction de l'action intégrale dans l'expression de la surface.

La courbe présente un dépassement de 12%, le temps de glissement a diminué et est passé à 0.035 secondes.

En introduisant les mêmes variations paramétriques que dans le premier cas, les courbes de **la figure III.7.b** et celle **de la figure III.7.c** montrent que le système est insensible aux incertitudes paramétriques.

Dans **les figures III.7.d et III.7.e** la robustesse de la commande vis-à-vis des perturbations extérieures est vérifiée en introduisant une perturbation sous forme sinusoïdale d'amplitude 10 et 100 respectivement sur la tension de charge.

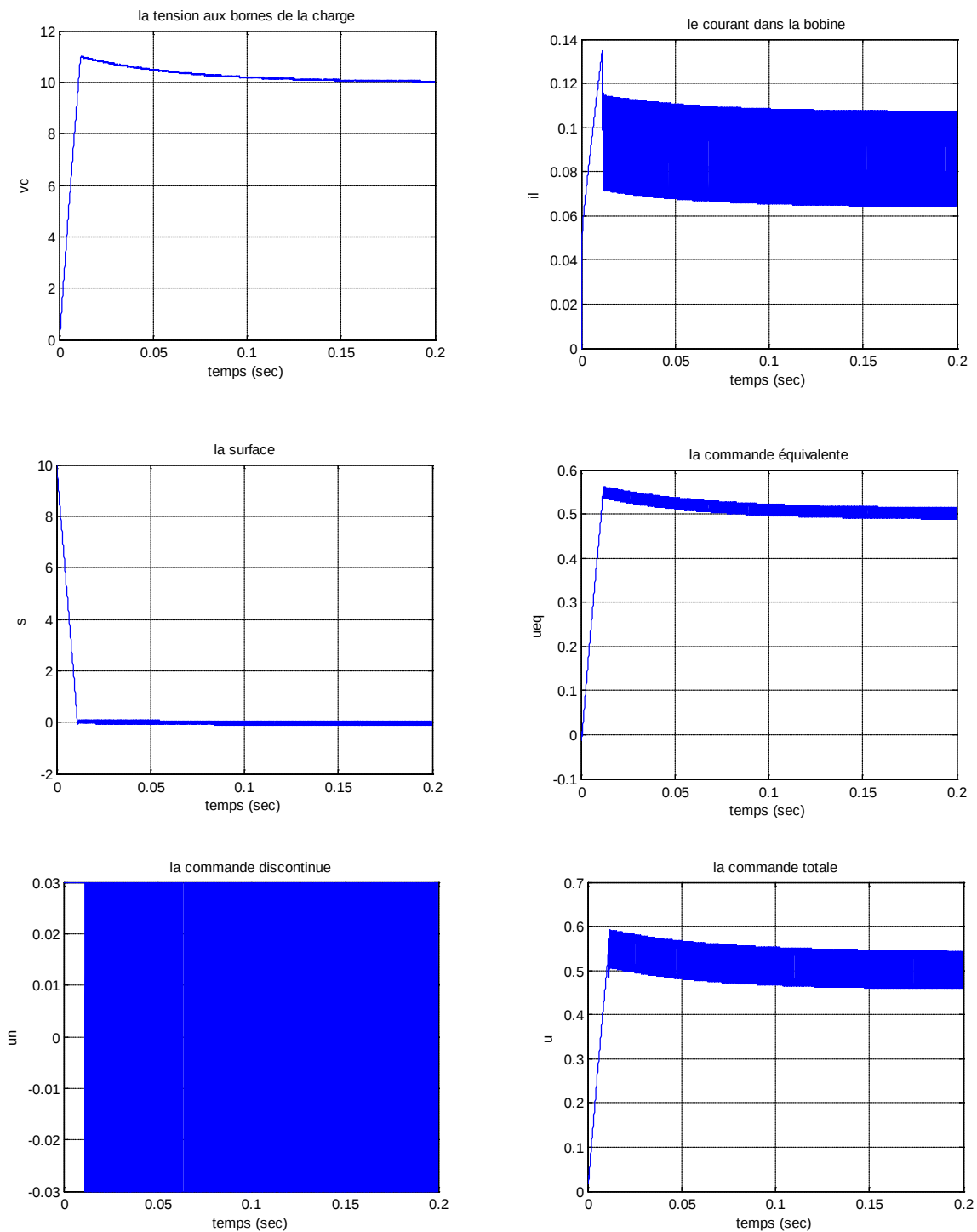


Figure III.7.a : Résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement la structure D'un *PID* classique.

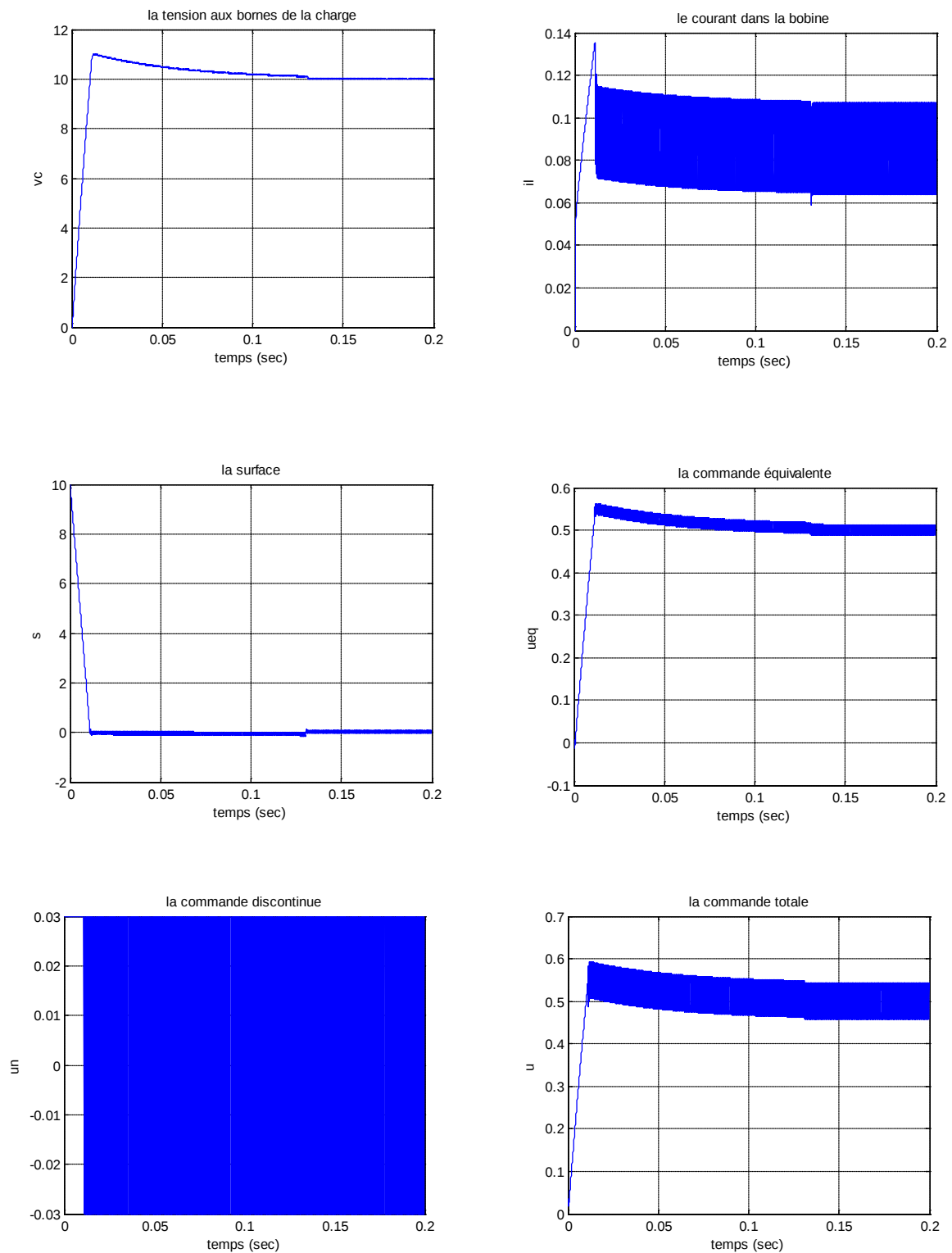


Figure III.7.b : Résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement la structure d'un *PID* classique avec une variation paramétrique de 40% sur la charge résistive

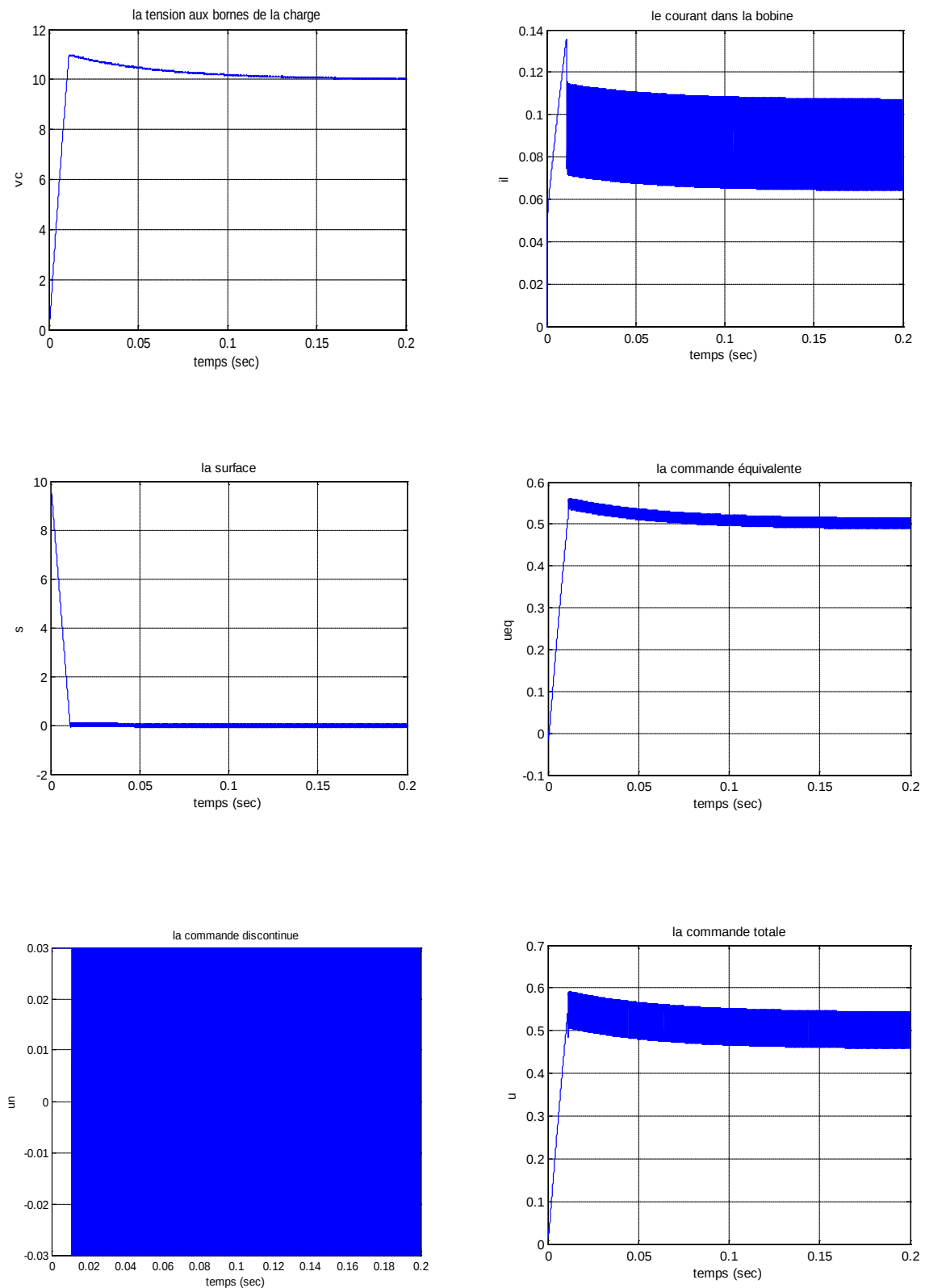


Figure III.7.c Résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement la structure d'un *PID* classique avec une variation paramétrique de 70% sur la charge résistive

