MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI. TIZI-OUZOU

FACULTE : DES SCIENCES
DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE : Mathématiques
OPTION : Statistiques

Présenté par :
TAOUSSI CHERIF

Thème

SYSTEME DE MODIFICATION DE LA PRIME DE RISQUE A POSTERIORI
MODELE DE CREDIBILITE LINEAIRE

Devant le jury d'examen composé de :

Fellag Hocine	**Professeur**	**Université M.M Tizi-Ouzou**	**Président**
Latreche abdelouahab	**M.C.A**	**E.N.S.S.E.A Alger**	**Rapporteur**
Berkoun Youcef	**M.C.A**	**Université M.M Tizi-Ouzou**	**Examinateur**
Saidi Ghania	**M.C.B**	**E.N.S.S.E.A Alger**	**Invité**

Soutenu le : / /

Remerciement

Je tiens à remercier le bon dieu de m'avoir donné le courage et la fois pour pouvoir réaliser ce travaille.

Le travail de mémoire décrit dans ce manuscrit a été réalisé sous la direction du Dr LATRECHE ABDELOUAHAB, je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements et mon profond reconnaissance pour son aide précieuse, pour son enthousiasme est ses encouragements qui ont permis de concrétiser mes efforts, ainsi que pour m'avoir témoigné une grande confiance et disponibilité.

Je exprime mes profonds remerciements à mes enseignants de l'école doctorale de Statistiques Mr Felag Hocine, Mr Berkoune Youcef, Mr Hamadouche Djamel, Mr Ibazizene Mohamed Hamou , Mr Yousfat, Mr Necire.

Je tiens également à remercier tous mes collègues à l'université Ziane achour de Djelfa et à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Enfin, Un grand merci aux membres de ma petite famille.

Sommaire

Introduction générale

La théorie mathématique des assurances de dommages (ou non viagères, non vie) s'est développée beaucoup plus tardivement que la théorie des assurances viagères (vie, décès). Les problèmes qui s'y posent sont sensiblement pus compliqués, et ce, pour plusieurs raisons.

- En assurance vie ou décès, la compagnie ne doit pas indemniser ses clients qu'une fois au maximum : l'assuré ne meurt q'une fois, ne prend qu'une seul fois sa retraite (ce n'est que dans quelques cas particuliers ″assurance maladie invalidité ″ avec retour à l'activité après une période d'invalidité, par exemple, qu'un assuré peut éventuellement être indemnisé plusieurs fois). En assurance de dommages, au contraire, la règle générale est que les assurés peuvent avoir plusieurs sinistres (assurance automobile).

- En assurance viagère, le montant à débourser par la compagnie est déterminé au moment de la signature du contrat. En assurance de dommages, le montant d'un sinistre est une variable aléatoire : coût d'un accident automobile (incendie total ou partiel 'un immeuble, etc.).

- Les problèmes statistiques d'estimations des paramètres sont plus compliqués en assurances non viagères. En assurance vie, une révision périodique des tables de mortalité et du taux d'intérêt technique permet de remettre le tarif à jour. En assurance de dommages, les modifications rapides des conditions économiques rendent l'établissement des tarifs beaucoup plus malaisé.

- Si les contrats vie son presque toujours d'assez longue durée (10 ans ou plus), les polices non viagères doivent en général être renouvelées beaucoup plus fréquemment. L'équilibre financier doit réalisé chaque année ; on ne peut tolérer, comme en assurance vie, un déficit au cours des premières années d'existence du contrat.

- Si en assurance vie la prime peut se décomposer en une composante risque et une composante épargne, l'assurance non viagère est de pur risque. On ne peut donc espérer compenser une sous tarification par d'éventuels bénéfices financiers (si ce n'est le bénéfice provenant du fait que la prime est perçue anticipativement et que les sinistres sont parfois payés après un délai assez long).

- Enfin, en assurance viagère, il est facile de partitionner les assurés en classes homogènes devant le risque : il suffit de les répartir suivant le sexe, l'age et d'appliquer éventuellement une surprime pour risques aggravés, par exemple, après visite médicale. En assurance non viagère, l'estimation a priori des risques est difficile, voir impossible ; il est évident que tous les assurés ne sont pas égaux devant le risque : il existe des mauvais conducteurs, mais commet les repérer a priori ? Les assureurs ont donc été amenés à introduire des systèmes de modification des primes a posteriori, ce que l'on a populairement appelé des systèmes bonus-malus.

En résumé, les montants à débourser par la compagnie résultent de la combinaison de deux variables aléatoires : distribution du nombre de sinistres N et distribution des montants des sinistres S, assez difficiles à déterminer.

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

X : Variable aléatoire du montant d'un sinistre.

Un problème primordial auquel les compagnies d'assurances sont confrontées, est la détermination de la prime relative à un contrat d'assurance.

La théorie de crédibilité a pour objet la calcul de la prime d'assurance pour un contrat faisant partie d'un portefeuille hétérogène. D'un point de vue théorique, cette prime ne pose aucun problème. Mais malheureusement, il y a des inconvénients du point de vue pratique.

Ces inconvénients majeurs à l'encontre de l'utilisation des primes pures a posteriori, on fait naître le modèle de crédibilité construit par Bűhlmann (1967,1969) dont l'idée de base est de se restreindre à des primes linéaires ″appelées estimateur de crédibilité″. Une prime qui peut s'exprimer comme une combinaison convexe entre deux expériences (une prime qui est fonction à la fois de l'expérience et des caractéristiques individuelles de l'assuré et de celles de l'ensemble du groupe)

$$P_i = z_i \overline{S}_i + (1 - z_i)\mu$$

où $\mu = E(S) = E\left[\mu(\Theta)\right]$ est la prime collective d'un portefeuille des contrats d'assurance, $\mu(\Theta)$ est la prime de risque et Θ paramètre de risque. $\overline{S}_i$ est le montant moyen de sinistres de la i^{eme} contrat, le coefficient z est appelé facteur de crédibilité.

Selon l'approche bayesienne, la détermination (plutôt le calcul) de la prime nécissite la connaissance des distribution de $u(\theta)$ (fonction de structure) et $f(s/\theta)$ (distribution des montants de sinistres conditionnelle au paramètre de risque). L'approximation de la prime de risque $\mu(\theta)$ (θ : paramètre de risque) sous cette approche peut après une seule année être complexe, voir impossible à calculer analytiquement. Par conséquent, on cherche à obtenir une approximation linéaire de $\mu(\theta)$ (fonction des observations).

Pour contourner le problème de complexité de calcul de la prime bayesienne, Bűhlmann (1967,1969) propose des modèles qui reposent essentiellement sur une approximation linéaire de la prime de risque.

Le modèle de Bűhlmann se décompose lui-même en deux parties communément appelées ″modèle original″ et ″modèle classique″. Le premier pose les bases de la nouvelle théorie, tandis que l'apport de la théorie bayesienne empirique fait du second plus pratique. Par son modèle original, Bűhlmann (1967) vient donc corriger une faiblesse de la crédibilité bayesienne, soit celle de la complexité de calcul. Cependant, en pratique, les fonctions $u(\theta)$ et $f(s/\theta)$ sont bien souvent inconnues de l'assureur. Bűhlmann (1969) a évité ce problème par son modèle classique, où l'on considère plutôt un portefeuille composé de plusieurs contrats.

Cette théorie a donné naissance à différents modèles, dans lesquels interviennent des paramètres, appelés paramètres structurels. Ils sont au nombre de trois. Le premier s'interprète comme étant le montant moyen des sinistres de tout le portefeuille, le deuxième mesure la dispersion des primes de risque individuel et le troisième représente une mesure globale de la dispersion total de données du portefeuille.

Ce travail se décompose de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à la théorie du risque, il rappel tout d'abord les principes de calcul des primes d'assurances, ainsi les modèles classique de la théorie de risque ″le modèle individuel″ et ″le modèle collectif″. Par la suite, dans le deuxième chapitre on étudiera divers modèles de crédibilité bayesienne ″porte d'entrée sur le monde de la crédibilité de pricision″ .puis la tarification d'expérience par les lois mélangées dont l'objet est de présenter le système bonus-malus pour les lois de Poisson-Gamma, poisson-Inverse Gaussienne et le calcul de la prime par le principe de l'utilité nulle. Le troisième chapitre traite le plus célèbres modèles en crédibilité de précision : le modèle de Bűhlmann, et on se termine par une application sur des données réelles.

