

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du diplôme de
Doctorat 3^{ème} Cycle LMD

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET OPTIMISATION

Par :

Rima TERKMANI

THEME

Contribution à la commande prédictive des systèmes dynamiques

SOUTENUE LE 11 FÉVRIER 2021 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

M. HAMADOUCHE Djamel	Professeur	UMMTO	Président
M. AIDENE Mohamed	Professeur	UMMTO	Rapporteur
M. MAIDI Ahmed	Professeur	UMMTO	Co-rapporteur
M. KARA Redouane	Professeur	UMMTO	Examineur
M. HABI Hacene	Professeur	Univ. Boumerdes	Examineur
M. MERAKEB Abdelkader	MCA	UMMTO	Examineur
M. GUERMAH Said	Professeur	UMMTO	Invité

Remerciements

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Mr AIDENE Mohamed, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou, et mon co-directeur de thèse Mr MAIDI Ahmed, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou. Je les remercie pour la qualité extraordinaire et humaine de leurs encadrements scientifiques. Je les remercie aussi pour leurs aides précieuses, leurs disponibilité et leurs patience au cours de ces années de thèse. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

Je remercie vivement Mr HAMADOUCHE Djamal, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements chaleureux s'adressent également à Mr KARA Redouane, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, Mr HABI Hacene, Professeur à l'université de Boumerdes et Mr MERAKEB Abdelkader, Maître de Conférences à l'université de Tizi Ouzou, pour avoir accepté d'examiner ce travail. Je tiens à remercier également Mr GUERMAH Said, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, pour ses remarques subtiles et enrichissantes. Je lui adresse ici tous mes remerciements.

Je tiens à remercier également tous les membres de laboratoire de conception de système de production (L2CSP) de m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire et mettre à ma disposition tous les moyens de L2CSP.

Je ne peux oublier de remercier tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements particulièrement mes parents, mon mari ainsi ma grand-mère.

Enfin, je remercie tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- ♡ Mes chers parents
- ♡ Mon époux
- ♡ Ma grand-mère

Résumé

La contribution de cette thèse consiste à proposer une approche de contrôle prédictif des systèmes dynamiques basée sur le calcul variationnel (équations d'Euler-Lagrange) et le principe du minimum de Pontryagin (équations d'Hamilton-Pontryagin). Le principe de cette approche consiste à résoudre un système d'équations algébriques au lieu d'un problème d'optimisation. En effet, elle consiste à résoudre sur un horizon de contrôle, les conditions d'optimalité à l'aide de la méthode de l'itération variationnelle. Les conditions d'optimalité sont données par les équations d'Euler-Lagrange ou les équations d'Hamilton-Pontryagin. Ce problème à deux valeurs limites est résolu de manière itérative en utilisant une fonctionnelle de correction qui donne à la fois l'état optimal et le contrôle optimal. Puis en imposant, à chaque instant d'échantillonnage, les conditions aux limites actuelles, un système d'équations algébriques est obtenu et résolu, ce qui permet d'obtenir le contrôle optimal à appliquer à chaque instant d'échantillonnage.

Mots clés : Contrôle à horizon glissant, contrôle prédictif à base de modèle, contrôle optimal, calcul des variations, équation d'Euler-Lagrange, Principe du minimum de Pontryagin, équations d'Hamilton-Pontryagin, équations différentielles, méthode de l'itération variationnelle.

Table des matières

Résumé	i
Table des matières	i
Liste de tableaux	v
Table de figures	vii
Notations	xii
Introduction générale	xvii
1 Contrôle optimal des systèmes continus	3
1.1 Introduction	3
1.2 Formulation du problème	4
1.3 Contrôlabilité des systèmes dynamiques	9
1.3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires	9
1.3.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	11
1.3.3 Existence de trajectoires optimales	13
1.4 Méthode de résolution du problème de contrôle optimal	14
1.4.1 Méthodes directes	15
1.4.2 Méthodes indirectes	17
1.4.3 État de l'art des méthodes directes et indirectes	26
1.5 Contrôle optimal quadratique	30
1.5.1 Contrôle LQ à horizon fini	31
1.5.2 Contrôle LQ à horizon infini	32

1.6	Conclusion	33
2	Contrôle prédictif	35
2.1	Introduction	35
2.2	Principe du contrôle prédictif	36
2.3	Formulation du problème de contrôle prédictif	37
2.3.1	Modèle	37
2.3.2	Critère d'optimisation	39
2.4	Choix de l'horizon de prédiction et de contrôle	41
2.4.1	Horizon de prédiction N_p	41
2.4.2	Horizon de contrôle N_c	41
2.5	Contraintes dans le contrôle prédictif	42
2.6	Contrôle prédictif linéaire	43
2.6.1	Contrôle algorithmique du modèle (MAC)	43
2.6.2	Contrôle matriciel dynamique (DMC)	44
2.6.3	Contrôle prédictif généralisé (GPC)	45
2.6.4	Contrôle prédictif fonctionnelle (PFC)	45
2.7	Contrôle prédictif non linéaire	46
2.8	État de l'art sur le contrôle prédictif	47
2.9	Conclusion	50
3	Méthode de l'itération variationnelle	53
3.1	Introduction	53
3.2	Méthode de l'itération variationnelle (VIM)	54
3.2.1	Approche alternative de la méthode de l'itération variationnelle	60
3.2.2	Convergence de la méthode de l'itération variationnelle	62
3.2.3	Résultats sur la convergence de VIM	65
3.2.4	Exemples illustratifs	67
3.3	Méthode de l'itération variationnelle II et III	73
3.3.1	Algorithme de l'itération variationnelle II	73
3.3.2	Algorithme de l'itération variationnelle III	77
3.4	Conclusion	80
4	Contrôle prédictif basé sur la méthode de l'itération variationnelle	85
4.1	Introduction	85
4.2	Résolution par l'approche variationnelle basée sur l'équation d'Euler-Lagrange	86

4.2.1	Algorithme de l'approche proposée	90
4.3	Exemples d'application	92
4.4	Résolution par le principe du minimum	102
4.4.1	Algorithme de l'approche proposée	106
4.4.2	Exemple d'application	107
4.5	Conclusion	109
	Conclusion générale	113
	Bibliographie	116

Liste des tableaux

3.1	Temps de calcul de la solution de l'exemple 3.	80
3.2	Temps de calcul de la solution de l'exemple 4.	81

Table des figures

2.1	Principe de l'optimisation dynamique (contrôle optimal)	36
2.2	Principe du contrôle à l'horizon fuyant.	37
2.3	Différentes méthodes de contrôle prédictif linéaire.	43
3.1	Exemple 1 : Évolutions de la solution $x(t)$ et du paramètre β_k	69
3.2	Exemple 2 : Évolutions de la solution $x(t)$ et du paramètre β_k	71
3.3	Exemple 3 : Évolutions de la solution $x(t)$ et du paramètre β_k	73
3.4	Exemple 3 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM I.	79
3.5	Exemple 3 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM II.	80
3.6	Exemple 3 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM III.	81
3.7	Exemple 4 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM I.	82
3.8	Exemple 4 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM II.	83
3.9	Exemple 4 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM III.	83
4.1	Contrôle à horizon glissant basé sur VIM. Les lignes bleues, vertes et jaunes sont les profils optimaux (en haut : l'état $x(t)$, en bas : le contrôle $u(t)$) obtenus sur un horizon de contrôle. Haut : le rouge et les lignes rouges en pointillés sont la référence souhaitée $x^d(t)$ et la trajectoire optimale $x^*(t)$, respectivement. En bas : la ligne rouge est le contrôle optimal appliqué $u^*(t)$.	91
4.2	Exemple 1 (cas 1) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	98

4.3	Exemple 1 : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$	98
4.4	Exemple 1 (cas 2) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	99
4.5	Exemple 1 (cas 3) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	100
4.6	Exemple 2 (cas 1) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	103
4.7	Exemple 2 (cas 2) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	104
4.8	Exemple (cas 1) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	109
4.9	Exemple (cas 2) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	110
4.10	Exemple (cas 3) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.	111

Notations

a	Nombre réel
A	Matrice d'état
\mathcal{A}	Opérateur différentiel
\mathcal{A}	Polynômes associés à la sortie
b	Nombre réel
B	Matrice de contrôle
\mathcal{B}	Polynômes associés à l'entrée
c	Nombre réel
C	Matrice de Kalman
C^1	Ensemble des fonctions Continûment différentiables
\mathcal{C}	Fonction vectorielle (contrainte intégrale)
d	Perturbation
D	Matrice de contrôlabilité
f	Fonction vectorielle
f_x, f_p	Fonctions vectorielles
\mathcal{F}	Fonction vectorielle
\mathcal{F}	Fonction analytique
g	Fonction scalaire
\mathcal{G}	Fonction scalaire
h_i	Valeurs de la sortie suite à une excitation du système par une impulsion de Dirac unitaire
h_x, h_p	Fonctions vectorielles
H	Fonction d'Hamilton (Hamiltonien)
\mathcal{H}	Fonction de transfert d'un système discret
\mathcal{H}	Fonction analytique
H_e	Espace de Hilbert
I_n	Matrice d'identité d'ordre n
i	Entier naturel
I_u, I_y	Vecteurs unitaires
I_v	Intervalle de temps
j	Entier naturel

J	Critère de performances
\tilde{J}	Fonctionnelle
J_a	Fonctionnelle augmentée
k	Entier naturel
K	Solution de l'équation de Ricatti
\mathcal{K}	Ensemble compact
\mathcal{K}	Fonction scalaire
l	Entier naturel
L^2	Espace des fonctions de carré intégrable
\mathcal{L}	Fonction de Lagrange
\mathcal{L}	Opérateur différentiel linéaire
m	Nombre de contrôle
M	Résolvante du système linéaire homogène
$\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$	Compacts de \mathbb{R}^n
n	Nombre d'état
n_a	degré du polynôme
n_b	degré du polynôme
n_c	Nombre de contraintes intégrales
n_s	Nombre positif
n_q	Nombre de contraintes instantanées
N	Nombre naturel
N_c	Horizon de contrôle
N_p	Horizon de prédiction
\mathcal{N}	Opérateur différentiel non linéaire
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
\mathcal{O}	Ouvert de \mathbb{R}^n
p	Vecteur adjoint
q	Fonction vectorielle (contrainte instantanée)
Q	Matrice de pondération
R	Matrice de pondération
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^m	Espace vectoriel de dimension m construit sur le corps des réels
\mathbb{R}^n	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
\mathbb{R}^r	Espace vectoriel de dimension r construit sur le corps des réels
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
s_i	Valeurs de la sortie suite à une excitation du système par un échelon unitaire
S	Fonction scalaire
\mathcal{S}	Fonction de transfert d'un système discret
$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$	Suite numérique
t	Temps
t_0	Instant initial
t_1, t_2	Temps

t_i	Instant d'échantillonnage
t_f	Instant final
u	Vecteur de contrôle
\mathcal{U}	Ensemble des contrôles admissibles
u_{min}	Valeur minimale de contrôle
u_{max}	Valeur maximale de contrôle
v	Fonction scalaire
V	Solution de l'équation différentielle
\mathcal{V}	Fonction scalaire
\tilde{V}	Ensemble des vecteurs
w	Fréquence de l'oscillateur
\mathcal{W}	Fonction scalaire
x	Vecteur d'état
x_0	Etat initial
x_f	Etat final
x_i	Etat à l'instant d'échantillonnage
x^d	Etat désiré
\tilde{x}	Variation restreinte
\mathcal{X}	Ensemble des trajectoires d'état admissibles
\mathcal{X}	Nombre réel
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ou x'	dérivée temporelle
(x_e, u_e)	point d'équilibre
(\bar{x}, \bar{u})	trajectoire de contrôle
y	vecteur des sorties prédites
y_{min}	Valeur minimale de la contrainte sur la sortie
y_{max}	Valeur maximale de la contrainte sur la sortie
\mathcal{Z}	Fonction de sortie
z^{-1}	Opérateur de retard

Symboles et lettres grecques

α	Nombre réel
β	Nombre réel positif
γ	Nombre réel positif
$\lambda, \lambda_x, \lambda_p$	Vecteurs des multiplicateurs de Lagrange
η	Nombre positif
ϵ	Nombre positif (tolérance)
ω	Fonction scalaire
ν	Solution de l'équation différentielle pour la dynamique d'un oscillateur
τ	Temps
ψ	Fonction scalaire

ϕ	Fonction vectorielle
φ	Fonction vectorielle
θ	Fonction vectorielle
ϑ	Fonction vectorielle
ξ	Fonction à valeurs réelles
χ	Fonction scalaire
Δ	Acroissement
Δt	Période d'échantillonnage
δ	Première variation d'une fonction
δ^2	Deuxième variation d'une fonction
$\frac{\partial J}{\partial x}$ ou J_x	dérivée partielle du premier ordre par rapport à x
$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \ddot{g}$ ou g''	dérivée partielle du second d'ordre par rapport x
∇	Gradient d'une fonction
∇^2	Matrice hessienne
$ \cdot $	Valeur absolue
$\ \cdot\ $	Norme
*	Grandeur Optimale
$(\cdot)^T$	Transposée
$(\cdot)^{-1}$	Opérateur inverse
$rang(\cdot)$	Rang d'une matrice

Abréviations

ABC	Colonie d'abeilles artificielles
CARMA	Moyenne mobile auto-régressive contrôlée
CLF	Fonction de contrôle Lyapunov
CO	Contrôle optimal
CPL	Contrôle prédictif linéaire
CV	Calcul des variations
DMC	Contrôle matriciel dynamique
GAs	Algorithmes génétiques
GHJB	Hamilton-Jacobi-Bellman généralisée
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman
GPC	Contrôle prédictif généralisé
IP	Méthode de points intérieurs
KKT	Méthode de Karush-Kuhn-Tucker
LQ	Linéaire quadratique
min	minimum
MAC	Contrôle algorithmique du modèle
MPC	Modèle prédictive de contrôle
MPHC	Contrôle heuristique prédictif de modèle

NMPC	Modèle prédictive de contrôle non linéaire
NP	Programmation non linéaire
PD	Programmation dynamique
PEM	Méthode d'erreur de prédiction
PFC	Contrôle fonctionnel prédictif
PID	Dérivé intégral proportionnel
PMP	Principe du minimum de Pontryagin
PNL	Programmation non linéaire
PSO	Méthode d'essaim de particules
QP	Programmation quadratique
SDP	Programmation semi-définie
SISO	Entrée unique Sortie unique
SQP	Programmation quadratique séquentielle
TPBVP	Problème de valeur limite à deux points
VIM	Méthode de l'itération variationnelle

Introduction générale

Le contrôle prédictif à base de modèle (Model Predictive Control, MPC, en anglais) ou contrôle à horizon glissant (fuyant) est un cas particulier du contrôle optimal qui utilise un modèle de processus explicite pour prédire l'évolution future du procédé [219]. Il a vu le jour dans les années soixante dix [235, 69] suite au besoin réel dans le monde industriel dont les procédés à contrôler sont complexes. Les premières variantes du contrôle prédictif ont été développées par Richalet et al. [235], Cutler et Ramaker [69]. Les premières applications du contrôle prédictif concernent les industries chimique et pétrolière. En effet, cette technique de contrôle permet de prendre en compte les contraintes d'une façon systématique lors de la conception et de l'implantation de la loi du contrôle, ce qui est souvent exigé dans l'industrie. Vu les avantages de cette technique de contrôle, des efforts ont été intensifiés par la communauté pour développer d'autres algorithmes plus efficaces, pour répondre aux différentes spécifications industrielles et d'étendre son application aux différents domaines. Par exemple, la gestion du fonctionnement des micro-réseaux [214], la stratégie de gestion du réseau d'eau potable [118], le contrôle de l'administration d'insuline à un diabétique de type I [215], le système de chauffage des bâtiments [207], le pilote automatique de simulation de circulation de véhicules [99] et dans l'intersection d'engins spatiaux [125].

Le contrôle prédictif constitue une classe importante de correcteurs avancés qui peuvent utiliser les informations sur l'évolution du système pour prédire son évolution future grâce à des modèles précis et à des mesures effectuées en temps réel [141, 46]. Le principe du contrôle prédictif consiste à minimiser un critère de performance qui représente l'écart entre la sortie prédite et la trajectoire de référence. Par conséquent, un problème de contrôle optimal doit être résolu en ligne sur un horizon glissant, c'est-à-dire, à chaque instant d'échantillonnage, le problème de contrôle optimal est résolu et le premier signal de contrôle de la séquence de contrôle futures prédites est appliqué au système à contrôler. Notons que le problème d'optimisation avec contraintes doit être résolu en un temps inférieur à la

période d'échantillonnage [49, 272].

Le contrôle prédictif est un algorithme de contrôle mature qui s'adapte bien pour le contrôle des systèmes linéaires et non linéaires contraints [186] et à entrées multiples [189, 260]. La formulation d'un problème de contrôle prédictif est intuitive et son principe est facile à maîtriser même pour des opérateurs avec peu de connaissances en automatique. Contrairement aux techniques classiques, le contrôle prédictif s'adapte aussi pour les systèmes à retard [223, 228] ou à des systèmes dont la structure est complexe [208]. Néanmoins, le contrôle prédictif présente certaines limitations. Ainsi, l'application du contrôle prédictif est limitée par la qualité du modèle [121]; par exemple la technique de contrôle présente des performances réduites lorsque un modèle linéaire est utilisé pour décrire la dynamique d'un système non linéaire dans une large zone de fonctionnement [279]. En plus, l'utilisation d'un modèle linéaire est complètement inadéquat lorsque des spécifications sur la qualité du produit final sont élevées où de fortes exigences environnementales sont à respecter. Dans ce cas, l'utilisation d'un modèle linéaire est forcément inapproprié et l'utilisation d'un modèle non linéaire est indispensable. Lorsqu'un modèle non linéaire est utilisé, on parle du contrôle prédictif non linéaire (NMPC). Le NMPC est une nécessité vu la complexité des systèmes industriels modernes qui sont en évolution croissante. Toutefois peu d'algorithmes sont disponibles dans la littérature pour l'optimisation des problèmes à contraintes non linéaires en temps réel surtout lorsque le système est caractérisé par une dynamique rapide [94, 121]. Ces dernières années, le NMPC a reçu une attention particulière par la communauté, dont l'objectif est d'étendre son application aux différents domaines industriels. Le contrôle prédictif des systèmes non linéaires rapides, comme dans le cas de l'aéronautique et de l'électromécanique, constitue un axe de recherche actif dont le but est développer des algorithmes permettant d'achever l'étape d'optimisation même pour des systèmes discrétisés avec des périodes d'échantillonnage très petites [91, 219, 261, 238].

L'étape importante du contrôle prédictif est la résolution en temps réel du problème d'optimisation formulé. La solution doit être disponible à chaque instant d'échantillonnage. Pour les systèmes linéaires, l'obtention de la solution analytique est possible lorsque le critère à minimiser est quadratique, et l'optimum global est garanti ce qui permet d'atteindre de meilleures performances [61, 72, 97, 141]. Lorsque le système est non linéaire, il est souvent très difficile ou voire impossible de déterminer la séquence de contrôle optimal analytiquement même de l'atteindre numériquement lorsque le système est rapide (la période d'échantillonnage est très petite). Effectivement, un problème d'optimisation non linéaire complexe est difficile à solutionner à chaque période d'échantillonnage et la solution itérative du problème de contrôle optimal est en général coûteuse en termes de

calcul, ce qui contraint l'application du contrôle prédictif pour les systèmes non linéaires [49, 95, 177].

La résolution d'un problème d'optimisation non linéaire peut se faire en utilisant des méthodes directes et indirectes [237, 78]. Le calcul des variations (CV) [30, 41, 156], le principe du minimum de Pontryagin (PMP) [201, 217] et la programmation dynamique (PD) [23] sont les trois grandes méthodes utilisées pour l'approche indirecte. Comparé aux autres méthodes, le calcul des variations est facile à mettre en œuvre [182, 275]. De plus, seuls les outils mathématiques classiques simples sont utilisés tandis que le PMP nécessite des outils mathématiques de l'analyse fonctionnelle qui sont souvent complexes [165]. Cependant, il est intéressant de souligner que les méthodes PMP et PD sont plus générales car elles n'exigent pas la régularité de la solution [68, 216]. Dans l'approche indirecte, les conditions nécessaires d'optimalité sont discrétisées pour déterminer la solution du problème de contrôle optimal. Généralement, un système d'équations algébriques linéaires ou non linéaires est obtenu.

Pour un problème de contrôle optimal, les conditions d'optimalité sont obtenues par le calcul des variations, le principe du minimum de Pontryagin ou par la programmation dynamique. En effet, l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman représente la condition suffisante d'optimalité obtenue en appliquant le principe de Bellman [23], tandis que l'équation d'Euler-Lagrange, et les équations d'Hamilton-Pontryagin sont obtenues en appliquant le CV et le PMP respectivement. Ces conditions d'optimalité sont données sous forme d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires.

Les conditions d'optimalité résultantes par l'approche indirecte sont généralement difficiles à résoudre. Ce problème a attiré l'attention de nombreux chercheurs dont l'objectif est de développer des techniques de résolution efficaces et simples à mettre en œuvre. Des méthodes indirectes basées sur le principe du minimum de Pontryagin ont été exploitées dans le cadre du contrôle prédictif. Dans [51], un problème de contrôle prédictif contraint à base de modèles linéaires a été considéré. Les auteurs ont utilisé le principe minimum de Pontryagin pour générer des trajectoires optimales pour les contrôles et les états pour un ensemble donné de contraintes actives. Puis le problème résultant est résolu en utilisant la récursion de Riccati. Dernièrement, le contrôle prédictif du modèle basé sur le principe minimum de Pontryagin de la gestion de l'énergie pour un bus électrique hybride rechargeable a été proposé dans [297]. Les conditions d'optimalité sont déterminées par la méthode de tir. La méthode indirecte basée sur PMP a été également appliquée au problème NMPC avec contraintes dans [16]. La méthode du gradient a été employée, dans [115], pour résoudre un problème à valeurs limites résultant de l'application de la méthode PMP pour le problème de NMPC à temps continu soumis à des contraintes de contrôle.

L'approche d'Euler-Lagrange indirecte, a été aussi exploitée dans le cadre de contrôle prédictif à base de modèle. Cette technique pour le problème de NMPC a été traité dans [210] en utilisant la méthode de continuation (méthode de l'homotopie). Néanmoins, les contraintes sur l'état terminal sont difficiles à prendre en compte dans cette approche, ce qui représente une contrainte pour garantir la stabilité en boucle fermée [51]. Le contrôle optimal d'un système d'ordre fractionnaire basé sur l'approche d'Euler-Lagrange a été élaboré dans [263]. Le modèle fractionnaire correspondant est approximé en utilisant une approximation d'Oustaloup récursive. Dans l'article [11], les auteurs se sont intéressés au problème de contrôle prédictif contraint sur les vecteurs d'état et de contrôle. Le modèle non linéaire est linéarisé et discrétisé. Par la suite, un problème d'optimisation en temps discret est résolu par un algorithme de programmation quadratique (QP). Dans [93], les auteurs ont abordé le contrôle prédictif du mouvement de robots manipulateurs à bras flexibles. Une linéarisation locale autour d'un point de fonctionnement a été opérée et la charge utile du robot est identifiée en ligne en utilisant la méthode d'erreur de prédiction (PEM).

La méthode directe dont le principe repose sur la discrétisation en premier puis sur l'optimisation en second peut résoudre un problème de contrôle optimal complexe avec une non linéarité assez forte en transformant le problème original en un problème de programmation non linéaire (PNL) [75, 247]. Ce problème d'optimisation non linéaire peut être résolu avec des méthodes bien adaptées pour le problème d'optimisation non linéaire [194]. Ces méthodes numériques sont paralysées par les erreurs d'approximation, de la vitesse de convergence et par les estimés de départ pour les solutions. Ces méthodes sont aussi coûteuses en termes de calcul et convergent souvent vers les optimaux locaux. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode de la programmation quadratique séquentielle (SQP) [32], les méthodes de points intérieurs [292], La méthode de Nelder-Mead [109]. Les solutions locales peuvent être appliquées dans la stratégie de NMPC. Toutefois les méthodes globales restent les plus intéressantes pour un problème de contrôle prédictif non linéaire pour améliorer davantage les performances [49, 172], c'est-à-dire en assurant un bon suivi de trajectoire de référence et un rejet rapide de la perturbation.

Plusieurs techniques d'optimisation globale ont été appliquées dans le cadre du contrôle prédictif non linéaire NMPC. Parmi les méthodes les plus employées, on peut citer la méthode du recuit simulé [52, 158, 157] qui est une méthode itérative aléatoire basée sur les principes de la physique. Elle est reconnue par sa forte capacité de traiter les systèmes avec une grande non linéarité soumis à des contraintes fortes. Elle est aussi bien appropriée pour les problèmes avec des perturbations externes, par exemple le bruit. Son application en ligne pour le problème de contrôle prédictif est très appréciée vu le coût faible de calcul

[6]. Cependant, il n'y a pas de garantie pour la convergence de l'algorithme vers la solution globale.

La méthode Alienor [56, 59] est une technique d'optimisation employée généralement pour les problèmes d'optimisation dont la fonction objectif vérifie la condition de croissance à l'infini. Elle est basée sur la réduction du nombre de variables d'optimisation. Ainsi, en utilisant des transformations réductrices, on ramène le problème à plusieurs variables à un problème à une seule variable. Puis les méthodes classiques sont utilisées pour résoudre aisément le problème d'optimisation résultant. Néanmoins, pour un problème d'optimisation avec un nombre important de variables de décision, un effort de calcul important est nécessaire puisque les transformations réductrices sont souvent formulées par des fonctions trigonométriques, ce qui limite son application.

Basée sur l'évolution biologique, les algorithmes génétiques (GAs) sont des méthodes d'optimisation appliquées avec succès à une variété de problèmes d'optimisation complexes avec contraintes [311]. Dans les GAs, les solutions sont considérées comme des individus et l'ensemble de ces derniers forme une population. Pour la recherche d'une bonne solution, les individus sont modifiés et mis à jour d'une manière itérative. Ainsi chaque itération, on obtient une génération. Les algorithmes génétiques peuvent trouver la solution pour un problème de contrôle prédictif non linéaire, contraint et non convexe avec une forte capacité de recherche [8, 212, 304]. Cependant, ils sont adaptés beaucoup plus aux systèmes à dynamique lente vu leurs complexités numériques. De plus, il n'y a aucune garantie sur l'optimalité ou la qualité de la solution obtenue par les algorithmes génétiques.

La Colonie Artificielle des Abeilles (ABC) est une autre méthode utilisée récemment dans le contrôle prédictif non linéaire [244, 243]. Le principe de cet algorithme est basé sur la conduite réelle des abeilles pour l'exploration du pollen. L'algorithme ABC est simple [100] et précis [150, 151, 264, 18] avec une convergence rapide [18, 54]. Néanmoins, pour des fonctions multimodales, l'algorithme converge vers un optimum local [152].

L'inconvénient majeur de ces méthodes est lié à la solution obtenue qui est en général une solution localisée au voisinage d'un optimum global, c'est-à-dire ce n'est pas la solution optimale. Aussi, la convergence de ces méthodes dépend beaucoup de la solution initiale et de la paramétrisation de l'algorithme. Elles sont très sensibles à l'estimation initiale de la solution. Localiser un optimum global en un temps inférieur ou égale à la période d'échantillonnage tout en respectant les contraintes est le problème majeur dans le cas du contrôle prédictif non linéaire. En effet, pour certains systèmes dynamiques rapides, achever un optimum global en un temps petit est généralement très difficile voir impossible à réaliser [49, 50, 95, 177].

Ainsi, la réussite du contrôle prédictif pour un système non linéaire rapide est liée direc-

tement à l'algorithme d'optimisation utilisé. Ce dernier doit être précis et de convergence rapide.

Ces dernières années, la méthode de l'itération variationnelle (VIM) a été appliquée pour le problème de contrôle optimal. En utilisant VIM, le problème de contrôle optimal est converti en un problème de valeur limite à deux points (en anglais two point boundary value problems (TPBVP)). La méthode VIM est une méthode itérative, développée par He [130], et elle a été appliquée avec succès par la suite à la résolution de plusieurs types d'équations différentielles [1, 113, 289]. Cette méthode a été exploitée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal sans passer par une étape de linéarisation et de discrétisation. La méthode VIM a été adoptée pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange d'un problème de contrôle optimal dans [24]. Les équations de Hamilton-Pontryagin d'un problème de contrôle optimal ont été aussi résolues par VIM dans le cas des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires par [179] et par [7] dans le cas des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. En utilisant la méthode de l'itération variationnelle, les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman pour le problème de contrôle optimal ont été également résolues avec succès [147]. Dans [259], le problème de contrôle optimal quadratique non linéaire a été solutionné aussi avec VIM. De même pour le problème de contrôle optimal non linéaire, les auteurs ont employé VIM modifiée pour traiter ce problème [185].

L'algorithme VIM présente des avantages remarquables. Il peut être facilement compris et appliqué aux problèmes non linéaires. La solution est obtenue itérativement en utilisant une formule de correction. Les systèmes fortement non linéaires à savoir les équations d'ondes non linéaires et les équations de diffusion non linéaires ont été résolues avec VIM dans [289, 290]. Les auteurs ont démontré que VIM est un outil très fiable pour les équations extrêmement complexes.

Les conditions de convergence de VIM ont été étudiées par Odibat [206], Salkuyeh [245], Tatari et Dehghan [271].

Motivés par toutes ses considérations, nous allons proposer, dans le cadre de cette thèse, une approche basée sur VIM pour le contrôle prédictif non linéaire. Comme il a été indiqué précédemment, la méthode de VIM a démontré son efficacité dans le cas de problème de contrôle optimal. Comme le problème de contrôle prédictif est la résolution répétée du problème de contrôle optimal à chaque instant d'échantillonnage, alors la méthode peut être exploitée aussi dans le cadre du contrôle MPC. La contribution de la thèse s'inscrit dans le cadre du contrôle prédictif non linéaire basé sur l'approche indirecte. L'idée développée consiste à utiliser la méthode VIM pour convertir les conditions d'optimalité en un système d'équations algébriques dont la résolution est très simple. Ainsi, la solution du problème de valeur limite à deux points issu de l'approche d'Euler-Lagrange ou du principe

du minimum de Pontryagin est déterminé en utilisant la méthode VIM à chaque instant d'échantillonnage. Cette approche permet d'éviter la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire. Ainsi, à l'aide d'une fonctionnelle de correction, l'équation d'Euler-Lagrange ou les équations d'Hamilton-Pontryagin sont résolues sur un horizon de temps fini, ce qui permet d'obtenir un ensemble d'équations algébriques à résoudre à chaque instant d'échantillonnage en imposant les conditions aux limites correspondantes. L'avantage majeur de l'emploi de VIM dans la stratégie du contrôle prédictif non linéaire, par rapport aux autres méthodes itératives qui existent dans la littérature, réside dans le fait que peu d'itérations sont suffisantes pour assurer la convergence vers la solution optimale.

La thèse est structurée comme suit :

Dans le **chapitre 1**, on présente des définitions et des rappels généraux sur le contrôle optimal des systèmes continus. Ce chapitre commence par la formulation du problème de contrôle optimal tout en expliquant les différentes parties qui le constituent. Par la suite, des rappels sur la contrôlabilité des systèmes dynamiques sont introduites. La suite du chapitre expose les méthodes de résolution du problème de contrôle optimal. Nous avons aussi résumé les travaux existant dans la littérature sur les méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal tout en citant les avantages et les inconvénients de chaque méthode. La fin du chapitre est réservée à un problème de contrôle optimal particulier qui est le contrôle linéaire quadratique.

Le **chapitre 2** est dédié au contrôle prédictif. On commence par la présentation du principe du contrôle prédictif, de son réglage et les différentes contraintes qu'on peut rencontrer lors de son implémentation. Ensuite, on va exposer les différentes méthodes de contrôle prédictif linéaire et non linéaire. La fin du chapitre présente un état d'art sur les différentes approches de contrôle prédictif tout en indiquant leurs limites.

Dans le **chapitre 3**, on aborde la méthode de l'itération variationnelle en expliquant son principe et son utilisation pour la résolution des équations différentielles ordinaires. Une approche alternative de VIM ainsi que sa convergence sont présentées par la suite. Puis, nous allons introduire deux algorithmes de la méthode de l'itération variationnelle qui permet d'éliminer les calculs répétés et d'accélérer la vitesse de convergence. Pour illustrer l'efficacité de ces deux algorithmes, deux exemples d'application sont présentés.

Le **chapitre 4** présente le contrôle prédictif basé sur la méthode de l'itération variationnelle. On commence par la première partie qui consiste à résoudre le problème de NMPC par l'approche variationnelle basée sur l'équation d'Euler-Lagrange. Dans cette partie, les principales étapes de cette nouvelle approche ont été détaillées. L'efficacité de l'approche proposée est illustrée par deux exemples d'applications. La deuxième partie du chapitre est consacrée au contrôle prédictif basé sur la résolution à l'aide de VIM des conditions

d'optimalité obtenues en appliquant le principe du minimum de Pontryagin.

La fin de la thèse est réservée à la conclusion générale où sont résumés les différents résultats obtenus dans le cadre de cette thèse et les perspectives de continuité.

Travaux réalisés

Les travaux de cette thèse ont donné lieu à une publication et une présentation indiquées comme suit :

Articles

Rima Terkmani, Ahmed Maida, Saïd Guermah and Mohamed Aidene. Receding horizon control based on the variational iteration method. *International Journal of Systems, Control and Communications*. Vol.11 No.3, pp.242 - 260, 2020.

Communications internationales

Rima Terkmani, Ahmed Maida, Saïd Guermah and Mohamed Aidene. Dynamic Optimization Based on the Variational Iteration Method for Predictive Control. 16^{ème} *Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information, (COSI), Tizi-Ouzou(Algérie)*. 24-26 Juin 2019.