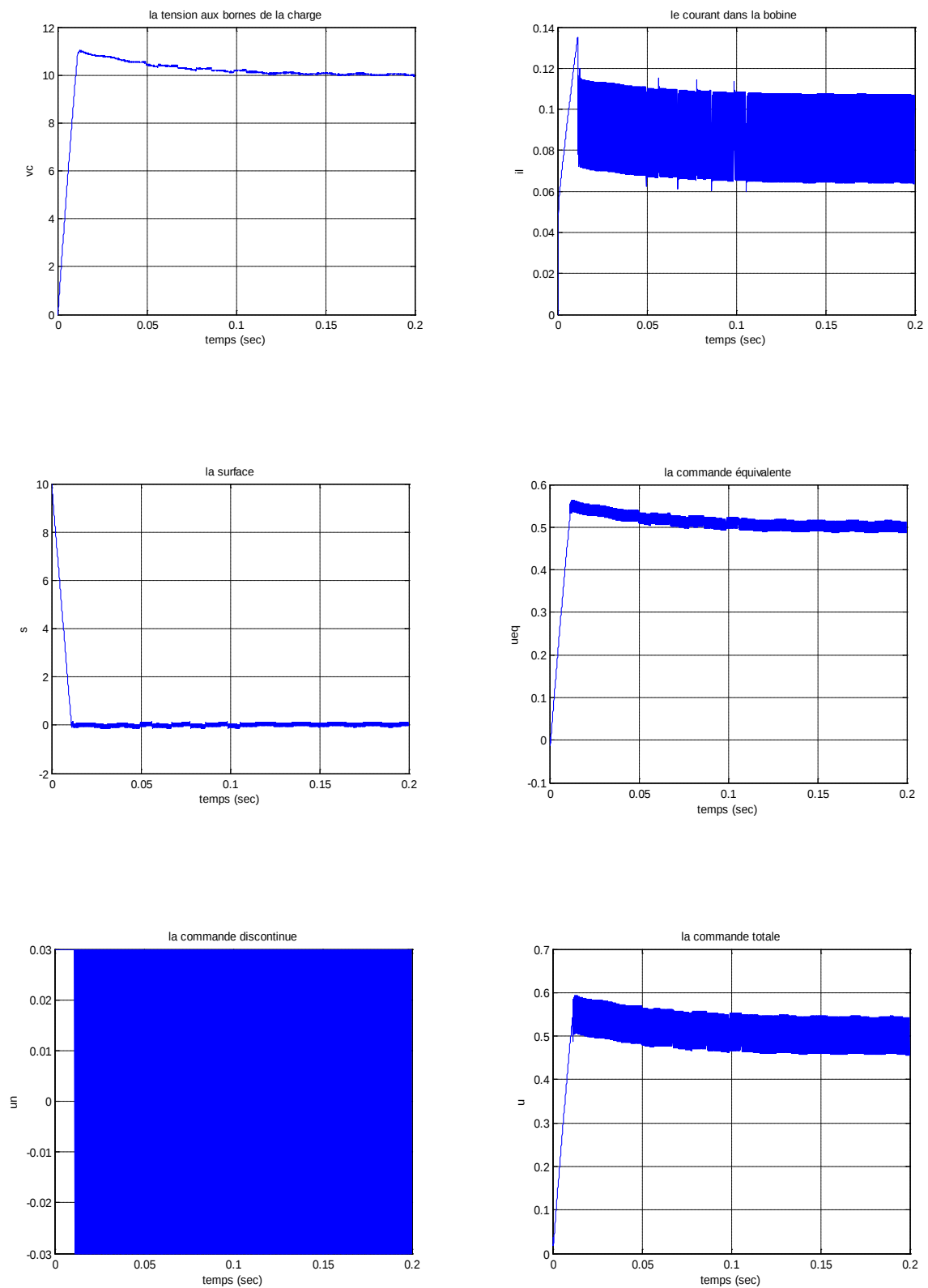


Figure III.7.d : Résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement la structure d'un *PID* classique avec une perturbation extérieure d'amplitude 10 sur la sortie.

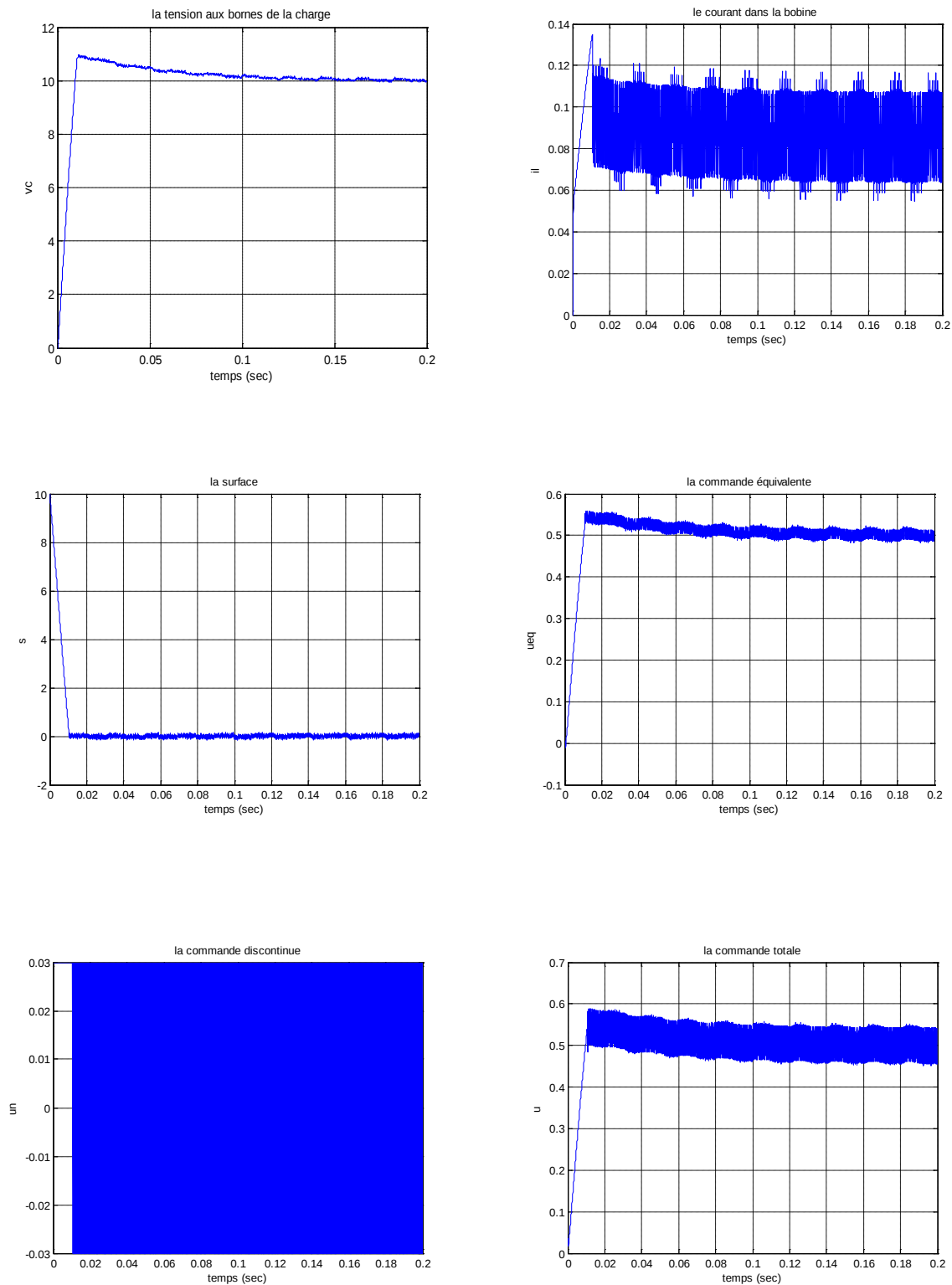


Figure III.7.e : Résultats de simulation en utilisant comme surface de glissement la structure d'un *PID* classique avec une perturbation extérieure d'amplitude 100 sur la sortie

III.5 commande par mode glissant en utilisant la structure du correcteur **$PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire comme surface de glissement****III.5.1 choix de la surface**

La surface de glissement avec la structure du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire est donnée comme suit :

$$s = k_p(v_r - v_c) + k_i D^{-\lambda}(v_r - v_c) + k_d D^\mu(v_r - v_c) \quad (\text{III.51})$$

Où

k_p, k_i, k_d, λ et μ sont les paramètres de la surface à déterminer

$$0 < \lambda < 2 \text{ et } 0 < \mu < 1 \quad (\text{III.52})$$

La dérivée de la surface donne

$$\dot{s} = k_p D(v_r - v_c) + k_i D D^{-\lambda}(v_r - v_c) + k_d D D^\mu(v_r - v_c) \quad (\text{III.53})$$

$$\dot{s} = k_p(\dot{v}_r - \dot{v}_c) + k_i D^{1-\lambda}(v_r - v_c) + k_d D^{1+\mu}(v_r - v_c) \quad (\text{III.54})$$

On a :

$$v_r = \text{constante} \Rightarrow \dot{v}_r = \ddot{v}_r = 0$$

En utilisant les propriétés de la dérivée fractionnaire on trouve

$$\dot{s} = -k_p \dot{v}_c + k_i D^{1-\lambda}(v_r - v_c) - k_d D^{\mu-1} \ddot{v}_c \quad (\text{III.55})$$

En remplaçant l'expression de $\ddot{v}_c$, on obtient

$$\dot{s} = -k_p \dot{v}_c + k_i D^{1-\lambda}(v_r - v_c) - k_d D^{\mu-1} \left(\frac{1}{LC} v_c + \frac{1}{RC} \dot{v}_c - \frac{1}{LC} v_g u \right) \quad (\text{III.56})$$

En mettant $\dot{s} = 0$ on trouve l'expression de la commande équivalente

$$u_{eq} = \frac{v_c}{v_g} + \frac{k_i LC}{k_d v_g} D^{2-\lambda-\mu}(v_r - v_c) - \frac{L k_p C}{k_d v_g} D^{1-\mu} \dot{v}_c + \frac{L}{R v_g} \dot{v}_c \quad (\text{III.57})$$

Avec : $\dot{v}_c = -\frac{v_c}{R} + \frac{i_L}{C}$, on aura

$$u_{eq} = \frac{v_c}{v_g} + \frac{k_i LC}{k_d v_g} D^{2-\lambda-\mu} (v_r - v_c) - \frac{Lk_p}{k_d v_g} D^{1-\mu} \left(i_L - \frac{V_c}{R} \right) + \frac{L}{RC v_g} \left(i_L - \frac{V_c}{R} \right) \quad (\text{III.58})$$

L'expression de la commande équivalente est en fonction des variables d'état et de leurs dérivées fractionnaires

Si $\lambda = \mu = 1$

On aura l'expression de u_{eq} obtenue en (III.40) dans le cas d'un PID classique

Afin de satisfaire la condition de glissement $0 < u_{eq} < 1$

En prenant en considération les conditions d'équilibre suivantes

- $v_c = 0$ et $i_L = 0$
- $v_c = v_r$ et $i_L = 0$

Les paramètres k_p, k_i et k_d vérifient les inégalités suivantes

$$0 < \frac{k_i}{k_d} < \frac{v_g}{LC D^{2-\lambda-\mu} v_r} \quad (\text{III.59})$$

$$0 < \frac{k_p}{k_d} < \frac{1}{D^{1-\mu} v_r} \left(\frac{v_r}{RC} - \frac{Rv_r}{L} + \frac{Rv_g}{L} \right) \quad (\text{III.60})$$

Le schéma block du convertisseur et le système de commande est le même représenté sur la figure (III.5) en remplaçant le block du régulateur PID classique par celui d'un PID fractionnaire.