Chapitre I

Chapitre I : Eléments de la théorie du risque

1. Processus de risque

1.1 Introduction

La définition de « risque » en assurance a fait l'objet de nombreuses discussions et de nombreux ouvrages [1] mais ce sont ses propriétés qui nous intéressons ici.

Soit S_t la somme des montants des sinistres pendant la période de temps $(0,t)$. Cette variable aléatoire S_t est appelée « le processus cumulé de sinistre » et elle se décompose en deux variables :

- N_t le processus de survenance des sinistres
- X_t le processus de coût.

Le risque est caractérisé par la fonction de répartition de S_t

$$G_t(x) = P(S_t \leq x)$$

Mais si c'est la forme décomposée du processus qui est retenue, la caractérisation analytique est obtenue par la probabilité $P_n^m(t,s)$ et la fonction $F_t(x/y)$. $P_n^m(t,s)$ est la probabilité de transition de n à m pendant la période (t,s) et la fonction $F_t(x/y)$ est la probabilité pour que S_t soit inférieur à y sachant qu'a l'instant précédente il était égale à x.

[1] Bühlmann (1970) Mathematical Methods in Risk Theory. Springer), (Stochastic Theory of a Risk Business. Wiley, New York

1.2 Ensemble de risque

Soit θ un élément de $\mathbb{R}^n$, à un risque on associe le n-uple de θ. Le nombre est dit « paramètre de risque ».

Soit Θ l'ensemble des valeurs possibles du paramètre θ, Θ est dit « ensemble de risque ». Le processus cumulé S_t devient, donc l'ensemble des processus :

$$\left\{S_t^{\theta}, \theta \in \Theta\right\}$$

A ce processus on associe la fonction de répartition G_t^{θ} et la famille de fonction :

$$\left\{G_t^{\theta}, \theta \in \Theta\right\}$$

qui caractérise l'ensemble de risques Θ.

Les trois cas particuliers suivants peuvent se présenter selon la nature de Θ :

1- Θ est homogène pour la survenance, les probabilités de transition P_n^m sont les mêmes quel que soit θ.

2- Θ est homogène pour le coût, les fonctions $F_t^{\theta}(x/y)$ sont indépendantes de θ et de t.

3- Θ est homogène pour la survenance et le coût.

Les résultats peuvent être résumer dans une « fonction de structure » Si θ est un paramètre réel la fonction de structure sera

$$U_t^{\theta} = P(\theta \le t)$$

Si $\theta \in \mathbb{R}^n$ $\quad U_t^{\theta} = P(\theta_1 \le t_1, ..., \theta_n \le t_n)$

Si pour tout risque θ le processus cumulé de sinistres est connu par sa fonction de répartition $G_s^{\theta}(x)$, le processus l'ensemble de risques est obtenu en intégrant par rapport à θ, au sens de la fonction de structure U :

$$G_s(x) = \int_{\theta_1}\int_{\theta_2}...\int_{\theta_n} G_s^{\theta}(x) U_{\theta} d\theta_1 ... d\theta_n$$

1.3 Principes de calcul des primes

HEMARD définie l'assurance : « l'assurance est une opération par la quelle une partie, se fait promettre, moyennant une rémunération, la prime, pour lui ou pour un tiers, en cas de réalisation d'un risque une prestation par une autre partie, l'assureur qui, prenant en charge un ensemble de risque, les compense conformément aux lois de la statistique ». Il fau déterminer la prime P_t qui compensera les réalisations du processus pendant l'intervalle de temps (0, t). Pour simplifier les notations le calcul peut être fait dans l'intervalle (0,1) et on note S_1, S et P_1, P.

A toute fonction de répartition $G_s(x)$ est associée une prime P, symboliquement, $P = F(G_s(x))$, ou F est un fonctionnelle.

1.3.1 Principaux fonctionnelle utilisées

1. Principe de la moyenne (de niveau λ)

Soit λ un nombre positif et $E(S)$ l'espérance mathématique de S :

$$P_1 = F_1(G_s(x)) = (1+\lambda)\int_{\mathbb{R}} x dG_s(x) = (1+\lambda)E(S)$$

Le principe de la moyenne de niveau λ est le plus utilisé. Le niveau λ porte le nom de « chargement » mais ce principe a le gros désavantage de ne pas tenir compte de la dispersion du risque.

2. Principe de l'écart-type (de niveau α)

Soit α un nombre positif et $\sigma(S)$ l'ecart-type de S :

$$P_2 = F_2(G_s(x)) = \int_{\mathbb{R}} x dG_s(x) + \alpha\left[\int_{\mathbb{R}} (x - E(S))^2 dG_s(x)\right]^{1/2} = E(S) + \alpha\sigma(S)$$

Le Principe de l'ecart-type est très utilisé. Cependant, il n'est vraiment intéressant que si la distribution des risques est normale, ce qui est rarement le cas en assurance automobile.

3. Principe de la variance (de niveau β)

Soit β un nombre positif :

$$P_3 = F_3(G_s(x)) = E(S) + \beta\sigma^2(S)$$

où $\sigma^2(S) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(S))^2 dG_s(x)$ est la variance de S

Le Principe de la variance a l'avantage d'être linéaire pour l'addition des risques indépendants. Cette propriété est intéressante pour les branches d'assurance possédant un grand nombre de contrats, ce qui est le cas en assurance automobile.

4. Principe de l'utilité nulle

$$P_4 = F_4(G_s(x))$$

tel que

$$E\left[U(P-S)\right] = U(0)$$

où U est une fonction d'utilité.

La difficulté de cette méthode réside dans le choix de la fonction d'utilité. En choisissant une fonction d'utilité adéquate, les principes de la moyenne de l'ecart-type et de la variance peuvent être considérés comme des cas particuliers de ce principe.

1.3.2 Propriétés de ces principes

Les deux principes qualités que peut posséder un principe sont l'additivité et l'itérativité

1. **Additivité :**

Pour S et $S^{'}$ indépendants,

$$P(S+S^{'}) = P(S) + P(S^{'})$$

ou $P(S) = F(G_s(x))$

Cette propriété est remise en cause par certains auteurs car ils considèrent préférable que pour des raisons de diversification, la prime de la somme soit plus faible que la somme des primes, (comme par exemple si on applique le principe de l'ecart-type).

2. **Itérativité :**

Pour S et $S^{'}$,

$$P(S) = P\left[P(S/S^{'})\right]$$

Supposons qu'un conducteur cause un nombre annuel d'accidents distribués selon une loi de Poisson de paramètre λ. λ est inconnu et est différent pour chaque conducteur. Nous supposons que λ est la réalisation d'une variable aléatoire réelle Λ. Donc la loi du nombre d'accidents N conditionné par $\Lambda = \lambda$ est poisson (λ).

L'itérativité dit que la prime à appliquer à un conducteur s'obtient en appliquant le principe d'abord à une sinistralité conditionnée par Λ, puis à nouveau à la variable aléatoire (fonction de Λ) ainsi obtenu.

Dans le tableau si dessous on résume la conformité de chacun des principes de calcul des primes à ces deux propriétés. Un « + »signifie que la propriété est vérifiée, Un « - » qu'elle ne l'est pas. Un « e » signifie qu'elle l'est dans le seul cas exponentiel.

Principe	Additivité	Itérativité
Moyenne	+	-
Ecart-type	-	-
Variance	+	-
Utilité nulle	**e**	**e**

Tableau 1.1 : propriétés des principes de calcul des primes

1.4 Primes de risque et primes collectives

Dans l'étude de la tarification, une distinction fondamentale doit être faite.

Si l'assureur a devant lui un cas individuel qu'il connaît parfaitement, on parle de risque individuel et la prime est « la prime de risque ».Si au contraire la compagne d'assurance doit définir une prime commune à un ensemble de risques, c'est une « prime collective ».

- Si $G_s^\theta(x)$ est la fonction de répartition du processus cumulé d'un risque de paramètre θ, la prime $P^\theta = F(G_s^\theta(x))$ est la prime de risque.