Contrôle optimal des systèmes continus

1.1 Introduction

Le contrôle optimal est une branche mathématique très répandue ces dernières années et a apporté de multitudes contributions à la théorie, que ce soit pour les approches déterministes, que pour les stochastiques. Le contrôle optimal a été appliqué avec succès dans de nombreux domaines tels que la biologie, l'économie, l'écologie, l'ingénierie, la finance, la gestion et la médecine [166, 102]. Le modèle mathématique correspondant peut être représenté par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, partielles, stochastiques, etc ...

Le principe du contrôle optimal repose sur la détermination des contrôles qui feront passer le procédé de l'état initial à l'état final, en optimisant certains critères de performance et en respectant certaines contraintes qui peuvent s'imposer [156, 168, 82].

Les problèmes de contrôle optimal sont dérivés des problèmes du calcul classique des variations (CV) [162]. Ce dernier est apparu suite aux problèmes rencontrés dans le domaine de la science et de l'ingénierie [170, 264, 285], comme par exemple le problème de la brachistochrone dû à Johann Bernoulli à la fin du 17ème siècle, le principe de Fermat en optique qui prédit la loi de Snell, Principe de Dirichlet (minimise une énergie fonctionnelle sur les surfaces conduisant à l'équation de Poisson), le principe d'action (comme cas particulier, nous obtenons la deuxième loi de Newton). Après la seconde guerre mondiale, dans les années 1950, les applications des problèmes de contrôle optimal dans les problèmes d'ingénierie, en particulier ses applications en aérospatiales ont explosé et gagné en popu-

larité et sont devenus un domaine de recherche distinct. Les deux principes importants qui sont apparus et ont permis de développer des conditions d'optimalité pour un problème de contrôle optimal quelconque sont : le principe du minimum de Pontryagin [217] et le principe de Bellman [23].

Ce chapitre est consacré au contrôle optimal des systèmes continus. Après avoir donné la formulation du problème de contrôle optimal dans la première partie, des rappels sur la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires ont été présentés en deuxième partie. La troisième partie du chapitre aborde les méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal à savoir les méthodes directes et indirectes. Dans la quatrième partie, nous présentons un cas particulier du contrôle optimal connu sous le nom de contrôle optimal quadratique.

1.2 Formulation du problème

La principale étape pour la formulation d'un problème de contrôle optimal est de le mettre sous sa forme mathématique (modélisation) [156, 37] et elle nécessite les éléments suivants :

- Une description mathématique (ou modèle) du processus à contrôler.
- Un énoncé des conditions terminales.
- Un énoncé des contraintes physiques.
- Spécification d'un critère de performance.

• Modèle mathématique

L'objectif de la modélisation est d'obtenir la description mathématique la plus simple qui prédit adéquatement la réponse du système physique à toutes les entrées prévues. Notre discussion se limitera aux systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires définies par sa représentation d'état. L'évolution de ces systèmes est donnée par le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.1}$$

où

- $t \in \mathbb{R}^+$ est la variable de temps.
- $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état (Il caractérise l'état du système à l'instant t).

- $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ est appelé vecteur de contrôle (Il agit sur l'évolution du processus)
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ est une fonction vectorielle.

- **Conditions terminales**

Les conditions terminales représentent les conditions initiale et finale. En effet, la condition initiale est un cas particulier de l'état : c'est l'état à l'instant $t = 0$ tandis que la condition finale désigne l'état du système à l'instant $t = t_f$. Ces conditions sont données par :

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

$$x(t_f) = x_f \tag{1.3}$$

avec x_0 , x_f sont respectivement les conditions initiale et finale (x_f peut être fixée ou non) et t_0 , t_f sont respectivement les instants initial et final (t_f peut être fixé ou non).

- **Contraintes physiques**

Après avoir sélectionné un modèle mathématique, l'étape suivante consiste à définir les contraintes physiques sur les variables d'état et du contrôle. On retrouve deux types de contraintes.

- **Contraintes instantanées**

Ces contraintes peuvent être imposées par exemple pour des raisons de sécurité. Elles peuvent être exprimées comme suit

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad q \in \mathbb{R}^{n_q} \tag{1.4}$$

- **Contraintes intégrales**

Ces contraintes sont généralement associées à des ressources limitées (par exemple, un stockage contenant un nombre limité de produits à utiliser). Elles sont représentées par l'expression suivante :

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{C}(x(t), u(t), t) dt \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad \mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n_c} \quad (1.5)$$

avec $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ sont des fonctions vectorielles supposées continues et différentiables. n_q est le nombre de contraintes instantanées et n_c est le nombre de contraintes intégrales.

- **Critère de performances**

Les algorithmes d'optimisation sont basés sur des critères de performance spécifiques définis par des objectifs ou des fonctions de coût. Diverses fonctions objectives ont été proposées dans la littérature pour optimiser la réponse du système commandé, et la forme la plus générale du critère à optimiser correspond à l'expression suivante [156, 37, 276] :

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.6)$$

où $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ et $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ sont des fonctions scalaires avec $S(x(t_f), t_f)$ appelée partie terminale. D'après la forme du critère (1.6), on distingue :

1. Problème de **Mayer** :

$$J = S(x(t_f), t_f) \quad (1.7)$$

2. Problème de **Lagrange** :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.8)$$

3. Problème de **Bolza** :

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.9)$$

La sélection du critère est très important, il doit être choisi avec rigueur et reflète de manière appropriée les objectifs à optimiser. Les critères les plus importants sont [276, 156, 37] :

a) Poursuite : L'objectif est de minimiser l'erreur entre l'état réel du système $x(t)$ et la trajectoire de référence $x^d(t)$. Ce critère est donné comme suit :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x(t) - x^d(t))^T Q (x(t) - x^d(t)) dt \text{ avec } Q = Q^T \geq 0 \quad (1.10)$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de pondération.

b) Régulation : Il s'agit de maintenir l'état $x(t)$ du système très proche de zéro, c'est-à-dire dans ce cas $x^d(t) = 0$. Il représente un cas particulier de la poursuite

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt \text{ avec } Q = Q^T \geq 0 \quad (1.11)$$

c) Contrôle à énergie minimale : Son principe repose sur la minimisation de l'effort de contrôle. Son expression est donnée par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T R u(t) dt \text{ avec } R = R^T > 0 \quad (1.12)$$

où $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice de pondération.

d) Contrôle à temps minimal : L'objectif est de transférer un système d'un état initial arbitraire vers un ensemble spécifié en un temps minimum. Ce critère est donné par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt, \quad \psi(x(t), u(t), t) = 1. \quad (1.13)$$

e) Poursuite et contrôle à énergie minimale : La combinaison du critère (1.10)

avec le critère (1.12) nous permet de réaliser une poursuite de trajectoire désirée tout en minimisant l'énergie. Cet objectif est exprimé comme suit :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x(t) - x^d(t))^T Q (x(t) - x^d(t)) + u(t)^T R u(t) dt \quad (1.14)$$

En résumé, la formulation du problème de contrôle optimal est donnée par l'expression suivante [276, 156, 37] :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.15)$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.16)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.17)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (1.18)$$

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (1.19)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{C}(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad (1.20)$$

Après la modélisation mathématique du problème de contrôle optimal, on doit passer à l'étude de l'existence d'un contrôle qui permet d'effectuer le transfert de l'état du système, de l'état initial x_0 vers l'état final x_f de sorte à respecter les buts visés [156, 202]. Avant d'énoncer la contrôlabilité des systèmes dynamiques, soient les définitions suivantes.

Définition 1.1.

Un contrôle qui satisfait les contraintes de contrôle pendant tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ est appelé un contrôle admissible.

On notera l'ensemble des contrôles admissibles par \mathcal{U} , et la notation $u \in \mathcal{U}$ signifie que le contrôle u est admissible.

Définition 1.2.

Une trajectoire d'état qui satisfait les contraintes des variables d'état pendant tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ est appelée trajectoire admissible.

L'ensemble des trajectoires d'état admissibles sera noté \mathcal{X} et $x \in \mathcal{X}$ signifie que la trajectoire x est admissible.

1.3 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

La contrôlabilité est un concept fondamental de la théorie du contrôle optimal. La contrôlabilité signifie généralement qu'il est possible de conduire un système de contrôle dynamique d'un état initial arbitraire à un état final arbitraire en utilisant l'ensemble des contrôles admissibles.

1.3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in I_v = [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

On suppose que :

- A et B sont deux applications localement intégrables sur $[t_0, t_f]$ à valeur respectivement dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{n \times m}$.
- Le contrôle u est mesurable et localement bornée sur $[t_0, t_f]$ à valeurs dans le sous-ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 1.3.

Le système (1.21) est dit contrôlable en temps t_f si pour tous $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_f en temps t_f .

a) Systèmes linéaires non autonomes (instationnaire)

La solution du système (1.21) en temps t est

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_{t_0}^{t_f} M(s)^{-1} B(s)u(s)ds, \quad t \in I_v \quad (1.22)$$

où $M(\cdot)$ est la résolvante du système linéaire homogène suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (1.23)$$

définie par :

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t), \\ M(0) = I_n, \end{cases} \quad (1.24)$$

où I_n est la matrice d'identité d'ordre n .

Théorème 1.1. [275]

Le système (1.21) est dit contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice de contrôlabilité

$$D(t) = \int_{t_0}^{t_f} M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T dt, \quad (1.25)$$

est inversible.

b) Systèmes linéaires autonomes

On considère maintenant que le système (1.21) est autonome, c'est-à-dire $\forall t \in I_v, A(t) = A$ et $B(t) = B$. Le système (1.21) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), & t \in I_v = [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.26)$$

Le Théorème ci-dessous donne la condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité du système (1.26) dans le cas où il n'y a pas de contraintes sur le contrôle et l'état.

Théorème 1.2. [275]

Le système (1.26) est dit contrôlable en temps t (quelconque) si et seulement si la matrice suivante :

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B), \quad (1.27)$$

est de rang égal à n .

Remarque 1.1.

- La matrice C est appelée matrice de Kalman.
- La condition $\text{rang}(C) = n$ est appelée condition de Kalman.

1.3.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la contrôlabilité d'un système non linéaire, il faut linéariser le système autour d'un point c'est-à-dire à étudier la contrôlabilité locale partant du fait que la contrôlabilité d'un système linéarisé implique celle d'un système non linéaire d'une manière locale [203]. Cette condition reste une condition suffisante pour la contrôlabilité.

Points d'équilibres, trajectoires et définitions

On considère le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.28)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$. $x \in \mathbb{R}^n$ est solution du système (1.28) lorsque

$$\forall \tau \leq t_f, \quad x(\tau) = x_0 + \int_{t_0}^{\tau} f(x(t), u(t), t) dt. \quad (1.29)$$

Définition 1.4.

On appelle point d'équilibre du système (1.28) un couple $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ satisfaisant $f(x_e, u_e) = 0$.

Théorème 1.3. Dans \mathbb{R}^n , un ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné.

Définition 1.5.

On appelle trajectoire du système de contrôle (1.28) une fonction $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{O}$ tel que $t_f > 0$, $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, \exists un compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ tel que $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \mathcal{K}$ pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$, on a :

$$\bar{x}(t_2) = \bar{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt, \quad \forall [t_1, t_2] \in [t_0, t_f] \quad (1.30)$$

La contrôlabilité d'un système peut être étudiée au voisinage d'un point d'équilibre donné comme elle peut être étudiée au voisinage d'une trajectoire donnée.

Définition 1.6.

On dit que le système (1.28) est localement contrôlable au point d'équilibre $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x_0, x_f \in E_\eta(x_e) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_e| < \eta\}$, il existe une application mesurable $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que

$$\begin{aligned} |u(t) - u_e(t)| &\leq \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ (\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(t_0) = x_0) &\Rightarrow x(t_f) = x_f \end{aligned}$$

Définition 1.7.

Le système (1.28) est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $|a - \bar{x}(t_0)| < \eta$ et $|b - \bar{x}(t_f)| < \eta$, il existe une trajectoire $(x, u) : [t_0, t_f] \mapsto \mathcal{O}$ tel que :

$$\begin{aligned} x(t_0) = a, \quad x(t_f) = b \\ |u(t) - \bar{u}(t)| \leq \epsilon, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Avant d'énoncer le Théorème de contrôlabilité, on introduit la définition d'un système linéarisé le long d'une trajectoire d'un système de contrôle.

Définition 1.8.

Le système de contrôle linéarisé le long d'une trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

est le système de contrôle donné comme suit :

$$\dot{x}(t) = \nabla_x f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) x(t) + \nabla_u f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) u(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (1.31)$$

Le Théorème suivant donne une condition nécessaire sur la contrôlabilité locale des systèmes non linéaires résultant des définitions (1.4)-(1.8).

Théorème 1.4. [65]

Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ une trajectoire de système de contrôle non linéaire (1.28). En supposant que le système (1.31) linéarisé le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ est contrôlable, alors le système non linéaire (1.28) est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$.

1.3.3 Existence de trajectoires optimales

Considérons un système de contrôle général suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.32)$$

Après avoir résolu le problème de contrôlabilité, on cherche parmi toutes les solutions possibles (admissibles), une trajectoire qui minimise le coût (1.15). La condition nécessaire d'optimalité des trajectoires est donnée par le Théorème suivant.

Théorème. [275]

Considérons le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

où f est de C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R}^n , les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement on a des contraintes sur l'état

$$q_1(x) \leq 0, \dots, q_{n_q}(x) \leq 0,$$

où q_1, q_2, \dots, q_{n_q} sont des fonctions continues sur \mathbb{R}^n . Soient \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 deux compacts de \mathbb{R}^n tels que \mathcal{M}_1 est accessible depuis \mathcal{M}_0 . Soit \mathcal{U} l'ensemble de contrôles à valeurs dans \mathbb{R}^m joignant \mathcal{M}_0 à \mathcal{M}_1 . Soit ψ une fonction de C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ et S est une fonction continue sur \mathbb{R}^n . On considère le coût

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt$$

où $t_f \geq 0$ est tel que $x(t_f) \in \mathcal{M}_1$, on suppose que :

- Il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est uniformément bornée par b sur $[t_0, t_f]$, i.e

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [t_0, t_f], \|x(t)\| \leq b,$$

- Pour tout $(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, l'ensemble des vecteurs vitesse augmentés

$$\tilde{V}(t, x) = \{(\psi(x, u, t)), f(x, u, t) | u \in \mathcal{U}\}$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal u sur $[t_0, t_f]$ telle que la trajectoire associée joint \mathcal{M}_0 à \mathcal{M}_1 en temps t_f et en un coût minimal.

1.4 Méthode de résolution du problème de contrôle optimal

Les méthodes directes et indirectes sont généralement les méthodes les plus utilisées pour la résolution du problème de contrôle optimal [226, 246]. La détermination de la solution du problème de contrôle optimal est une tâche difficile dans le cas où les systèmes dynamiques sont extrêmement non linéaires. Des efforts considérables sont déployés pour développer des techniques de contrôle optimales efficaces [273]. Dans de rares cas, des problèmes de contrôle optimal assez simples peuvent être résolus analytiquement, mais dans le cas où les systèmes dynamiques sont décrits par des équations différentielles fortement non linéaires, il est nécessaire d'utiliser les méthodes numériques [25, 64].

1.4.1 Méthodes directes

Le principe de la méthode directe consiste à la discrétisation du problème de contrôle optimal, qui est ensuite converti en un problème de programmation non linéaire [26] résolu numériquement à l'aide d'une méthode d'optimisation bien établie [292, 205]. Les méthodes directes appartiennent à une classe de méthodes très large où différentes techniques peuvent être utilisées. Ces techniques diffèrent par la variable à discrétiser (c'est-à-dire le contrôle et l'état) et les méthodes d'approximation de la dynamique temporelle continue. Parmi les méthodes qui permettent la conversion vers un problème de PNL, on cite la méthode de discrétisation complète (états et contrôles) [27, 277], la méthode de paramétrisation du vecteur de contrôle [267, 42] et la méthode de paramétrisation des vecteurs de contrôle et l'état (méthode de colocation) [71].

Dans le cas de la paramétrisation du vecteur de contrôle, le contrôle est paramétré (approximé) par des fonctions linéaires par morceaux [112, 250, 138] qui peuvent être des polynômes, des fonctions trigonométriques, des séries de Fourier tronquées ou autres fonctions orthogonales [267]. L'expression du contrôle approximée est alors remplacée dans le modèle du système, ainsi l'expression de l'état $x(t)$ est déterminée par la résolution analytique des équations différentielles résultantes. L'inconvénient de cette approche est que l'obtention de l'expression analytique de l'état et l'intégration du critère n'est pas évidente et nécessite des solveurs robustes ou passer à la discrétisation complète détaillé ci-dessous.

Dans le cas de la paramétrisation du contrôle et de l'état, les états et les contrôles sont approximés avec des fonctions polynomiales [27, 277]. Les équations différentielles en temps continu sont donc converties en contraintes algébriques après la substitution des expressions des états et des contrôles paramétrés dans le modèle du système. Aussi, les expressions des états et des contrôles seront remplacées dans le critère à optimiser et on obtient ainsi un problème d'optimisation statique avec contraintes d'égalité.

La méthode de discrétisation complète est une autre version pour convertir le problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation statique. Tout d'abord, le modèle (1.16) sera discrétisé en utilisant par exemple la méthode d'Euler explicite [156, 66, 201]. Ainsi le modèle discret est donné comme suit :

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t f(x(k), u(k), k) \quad (1.33)$$

où k est l'instant discret et Δt représente la période d'échantillonnage.

Par la suite, le critère (1.15) sera discrétisé aussi en utilisant par exemple la méthode

des trapèzes [221, 305]. Par conséquent, on aura dans le cas où $x(t_f)$ libre

$$J(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_f)) = S(x(t_f), t_f) + \frac{\Delta t}{2} \left[\psi(x(t_0), u(t_0), t_0) + \psi(x(t_f), u(t_f), t_f) + 2 \sum_{k=1}^{n_s} \psi(x(t_k), u(t_k), t_k) \right] \quad (1.34)$$

où n_s est le nombre de subdivisions de l'intervalle $[t_0, t_f]$ c'est-à-dire $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{n_s}$. Le modèle discret (1.33) nous permet d'écrire

- $x(t_1) = x(t_0) + \Delta t f(x(t_0), u(t_0), t_0)$
 $= x_0 + \Delta t f(x(t_0), u(t_0), t_0)$
 $= \mathcal{F}_1(u(t_0))$
- $x(t_2) = x(t_1) + \Delta t f(x(t_1), u(t_1), t_1)$
 $= x_0 + \Delta t f(x(t_0), u(t_0), t_0) + \Delta t f(x_0 + \Delta t f(x(t_0), u(t_0), t_0), u(t_1), t_1)$
 $= \mathcal{F}_2(u(t_0), u(t_1))$
- \vdots
- $x(t_f) = \mathcal{F}_{n_s+1}(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s}))$

Après la substitution des $x(t_k)$ par leurs expressions dans le critère (1.34), on obtient le problème d'optimisation statique (ou de programmation non linéaire) suivant :

$$\min_{u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s})} J(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s})) \quad (1.35)$$

où $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s})$ représentent la solution du problème (1.35). Ce dernier peut être solutionné en employant les méthodes de programmation non linéaire [227].

Dans le cas où l'état final est imposé, on aura $S(x(t_f), t_f) = 0$ et par conséquent, on obtient le problème suivant :

$$\min_{u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s})} J(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s})) \quad (1.36)$$

sujet à :

$$x(t_f) = \mathcal{F}_{n_s+1}(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{n_s})) \quad (1.37)$$

La solution du problème (1.36)-(1.37) peut être trouvée en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode de pénalisation [227, 139].

1.4.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes consistent à réduire le problème de contrôle optimal à un problème de valeur limite à deux points. Dans ces méthodes, les conditions d'optimalité sont dérivées du calcul des variations (équation d'Euler-Lagrange)[201], du principe de Pontryagin (équations de Hamilton-Pontryagin)[217] ou de la programmation dynamique (équation de Hamilton-Jacobi-Bellman) [23]. Ces méthodes sont représentées ci-dessous.

Équation d'Euler-Lagrange

Le problème de chercher une fonction qui minimise une fonctionnelle donnée est appelé problème de calcul variationnel (calcul des variations). Le système est supposé soumis à l'équation de comportement (1.16), et donc on aura à traiter un problème d'optimisation contraint [201]. En règle générale, deux procédures sont utilisées pour résoudre des problèmes variationnels comportant des contraintes. Ce sont la méthode de substitution directe et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour illustrer le principe de ces deux méthodes, considérons le problème de contrôle optimal (problème de Lagrange) avec état final imposé :

$$\min_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.38)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.39)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.40)$$

$$x(t_f) = x_f. \quad (1.41)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est vecteur de contrôle et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ est une fonction différentiable par rapport à ses arguments.

a) Méthode de substitution directe

De l'équation (1.39), nous supposons que $u(t)$ peut être exprimé en fonction de $x(t), \dot{x}(t)$, c'est-à-dire :

$$u(t) = \phi(x(t), \dot{x}(t), t), \quad (1.42)$$

en remplaçant l'expression (1.42) dans (1.38), on obtient la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (1.43)$$

avec les conditions terminales (1.40)-(1.41). $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ est une fonction continue supposée être continuellement différentiable par rapport à ses arguments.

Par conséquent, le problème de la détermination du contrôle optimal, noté $u^*(t)$, est réduit à la solution du problème variationnel suivant à extrémités fixes.

$$\min_{x(t)} J = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (1.44)$$

avec

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.45)$$

$$x(t_f) = x_f. \quad (1.46)$$

Avant d'énoncer l'équation d'Euler-Lagrange, soit $\Delta J(x(t), \delta_x(t))$ la variation de J due à une variation de $\delta_x(t)$ de $x(t)$ ($x(t)$ supposé scalaire pour simplifier les expressions) telle que :

$$\Delta J(x(t), \delta_x(t)) = J(x(t) + \delta_x(t)) - J(x(t)) \quad (1.47)$$

$$= \frac{\partial J}{\partial x} \delta_x(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \delta_x^2(t) + \dots \quad (1.48)$$

$$= \delta J + \delta^2 J + \dots \quad (1.49)$$

où δJ et $\delta^2 J$ sont dites première et seconde variations de J .

Maintenant supposons que $x^*(t)$ est optimal pour J et posons $x(t) = x^*(t) + \delta_x(t)$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \dot{\delta}_x(t) = \dot{x}^*(t) + \delta_{\dot{x}}(t)$ avec $\delta_x(t_0) = \delta_x(t_f) = 0$.

La variation de J peut alors s'écrire

$$\Delta J(x^*(t), \delta_x(t)) = J(x^* + \delta_x) - J(x^*) \quad (1.50)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t) + \delta_x(t), \dot{x}^*(t) + \delta_{\dot{x}}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt \quad (1.51)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [g(x^*(t) + \delta_x(t), \dot{x}^*(t) + \delta_{\dot{x}}(t), t) - g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)] dt \quad (1.52)$$

Le développement de l'intégrande (1.52) en série de Taylor autour du point $x^*(t)$ et $\dot{x}^*(t)$ donne :

$$\begin{aligned}
\Delta J(x^*(t), \delta_x(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta_x(t) + \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta_{\dot{x}}(t) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x^2} (\delta_x(t))^2 + \frac{\partial^2 g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}^2} (\delta_{\dot{x}}(t))^2 + \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x \partial \dot{x}} \delta_x(t) \delta_{\dot{x}}(t) \right\} + \dots \right] dt \quad (1.53)
\end{aligned}$$

Donc

$$\delta J(x^*(t), \delta_x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \delta_x(t) + \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta_{\dot{x}}(t) \right] dt \quad (1.54)$$

Par intégration par parties, on aura :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta_{\dot{x}}(t) dt &= \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \delta_x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right) \delta_x(t) dt \quad (1.55)
\end{aligned}$$

En remplaçant (1.55) dans (1.54) la première variation devient

$$\delta J(x^*(t), \delta_x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta_x(t) dt \quad (1.56)$$

Pour qu'un optimum $x^*(t)$ d'une fonctionnelle J existe, il faut que la variation de cette dernière s'annule en cet optimum ; c'est-à-dire $\delta J(x^*(t), \delta_x(t)) = 0$ et ceci est prouvé par le Théorème fondamental du calcul des variations suivant.

Théorème 1.5. [156, 89]

Une condition nécessaire pour que $x^*(t)$ satisfasse l'extrémalité de la fonctionnelle J est $\delta J(x^*(t), \delta_x(t)) = 0$ pour tout $\delta_x(t)$ admissible. Une condition suffisante pour avoir un minimum ou un maximum est donnée par le signe de $\delta^2 J$. Si $\delta^2 J < 0$ on a un maximum, si $\delta^2 J > 0$ on a un minimum.

Ainsi, la relation (1.56) devient

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \delta_x(t) dt = 0, \quad (1.57)$$

et d'après le Lemme fondamental du calcul de variations suivant

Lemme 1.1. [156, 89]

Si pour chaque fonction $\mathcal{K}(t)$ qui est continue,

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{K}(t) \delta_x(t) dt = 0 \quad (1.58)$$

où la fonction $\delta_x(t)$ est continue dans l'intervalle $[t_0, t_f]$, la fonction $\mathcal{K}(t)$ doit être nulle partout dans l'intervalle $[t_0, t_f]$,

une condition nécessaire pour que $x^*(t)$ soit optimale pour la fonctionnelle J donnée par (1.44) est

$$\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (1.59)$$

cette équation est appelée équation d'Euler-Lagrange.

L'équation d'Euler-Lagrange, basée sur les variations du premier ordre, ne donne qu'une condition de stationnarité. C'est plus tard, en 1786 que Legendre [162] a étudié la seconde variation et abouti à une condition nécessaire d'optimalité du second ordre [246]. Donc pour connaître la nature de l'optimum (maximum ou

minimum), il est nécessaire d'examiner la seconde variation $\delta^2 J$.

Considérons les termes correspondant à la seconde variation dans la relation (1.53) suivante

$$\begin{aligned}\delta^2 J &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\delta_x(t))^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} (\delta_{\dot{x}}(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \dot{x}} \delta_x(t) \delta_{\dot{x}}(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (\delta_x(t))^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} (\delta_{\dot{x}}(t))^2 \right] dt\end{aligned}\quad (1.60)$$

L'équation (1.60) est obtenue en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \dot{x}} \delta_x(t) \delta_{\dot{x}}(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \dot{x}} \right) (\delta_x(t))^2 dt \quad (1.61)$$

Et selon le Théorème fondamental du calcul des variations, la condition suffisante pour avoir un minimum est que $\delta^2 J > 0$. C'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \dot{x}} \right) > 0, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} > 0, \quad (1.63)$$

quels que soient δ_x et $\delta_{\dot{x}}$. Pour un maximum, on inverse les signes des conditions précédentes.

Puisque δ_x est arbitrairement petit, nous simplifions ces deux conditions en une condition unique appelée Legendre-Jacobi [242] :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} > 0 \text{ (minimisation) ou } \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2} < 0 \text{ (maximisation)} \quad (1.64)$$

Remarque 1.2.

– L'équation (1.59), obtenue précédemment, est le cas particulier qui résulte lorsque x est un scalaire. Pour notre problème où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, l'équation d'Euler-Lagrange est donné par :

$$\nabla_{x(t)} g(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}(t)} g(x(t), \dot{x}(t), t) = 0. \quad (1.65)$$

– La condition suffisante d'optimalité (1.64) devient :

$$\nabla_{\dot{x}(t)}^2 g > 0 \text{ (minimisation) ou } \nabla_{\dot{x}(t)}^2 g < 0 \text{ (maximisation)} \quad (1.66)$$

b) Méthode des Multiplicateurs de Lagrange

Pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité du problème de contrôle optimal (1.38)-(1.41), on forme d'abord la fonctionnelle augmentée suivante :

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (\psi(x(t), u(t), t) + p^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t))) dt \end{aligned} \quad (1.67)$$

avec \mathcal{L} est le lagrangien associé au problème (1.38)-(1.41) et $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. De même, l'annulation de la première variation du critère δJ_a conduit aux conditions d'optimalité suivantes [66, 201] :

$$\nabla_{x(t)} \mathcal{L} - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}(t)} \mathcal{L} = 0 \quad (1.68)$$

$$\nabla_{u(t)} \mathcal{L} - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}(t)} \mathcal{L} = 0 \quad (1.69)$$

$$\nabla_{p(t)} \mathcal{L} - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{p}(t)} \mathcal{L} = 0 \quad (1.70)$$

Principe du minimum

Une autre méthode pour la résolution du problème de contrôle optimal est le principe du minimum de Pontryagin. Cette méthode est une extension des méthodes classiques variationnelles.

On considère le problème de contrôle optimal (1.38)-(1.41) et on applique la méthode de Lagrange. Par conséquent, le problème de contrôle optimal est réduit à résoudre le problème suivant :

$$\hat{J}_a = \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) + p(t)^T [f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] dt \quad (1.71)$$

On définit la fonction d'Hamilton (appelée aussi Hamiltonien) comme suit :

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = \psi(x(t), u(t), t) + p(t)^T f(x(t), u(t), t) \quad (1.72)$$

ainsi le problème à résoudre (1.71) prend la forme suivante :

$$\hat{J}_a = \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), p(t), u(t), t) - p(t)^T \dot{x}(t)] dt \quad (1.73)$$

Les conditions d'optimalité ci-dessous sont obtenues en mettant $\delta \hat{J}_a = 0$ [201, 66, 156] :

$$\dot{x}(t) = \nabla_{p(t)} H(x(t), p(t), u(t), t) \quad (1.74)$$

$$\dot{p}(t) = -\nabla_{x(t)}H(x(t), p(t), u(t), t) \quad (1.75)$$

$$\nabla_{u(t)}H(x(t), p(t), u(t), t) = 0 \quad (1.76)$$

Selon le principe du minimum de Pontryagin, si $u^*(t)$ est une solution du problème de contrôle optimal (1.38)-(1.41), alors

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} H(x(t), p(t), u(t), t) \quad (1.77)$$

Par conséquent, en l'absence de contraintes, l'expression de la loi de contrôle optimal $u^*(t)$ est obtenue en résolvant l'équation algébrique (1.76) par rapport à la variable de contrôle $u(t)$. Par conséquent, la loi de contrôle optimal $u^*(t)$ sera en fonction de l'état $x(t)$ et du vecteur adjoint $p(t)$, c'est-à-dire

$$u^*(t) = \varphi(x(t), p(t), t) \quad (1.78)$$

qui vérifie la condition suivante :

$$\nabla_{u(t)}^2 H(x(t), p(t), u(t), t) > 0, \quad (\text{pour un minimum}) \quad (1.79)$$

où

$$\nabla_{u(t)}^2 H(x(t), p(t), u(t), t) < 0, \quad (\text{pour un maximum}) \quad (1.80)$$

cette condition représente la condition suffisante d'optimalité.

Les équations (1.74)-(1.75) sont appelées les conditions nécessaires d'optimalité, elles permettent de calculer les trajectoires optimales $x(t)$ et $p(t)$.

Programmation dynamique

La programmation dynamique est une autre méthode pour la résolution du problème de contrôle optimal. Cette méthode a été établie par Bellman[23]. Elle consiste à diviser un problème en sous problèmes et cherche (stocke) des solutions de sous-problèmes de plus en plus grands c'est-à-dire si un contrôle est optimal entre le temps initial et le temps

final pour la condition initiale $x(t_0)$, alors il est aussi optimal entre t et t_f , $t > 0$ avec la condition initiale au temps t .

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman en temps continu est donnée comme suit :

$$\begin{cases} J_t^*(x(t), t) + H(x(t), u(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t) = 0 \\ J^*(x(t_f), t_f) = S(x(t_f), t_f), \end{cases} \quad (1.81)$$

avec

$$J^*(x(t), t) = \min_u \left\{ \int_t^{t_f} \psi(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x(t_f), t_f) \right\}, \quad \tau \in [t, t_f], \quad (1.82)$$

et

$$H(x(t), u(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t) = \min_{u(t)} H(x(t), u(t), J_x^*, t), \quad (1.83)$$

où

$$H(x(t), u(t), J_x^*, t) = \psi(x(t), u(t), t) + J_x^*(x(t), t)(f(x(t), u(t), t)), \quad (1.84)$$

est la fonction de Hamilton.

1.4.3 État de l'art des méthodes directes et indirectes

Les méthodes directes reposent sur la discrétisation des variables d'état et de contrôle dans le temps qui est ensuite transcrit en un problème de programmation non linéaire (PNL). Il existe deux procédures de discrétisation dans les méthodes d'optimisation directe, la discrétisation complète (collocation) [28] et la discrétisation de contrôle (méthode de tir directe) [112]. La méthode de tir multiple est considérée comme une méthode hybride entre la collocation et la méthode de tir unique car elle divise le problème en sous-problèmes de tir unique plus courts, imposant une continuité aux nœuds de tir [274]. Une fois la discrétisation faite, c'est-à-dire le problème de contrôle optimal est transformé en un problème de programmation non linéaire, ce dernier peut être résolu numériquement. Les méthodes d'optimisation avec contraintes peuvent être réparties en deux classes : méthodes

déterministes (exactes) et les méthodes heuristiques (stochastiques). Les méthodes les plus couramment utilisées dans l'optimisation déterministe sont les méthodes de programmation quadratique séquentielle (SQP) [108, 107, 103] et les méthodes de points intérieurs [292, 26, 280, 81, 87].