III .5.2 Conditions de convergence

En remplaçant les expressions de u et u_{eq} données par les équations (III.23) et (III.56) dans l'expression de $\dot{s}$, on trouve

$$\dot{s} = -\frac{k_d v_g}{LC} D^{1-\mu} u_n \quad (\text{III.61})$$

$$u_n = k \text{ signe}(s)$$

$$\dot{s} = -\frac{k k_d v_g}{LC} D^{1-\mu} \text{ signe}(s) \quad (\text{III.62})$$

La dérivée d'une constante c est donnée par

$$D^\alpha c = c \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

La fonction signe est donnée ainsi

$$\text{signe}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\text{Si } s > 0 \quad \dot{s} = -\frac{k k_d v_g}{LC} D^{1-\mu} 1 = -\frac{k k_d v_g}{LC} \frac{t^{-1+\mu}}{\Gamma(\mu)} \quad (\text{III.63})$$

$$\text{Si } s < 0 \quad \dot{s} = \frac{k k_d v_g}{LC} D^{1-\mu} 1 = \frac{k k_d v_g}{LC} \frac{t^{-1+\mu}}{\Gamma(\mu)} \quad (\text{III.64})$$

D'après le tracé de la fonction $\frac{t^{-1+\mu}}{\Gamma(\mu)}$, on déduit qu'elle est positive quelque soit t

Donc : $s\dot{s} < 0$ est vérifiée

III .4 .3 rejet de perturbations

On refait la même démarche suivie précédemment, on trouve que pour garantir le rejet de perturbations, on doit satisfaire la condition

$$k > \max \left| \frac{LC}{k_d v_g} \right|$$

III.5 .4 résultats de simulation et interprétation

Afin de satisfaire les conditions (III.59) et (III.60), on choisit les valeurs des paramètres de la surface ainsi

$$k_p = 100, \quad k_i = 20, \quad k_d = 1.25$$

Le gain de la commande discontinue est fixé à $k = 0.01$

Le temps de simulation est fixé à 0.1 secondes et le pas de simulation à 0.0001secondes

Les résultats obtenus avec une surface de glissement structurée sous forme d'un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire avec l'ordre d'intégration égal à 1.06 et l'ordre de dérivation égal à 0.7 sont donnés à **la figure III.8.a**. D'après les courbes, le système est devenu plus rapide avec un suivi de référence meilleur, sans dépassement, le temps de glissement est passé à 0.01secondes.

En introduisant les mêmes variations paramétriques que dans les cas précédent, les courbes des **figure III.8.b et III.8.c** montrent que la commande est robuste aux variations paramétriques.

Les courbes des **figure III.8.d et figure III.8.e** montrent que la commande est robuste aux perturbations extérieures introduites.

Pour illustrer l'effet des ordres de dérivation et d'intégration sur le comportement dynamique du système, on fait les variations suivantes :

On fixe la constante d'intégration λ à 1.06

Pour $\mu = 0.9$: les résultats de simulation sont donnés sur **la figure III.8.f**, d'après les courbes on voit bien que le système est toujours stable, il ya un suivi de référence

Pour $\mu = 1.09$: les résultats obtenus sont montrés sur **la figure III.8.g**, d'après les courbes on voit clairement que le système devient lent avec un dépassement ver le bas, mais toujours stable

Pour $0 < \mu < 0.5$: le comportement dynamique du système est mauvais.

Pour $0.7 < \mu < 0.9$: un bon comportement dynamique

Pour $\mu > 0.9$: le système commence à devenir lent avec un dépassement ver le bas qui devient important en augmentant μ et le système commence à se déstabiliser.

On fixe la constante de dérivation μ à 0.7

Pour $\lambda = 0.2$: les résultats de simulation sont donnés sur **la figure III.8.f**, d'après les courbes on voit bien que le système a un bon comportement dynamique.

Pour $\lambda = 1.09$: les résultats de simulation sont donnés sur **la figure III.8.i**, d'après les courbes on voit bien que le système a un bon comportement dynamique

Les tests que nous avons faits en variant $0 < \lambda < 2$ montrent que le système est stable et présente de bonnes performances et un bon suivi de référence.

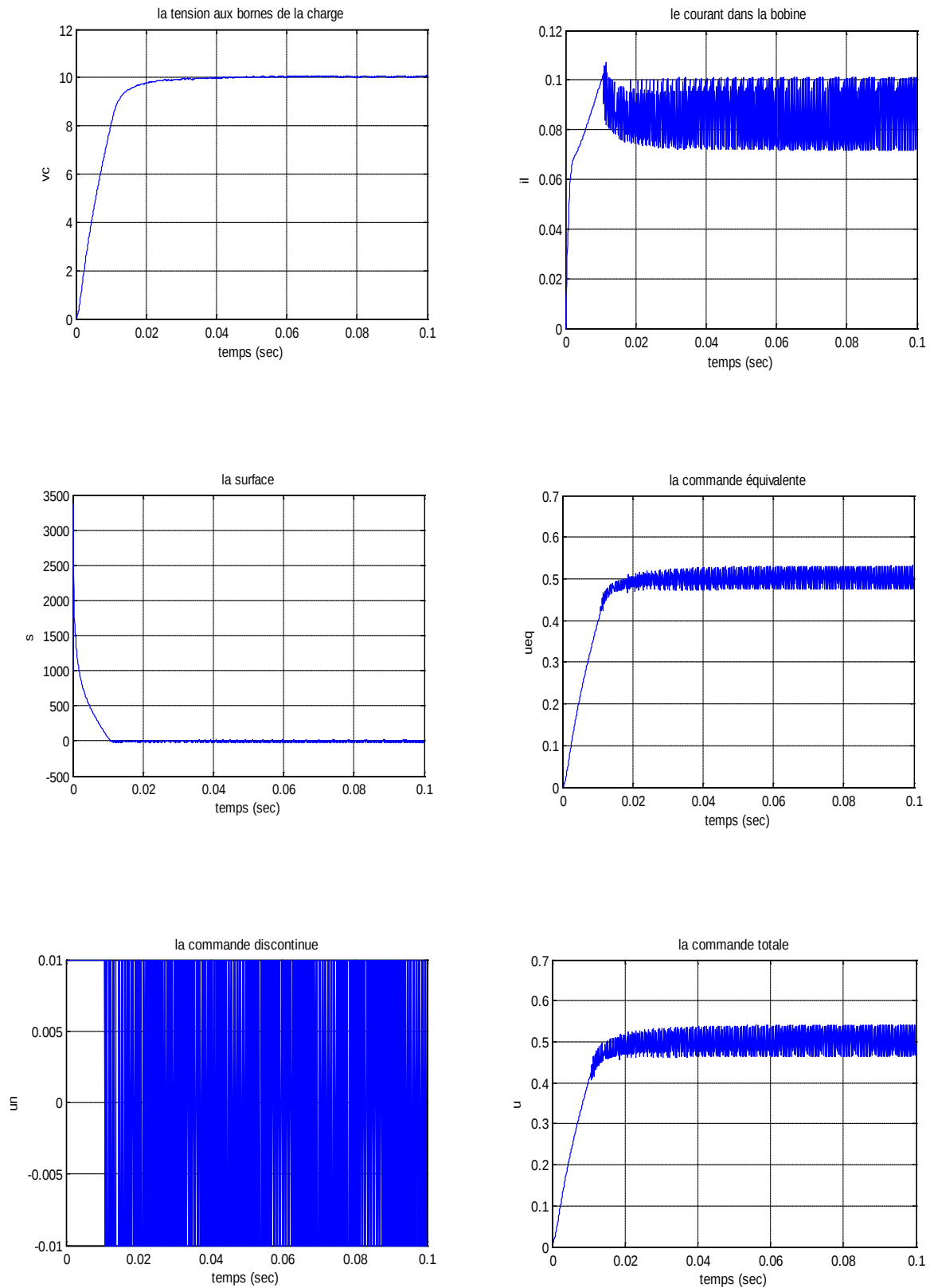


Figure III.8.a : Résultats de simulation avec PID fractionnaire comme surface de glissement

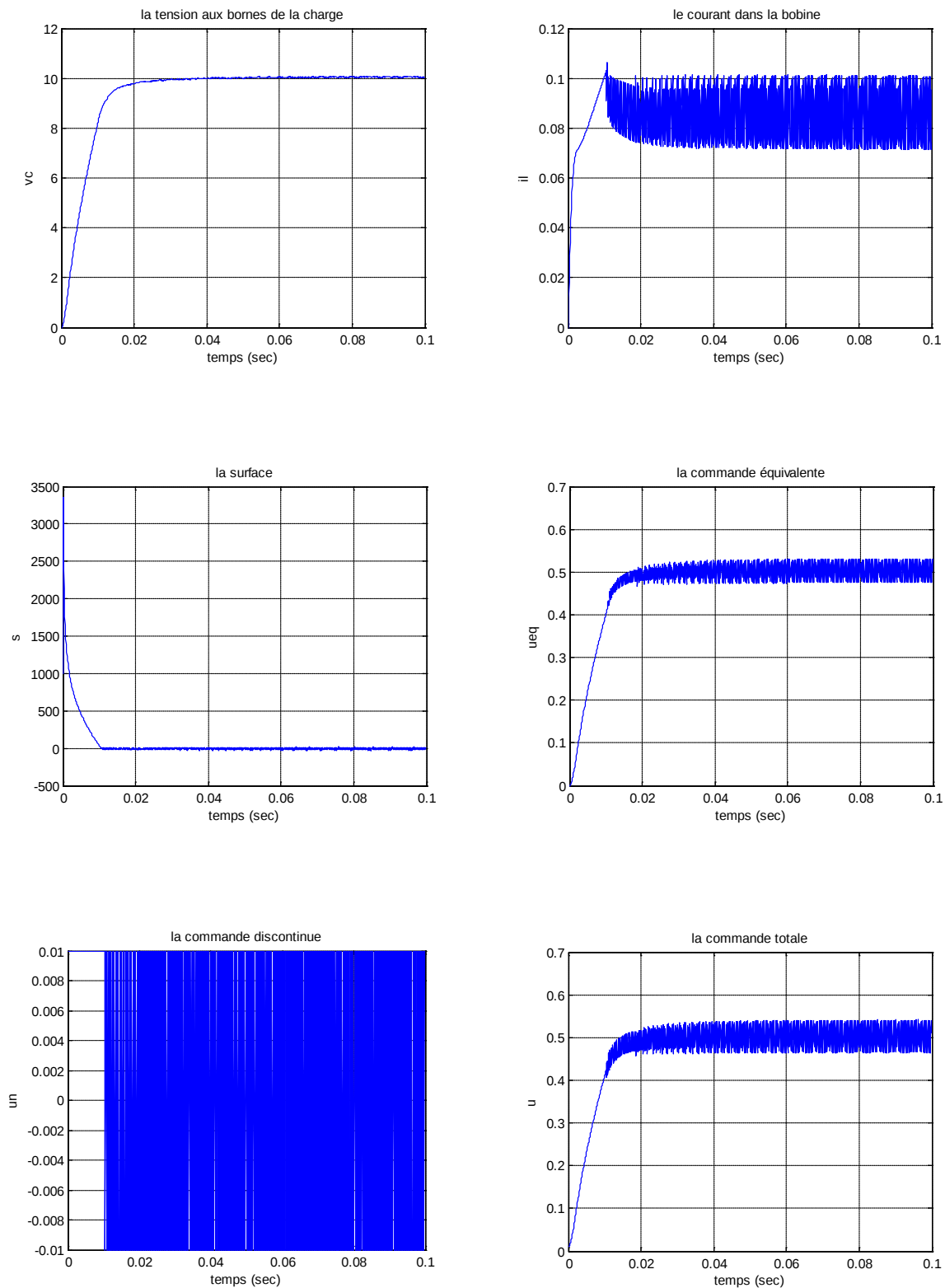


Figure III.8.b : Résultats de simulation avec PID fractionnaire comme surface de glissement et une variation paramétrique de 40% sur la charge résistive