- Si $G_s(x)$ est processus cumulé d'un ensemble de risques dont les paramètres θ appartiennent à un ensemble Θ, la prime $P = F(G_s(x))$ est la prime collective.

1.4.1 Primes de risque

Soit θ le paramètre de risque, la moyenne est :

$$\mu(\theta) = \int_{\mathbb{R}} x dG_s^\theta(x)$$

et la variance est :

$$\sigma^2(\theta) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu(\theta))^2 dG_s^\theta(x)$$

Les primes sont donc suivant le fonctionnelle utilisée :

$$P_1 = (1+\lambda)\mu(\theta)$$

$$P_2 = \theta + \alpha(\theta)$$

$$P_3 = (1+\beta)\theta$$

Pour la loi Poisson (θ), $\mu(\theta) = \sigma^2(\theta) = \theta$ et donc :

$$P_1 = (1+\lambda)\theta$$

$$P_2 = \theta + \alpha\sqrt{\theta}$$

$$P_3 = (1+\beta)\theta$$

1.4.2 Primes collectives

Les paramètres de risques $\theta \in \Theta$ dont la structure est définie par la fonction de structure $U(\theta)$. Le calcul est envisagé de deux manières différentes

Premier calcul

$U(\theta)$ est une fonction certaine, en intégrant les primes individuelles on obtient la prime collective

$$G_s(x) = \int_{\Theta} G_s^{\theta}(x) dU(\theta)$$

La moyenne

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x dG_s(x) = \int_{\Theta}\int_{\mathbb{R}} x G_s^{\theta}(x) dU(\theta) = \int_{\Theta} \mu(\theta) dU(\theta) = E(\mu(\theta))$$

La variance

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 dG_s(x) = \int_{\Theta}\int_{\mathbb{R}} (x-\mu(\theta)+\mu(\theta)-\mu)^2 G_s^{\theta}(x) dU(\theta)$$

$$= \int_{\Theta}\int_{\mathbb{R}} (x-\mu(\theta))^2 G_s^{\theta}(x) dU(\theta) + \int_{\Theta}\int_{\mathbb{R}} (\mu(\theta)-\mu)^2 G_s^{\theta}(x) dU(\theta)$$

$$= \int_{\Theta} \sigma^2(\theta) dU(\theta) + \int_{\Theta} (\mu(\theta)-\mu)^2 dU(\theta)$$

$$= E\left[\sigma^2(\theta)\right] + V\left[\mu(\theta)\right]$$

Les primes sont donc suivant le principe utilisé :

$$P_1 = (1+\lambda)\mu = (1+\lambda)E\left[\mu(\theta)\right]$$

$$P_2 = \mu + \alpha\sigma = E\left[\mu(\theta)\right] + \alpha(E\left[\sigma^2(\theta)\right] + V\left[\mu(\theta)\right])^{1/2}$$

$$P_3 = \mu + \beta\sigma^2 = E\left[\mu(\theta)\right] + \beta E\left[\sigma^2(\theta)\right] + \beta V\left[\mu(\theta)\right]$$

Second calcul

Dans le cas général, la fonction de structure est une variable aléatoire et donc pour calculer les primes collectives l'assureur doit prendre également une ″sécurité″ sur la répartition des paramètres.

$U(\theta)$ est une variable aléatoire. On associée au paramètre θ la prime de risque $P(\theta)$. $P(\theta)$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$V_p(x) = P(P(\theta) \leq x)$$

Cette fonction est entièrement déterminée par la fonction de structure U et par la prime $P(\theta)$. On obtient la prime collective en appliquant une deuxième fois le fonctionnel, soit :

$$P^* = F(V_p(x))$$

et suivant les principes utilisés la prime est :

1/ Le principe de la moyenne donne :

$$P_1^* = (1+\lambda)\int_{\Theta} P(\theta)dU(\theta) = (1+\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}}\int_{\Theta} xdG_s^{\theta}(x)dU(\theta)$$

$$P_1^* = (1+\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} xdG_s(x) = (1+\lambda)(1+\lambda)\int_{\mathbb{R}} xdG_s(x) = (1+\lambda)P_1$$

2/ Le principe de l'écart-type :

$$P_2^* = E\left[\mu(\Theta)\right] + \alpha E\left[\sigma(\Theta)\right] + \alpha\left[V\left[\mu(\Theta) + \alpha\sigma(\Theta)\right]\right]^{1/2}$$

Mais α étant petit devant1, le terme α^2 est négligé, soit :

$$P_2^* = E\left[\mu(\Theta)\right] + \alpha E\left[\sigma(\Theta)\right] + \alpha\left[V\left[\mu(\Theta)\right]\right]^{1/2}$$

3/ Le principe de la variance donne :

$$P_3^* = E\left[\mu(\Theta)\right] + \beta(E\left[\sigma^2(\Theta)\right] + V\left[\mu(\Theta) + \beta\sigma^2(\Theta)\right])$$

en négligent le terme en β^2 il vient :

$$P_3^* = E\left[\mu(\Theta)\right] + \beta E\left[\sigma^2(\Theta)\right] + \beta V\left[\mu(\Theta)\right] = P_3$$

1.5 Modèles classiques de la théorie de risque

Un des principales préoccupations actuarielles d'une compagne d'assurance est d'évaluer le risque global lié au portefeuille de contrats d'assurances qu'elle a souscrits.

En théorie de risque, il existe deux modèles pour représentant le montant total des réclamations d'un portefeuille de risque :

1.5.1 Modèle individuel du risque

Ce modèle consiste à prendre chacun des risques d'un portefeuille séparément et d'y attribuer une variable aléatoire représenter le montant des réclamations y étant associé. La somme de ces variables aléatoires donne le montant total des sinistres. En d'autre terme,

$$S = X_1 + \ldots + X_n$$

où X_i est le montant des réclamation du i^{ieme} risque, n le nombre de risque dans le portefeuille et S le montant total des réclamation.

En particulier si les risques sont équidistribués et n est grand le théorème central limite[2] permet d'affirmer qu'une loi normale est une modélisation raisonnable pour la loi de S

$$\frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\ell} N(0,1)$$

ou $\mu et \sigma$ sont les paramètre des $(X_i)_{1 \le i \le n}$ (les $(X_i)_i$ sont supposées indépendantes et identiquement distribuées)

[2] Si n n'est pas très grand, on estime la distribution de S comme convolée des n distributions des variables X_i

1.5.2 Modèle collective

Le terme « modèle collectif » désigne toute modélisation de la sinistralité comme composition d'une variable aléatoire représentant le montant unitaire d'un sinistre par une variable de comptage, dit de « fréquence »

Dans ce qui suit en fera les hypothèses suivants :

- N est une variable aléatoire à valeurs entières ;
- $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées avec fonction de répartition F_X
- La variable aléatoire N est supposée indépendante de la suite $X_1,...,X_n$

Donc S est une somme aléatoire de variables aléatoires ($S = X_1 + ... + X_N$) dont la loi dépend de celles de N et des X_i.

Cette représentation du risque aléatoire encouru par l'assureur est avantageuse, d'une part parce qu'elle permet de départager l'impact du comportement aléatoire de N et des X_i sur le montant total de réclamation, mais aussi parce qu'il est plus simple de modéliser séparément ces deux composantes.

1.5.3 Propriétés classiques du modèle collectif

Désignons par $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ un modèle collectif. Les variables $(X_i)_{1 \le i \le n}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et les variables $\{(X_i)_{1 \le i \le n}, N\}$ sont indépendantes, alors l'espérance et la variance de S deviennent simple à calculer.

Proposition 1.1 :

- $E(S) = E(N)E(X)$

- $V(S) = E(N)V(X) + (E(X))^2 V(N)$

On remarque l'espérance et la variance de S s'écrit en fonction de l'espérance et la variance de X et de N, ce qui facilité les calculs en pratique.