La méthode SQP a été appliquée pour le problème de contrôle optimal. Elle consiste à chercher une solution optimale pour une séquence de problèmes de programmation quadratique (QP) en utilisant une approximation pour le critère quadratique et des approximations linéaires pour les contraintes à chaque itération. Généralement, des approximations de Hessien quasi-Newton sont utilisées pour traiter les sous-problèmes de programmation quadratiques convexes [257, 258], tandis que d'autres variantes utilisent des informations dérivées secondes pour définir le Hessien [122, 281, 293] ce qui peut conduire à des sous-problèmes quadratiques non convexes [114, 196]. Dans [249, 79, 106] il est signalé que lors de la résolution de problèmes importants, les méthodes SQP qui utilisent des approximations convexes de quasi-Newton peuvent être lentes, tandis que les méthodes qui utilisent le Hessien exact du Lagrangien [98], trouvent une difficulté de calcul des solutions de programmes quadratiques indéfinis [196].

Pour la méthode de points intérieurs, le problème de contrôle optimal contraint peut se transformer en un problème non contraint en utilisant les fonctions barrières [294, 181]. Ces dernières empêchent les itérations de quitter la région réalisable. La méthode de points intérieurs de Newton (algorithme IP) a été aussi employée dans [284]. Son principe consiste à appliquer la méthode de Newton aux conditions Karush-Kuhn-Tucker (KKT) perturbées. L'utilisation de la perturbation permet une convergence globale pour l'algorithme IP [87].

Les méthodes déterministes peuvent être utilisées si les propriétés mathématiques telles que la continuité, la différentiabilité et la convexité pour la fonction objectif à minimiser sont vérifiées pour un problème donné. Bien que ces méthodes basées sur le gradient convergent vers l'optimum d'une manière rapide et précise, le temps de calcul est parfois énorme vu qu'un nombre important d'itérations est effectué à chaque résolution. Afin de planifier ces problèmes des méthodes approchées, alternatives très séduisantes appelées heuristiques ou stochastiques sont utilisées. Les méthodes heuristiques cherchent une solution approchée, de valeur acceptable en utilisant les concepts aléatoires et probabilités [120]. Parmi ces méthodes heuristiques les plus populaires appliquées pour le problème de contrôle optimal on retrouve, les algorithmes génétiques (GAs) [191, 298, 190], le recuit simulé [33, 34, 174] et la recherche taboue [251, 84]. Ces méthodes sont capables de résoudre un problème de programmation non linéaire même si ce dernier est très difficile. Mais néanmoins le temps de calcul peut s'avérer très élevé. Les algorithmes génétiques imitent le processus évolutifs en génétique [173, 266]. Dans cette approche, l'optimum global peut

être repéré ou bien une solution proche de l'optimum global peut être localisée [120]. Une autre approche heuristique qui a été exploitée pour le problème de CO est la méthode d'essaim de particules (PSO) [222, 171]. Cette méthode a de nombreuses similitudes avec les (GAs) dans la mesure où l'algorithme reçoit une population initiale et des solutions optimales sont obtenues par des recherches générationnelles [226]. Le recuit simulé est une autre méthode utilisée dans la résolution du problème d'optimisation d'un contrôle optimal [33, 34, 174, 175]. Dans cette méthode, l'algorithme commence avec une solution de départ qu'on souhaite améliorer. Par la suite, une perturbation est effectuée à cette solution dont le but est de trouver une nouvelle solution à la proximité de la solution de départ. Après, la différence des valeurs de la fonction objectif pour ces deux solutions sera calculée et analysée afin de sélectionner la solution optimale [101]. Tandis que la recherche taboue, son principe réside sur la sauvegarde des solutions, explorées au cours de la recherche, pour ne pas tomber dans un optimum local [101, 120]. Elle a été développée par Fred Glover en 1986 [110, 111] et on peut retrouver son application dans le cas des problèmes de contrôle optimal dans [251, 84].

Dans [143], le problème de contrôle optimal est converti en un problème d'optimisation. Le contrôle est approximé par une combinaison linéaire puis remplacer son expression dans l'équation d'état. L'équation différentielle ordinaire fractionnaire résultante est résolue en utilisant la méthode de l'itération variationnelle. Ensuite, le contrôle et la solution approximée obtenues par leurs expressions sont remplacés dans le critère, et donc un problème d'optimisation est obtenu et résolu en utilisant la méthode d'optimisation globale Alienor [59, 57].

Les méthodes directes sont souvent décrites comme des méthodes robustes, dans le sens où elles ne nécessitent pas beaucoup de connaissances a priori sur la structure de la solution (même si évidemment, choisir avec soin l'initialisation de l'algorithme d'optimisation peut augmenter la vitesse de convergence). De plus, elles permettent de prendre en compte tous les types de contraintes, y compris les contraintes d'état. Cependant, la discrétisation du problème d'optimisation peut être une cause d'apparition de minima locaux, et l'utilisateur du logiciel d'optimisation ne peut pas avoir la garantie d'obtenir une solution globale [269]. Un tel problème peut survenir par exemple lorsque la discrétisation est trop fine. Pour éviter de localiser un optimum local, les méthodes d'optimisation globale sont fortement recommandées [136, 123]. De plus, par rapport aux méthodes indirectes, la précision numérique obtenue avec les méthodes directes peut ne pas être aussi bonne. L'aérospatiale est un domaine souvent proposé comme domaine d'application nécessitant un haut niveau de précision numérique. En effet, dans [269] les auteurs ont constaté qu'en pratique la valeur fonctionnelle minimale est obtenue avec une précision

relativement faible (c'est-à-dire des erreurs d'environ un pour cent). L'augmentation de la dimension de l'espace dimensionnel fini ne donne pas nécessairement de meilleures valeurs pour les problèmes extrêmement compliqués résultant de l'aérodynamique. Cependant, cette quantité d'un pour cent peut être une partie cruciale de la charge utile dans une mission de vol spatial [45, 60]. De plus, la plupart des méthodes d'optimisation nécessitent une première estimation, qui peut converger vers une solution locale qui influe sur les performances et la stabilité en boucle fermée.

Dans une méthode indirecte, la condition d'optimalité de premier ordre du problème de contrôle optimal d'origine est déterminée en utilisant le calcul des variations [30, 167]. L'approche indirecte donc conduit à un problème de valeur limite à deux points qui constitue un ensemble d'équations différentielles avec les conditions initiales et terminales. Généralement, ce problème de valeur limite à deux points est difficile à résoudre, en particulier dans le cas où le système est fortement non linéaire. L'ensemble de ces conditions d'optimalité nécessaires résultant du principe de Pontryagin, l'approche d'Euler-Lagrange ou de la programmation dynamique nécessite des méthodes numériques. La méthode de tir a été utilisée tout d'abord pour les problèmes sans contraintes de contrôle par Bryson [43] et Breakwell [39]. Cette méthode consiste à trouver la valeur initiale inconnue des variables adjointes en intégrant à la fois le système et les équations adjointes, et en réestimant les estimations initiales. Malgré la simplicité de cette méthode, elle présente des difficultés numériques importantes en raison de mauvaises estimations initiales particulièrement lorsque le problème de contrôle optimal est hyper-sensible [224, 225]. Pour surmonter ces difficultés numériques, la méthode de tir a été modifiée, ce qui a conduit à l'apparition de la méthode de tir multiple développée par Bulirsch et ses collaborateurs [44, 268]. Cette fois-ci, l'intégration est effectuée sur des intervalles de temps très petits ce qui engendre la réduction de la sensibilité aux erreurs dans l'estimation initiale. Néanmoins, elle peut présenter des problèmes si une mauvaise estimation du coût est utilisée [117].

L'approche de la collocation indirecte [241, 226, 14] a été jusqu'à présent moins populaire, mais elle a apparemment de très bonnes perspectives. Dans une méthode de collocation indirecte, l'état et le vecteur adjoint sont paramétrés à l'aide de polynômes par morceaux [226, 25]. Cette procédure permet d'obtenir un système d'équations non linéaires qui est à son tour résolu avec des techniques appropriées pour la recherche de racines. La collocation orthogonale a été initialement introduite dans [36] pour la résolution des équations différentielles. Lorsque les points de collocation sont choisis de manière orthogonale, l'approximation en quadrature à un intégrale définie est extrêmement précise ce qui permet à cette méthode d'être avantageuse par rapport à la méthode de collocation

standard [226].

Une autre approche alternative pour la résolution du problème de valeur limites à deux points est la quasi-linéarisation qui a été établie par Miele et ses collègues [192, 193]. Elle consiste à linéariser et intégrer dans le temps les équations du système sur la trajectoire actuelle pour des ensembles de conditions initiales couvrant l'espace des valeurs initiales inconnues. Ensuite, les solutions linéaires sont calculées afin de satisfaire les conditions aux temps initial et final, et le système est linéarisé de nouveau sur la nouvelle trajectoire.

Récemment, diverses méthodes ont émergé pour la résolution des problèmes de contrôle optimal. Parmi ces méthodes : la méthode de décomposition d'Adomian [3, 4, 5], la méthode de l'itération variationnelle [127, 128, 130, 133] et la méthode de perturbation d'homotopie [126, 131, 132]. Ces méthodes utilisant un schéma itératif ont été appliquées avec succès pour solutionner le problème de valeur limite à deux points découlant de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman [147, 204, 92], des équations d'Hamilton-Pontryagin [179, 86, 104, 303, 7] et des équations d'Euler-Lagrange [24].

Les méthodes indirectes possèdent une précision numérique importante mais nécessitent une connaissance a priori sur la forme de la trajectoire optimale [276, 246, 64, 25]. L'inconvénient majeur des méthodes indirectes est que le problème à deux valeurs limites résultant n'est pas facile à résoudre, principalement en présence des non linéarités. Néanmoins, les méthodes numériques [25, 156, 246] peuvent être utilisées, mais elles nécessitent beaucoup de calculs. De plus, l'utilisation d'une méthode indirecte pour résoudre un problème de contrôle optimal avec des contraintes d'état implique d'utiliser le principe du minimum de Pontryagin incluant de telles contraintes, qui peuvent être très complexes. Les méthodes indirectes sont très sensibles au choix de la condition initiale; par exemple, le choix de la condition initiale du vecteur des variables adjointes $p(t)$ dans le cas du principe de Pontryagin conditionne la convergence de la méthode de tir simple [275]; en effet il faut choisir de bonnes conditions initiales de variable adjointes et vu qu'elles n'ont pas d'équivalence physique intuitive ceci rend l'initialisation difficile.

1.5 Contrôle optimal quadratique

Un problème de contrôle linéaire quadratique (LQ) est un problème de contrôle optimal dont la dynamique du système est décrite par un ensemble d'équations différentielles linéaires et le coût est décrit par une fonction quadratique [15, 66, 168, 201].

1.5.1 Contrôle LQ à horizon fini

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.85)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont constantes et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est une fonction continue par morceaux.

La fonction coût de type quadratique sur un horizon de temps fini $[t_0, t_f]$ est donnée comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) dt, \quad (1.86)$$

avec $x^d(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état désiré, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices de pondération supposées semi-définies positives et définies positives respectivement.

La loi de contrôle optimal est déterminée par les différentes méthodes exposées précédemment et sa forme est donnée comme suit [202, 201]

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T p^*(t) \quad (1.87)$$

où

$$p^*(t) = K(t)x(t) - V(t) \quad (1.88)$$

avec $K(t)$ est solution de l'équation différentielle de Riccati suivante [202]

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)BR^{-1}B^T K(t) + Q = 0 \quad (1.89)$$

avec

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.90)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (1.91)$$

et $V(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante [202]

$$\dot{V}(t) + (A^T - K(t)BR^{-1}B^T) V(t) + Q x^d(t) = 0 \quad (1.92)$$

On obtient alors :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(K(t)x(t) - V(t)) \quad (1.93)$$

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^TK(t))x(t) - BR^{-1}B^TV(t) \quad (1.94)$$

On constate que d'après (1.93), le contrôle optimal est sous forme d'un retour d'état.

Remarque 1.3.

Dans le cas où les matrices A, B, Q et R sont constantes et t_f est infini, la loi de contrôle est invariante, car chaque instant est le même que l'instant suivant. Il s'ensuit que la matrice $K(t)$ est constante et donc $\dot{K}(t) = 0$. L'équation de Ricatti qui est transformée en un système d'équations algébriques est résolue afin d'identifier les coefficients de retour d'état.

1.5.2 Contrôle LQ à horizon infini

On considère toujours le système de contrôle précédent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.95)$$

où le coût quadratique est maintenant avec temps final t_f infini

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) dt, \quad (1.96)$$

On suppose toujours que $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice semi-définie positive et $R(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice définie positive.

Pour que l'indice de performance J ait un sens dans ce cas, il faut imposer certaines conditions spéciales. En effet si l'un des états est incontrôlable et/ou instable, la mesure de performance correspondante J deviendra infinie et n'aura aucun sens physique. Il faut donc imposer la condition que le système (1.95) soit *complètement contrôlable* [201, 12].

1.6 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la présentation des généralités sur la contrôle optimal. Après avoir présenté la formulation mathématique du problème de contrôle optimal, la notion de contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires a été introduite. Par suite, on a énoncé les méthodes de résolution du problème de contrôle optimal ainsi les conditions d'existence de solution optimale.

La résolution d'un problème de contrôle optimal par les méthodes directes consiste à convertir le problème de contrôle optimal en un problème de programmation non linéaire. Puis des méthodes d'optimisation déterministes, stochastiques et hybrides sont utilisées pour déterminer la solution du problème d'optimisation statique résultant.

Dans l'approche indirecte, la résolution d'un problème de contrôle optimal revient à résoudre les conditions d'optimalité données sous forme d'équations différentielles souvent à deux valeurs limites. La résolution analytique de ces conditions d'optimalité est une tâche difficile à faire plus particulièrement en présence des non linéarités. Par conséquent, des méthodes numériques sont requises pour chercher la solution.

Dans le chapitre suivant, nous présentons la technique de contrôle prédictif dont le principe consiste à résoudre en ligne un problème de contrôle optimal à chaque instant d'échantillonnage.

Contrôle prédictif

2.1 Introduction

Le contrôle prédictif avec modèle (MPC) est une technique de contrôle qui s'appuie sur le concept de prédiction du comportement de la dynamique des systèmes (linéaires ou non). L'application du contrôle prédictif a connu un développement considérable ces derniers temps dans plusieurs domaines surtout dans le domaine industriel [137].

Le MPC est considéré étant l'une des techniques de contrôle robuste pour beaucoup de problèmes de contrôle à résoudre [9, 97]. Il présente les avantages suivants :

- Il est facile à mettre en œuvre (bonnes performances et simplicité d'implémentation).
- Effet d'anticipation : grâce à une utilisation claire des trajectoires futures.
- Méthode bien appropriée
- pour contrôler des systèmes complexes : systèmes multivariables, systèmes soumis aux contraintes, systèmes non linéaires, systèmes hybrides, systèmes à retard, systèmes Multi-Agent.
- Le problème de suivi de trajectoire lorsque l'entrée, la sortie et l'état sont contraints ou non, dont la trajectoire de référence est bien connue à l'avance et planifiée.
- différents objectifs à optimiser.
- Il apporte généralement un bénéfice économique.

Ce chapitre a pour objectif de présenter le principe du contrôle prédictif, le contrôle prédictif linéaire et non linéaire et l'état de l'art sur les techniques de contrôle prédictif.

2.2 Principe du contrôle prédictif

Le principe du contrôle prédictif repose sur la connaissance de la sortie du processus à contrôler, de déterminer le contrôle qui permet à la sortie du processus d'être aussi proche que possible de la trajectoire de référence comme l'illustre la Figure 2.1. Donc une séquence de N_c (le nombre de variations du contrôle) contrôle optimal est définie sur l'horizon de prédiction N_p (la longueur sur laquelle le critère de performance est calculé) et appliquer uniquement la première valeur de la séquence de contrôle optimal (les séquences sont décalées à la prochaine période d'échantillonnage) à l'entrée du processus afin de réaliser ce ralliement. Ainsi on obtient une nouvelle sortie et la procédure est alors répétée à chaque période d'échantillonnage en déplaçant l'horizon de contrôle et l'horizon de prédiction vers l'avant selon le principe de l'horizon glissant [47].

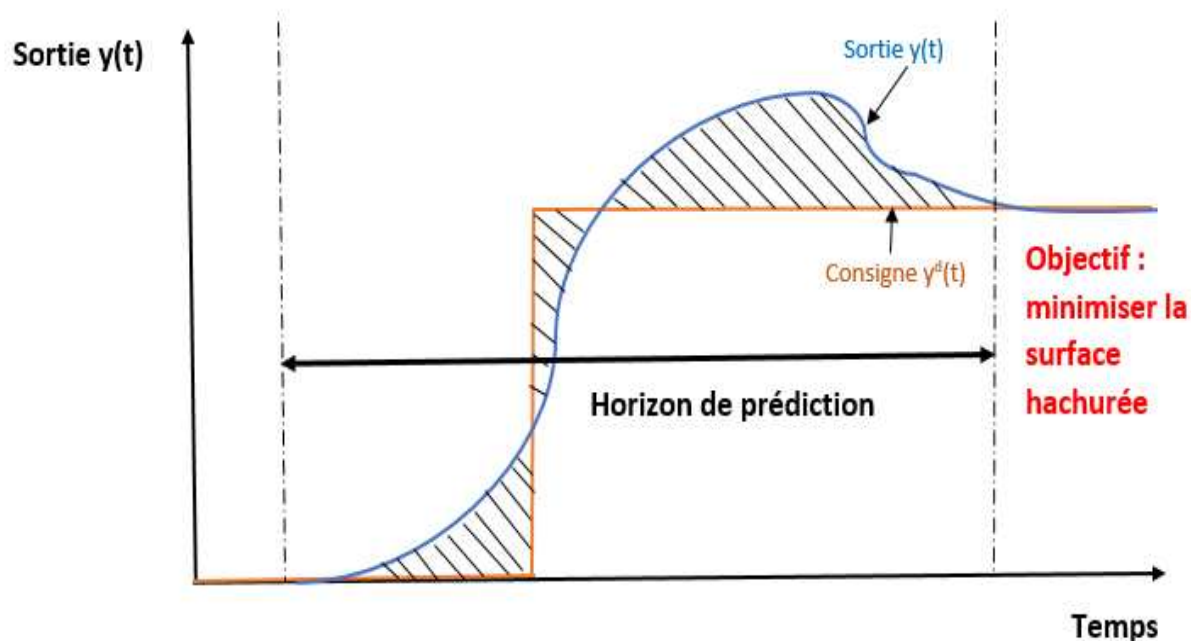


FIG. 2.1: Principe de l'optimisation dynamique (contrôle optimal) .

La Figure 2.2 illustre le principe du contrôle prédictif, qui est basé sur la stratégie suivante :

1. évaluer les sorties prédites $y(t_i)$ ($i = k, \dots, k + N_p - 1$) sur un horizon de prédiction à chaque instant t_i .

2. déterminer la séquence de contrôle optimal notée $u^*(t_i)(i = k, \dots, k + N_c - 1)$ en minimisant un critère de performance afin de mener la sortie du processus vers la consigne désirée. Le critère à minimiser est une fonction quadratique de l'erreur entre la sortie prédite et la trajectoire de référence et un coût de l'effort de contrôle est généralement ajouté au critère à minimiser.
3. appliquer seulement la première valeur de la séquence optimale au système à l'instant t_i . Une nouvelle condition initiale est alors obtenue ainsi la procédure complète est répétée à l'instant t_{i+1} .

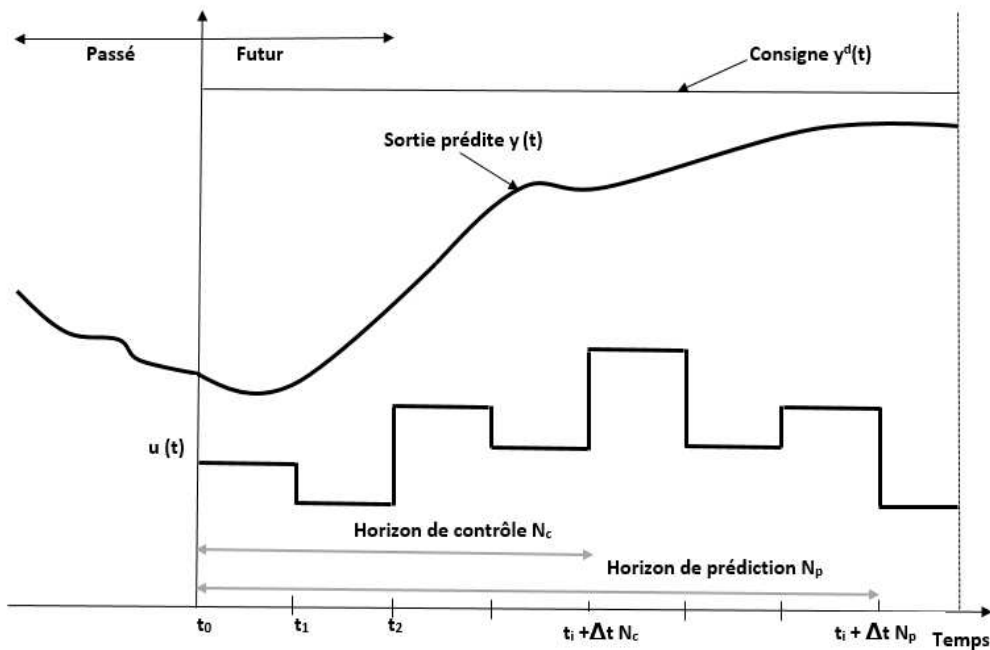


FIG. 2.2: Principe du contrôle à l'horizon fuyant.

2.3 Formulation du problème de contrôle prédictif

2.3.1 Modèle

Le modèle représentant un procédé et le critère de performance à minimiser sont les deux principaux éléments qui distinguent les différents algorithmes de la commande prédictive. La fonction de transfert, variables d'état, réponse impulsionnelle, etc... sont les

différents représentations du modèle du processus qui peuvent être employées dans le cadre du contrôle prédictif [209, 240].

Modèle à espace d'état

Le système pour notre formulation dans cette thèse, est représenté par un modèle sous forme d'état dont l'expression est :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t), t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = \mathcal{Z}(x(t), u(t), d(t), t), \quad (2.2)$$

avec $t \in \mathbb{R}^+$ est la variable de temps, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée du contrôle, $d(t) \in \mathbb{R}^r$ est la perturbation (supposée bornée), $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur des sorties prédites. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+$ est une fonction continue vectorielle et $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+$ est fonction de sortie.

Modèle à fonction de transfert

Le concept de base de la fonction de transfert c'est d'utiliser la transformation de Laplace [248] pour convertir l'équation différentielle en équation algébrique, afin de simplifier les calculs. En cas de nécessité, les résultats du calcul peuvent être inversés dans le domaine temporel à l'aide de la transformation de Laplace inverse.

L'expression du modèle basée sur la fonction de transfert dans lequel un modèle CARMA (Controlled AutoRegressive Moving Average) décrit un système est donnée par [47] :

$$y(t) = \frac{\mathcal{B}(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} u(t) \quad (2.3)$$

avec

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{B}(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \quad (2.5)$$

où

- z^{-1} : est l'opérateur de retard,
- \mathcal{A}, \mathcal{B} : sont respectivement des polynômes associés à l'entrée et à la sortie,
- $n_a = \deg \mathcal{A}(z^{-1})$,
- $n_b = \deg \mathcal{B}(z^{-1})$.

Modèle de réponse impulsionnelle

La représentation formelle du modèle basée sur la réponse impulsionnelle sur un horizon de temps fini N_p est donné comme suit [47] :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_p} h_i u(t-i) = \mathcal{H}(z^{-1})u(t) \quad (2.6)$$

où les h_i représentent les valeurs de la sortie suite à une excitation du système par une impulsion de Dirac unitaire. $\mathcal{H}(z^{-1}) = h_1(z^{-1}) + h_2(z^{-2}) + \dots + h_{N_p}(z^{-N_p})$, où z^{-1} est l'opérateur de décalage vers l'arrière.

Remarque 2.1.

D'autres formes du modèle peuvent être aussi utilisées : modèle de Volterra, modèle neuronal, modèle flou et modèle CARIMA (Controlled auto-Regressive and Integrated Moving-Average).

2.3.2 Critère d'optimisation

Afin de trouver la future séquence de contrôle à appliquer au système, pour atteindre la trajectoire de référence pour l'état, un critère de performance est résolu en ligne. Différentes formes pour le critère peuvent être employées dans la stratégie de contrôle prédictif, mais en général il contient l'erreur quadratique entre la sortie prédite et la trajectoire de référence désirée sur l'horizon de prédiction avec un minimum d'effort $u(t)$ est ajouté à ce critère. Cette fonction coût prend la forme quadratique suivante :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) dt \quad (2.7)$$

Avec $x^d(t) \in \mathbb{R}^n$ est la trajectoire de référence désirée pour l'état $x(t)$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices de pondération supposées positives.

Remarque 2.2.

Dans certains cas, l'effort de contrôle n'est pas pris en considération dans la formulation du problème de contrôle prédictif.

Le problème du contrôle prédictif consiste à résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_{u(t)} J = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) dt, \quad (2.8)$$

sous contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t), t), \quad (2.9)$$

$$x(t_i) = x_i, \quad (2.10)$$

où x_i est l'état à l'instant d'échantillonnage $t_i = i\Delta t$ ($i \in \mathbb{N}$ et Δt est la période d'échantillonnage).

La résolution de ce problème à chaque instant d'échantillonnage t_i sur un horizon de prédiction nous donne une séquence de contrôle optimal notée $u^*(t_i)$ et la première composante de cette séquence sera réellement appliquée au procédé. Une nouvelle mesure de l'état initial est alors obtenue ainsi cette procédure sera répétée pour le prochain instant d'échantillonnage.

Remarque 2.3.

Il faut souligner que la solution optimale est définie sur l'horizon de contrôle N_c et non pas sur l'horizon de prédiction N_p . Si $N_p > N_c$, alors le contrôle reste constant.

2.4 Choix de l'horizon de prédiction et de contrôle

La discrétisation du temps et de la variable de contrôle sur un temps fini a permis de surmonter la difficulté du temps continu. Ce qui a conduit à l'introduction des horizons de prédiction (N_p) et de contrôle (N_c). La détermination de ces horizons de manière optimale est un problème révélé en contrôle prédictif depuis ses origines. Il existe dans la littérature des méthodes pour fixer ces paramètres dans le cas de modèles linéaires [197]. Pour le cas non linéaire, cette problématique n'a pas été résolue car un horizon optimal dépend des phénomènes qui peuvent intervenir et influencer le comportement du procédé par exemple les contraintes et la dynamique des systèmes [142].

Les horizons de prédiction et de contrôle sont les paramètres de réglage les plus importants dans la stratégie de contrôle prédictif non linéaire. Effectivement, l'horizon de contrôle joue un rôle majeur dans l'existence de solutions admissibles associées au problème d'optimisation non linéaire à résoudre en ligne. Alors que l'horizon de prédiction, affecte la stabilité des systèmes en boucle fermée [199].

2.4.1 Horizon de prédiction N_p

Certaines expériences ont pu démontrer l'influence du choix de l'horizon de prédiction lié au contrôle [17, 35]. Des études ont affirmé que si l'horizon de prédiction est petit cela peut causer un mauvais suivi du futur comportement du procédé tandis que si N_p est grand, le système sera stable, néanmoins il nécessite un grand temps de calcul (une réponse de système lente). L'horizon de prédiction N_p , doit être choisi de façon à satisfaire au mieux le compromis entre la stabilité de la boucle fermée (horizon long) et le temps de calcul requis (horizon court).

2.4.2 Horizon de contrôle N_c

Un grand nombre de variables de contrôle pour N_c permet en réalité d'atteindre des objectifs plus difficiles avec des degrés de liberté plus élevés. Cependant cette valeur ne doit pas excéder la valeur N_p , c'est-à-dire la condition $N_c \leq N_p$ doit être vérifiée [80]. Généralement, le choix de $N_c = 1$ est avéré étant suffisant.

2.5 Contraintes dans le contrôle prédictif

L'une des principales raisons du succès du contrôle prédictif est sa capacité à prendre explicitement les contraintes [97, 47, 95]. Dans les applications réelles de contrôle, différents types de contraintes dans la formulation MPC peuvent s'imposer : limitations de sécurité, restrictions physiques, exigences technologiques, spécifications de qualité des produits, etc... On va énumérer les plus fréquentes dans ce qui suit.

– Contraintes sur le contrôle

Généralement, la contrainte sur le contrôle décrit le domaine de sa définition et sa représentation est donnée par :

$$u_{min}^{(j)} \leq u_j(t) \leq u_{max}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

avec $u_{min}^{(j)}$ et $u_{max}^{(j)}$ sont des valeurs minimale et maximale de contrôle respectivement. Et puisque $u_j(t)$ est calculé sur un horizon de contrôle N_c , donc (2.11) peut s'écrire :

$$I_u \cdot u_{min}^{(j)} \leq U_j \leq I_u \cdot u_{max}^{(j)} \quad \text{ou} \quad U_j = [u_j(t_i) \dots u_j(t_i + N_c - 1)]^T \quad (2.12)$$

avec I_u vecteur unitaire de dimension N_c .

– Contraintes sur la sortie du système

Pour certains systèmes, pour des raisons économiques ou de sécurité, des restrictions sur la sortie (contraintes) doivent être respectées. Ces contraintes peuvent être représentées comme suit :

$$y_{min}^{(i)} \leq y_i(t) \leq y_{max}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Comme $y(t)$ est déterminé sur N_p , dans ce cas on aura :

$$I_y \cdot y_{min}^{(i)} \leq Y_i \leq I_y \cdot y_{max}^{(i)} \quad \text{ou} \quad Y_i = [y_i(t_i) \dots y_i(t_i + N_p - 1)]^T \quad (2.14)$$

avec I_y vecteur unitaire de dimension N_p .

2.6 Contrôle prédictif linéaire

Le contrôle prédictif par modèle linéaire (MPC) est devenu l'un des outils les plus populaires pour les applications de contrôle industriel depuis le travail remarquable de Richalet à la fin des années 1960 et les années 1970 [235, 230, 231]. Par la suite, différentes perspectives d'une telle approche de contrôle ont été proposées : contrôle matriciel dynamique (DMC)(Dynamic Matrix Control) [69, 47], contrôle prédictif généralisé (GPC)(Generalized Predictive Control) [61, 67], contrôle algorithmique du modèle (MAC) (Model Algorithmic Control)[40, 239, 47], contrôle fonctionnel prédictif (PFC) (Predictive Functional Control)[229, 233, 47], etc... La Figure 2.3 résume certains algorithmes de contrôle prédictif linéaire.

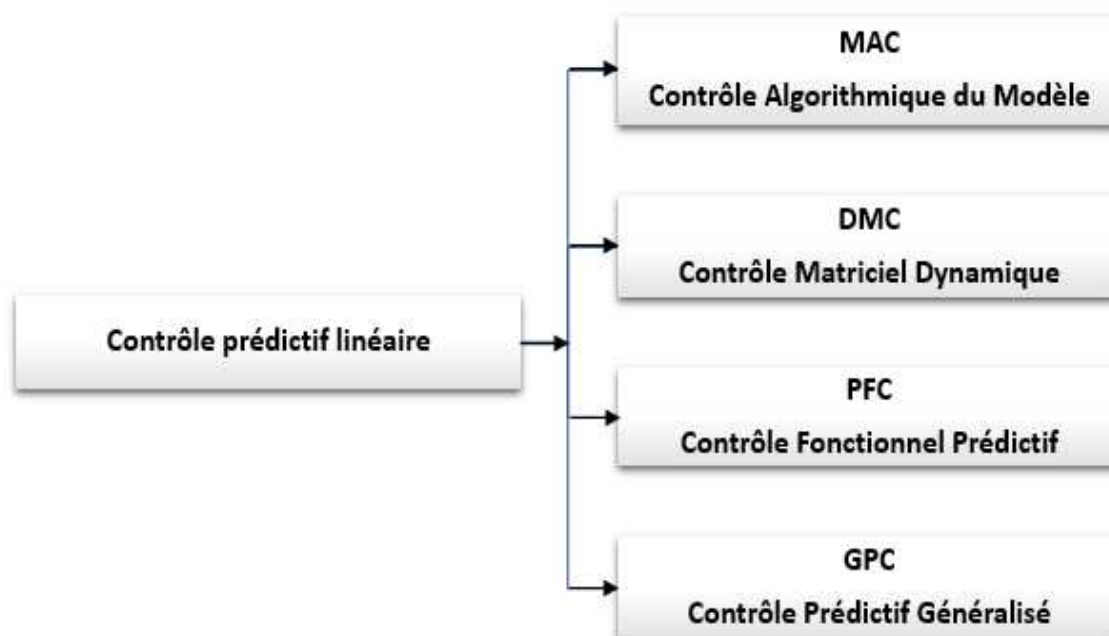


FIG. 2.3: Différentes méthodes de contrôle prédictif linéaire.

2.6.1 Contrôle algorithmique du modèle (MAC)

Dans sa forme originale, le contrôle algorithmique du modèle (MAC) est un contrôleur prédictif de modèle, qui utilise un modèle de réponse impulsionnelle linéaire pour prédire

le comportement futur du système et la fonction de coût a été formulée comme une somme des écarts au carré de la trajectoire prédite par rapport à une trajectoire de référence. MAC a été développé en France à la fin des années 60 au sein de l'industrie des procédés chimiques [235]. Il est apparu à l'origine comme un algorithme heuristique sous le nom de contrôle heuristique prédictif de modèle (Model Heuristic Control)(MPHC) à la fin des années 70, par suite il est connu sous le nom de MAC [40, 239]. MPHC possédait à l'époque les propriétés uniques suivantes [235] :

1. Le processus multivariable à contrôler est représenté par ses réponses impulsionnelles qui constituent le modèle interne (c'est-à-dire le modèle stocké dans la mémoire de l'ordinateur).
2. Le comportement du système en boucle fermée est décrit en prescrit au moyen de trajectoires de référence initiées sur les sorties réelles du processus et tend vers la consigne souhaitée.
3. Les contrôles sont calculés par une procédure qui est heuristique dans le cas général.