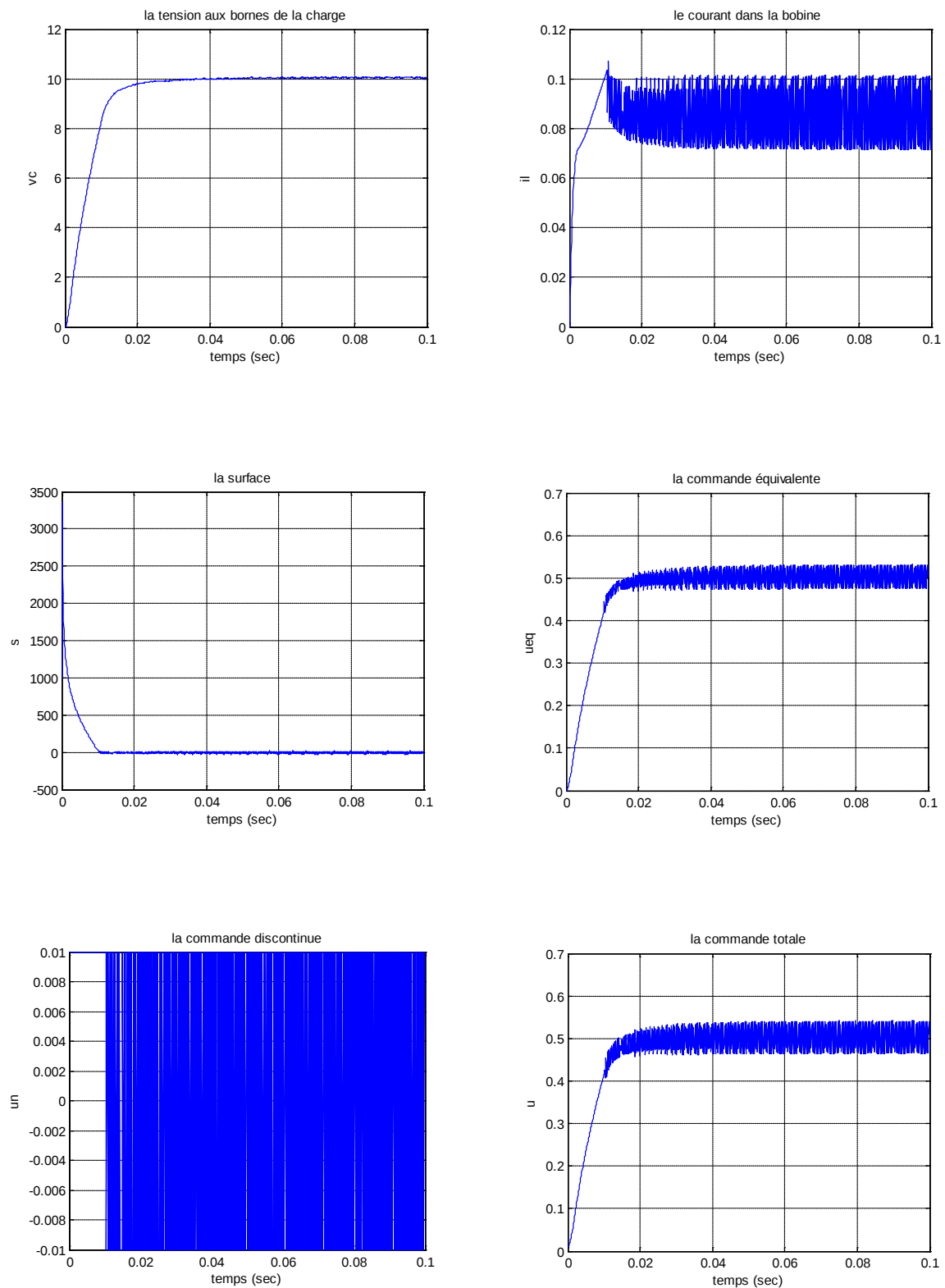


Figure III.8.c : Résultats de simulation avec *PID* fractionnaire comme surface de glissement et une variation paramétrique de 70% sur la charge résistive

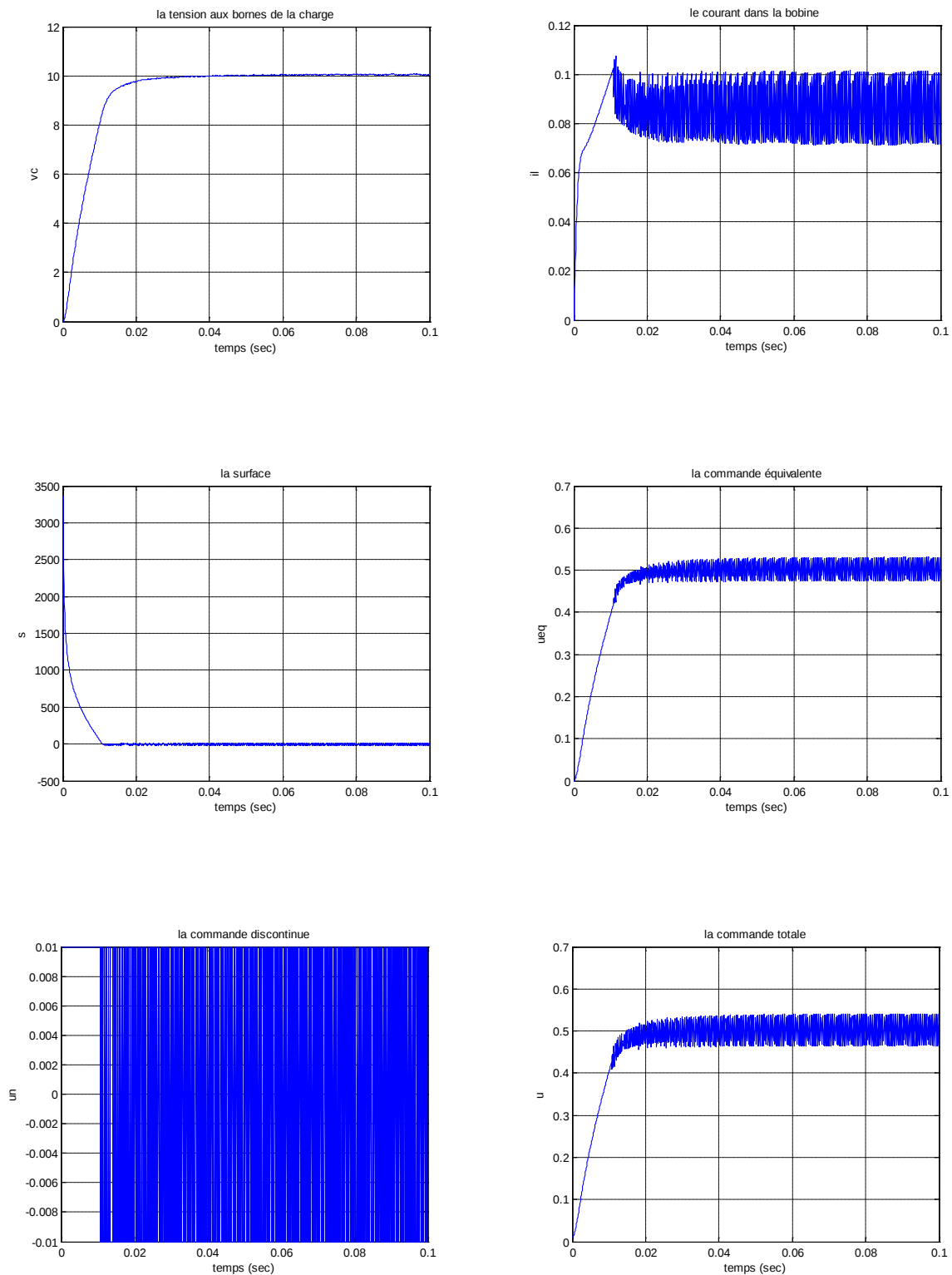


Figure III.8.d : Résultats de simulation avec *PID* fractionnaire comme surface de glissement et une perturbation extérieure d'amplitude 10 sur la charge résistive