Proposition 1.2 :

La fonction génératrice de S est donnée par

$$M_s(t) = M_N(\ln[M_X(t)])$$

Proposition 1.3 :

La fonction de répartition de S est donnée par

$$F_S(s) = \sum_{n\geq 0} p_n F_X^{*n}(s)$$

où F_X est la fonction de répartition commune des $X_{i,}$

où ^{*n} est la convolée n fois de la fonction de répartition F_X , avec $p_n = P(N = n)$ et F_X^{*0} est défini comme suit

$$F_X^{*0}(s) = \begin{cases} 0 \text{ si s } \leq 0 \\ \\ 1 \text{ si s } \geq 0 \end{cases}$$

A laide de F_S on retrouve la fonction de densité de S :

$$f_S(s) = \sum_{n\geq 0} p_n f_X^{*n}(s)$$

Exemple 1.1

Supposons que $N \sim Poisson(\lambda)$, de sorte que

$$p_n = P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n \geq 0, \lambda > 0$$

On sait que $E(N) = V(N) = \lambda$, déduisons-en l'espérance et la variance de S lorsque X obéit à une loi quelconque

On a

$$E(S) = E(N)E(X) = \lambda E(X)$$

et

$$V(S)=E(N)V(X)+E(X)^2V(N)=\lambda V(X)+\lambda E(X)^2=\lambda E(X^2)$$

On peut ainsi calculer la distribution de S :

$$M_N(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_S(t)=M_N(\ln\left[M_X(t)\right])=\exp\left[\lambda M_X(t)-1\right]$$

Or, ceci est la fonction génératrice des moments d'une distribution de poisson composée. et donc :

$$F_S(s)=\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}F_X^{*n}(s)$$

où F_X^{*n} est le n^ième^ convolution de X .

1.5.4 Principale distribution de N

Selon les positions respectives de la variance et de l'espérance de N il y a trois type de distributions utilisées en pratique

- La variance est significativement inférieur à l'espérance:loi binomiale $\beta(m,p)$

sa fonction de probabilité est définie par :

$$p_n=P(N=n)=C_m^n p^n(1-p)^{m-n}, n\in\{0,1,...m\}$$

- La variance est équivalente à l'espérance : loi de Poisson (λ)

sa fonction de probabilité est définie par :

$$p_n=P(N=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, n\geq 0, \lambda>0$$

- La variance est significativement supérieur à l'espérance : loi de poisson mélange en particulier la loi binomiale négative $BN(r,p)$

sa fonction de probabilité est définie par :

$$p_n=P(N=n)=C_{n+r-1}^{r-1}p^r(1-p)^n, n\in\mathbb{N}$$

La distribution binomiale négative est fréquemment utilisée comme solution de rechange à la loi de poisson. On peut aussi considérer cette loi comme une généralisation de la loi de poisson (mélange de poisson de paramètre λ inconnue obéissant à une loi Gamma)

1.5.5 Principales distributions du montant d'une réclamation X (lois de coût unitaire)

Les lois les plus utilisées pour modéliser le montant d'une réclamation généré à l'intérieur d'un portefeuille sont résumées dans le tableau suivant :

Distribution	Fonction densité f_X
Exponentielle (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$
Gamma ((α, β))	$\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0$
Log-normale (μ, σ)	$\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(\frac{\ln x-\mu}{\sigma})^2}, x > 0$
Pareto (α, β)	$\dfrac{\alpha}{\beta}(\dfrac{\beta}{x})^{\alpha+1}, x > \beta$
Weibull (α, λ)	$\dfrac{\lambda}{\beta} x^{\lambda-1} e^{-x/\beta}, x > 0$
Inverse gaussienne (μ, β)	$\mu(2\pi\beta x^3)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/2\beta x}, x > 0$

Tableau 1.2 : Distribution du montant de réclamation

1.6 Méthodes de calcul de la distribution d'un modèle collectif

On présente deux méthodes de calcul de la distribution d'un modèle collectif plus légères que le calcul.

1.6.1 Algorithme de Panjer (Formule récursive)

Cet algorithme permet de calculer de manière économique la distribution de S lorsque la variable X est discrète. Il permet d'approximer la fonction de répartition de S dans le cas général en discrétisant la distribution de X (Panjer et al. (1983)).

Proposition : (Algorithme de Panjer)

Soit $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ une variable composée, telle que la variable X est discrète, de loi de probabilité $p(x) = P(X = x)$. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = p_n = (a + \frac{b}{n}) p_{n-1}$$

Alors $f(s) = P(S = s)$ vérifie

$$f(0) = \begin{cases} p_{0,} & si p(0) = 0 \\ \\ M_N(\ln p(0)) & si p(0) > 0 \end{cases}$$

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, f(s) = \frac{1}{1 - ap(0)} \sum_{h=1}^{s} (a + \frac{bh}{s}) p(h) f(s-h)$$

1.6.2 Approximation d'Edgeworth[3]

Proposition :

Soit $S = \sigma Z + \mu$ où $\mu = E(S) et \sigma = \sqrt{V(S)}$. Alors l'approximation de la fonction de répartition de S est :

$$F_s(s) \simeq \Phi(\frac{s-\mu}{\sigma}) - \frac{E(Z^3)}{6}\Phi^{(3)}(\frac{s-\mu}{\sigma}) + \frac{E(Z^4)}{24}\Phi^{(4)}(\frac{s-\mu}{\sigma})$$

Φ : est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

[3] La méthode d' Approximation d'Edgeworth utilise le développement en série de Taylor pour estimer la distribution de S

Chapitre II

Chapitre II : Estimation de la prime de Bayes

Introduction

La tarification Bayesienne va reposer sur l'historique des sinistres pour réviser le montant de la prime pure. En effet, si l'assureur ne peut observer directement si tel assuré représente un bon ou un mauvais risque, le passé sinistre va néanmoins lui fournir une information sur la qualité du risque.

I- Inférence bayesienne

1. La règle bayesienne

Soit $(X,\Theta)^T$ un vecteur aléatoire à valeur dans l'espace $\chi \times \Omega$ et soit $p(x,\theta)$ sa densité. Alors

$$\pi(\theta) = \int_{\chi} p(x,\theta)dx \quad \text{et} \quad q(x) = \int_{\chi} p(x,\theta)d\theta \qquad (2.1)$$

Sont les densités marginales de Θ et X, respectivement. L'approche bayesienne suppose que pendant l'expérience on n'observe que des réalisations de X, c'est-à-dire on suppose que X est une variable observable appelé un échantillon. Par contre la deuxième composante Θ est inconnue et non observée et considérée comme un paramètre. Supposons que la densité conditionnelle de X sachant la valeur de Θ est connue. Notons

$$\pi(x/\theta) = \frac{p(x,\theta)}{\pi(\theta)} \qquad (2.2)$$

La densité conditionnelle de X sachant que $\Theta = \theta$, et soit

$$q(\theta/x) = \frac{p(x,\theta)}{q(\theta)} \qquad (2.3)$$

La densité conditionnelle de Θ sachant que $X = x$, puisque

$$p(x,\theta) = \pi(x/\theta)\pi(\theta) \qquad (2.4)$$

de (2.1) et (2.4) on tire les formules de Bayes :

$$q(\theta/x)=\frac{\pi(x/\theta)\pi(\theta)}{q(x)}=\frac{\pi(x/\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Omega}\pi(x/\theta)\pi(\theta)d\theta} \qquad (2.5)$$

et

$$\pi(x/\theta)=\frac{q(\theta/x)q(x)}{\pi(\theta)}=\frac{q(\theta/x)q(x)}{\int_{\Omega}q(\theta/x)q(x)dx} \qquad (2.6)$$

La densité marginale $\pi(\theta)$ de Θ est appelé la densité à priori et la densité conditionnelle $q(\theta/x)$ de $X=x$ est appelée la densité à posteriori.

L'inférence statistique sur Θ dans l'optique de l'approche bayesienne est donnée en utilisant la densité à posteriori $q(\theta/x)$ basée sur l'échantillon X , puisque toute information probabiliste sur Θ est exprimée en termes de $q(\theta/x)$. S'il est nécessaire d'estimer la valeur $U(\theta)$, où θ est une réalisation non observée du paramètre aléatoire Θ, alors on utilise l'espérance conditionnelle $E(U(\Theta)/X)$ comme l'estimateur ponctuel pour $U(\theta)$.

2. Estimation ponctuelle

Supposons que pendant une expérience une réalisation de X est observée et la réalisation correspondante de Θ est inconnue. Il faut estimer la valeur θ de la réalisation non observée de Θ. Soit

$$\Theta^*=\Theta^*(X)$$

Un estimateur ponctuel de θ.