Cette méthode a été beaucoup utilisée dans le secteur d'industrie [163, 188, 236] car elle est très intuitive et reflète clairement l'influence de chaque variable manipulée sur une sortie déterminée. Un autre grand avantage de cette méthode est qu'elle n'a pas besoin de fournir des informations sur le processus à l'avance de sorte que le processus d'identification est simplifié, et en même temps elle permet de décrire facilement des dynamiques complexes telles qu'une phase non minimale ou des retards [47]. Cependant, son principal inconvénient est que le nombre de poids h_i à déterminer pour des systèmes complexes est très élevé ce qui réduit sa mise en œuvre à grande échelle [47].

2.6.2 Contrôle matriciel dynamique (DMC)

DMC a été proposée par Cutler et Ramaker [69], cette méthode a beaucoup de similitudes avec MAC. L'algorithme DMC utilise un modèle de processus linéaire sous la forme d'une réponse indicielle et d'une fonction coût quadratique avec des composants de pénalité pour les changements des entrées de contrôle de processus [272]. L'accroissement du contrôle est employé dans le critère de performance pour un horizon fini de prédiction dans cette méthode. La représentation formelle du modèle à base de réponse indicielle sur un horizon de prédiction fini est donnée par l'expression suivante [47] :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_p} s_i \Delta u(t-i) = \mathcal{S}(z^{-1})(1-z^{-1})u(t) \quad (2.15)$$

où les s_i sont les valeurs de la sortie suite à une excitation du système par un échelon unitaire et $\Delta u(t) = u(t) - u(t - 1)$.

Comme une impulsion peut être considérée comme la différence entre deux étapes avec un décalage d'une période d'échantillonnage, elle peut être écrite pour un système linéaire comme suit [47] :

$$h_i = s_i - s_{i-1}, \quad s_i = \sum_{j=1}^i h_j \quad (2.16)$$

Le MAC est avantageuse par rapport au DMC car elle possède une grande capacité dans le réjet de perturbations [19]. Dans les applications réelles, le choix entre DMC et MAC dépend de la situation précise. Jusqu'à présent, DMC est le plus largement accepté dans l'industrie des procédés. Cette méthode souffre de mêmes inconvénients que la méthode de MAC évoquée précédemment.

2.6.3 Contrôle prédictif généralisé (GPC)

L'algorithme GPC a été proposé par Clarke et al. [61] et il a été développé en collaboration avec la recherche sur le contrôle adaptatif [198]. Il utilise un modèle de processus sous la forme de fonctions de transfert discrètes (ou, de manière équivalente, des équations aux différences) et il s'est avéré très populaire [62, 61]. GPC hérite des avantages du contrôle adaptatif pour son application dans les systèmes stochastiques, l'identification en ligne, etc., mais conserve aussi les avantages du contrôle prédictif pour son optimisation à l'horizon glissant [19]. Cette méthode de modélisation a permis d'envisager une classe plus large de modèles de perturbation, par rapport à ceux utilisés dans les algorithmes DMC et MPHC. Actuellement, la méthode de GPC est largement utilisée pour les procédés pétroliers industriels.

2.6.4 Contrôle prédictif fonctionnelle (PFC)

Le contrôle PFC a été proposée par Richalet [229]. Le PFC est un algorithme de contrôle prédictif simple qui ne nécessite aucune inversion de matrice ou minimisation numérique d'une fonction de coût [119, 233]. Les processus SISO (une entrée, une sortie) contraints

ou non, sont traités par les algorithmes PFC d’une manière très facile [119]. Il s’agit d’une méthode qui se repose sur l’utilisation de modèle d’état qui peut traiter des problèmes difficiles à résoudre par la régulation PID (Proportional Integral Derivative) [232]. L’emploi de PFC dans des industries a augmenté ces dernières années et il a été mis en œuvre avec succès pour de nombreux procédés chimiques [235, 119].

2.7 Contrôle prédictif non linéaire

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = \mathcal{Z}(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables d’état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de contrôle et $y(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de sortie. Le système peut être soumis à de fortes contraintes d’état et de contrôle :

$$x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \quad , u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \quad (2.18)$$

Le principal but ciblé par le contrôle prédictif est que la sortie du système commandé doit atteindre la consigne désirée le plus rapidement possible. Dans le contexte prédictif, un critère qui mesure l’écart entre la poursuite prédite et la trajectoire de référence est minimisé sur un horizon fini. Le modèle de prédiction d’un système non linéaire est une fonction continue qui nous permet de calculer la sortie du système.

Le contrôle prédictif non linéaire est considéré étant un contrôle puissant, car il peut fonctionner dans des conditions d’incertitude et perturbations [73]. Cette caractéristique est due au fait que le contrôle prédictif non linéaire est semblable au contrôle optimal. Contrairement aux MPC linéaires, où les programmes quadratiques convexes sont généralement résolus exactement à chaque temps d’échantillonnage, les MPC non linéaires sont confrontés à une contrainte, c’est-à-dire la résolution du problème d’optimisation doit être de durée inférieure ou égale à la période d’échantillonnage [49] ce qui est particulièrement difficile à réaliser notamment pour les systèmes non linéaires contraints à une dynamique rapide.

Toutes les contributions apportées dans la littérature en ce qui concerne le contrôle prédictif suivent le même concept, c'est-à-dire pour chaque temps d'échantillonnage il faut que ces trois étapes soient vérifiées :

- La prédiction des sorties.
- L'optimisation du critère de performance.
- L'application du premier élément du contrôle.

Le critère que le contrôle prédictif non linéaire emploie, est en général quadratique ; en effet, l'écart entre la trajectoire de référence et la sortie du système est calculé sur un horizon N_p . Donc le problème d'optimisation est non linéaire vu que le système utilisé est non linéaire [49].

La résolution du problème de contrôle prédictif non linéaire considéré comme un problème d'optimisation non linéaire est une tâche ardue à faire vu que l'optimum global peut être atteint difficilement [160, 95, 49]. Il existe dans la littérature des algorithmes pour résoudre le problème d'optimisation [49, 95]. Comme le temps de résolution du problème d'optimisation doit être réalisé pendant une durée inférieure ou égale à une période d'échantillonnage [49, 177], ces méthodes ne peuvent pas être appliquées à des systèmes rapides et des systèmes extrêmement non linéaires [137, 49].

Généralement, pour résoudre le problème de contrôle optimal (2.8)-(2.10), on distingue deux approches importantes : les méthodes directes et les méthodes indirectes [25, 64, 246, 276]. On trouvera une analyse complète des différentes approches développées dans le cadre de MPC dans [49, 116].

2.8 État de l'art sur le contrôle prédictif

Le contrôle prédictif a été à l'origine conçue pour des applications dans l'industrie chimique pour contrôler les systèmes dynamiques transitoires contraints avec un nombre important d'entrées et de sorties [220]. Les principales raisons de la popularité de la stratégie du contrôle prédictif sont l'intuitivité (sans intervention d'experts) et la gestion explicite des contraintes [154, 213]. Le contrôle prédictif est basé sur l'emploi d'un modèle pour prédire l'évolution du système à contrôler et calculer le contrôle correspondant pour assurer la poursuite de la trajectoire de la référence en minimisant un certain indice de performance [97, 141].

Dans le contrôle prédictif, le signal de contrôle est obtenu en résolvant un problème de contrôle optimal en boucle ouverte sur un horizon fini à chaque instant d'échantillonnage

[186]. Chaque optimisation produit une séquence de contrôle optimal, mais seul le premier élément de cette séquence est appliqué au processus : à l'étape du temps suivant, le calcul est répété sur un horizon temporel décalé en prenant les dernières informations d'état disponibles comme nouvelle condition initiale du problème de contrôle optimal [177]. Pour cette raison, le MPC est également appelé contrôle à l'horizon fuyant ou glissant.

La solution est basée sur un modèle dynamique du processus, où toutes les contraintes d'entrée et de sortie (état) sont satisfaites avec un critère de performance à optimiser et ce dernier est généralement exprimé en tant que critère quadratique. Pour un modèle non linéaire, le problème d'optimisation résultant n'est pas linéaire et les techniques d'optimisation utilisées pour le calcul de la séquence de contrôle optimal sont distincts.

Le contrôle prédictif du modèle non linéaire (NMPC) est le schéma de contrôle prédictif correspondant pour les systèmes non linéaires [310]. Des méthodes ont été rapportées dans la littérature pour la détermination de la loi de contrôle pour le problème de contrôle prédictif non linéaire. Nous allons présenter les méthodes les plus importantes qui sont rapportées dans [95, 49, 177].

Les méthodes de solution utilisées en optimisation directe dans NMPC sont basées sur les méthodes de programmation non linéaire (NP) telle que la méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP) [302, 306] qui est appliquée d'une façon séquentiellement ou simultanément [49, 95]. Dans les approches séquentielles, les trajectoires prédites du modèle sont calculées à chaque itération, y compris des méthodes basées sur la linéarisation successive du modèle de prédiction. Par rapport à la méthode simultanée, le problème d'optimisation de l'approche séquentielle a beaucoup moins de variables, mais aussi moins de structure dans les sous-problèmes linéaires [49]. Si le modèle de système est défini en temps continu, un autre inconvénient du SQP séquentiel est que la solution numérique pour la trajectoire d'état prévue à chaque itération peut être coûteuse en termes de calcul [184]. Tandis que les approches simultanées utilisent la stratégie alternative de conserver les prédictions d'état comme variables d'optimisation et de rechercher simultanément une solution à la fois aux équations du modèle et à la séquence de contrôle optimale. Les méthodes simultanées peuvent être exploitées aussi dans le cas des modèles de prédiction temporelle continue [184, 31, 200]. Cependant, un inconvénient de l'approche simultanée est que seule la fin de l'itération dispose d'une trajectoire d'état valide pour le système. Ainsi, si l'optimisation ne peut pas être terminée à temps, rien ne peut être dit sur la faisabilité de la trajectoire [95, 49].

Les approches d'Euler-Lagrange et d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), ont été aussi utilisées dans les stratégies MPC pour la recherche des solutions numériques en ligne [49, 177]. Dans [177], l'idée consiste à remplacer le problème d'optimisation dynamique

non contraint formulé sur un horizon infini par un autre problème d'optimisation. Ce problème est déterminé par un ensemble de paramètres, qui proviennent des conditions optimales du premier ordre et sont représentés par l'équation stationnaire d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Par conséquent, la tâche consiste à trouver ces paramètres afin de stabiliser le système en boucle fermée résultant. Pour cela, le concept de fonction de contrôle Lyapunov (CLF) est utilisé [265], ce qui impose d'autres contraintes pour trouver ces paramètres. Dans [49], l'approche itérative d'Hamilton-Jacobi-Bellman généralisée (GHJB) est intéressante par rapport à l'approche d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) car l'équation (GHJB) définit une équation différentielle partielle linéaire dans la valeur du coût et donc plus facile à résoudre que l'équation différentielle partielle non linéaire d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Un inconvénient majeur de cette approche est qu'elle nécessite la solution de l'équation généralisée d'Hamilton-Jacobi-Bellman (GHJB) à chaque itération qui n'est pas une tâche facile à réaliser. La solution du (GHJB) a été approximée hors ligne dans [22] et en ligne dans [70].

Dans [211], l'approche d'Euler-Lagrange a été utilisée. L'identification de la valeur initiale de l'état adjoint dans cette approche est déterminée en considérant la condition terminale comme une équation non linéaire dans la valeur initiale de l'état adjoint qui est résolue en ligne en utilisant une méthode de continuation [49]. La méthode continuation/GMRES d'Ohtsuka [210] similaire au contrôleur de type Newton, elle effectue une seule itération de type Newton à chaque période d'échantillonnage et elle est basée sur une formulation séquentielle [177].

En raison de la complexité des calculs intervenant dans un contrôle prédictif, des stratégies NMPC adaptées aux applications d'échantillonnage rapide qui nécessitent l'optimisation de l'horizon fuyant à effectuer en des temps de l'ordre des millisecondes ont été proposées [95, 49]. Ceci peut être réalisé en utilisant une approximation linéaire du système et une approximation quadratique du coût. Dans [49], les contraintes d'entrée et d'état sur l'horizon de prédiction MPC sont approximés à l'aide d'ensembles invariants ellipsoïdaux [159] en paramétrant les prédictions en termes de loi de retour de la variable d'état linéaire. Et donc un problème de programmation semi-définie en ligne (SDP) est obtenu, dont la charge de calcul est très élevée pour les applications d'échantillonnage rapide. Cannon et al. [50, 161] ont proposé une approche alternative pour la réduction de charge de calcul en ligne.

L'utilisation des horizons courts est une autre stratégie utilisée dans le concept de contrôle prédictif. Il est souhaitable de travailler avec des horizons courts car ils sont moins coûteux en termes de calcul. Bien que le nombre de variables de décision du problème d'optimisation soit réduit en utilisant cette stratégie, ceci entraîne l'obtention de mauvaises

performances et de petits ensembles de conditions initiales stabilisantes [95, 49]. Dans [307], la première valeur de contrôle est réellement calculée et implémentée, et le reste de la séquence de contrôle est ignoré.

Les algorithmes intelligents existants tels que l'algorithme génétique (GA) [212, 304, 8], l'algorithme des colonies d'abeilles artificielles (ABC) [244, 243] et l'algorithme d'optimisation des essaims de particules (PSO) [309, 295, 155] ont été utilisés avec succès pour de nombreux problèmes d'optimisation et ont obtenu des résultats bien supérieurs à ceux de la méthode traditionnelle NP. D'autres approches dans le cadre du contrôle prédictif ont été utilisées dans ces références [253, 145, 76, 169, 252, 96, 176, 88, 178, 55, 172, 300, 308].

La plupart des méthodes précédentes présentées pour la résolution du problème de contrôle prédictif fournissent soit une solution locale, ou commencent par une condition initiale ou approximent les contraintes de l'état du système ou le critère de performance. Ces inconvénients conduisent à un temps de convergence lent, une faible précision de calcul pour les problèmes complexes et la convergence vers un optimum local. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier une méthode avec une forte capacité de recherche, une vitesse de convergence élevée, une grande précision de calcul et une bonne capacité à gérer les contraintes.

Dans cette thèse, une approche appartenant à la classe des méthodes indirectes est développée. Elle consiste à résoudre, à chaque instant d'échantillonnage, l'équation d'Euler-Lagrange ou les équations d'Hamilton-Pontryagin en utilisant la méthode de l'itération variationnelle. Cette approche consiste à résoudre un système d'équations algébriques linéaires au lieu d'un problème d'optimisation. Avant d'aborder l'approche proposée, le deuxième outil principal mathématique utilisé, à savoir la méthode de l'itération variationnelle, sera présentée dans le chapitre suivant.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, les caractéristiques les plus importantes du contrôle prédictif ont été présentées. Nous avons présenté en premier le principe du contrôle prédictif. Nous avons exposé par suite les composants et les paramètres de réglage d'un contrôle prédictif. Nous avons aussi évoqué les contraintes de base qui peuvent intervenir dans le cas de contrôle prédictif. Nous avons vu aussi les différents algorithmes du contrôle prédictif linéaire et nous avons présenté aussi le contrôle prédictif non linéaire et les algorithmes pour résoudre ce problème considéré comme un problème d'optimisation non linéaire difficile à solutionner. À la fin du chapitre nous avons présenté un état d'art sur le contrôle prédictif qui constitue

quelques stratégies utilisées dans le problème de contrôle prédictif non linéaire.

L'étape principale dans une stratégie de contrôle prédictif non linéaire est l'étape de l'optimisation. En effet, la solution optimale est obtenue en résolvant un problème d'optimisation non linéaire. Ainsi, une grande attention a été accordée, dernièrement, à la recherche d'algorithmes d'optimisation rapides convergeant vers l'optimum global en un temps qui ne dépasse pas la période d'échantillonnage, et ceci constitue un véritable défi pour les chercheurs.

Dans cette thèse, un contrôle prédictif non linéaire basé sur la méthode de l'itération variationnelle (VIM) sera résolu par une approche indirecte (Euler-Lagrange ou principe du minimum). Ainsi le chapitre suivant est consacré à la méthode de l'itération variationnelle pour la résolution des équations différentielles.

Méthode de l'itération variationnelle

3.1 Introduction

Les phénomènes non linéaires sont très importants dans de nombreux domaines scientifiques, notamment en mécanique des fluides, en physique des solide, en ondes plasma et en physique chimique. Ces phénomènes sont modélisés par des équations différentielles ordinaires [146, 283, 195], des équations aux dérivées partielles [278], des équations à retard [38, 283, 85], des équations intégro-différentielle [283] et des équations intégrales [13]. Ces équations sont souvent compliquées à résoudre analytiquement. De plus, même si une solution précise est disponible, les calculs requis peuvent être trop complexes pour être pratiques, ou la solution résultante peut être difficile à interpréter.

De nombreux auteurs se sont intéressés aux équations non linéaires en utilisant diverses méthodes [140, 63, 180, 299, 286]. Récemment, des méthodes itératives dont la solution exacte peut être obtenue ou approcher une solution analytique avec une grande précision ont été élaborées par les chercheurs. On peut citer la méthode de décomposition d'Adomian [3], la méthode de l'itération variationnelle [127] et la méthode de perturbation homotopique [126]. Mais la méthode de l'itération variationnelle s'est avérée robuste comparativement aux autres méthodes existantes [2, 287] telle que la méthode Adomian ou la méthode de perturbation.

La méthode de l'itération variationnelle (VIM) a été développée par le mathématicien Ji-Huan He [127] et elle a été appliquée avec succès à une diversité de domaines, Elle est adaptée pour beaucoup de problèmes d'ingénierie et applications scientifiques [1, 10, 20, 113, 288, 289, 290]. Le schéma itératif de cette méthode, procure des approximations successives de la solution qui converge vers la solution exacte du problème si cette

dernière existe, sinon quelques approximations peuvent être utilisées afin de générer une solution approximée avec précision. Contrairement aux techniques numériques existantes qui souffrent des hypothèses restrictives qui sont utilisées pour traiter les termes non linéaires, VIM n'a pas d'exigences spécifiques, telle que la linéarisation des opérateurs non linéaires ou la discrétisation des équations. Il a été démontré que la méthode de l'itération variationnelle [127, 129] résout efficacement, facilement et précisément une très grande classe de problèmes non linéaires et elle peut traiter un grand nombre d'applications analytiques et numériques.

Le chapitre commence par la présentation de la méthode de l'itération variationnelle, puis on présente une approche alternative de la méthode ainsi l'étude de sa convergence pour les équations différentielles non linéaires. La suite du chapitre illustre l'application de la méthode de l'itération variationnelle pour la résolution des équations différentielles ordinaires en considérant trois exemples d'application. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'introduction de deux autres algorithmes de VIM pour résoudre les équations différentielles dans le but de simplifier les calculs et accélérer la convergence de la méthode.

3.2 Méthode de l'itération variationnelle (VIM)

VIM est une généralisation de la méthode de Lagrange proposée par Inokuti et al. [144]. Afin de comprendre le concept du multiplicateur général de Lagrange, considérons l'équation algébrique suivante :

$$f(\mathcal{X}) = 0, \quad \mathcal{X} \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Si \mathcal{X}_k est une solution approchée de f , on aura alors

$$f(\mathcal{X}_k) \neq 0. \quad (3.2)$$

Pour avoir plus de précision, nous écrivons l'équation de correction suivante

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k + \lambda f(\mathcal{X}_k) \quad (3.3)$$

où

- \mathcal{X}_{k+1} est la solution précise.

- \mathcal{X}_k est la solution approchée.
- $\lambda f(\mathcal{X}_k)$ est la quantité de correction et λ est un multiplicateur de Lagrange général qui peut être identifié de manière optimale en mettant l'expression ci-dessus stationnaire par rapport à \mathcal{X}_k , c'est-à-dire :

$$\frac{d\mathcal{X}_{k+1}}{d\mathcal{X}_k} = \frac{d\mathcal{X}_k}{d\mathcal{X}_k} + \lambda \frac{df(\mathcal{X}_k)}{d\mathcal{X}_k} \quad (3.4)$$

c'est-à-dire

$$0 = 1 + \lambda f'(\mathcal{X}_k) \quad (3.5)$$

ce qui donne

$$\lambda = -\frac{1}{f'(\mathcal{X}_k)} \quad (3.6)$$

Et donc, on obtient la formule d'itération de Newton

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_k - \frac{f(\mathcal{X}_k)}{f'(\mathcal{X}_k)}, \quad f'(\mathcal{X}_k) \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Maintenant considérons, une équation différentielle écrite sous la forme canonique

$$\mathcal{L}x(t) + \mathcal{N}x(t) = \mathcal{H}(t) \quad (3.8)$$

où \mathcal{L} et \mathcal{N} sont respectivement des opérateurs linéaire et non linéaire, et $\mathcal{H}(t)$ est une quantité non homogène connue.

On pose

$$f(x(t), t) = \mathcal{L}x(t) + \mathcal{N}x(t) - \mathcal{H}(t) = 0 \quad (3.9)$$

En raisonnant de la même manière que précédemment, la fonctionnelle de correction dans ce cas est donnée par :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(\mathcal{L}x_k(s) + \mathcal{N}\tilde{x}_k(s) - \mathcal{H}(s))ds \quad (3.10)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange [144] qui peut être identifié de manière optimale par la théorie du calcul variationnel. x_k est la k ième solution approchée et \tilde{x}_k représente la variation restreinte, c'est-à-dire $\delta\tilde{x}_k = 0$. L'application de la variation restreinte dans une fonctionnelle de correction facilite beaucoup la détermination du multiplicateur de Lagrange.

Cette formule itérative est très intéressante car $x_0(t)$, la solution initiale, peut être librement choisie, avec même des paramètres inconnus.

Pour les problèmes de valeur initiale, la solution initiale peut être formulée comme suit [134] :

$$x_0(t) = x(0) + tx'(0) + \frac{1}{2!}t^2x''(0) + \dots + \frac{1}{k!}t^kx^{(k)}(0). \quad (3.11)$$

Cela conduit à une solution sous forme d'une série convergente vers la solution exacte.

Pour les problèmes de valeur limite, la condition initiale peut être exprimée sous la forme [134] :

$$x_0(t) = \alpha_1\omega_1(t) + \alpha_2\omega_2(t) + \dots + \alpha_k\omega_k(t), \quad (3.12)$$

où les $\omega_k(t)$ sont des fonctions connues, les α_k sont des inconnues à déterminer en

utilisant les conditions aux limites.

Remarque 3.1.

Généralement, une itération conduit à une solution précise par la méthode de l'itération variationnelle si la solution initiale est soigneusement choisie [256].

Tout d'abord, le multiplicateur de Lagrange λ doit être identifié de manière optimale. L'intégration par parties est généralement utilisée pour la détermination du multiplicateur de Lagrange de la manière suivante :

– Si $\mathcal{L} = \frac{d}{dt}(\cdot)$:

En imposant la variation à (3.10) avec $\delta\tilde{x}_k(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1}(t) &= \delta x_k(t) + \delta \int_0^t \lambda(s)(x'_k(s) + \mathcal{N}\tilde{x}_k(s) - \mathcal{H}(s))ds, \\ &= \delta x_k(t) + \int_0^t \lambda(s)\delta x'_k(s)ds = 0 \\ &= \delta x_k(t) + \lambda(t)\delta x_k(t) - \int_0^t \lambda'(s)\delta x_k(s)ds = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Les conditions de stationnarité suivantes sont obtenues de l'équation (3.13)

$$\delta x_k(s) : \lambda'(s) = 0, \tag{3.14}$$

$$\delta x_k(t) : 1 + \lambda(t) = 0, \tag{3.15}$$

Par conséquent $\lambda = -1$.

– Si $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$, on aura

$$\delta x_{k+1}(t) = \delta x_k(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) x_k'' ds \quad (3.16)$$

$$= \delta x_k(t) + \lambda(t) \delta x_k'(t) - \lambda'(t) \delta x_k(t) + \int_0^t \lambda''(s) \delta x_k(s) ds = 0, \quad (3.17)$$

et les conditions de stationnarité pour ce cas sont :

$$\begin{cases} \delta x_k(s) : \lambda''(s) = 0, \\ \delta x_k(t) : 1 - \lambda'(t) = 0, \\ \delta \dot{x}_k(t) : \lambda(t) = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

et donc $\lambda(s) = s - t$.

– De manière générale si $\mathcal{L} = \frac{d^m}{dt^m}(\cdot)$, alors

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (3.19)$$

Après l'identification du multiplicateur de Lagrange λ et en supposant une solution initiale arbitraire $x_0(t)$, la fonctionnelle de correction (3.10) fournira des approximations successives $x_k(t)$ et leur limite conduit à la solution exacte $x(t)$, c'est-à-dire

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) \quad (3.20)$$

Notez que la limite (3.20) ne peut être calculée que pour une équation simple pour laquelle une solution exacte existe [291]. En pratique, une solution approchée précise $x_N(t)$ est l'approximation pour laquelle la condition suivante

$$\|x_N(t) - x_{N-1}(t)\|_{L^2[t_0, t_f]} \leq \epsilon \quad (3.21)$$

est vérifiée pour une certaine tolérance désirée ϵ .

Remarque 3.2.

$L^2[t_0, t_f]$ est l'espace des fonctions carré intégrable sur $[t_0, t_f]$ défini comme suit [305]

$$L^2[t_0, t_f] = \left\{ \mathcal{V}(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{V}^2(t) dt < \infty \right\} \quad (3.22)$$

équipé du produit scalaire

$$\langle \mathcal{V}(t), \mathcal{W}(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{V}(t)\mathcal{W}(t) dt, \quad \mathcal{V}(t), \mathcal{W}(t) \in L^2[t_0, t_f] \quad (3.23)$$

et de la norme

$$\|\mathcal{V}(t)\|_{L^2[t_0, t_f]} = \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{V}^2(t) dt}, \quad \mathcal{V}(t) \in L^2[t_0, t_f] \quad (3.24)$$

□

Il convient de noter que l'existence de la limite (3.20) ou de la solution approchée $x_N(t)$, vérifiant la condition (3.21), implique que la séquence (3.10) converge vers la solution exacte. La convergence du VIM a été examinée dans la littérature pour différentes fonctionnelles de correction [271, 206]. Tatari et Dehghan [271] ont étudié la convergence du VIM, c'est-à-dire de la fonctionnelle de correction (3.10).

Les auteurs ont proposé d'écrire la séquence (3.10) sous la forme suivante :

$$x_{k+1}(t) = \mathcal{A} x_k(t) \quad (3.25)$$

et ils ont montré que les approximations successives résultantes $x_{k+1}(t)$ convergent vers la solution exacte $x(t)$ si l'hypothèse suivante est vérifiée.

Hypothèse. L'opérateur \mathcal{A} est contractant.

3.2.1 Approche alternative de la méthode de l'itération variationnelle

Dans [206], l'auteur a proposé une nouvelle fonctionnelle de correction pour les équations différentielles non linéaires, différente de l'équation (3.10), et a abordé les conditions suffisantes pour assurer sa convergence. Les étapes essentielles de cette méthode sont présentées dans ce qui suit.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\mathcal{L}x(t) + \mathcal{N}x(t) = \mathcal{H}(t), \quad t > 0, \quad (3.26)$$

où $\mathcal{L} = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$ est un opérateur linéaire, \mathcal{N} un opérateur non linéaire et $\mathcal{H}(t)$ est une fonction analytique connue. Les conditions initiales sont représentées comme suit :

$$x_k(0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.27)$$

avec c_k ($k = 0, 1, \dots, m-1$) $\in \mathbb{R}$, donnés.

La forme itérative correspondante à l'équation (3.26) est la suivante :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t [\lambda(s)(\mathcal{L}x_k(s) + \mathcal{N}x_k(s) - \mathcal{H}(s))] ds \quad (3.28)$$

Maintenant on substitue le multiplicateur de Lagrange (3.19) dans (3.28), il résulte le schéma itératif suivant :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1} (\mathcal{L}x_k(s) + \mathcal{N}\tilde{x}_k(s) - \mathcal{H}(s)) \right] ds \quad (3.29)$$

Introduisons l'opérateur intégral suivant :

$$\mathcal{A}[x] = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1} (\mathcal{L}x_k(s) + \mathcal{N}\tilde{x}_k(s) - \mathcal{H}(s)) \right] ds, \quad (3.30)$$

et soient les composantes $v_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= x_0(t), \\ v_1(t) &= \mathcal{A}[v_0(t)], \\ v_2(t) &= \mathcal{A}[v_0(t) + v_1(t)], \\ &\vdots \\ v_{k+1}(t) &= \mathcal{A}[v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_k(t)]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ainsi, nous aurons :

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \quad (3.32)$$

Les équations (3.30) et (3.31) permettent de solutionner le problème (3.26) où la solution est donnée sous la forme de série comme suit :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \quad (3.33)$$

La valeur initiale v_0 peut être choisie de façon à prendre en considération les conditions initiales et les conditions aux limites du problème. L'approximation initiale v_0 peut être choisie comme suit :

$$v_0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} t^k. \quad (3.34)$$

3.2.2 Convergence de la méthode de l'itération variationnelle

La convergence de VIM a été discutée pour les équations différentielles linéaires et non linéaires dans de nombreux travaux [206, 270, 105]. Nous allons énoncer un Théorème qui justifie que la série de fonction (3.33) avec la condition initiale (3.34) converge vers la solution exacte du problème (3.26)-(3.27).

Théorème 3.1. [206]

Soit \mathcal{A} l'opérateur défini par (3.30) d'un espace de Hilbert H_e dans H_e . La solution $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (3.33), converge si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|\mathcal{A}[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k+1}]\| \leq \gamma \|\mathcal{A}[v_0 + v_1 + \cdots + v_k]\| \quad (3.35)$$

c'est-à-dire $\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Preuve. [206]

Soit $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, une suite définie comme suit :

$$\begin{cases} S_0 = v_0 \\ S_1 = v_0 + v_1 \\ S_2 = v_0 + v_1 + v_2 \\ \vdots \\ S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \end{cases} \quad (3.36)$$

Montrons que $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert H_e . Pour ce faire, nous considérons :

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \gamma \|v_n\| \leq \gamma^2 \|v_{n-1}\| \leq \cdots \leq \gamma^{n+1} \|v_0\| \quad (3.37)$$

Pour tout $n, j \in \mathbb{N}, n \geq j$, on a :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_j\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_{j+1} - S_j)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \cdots + \|(S_{j+1} - S_j)\| \\ &\leq \gamma^n \|v_0\| + \gamma^{n-1} \|v_0\| + \cdots + \gamma^{j+1} \|v_0\| \\ &= \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1} \|v_0\|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

et puisque $0 < \gamma < 1$, nous aurons

$$\lim_{n,j \rightarrow \infty} \|S_n - S_j\| = 0. \quad (3.39)$$

Donc $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, dans l'espace de Hilbert, ce qui implique que $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (3.33) converge.

Théorème 3.2. [206]

Si la solution $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (3.33), converge alors elle est une solution exacte du problème non linéaire (3.26).

Remarque 3.3.

Soient les paramètres suivants :

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \text{si } \|v_i\| \neq 0 \\ 0, & \text{si } \|v_i\| = 0 \end{cases}, \quad (3.40)$$

La série $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge vers la solution exacte du problème si $0 \leq \beta_i < 1, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dans le cas où les premiers termes de $\beta_i, i = 1, 2, \dots, l$ ne sont pas inférieurs à 1 et $\beta_i \leq 1$ pour $i > l$, ceci n'affecte pas la convergence de solution en série [206]. Selon le Théorème (3.1), nous avons :

$$\|S_n - S_j\| \leq \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1} \|v_0\|, \quad (3.41)$$

et puisque $0 < \gamma < 1$, pour $n \geq j$ et l fixé, nous aurons

$$\lim_{n,j \rightarrow \infty} \|S_n - S_j\| = 0. \quad (3.42)$$

Dans ces conditions, la convergence de VIM dépend des β_i , pour $i > l$.

3.2.3 Résultats sur la convergence de VIM

Considérons l'équation différentielle ordinaire non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} x(t) + \mathcal{N} x(t) = \mathcal{H}(t), & t > 0, \\ x_k = c_k, & k = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (3.43)$$

où $m \in \mathbb{N}$, \mathcal{N} est un opérateur non linéaire et $\mathcal{H}(t)$ est une quantité connue.