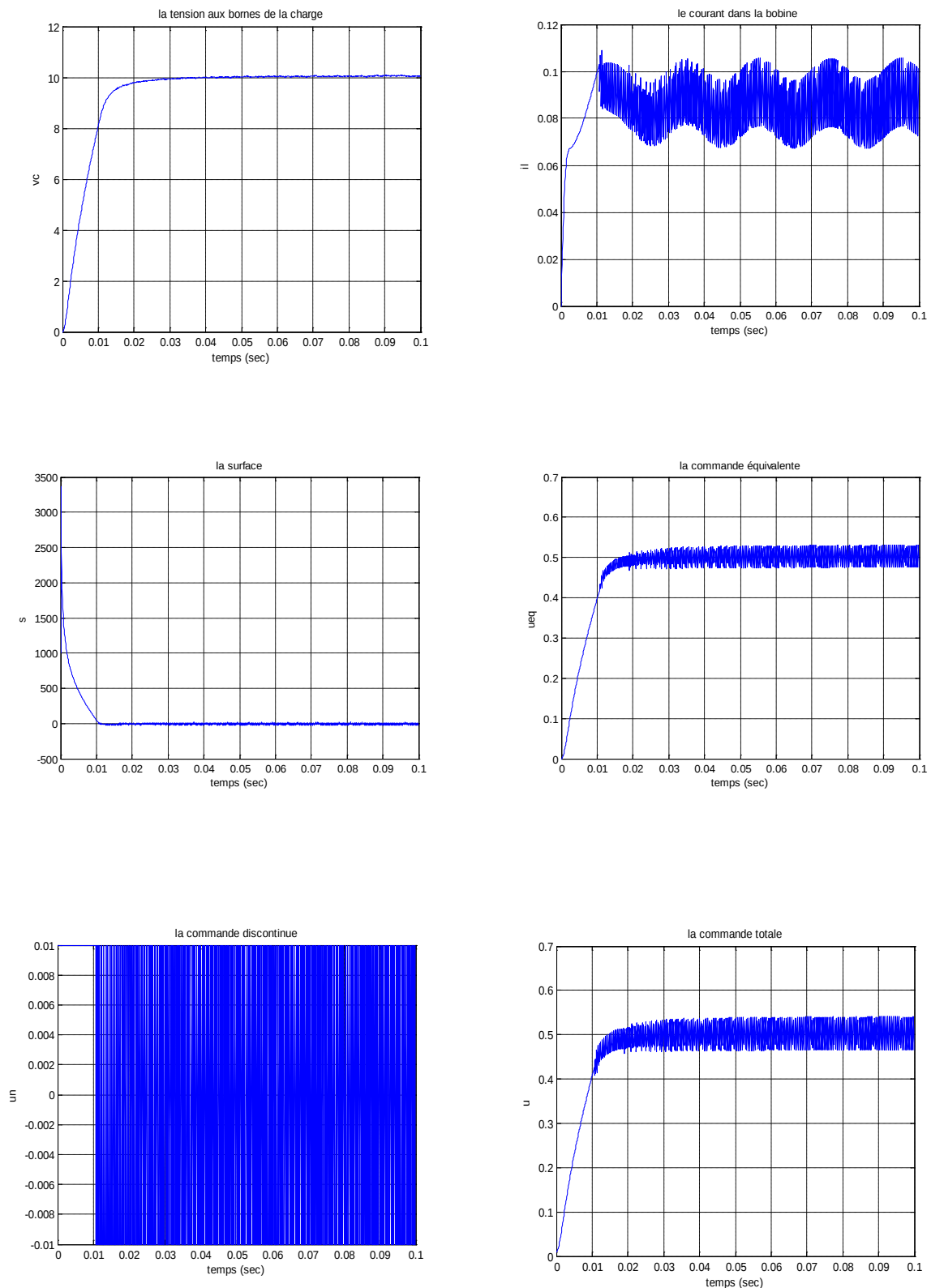


Figure III.8.e : Résultats de simulation avec *PID* fractionnaire comme surface de glissement et une perturbation extérieure d'amplitude 100 sur la charge résistive

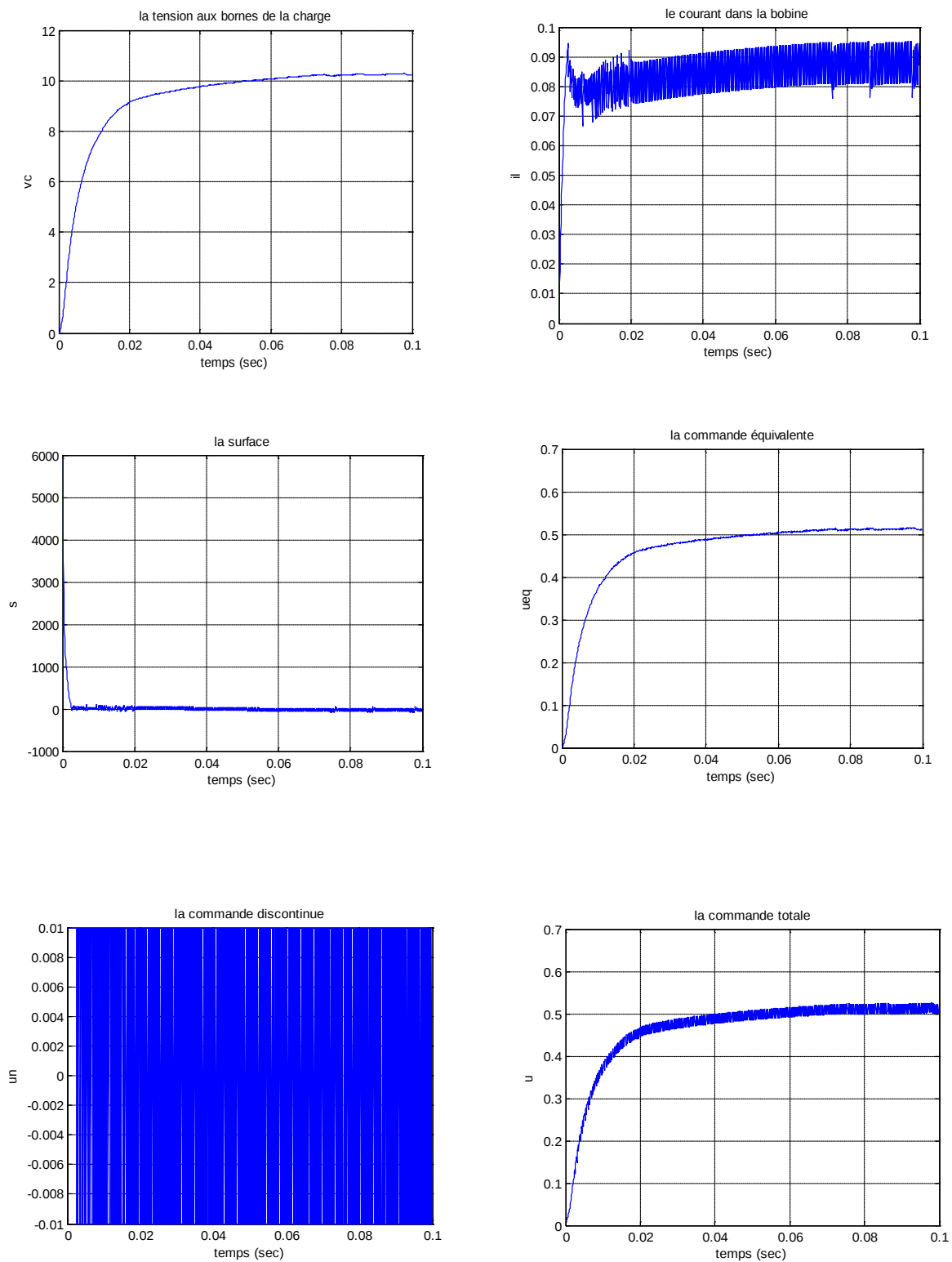


Figure III.8.f : Résultats de simulation avec *PID* fractionnaire comme surface de glissement avec les ordres $\lambda = 1.06$, $\mu = 0.9$

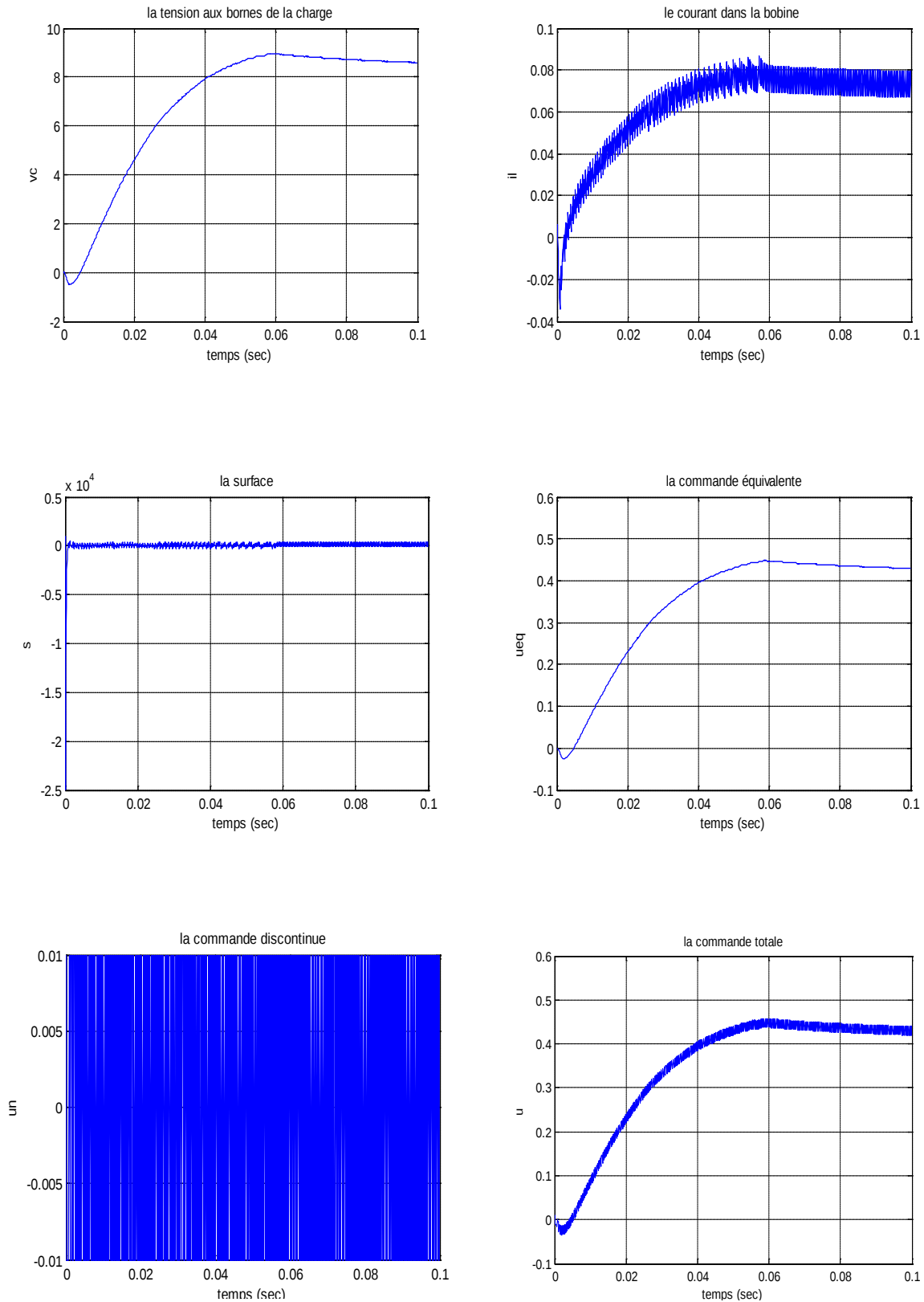


Figure III.8.g : Résultats de simulation avec PID fractionnaire comme surface de glissement avec les ordres $\lambda = 1.06$, $\mu = 1.09$