L'erreur systématique de Θ^* est

$$E(\Theta^*-\Theta/X)=E(\Theta^*/X)-E(\Theta/X) \qquad (2.7)$$

où

$$E(\Theta/X=x)=\int_{\Omega}\theta q(\theta/x)d\theta \quad \text{et} \quad E(\Theta^*/X=x)=\Theta^*(x) \qquad (2.8)$$

Définition 2.1: L'estimateur $\hat{\Theta}(X)$ est sans biais si l'erreur systématique est zéro, c'est-à-dire, si

$$\hat{\Theta}(x) = E(\Theta / X = x) \qquad (2.9)$$

Il s'ensuit que l'estimateur sans biais est unique presque sûrement.

Théorème 2.1: [22]

L'estimateur sans biais

$$\hat{\Theta}(X) = E(\Theta / X) = \int_{\Omega} \theta q(\theta / X) d\theta \qquad (2.10)$$

est le meilleur au sens de moindres carrés.

Définition 2.2:

$\hat{\Theta}(X)$ est appelé estimateur bayesien.

3. Prime de risque et Prime collective

Une prime est un montant fixe perçu par la compagnie, dans le but de compenser les dépenses résultant de sinistres. Désignons par S la variable aléatoire représentant le montant des sinistres au cours d'une année, par $G_\lambda(x)$ sa fonction de répartition. Si la distribution de la variable S, pour chaque contrat, est parfaitement connue, il serait facile de déterminer une prime proportionnelle pour chaque risque. Cependant cette hypothèse, en pratique, n'est jamais vérifiée.

Chaque risque peut être repéré au moyen d'un paramètre λ (S_λ : montants de sinistre) de fonction de répartition $G_\lambda(x)$. Le collective (ensemble de risque) peut ainsi être identifié avec l'ensemble Λ des valeurs que peut prendre λ.

Un principe de calcul des primes H est une règle qui permet d'associer à toute fonction de répartition $G_\lambda(x)$ un nombre P

$$P = H\left[G(x)\right]$$

où H est une fonctionnelle

Si $G_\lambda(x)$ est la fonction de répartition correspondant à un risque particulier λ, la prime correspondante est appelée prime de risque (prime individuelle)

$$P(\lambda) = H\left[G(x)\right]$$

Si $G_\lambda(x)$ est la fonction de répartition du collectif, nous parlons de prime collective

$$P = H\left[G(x)\right]$$

Pour étudier les rapports existants entre la prime de risque et la prime collective, il est nécessaire de décrire la structure du collectif. Cette information nous est fournie par une fonction de structure $U(\lambda)$ (indiquant la distribution de λ au sein de Λ). Si λ est un paramètre de risque réel (unidimensionnel), alors :

$$U(\theta) = p(\lambda \le \theta)$$

Nous avons par la théorie des probabilités totales, une relation entre la distribution S des montants de sinistres dans le collectif et aux distributions S_λ par :

$$G(x) = \int_\Lambda G_\lambda(x) dU(\lambda)$$

Par le principe de l'espérance mathématique, la prime réclamée à l'assuré est égale à l'espérance mathématique du risque augmentée d'un chargement de sécurité proportionnel à cette espérance.

3.1 Prime de risque

$$P(\lambda) = (1+\alpha)\mu(\lambda)$$

où $\mu(\lambda) = \int_0^{+\infty} x dG_\lambda(x)$ est l'espérance de S_λ

3.2 Prime collective

$$P = (1+\alpha)\mu$$

où $\mu = E_\lambda\left[\mu(\lambda)\right] = \int_\Lambda \mu(\lambda) dU(\lambda)$ est l'espérance mathématique prise par rapport à la fonction de structure $U(\lambda)$.

4. Théorie de la crédibilité

Pour un portefeuille d'assurance hétérogène, les assurés ne sont pas tous égaux devant le risque, certains présentant un profil plus dangereux que d'autres. Appliquer la même prime pour tous pourrait don paraître inéquitable ce qui induit une surtarification de certains assurés. On peut diminuer l'hétérogénéité du portefeuille en le divisant en sous portefeuille de risques homogènes (sur base de caractéristiques, telles que le sexe, l'âge, etc.). Les caractéristiques dans chaque sous portefeuille n'expliquent pas parfaitement la dangerosité des assurés. Il est donc assez naturel d'utiliser la sinistralité à un individu pour réévaluer le montant de sa prime.

Cette pratique relève de la théorie de la crédibilité.

L'idée fondamental de cette théorie peut se résumer comme suit : Supposons que, pour une police particulière, on ait observé, pour les n premiers périodes, les montants des sinistres suivants : $x_1, x_2, ..., x_n$; x_i est le montants de sinistre généré par cette police durant la i$^{\text{ème}}$ année d'observation. La pure observée est donc

$$p_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Si l'assureur applique cette prime, quelle prime devrait être payer par un assuré dont le montant de sinistre est nul $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$. Donc l'assureur est confronté à un problème, soit qu'il exige une prime collective p_{coll} identique pour tous les assurés (mais pourrait mécontenter les « bons » assurés qui, s'estimant lésés), en plus l'assureur n'a pas d'intérêt d'appliquer la prime p_n et p_{coll}. Les actuaires ont alors songés à réclamer une prime entre p_n et p_{coll} :

$$p_{créd} = zp_n + (1-z)\,p_{coll}$$

où z est un facteur de crédibilité

Remarque: ce facteur z mesure la crédibilité que l'on peut accorder à la prime p_n

4.1 La crédibilité bayesienne

Considérons un portefeuille de contrats segmenté en k contrats (polices)

a/ Cas d'un portefeuille homogène : ce cas n'est jamais rencontré en pratique, l'homogénéité se traduit par le faite que toutes les contrats sont indépendantes et identiques. C'est-à-dire, si on considère que S_i est le montant annuel des sinistres de la i$^{\text{ème}}$ contrat (i=1,…,k), alors les variables aléatoires S_i sont indépendantes.

b/ Cas d'un portefeuille hétérogène : ce cas est souvent rencontré en pratique, l'hétérogénéité se traduit le fait que les risques des sinistres ne sont pas les mêmes pour toutes les contrats. (en assurance automobile par exemple, les assurés ne conduisent pas de la même façon, ce qui explique bien que le risque d'accident est plus ou moins grand selon les assurés).

4.2 La prime bayesienne

Supposons que, pour une police particulière, on ait observé, pour les n premiers périodes, les montants des sinistres suivants : $S_1 = x_1, ..., S_n = x_n$

Théorème 4.2.1 : [22]

La prime pure a posteriori (appelée aussi prime de Bayes) pour la période n+1 est donnée par : (au sens de moindres carrés)

$$\Pi(x_1, ..., x_n) = E\left[\mu(\Lambda) / x_1, ..., x_n\right]$$

4.3 Famille exponentielle et crédibilité exacte

La prime bayesienne $E(\mu(\Theta)/S)$ constitue la prime (au sens de moindres carrés) à chargé à un assuré compte tenu de l'expérience accumulée. Le calcule de la prime dans le cas ou les distributions de S/Θ et Θ sont connues, devient « plus ou moins facile ».

Exemple 2.1 : (Bailey 1950)

Dans le cas ou, la fonction de densité des montants de sinistres conditionnelle au paramètre de risque S/Θ obéit à une loi de Bernoulli c'est-à-dire $S/\Theta \sim \beta(\Theta)$

$$f(x/\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, x = 0,1$$

et où le paramètre de risque est de distribution $\beta eta(\alpha, \beta)$ de densité

$$u(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}, \alpha, \beta > 0$$

On a
$$u(\theta / x_1,...,x_n) = \frac{\prod_{j=1}^{n} f(x_j/\theta)u(\theta)}{\int_{\theta\in\Theta} \prod_{j=1}^{n} f(x_j/\theta)u(\theta)d\theta}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{1-x_j} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}}{\int_0^1 \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{1-x_j} \frac{\Gamma(\alpha\setminus\beta)\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}d\theta}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\sum_{j=1}^{n}x_j)\Gamma(\beta+n-\sum_{j=1}^{n}x_j)}\theta^{\sum_{j=1}^{n}x_j+\alpha-1}(1-\theta)^{\beta+n-\sum_{j=1}^{n}x_j-1}$$

Par conséquent $\theta / x_1,...,x_n \sim \beta(\alpha+\sum_{j=1}^{n}x_j, \beta+n-\sum_{j=1}^{n}x_j)$

On obtient la prime bayesienne suivante :

$$E(\mu(\Theta)/S_1 = x_1,...,S_n = x_n) = \frac{\alpha+\sum x_i}{\alpha+\beta+n} = \frac{n}{\alpha+\beta+n}\overline{S} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Avec $z = \frac{n}{\alpha+\beta+n}$ et $E(\mu(\Theta)) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

Dans certain cas la forme de la prime peut après une seule année être complexe, voir impossible à calculer analytiquement.