La solution de l'itération variationnelle $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ résultante en utilisant la formule itérative suivante :

$$\begin{cases} v_0(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} t^k, \\ v_{k+1}(t) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{dt^m} [v_0(s) + \dots + v_k(s)] \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{N}[v_0(s) + \dots + v_k(s)] - \mathcal{H}(s) \right) \right] dt, \end{cases} \quad (3.44)$$

converge vers la solution exacte du problème (3.43) si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.45)$$

Considérons à présent le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} x_1(t) + \mathcal{N}_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \mathcal{H}_1(t), \\ \frac{d^m}{dt^m} x_2(t) + \mathcal{N}_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \mathcal{H}_2(t), \\ \vdots \\ \frac{d^m}{dt^m} x_n(t) + \mathcal{N}_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \mathcal{H}_n(t), \end{cases} \quad (3.46)$$

où $n, m \in \mathbb{N}$, \mathcal{N}_i , $i = 1, \dots, n$ sont des opérateurs non linéaires et $\mathcal{H}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ sont des parties non homogènes connues, où

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = c_{1,k}, \\ x_2^{(k)} = c_{2,k}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = c_{n,k}, \end{cases} \quad (3.47)$$

sont les conditions initiales pour $k = 0, 1, \dots, m - 1$. La solution de l'itération variationnelle

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{1,k}(t), \sum_{k=0}^{\infty} v_{2,k}(t), \dots, \sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}(t) \right), \quad (3.48)$$

est obtenue en appliquant le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} v_{i,0}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{i,k}}{k!} t^k, \\ v_{i,k+1}(t) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{dt^m} [v_{i,0}(s) + \dots + v_{i,k}(s)] \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{N}[v_{i,0}(s) + \dots + v_{i,k}(s)] - \mathcal{H}_i(s) \right) \right] dt, \end{cases} \quad (3.49)$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$. Cette solution converge vers la solution exacte du problème (3.46) si $\exists 0 < \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n < 1$ tel que :

$$\|v_{i,k+1}\| \leq \gamma_i \|v_{i,k}\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ et } \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.50)$$

3.2.4 Exemples illustratifs

Exemple 1

Soit l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = 4, & 0 < t \leq 1 \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.51)$$

où sa solution exacte est $x(t) = 2e^{2t} - 2$. Le schéma itératif pour le problème (3.51) selon (3.44), est construit comme suit :

$$\begin{cases} v_0(t) = 0, \\ v_{k+1}(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + \dots + v_k'(s)] - 2[v_0(s) + \dots + v_k(s)] - 4) ds. \end{cases} \quad (3.52)$$

Et donc, nous aurons :

- $v_1(t) = - \int_0^t (v_0'(s) - 2v_0(s) - 4) ds$

. $\quad = 4t.$

- $v_2(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + v_1'(s)] - 2[v_0(s) + v_1(s)] - 4) ds$

$$\cdot \quad = 4t^2.$$

$$\bullet \quad v_3(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + v_1'(s) + v_2'(s)] - 2[v_0(s) + v_1(s) + v_2(s)] - 4) ds$$

$$\cdot \quad = \frac{8}{3}t^3.$$

$$\bullet \quad v_4(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + v_1'(s) + v_2'(s) + v_3'(s)] - 2[v_0(s) + v_1(s) + v_2(s) + v_3(s)] - 4) ds$$

$$\cdot \quad = \frac{4}{3}t^4.$$

⋮

Par conséquent, la solution est donnée comme suit :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \tag{3.53}$$

$$= 2 \left(1 + 2t + \frac{4}{2!}t^2 + \frac{8}{3!}t^3 + \frac{16}{4!}t^4 + \dots \right) - 2 \tag{3.54}$$

$$= 2e^{2t} - 2, \tag{3.55}$$

qui est la solution exacte du problème (3.51). Calculons maintenant les β_k :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 0, \\ \beta_1 = \frac{\|v_2(t)\|}{\|v_1(t)\|} = \frac{\|4t^2\|}{\|4t\|} = 1, \\ \beta_2 = \frac{\|v_3(t)\|}{\|v_2(t)\|} = \frac{\|\frac{8}{3}t^3\|}{\|4t^2\|} = \frac{2}{3}, \\ \beta_3 = \frac{\|v_4(t)\|}{\|v_3(t)\|} = \frac{\|\frac{4}{3}t^4\|}{\|\frac{8}{3}t^3\|} = \frac{1}{2}, \\ \vdots \end{array} \right. \tag{3.56}$$

Nous remarquons que les β_k sont inférieurs à 1, $\forall k \geq 2$ et $0 < t \leq 1$ (voir la figure 3.1 pour l'évolution des valeurs de β_k), ce qui implique que la solution de la série de la méthode de l'itération variationnelle converge vers la solution exacte du problème (voir Figure 3.1).

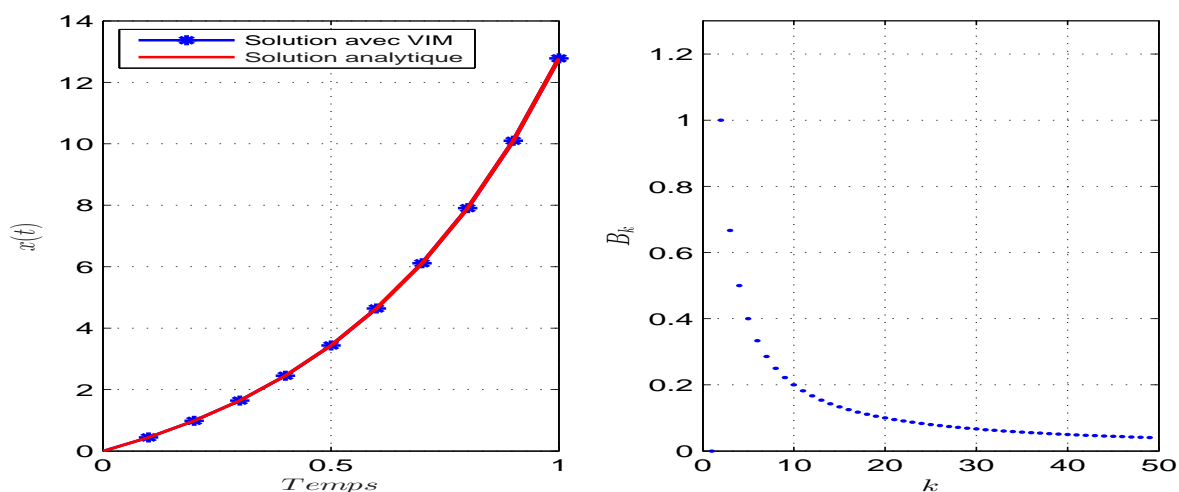


FIG. 3.1: Exemple 1 : Évolutions de la solution $x(t)$ et du paramètre β_k .

Exemple 2

Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\begin{cases} x'(t) + x^2(t) = 1, & 0 < t \leq 1 \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

La forme itérative dans ce cas-là est donnée par :

$$\begin{cases} v_0(t) = 0, \\ v_{k+1}(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + \dots + v_k'(s)] + [v_0(s) + \dots + v_k(s)]^2 - 1) ds. \end{cases} \quad (3.58)$$

Ce qui donne :

- $v_1(t) = - \int_0^t (v_0'(s) + v_0^2(s) - 1) ds$

$$= t.$$

- $v_2(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + v_1'(s)] + [v_0(s) + v_1(s)]^2 - 1) ds$

$$= -\frac{t^3}{3}.$$

- $v_3(t) = - \int_0^t ([v_0'(s) + v_1'(s) + v_2'(s)] + [v_0(s) + v_1(s) + v_2(s)]^2 - 1) ds$

$$= \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7.$$

⋮

Nous remarquons que la série de fonction $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge vers la solution exacte $x(t) = \tanh(t)$. Les valeurs des β_k après calculs sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 0, \\ \beta_1 = \frac{\|v_2(t)\|}{\|v_1(t)\|} = 0.333333, \\ \beta_2 = \frac{\|v_3(t)\|}{\|v_2(t)\|} = 0.447619, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3.59)$$

D'après les valeurs de β_k (voir la figure 3.2), cette série converge vers la solution exacte du problème $\forall k \geq 0$ et $0 < t \leq 1$.

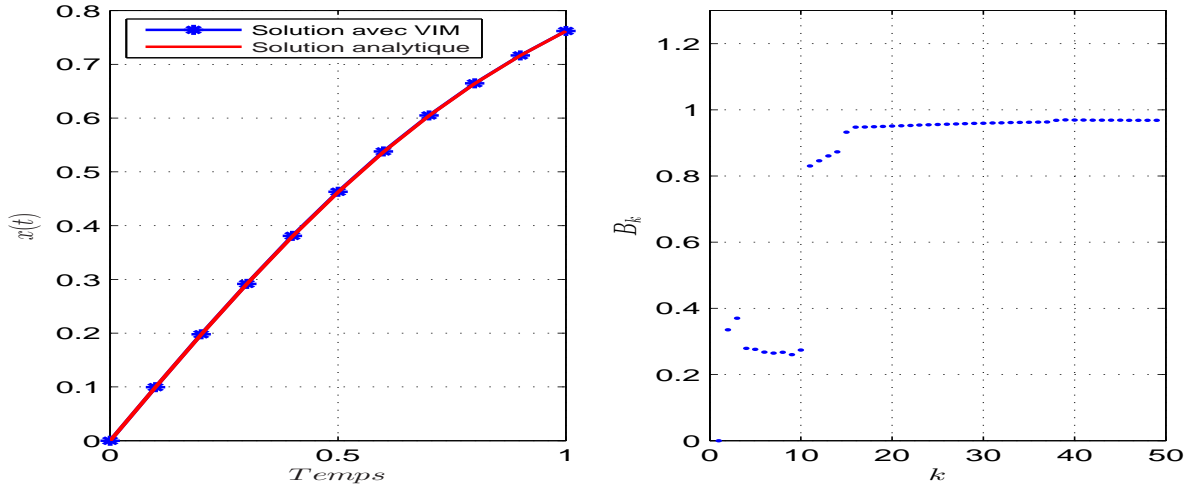


FIG. 3.2: Exemple 2 : Évolutions de la solution $x(t)$ et du paramètre β_k .

Exemple 3

Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 0, & 0 < t \leq 1 \\ x(0) = 0, & x'(0) = 2 \end{cases} \quad (3.60)$$

Le schéma itératif pour le problème (3.60) selon (3.44), est donné par :

$$\begin{cases} v_0(t) = 2t, \\ v_{k+1}(t) = \int_0^t (s-t)([v_0''(s) + \dots + v_k''(s)] + 4[v_0(s) + \dots + v_k(s)])ds. \end{cases} \quad (3.61)$$

Par conséquent,

- $v_1(t) = \int_0^t (s-t)(v_0''(s) + 4v_0(s))ds$
 $= -\frac{8}{3!}t^3.$

- $v_2(t) = \int_0^t (s-t)([v_0''(s) + v_1''(s)] + 4[v_0(s) + v_1(s)])ds$
 $= \frac{32}{5!}t^5.$

- $v_3(t) = \int_0^t (s-t)([v_0''(s) + v_1''(s) + v_2''(s)] + 4[v_0(s) + v_1(s) + v_2(s)])ds$
 $= -\frac{128}{7!}t^7.$

⋮

Nous observons que la série de fonction $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge vers la solution exacte $x(t) = \sin(2t)$. Les valeurs des β_k pour ce problème sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{\|v_1(t)\|}{\|v_0(t)\|} = \frac{\|\frac{8}{3!}t^3\|}{\|2t\|} = 0.666666, \\ \beta_1 = \frac{\|v_2(t)\|}{\|v_1(t)\|} = \frac{\|\frac{32}{5!}t^5\|}{\|\frac{8}{3!}t^3\|} = 0.133333, \\ \beta_2 = \frac{\|v_3(t)\|}{\|v_2(t)\|} = \frac{\|\frac{128}{7!}t^7\|}{\|\frac{32}{5!}t^5\|} = 0.095238, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3.62)$$

La Figure 3.3 montre clairement que les β_k sont inférieurs à 1, $\forall k \geq 0$ et $0 < t \leq 1$, par conséquent la série générée par VIM converge vers la solution exacte du problème.

Remarque 3.4.

Pour les trois exemples précédents, la norme ∞ a été utilisée pour le calcul des β_k définie par :

$$\|\mathcal{V}\|_{\infty} = \sup_{t \in [a,b]} |\mathcal{V}(t)| \quad (3.63)$$

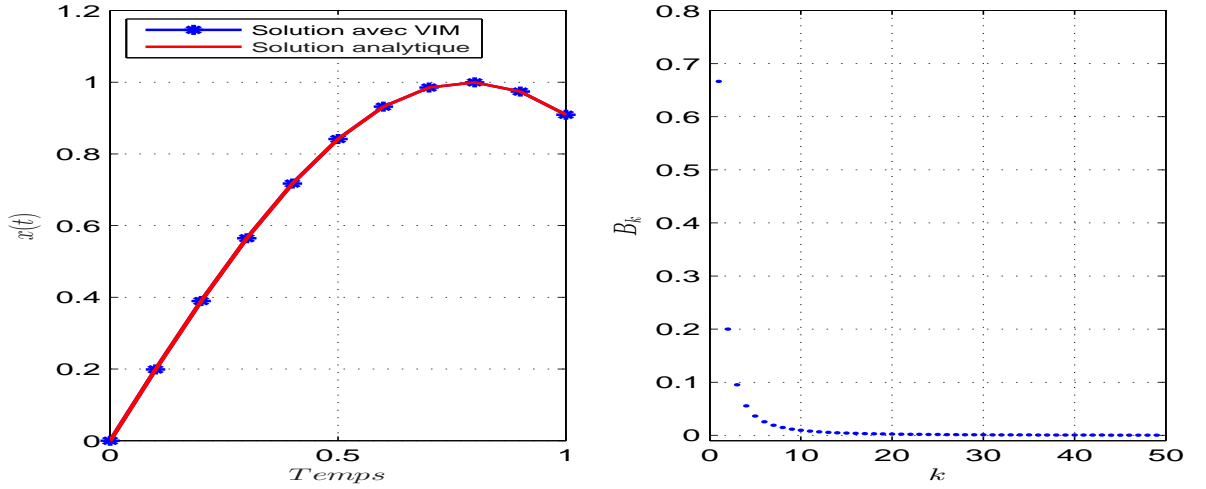


FIG. 3.3: Exemple 3 : Évolutions de la solution $x(t)$ et du paramètre β_k .

3.3 Méthode de l'itération variationnelle II et III

L'application de la formule itérative (3.10) à l'équation (3.8) conduit au calcul de termes répétés et non nécessaires, ce qui implique que le temps de calcul est très important pour les solutions en série. Pour surmonter les inconvénients du VIM original, He et al. [135] ont proposé deux algorithmes qui éliminent les termes inutiles et les termes répétés et qui permettent aussi de diminuer du temps et de réduire le volume des calculs.

3.3.1 Algorithme de l'itération variationnelle II

Par intégration par parties [135, 134], la formule de l'itération variationnelle (3.10) peut s'écrire comme suit :

$$x_{k+1}(t) = x_0(t) + \int_0^t \lambda(\mathcal{N}x_k(s) - \mathcal{H}(s))ds, \quad (3.64)$$

Pour illustrer le principe de VIM II, nous considérons l'équation différentielle qui caractérise la dynamique d'un oscillateur, donnée comme suit [135] :

$$x''(t) + w^2 x(t) + \mathcal{F}(x, x', x'') = 0 \quad (3.65)$$

La fonctionnelle de correction pour (3.65) par l'algorithme de VIM I est [135, 134] :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \frac{1}{w} \int_0^t \sin w(s-t) (x_k''(s) + w^2 x_k(s) + \mathcal{F}(x_k, x_k', x_k'')) ds \quad (3.66)$$

avec w est la fréquence de l'oscillateur.

Si on écrit :

$$\nu(t) = \frac{1}{w} \int_0^t \sin w(s-t) \mathcal{F} ds \quad (3.67)$$

par une simple opération nous avons

$$\nu'' + w^2 \nu + \mathcal{F} = 0. \quad (3.68)$$

En dérivant les deux membres de l'équation (3.67) par rapport à t ceci nous donne :

$$\nu'(t) = \frac{1}{w} [\mathcal{F}(x(s), x'(s), x''(s)) \sin w(s-t)]_{s=t} - \int_0^t \mathcal{F}(x(s), x'(s), x''(s)) \cos w(s-t) ds \quad (3.69)$$

$$= - \int_0^t \mathcal{F}(x(s), x'(s), x''(s)) \cos w(s-t) ds \quad (3.70)$$

et

$$\nu''(t) = -[\mathcal{F}(x(s), x'(s), x''(s)) \cos w(s-t)]_{s=t} - w \int_0^t \mathcal{F}(x(s), x'(s), x''(s)) \sin w(s-t) ds \quad (3.71)$$

$$= -\mathcal{F}(x, x', x'') - w \int_0^t \mathcal{F}(x(s), x'(s), x''(s)) \sin w(s-t) ds. \quad (3.72)$$

De l'équation (3.67) nous avons

$$\nu''(t) = -\mathcal{F}(x, x', x'') - w^2 \nu \quad (3.73)$$

l'équation (3.73) est équivalente à l'équation (3.68). Cela veut dire que ν est une solution spéciale. Donc, la formulation itérative peut se représenter par la forme suivante :

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \nu_k(t) \quad (3.74)$$

où x_0 est la solution initiale avec ou sans paramètres inconnus. Via cette modification, certains calculs répétés sont évités. Cet algorithme est appelé algorithme de l'itération variationnelle II, il est construit après l'identification du multiplicateur de Lagrange λ dans l'équation (3.10). Le principal défaut de cet algorithme est que x_0 doit satisfaire les conditions initiales/limites [135].

Exemple 4

Considérons l'équation suivante :

$$x'(t) + x^2(t) = 0, \quad x(0) = 1. \quad (3.75)$$

Nous construisons d'abord une formulation itérative en utilisant un multiplicateur

de Lagrange :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(s)(x'_k(s) + \tilde{x}_k^2(s))ds \quad (3.76)$$

Après identification du multiplicateur de Lagrange λ qui vaut -1 , l'algorithme de l'itération variationnelle I est :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) - \int_0^t (x'_k(s) + x_k^2(s))ds, \quad (3.77)$$

et l'algorithme de l'itération variationnelle II est donné alors par :

$$x_{k+1}(t) = x_0(t) - \int_0^t x_k^2(s)ds \quad (3.78)$$

Si nous prenons $x_0(t) = x(0) = 1$, nous obtenons la série suivante :

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ x_1(t) = 1 - t, \\ x_2(t) = 1 - t + t^2, \\ \vdots \end{cases} \quad (3.79)$$

qui converge vers la solution exacte $x(t) = \frac{1}{1+t}$.

3.3.2 Algorithme de l'itération variationnelle III

Récrivons (3.64) comme suit :

$$x_{k+1}(t) = x_0(t) + \int_0^t \lambda(\mathcal{N}x_{k-1}(s) - \mathcal{H}(s))ds + \int_0^t \lambda(\mathcal{N}x_k(s) - \mathcal{H}(s) - \mathcal{N}x_{k-1}(s) + \mathcal{H}(s))ds, \quad (3.80)$$

et d'après (3.64), on a :

$$x_k(t) = x_0(t) + \int_0^t \lambda(\mathcal{N}x_{k-1}(s) - \mathcal{H}(s))ds. \quad (3.81)$$

En remplaçant (3.81) dans (3.80), nous obtenons la formule itérative de l'algorithme de l'itération variationnelle III (VIM III)[134] :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(\mathcal{N}x_k(s) - \mathcal{N}x_{k-1}(s))ds, \quad (3.82)$$

avec $x_{-1}(s) = 0$. Cet algorithme convient parfaitement aux problèmes aux limites d'ordre élevé.

Reprenons l'exemple précédent (**Exemple 3**)

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 2 \end{cases} \quad (3.83)$$

La formulation de l'itération variationnelle avec le multiplicateur de Lagrange est donnée par :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(s)(x_k''(s) + 4 \tilde{x}_k(s))ds. \quad (3.84)$$

Après identification de λ qui vaut $(s - t)$, l'algorithme de l'itération variationnelle I est donné par :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t (s - t)(x_k''(s) + 4x_k(s))ds, \quad (3.85)$$

et l'algorithme de l'itération variationnelle III est donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t (s - t)(4(x_k(s) - x_{k-1}(s)))ds, \\ x_{-1}(s) = 0, \end{cases} \quad (3.86)$$

et la condition initiale peut être choisie avec des paramètres inconnus, par exemple :

$$x_0(t) = a + bt, \quad (3.87)$$

où a et b sont des paramètres inconnus à déterminer après quelques itérations en imposant les conditions aux limites. Si N itérations sont suffisantes. Par exemple, en prenant pour cet exemple $N = 13$, nous obtenons la solution approximée suivante :

$$\begin{aligned} x_{13}(t) \approx & a + b t - 2a t^2 - 0.666667b t^3 + 0.133333(5a + bt) t^4 - 0.0126984(7a + bt) t^6 \\ & + 0.000705467(9.0a + bt) t^8 - 0.0000256534(11a + bt) t^{10} + 6.57778e^{-7}(13a + bt) t^{12} \\ & - 1.25291e^{-8}(15a + bt) t^{14} + 1.84252e^{-10}(17a + bt) t^{16} - 2.15499e^{-12}(19a + bt) t^{18} \\ & + 2.05237e^{-14}(21a + bt) t^{20} - 1.62243e^{-16}(23a + bt) t^{22} + 1.08162e^{-18}(25a + bt) t^{24} \\ & - 6.16307e^{-21}(27a + bt) t^{26} \end{aligned}$$

Alors à partir des conditions $x(0) = 0$ et $x'(0) = 2$, nous avons : $a = 0$ et $b = 2$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 x_{13}(t) = & 2 t - 1.33333 t^3 + 0.266667 t^5 - 0.0253968 t^7 + 0.00141093 t^9 - 0.0000513067 t^{11} \\
 & + 0.00000131556 t^{13} - 2.50582e^{-8} t^{15} + 3.68503e^{-10}t^{17} - 4.30998e^{-12}t^{19} \\
 & + 4.10474e^{-14} t^{21} - 3.24486e^{-16} t^{23} + 2.16324e^{-18} t^{25} - 1.23261e^{-20} t^{27}
 \end{aligned}$$

qui converge vers la solution exacte $x(t) = \sin(2t)$.

La solution exacte ainsi que la solution obtenue en résolvant l'exemple 3 et l'exemple 4 par la méthode de l'itération variationnelle I, II et III sont donnés par les Figures 3.4-3.9.

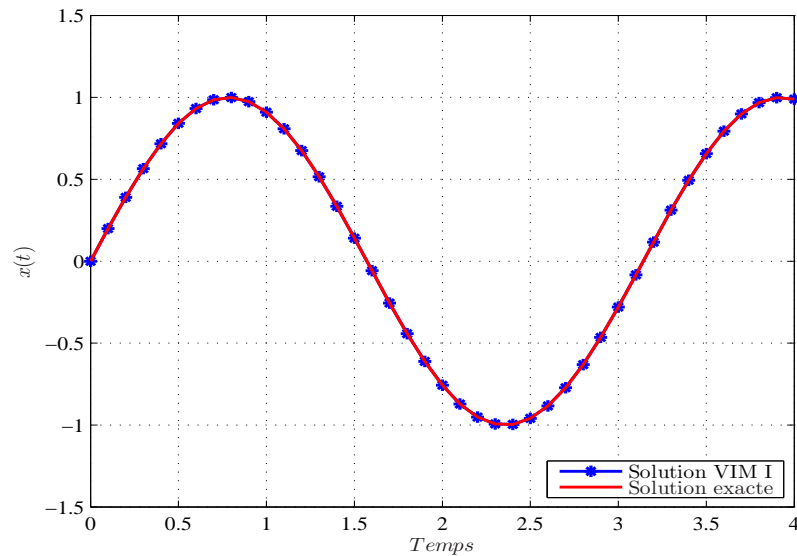


FIG. 3.4: Exemple 3 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM I.

Les résultats de simulation pour les deux exemples montrent clairement que les trois algorithmes de la méthode de l'itération variationnelle convergent vers la solution exacte $x(t)$. Par exemple, une tolérance de $\epsilon = 10^{-3}$ est atteinte après 13 itérations pour l'exemple

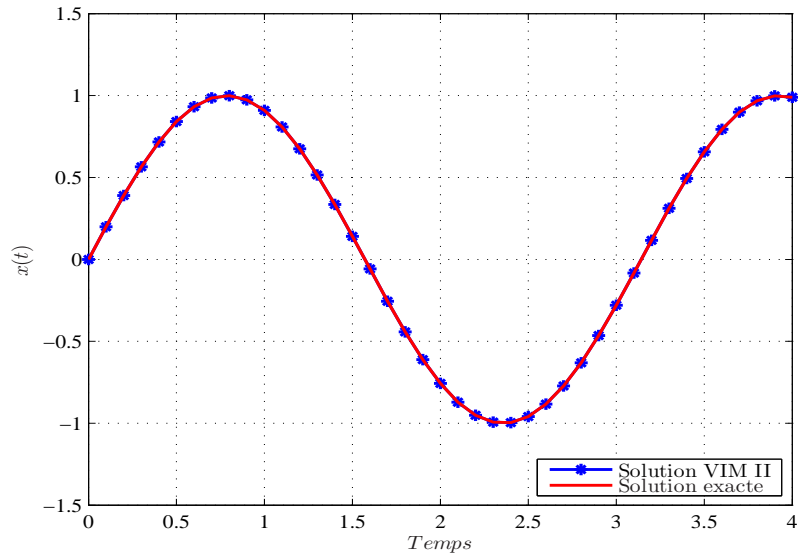


FIG. 3.5: Exemple 3 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM II.

Algorithmes	Temps d'exécution
VIM I	17.207 s
VIM II	3.319 s
VIM III	9.958 s

TAB. 3.1: Temps de calcul de la solution de l'exemple 3.

3 et 12 itérations pour l'exemple 4.

Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent comment VIM II et VIM III économisent du temps et éliminent les calculs inutiles.

Remarque 3.5.

Une intégration numérique (méthode des trapèzes) a été utilisée pour la résolution de l'intégrale de l'exemple 4.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la méthode de l'itération variationnelle pour la résolution des équations différentielles ordinaires. Cette méthode permet de déterminer la

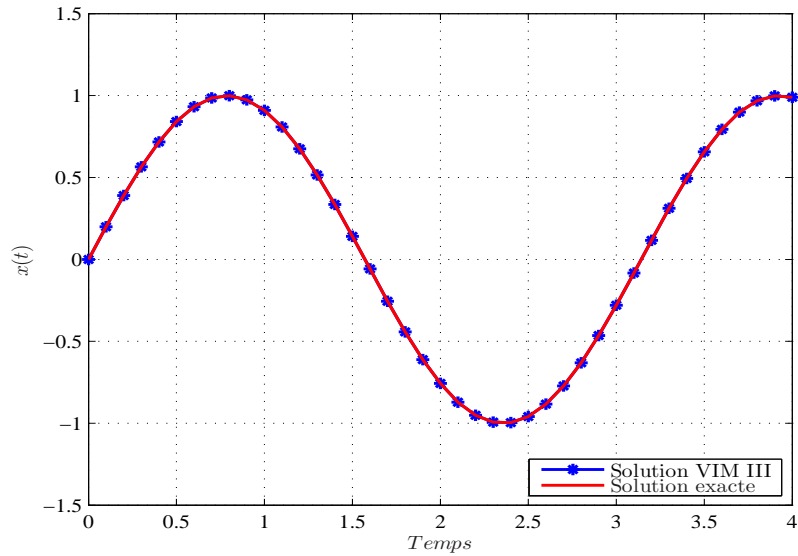


FIG. 3.6: Exemple 3 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM III.

Algorithmes	Temps d'exécution
VIM I	1.412 s
VIM II	1.049 s
VIM III	1.205 s

TAB. 3.2: Temps de calcul de la solution de l'exemple 4.

solution de manière itérative en utilisant la fonctionnelle de correction après avoir déterminé le multiplicateur de Lagrange et en choisissant une solution initiale.

Ainsi, après avoir présenté la formule de la méthode de l'itération variationnelle, nous avons exposé les résultats importants concernant sa convergence. Pour démontrer la convergence de la méthode de l'itération variationnelle, nous avons considéré des exemples ayant des solutions exactes. Par la suite, nous avons présenté deux autres algorithmes de VIM qui ont prouvé leurs capacités d'éliminer des calculs répétés et des calculs de termes inutiles ce qui conduit à économiser du temps et des efforts de calcul. Leur efficacité est illustrée par deux exemples.

La méthode de l'itération variationnelle s'est révélée être fiable et résout avec efficacité les équations différentielles linéaires et non linéaires sans discrétisation et sans linéarisation de l'équation. Selon la complexité de l'équation à résoudre, VIM permet de déterminer soit

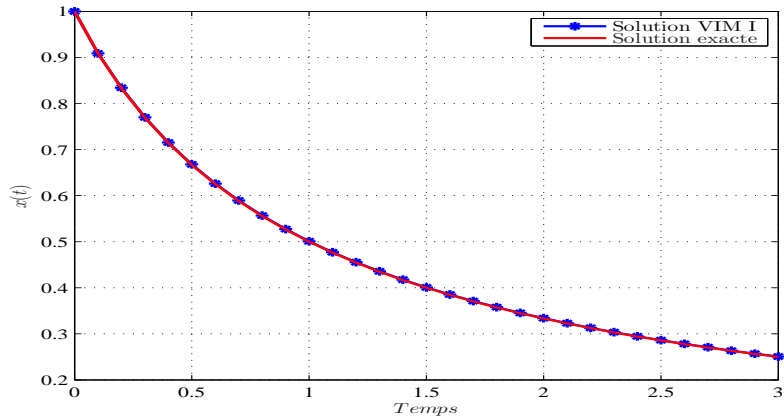


FIG. 3.7: Exemple 4 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM I.

une solution analytique (approximée), soit une solution numérique de manière très simple. De plus, cette méthode donne des approximations successives qui convergent rapidement vers la solution en quelques itérations même si le multiplicateur de Lagrange n'est pas identifié de manière exacte.

La méthode de VIM a été exploitée dans plusieurs domaines, à savoir en automatique. Cette méthode a été utilisée particulièrement pour la résolution des problèmes de contrôle optimal suivant l'approche indirecte, c'est-à-dire de résoudre les conditions d'optimalité (équation d'Euler-Lagrange, équation d'Hamilton-Pontryagin ou équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman) en utilisant la méthode de l'itération variationnelle.

Dans le chapitre suivant, la méthode de l'itération variationnelle sera exploitée pour résoudre le problème de contrôle prédictif pour un système dynamique non linéaire, basé sur l'approche indirecte.

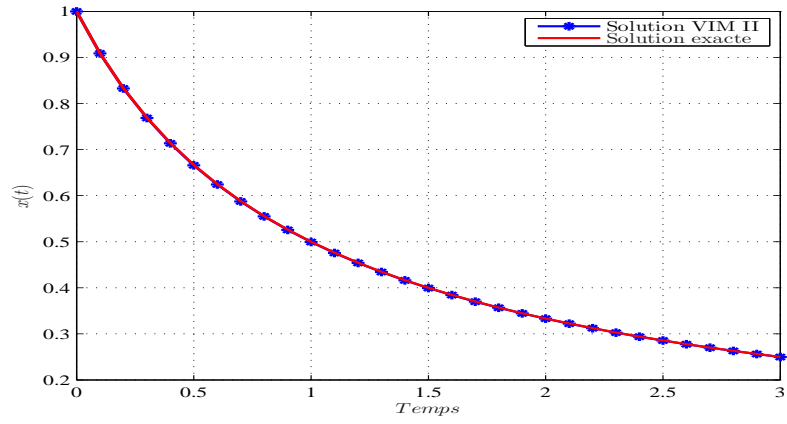


FIG. 3.8: Exemple 4 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM II.

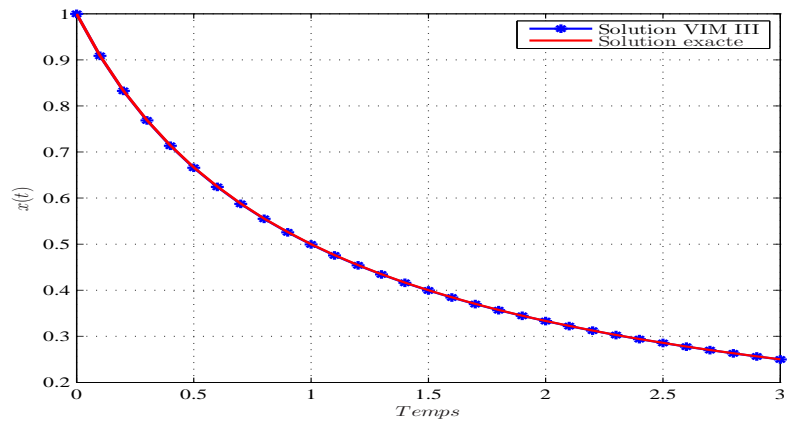


FIG. 3.9: Exemple 4 : Graphes de la solution exacte et de la solution approchée obtenue avec VIM III.

Contrôle prédictif basé sur la méthode de l'itération variationnelle

4.1 Introduction

Les techniques de contrôle prédictif avec modèle non linéaire (NMPC) impliquent la résolution en ligne d'équations différentielles non linéaires et d'un problème d'optimisation dynamique non linéaire. Cet effort de calcul est l'un des principaux obstacles à l'adoption de contrôle prédictif non linéaire puisque la résolution du problème d'optimisation doit être réalisée sur une durée égale ou inférieure à une période d'échantillonnage.

L'optimum global dans le cas de NMPC est très difficile à obtenir et ne peut pas être garanti [95, 177, 49, 160]. Par conséquent, des algorithmes d'optimisation globale convergents et rapides doivent être employés [49, 177]. Il existe dans la littérature des algorithmes d'optimisation qui localisent la solution globale [141, 49, 95], mais leur implémentation dans une stratégie de contrôle prédictif est limitée par le temps de convergence qui ne doit pas dépasser une période d'échantillonnage [49, 177]. Par conséquent, ces méthodes ne peuvent pas être appliquées à des systèmes rapides et à des systèmes fortement non linéaires [137, 49]. Cela a motivé notre travail qui consiste à proposer des approches MPC alternatives, c'est-à-dire à résoudre le problème de contrôle optimal sur l'horizon de prédiction de manière à obtenir la solution globale en un temps inférieur ou égal à la période d'échantillonnage.

Dans ce chapitre, nous proposons une approche de contrôle prédictif des systèmes dynamiques basée sur le calcul variationnel (équations d'Euler-Lagrange) et le principe du minimum de Pontryagin (équations d'Hamilton-Pontryagin). Le principe de cette approche

consiste à résoudre un système d'équations algébriques au lieu d'un problème d'optimisation. En effet, elle consiste à résoudre sur un horizon de contrôle, les conditions d'optimalité à l'aide de la méthode de l'itération variationnelle. Les conditions d'optimalité sont données par les équations d'Euler-Lagrange ou les équations d'Hamilton-Pontryagin. Ce problème à deux valeurs limites est résolu de manière itérative en utilisant une fonctionnelle de correction qui donne à la fois l'état optimal et le contrôle optimal. Puis en imposant, à chaque instant d'échantillonnage, les conditions aux limites actuelles, un système d'équations algébriques est obtenu et résolu, ce qui permet d'obtenir le contrôle optimal à appliquer à chaque instant d'échantillonnage.