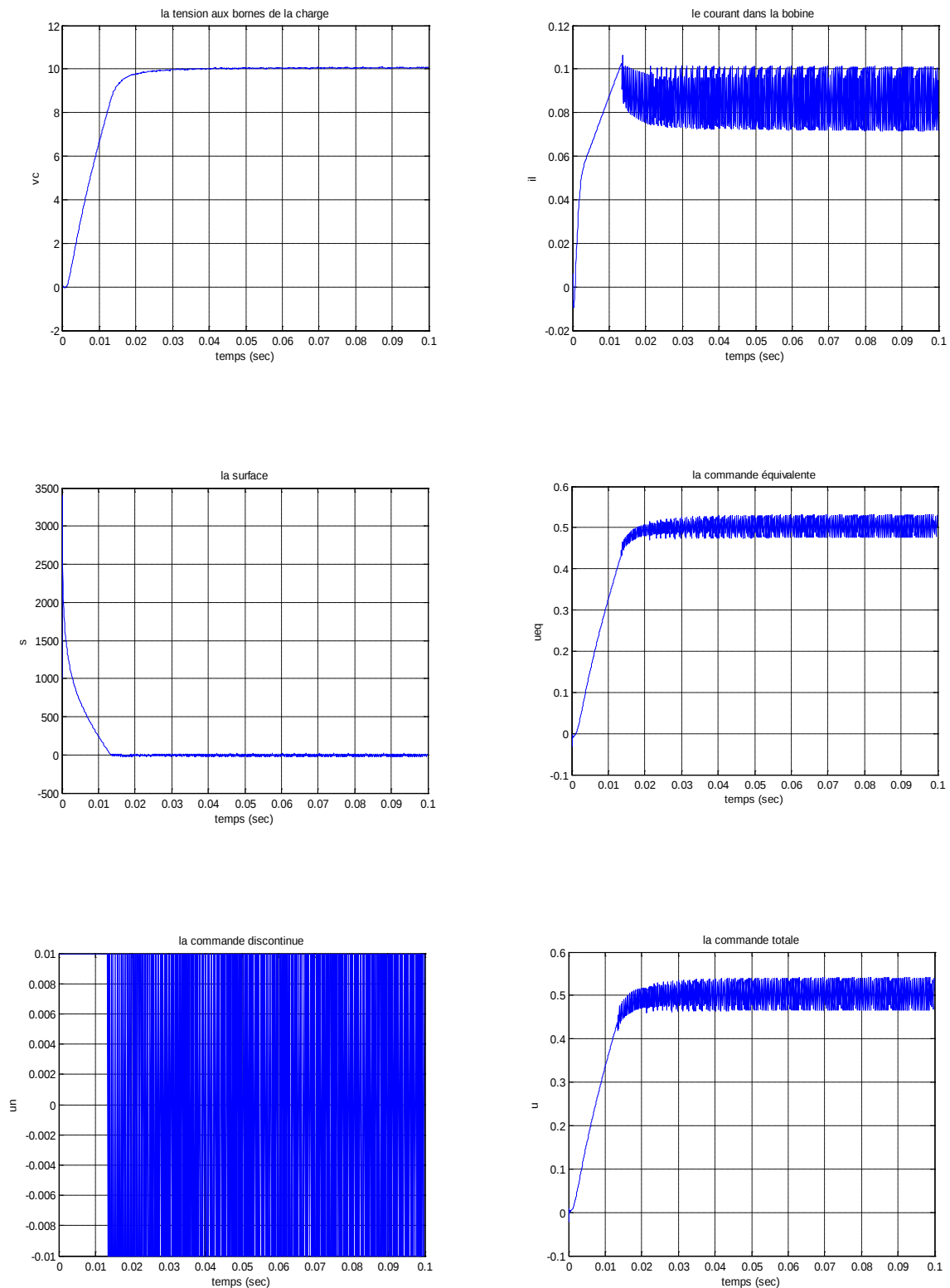


Figure III.8.h : Résultats de simulation avec PID fractionnaire comme surface de glissement avec les ordres $\lambda = 0.2$ et $\mu = 0.7$

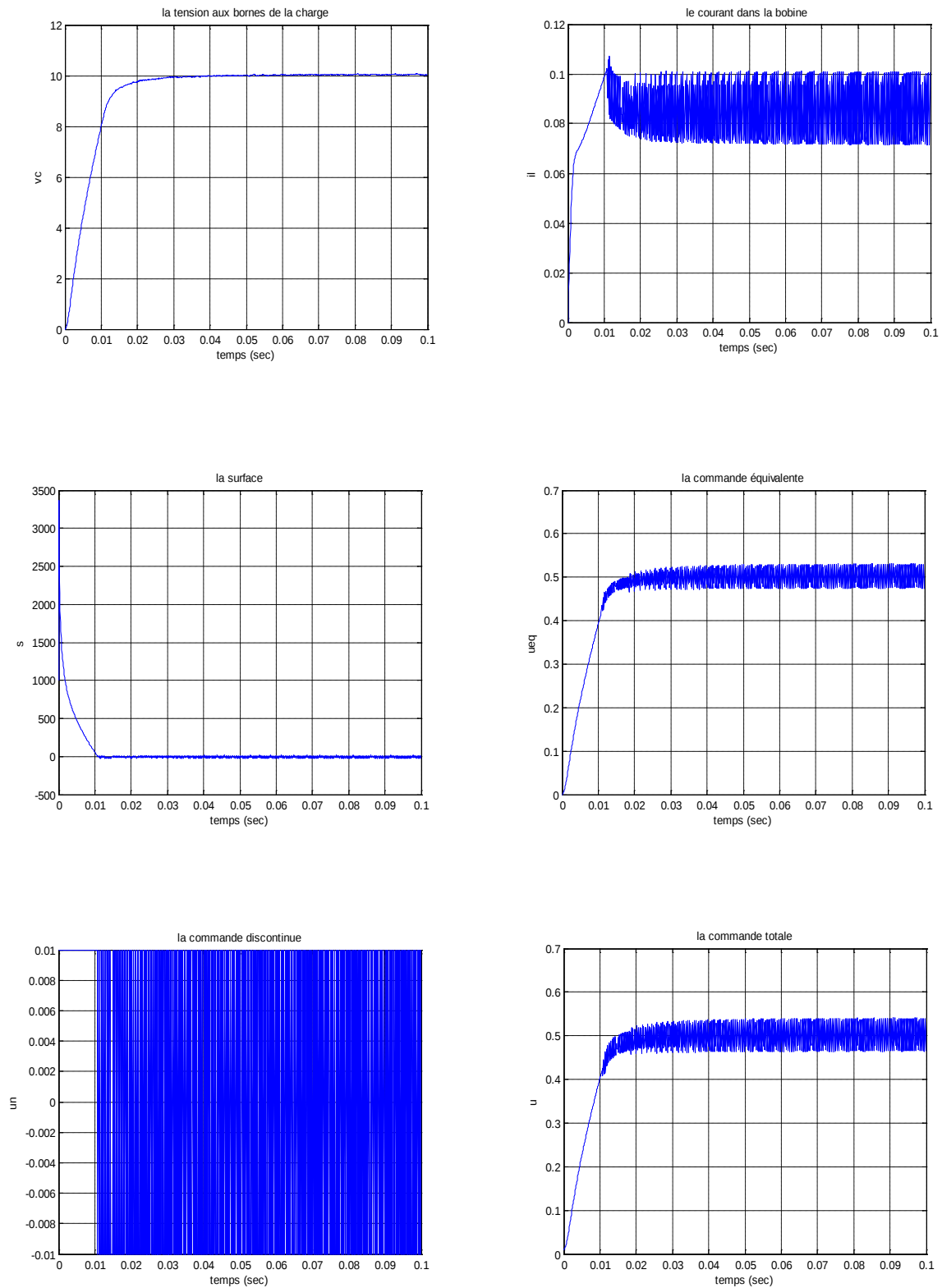


Figure III.8.i : Résultats de simulation avec *PID* fractionnaire comme surface de glissement avec les ordres $\lambda = 1.7$ et $\mu = 0.7$

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé de synthétiser une loi de commande pour le hacheur série en utilisant les modes glissants classique et fractionnaire, pour ceci un aperçu général sur les convertisseurs DC/DC a été fait et la modélisation du hacheur série a été exposée

La surface de glissement qui représente la dynamique du système en boucle fermée a été structurée en trois manières différentes, les résultats de simulation obtenus montrent qu'on peut toujours garantir le suivi de référence de la tension de charge avec un écart dans le cas où la surface est une combinaison linéaire des variables d'état, lorsqu'on introduit l'action intégrale avec un PID classique comme surface de glissement l'écart s'annule, le système devient plus rapide, mais présente un dépassement qui devient important en augmentant l'action intégrale.

L'introduction du $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire comme surface de glissement donne un meilleur suivi de référence avec de bonnes performances, la diminution du temps de réponse et l'absence du dépassement. Les ordres d'intégration et de dérivation sont choisis respectivement en vérifiant les deux inégalités suivantes $0 < \lambda < 2, 0 < \mu < 1$ ils sont des degrés de liberté supplémentaires pour améliorer le comportement dynamique du système en boucle fermée.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à illustrer l'apport de la dérivation et de l'intégration fractionnaires dans la synthèse de la loi de commande par modes glissants connue pour sa robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures qui doivent vérifier les conditions de recouvrement ainsi que son adaptation aux convertisseurs électriques qui présentent un mode de fonctionnement discontinu.

Pour ceci, le premier chapitre a été consacré pour rappeler les notions de base de la théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés avec des exemples de simulation d'un système de second ordre.

Dans le second chapitre, nous avons introduit les notions de base relatives au calcul fractionnaire qui étend les définitions connues dans la théorie des systèmes, en utilisant le calcul classique (d'ordre entier) à des ordres réels et mêmes complexes, parmi ces définitions les modes de représentation des systèmes, étude de leurs stabilité et analyse de leurs performances...etc.

Dans le troisième chapitre on est amené à synthétiser une loi de commande par modes glissants à un convertisseur *DC/DC* dit hacheur série qui représente la structure la plus simple des hacheurs, les résultats de simulation ont montré qu'on peut avoir un bon suivi de référence de la tension de sortie de ce convertisseur, en introduisant l'action intégrale dans l'expression de la surface de glissement, mais avec l'apparition d'un dépassement.

L'introduction de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire dans l'expression de la loi de commande par modes glissants nous permet d'améliorer le comportement dynamique du convertisseur en boucle fermée. Le choix des ordres d'intégration et de dérivation a été effectué en vérifiant les deux inégalités suivantes $0 < \lambda < 2$, $0 < \mu < 1$, cela montre la possibilité d'utiliser la surface de glissement d'ordre fractionnaire pour la commande par modes glissants sans chercher les valeurs optimales de ces ordres, tout en gardant la robustesse de la commande vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures.

Comme perspectives de recherche sur le thème :

- Des travaux qui se font en continuité pour appliquer la commande par modes glissants d'ordre fractionnaires aux autres convertisseurs dont la structure est plus compliquée que celle du hacheur série.
- Développer des méthodes aussi simples que possible pour optimiser le choix des ordres de dérivation et d'intégration. Ces ordres qui représentent des degrés de liberté supplémentaires pour améliorer et agir sur le comportement dynamique du système.

- Utilisation de la technique du réglage par modes glissants discrets classique et fractionnaire.