Exemple 2.2 (Norberg1979)

Soit $S/\Theta \sim \beta(\Theta)$ et $\Theta \sim U_{(a,b)}$ alors :

$$E(\mu(\Theta)/S_1 = x_1,...,S_n = x_n) = \frac{\sum_{j=1}^{n-n\overline{S}} (-1)^j \frac{b^{n\overline{S}+j+2} - a^{n\overline{S}+j+2}}{(n-n\overline{S}-j)!\,j!(n\overline{S}+j+2)}}{\sum_{j=1}^{n-n\overline{S}} (-1)^j \frac{b^{n\overline{S}+j+1} - a^{n\overline{S}+j+1}}{(n-n\overline{S}-j)!\,j!(n\overline{S}+j+1)}}$$

La prime bayesienne est compliqué (non linéaire), de plus elle n'est pas nécessairement entre l'expérience $\overline{S}$ et la prime collective μ

4.4 Crédibilité bayesienne pour les combinaisons de distributions de la famille exponentielle

4.4.1 Distribution conditionnelles S/θ discrètes

$f(s/\theta)$	Géométrique (θ) $\theta(1-\theta)^{s}$	Poisson(θ) $\dfrac{\theta^{s}e^{-\theta}}{s!}$
$u(\theta)$	Bêta (α,β) $\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$	Gamma(α,β) $\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{\beta\theta}$
$f(s)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+s+1)}$	Binomiale Négative$(\alpha,\beta/\beta+1)$ $\dfrac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(s+1)\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha-s}$
$u(\theta/x_1,...,x_n)$	Bêta$(\alpha+n,\beta+\sum_{j=1}^{n}s_j)$ $\tilde{\alpha}=\alpha+n,\tilde{\beta}=\beta+\sum_{j=1}^{n}s_j$	Gamma$(\alpha+\sum_{j=1}^{n}s_j,\beta+n)$ $\tilde{\alpha}=\alpha+\sum_{j=1}^{n}s_j,\tilde{\beta}=\beta+n$
$\mu(\theta)$	$\dfrac{(1-\theta)}{\theta}$	θ
$E(\mu(\Theta))$	$\dfrac{\beta}{\alpha-1}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$
$E(\mu(\Theta)/S)$	$\dfrac{\beta+\sum_{j=1}^{n}s_j}{\alpha+n-1}$	$\dfrac{\alpha+\sum_{j=1}^{n}s_j}{\beta+n}$
z	$\dfrac{n}{n+\alpha-1}$	$\dfrac{n}{n+\beta}$

Tableau 4.3.1 : Crédibilité bayesienne exacte : combinaisons de distributions discrètes

4.4.2 Distribution conditionnelles S/θ continues

$f(s/\theta)$	Exponentielle (θ) $\theta e^{-\theta s}$	Normale (θ,σ_2^2) $\Phi(\frac{s-\theta}{\sigma_2})$
$u(\theta)$	Gamma (α,β) $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{\beta\theta}$	Normale (μ,σ_1^2) $\Phi(\frac{\theta-\mu}{\sigma_1})$
$f(s)$	Pareto (α,β) $\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+s)^{\alpha-1}}$	Normale $(\mu,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ $\Phi(\frac{s-\mu}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}})$
$u(\theta/x_1,...,x_n)$	Gamma $(\alpha+n,\beta+\sum_{j=1}^{n}s_j)$ $\tilde{\alpha}=\alpha+n,\tilde{\beta}=\beta+\sum_{j=1}^{n}s_j$	Normale $(\tilde{\mu},\tilde{\sigma}_1^2)$ $\tilde{\mu}=\frac{\sigma_1^2\sum_{j=1}^{n}s_j+\sigma_2^2\mu}{\sigma_1^2 n+\sigma_2^2}$
$\mu(\theta)$	$\frac{1}{\theta}$	θ
$E(\mu(\Theta))$	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	μ
$E(\mu(\Theta)/S)$	$\frac{\beta+\sum_{j=1}^{n}s_j}{\alpha+n-1}$	$\frac{\sigma_1^2\sum_{j=1}^{n}s_j+\sigma_2^2\mu}{\sigma_1^2 n+\sigma_2^2}$
z	$\frac{n}{n+\alpha-1}$	$\frac{n}{n+\sigma_2^2/\sigma_1^2}$

Tableau 4.3.2 : Crédibilité bayesienne exacte : combinaisons de distributions discrètes

Remarque :

1- Dans les deux tableaux ci-dessus, on remarque que la distribution a posteriori de Θ est de même type, avec de nouveau paramètres, que sa distribution a priori

2- La prime calculée pour les quatre combinaisons est exacte $E(\mu(\Theta)/S)$ est une fonction linéaire des observations.

3- Les quatre fonctions de vraisemblance appartiennent toutes à la même famille de distribution, la famille exponentielle.

5. Modèle de Jewell (1974)

Le problème de la crédibilité exacte est la détermination des couples $(f(s/\theta),u(\theta))$ pour lesquels on a une prime bayesienne linéaire.

Définition 5.1: (conjuguée naturelle)

Soient $u(\theta)$ et $u(\theta/x_1,...,x_n)$ les distributions a priori et a posteriori de Θ respectivement.

On dit que $u(\theta)$ est la conjuguée naturelle de la fonction $f(x/\theta)$ si $u(\theta/x_1,...,x_n)$ est du même type (avec de nouveau paramètre) que sa distribution a priori.

Théorème 5.1: Jewell (1974) [19]

Soit $f(x/\theta)$ un membre de la famille exponentielle unidimensionnelle (Lehmann (1983)), dont la densité peut s'écrire

$$f(x/\theta)=\frac{p(x)e^{-\theta x}}{q(\theta)}, \quad x>0 \tag{5.1}$$

Alors :

1/ La conjuguée naturelle de $f(x/\theta)$ est :

$$u(\theta)=\frac{q(\theta)^{-t_0}\,e^{-\theta x_0}}{c(t_{0,}x_0)}$$

où $t_0>0$ et $x_0>0$ seront définie dans la preuve et $c(t_0,x_0)$ est un facteur de normalisation dépendant des deux paramètres t_0 et x_0.

2/ L'estimateur bayesien $E(\mu(\Theta)/\underline{S})$ est une fonction linéaire des observations et peut s'écrire comme une prime de crédibilité.