Ainsi, du point de vue de la complexité, la résolution d'un système d'équations algébriques est très simple par rapport à un problème d'optimisation. De plus, une solution précise peut être obtenue pour un système d'équations algébriques comparativement à un problème d'optimisation qui nécessite plus d'itérations, c'est-à-dire plus de temps de calcul.

Dans ce chapitre, le problème de contrôle prédictif sera résolu par l'approche variationnelle basée sur l'équation d'Euler-Lagrange et les équations d'Hamilton-Pontryagin (principe du minimum). Pour démontrer l'efficacité de l'approche indirecte pour la résolution du problème de contrôle prédictif basé sur la méthode de l'itération variationnelle, nous avons considéré trois exemples.

4.2 Résolution par l'approche variationnelle basée sur l'équation d'Euler-Lagrange

Considérons le problème de contrôle optimal formulé comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) dt \quad (4.1)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t), t), \quad (4.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.3)$$

en utilisant le contrôle à l'horizon fuyant (glissant), nous proposons d'utiliser l'équation d'Euler-Lagrange (méthode indirecte). Ainsi, à chaque instant d'échantillonnage t_i , une loi de contrôle optimal $u_i^*(t)$ est déterminée en résolvant les conditions d'optimalité (équation d'Euler-Lagrange) du problème optimal suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t N_c} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) dt, \quad (4.4)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), d(t), t), \quad (4.5)$$

$$x(t_i) = x_i. \quad (4.6)$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire du second ordre (conditions d'optimalité) doit spécifier les deux conditions aux limites à l'instant initial t_i et à l'instant final $t_i + \Delta t N_c$. Évidemment, la condition initiale à t_i est l'état actuel $x(t_i) = x_i$ (mesure). Au temps final $t_i + \Delta t N_c$, la condition aux limites n'est pas spécifiée, mais elle est la conséquence de l'application du contrôle $u(t)$ à t_i . Rappelons que notre objectif est de suivre la référence désirée $x^d(t)$. Le système étant supposé contrôlable, il est proposé de spécifier un état final fixe, à $t_i + \Delta t N_c$, comme suit

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.7)$$

avec $x_{i+N_c}^d = x^d(t_i + \Delta t N_c)$.

De l'équation (4.5), nous supposons que $u(t)$ peut être exprimée en fonction de $x(t), \dot{x}(t)$, c'est-à-dire :

$$u(t) = \phi(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (4.8)$$

en remplaçant l'expression (4.8) dans (4.4), nous obtenons la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), x^d(t), t) dt \quad (4.9)$$

avec les conditions terminales (4.6)-(4.7).

Donc, à chaque temps d'échantillonnage t_i , nous allons résoudre le problème variationnel suivant

$$\min_{x(t)} \tilde{J}(x(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} g(x(t), \dot{x}(t), x^d(t), t) dt, \quad (4.10)$$

sous les contraintes

$$x(t_i) = x_i \quad (4.11)$$

$$x(t_i + \Delta t) = x_{i+N_c}^d \quad (4.12)$$

c'est-à-dire l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{\partial g(x(t), \dot{x}(t), x^d(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x(t), \dot{x}(t), x^d(t), t)}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (4.13)$$

avec les conditions aux limites (4.11) et (4.12).

On considère que l'équation (4.13) peut être écrite sous la forme implicite suivante :

$$\mathcal{G}(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), x^d(t), t) = 0. \quad (4.14)$$

Par conséquent, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, en suppo-

sant une solution initiale $x_0(t) = \theta(a, b, t)$ (a et b sont des constantes inconnues), à l'aide de VIM, c'est-à-dire la fonctionnelle de correction (3.10), nous pouvons déterminer une solution approximée de l'équation d'Euler-Lagrange(4.14) comme suit :

$$x(t) \approx x_N(t) = \vartheta(a, b, t) \quad (4.15)$$

Remarque 4.1.

La solution approximée (4.15) de l'équation d'Euler-Lagrange (4.13) fournie par la fonctionnelle de correction (3.10), dépend de la solution initiale $x_0(t)$. Ainsi, il est recommandé de choisir une fonction arbitraire simple afin que le terme intégral puisse être évalué au moins une fois. Par exemple, $x_0(t) = at + b$ (voir la section d'exemple d'application).

En imposant les conditions aux limites (4.11) et (4.12), nous obtenons le système d'équations algébriques suivant avec les inconnues a et b

$$\vartheta(a, b, t_i) = x_i \quad (4.16)$$

$$\vartheta(a, b, t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.17)$$

et sa résolution permet de déterminer les constantes inconnues a et b . Ensuite, en substituant les valeurs obtenues de a et b dans l'équation (4.15), on obtient la trajectoire optimale $x^*(t)$ et le contrôle optimal $u^*(t)$ déduit de l'équation (4.8) est :

$$u^*(t) = \phi(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \quad (4.18)$$

et à l'instant d'échantillonnage t_i , le contrôle

$$u^*(t_i) = \phi(x^*(t_i), \dot{x}^*(t_i), t_i) \quad (4.19)$$

est appliqué au système et le processus est répété en supposant l'état résultant $x(t_{i+1})$ comme l'état initial.

Remarque 4.2.

La solution approximée (4.15) peut être calculée hors ligne à l'aide d'un langage de programmation symbolique. Le nombre N nécessaire pour obtenir une solution approximée $x_N(t)$ avec une précision souhaitée dépend de l'horizon de contrôle N_c . Généralement, la prédiction est effectuée en supposant un petit horizon de contrôle, en particulier pour les systèmes dynamiques rapides, donc peu d'itérations sont suffisantes pour obtenir une solution approximée précise.

4.2.1 Algorithme de l'approche proposée

Les étapes de l'approche proposée pour la résolution du contrôle prédictif basé sur VIM sont illustrées par la Figure 4.1, pour un horizon de contrôle $N_c = 2$ qui sont résumés dans l'algorithme suivant :

1. obtenir la mesure actuelle x_i et calculer la valeur de la référence désirée $x_{i+N_c}^d$, c'est-à-dire, $x^d(t_i + \Delta t N_c)$,
2. résoudre le système d'équations algébriques (4.16) et (4.17),
3. calculer la dérivée de la trajectoire optimale en utilisant l'équation (4.15),
4. calculer le contrôle optimal $u^*(t_i)$ en utilisant (4.19),
5. appliquer le contrôle optimal $u^*(t_i)$ au système dynamique sur la période d'échantillonnage $[t_i, t_{i+1}]$ et aller à l'étape 1.

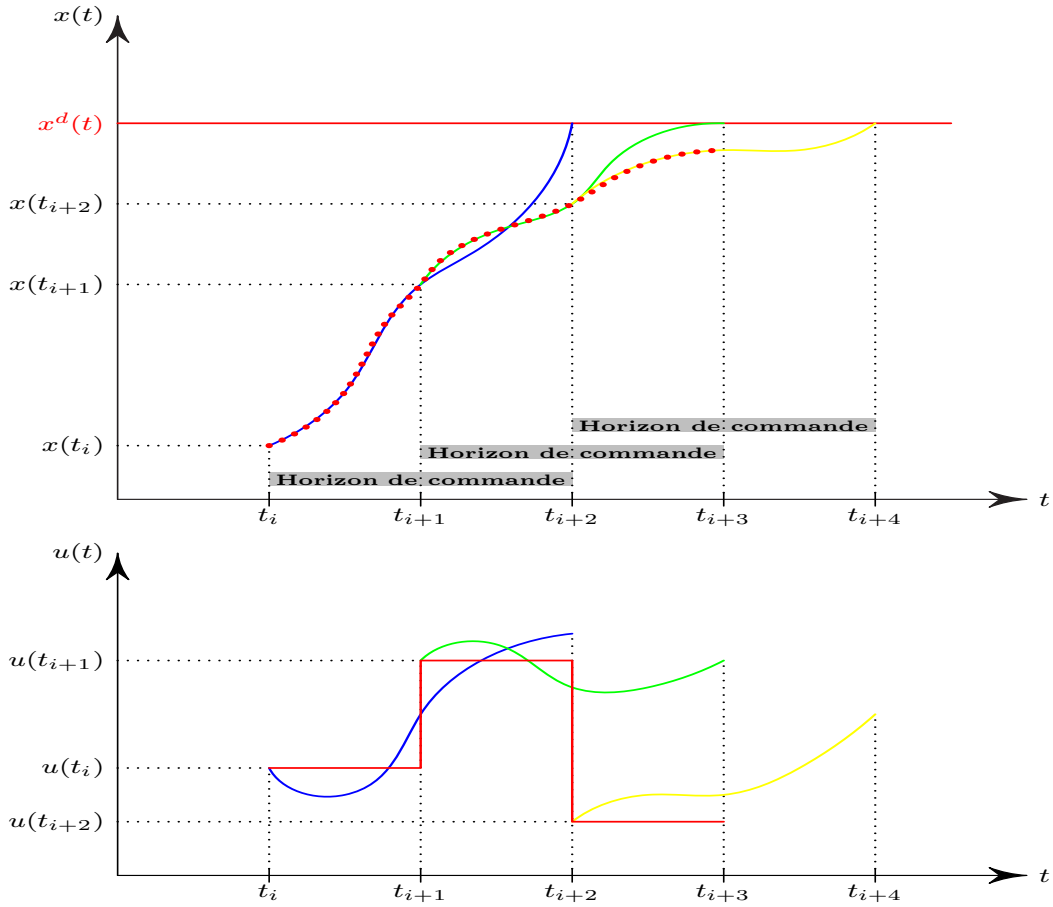


FIG. 4.1: Contrôle à horizon glissant basé sur VIM. Les lignes bleues, vertes et jaunes sont les profils optimaux (en haut : l'état $x(t)$, en bas : le contrôle $u(t)$) obtenus sur un horizon de contrôle. Haut : le rouge et les lignes rouges en pointillés sont la référence souhaitée $x^d(t)$ et la trajectoire optimale $x^*(t)$, respectivement. En bas : la ligne rouge est le contrôle optimal appliqué $u^*(t)$.

Remarque 4.3.

Dans l'approche proposée, à chaque temps d'échantillonnage t_i , il faut résoudre le système d'équations algébriques (4.16) et (4.17) au lieu d'un problème d'optimisation comme dans le contrôle à l'horizon fuyant basé sur les méthodes directes [49, 116].

Remarque 4.4.

Dans le cas de plusieurs solutions à l'étape 2, nous retenons la solution qui correspond au minimum global de l'indice de performance (4.10). Cela permet d'obtenir la solution globale, ce qui améliore les performances et garantit la stabilité.

4.3 Exemples d'application

Exemple 1

Considérons le problème de contrôle optimal non linéaire suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^d(t) - x(t))^2 + u(t)^2 dt, \quad (4.20)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = -0.25\sqrt{x(t)} + u(t) + d(t), \quad (4.21)$$

$$x(0) = 0. \quad (4.22)$$

où $x(t)$, $u(t)$ et $d(t)$ sont respectivement l'état, le contrôle et la perturbation. Pour déterminer le système d'équations algébriques à résoudre à chaque temps d'échantillonnage, la perturbation $d(t)$ est supposée nulle. Pour appliquer le contrôle à l'horizon fuyant en suivant l'approche proposée, le problème de contrôle optimal à temps fini à résoudre à chaque instant d'échantillonnage est donné comme suit

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t N_c} (x^d(t) - x(t))^2 + u(t)^2 dt, \quad (4.23)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = -0.25\sqrt{x(t)} + u(t), \quad (4.24)$$

$$x(t_i) = x_i \quad (4.25)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.26)$$

De l'équation (4.24), on obtient

$$u(t) = \dot{x}(t) + 0.25\sqrt{x(t)} \quad (4.27)$$

et en substituant (4.27) dans l'indice de performance (4.23), nous obtenons le problème variationnel suivant :

$$\min_{x(t)} \tilde{J}(x(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t N_c} (x^d(t) - x(t))^2 + (\dot{x}(t) + 0.25\sqrt{x(t)})^2 dt, \quad (4.28)$$

sous les contraintes

$$x(t_i) = x_i \quad (4.29)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.30)$$

L'application de l'équation d'Euler-Lagrange (4.13) à la fonctionnelle (4.28) donne la condition d'optimalité suivante :

$$\ddot{x}(t) - x(t) + x^d(t) - \frac{1}{32} = 0 \quad (4.31)$$

avec les conditions aux limites associées

$$x(t_i) = x_i \quad (4.32)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.33)$$

Ensuite, en appliquant VIM, présenté dans le chapitre 3, une solution approximée de l'équation (4.31) peut être obtenue en utilisant la fonctionnelle de correction (3.10), c'est-à-dire :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(s) \left(\ddot{x}_k(s) - x_k(s) + x^d(s) - \frac{1}{32} \right) ds \quad (4.34)$$

avec $\lambda(s) = s - t$ (voir chapitre 3 pour la détermination du multiplicateur de Lagrange).

Pour illustrer l'approche de contrôle à l'horizon fuyant proposée, supposons le cas d'une référence désirée constante, c'est-à-dire $x^d(t) = c$. En supposant que la solution initiale $x_0(t) = at + b$ et après $N = 2$ itérations, la fonctionnelle de correction (4.34) donne la solution approximée de l'équation d'Euler-Lagrange (4.31) comme suit

$$\begin{aligned} x(t) \approx x_2(t) &= \frac{a}{120}t^5 + \left(\frac{b}{24} - \frac{c}{24} + \frac{1}{768} \right) t^4 + \frac{a}{6}t^3 \\ &+ \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{64} \right) t^2 + at + b \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec une tolérance $\epsilon = 10^{-3}$.

Puis en imposant les conditions aux limites (4.32) et (4.33), nous obtenons le système d'équations algébriques suivant, à résoudre à chaque instant d'échantillonnage,

$$\frac{a}{120}t_i^5 + \xi_1(b, c)t_i^4 + \frac{a}{6}t_i^2 + \xi_2(b, c)t_i^2 + a t_i + b = x_i \quad (4.36)$$

$$\frac{a}{120}t_{i+N_c}^5 + \xi_1(b, c)t_{i+N_c}^4 + \frac{a}{6}t_{i+N_c}^2 + \xi_2(b, c)t_{i+N_c}^2 + a t_{i+N_c} + b = c \quad (4.37)$$

avec

$$\xi_1(b, c) = \frac{b}{24} - \frac{c}{24} + \frac{1}{768} \quad (4.38)$$

$$\xi_2(b, c) = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{64} \quad (4.39)$$

qui peut être réécrit sous la forme suivante

$$\chi_1(t_i)a + \chi_2(t_i)b = x_i + \left(\frac{c}{24} - \frac{1}{768}\right)t_i^4 + \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{64}\right)t_i^2 \quad (4.40)$$

$$\chi_1(t_{i+N_c})a + \chi_2(t_{i+N_c})b = c + \left(\frac{c}{24} - \frac{1}{768}\right)t_{i+N_c}^4 + \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{64}\right)t_{i+N_c}^2 \quad (4.41)$$

avec

$$\chi_1(t) = \frac{t^5}{120} + \frac{t^3}{6} + t \quad (4.42)$$

$$\chi_2(t) = \frac{t^4}{24} + \frac{t^2}{2} + 1 \quad (4.43)$$

La solution de ce système d'équations algébriques donne les paramètres a et b qui minimisent (4.28). En substituant les valeurs obtenues des paramètres a et b dans (4.15), nous obtenons la trajectoire optimale $x^*(t) \approx x_2^*(t)$ et le contrôle optimal résulte de (4.27), c'est-à-dire

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + 0.25\sqrt{x^*(t)} \quad (4.44)$$

et seul le contrôle par morceaux $u^*(t_i)$ est appliqué sur la période d'échantillonnage $[t_i, t_{i+1}]$.

Par exemple, supposons que $x^d(t) = c = 2$ et $\Delta t = 0.1$, et calculons le contrôle optimal à appliquer au système à $t_0 = 0$, c'est-à-dire le contrôle par morceaux $u^*(0)$ à appliquer sur la période d'échantillonnage $[0, 0.1]$. Selon la condition initiale (4.22), nous avons $x_0 = x(t_0 = 0) = 0$. Maintenant, en fixant $i = 0$ dans les équations (4.40) et (4.41), nous obtenons le système d'équations algébriques suivant

$$\begin{cases} b = 0 \\ 0.52109 a + 1.1276 b - 2.25122 = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

qui a pour solution $a = 4.32018$ et $b = 0$. En substituant les valeurs obtenues de a et b et la valeur de c dans l'équation (4.35), nous obtenons la trajectoire optimale approximée suivante

$$x^*(t) \approx x_2(t) = 0.036 t^5 - 0.08203 t^4 + 0.72003 t^3 - 0.98438 t^2 + 4.32018 t \quad (4.46)$$

et

$$\dot{x}^*(t) \approx \dot{x}_2(t) = 0.18001 t^4 - 0.32813 t^3 + 2.160091 t^2 - 1.96875 t + 4.32018 \quad (4.47)$$

donc pour $t = t_0 = 0$, nous obtenons

$$x^*(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}^*(0) = 4.32018 \quad (4.48)$$

et l'équation (4.44) donne le contrôle optimal suivant

$$u^*(0) = 4.32018 \quad (4.49)$$

qui est appliqué au système sur la période d'échantillonnage $[0, 0.1]$, et ce processus de calcul est répété aux instants d'échantillonnage suivants $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.2$ et ainsi de suite.

Les résultats de simulation obtenus pour $x^d(t) = 2$ avec une perturbation $d(t) = -2$

appliquée à $t = 5$ sont donnés par la Figure 4.2. La valeur du contrôle optimal $u^*(0)$ donnée par l'équation (4.49) est indiquée en rouge sur la Figure 4.2. Il est clair que, les résultats obtenus montrent que l'état $x(t)$ atteint la consigne désirée $x^d(t)$ et l'effet de la perturbation est parfaitement rejeté.

Pour réévaluer les performances de l'approche de contrôle à l'horizon fuyant proposée, des simulations sont effectuées en supposant trois profils pour la référence désirée $x^d(t)$ donnés comme suit :

- Cas 1 :

$$x^d(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t < 5 \\ 3 & \text{si } t \geq 5 \end{cases} \quad (4.50)$$

- Case 2 : $x(0) = 3$, $x^d(t) = t$ et à $t = 5$ une perturbation $d(t) = 5$ est appliquée au système.
- Cas 3 : $x(0) = 1$, $x^d(t) = \sin^2(t)$ et à $t = 3$ le système est perturbé en imposant une perturbation $d(t) = 20$. Notez que, dans ce cas, la référence désirée $x^d(t)$ est une fonction non linéaire qui présente une variation rapide, la période d'échantillonnage est prise égale à 0.01.

Le système d'équations algébriques à résoudre, à chaque temps d'échantillonnage, est donné comme suit :

- Cas 1 : Équations (4.40) et (4.41).

- Cas 2 :

$$\chi_1(t_i)a + \chi_2(t_i)b = x_i + \frac{t_i^5}{120} - \frac{t_i^4}{768} + \frac{t_i^3}{6} - \frac{t_i^2}{24} \quad (4.51)$$

$$\chi_1(t_i)a + \chi_2(t_i)b = t_{i+N_c} + \frac{t_{i+N_c}^5}{120} - \frac{t_{i+N_c}^4}{768} + \frac{t_{i+N_c}^3}{6} - \frac{t_{i+N_c}^2}{24} \quad (4.52)$$

- Cas 3 :

$$\chi_1(t_i)a + \chi_2(t_i)b = x_i - \frac{t_i^4}{768} + \frac{t_i^3}{6} - \frac{t_i^2}{24} \quad (4.53)$$

$$\chi_1(t_i)a + \chi_2(t_i)b = \sin^2(t_{i+N_c}) - \frac{t_{i+N_c}^4}{768} + \frac{t_{i+N_c}^3}{6} - \frac{t_{i+N_c}^2}{24} \quad (4.54)$$

Les fonctions $\chi_1(t)$ et $\chi_2(t)$ sont données respectivement par les équations (4.42) et (4.43).

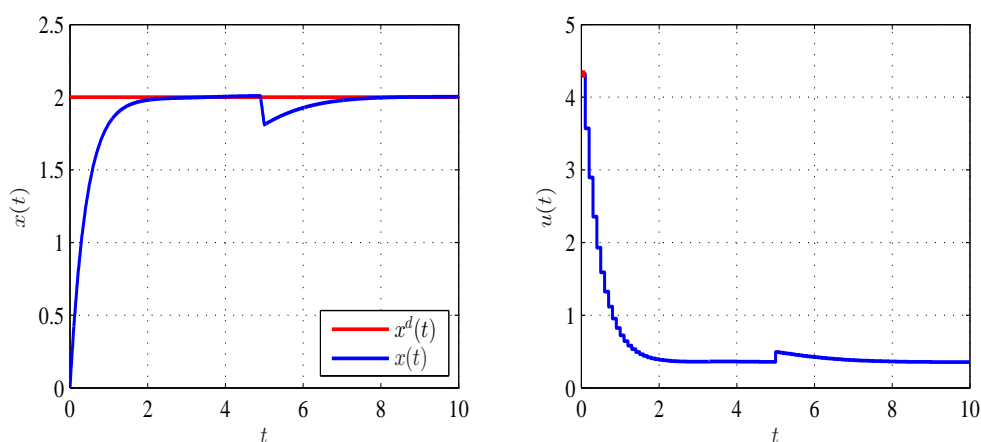


FIG. 4.2: Exemple 1 (cas 1) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

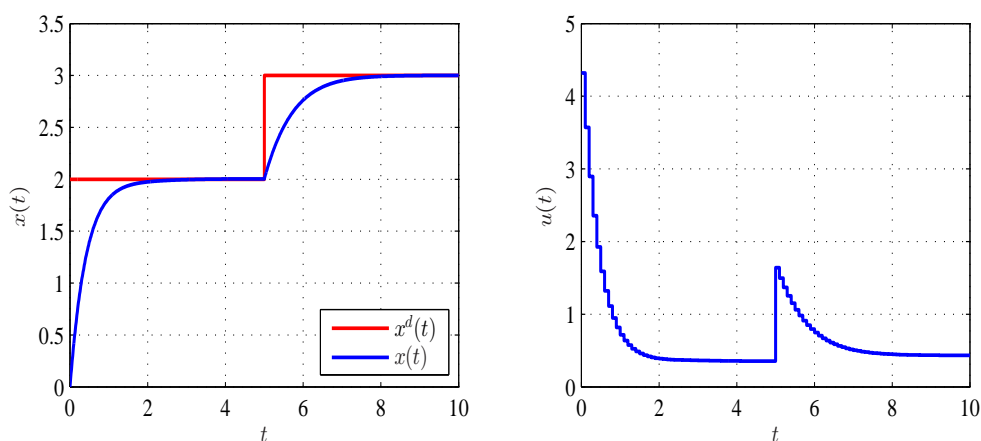


FIG. 4.3: Exemple 1 : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

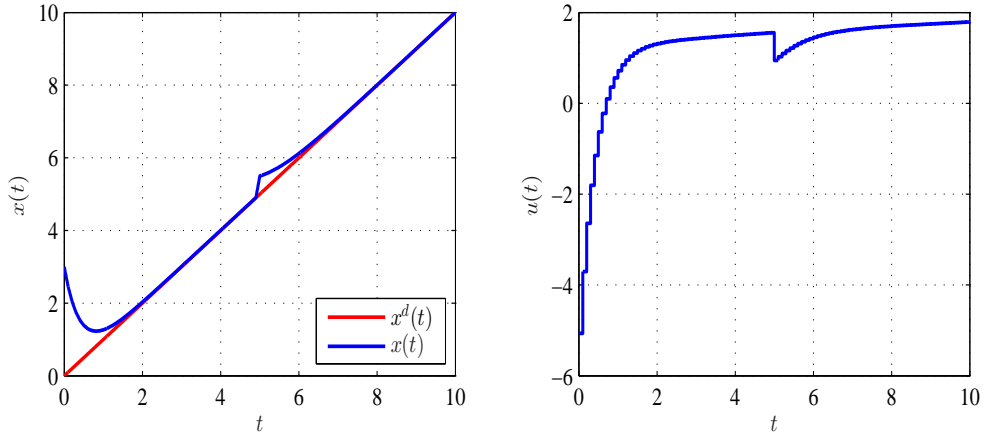


FIG. 4.4: Exemple 1 (cas 2) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

Les résultats de simulation obtenus donnés par les Figures 4.2 à 4.5 montrent à la fois le suivi des références et les capacités de rejet des perturbations de l'approche de contrôle à l'horizon fuyant proposée.

Exemple 2

On considère le problème de contrôle optimal non linéaire suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^d(t) - x(t))^2 + u(t)^2 dt, \quad (4.55)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = -2 e^{-2 x(t)} + u(t) + d(t), \quad (4.56)$$

$$x(0) = 0. \quad (4.57)$$

Le problème de contrôle optimal à résoudre à chaque temps d'échantillonnage est :

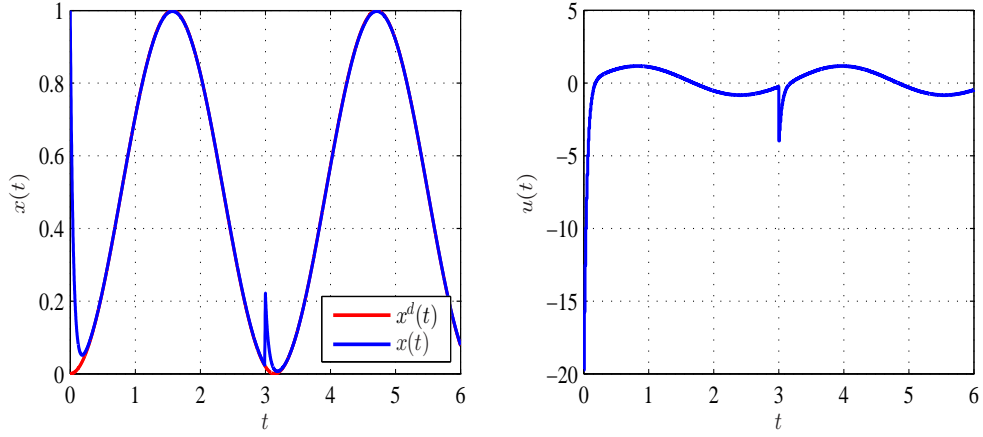


FIG. 4.5: Exemple 1 (cas 3) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t N_c} (x^d(t) - x(t))^2 + u(t)^2 dt, \quad (4.58)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = -2 e^{-2 x(t)} + u(t) + d(t), \quad (4.59)$$

$$x(t_i) = x_i \quad (4.60)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.61)$$

Le problème variationnel obtenu en substituant $u(t)$ résultant de (4.59) est le suivant :

$$\min_{x(t)} \tilde{J}(x(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t N_c} (x^d(t) - x(t))^2 + (\dot{x}(t) + 2 e^{-2 x(t)})^2 dt, \quad (4.62)$$

sous les contraintes

$$x(t_i) = x_i \quad (4.63)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.64)$$

La condition d'optimalité correspondante, c'est-à-dire l'équation d'Euler-Lagrange (4.13) avec leurs conditions aux limites associées, est donnée comme suit

$$\ddot{x}(t) + 8e^{-4x(t)} - x(t) + x^d(t) = 0 \quad (4.65)$$

$$x(t_i) = x_i \quad (4.66)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.67)$$

Une solution approchée de l'équation (4.65) peut être obtenue en utilisant la fonctionnelle de correction suivante :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(s) (\ddot{x}_k(s) + 8e^{-4x_k(s)} - x_k(s) + x^d(s)) ds \quad (4.68)$$

avec $\lambda(s) = s - t$.

En supposant que $x^d(t) = c$ et on choisissant la solution initiale $x_0(t) = at + b$, après $N = 1$ itération, la fonctionnelle de correction (4.68) donne la solution approximée suivante :

$$x(t) \approx x_1(t) = \frac{a}{6} t^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right) t^2 + \left(a - \frac{2e^{-4b}}{a}\right) t - \frac{e^{-4(b+at)}}{2a^2} + \frac{e^{-4b}}{2a^2} + b \quad (4.69)$$

avec une tolérance $\epsilon = 10^{-3}$.

Le système d'équations algébriques à résoudre à chaque instant d'échantillonnage en imposant les conditions aux limites (4.66)-(4.67) est donné par :

$$\frac{a}{6} t_i^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right) t_i^2 + \left(a - \frac{2e^{-4b}}{a}\right) t_i - \frac{e^{-4(b+at_i)}}{2a^2} + \frac{e^{-4b}}{2a^2} + b = x_i \quad (4.70)$$

$$\frac{a}{6} t_{i+N_c}^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right) t_{i+N_c}^2 + \left(a - \frac{2e^{-4b}}{a}\right) t_{i+N_c} - \frac{e^{-4(b+at_{i+N_c})}}{2a^2} + \frac{e^{-4b}}{2a^2} + b = c \quad (4.71)$$

La résolution des équations (4.70)-(4.71) donne les paramètres a et b qui minimisent (4.58). En substituant les paramètres a et b dans (4.15), nous obtenons la trajectoire optimale $x^*(t) \approx x_1^*(t)$ et le contrôle optimal résultant de (4.59), c'est-à-dire

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + 2 e^{-2x^*(t)} \quad (4.72)$$

et seul le contrôle par morceaux $u^*(t_i)$ est appliqué sur la période d'échantillonnage $[t_i, t_{i+1}]$. Les simulations concernent les cas suivants :

- Cas 1 : $\Delta t = 0.1$, $x^d(t) = c = 1$ et à $t = 0.5$, $d(t) = 5$
- Cas 2 : $\Delta t = 0.01$, $x^d(t) = c = \sin(t)$ et à $t = 5$, $d(t) = 20$ avec $x(0) = 1$

Remarque 4.5.

Notons que, dans les deux cas, initialement la perturbation $d(t) = 0$ et la solution approximée de l'équation d'Euler-Lagrange (4.65), obtenue par la fonctionnelle de correction (3.10), est obtenue en effectuant une itération ($N = 1$).

À partir des résultats de simulation obtenus, illustrés par les Figures 4.6 et 4.7, nous observons que l'approche proposée pour le contrôle à l'horizon fuyant est efficace car les problèmes de poursuite et de régulation sont réalisés de manière satisfaisante.

4.4 Résolution par le principe du minimum

Dans cette section, nous proposons de résoudre le problème de contrôle optimal (4.1)-(4.3) en utilisant le principe minimum (méthode indirecte), c'est-à-dire de résoudre

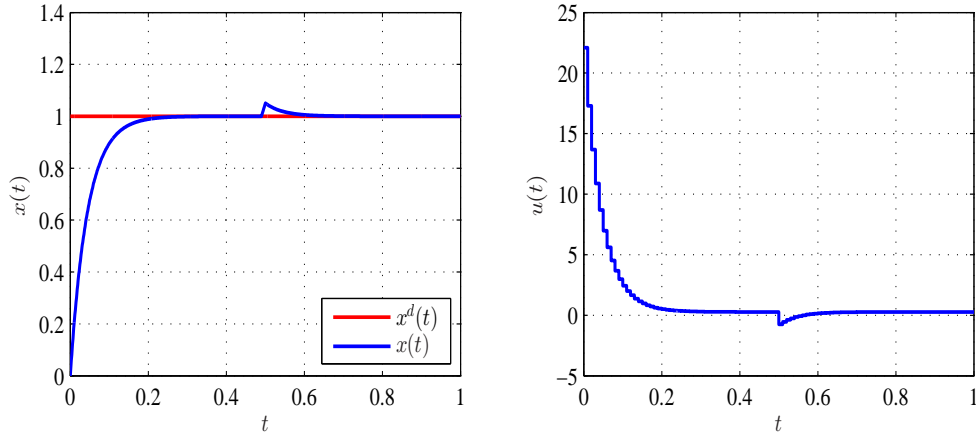


FIG. 4.6: Exemple 2 (cas 1) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

les conditions d'optimalité suivantes :

$$\dot{x}(t) = \nabla_{p(t)} H(x(t), p(t), u(t), t) \quad (4.73)$$

$$\dot{p}(t) = -\nabla_{x(t)} H(x(t), p(t), u(t), t) \quad (4.74)$$

en utilisant VIM, c'est-à-dire, la fonctionnelle de correction (3.10) avec H est le Hamiltonien défini comme suit :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), u(t), x^d(t), t) &= (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u(t)^T R u(t) \\ &+ p^T(t) f(x(t), u(t), t), \end{aligned} \quad (4.75)$$

et la loi du contrôle qui minimise le Hamiltonien H est donnée par

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), p(t), u(t), x^d(t), t) = 0 \quad (4.76)$$

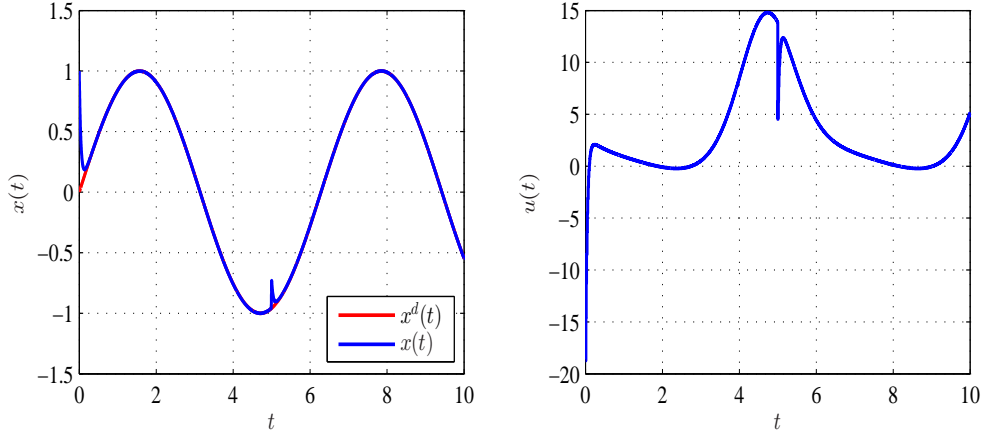


FIG. 4.7: Exemple 2 (cas 2) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

En effet, à chaque instant d'échantillonnage t_i , une loi de contrôle optimal $u_i^*(t)$ est déterminée en résolvant les équations de Hamilton-Pontryagin (4.73)-(4.74) avec les conditions aux limites suivantes :

$$x(t_i) = x_i \quad (4.77)$$

$$x(t_i + \Delta t N_c) = x_{i+N_c}^d \quad (4.78)$$

Pour résoudre les équations de Hamilton-Pontryagin (4.73)-(4.74) et approcher le problème (4.1)-(4.3) avec la méthode de l'itération variationnelle, nous écrivons les fonctionnelles de correction correspondantes aux équations (4.73)-(4.74) comme suit [7, 179] :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda_x(s) (\dot{x}_k(s) - \nabla_{p(s)} H^*(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s)) ds \quad (4.79)$$

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) + \int_0^t \lambda_p(s) (\dot{p}_k(s) - \nabla_{x(s)} H^*(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s)) ds \quad (4.80)$$

où $\lambda_x(s) = [\lambda_{x_1}(s), \lambda_{x_2}(s), \dots, \lambda_{x_n}(s)]^T$ et $\lambda_p(s) = [\lambda_{p_1}(s), \lambda_{p_2}(s), \dots, \lambda_{p_n}(s)]^T$, où $\lambda_{x_i}(s)$ et $\lambda_{p_i}(s)$ ($i = 1, \dots, n$) sont les multiplicateurs de Lagrange qui valent

$$\lambda_{x_i}(s) = \lambda_{p_i}(s) = -1 \quad (4.81)$$

avec

$$H^*(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s) = H(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s) \Big|_{u(t)=\phi(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s)} \cdot \quad (4.82)$$

En remplaçant les valeurs des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{x_i}(s)$ et $\lambda_{p_i}(s)$ dans les fonctionnelles de corrections (4.79)-(4.80), nous obtenons les formules itératives suivantes :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) - \int_0^t (\dot{x}_k(s) - \nabla_{p(s)} H^*(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s)) ds \quad (4.83)$$

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) - \int_0^t (\dot{p}_k(s) - \nabla_{x(s)} H^*(x_k(s), p_k(s), x^d(s), s)) ds \quad (4.84)$$

Pour démarrer le processus itératif (4.83)-(4.84), nous devons d'abord avoir une approximation initiale $x_0(t)$ et $p_0(t)$. Ces dernières peuvent être choisies comme des fonctions à paramètres inconnus qui peuvent être identifiés en imposant les conditions aux limites (4.78). En supposant que $x_0(t) = x_i$ et $p_0(t) = p_i$, une solution analytique approchée (4.83)-(4.84) peut être obtenue sous la forme suivante

$$x(t) \approx x_N(t) = f_x(x_i, p_i, t) \quad (4.85)$$

$$p(t) \approx p_N(t) = f_p(x_i, p_i, t) \quad (4.86)$$

où f_x et f_p sont des fonctions vectorielles. Notez que la variable x_i est connue et représente la mesure actuelle tandis que $p_i \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur inconnu de paramètres à déterminer comme expliqué ci-dessous. Notez que les solutions approximées $x_N(t)$ et $p_N(t)$ peuvent être obtenues hors ligne en utilisant un langage de programmation symbolique.