- [1] **Hansruedi BÜHLER**, « *Réglage par Modes de Glissement* » Presses Polytechnique Romandes
- [2] **M.C.S.ALAOUI**, « *Commande et Observateur par Modes Glissants d'un Système de Pompage et d'un Bras Manipulateur* ». Thèse de Doctorat. Université de Sidi Mohammed Ben Abdallah de Fès. 2009
- [3] **H. IMINE**, « *Observation d'Etat d'un Véhicule pour l'Estimation du Profil dans les Traces de roulement* ». Thèse de doctorat. Université de Versailles- saint Quentin -en- Yvelines.2003
- [4] **V.I. UTKIN** « *Variable Structure Systems with Sliding Modes* » IEEE transactions on Automatic control, vol. Ac-**22**,no.**2**, avril 1977
- [5] **J.J.SLOTINE** « *Applied Non Linear Control* » Massachussets Institue Of Technology ISBN 06-13-040890-5
- [6] **Nadia DJEGHALI** « *Commande par Modes de Glissement des Systèmes Linéaires à Entrée Retardée* » thèse de Magister. Université de Mouloud Mammeri, Tizi -Ouzou,2007.
- [7] **A. SI AMMOUR** « *Commande par Mode de Glissement Classique et Généralisée. Application à un Convertisseur Electrique* ». Thèse de Magister. Université de Mouloud Mammeri, Tizi – Ouzou
- [8] **R. MANSOURI** « *Contribution à l'Analyse et la Synthèse des Systèmes d'Ordre Fractionnaires par la Représentation d'Etat* ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri de Tizi –Ouzou, 2008.
- [9] **T. ABDENNABI épouse DJAMAH** « *Identification des Systèmes par des Modèles d'Ordre Fractionnaire* ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri de Tizi –Ouzou 2010.
- [10] **A. OUSTALOUP** « *Dérivation Non Entière : Théorie de Synthèse et Application* » Edition Hermès, Paris 1995.
- [11] **A. OUSTALOUP** « *Systèmes Asservis Linéaires d'Ordre Fractionnaires* » Edition Masson Paris 1983.
- [12] **L. AIT MESSAOUD** « *Contribution à la Commande des Systèmes par des Régulateurs d'Ordre Non Entier. Application à la Commande de la Machine Asynchrone* ». Thèse de Magister. Université Mouloud MAMMERI de Tizi –Ouzou, 2007.
- [13]**Y.Q.CHEN,D.G.XUE, B.M.VINAGRE and V.F.BATLLE** « *Fractional- Order Systems and Controls : Fundamentals and Applications* » Springer Scotland, 2010.
- [14] **J.CALDERON1, B.M.VINAGRE, V.FELIU** « *fractional order control strategies for power electronic buck converter* », www.sciencedirect.com

- [15] **A.DJOUAMBI** « *Contribution à la Commande CRONE* ». Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine, 2008.
- [16] **C.A. MONJE, B.M. VINAGRE, Y.Q. CHEN, V. FELIU**, « *On Fractional PI^λ Controllers : Some Tunings Rules For Robustness To Plant Uncertainties* ». edition Kluwer academic, 2003.
- [17] **S.VICTOR**, « *Identification par Modèle Non Entier Pour La Poursuite Robuste De Trajectoire Par Platitude* ». Thèse de Doctorat. Université Bordeaux1, 2010.
- [18] **O.COIS**, « *Systèmes Lineaires Non Entiers et Identification par Modèles Non Entiers : Application en Thermique* ». Thèse de Doctorat. Université Bordeaux1, 2002.
- [19] **I.N'DOYE**, « *Généralisation du Lemme de Gronwald –Bellman pour la Stabilisation des Systèmes Fractionnaires* ». Thèse de Doctorat. Université Henry Poincaré-Nancy1 et Université Hassan II Ain Chock-Casablanca, 23 Février 2011.
- [20] **Y.Q.CHEN, B.M.VINAGRE, I.PODLUBNY**, «*A new Discretisation Method for Fractional Order Differentiators Via Continued Fraction Expansion*» Conference Chigago, Illinois,USA,September 2 – 6, 2003
- [21] **B.VINAGRE,Y.Q. CHEN et I. PETRAS** , « *Two Direct Tustin Discretization Methods For fractional Order Differentiator / Integrator* » , *Journal of the Franklin Institute* 340 (2003) 349-362.
- [22] **S.CANAT** « *Contribution à la modélisation dynamique d'ordre non entiere de la machine asynchrone à cage* », thèse de Magister, université de Toulouse, 2005
- [23]**A.A.KILLBAS, H.M.SRIVASTAVA,J.J.TRUIJUO** , « *Theory and Applications of Fractional Differential Equation* », Math-Holland and Mathematics Studies 204 (Continuation of the Notas de Mathematica)
- [24] **B.M.VINAGRE, C.A.MONJE, A.J.CALDERON**, « *Fractional Order Systems and Fractional Order Control Actions* », Lecture 3 of the IEEE CDC02 TW#2, 2002
- [25] **I.PODLUBNY**, « *Differential Equations: An Introduction to fractional derivatives, fractional differential equation to methods of their solution* », Academic Press, San Diego, 1999
- [26] **DINGYÜ XUE, CHUNNA ZHAO, YANG QUAN CHEN** «*Fractional Order PID Control of A DC-Motor with Elastic Shaft: A Case Study*», Proceeding of the 2006 American Control Conference
- [27]**A.G RADWAN, A.M SOLIMAN, A.S ELWAKIL, A.SEDEEK** «*On the Stability of Linear Systems with Fractional –Order elements*», Chaos, Solitons and fractals 40(2009)2317-2328
- [28] **VALERIO. DUARTE** ,« *Fractional Robust System Control*», mémoire de Doctorat, Universidade Técnica de Lisboa. Institue Superior Técnico.

- [29] **Khalfa BETTOU, Abdelfatah CHAREF, Fouad MESQUINE**, «*A New Design Methods for Fractional PID Controller*», International Journal of Science and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering IJ-STA, Volume N^o 1, July 2008, pp.414 429
- [30] **Riccardo CAPUNETTO, Giovanni DONGOLA, luigi FORTUNA, Ivo PETRÁŠ** «*Fractional Order Systems*», Modeling and Control Application.
- [31] **A. MONJE¹, B.M. VINAGRE, Y. Q. CHEN, V. FELIU, P. LANUSSE and J. SABATIER**, «*Optimal Tunings for Fractional PID Controllers*» Equipe CRONE-LAPSUMR 5131 CNRS
- [32] **Yang.K .LEE**, «*Determination of All Stabilizing Fractional –Order PID Controllers*», Proceeding of the 6th Annual GRASP symposium, Wichita State University 2010
- [33] **Hamideh Hamidian, Ali Akbar Jalali**: «*Calculation of PID Controller Parameters for Unstable Order Time Delays Systems* », International Journal of Scientific and Engineering Research Volume 2, Issue, March 2011
- [34] **A.J Calderon, BM.Vinagre.V.Feliu**: «*Fractional order control strategies for power electronic buck converter* », Escuela de Ingenierias Industriales, Universidad de Extramadura, March 2006
- [35] **A.Rufer, P.Barrade**: «*Cours d'électronique de puissance conversion DC/DC*», Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Annexe A

Opérateurs d'ordre complexe

La dérivation non entière s'est généralisée aux ordres complexes comme pour les ordres réels. L'utilisation de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire réel est maintenant largement répandue dans des domaines aussi variés que la modélisation, l'identification, la commande....etc, en revanche, l'application de la dérivation d'ordre fractionnaire complexe est relativement récente et se limite pour l'instant à la synthèse d'une commande robuste (commande CRONE 3eme génération) qui est issue des travaux d'Oustaloup dans ce contexte. L'intégration ou la dérivation d'une fonction réelle $f(t)$ est à valeur complexe.

A.1 Dérivation d'ordre complexe au sens Grunwald- Leitnikov

La définition de Grunwald- Leitnikov se prête naturellement au développement algorithmique, permettant ainsi le calcul numérique de la dérivation / de l'intégration à un ordre α réel ou complexe d'une fonction causale

Soit $\alpha = a + ib$ avec $Re(\alpha) > 0$

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left((-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \right)$$

Algorithme de calcul

La causalité de $f(t)$ et le choix du pas d'échantillonnage h t.que $t = kh$

(En effet $t = kh + t_0$, t est le temps de simulation, t_0 est l'instant initial, k est le nombre d'itération) donne la loi suivante :

$$D^\alpha f(kh) = \sum_{j=0}^k C(j) f((k-j)h) \quad (A.1)$$

$$C(j) = \frac{1}{h^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\alpha!}{h^\alpha (\alpha-j)! j!} \quad (A.2)$$

La loi de récurrence des coefficients est établie

$$C(j) = C(j-1) \frac{j-\alpha-1}{j} \quad (A.3)$$

Dans le cas général où l'ordre de dérivation est complexe soit $\alpha = Re(\alpha) + Im(\alpha)$

$D^\alpha f(kh)$ se présente sous la forme

$$D^\alpha f(kh) = Re(D^\alpha f(kh)) + Im(D^\alpha f(kh)) \quad (A.4)$$

Le but est de déterminer les expressions des parties réelle et imaginaire de $D^n f(kh)$

Les coefficients $C(j)$ sont à valeur complexe

$$C(j) = C_r(j) + i \times C_i(j) \quad (A.5)$$

On remplace $\alpha = Re(\alpha) + Im(\alpha)$ dans l'expression (A.3) on trouve

$$C(j) = C(j-1) \frac{j - Re(\alpha) - i \times Im(\alpha) - 1}{j} \quad (A.6)$$

Par séparation de la partie réelle et imaginaire dans (A.5) on trouve

$$\begin{cases} C_r(j) = \frac{(j - Re(\alpha) - 1) \times C_r(j-1)}{j} + \frac{Im(\alpha) \times C_i(j-1)}{j} \\ C_i(j) = \frac{(j - Re(\alpha) - 1) \times C_i(j-1)}{j} + \frac{Im(\alpha) \times C_r(j-1)}{j} \end{cases} \quad (A.7)$$

Ces deux équations représentent les lois de récurrence de la partie réelle, imaginaire des coefficients de pondération $C(j)$

Calcul des expressions des valeurs initiales de $C(j)$

A partir de l'équation (A.2) on a

$$C(0) = C_r(0) + i \times C_i(0) = \frac{1}{h^\alpha} \quad (A.8)$$

$$\text{Posons } h^\alpha = H_r + i \times H_i \quad (A.9)$$

$$h^\alpha = h^{Re(\alpha)} \times h^{i \times Im(\alpha)} \quad (A.10)$$

Introduisons l'opérateur logarithmique

$$Ln(h^\alpha) = Ln(h^{Re(\alpha)}) + Ln(h^{i \times Im(\alpha)}) \quad (A.11)$$

Introduisons l'opérateur exponentiel

$$h^\alpha = Re(\alpha) [\exp(i \times \ln(h) \times Im(\alpha))] \quad (A.12)$$

$$h^\alpha = Re(\alpha)[\cos(Ln(h)Im(\alpha)) + i \times \sin(Ln(h)Im(\alpha))] \quad (A.13)$$

En faisant l'équivalence entre (A.10) et (A.13) on trouve

$$\begin{cases} H_r = Re(\alpha) \cos(Ln(h)Im(\alpha)) \\ H_i = Re(\alpha) \sin(Ln(h)Im(\alpha)) \end{cases} \quad (A.14)$$

(A.8) peut être réécrite ainsi

$$h^\alpha = C_r(0) + i \times C_i(0) = \frac{H_r - i \times H_i}{H_r^2 + H_i^2} \quad (A.15)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} C_r(0) = \frac{H_r}{H_r^2 + H_i^2} \\ C_i(0) = \frac{-H_i}{H_r^2 + H_i^2} \end{cases} \quad (A.16)$$

Connaissant les valeurs initiales $C_r(0)$ et $C_i(0)$ on peut calculer les valeurs à suivre de $C_r(j)$ et de $C_i(j)$ selon l'équation (A.7)

Le rapprochement des équations (A.1) et (A.2) suivi d'une identification avec (A.4) déterminent les parties réelle et imaginaire de la dérivée d'ordre complexe de la fonction $f(t)$ à l'instant kh , soit

$$\begin{cases} Re(D^\alpha f(kh)) = \sum_{j=0}^k C_r(j) f((k-j)h) \\ Im(D^\alpha f(kh)) = \sum_{j=0}^k C_i(j) f((k-j)h) \end{cases} \quad (A.17)$$

Les valeurs des composantes réelle et imaginaire de la dérivée d'ordre complexe de la fonction $f(t)$ à l'instant kh sont données par (A.17) ; à chaque itération le calcul de ces composantes se fait comme dans le cas réel en prenant en compte toutes les valeurs aux instants précédents. Cela signifie que la masse du calcul et la capacité mémoire requise augmente infiniment avec le temps, ce qui est irréalisable. La solution proposée est de retenir les échantillons récents de la fonction selon une longueur de mémoire spécifiée, c'est le principe de la mémoire limitée (short Memory principal)