Preuve :

De l'équation (5.1) on a :

$$q(\theta)=\int_0^{+\infty} p(x)e^{-\theta x}dx \quad \text{et} \quad -\frac{q^{'}(\theta)}{q(\theta)}=\int_0^{+\infty} x\frac{p(x)e^{-\theta x}}{q(\theta)}dx=\mu(\theta) \qquad (5.2)$$

Dans ce cas, la loi a posteriori du paramètre de risque prend la forme

$$u(\theta/x_1,...,x_n)=\frac{u(\theta)\prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)}{f(x_1,...,x_n)}$$

$$=\frac{u(\theta)\prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)}{\int_{\lambda\in\Theta} u(\lambda)\prod_{i=1}^{n} f(x_i/\lambda)d\lambda}$$

$$=\frac{u(\theta)\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\int_{\lambda\in\Theta} u(\lambda)\left(\frac{1}{q(\lambda)}\right)^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}d\lambda}$$

On remarque que $u(\bullet/x_1,...,x_n)$ ne dépend des observations qu'au travers de n et $t=\sum_{i=1}^{n}x_i$, c'est-à-dire

$$u(\theta/x_1,...,x_n)=\frac{u(\theta)\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^n e^{-\theta t}}{\int_{\lambda\in\Theta} u(\lambda)\left(\frac{1}{q(\lambda)}\right)^n e^{-\lambda t}d\lambda}$$

Si on prend

$$u(\theta)=\frac{q(\theta)^{-t_0}\,e^{-\theta x_0}}{c(t_{0,}x_0)}=u(\theta;t_0,x_0) \qquad (5.3)$$

A-t-on que $u(\bullet / x_1,...,x_n)$ et $u(\bullet)$ ont même forme analytique

De (5.3) on a :

$$c(t_0,x_0)=\int_{\theta\in\Theta} q(\theta)^{-t_0}e^{-\theta x_0}d\theta$$

Alors

$$u(\theta / x_1,...,x_n)=\frac{u(\theta)\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^n e^{-\theta t}}{\int_{\lambda\in\Theta} u(\lambda)\left(\frac{1}{q(\lambda)}\right)^n e^{-\lambda t}d\lambda}$$

$$=\frac{\frac{(q(\theta))^{-t_0}e^{-\theta x_0}}{c(t_0,x_0)}\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^n e^{-\theta t}}{\int_{\lambda\in\Theta}\frac{(q(\lambda))^{-t_0}e^{-\lambda x_0}}{c(t_0,x_0)}\left(\frac{1}{q(\lambda)}\right)^n e^{-\lambda t}d\lambda}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^{n+t_0} e^{-\theta(t+x_0)}}{\int_{\lambda\in\Theta}\left(\frac{1}{q(\lambda)}\right)^{n+t_0} e^{-\lambda(t+x_0)}d\lambda}$$

On déduit que :

$$u(\theta / x_1,...,x_n)=\frac{\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^{n+t_0} e^{-\theta(t+x_0)}}{\int_{\lambda\in\Theta}\left(\frac{1}{q(\lambda)}\right)^{n+t_0} e^{-\lambda(t+x_0)}d\lambda}=\frac{\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^{n+t_0} e^{-\theta(t+x_0)}}{c(n+t_0,t+x_0)}=u(\theta;n+t_0,t+x_0) \quad (5.4)$$

On retrouve donc une loi de famille des fonctions de structure conjuguées mais les paramètres $n+t_0$ et $t+x_0$.

2/

$$\mu_{p_{coll}} = E\left(E(\underset{p_{coll}}{S}/\Theta)\right) = E(S) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int \mu(\theta)u(\theta;t_0,x_0)d\theta$$

$$= -\int \frac{q'(\theta)}{q(\theta)} \frac{e^{-\theta x_0}}{(q(\theta))^{t_0} c(t_0,x_0)} d\theta$$

$$= \frac{1}{t_0}\left[u(\theta;t_0,x_0)\right]_{\Theta} + \frac{x_0}{t_0}$$

En faisant l'hypothèse que $u(.;t_0,x_0)$ est nulle aux extrémités de Θ alors on a :

$$\mu = \frac{x_0}{t_0} \tag{5.5}$$

La prime bayesienne :

$$\Pi(x_1,...,x_n) = E\left[\mu(\Lambda)/x_1,...,x_n\right] = \int_{\theta\in\Theta} \mu(\theta)u(\theta/x_1,...,x_n)d\theta$$

$$= \int_{\theta\in\Theta} \mu(\theta)u(\theta;n+t_0,t+x_0)d\theta$$

$$= \frac{t+x_0}{n+t_0} = \frac{t_0}{n+t_0}\frac{x_0}{t_0} + \frac{n}{n+t_0}\frac{t}{n}$$

Alors

$$\Pi(x_1,...,x_n) = E\left[\mu(\Lambda)/x_1,...,x_n\right] = \frac{t_0}{n+t_0}\mu + \frac{n}{n+t_0}\overline{S}$$

Avec $z = \dfrac{n}{n+t_0}$

Proposition 5.1: [19]

Soit $s^2 = E(V(X/\Theta))$, $a = V(\mu(\theta))$. Alors :

$$t_0 = \frac{a}{s^2} = \frac{E(V(X/\Theta))}{V(\mu(\Theta))}$$

Preuve :

De l'équation (5.4)

$$u(\theta; t_0, x_0) = \frac{\left(\frac{1}{q(\theta)}\right)^{t_0} e^{-\theta x_0}}{c(t_0, x_0)}$$

On a :

$$\frac{d}{d\theta} u(\theta; t_0, x_0) = u(\theta; t_0, x_0)\left[-t_0 \frac{q'(\theta)}{q(\theta)} - x_0\right] \qquad (5.6)$$

De (5.2) et (5.6) on déduit que :

$$\frac{d}{d\theta} u(\theta; t_0, x_0) = u(\theta; t_0, x_0)\left[t_0 \mu(\theta) - x_0\right]$$

Et

$$\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta; t_0, x_0) = \left[t_0 \mu(\theta) - x_0\right] u'(\theta; t_0, x_0) + t_0 \mu'(\theta) u(\theta; t_0, x_0)$$

De (5.2) on : $E(X^2/\theta) = q''(\theta)/q(\theta)$ et par la suite, on trouve que :

$$\frac{d}{d\theta} \mu(\theta) = -V(X/\theta)$$

Alors

$$\frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta; t_0, x_0) = \left[t_0 \mu(\theta) - x_0\right]^2 u(\theta; t_0, x_0) - t_0 V(X/\theta) u(\theta; t_0, x_0) \qquad (5.7)$$

Si $u(\theta; n+t_0, t+x_0)$ est nulle aux extrémités de Θ et en intégrant deux fois l'équation (5.7) par rapport à θ, on obtient : $(\mu = \frac{x_0}{t_0})$

$$0 = E\left[t_0\mu(\theta) - x_0\right]^2 - t_0E\left[V(X/\theta)\right] = t_0^2E\left[\mu(\theta) - \frac{x_0}{t_0}\right]^2 - t_0E\left[V(X/\theta)\right]$$

$$= t_0^2V\left[\mu(\theta)\right] - t_0E\left[V(X/\theta)\right]$$

Donc

$$t_0 = \frac{E\left[V(X/\Theta)\right]}{V\left[\mu(\Theta)\right]}$$

Bailey et Mayerson avaient su en leur temps prouver ce résultat pour la plupart des cas du tableau (4.3.1, 4.3.2), mais l'apport de Jewell fut d'en faire un résultat général. D'une utilité restreinte pour faire les calculs, surtout si l'on s'en tient aux cas types, le modèle de Jewell a néanmoins d'unifier tout les cas possible en une formulation générale.

Le tableau suivant présente les valeurs de x_0 et t_0 pour les combinaisons des tableaux (4.3.1, 4.3.2) et de l'exemple de (Bailey 1950)

Combinaison	$\mu = E\left[\mu(\theta)\right] - \frac{x_0}{t_0}$	$t_0 = \frac{E\left[V(X/\Theta)\right]}{V\left[\mu(\Theta)\right]}$	x_0
Bernoulli / Bêta	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\alpha+\beta$	α
Géométrique / Bêta	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	$\alpha-1$	β
Poisson / Gamma	$\frac{\alpha}{\beta}$	β	α
Exponentielle / Gamma	$\frac{\beta}{\alpha-1}$	$\alpha-1$	β
Normale / Normale	μ'	σ_2^2/σ_1^2	$\mu'\sigma_2^2/\sigma_1^2$

Tableau 5.1 : Valeurs de x_0 et t_0 de la crédibilité bayesienne exacte

II- Tarification d'expérience par les lois mélangées

1. Introduction

Du point de vue technique, il peut être utile que la prime tienne compte du cours des sinistres d'un contrat. Exception faite, toutefois, si le portefeuille de la compagnie est parfaitement homogène, c'est-à-dire si tous les assurés sont également exposés. Le système du bonus-malus perd alors tout son sens et toute sa justification.

Par contre, dans un portefeuille hétérogène dont les polices accusent des variations importantes dans la fréquence des sinistres, les contrats enregistrant plusieurs accidents en un laps de temps restreint doivent être jugées différemment que ces exempts de sinistre. Selon le cas, il sera dés lors possible, grâce au nombre des sinistres annoncés, de tirer de précieuses conclusions sur le risque que représente tel ou tel contrat en particulier.