Maintenant, en imposant la condition aux limites (4.78), nous obtenons le système d'équations algébriques suivant

$$h_x(x_i, p_i, t_{i+N_c}) = x^d(t_{i+N_c}) \quad (4.87)$$

et sa résolution donne le vecteur inconnu p_i . Dans ce qui suit, cette solution est notée p_i^* et les trajectoires optimales correspondantes sont

$$x^*(t) = h_x(x_i, p_i^*, t) \quad (4.88)$$

et

$$p^*(t) = h_p(x_i, p_i^*, t). \quad (4.89)$$

4.4.1 Algorithme de l'approche proposée

L'approche de contrôle à horizon glissant proposée est résumée comme suit :

1. obtenir la mesure actuelle $x(t_i) = x_i$,
2. résoudre le système d'équations algébriques (4.87) pour obtenir p_i^* ,
3. calculer les valeurs des trajectoires de contrôle optimales $x^*(t)$ et $p^*(t)$ au temps d'échantillonnage t_i , c'est-à-dire $x^*(t_i)$ et $p^*(t_i)$,
4. calculez le contrôle optimal $u^*(t_i)$ à appliquer au système dynamique en utilisant l'équation (4.76).

Ces quatre étapes sont répétées à chaque instant d'échantillonnage t_i .

4.4.2 Exemple d'application

Exemple

Considérons le problème de contrôle prédictif suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{\infty} (x^d(t) - x(t))^2 + u(t)^2 dt, \quad (4.90)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = (e^{-2t} + 1) x(t) + u(t) + d(t), \quad (4.91)$$

$$x(0) = 0. \quad (4.92)$$

Le problème de contrôle optimal à temps fini à résoudre à chaque instant d'échantillonnage est donné comme suit

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} (x^d(t) - x(t))^2 + u(t)^2 dt, \quad (4.93)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = (e^{-2t} + 1) x(t) + u(t) + d(t), \quad (4.94)$$

$$x(t_i) = x_i \quad (4.95)$$

$$x(t_i + \Delta t) = x_{i+N_c}^d \quad (4.96)$$

En supposant que la perturbation $d(t) = 0$, le principe du minimum donne la loi de contrôle optimal suivant :

$$u^*(t) = -\frac{p(t)}{2} \quad (4.97)$$

et le vecteur des variables adjointes $p(t)$ est déterminé en résolvant les conditions d'optimalité suivantes (équations de Hamilton-Pontryagin) :

$$\dot{x}(t) = (e^{-2t} + 1) x(t) - \frac{p(t)}{2} \quad (4.98)$$

$$\dot{p}(t) = -(e^{-2t} + 1) p(t) + 2 (x^d(t) - x(t)) \quad (4.99)$$

Une solution approximée des équations (4.98)-(4.99) peut être obtenue en utilisant les fonctionnelles de correction (3.10) comme suit :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda_x(s) \left(\dot{x}_k(s) - (e^{-2s} + 1) x_k(s) + \frac{p_k(s)}{2} \right) ds \quad (4.100)$$

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) + \int_0^t \lambda_p(s) \left(\dot{p}_k(s) + (e^{-2s} + 1) p_k(s) - 2 (x^d(s) - x_k(s)) \right) ds \quad (4.101)$$

avec $\lambda_x(s) = \lambda_p(s) = -1$. En remplaçant ces valeurs dans les fonctionnelles de corrections (4.100)-(4.101), nous obtenons les formules itératives suivantes :

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) - \int_0^t \left(\dot{x}_k(s) - (e^{-2s} + 1) x_k(s) + \frac{p_k(s)}{2} \right) ds \quad (4.102)$$

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) - \int_0^t \left(\dot{p}_k(s) + (e^{-2s} + 1) p_k(s) - 2 (x^d(s) - x_k(s)) \right) ds \quad (4.103)$$

avec une approximation initiale $x_0(t) = x_i$ et $p_0(t) = p_i$.

L'approche proposée résumée à la fin de cette section est mise en œuvre pour résoudre le contrôle prédictif. Les performances de poursuite et de régulation sont évaluées par simulation numérique pour trois profils de la référence désirée $x^d(t)$ définie comme suit :

1. $x^d(t) = 6$,
2. $x^d(t) = t$,
3. $x^d(t) = \sin(t)$.

Dans tous les cas, une impulsion de magnitude $d(t) = 2$ est appliquée à $t = 3$ comme perturbation.

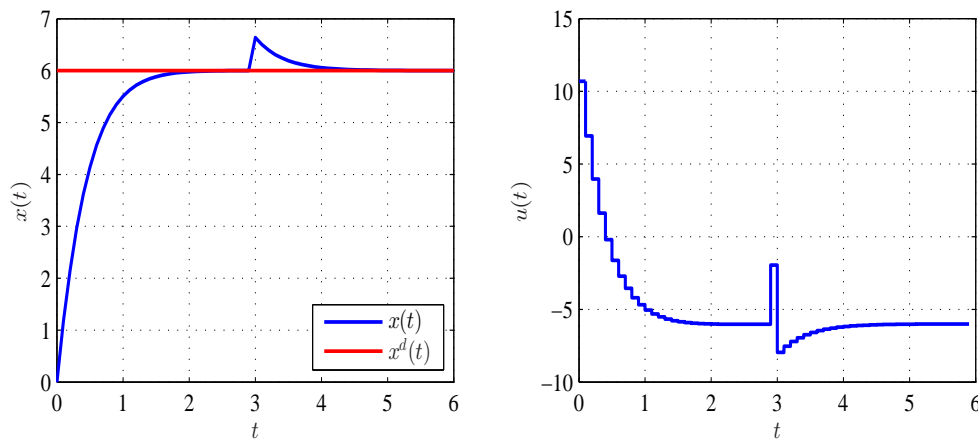


FIG. 4.8: Exemple (cas 1) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

Les résultats obtenus (Figures. 4.8-4.10) montrent clairement l'efficacité de l'approche proposée. On peut voir que le contrôleur prédictif proposé assure le suivi et rejette complètement l'effet de la perturbation. Les variations du contrôle $u^*(t)$ sont aussi acceptables.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche de contrôle prédictif basée sur la méthode de l'itération variationnelle. Le principe de cette approche consiste à résoudre, à

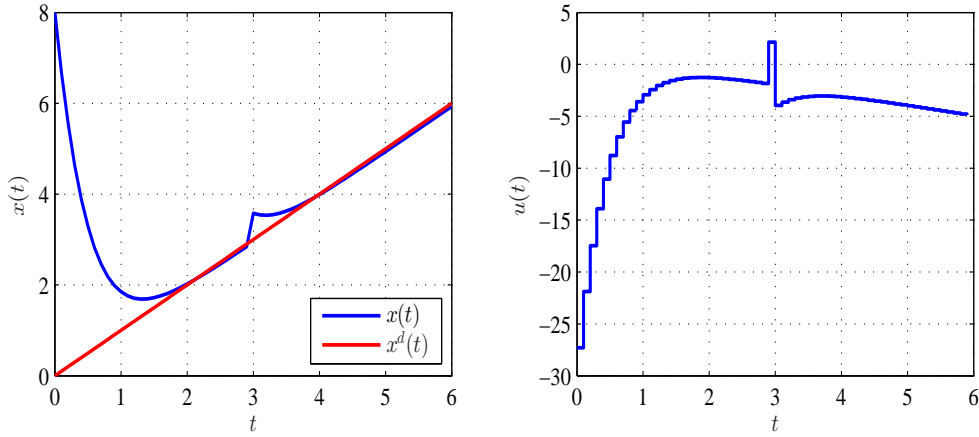


FIG. 4.9: Exemple (cas 2) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

chaque instant d'échantillonnage, un système d'équations algébriques au lieu d'un problème d'optimisation. Cet ensemble d'équations algébriques est obtenu hors ligne en résolvant, à l'aide d'une fonctionnelle de correction, les conditions d'optimalité (équation d'Euler-Lagrange ou équation d'Hamilton-Pontryagin) d'un problème de contrôle optimal formulé sur un horizon de contrôle et en imposant ses conditions aux limites associées. Une fois les équations algébriques résolues, les trajectoires optimales de l'état et du contrôle sont facilement calculées. Ensuite, seule la valeur du contrôle optimal au temps d'échantillonnage actuel est appliquée au système dynamique sur une période d'échantillonnage. Le processus de résolution du système d'équations algébriques est répété au prochain temps d'échantillonnage en supposant les nouvelles conditions aux limites résultantes. Les performances de poursuite et de rejet des perturbations par l'approche proposée sont évaluées par simulation numérique.

Comparativement aux travaux reportés dans la littérature, dans le cadre de la résolution du problème de contrôle prédictif, les scientifiques se sont basés sur la recherche et le développement des algorithmes d'optimisation globale qui doivent être convergents et rapides vu que la résolution du contrôle optimal sur un horizon de prédiction est limitée par la période d'échantillonnage ; c'est-à-dire la résolution du problème d'optimisation sur un horizon de prédiction doit être inférieure ou égale à la période d'échantillonnage. La plupart des algorithmes d'optimisation nécessitent une estimation initiale qui peut converger vers une solution locale ce qui influe les performances en boucle fermée et la stabilité. Aussi les contributions se sont focalisées sur l'approximation des conditions d'optimalité en utilisant des méthodes numériques, mais ces méthodes restent moins précises et numériquement

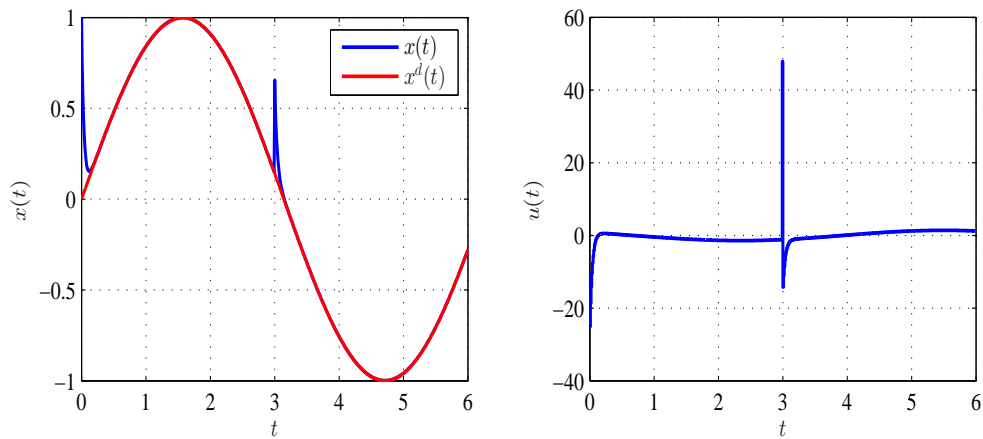


FIG. 4.10: Exemple (cas 3) : Trajectoires optimales de l'état $x(t)$ et du contrôle $u(t)$.

instables, elles ne sont pas efficaces pour les systèmes d'équations différentielles avec une dynamique rapide et lente. Ceci a motivé le travail réalisé dans cette thèse pour développer une approche qui nous permet de résoudre à chaque instant d'échantillonnage, un système d'équations algébriques au lieu d'un problème d'optimisation et sans passer par aucune approximation préalable.

Conclusion générale

Le problème que nous avons abordé dans de cette thèse s'inscrit dans le cadre de contrôle prédictif des systèmes non linéaires. Dans un contrôle prédictif, un problème d'optimisation est résolu en ligne pour déterminer la séquence de contrôle à appliquer au système à contrôler. Lorsque le système à contrôler est non linéaire, le problème d'optimisation à résoudre est de nature aussi non linéaire. Ainsi, la résolution de ce problème d'optimisation nécessite l'utilisation d'algorithmes très puissants (déterministes, stochastiques ou hybrides) permettant de localiser la solution en un temps inférieur à la période d'échantillonnage. Si cette contrainte de temps de convergence peut être satisfaite pour les systèmes à dynamique lente, pour les systèmes non linéaires dont la dynamique est rapide, le problème reste ouvert et constitue un axe de recherche actif. Ainsi, le travail de recherche réalisé dans le cadre de cette thèse constitue une contribution au contrôle prédictif non linéaire à dynamique rapide. L'idée principale consiste à remplacer le processus d'optimisation par la résolution d'un système d'équations algébriques.

Après avoir introduit des généralités sur le contrôle optimal des systèmes dynamiques, le principe et les différents éléments du contrôle prédictif ont été présentés. Par la suite, nous avons exposé la méthode de l'itération variationnelle utilisée pour la résolution des équations différentielles ordinaires. Puis, nous avons proposé une variante de contrôle prédictif pour les systèmes non linéaires basée sur la méthode de l'itération variationnelle.

La plupart des travaux rapportés dans la littérature utilisent des méthodes d'optimisation globale pour la résolution du problème de contrôle prédictif. Bien que ces méthodes globales améliorent les performances en boucle fermée, leur application reste limitée aux systèmes à dynamiques lentes. Pour les systèmes à dynamiques rapides, la solution optimale n'est pas toujours garantie et atteignables en un temps qui ne dépasse pas la période d'échantillonnage. Ceci a inspiré le travail réalisé dans cette thèse pour concevoir une méthode de résolution du problème de contrôle prédictif sans l'utilisation de méthodes

d'optimisation.

Comme la séquence de contrôle optimal doit être disponible en un temps inférieur ou égal à une période d'échantillonnage, nous avons opté pour des méthodes indirectes qui sont le calcul des variations (équation Euler-Lagrange) et le principe du minimum de Pontryagin. Ces deux approches représentent des outils mathématiques très efficaces pour résoudre les problèmes de contrôle optimal (optimisation dynamique) sur un horizon fini. En utilisant ces méthodes, des conditions d'optimalité exprimées par des équations différentielles peuvent être facilement obtenues pour le problème de contrôle optimal. Pour résoudre ces conditions d'optimalité, nous avons proposé d'utiliser une méthode itérative semi-analytique qui permet de résoudre, sans discrétisation ou linéarisation, les conditions d'optimalité. La méthode utilisée est la méthode de l'itération variationnelle.

Le principe de cette méthode consiste à utiliser une formule de correction (schéma itératif) pour déterminer la solution en partant d'une solution initiale à choisir avec des paramètres inconnus. Puis, à partir de cette solution initiale, on intègre les conditions d'optimalité en utilisant la méthode des itérations variationnelles sur l'horizon de contrôle. Ainsi, à chaque instant d'échantillonnage, un système d'équations algébriques est obtenu en imposant les conditions aux limites. La résolution de ce système d'équations algébriques permet d'identifier les paramètres inconnus de la solution initiale et d'obtenir la séquence de contrôle optimal. Si plusieurs solutions sont obtenues, on considère celle qui minimise le critère de performances considéré. Par conséquent, la solution globale est obtenue ce qui permet d'améliorer davantage les performances en boucle fermée performances (stabilité, poursuite de consigne et rejet de la perturbation). Rappelons qu'une fois la séquence de contrôle optimal est obtenue, seul le premier contrôle optimal est appliqué au système à contrôler. Puis, l'étape de résolution du système algébrique est répétée en considérant la nouvelle condition initiale (état actuel du système) jusqu'à ce que l'horizon de temps soit complètement parcouru.

Les performances de l'approche proposée ont confirmés par les résultats de simulation obtenus en considérant certains exemples d'applications. Les résultats obtenus démontrent clairement les capacités de poursuite et de rejet de perturbations de l'approche proposée.

Le contrôle prédictif des systèmes non linéaires à dynamiques rapides, reste un domaine de recherche peu exploité dans la littérature. Généralement, le problème de contrôle prédictif est résolu en utilisant des méthodes directes. Les méthodes indirectes sont rarement considérées malgré leur efficacité. De plus, la résolution d'un problème de contrôle prédictif d'un système non linéaire passe souvent par une approximation ou linéarisation ce qui limite le domaine de validité, par conséquent les performances en boucle fermée.

En résumé, les contributions de la présente thèse peuvent être résumées dans les points

suivants :

- une approche pour le contrôle prédictif d'un système non linéaire à dynamique rapides est proposée,
- le processus d'optimisation dans un contrôle prédictif est remplacé par la résolution d'un système d'équations algébriques,
- l'approche proposée fait partie des méthodes indirectes. Rappelons que ces méthodes sont très efficaces, néanmoins leur application dans le cadre d'un contrôle prédictif est très difficile. Ainsi, en utilisant la méthode de l'itération variationnelle, nous pouvons surmonter cette difficulté.

Les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse motivent l'exploration de certaines pistes intéressantes et prometteuses dans le cadre de contrôle prédictif basé sur la méthode de l'itération variationnelle. Parmi elles, nous pouvons citer :

- le contrôle des systèmes non linéaires avec contraintes sur l'état et le contrôle,
- le contrôle des systèmes à paramètres variants.
- l'utilisation d'autres méthodes semi-analytiques, par exemple la méthode d'Adomian [3] et la méthode de la perturbation homotopique [126].

Bibliographie

- [1] M.A. Abdoua. and A.A. Soliman. Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181 : 245–251, 2005.
- [2] E.M. Abulwafa., M.A. Abdou., and A.A. Mahmoud. The solution of nonlinear coagulation problem with mass loss. *Chaos Solitons Fractals*, 29 :313–330, 2006.
- [3] G. Adomian. *Stochastic systems*. Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [4] G. Adomian. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Academic Press, Inc., New York, 1986.
- [5] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics : the Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [6] E. Aggelogiannaki. and H. Sarimveis. A Simulated Annealing Algorithm for Prioritized Multiobjective Optimization—Implementation in an Adaptive Model Predictive Control Configuration. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B : Cybernetics*, 37(4), 2007.
- [7] A. Akkouche., A. Maldi., and M. Aidene. Optimal control of partial differential equation based on the variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 68(5) : 622-631, 2014.
- [8] H. Al-Duwaish. and W. Naeem. Nonlinear model predictive control of Hammerstein and Wiener models using genetic algorithms. *in Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01), Mexico City, Mexico*, 465–469, 2006.
- [9] M. Alamir. and F. Allgower. Proceedings of the first IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems NMPC-FS'06. 2006.

- [10] A.H.A. Ali. and K. R. Raslan. Variational iteration method for solving partial differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40 :1520-1529, 2009.
- [11] Y. Alothman. and D. Gu. Using Constrained Model Predictive Control to Control Two Quadrotors Transporting a Cable-Suspended Payload. *Proceedings of the 2018 13th World Congress on Intelligent Control and Automation, China*, 2018.
- [12] B.D.O. Anderson. and J. B. Moore. *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [13] G. B. Arfken., H. J. Weber., and F. E. Harris. *Mathematical Method for Physicists : A Comprehensive Guide, Seven Edition*. 2013.
- [14] U.M. Ascher., R.M.M. Mattheij., and R.D. Russell. *Numerical Solution of Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [15] M. Athans. and P.L. Falb. *Optimal Control : An Introduction to the Theory and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [16] E. Aydin., D. Bonvin., and K. Sundmacher. NMPC using Pontryagin’s Minimum Principle-Application to a two-phase semi-batch hydroformylation reactor under uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, 108 : 47–56, 2018.
- [17] M. Balhousse. *Commande prédictive expérimentale d’un modèle de cuisson de peinture en poudre par infrarouge*. Génie des procédés, dumas-00353473v2, 2007.
- [18] A. Banharnsakun., T. Achalakul., and B. Sirinaovakul. The Best-so-far Selection in Artificial Bee Colony Algorithm. *Applied Soft Computing*, 11 : 2888–2901, 2011.
- [19] D. Baocang. *Modern Predictive Control*. CRC Press, 2009.
- [20] B.M. Batiha., M. S. M. Noorani., I. Hashim., and K. Batiha. Numerical simulations of systems of PDEs by variational iteration method. *Physics Letters, A* 372(6) : 822-829, 2008.
- [21] M.S. Bazaraa., H. D. Sherali., and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms. 3 ed*. Wiley-Interscience, 2006.
- [22] R.W. Beard., G.N. Saridis., and J. T. Wen. Galerkin approximations of the generalized Hamilton–Jacobi–Bellman equation. *Automatica*, 33(12) : 2159–2177, 1997.
- [23] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

- [24] S. Berkani., F. Manseur., and A. Maldi. Optimal control based on the variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(4) : 604-610, 2012.
- [25] J.T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(2) :193-207, 1998.
- [26] J.T. Betts. *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Second edition, 2009.
- [27] L.T. Biegler. Solution of dynamic optimization problems by successive quadratic programming and orthogonal collocation. *Computers and Chemical Engineering*, 8(3-4) : 243-247, 1984.
- [28] L.T. Biegler. An overview of simultaneous strategies for dynamic optimization. *Chemical Engineering and Processing*, 46 : 1043-1053, 2007.
- [29] F. Biral., E. Bertolazzi., and P. Bosetti. Notes on Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems. *IEEJ Journal of Industry Applications*, 5(2) :154-166, 2015.
- [30] G. A. Bliss. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chicago, IL : University of Chicago Press, 1946.
- [31] H.G. Bock., M.M. Diehl., D.B. Leineweber., and J. P. Schlöder . A direct multiple shooting method for real-time optimization of nonlinear DAE processes. Nonlinear model predictive control (ascona, 1998). Basel : Birkhauser-Verlag. 245–267, 2000.
- [32] P.T. Boggs. and J.W. Tolle. *Sequential Quadratic Programming*. Acta numerica, 1996.
- [33] O.R. Boissel. and J. C. Kantor. Optimal Control for Discrete-Event Systems using Simulated Annealing. *Conference : American Control Conference*, 1993.
- [34] O.R. Boissel. and J.C. Kantor. Optimal Feedback Control Design for Discrete-Event Systems using Simulated Annealing. *Computers and Chemical Engineering*, 19(3) : 253-266, 1995.
- [35] I. Bombard., B. Da Silva., P. Dufour., P. Laurent., and J. Lieto. Contrôle par commande prédictive d'un procédé de cuisson sous infrarouge de peintures en poudre.
- [36] C.d. Boor. and B. Schwartz. Collocation at Gaussian Points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10 : 582–606, 1973.
- [37] P. Borne. and F. Rotella. *Commande optimale. In Traité Mesures et Contrôle (R 7427)*. Techniques de l'Ingénieur, Paris, 1996.

- [38] D. Bratsun., D. Volfson., L.S. Tsimring., and J. Hasty. Delayinduced stochastic oscillations in gene regulation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102(41) : 14593–14598, 2005.
- [39] J.V. Breakwell. The optimization of trajectories. *SIAM Journal*, 7 : 215-247, 1959.
- [40] P.M. Bruijn. and H. B. Verbruggen. Model Algorithmic Control (MAC) using impulse response models. *Automatica*, 67-74, 1984.
- [41] B.V. Brunt. *The Calculus of Variations*. Springer, New York, USA, 2004.
- [42] R.G. Bruschi. and R. H. Schappelle. Solution of highly constrained optimal control problems using nonlinear programming. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 11(2) : 135-136, 1973.
- [43] A.E. Bryson. and S.E. Ross. Optimum rocket trajectories with aerodynamic drag. *Jet Propulsion*, 1958.
- [44] R. Bulirsch. *Die Mehrzielmethode zur numerischen Losung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung, Report of the Carl-Cranz Gesellschaft, DLR, Oberpfaffenhofen*. 1971.
- [45] R. Callies. and R. Bulirsch. Optimale Flugbahn einer Raumsonde zum Planetoiden Vesta. *Jahrbuch der DGLR*, (11) : 895-904, 1990.
- [46] E. F Camacho. and C. Bordons. *Model Predictive Control in the Process Industry*. Springer, London, 1998.
- [47] E.F. Camacho. and C. Bordons Alba. *Model Predictive Control*. pringer-Verlag, London, 2007.
- [48] E.F. Camacho. and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer Berlin, 1999.
- [49] M. Cannon. Efficient nonlinear model predictive control algorithms. *Annual Reviews in Control*, 28(2)229-237, 2004.
- [50] M. Cannon., B. Kouvaritakis., Y.I. Lee., and A. C. Brooms. Efficient nonlinear predictive control. *International Journal of Control*, 74(4) : 361–372, 2001.
- [51] M. Cannon., W. Liao., and B. Kouvaritakis. Efficient MPC optimization using Pontryagin’s minimum principle. *Computers and Mathematics with Applications*, 18 : 831–844, 2008.
- [52] V. Cerny. A thermodynamic Approach to the Traveling Salesman Problem : An Efficient Simulation Algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45 : 41–51, 1985.

- [53] B. Chachuat. *Nonlinear and Dynamic Optimization : From Theory to Practice, Chapitre 1 : Nonlinear Programming*. Automatic Control Laboratory, EPFL, Switzerland, 2007.
- [54] S.M. Chen., A. Sarosh., and Y. F. Dong. Simulated Annealing Based Artificial Bee Colony Algorithm for Global Numerical Optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 219 : 3575–3589, 2012.
- [55] W.H. Chen., D. J. Ballance., and P.J. Gawthrop . Optimal control of nonlinear systems : a predictive control approach. *Automatica*, 39 : 633–641, 2003.
- [56] Y. Cherruault. A new method for global optimization (Alienor). *Kybernetes*, 19 : 19-32, 1989.
- [57] Y. Cherruault. New deterministic methods for global optimization and application to biomedicine. *International Journal of Bio-medical Computing*, 27(3-4) : 215-229, 1991.
- [58] Y. Cherruault. A new reducing transformation for global optimization (with Alienor method). *Kybernetes*, pages 34(7–8) :1084–1089, 2005.
- [59] Y. Cherruault. and A. Guillez. Une méthode pour la recherche du minimum global d'une fonctionnelle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série I. Mathématique*, 296 : 175-178, 1983.
- [60] K. Chudej., R. Bulirsch., and K.D. Reinsch. Optimal ascent and staging of a two-stage space vehicle system. *Jahrbuch der DGLR*, (I) :243-249, 1990.
- [61] D.W. Clarke., C. Mohtadi., and P. S. Tuffs. Generalized predictive control, part I : the basic algorithm. *Automatica*, 23 :137-148, 1987.
- [62] D.W. Clarke. and R. Scattolini. Constrained receding-horizon predictive control. *IEE proceedings. Part D. Control theory and applications*, 138(4) :347–354, 1991.
- [63] A. Coely. and al. Backlund and Darboux Transformations. *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, 2001.
- [64] B.A. Conway. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 152(2) :271-306, 2012.
- [65] J.M. Coron. *Control and nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.
- [66] J.-P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Paris, 2012.
- [67] J.P. Corriou. *Process Control, Theory and Applications*. Springer, London, 2004.
- [68] J-C. Culioli. *Introduction à l'optimisation*. Ellipses, France, 1994.

- [69] C.R. Culter. and B.L. Ramaker. Dynamic Matrix Control : A Computer Control Algorithm. *Proceedings of Automatic Control Conference, San Francisco, USA*, 1980.
- [70] J.W. Curtis. and R.W. Beard. Successive collocation : An approximation to optimal nonlinear control. *Proceedings of American Control Conference*, 3481–3485, 2001.
- [71] J.E. Cuthrell. and L. T. Biegler. On the optimization of differential-algebraic process systems. *AIChE Journal*, 33(8) : 1257-1270, 1987.
- [72] C.R. Cutler. and B.L. Ramaker. Dynamic Matrix Control—a computer control algorithm. *AIChE national meeting, Houston, TX*, 1119–1167, April 1979.
- [73] M. Dabo. *Commande Prédicative Généralisée Non Linéaire à Temps Continu Des Systèmes Complexes*. PhD thesis, 2010.
- [74] P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles. 3ème édition*. EDP SCIENCES, 2006.
- [75] M. Diehl., H. G. Bock., H. Diedam., and P. B. Wieber. Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control. *Fast Motions in Biomechanics and Robotics*, 340 : 65-93, 2006.
- [76] M. Diehl., H.G. Bock., J.P. Schlöder., R. Findeisen., Z. Nagy., and F. Allgöwer . Real-time optimization and nonlinear model predictive control of processes governed by differential-algebraic equations. *Journal of Process Control*, 12(4) : 577–585, 2002.
- [77] M. Diehl., H. J. Ferreau., and N. Haverbeke. Efficient Numerical Methods for Non-linear MPC and Moving Horizon Estimation.
- [78] P. Drag., K. Styczen., M. Kwiatkowska., and A. Szczurek. *A Review on the Direct and Indirect Methods for Solving Optimal Control Problems with Differential-Algebraic Constraints*. In : *Fidanova S. (eds) Recent Advances in Computational Optimization*, volume 610. Studies in Computational Intelligence, Springer, Cham, 2016.
- [79] A. Drud. CONOPT : a GRG code for large sparse dynamic nonlinear optimization problems. *Mathematical Programming*, 31 : 153–191, 1985.
- [80] P. Dufour. *Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres repartis non linéaires*. PhD thesis, 1996.
- [81] C. Durazzi. On the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming Problems. *Journal of optimization theory and applications*, 104(1) : 73-90, 2000.
- [82] P. Dyer. and S.R. McReynolds. *The Computation and Theory of Optimal Control*. Academic Press, New York, 1970.

- [83] R.C. Eberhardt. and J. A. Kennedy. A New Optimizer Using Particle Swarm Theory. *Proceedings of the Sixth International Symposium on Micromachine and Human Science, Nagoya, Japan*, 39-43, 1995.
- [84] A. Ebrahimzadeh. and R. Khanduzi. A directed tabu search method for solving controlled Volterra integral equations. *Mathematical Sciences*, 10 : 115–122, 2016.
- [85] R. Edwards., P. Van Den Driessche., and L. Wang. Periodicity in piecewise-linear switching networks with delay. *Journal of Mathematical Biology*, 55(2) : 271–298, 2007.
- [86] S. Effati. and S.H. Nik. Solving a class of linear and non-linear optimal control problems by homotopy perturbation method. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 28 : 539–553, 2011.
- [87] A.S. El-Bakry., R. A. Tapia., T. Tusuchiya., and Y. Zhang. On the Formulation and Theory of Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89 : 507–541, 1996.
- [88] N.H. El-Farra., P. Mhaskar., and P.D. Christofides . Hybrid predictive control of nonlinear systems : method and applications to chemical processes. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14 : 199–225, 2004.
- [89] L. Elsgolts. *Differential Equations and Calculus of Variations*. Mir Publishers, Moscow, Russia, 1970.
- [90] T. Englert., A. Völz., F. Mesmer., S. Rhein., and K. Graichen. A software framework for embedded nonlinear model predictive control using a gradient-based augmented lagrangian approach (GRAMPC). *Optimization and Engineering*, 20 : 769–809, 2019.
- [91] U. Eren., A. Prach., B. Kocer., B. Açikmese., E. Kayacan., and S.V. Rakovic. Model Predictive Control in Aerospace Systems : Current State and Opportunities. *Guidance, Control, and Dynamics*, 40(7) : 1541-1566, 2017.
- [92] A. Fakharian. and M.T.H. Beheshti. Solving linear and nonlinear optimal control problem using modified adomian decomposition method. *Journal of Computer and Robotics*, 1 : 1-8, 2008.
- [93] T. Fan. and C.W. de Silva. Dynamic modelling and model predictive control of flexible-link manipulators. *International Journal of Robotics and Automation*, 2008.
- [94] T. Faulwasser. and R. Findeisen. Nonlinear Model Predictive Control for Constrained Output Path Following. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4), 2015.