A.2 Caractéristiques fréquentielles du dérivateur généralisé

Le dérivateur fractionnaire est l'élément de base de toute équation différentielle fractionnaire, sa sortie est donnée en fonction de son entrée par

$$y(t) = \tau^\alpha \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} \quad (\text{A.18})$$

Avec τ est un nombre réel positif désigne la constante du temps de l'opérateur de dérivation fractionnaire

α est l'ordre de dérivation non entier (réel ou complexe)

La transformée de Laplace de (A.18) et sous l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles, donne la fonction du transfert du dérivateur généralisé sous la forme :

$$Y(s) = (\tau s)^\alpha U(s) \quad (\text{A.19})$$

On pose : $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

On trouve

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha \quad (\text{A.20})$$

A.2.1 Cas réel : $\alpha \in \mathbb{R}^*$

La réponse en fréquences du dérivateur fractionnaire réel se déduit en mettant $s = j\omega$

$$T(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_c} \right)^\alpha \quad (\text{A.21})$$

Le gain et la phase de ce dérivateur sont donnés comme suit

$$\begin{cases} |T(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^\alpha \\ \text{Arg}[T(j\omega)] = \alpha \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

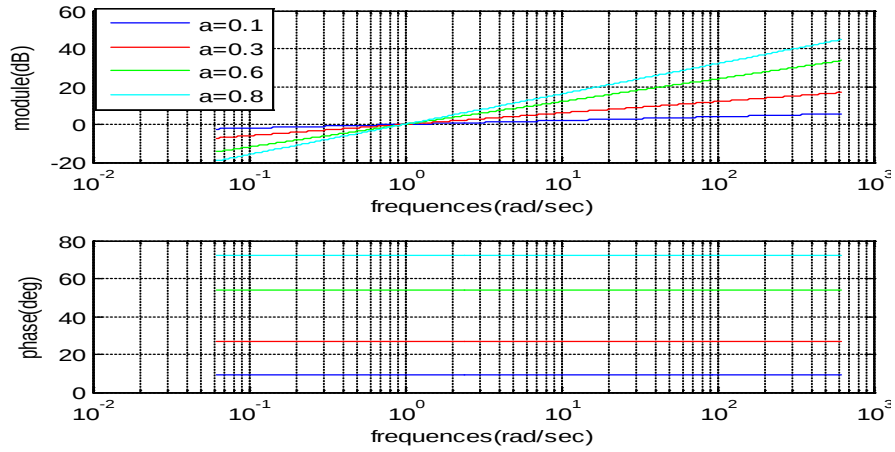


Figure A.1 : diagramme de Bode du dérivateur généralisé pour différentes valeurs de α

L'analyse de cette figure montre que le diagramme d'amplitude est caractérisé par une droite de pente de $20\alpha \text{ dB/dec}$, le diagramme de phase est caractérisée par une droite horizontale d'ordonnée $\varphi = \alpha \frac{\pi}{2} \text{ radian}$, l'ordre non entier réel permet ainsi de garantir une variation continue de la pente du gain et de l'ordonnée de la droite de phase.

A.2.2 Cas complexe : $\alpha \in \mathbb{C}^*$

La description fréquentielle d'un dérivateur non entier complexe requiert la définition d'un espace d'étude mathématique spécifié, il s'avère, en effet que, le gain et la phase d'un dérivateur ne correspondent pas aux module et argument du transfert calculé pour $s = j\omega$ du fait de la présence d'un nombre complexe en puissance de transfert.

La grandeur de sortie $y(t)$ d'un dérivateur non entier complexe est une grandeur complexe, il est nécessaire donc de distinguer deux diagrammes de Bode, le premier représente le lien fréquentiel entre la partie réelle de $y(t)$ et l'entrée $u(t)$; le second représente le lien fréquentiel entre la partie imaginaire de $y(t)$ et l'entrée $u(t)$.

Soit : $\alpha = a + ib$

L'équation (A.20) se réécrit comme suit

$$T(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{a+ib} = T_{rel}(s) + T_{img}(s) \quad (A.23)$$

On a

$$T(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{a+ib} = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{ib} \quad (A.24)$$

$$\left(\frac{T(s)}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a}\right) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{ib} \quad (A.25)$$

En introduisant l'opérateur logarithmique, on aura :

$$\ln\left(\frac{T(s)}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a}\right) = \ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{ib}\right) \quad (A.26)$$

$$\ln(T(s)) - \ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a\right) = \ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{ib}\right) \quad (A.27)$$

$$\ln(T(s)) = \ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a\right) + \ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{ib}\right) \quad (A.28)$$

En introduisant l'opérateur exponentiel, on aura :

$$e^{\ln(T(s))} = e^{\ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a\right)} e^{\ln\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{ib}\right)} \quad (A.29)$$

$$T(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a \left[\cos\left(b \ln\left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right) + i \sin\left(b \ln\left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right) \right] \quad (A.30)$$

Donc

$$T(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a \cos\left(b \ln\left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right) + i \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a \sin\left(b \ln\left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right) \quad (A.31)$$

On identifie cette équation à l'équation (A.22)

On trouve que

$$T_{rel}(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a \cos\left(b \ln\left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)$$

Et

$$T_{img}(s) = \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^a \sin\left(b \ln\left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)$$

Les fonctions $T_{rel}(s)$ et $T_{img}(s)$ représentent les transferts relatifs aux sorties réelle $y_r(t)$ et imaginaire $y_{img}(t)$ du dérivateur complexe.

Une distinction mathématique doit être faite entre le plan complexe opérationnel noté C_j dont relève la variable complexe $s = \delta + j\omega$ et le plan complexe temporel noté C_i dont relève l'ordre de dérivation $\alpha = a + ib$ et les sorties $y_r(t)$ et $y_{img}(t)$; l'espace générée par ces deux plans est dit « bi complexe ».

Annexe B

Compléments mathématiques

La théorie du calcul fractionnaire repose sur la définition des fonctions élémentaires dites fonction Gamma Euler et fonction de Mittag-Leffler, elles s'inscrivent dans la liste des fonctions spéciales, il est donc utile de présenter quelques définitions et propriétés liées à ces fonctions.

B.1 Fonction Gamma Euler $\Gamma(z)$

C'est la généralisation de la fonction factorielle définie uniquement pour les nombres entiers positifs dans le cas entier à des nombres complexes dans le cas non entier

Son expression est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (B.1)$$

Avec $z \in \mathcal{R}_+$ $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0_+) = +\infty$

$$t^{z-1} = \exp((z-1) \log(t)) \quad (B.2)$$

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$

Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (B.3)$$

Qu'on peut démontrer par intégration par partie

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Soit $n \in \mathcal{N}^*$, d'après (B.3)

On a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots 1 = n!$

Donc $\Gamma(n+1) = n!$ (B.4)

La fonction gamma permet de définir la fonction facteur d'oubli $p_{\alpha}(t)$ suivante:

$$p_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \alpha \in \mathcal{R}_+^* \quad (B.5)$$

Annexe C

Approximation du dérivateur généralisé par un modèle continu

C.1 Méthode de Carlson [1964]

Cette méthode a été introduite initialement pour approximer l'expression $(\frac{1}{s})^{\frac{1}{a}}$ décrivant le condensateur fractionnaire pour tout $n > 1$, en utilisant le processus itératif de Newton

Le problème d'approximation peut être mis sous la forme

$$f(x) = x^n - a = 0 \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{En posant } a = \frac{1}{s}$$

(C.1) peut être mise sous la forme

$$x = F(x) \quad (\text{C.2})$$

Le processus itératif de Newton étant défini pour une estimée initiale x_0 de la solution par :

$$x_{i+1} = F(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.3})$$

Pour que la séquence $\{x\}_{i=0}^{\infty}$ converge vers la solution exacte, $F(x)$ est donné par :

$$F(x) = x - (f/f') \quad (\text{C.4})$$

$$\text{Sa dérivée est } F'(x) = f f'' / f' f' \quad (\text{C.5})$$

La convergence est assurée lorsque l'erreur à l'itération i est inférieure à celle de l'itération $i + 1$:

$$|x_{i+1} - x_i| < |x_i - x_{i-1}| \quad (\text{C.6})$$

La condition nécessaire de la convergence est telle que $|F'(x)| < 1$, de plus le processus est considéré régulier si $F'(x)$, plus précisément le produit $f f''$ ne change pas de signe au voisinage de la solution ; afin de satisfaire cette condition de régularité $a^{\frac{1}{n}}$ doit être un point d'inflexion :

$$f(a^{1/n}) = f''(a^{1/n}) = 0 \quad (C.7)$$

Cette condition ne pouvant pas être réalisée par la fonction $f(x)$ telle qu'elle est définie par l'équation (C.1), les auteurs proposent de la transformer comme suit

$$f(x) = \frac{x^n - a}{x^m}, 0 \leq m \leq n - 1, m \in N \quad (C.8)$$

Cependant, la condition (C.7) n'est vérifiée que pour les ordres impairs de

n ($n = 2m + 1$) pour cause de la contradiction, l'équation (C.8) devient de ce fait

$$f(x) = \frac{x^{2m+1} - a}{x^m} \quad (C.9)$$

Pour n les pairs ($n = 2m$), les auteurs proposent la formule

$$f(x) = \frac{x^{2m+1} - a}{x^{m-1}} + \gamma \frac{x^{2m} - a}{x^m} \quad (C.10)$$

La racine γ n'étant considérée égale x qu'à la fin du calcul de $F(x)$

Le calcul de $F(x)$ pour n pair ou n impair est obtenu en remplaçant respectivement (B.9) et (C.10) dans (C.4), le résultat obtenu dans les deux cas est identique :

$$F(x) = x \frac{(n-1)x^n + (n+1)a}{(n+1)x^n + (n-1)a} \quad (C.11)$$

La formule suivante résume l'algorithme itératif pour l'approximation de $(1/s)^{1/n}$ et ce en substituant l'expression de $F(x)$ et a dans (B.11) :

$$x_0 = 1$$

$$x_i = x_{i-1} \frac{(n-1)x_{i-1}^n s + (n+1)}{(n+1)x_{i-1}^n + (n-1)} \quad (C.12)$$

$i=1,2,\dots,I$ avec I nombre d'itérations

Cette méthode réalise l'approximation du transfert $(1/s)^{1/n}$ qui définit un dérivateur généralisé avec la fréquence de coupure $\omega_c = 1 \text{ rad/sec}$, pour ω_c quelconque, il faut calculer les poles et les zéros du transfert entier, puis les multiplier par la valeur ω_c voulue.

C.2 Méthode de Matsuda

La méthode proposée par [MAT 93] est basée sur l'approximation d'ordre fractionnaire $G(s) = s^\alpha$ par une fonction $\hat{G}(s)$ en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain, en utilisant M fréquences réparties dans une bande de fréquence $[w_0, w_m]$ dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés $w_i, i = 0, 1, 2 \dots M$ l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-w_0}{a_1+s} \frac{s-w_1}{a_2+s} \frac{s-w_2}{a_3+s} \dots = \left[a_0, \frac{s-w_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (C.13)$$

$$\text{Où } a_i = f_i(w_i), f_{i+1}(s) = \frac{s-w_i}{f_i(s)-a_i} \text{ et } f_0(w) = |G(jw)|, i = 0, 1, 2, \dots M \quad (C.14)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation rationnelle.