- [95] R. Findeisen., F. Allgöwer., and L.T. Biegler. *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, volume 358. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2007.
- [96] R. Findeisen., M. Diehl., T. Burner., F. Allgower., H.G. Bock., and J.P. Schlöder. Efficient output feedback nonlinear model predictive control. *Proceedings of the 2002 American Control Conference, Anchorage*, 4752–4757, 2002.
- [97] J.M. Flaus. *La régulation industrielle : régulateurs PID, prédictifs et flous*. 1994.
- [98] R. Fletcher. and S. Leyffer. Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming*, 91 : 239–269, 2002.
- [99] S. Formentin., J. Guanetti., and S.M. Savaresi. Least costly energy management for series hybrid electric vehicles. *Control Engineering Practice*, 48 : 37-51, 2016.
- [100] W. Gao., S. Liu., and L. Huang. A Global Best Artificial Bee Colony Algorithm for Global Optimization. *Computational and Applied Mathematics*, 326 : 2741–2753, 2012.
- [101] V. Gardeux. *Conception d’heuristiques d’optimisation pour les problèmes de grande dimension : application à l’analyse de données de puces à ADN*. PhD thesis, 2011.
- [102] H.P. Geering. *Optimal Control with Engineering Applications*. Springer, 2007.
- [103] M. Gerds. *Optimal control of ODEs and DAEs*. De Gruyter textbook. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2012.
- [104] F. Ghomanjani., S. Ghaderi., and M.H. Farahi. Solving the optimal control of linear systems via homotopy perturbation method. *Intelligent Control and Automation*, 3 : 26-33, 2012.
- [105] A. Ghorbani. and J.S. Nadjafi. Convergence of He’s variational iteration method for nonlinear oscillators. *Nonlinear science letters a mathematics physics and mechanics*, 1 : 379-384, 2010.
- [106] P.E. Gill., W. Murray., and M.A. Saunders . SNOPT : an SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 12 : 979–1006, 2002.
- [107] P.E. Gill., W. Murray., and M.A. Saunders . User’s Guide for SNOPT Version 7 : Software for large Scale Nonlinear Programming. *Department of Operations Research, Stanford University*, February 2006.
- [108] P.E. Gill., W. Murray., M.A. Saunders., and M.H. Wright . User’s Guide for NPSOL (Version 4.0) : A FORTRAN Package for Nonlinear Programming. *Department of Operations Research, Stanford University*, January 1986.

- [109] P.E. Gill., W. Murray., and M. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, New York, 1981.
- [110] F. Glover. Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence. Computers and Operations Research. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 13(5) : 533-549, 1986.
- [111] F. Glover. Tabu search - part I. *ORSA Journal on Computing*, 1(3) : 190-206, 1989.
- [112] C.J. Goh. and K.L. Teo. Control parametrization : A unified approach to optimal control problems with general constraints. *Automatica*, 24 : 3-18, 1988.
- [113] A. Golbabai. and M. Javidi. A variational iteration method for solving parabolic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 54 : 987-992, 2007.
- [114] N.I.M. Gould., D. Orban, and P.L. Toint. Numerical methods for large-scale nonlinear optimization. *Acta Numerica*, 14 : 299–361, 2005.
- [115] K. Graichen. and B. Käpernick. A Real-Time Gradient Method for Nonlinear Model Predictive Control, in T. Zheng, *Frontiers of Model Predictive Control*. 2012.
- [116] A. Grancharova. and T.A. Johansen. *Explicit Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, Berlin, 2012.
- [117] W. Grimm. and A. Markl. Adjoint Estimation from a Multiple-Shooting Method. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 92 : 263–283, 1997.
- [118] J.M. Grosso., C. Ocampo-Martínez., V. Puig., and al. Chance-constrained model predictive control for drinking water networks. *Journal of Process Control*, 24(5) : 504-516, 2014.
- [119] R. Haber., U. Schmitz., and K. Zabet. Implementation of PFC (Predictive Functional Control) in a petrochemical plant. *Proceedings of the 19th World Congress. The International Federation of Automatic Control*, 2014.
- [120] O. HAJJI. *Contribution au développement de méthodes d’optimisation stochastiques. Application à la conception des dispositifs électroniques*. PhD thesis, 2003.
- [121] J. Han., Y. Hu., and S. Dian. The State-of-the-art of Model Predictive Control in Recent Years. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 428 : 012035, 2018.
- [122] R. Hannemann. and W. Marquardt. Fast computation of the Hessian of the lagrangian in shooting algorithms for dynamic optimization. *8th International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems Proceedings. Cancún, Mexico*, 1, 2007.

- [123] E. Hansen. and G.W. Walster. *Global Optimization Using Interval Analysis : Revised and Expanded*. CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [124] F.B. Hanson. Techniques in Computational Stochastic Dynamic Programming, in Stochastic Digital Control System Techniques, within series Control and Dynamic Systems : Advances in Theory and Applications. *C. T. Lowndes, Academic Press, New York, NY, (76) : 103-162, 1996.*
- [125] E.N. Hartley., P.A. Trodden., A. G. Richards., and al. Model predictive control system design and implementation for spacecraft rendezvous. *Control Engineering Practice, 20(7) : 695- 713, 2012.*
- [126] J.H. He. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, 178 : 257-262, 1997.*
- [127] J.H. He. A new approach to nolinear partial differential equations. *Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation, 34 :230-235, 1997.*
- [128] J.H. He. Approximation analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Computer methods in Applied Mechnics and Engineering, 167 :57–68, 1998.*
- [129] J.H. He. Variational iteration approach to 2-spring system (in Chinese). *Mechanical Science and Technology, 17(2) :221-223, 1998.*
- [130] J.H. He. Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique : some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics, 34(4) :699-708, 1999.*
- [131] J.H. He. Homotopy perturbation method : a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation, 135 : 73–79, 2003.*
- [132] J.H. He. Asymptotology by homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation, 156 :591–596, 2004.*
- [133] J.H. He. A generalized variational principle in micromorphic thermoelasticity. *Mechanics Research Communications, 32 : 93–98, 2005.*
- [134] J.H. He., G.C. Wu., and F. Austin. The variational iteration method which should be followed. *Nonlinear science letters, A 1 :1-30, 2010.*
- [135] J.H. He. and X.H. Wu. Variational iteration method : new development and applications. *Computers and Mathematics with Applications, 54 : 881-894, 2007.*
- [136] E.M. T. Hendrix. and B. G.-Tóth. *Introduction to Nonlinear and Global Optimization*. Springer-Verlag, New-York, 2010.

- [137] M.A. Henson. Nonlinear Model Predictive Control : Current Status and Future Directions. *Computers & Chemical Engineering*, 23 : 187-202, 1998.
- [138] G. A. Hicks. and W. H. Ray. Approximation methods for optimal control synthesis. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 49(4) : 522-528, 1971.
- [139] J.-B. Hiriart-Urruty. *L'optimisation*. Presses Universitaires de France, Paris, 1996.
- [140] R. Hirota. Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *Physical Review Letters*, 27 : 1192, 1971.
- [141] B. Huang. and R. Kadali. *Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monitoring : A Data-driven Subspace Approach*, volume 374. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2008.
- [142] F. Ibrahim. *Commande prédictive non linéaire d'un lit mobile simulé*. PhD thesis, 2006.
- [143] G. Idiri., S. Djennoune., and M. Bettayeb. Solving Fixed Final Time Fractional Optimal Control Problems Using the Parametric Optimization Method. *Asian Journal of Control*, 18(5) : 1-13, 2016.
- [144] M. Inokuti., H. Sekine., and T. Mura. General use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics. *S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of solids*, Pergamon Press, NewYork, 156–162, 1978.
- [145] T.A. Johansen., I. Petersen., and O. Slupphaug . On explicit suboptimal LQR with state and input constraints. In : Proc. 39th IEEE Conf. *on Decision and Control, Sydney, Australia*, 662–667, 2000.
- [146] H. De Jong., J.L. Gouzé., C. Hernandez., M. Page., T. Sari., and J. Geiselmann. Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models. *The Bulletin of Mathematical Biology*, 66(2) :301–340, 2004.
- [147] B. Kafash., A. Delavarkhalafi., and S.M. Karbassi. Application of variational iteration method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(6) : 3917-3928, 2013.
- [148] R.E. Kalman. Contribution to the theory of optimal control. *bulletin society mathematical mexican*, (5) : 102-119, 1960.
- [149] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *transactions of the asme journal of basic engineering*, 35-45, 1960.
- [150] F. Kang., J. Li., and Q. Xu. Structural Inverse Analysis by Hybrid Simplex Artificial Bee Colony Algorithms. *Computers and Structures*, 87 : 861–870, 2009.

- [151] D. Karaboga. A New Design Method Based on Artificial Bee Colony Algorithm for Digital IIR Filters. *the Franklin Institute*, 346 (4) : 328–348, 2009.
- [152] D. Karaboga. and B. Akay. A Comparative Study of Artificial Bee Colony Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 214 : 108–132, 2009.
- [153] J. Kennedy. and R.C. Eberhardt . *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann, 2001.
- [154] M. Keshavarz., M.B. Yazdi., and M.R. Jahed-Motlagh. Piecewise affine modeling and control of a boiler–turbine unit. *Applied Thermal Engineering*, 30 : 781-791, 2010.
- [155] D. Kim1a., S-M. Lee., S. Jung., J. Koo., and H. Myung. Particle Swarm optimization-based receding horizon formation control of multi-agent surface vehicles. *Advances in Robotics Research*, 2(2) : 161-182, 2018.
- [156] D.E. Kirk. *Optimal Control Theory. An Introduction*. Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [157] S. Kirkpatrick., C.D. Gelatt., and M. P. Vecchi. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598) : 671–681, 1983.
- [158] S. Kirkpatrick., C.D. Gelatt., and M.P. Vecchi. Optimization by Simulated Annealing. *Research Report RC 9355. IBM, Yorktown Heights, NY*, 1982.
- [159] M.V. Kothare., V.Balakrishnan., and M. Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10) : 1361–1379, 1996.
- [160] B. Kouvaritakis. and M.Cannon. Nonlinear predictive control, theory and practice. *The Institution of Electrical Engineers*, 261, 2001.
- [161] B. Kouvaritakis., J.A. Rossiter., and M. Cannon. Linear quadratic feasible predictive control. *Automatica*, 34(12) : 1583–1592, 1998.
- [162] J.L. Lagrange. *Théorie des Fonctions Analytiques*. Paris, 1797.
- [163] M. Lecriquer., M. Tsier., A. Rault., and J. Papon. I.F.A.C. 7th Triennial World congress. *Automatica*, 73, 1978.
- [164] E.B. Lee. and L. Marcus. *Foundations of optimal control theory*. Jhon Wiley et Sons, New-York, 1967.
- [165] G. Leitmann. *The Calculus of Variations Optimal Control*. Plenum Press, 1981.
- [166] S. Lenhart. and J.T. Workman. *Optimal Control Applied to Biological Models*. Mathematical and Computational Biology, Chapman and Hall, Boca Raton, Fla, USA ;CRC Press, London, UK, 2007.
- [167] F. L. Lewis. and V.L. Syrmos. *Optimal Control*. New York : JohnWiley and Sons, 2 ed, 1995.

- [168] F.L. Lewis. *Optimal Control*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [169] W.C. Li. and L.T. Biegler . Multistep Newton-type control strategies for constrained nonlinear processes. *Chemical Engineering Research and Design*, 67 : 562–577, 1989.
- [170] D. Liberzon. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory, A concise Introduction*. Princeton University Press, 2012.
- [171] X. Liu., G. Zhang., D. Yang., T. Shi., and X. He. Discrete-Time Optimal Control of Photovoltaic Grid-Connected Inverter Based on Particle Swarm Optimization. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2014.
- [172] C.E. Long., P.K. Polisetty., and E.P. Gatzke . Nonlinear Model Predictive Control Using Deterministic Global Optimization. *Process Control*, 16 : 635–643, 2006.
- [173] I.L. Lopez-Cruz. *Efficient Evolutionary Algorithms for Optimal Control*. PhD thesis, 2002.
- [174] H. M-Alfaro. Using Simulated Annealing Algorithm to Solve the Optimal Control Problem. *Simulated Annealing, Theory with Applications, Rui Chibante(Ed), In Tech*, 2010.
- [175] H. M-Alfaro. and M. A. R-Cruz. Discrete Optimal Control Systems Design Using Simulated Annealing. *IEEE*, 2003.
- [176] D.L. Ma., D. K. Tafti., and R. D. Braatz . Optimal control and simulation of multidimensional crystallization processes. *Computers and Chemical Engineering*, 26(7-8) : 1103–1116, 2002.
- [177] L. Magni., D. M. Raimondo., and F. Allgöwer . *Nonlinear Model Predictive Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2010.
- [178] L. Magni. and R. Scattolini. Stabilizing model predictive control of nonlinear continuous time systems. *Annual Reviews in Control*, 28 : 1-11, 2004.
- [179] A. Maidi. and J.P. Corriou. Open-loop optimal controller design using variational iteration method. *Applied Mathematics and Computation*, 219 : 8632–8645, 2013.
- [180] W. Malfeit. *American Journal of Physics*, 60 :650, 1992.
- [181] P. Malisani., F. Chaplais., and N. Petitt. An interior penalty method for optimal control problems with state and input constraints of nonlinear systems. *Optimal Control Application and Methods*, 2014.
- [182] C. F. Chan Man., D. De Kee., and P. N. Kaloni. *Advanced Mathematics for Engineering and Science*. World Scientific, 2003.

- [183] P. Marquis. and J.P. Broustail . SMOC, a bridge between state space and model predictive controllers : Application to the automation of a hydrotreating unit. *In T. J. McAvoy, Y. Arkun, and E. Zafiriou (Eds.), Proceedings of the 1988 IFAC workshop on model based process control, Oxford : Pergamon Press, 37–43, 1988.*
- [184] F. Martinsen., L.T. Biegler., and B.A. Foss. Application of optimization algorithms to nonlinear MPC. *Proceedings of the 15th IFACWorld Congress, 2002.*
- [185] M. Matinfar. and M. Saeidy. A new analytical method for solving a class of nonlinear optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods, 35(3) : 286-302, 2014.*
- [186] D.Q. Mayne., J. B. Rawlings., C.V. Rao., and P.O.M. Scokaert. Constrained model predictive control : stability and optimality. *Automatica, 36 : 789–814, 2000.*
- [187] A.F. MEGRI. *Programmation dynamique floue appliquée à la commande des systèmes non linéaires.* PhD thesis, 2008.
- [188] P. Mereau., E. Guillaumd., and K. Mehrar. Proc. 17th I.E.E.E.Conf on Decision and Confrol and Symp. *on Adaptive Processes, San Diego, California, 977, 1978.*
- [189] J. Merlin. and C. SelvaKumar. Design Of A Model Predictive Control For A Multi-variable Process. *Advanced Trends in Computer Science and Engineering, 2006.*
- [190] Z. Michalewicz., C.Z. Janikow., and J.B. Krawczyk. A modified genetic algorithm for optimal control problems. *Computers and Mathematics with Applications, 23(12) : 83-94, 1992.*
- [191] Z. Michalewicz., J. B. Krawczyk., M. Kazemi., and C.Z. Janikow. Genetic Algorithms and Optimal Control Problems. *Proceeding. of the 29th Confrenca on Dedrbn and Control Honolulu, Hawall, 1664-1666, 1990.*
- [192] A. Miele. Method of particular solutions for linear two-point boundary-value problems. *Journal of Optimization Theory and Application, 2(4), 1968.*
- [193] A. Miele. *Gradient methods in optimal control theory, in : M. Avriel, M.J. Rijckaert, D.J. Wilde (Eds.), Optimization and Design.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [194] M. Minoux. *Mathematical Programming theory and Algorithms.* A Wiley Hall New York, London, .
- [195] A. Mochizuki. Structure of regulatory networks and diversity of gene expression patterns. *Journal of Theoretical Biology, 250(2) : 307–321, 2008.*
- [196] J.L. Morales. A sequential quadratic programming algorithm with an additional equality constrained phase. *IMA Journal of Numerical Analysis, 32 : 553-579, 2012.*

- [197] M. Morari. and E. Zafiriou. *Robust control*. Dunod, 1989.
- [198] E. Mosca. *Optimal, Predictive and Adaptive Control*. Prentice Hall, 1995.
- [199] F. M’Sahli. Sur la commande prédictive des systèmes non linéaires, Monastir, Tunisie. 2003.
- [200] K.R. Muske., J. W. Howse., and G. A. Hansen . Lagrangian solution methods for nonlinear model predictive control. *Proceedings of the American Control Conference*, 4239–4243, 2000.
- [201] D.S. Naidu. *Optimal Control Systems*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2003.
- [202] P. Naslin. *Théorie de la Commande et Conduite Optimale*. Dunod, Paris, 1969.
- [203] H. Nijmeijer. and A.J. Van Der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag New Yourk Inc, 1990.
- [204] H. Saberi Nik., S. Effati., and M. Shirazian. An approximate-analytical solution for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation via homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, page 36 : 5614–5623, 2012.
- [205] J. Nocedal. and S. Wright. *Numerical Optimization. 2 ed.* New York : Springer-Verlag, 2006.
- [206] Z.M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 : 1181-1192, 2010.
- [207] E. O’Dwyer., L.D. Tommasi., K. Kouramas., and al. Prioritised objectives for model predictive control of building heating systems. *Control Engineering Practice*, 63, 2017.
- [208] National Academy of Engineering. *Frontiers of Engineering : Reports on Leading Edge Engineering from the 1997 NAE Symposium on Frontiers of Engineering*. National Academies Press, 1998.
- [209] K. Ogata. *Modern Control Engineering, Fifth Edition*.
- [210] T. Ohtsuka. A continuation/GMRES method for fast computation of nonlinear receding horizon control. *Automatica*, 40(4) : 563–574, 2004.
- [211] T. Ohtsuka. and H.A. Fujii. Real-time optimization algorithm for nonlinear receding horizon control. *Automatica*, 33(6) : 1147–1154, 1997.
- [212] C. Onnen., R.Babuška., U.Kaymak., J.M.Sousa., H.B.Verbruggen., and R.Isermann. Genetic algorithms for optimization in predictive control. *Control Engineering Practice*, 5(10) : 1363-1372, 1997.

- [213] G. Pannocchia., S.J. Wright., and J.B. Rawlings. Partial enumeration MPC : Robust stability results and application to an unstable CSTR. *Journal of Process Control*, 21 : 1459-1466, 2011.
- [214] A. Parisio., E. Rikos., and L. Glielmo. Stochastic model predictive control for economic/environmental operation management of microgrids : An experimental case study. *Journal of Process Control*, 43 : 24-37, 2016.
- [215] M.W. Percival., Y. Wang., B. Grosman., and al. Development of a multi-parametric model predictive control algorithm for insulin delivery in type 1 diabetes mellitus using clinical parameters. *Journal of Process Control*, 21(3) : 391-404, 2011.
- [216] L. Pontriaguine., V. Boltianski., R. Gamkrélidzé., and E. Michtchenko. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Edition Mir, Moscou, 1974.
- [217] L.S. Pontryagin., V.G. Boltlyanskii., R.V. Gamkrelidze., and E.F. Mishchenko. *the mathematical theory of optimal processes*. Pergamon Press, New york, 1964.
- [218] L.S. Pontryagin., V. G. Boltyanskii., R.V. Gamkrelidze., and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Pergamon Press, New York, 1964.
- [219] S.J. Qin. and T. A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11(7) : 1096-1104, 2003.
- [220] S.J. Qin. and T.A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 93(316) : 733–764, 2003.
- [221] A. Quarteroni., F. Saleri., and P. Gervasio. *Calcul Scientifique. Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave*. Springer-Verlag, Milan, 2010.
- [222] R. R-Cruz., E. N. Sanchez., F. O-Tellez., A. G. Loukianov., and R. G. Harley. Particle Swarm Optimization for Discrete-Time Inverse Optimal Control of a Doubly Fed Induction Generator. *IEEE Transactions On Cybernetics*, 43(6), 2013.
- [223] T. Raff., C. Angrick., R. Findeisen., J-S. Kim., and F. Allgöwer. Model Predictive Control For Nonlinear Time-Delay Systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(12) : 60-65, 2007.
- [224] A.V. Rao. *Extension of the Computational Singular Perturbation Method to Optimal Control*. PhD thesis, 1996.
- [225] A.V. Rao. Riccati Dichotomic Basis Method for solving Hyper-Sensitive Optimal Control Problems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26 : 185–189, 2003.
- [226] A.V. Rao. A survey of numerical methods for optimal control. *Applied Mathematics and Computation*, 345 : 543-548, 2007.

- [227] S.S. Rao. *Engineering Optimization : Theory and Practice*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2009.
- [228] M. Reble., F. D. Brunner., and F. Allgöwer. Model Predictive Control for Nonlinear Time-Delay Systems without Terminal Constraint. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) : 9254-9259, 2011.
- [229] J. Richalet. *Pratique de la commande prédictive*. Hermes, 1992.
- [230] J. Richalet. *Pratique de la commande prédictive* (Paris : Hermès). 1993a.
- [231] J. Richalet. Industrial application of model based predictive control. *Automatica*, (29) :1251-1274, 1993b.
- [232] J. Richalet., G. Lavielle., and J. Mallet. *Commande Prédictive*. 2014.
- [233] J. Richalet. and D. O'Donovan. *Predictive functional control : principles and industrial applications*. Advances in Industrial Control, Springer-Verlag London, 2009.
- [234] J. Richalet., A. Rault., J. L. Testud., and J. Papon. Algorithmic control of industrial processes. *In Proceedings of the 4th IFAC symposium on identification and system parameter estimation*, 1119–1167, 1976.
- [235] J. Richalet., A. Rault., J.L. Testud., and J. Papon. Model predictive heuristic control : application to industrial processes. *Automatica*, 14(5) : 413-428, 1978.
- [236] J. Richalet., A. Rault., L. Testvdj., and J. Papon. Proc. 4th I.F.A.C. Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Tbilisi, U.S.S.R. *Automatic*, 17(143) : 1119, 1978.
- [237] H. Rodrigues., J.Herskovits., C. M. Soares., J. M. Guedes., A. Araujo., J. Folgado., F. Moleiro., and J. A. Madeira. *Engineering Optimization 2014*. CRC Press, 2014.
- [238] J. Rodriguez. and P. Cortes. *Predictive Control of Power Converters and Electrical Drives*. John Wiley and Sons, 2012.
- [239] R. Rouhani. and R. K. Mehrar. Model Algorithmic Control (MAC) ; Basic Theoretical Properties. *Pergamon Press Ltd. International Federation of Automatic Control. Automatica*, 18(4) : 401-414, 1982.
- [240] D. Rowell. *Analysis and Design of Feedback Control Systems. State-Space Representation of LTI Systems*. 2002.
- [241] R.D. Russell. and L.F. Shampine . A Collocation Method for Boundary Value Problems. *Numerische Mathematik*, 19 : 13–36, 1972.
- [242] A.P. Sage. and C.C. White III. *Optimum Systems Control. Second Edition*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

- [243] O. Ait Sahed., K. Kara., and A. Benyoucef. Artificial Bee Colony-based predictive control for non-linear systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2014.
- [244] O. Ait Sahed., K. Kara., A. Benyoucef., and M.L. Hadjili. An Efficient Artificial Bee Colony Algorithm with application to nonlinear predictive control. *International Journal of General Systems*, 45(4) : 393-417, 2016.
- [245] D. K. Salkuyeh. Convergence of the variational iteration method for solving linear systems of ODEs with constant coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 : 2027-2033, 2008.
- [246] R.W. H. Sargent. Optimal control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1-2) :361-371, 2000.
- [247] A. Schafer., P. Kühn., M. Diehl., J. Schlöder., and H.G. Bock. Fast reduced multiple shooting methods for nonlinear model predictive control. *Chemical Engineering and Processing*, 46(11) : 1200–1214, 2007.
- [248] J.L. Schiff. *Laplace Transformation : Theory and Applications*. Springer, 1999.
- [249] K. Schittkowski. The nonlinear programming method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. *Numerical Mathematics*, 38 : 83–114, 1981.
- [250] M. Schlegel., K. Stockmann., T. Binder., and W. Marquardt. Dynamic optimization using adaptive control vector parameterization. *Computers and Chemical Engineering*, 29(8) : 1731-1751, 2005.
- [251] K.W. Schmidt., Ö. Hazir., and U. Eryilmaz. A Tabu Search Algorithm for Integrated Project Scheduling and Control. *Conference : Engineering and Technology Symposium, Cankaya University*, 2014.
- [252] P.O. M. Scokaert., D.Q. Mayne., and J.B. Rawlings . Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3) : 648–654, 1999.
- [253] M.M. Seron., J. A. DeDoná., and G.C. Goodwin . Global analytical model predictive control with input constraints. In : Proc. 39th IEEE Conf. *on Decision and Control. Sydney, Australia*, 154–159, 2000.
- [254] M.J. Sewell. *Maximum and Minimum Principles : A Unified Approach, with Applications*. Cambridge University Press, New York, USA, 1987.
- [255] L.F. Shampine., I. Gladwell., and S. Thompson. Solving ODEs with MATLAB. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2003.

- [256] X. Shang. and D. Han. Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234 : 1442–1447, 2010.
- [257] K. Shimizu., S. Fujimaki., and Y. Ishizuka. Constrained optimization methods in Hilbert spaces and their applications to optimal control problems with functional inequality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31 : 559-564, 1986.
- [258] K. Shimizu. and S. Ito. Constrained optimization in hilbert space and a generalized dual quasi-Newton algorithm for state-constrained optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5) : 982-986, 1994.
- [259] M. Shirazian. and S. Effati. Solving a class of non-linear optimal control problems via He’s variational iteration method. *Control, Automation and Systems*, 10(2) : 249-256, 2012.
- [260] M. Short. A Simplified Approach to Multivariable Model Predictive Control. *Engineering and Technology*, 5(1) : 19-32, 2015.
- [261] D. Simon. *Fighter Aircraft Maneuver Limiting Using MPC : Theory and Application*. Linköping University Electronic Press, 2017.
- [262] A. Singh. An Artificial Bee Colony Algorithm for the Leaf-constrained Minimum Spanning Tree Problem. *Applied Soft Computing*, 9 : 625–631, 2009.
- [263] A.P. Singh. and H. Agrawal. A Fractional Model Predictive Control Design For 2-D Gantry Crane System. *Journal of Engineering Science and Technology*, 13(7) : 2224 - 2235, 2018.
- [264] T. Singh. *Optimal Reference Shaping for Dynamical Systems. Thory and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 2010.
- [265] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer, Heidelberg, 1998.
- [266] M. Srinivas. and L.M. Patnaik. Genetic Algorithms : A Survey. *Computer*, 27 : 17-26, 1994.
- [267] R.F. Stengel. *Optimal Control and Estimation*. Dover Publications, New York, 1994.
- [268] J. Stoer. and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, New York, 1980.
- [269] O.V. Stryk. and R. Bulirsch. Direct and indirect methods for trajectory optimization. *Annals of Operations Research*, 37(1) :357-373, 1992.

- [270] N.H. Sweilam. and M.M. Khader. On the convergence of variational iteration method for nonlinear coupled system of partial differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87 : 1120-1130, 2010.
- [271] M. Tatari. and M. Dehghan . On the convergence of He’s variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) :121-128, 2007.
- [272] P. Tatjewski. *Advanced control of industrial processes : structures and algorithms*. Advances in Industrial Control, Springer, 2007.
- [273] Y.A. Thomas. Linear quadratic optimal estimation and control with receding horizon Electron. *Electronics Letters*, pages 11 : 19–21, 1975.
- [274] D. Tonon., M. S. Aronna., and D. Kalise. *Optimal Control : Novel Directions and Applications, Chapter 3 : M. Zanon and al.Direct Optimal Control and Model Predictive Control*. Lecture Notes in Mathematics 2180. Springer International Publishing AG, 2017.
- [275] E. Trélat. *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Mathématiques concretes. Vuibert, France, 2005.
- [276] E. Trélat. Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(3) :713-758, 2012.
- [277] T.H. Tsang., D.M. Himmelblau., and T.F. Edgar. Optimal control via collocation and non-linear programming. *International Journal of Control*, 21(5) :763-768, 1975.
- [278] S. Turner., J. A. Sherratt., K. J. Painter., and N. J. Savill. From a discrete to a continuous model of biological cell movement. *Physical Review E*, 2004.
- [279] A. Ulbig. *Passivity-based nonlinear model predictive control*. PhD thesis, 2007.
- [280] R.J. Vanderbei. and D.F. Shanno . An interior point algorithm for nonconvex non-linear programming. *Computational Optimization and Applications*, 13 : 231–252, 1999.
- [281] V.S. Vassiliadis., E.B. Canto., and J.R. Banga. Second-order sensitivities of general dynamic systems with applications to optimal control problems. *Chemical Engineering Science*, 54(17) : 3723–3955, 1999.
- [282] A. Verdugo. Linear Analysis of an Integro-Differential Delay Equation Model. *International Journal of Differential Equations, Hindawi*, 2018.
- [283] A. Verdugo. and R. Rand. Hopf bifurcation in a DDE model of gene expression. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(2) : 235–242, 2008.

- [284] L.N. Vicente. On interior-point Newton algorithms for discretized optimal control problems with state constraints. *Optimization Methods and Software*, 8(3-4) : 249-275, 1998.
- [285] R. Vinter. *Optimal Control*. Modern Birkhäuser Classics, 2000.
- [286] M.L. Wang. *Physics Letters*, A 215 :279, 1996.
- [287] A.M. Wazwaz. Analytical approximations and Padé approximants for Volterra’s population model. *Applied Mathematics and Computation*, 100 : 13–25, 1999.
- [288] A.M. Wazwaz. A new method for solving singular initial value problems in the second order differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 128(1) : 45-57, 2002.
- [289] A.M. Wazwaz. The variational iteration method : A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 54 : 926-932, 2007.
- [290] A.M. Wazwaz. The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs. *Computers and Mathematics with Applications*, 54 : 895-902, 2007.
- [291] A.M. Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer, Berlin, 2009.
- [292] A. Wächter. and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, (106) : 25–57, 2006.
- [293] J-H. Webert., P. E. Gill., S-J. Kimmerle., and M. Gerds. A study of structure-exploiting SQP algorithms for an optimal control problem with coupled hyperbolic and ordinary differential equation constraints. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S*, 11 : 1259-1282, 2018.
- [294] M. Weiser. Interior point methods in function space. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(5) : 1766–1786, 2005.
- [295] P. Wilson. and H. A. Mantooth. *Model-Based Engineering for Complex Electronic Systems*, volume 374. Elsevier Science, 2011.
- [296] S.J. Wright. Interior Point Methods for Optimal Control of Discrete Time Systems. *Journal of Optimization Theory and Application*, 77(1), 1993.
- [297] S. Xie., X. Hu., Z. Xina., and J. Brightond. Pontryagin’s Minimum Principle based model predictive control of energy management for a plug-in hybrid electric bus. *Applied Energy*, 236 : 893–905, 2019.

- [298] Y. Yamashita. and M. Shima. Computation method for optimal control problem with terminal constraints using Genetic Algorithm. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, E-1(1) : 274-280, 2001.
- [299] C.T. Yan. *Physics Letters*, A 224 :77, 1996.
- [300] J. Yang. and M. Liu. Genetic algorithm based nonlinear model predictive control method. *Control Decis*, 18 : 141–144, 2003.
- [301] W.Y. Yang., W. Cao., T. S. Chung., and J. Morris. Applied Numerical Methods using MATLAB. *John Wiley and Sons, New Jersey*, 2005.
- [302] W. Yao. and J. Sun. Nonlinear model predictive control for turboshaft engine. *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin*, 29 : 776–780, 2008.
- [303] S. A. Yousefi., M. Dehgan., and A. Lotfi. Finding the optimal control of linear systems via He’s variational iteration method. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(5) : 1042–1050, 2010.
- [304] U. Yuzgec., Y. Becerikli., and M. Turker. Nonlinear predictive control of a drying process using genetic algorithms. *ISA Transactions*, 45(4) : 589–602, 2006.
- [305] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [306] G. Zeng., J. Chen., and Y. Dai. Design of fractional order PID controller for automatic regulator voltage system based on multi-objective extremal optimization. *Neurocomputing*, 160 : 173–184, 2015.
- [307] A. Zheng. and W. Zhang. *Nonlinear Predictive Control, chapter Computationally Efficient Nonlinear Model Predictive Control Algorithm for Control of Constrained Nonlinear Systems*. IEE Control Engineering series, 2001.
- [308] X. Zhou. Multi-objective predictive control for boiler combustion optimization. *Computer simulation*, 30 : 89–94, 2013.
- [309] Q. Zou., J. Ji., S. Zhang., M. Shi., and Y. Luo. Model predictive control based on particle swarm optimization of greenhouse climate for saving energy consumption. *IEEE. World Automation Congress*, 2010.
- [310] Z. Zou. and Z. Wang. Research Status and Development Trend of Nonlinear Model Predictive Control Technology. *Computers and Applied Chemistry*, 35 : 7–17, 2018.
- [311] J.M. Zurada., R. J. Marks II., and C. J. Robinson. Computational Intelligence : imitating life. *pp. v-xi. Piscataway, NJ : IEEE Press*, 1994.