2. Modélisation de la fréquence des sinistres

Dans cette section, nous proposons plusieurs distributions généralement utilisées pour modéliser la survenance d'accidents. La plupart d'entre-elles sont de type « Poisson mélange » qui représentent l'avantage de mieux appréhender l'hétérogénéité naturellement présente dans un portefeuille d'assurés représentant ainsi de manière satisfaisante l'éventail des comportements au volant des différents types de conducteurs.

2.1 Distribution de Poisson simple : Portefeuille homogène

La loi de Poisson convient à la description d'événement dont la probabilité de réalisation est faible mais constante. Partant de cette constatation, définissons ce qu'est un événement rare.

Si l'on considère l'observation d'un assuré pendant une durée déterminée notée T, il est toujours possible de décomposer cette période en n sous-périodes de durée $\Delta t (\Delta t = \frac{T}{n})$ suffisamment courtes de sorte qu'il soit impossible d'y observer plus d'un sinistre.

Il suffit de choisir n de façon que la probabilité d'observer un accident soit petite que souhaitée, de façon à réduire autant que souhaité la probabilité d'observer plusieurs accidents " simultanément "

Mathématiquement, cette exigence se traduit comme suit. En notant λ le nombre d'accidents par unité de temps et $N(t,t+\Delta t)$ le nombre d'accidents dans l'intervalle $(t,t+\Delta t)$. On définit un événement rare comme l'événement (au sens probabiliste) respectant les hypothèses :

H_1 : $P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

H_2 : $P\left[N(t,t+\Delta t)>1\right]=o(\Delta t)$

H_3 : Soient τ et τ' deux intervalles non empiétant. Alors $P\left[N(\tau)=k,N(\tau')=m\right]=P\left[N(\tau)=k\right]P\left[N(\tau')=m\right]$

Proposition 2.1: [26]

Si les hypothèses H_1 , H_2 et H_3 sont satisfaites. Alors la distribution du nombre de sinistres est poissonienne.

Preuve :

Posons $p_\lambda(k,t)=P\left[N(t)=k\right]$et appliquons la technique du bilan des probabilités.

$$p_\lambda(k,t+\Delta t)=p_\lambda(k,t).P\left[N(t,t+\Delta t)=0\right]+p_\lambda(k-1,t).P\left[N(t,t+\Delta t)=1\right]+\sum_{i=2}^{k}p_\lambda(k-i,t).P\left[N(t,t+\Delta t)=i\right]$$

$$=p_\lambda(k,t)\left[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]+p_\lambda(k-1,t)\left[\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]+\sum_{i=2}^{k}p_\lambda(k-i,t).o(\Delta t)$$

$$=p_\lambda(k,t)\left[1-\lambda\Delta t\right]+\lambda p_\lambda(k-1,t)\Delta t+o(\Delta t)$$

D'où

$$\frac{p_\lambda(k,t+\Delta t)-p_\lambda(k,t)}{\Delta t}=\lambda p_\lambda(k,t)+\lambda p_\lambda(k-1,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

En prenant la limite pour $\Delta t\to 0$.

$$p'_\lambda(k,t)=-\lambda p_\lambda(k,t)+\lambda p_\lambda(k-1,t) \qquad \text{si k = 1,2,…}$$

$$p'_\lambda(k,0)=-\lambda p_\lambda(0,t) \qquad \text{si k = 0}$$

En résolvant par récurrence ce système d'équations différentielles, avec les conditions initiales $p_\lambda(0,0)=1$ et $p_\lambda(k,0)=0$ si k > 0, nous obtenons

$$p_\lambda(k,t) = \frac{e^{-\lambda t}\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,... \qquad (1)$$

où k est la réalisation d'une variable aléatoire N sur une période donnée et λ est un paramètre inconnu à estimer[1]. λ est le nombre moyen des accidents par période (la variance étant aussi égale à λ)

La formulation précédente (1) présente deux inconvénients. D'une part, le modèle repose sur une hypothèses d'indépendance entre les événements successifs, et d'autre part l'espérance et la variance de N sont égales, ce qui implique que chaque individu a le même risque moyen. Ces deux propriétés ne correspondant pas aux observations réalisées sur les accidents de la route.

2.2 Distribution de Poisson mélange : Portefeuille hétérogène

Nous supposons ici que les assurés ne sont pas tous égaux devant le risque. Le comportement des assurés est hétérogène et justifie l'introduction d'un système bonus-malus. L'introduction de tel système en assurance RC auto se justifie principalement par le fait que le nombre $N(t)$ de sinistres déclarés par un assuré dans l'intervalle $(0,t)$ ne suit pas une loi de Poisson simple. Cela conduit naturellement à traduire le diversité des assurés en supposant que $N(t)$ suit une loi de Poisson mélange caractériser par

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Généralement ont fait choix de la fonction U (fonction de structure) pour trouver la loi de $N(t)$. Lemaire (1979), Dionne-Vanasse (1989,1992) et Sarabia et al (2004) ont choisi la loi gamma pour U. Morillo et Bermudz (1999) ont choisi la loi inverse gaussienne pour U.

Ces choix se justifient plus pour des raisons de facilité mathématique que pour des objectives liées aux observations. En effet, l'observation porte sur le nombre de sinistres déclarés sur une période de temps (l'année en pratique).

[1] Le paramètre λ peut être estimé par la méthode des moments ou par la méthode du maximum de vraisemblance

Les deux choix particuliers indiqués plus haut appartiennent en réalité à la même famille obtenue en choisissant pour une U une fonction de répartition infiniment divisible. Ceci se traduit de manière équivalente par en expression simple pour $p_k(t)$:

$$p_k(t) = (-1)^k \frac{t^k}{k!} p_0^{(k)}(t)$$

où $p_0(t) = e^{-\theta(t)}, \theta(t) \geq 0, \theta(0) = 0$ et $\frac{d}{dt}\theta(t)$ complètement monotone.

Un choix intéressant pour la fonction

$$\theta'(t) = \frac{p}{(1-ct)^a}, p > 0, c > 0, a \geq 0$$

est utilisé par Kestemont et J.Paris (1985). Par intégration, on trouve

$$\theta(t) = \begin{cases} pt, & \text{si} \quad a = 0 \\ \frac{p}{c}\ln(1+ct), & \text{si} \quad a = 1 \\ \frac{p}{c(1-a)}\left[(1+ct)^{1-a} - 1\right], & \text{si} \quad a > 1 \end{cases}$$

Les cas particuliers sont :

Valeur de a	Distributions
0	Poisson
0.5	Poisson Inverse Gaussienne
1	Binomiale Négative

Tableau 1 : Distributions Poisson mélange pour divers valeurs de a

Remarque :

Dans les problèmes d'assurance, il est naturel de supposer $\lim_{t \to +\infty} p_0(t) = 0,$ ce qui limite le choix possible à la sous famille pour $0 \le a \le 1$

2.2.1 Distribution Binomiale Négative : Poisson Gamma

Si on suppose, que pour l'ensemble des individus, que le paramètre de la loi de poisson satisfait à une loi Gamma $\gamma(r,\alpha)$, de paramètre $\theta = (r,\alpha)$; $r,\alpha > 0$ de densité :

$$u_\theta(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda}, \lambda > 0$$

avec $E(X) = \dfrac{r}{\alpha},\ V(X) = \dfrac{r}{\alpha^2}$

Alors le nombre d'accidents à une période donnée se répartit selon une loi binomiale négative[2] $BN\left(r, \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)$ telle que :

$$p_k = P(N = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} u_\theta(\lambda) d\lambda, k \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{\Gamma(k+r)}{k!\Gamma(r)} \frac{\alpha^r}{(1+\alpha)^{k+r}}, k \in \mathbb{N}$$

avec $m = E(N) = \dfrac{r}{\alpha},\ \sigma^2 = V(N) = \dfrac{r}{\alpha}\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

Cette distribution est obtenue en combinant une distribution de Poisson et une distribution Gamma. Plus précisément, le nombre de sinistres est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre λ et ce paramètre est lui-même une variable aléatoire de distribution Gamma.

[2] L'actuaire J. Lemaire fut le premier à utiliser cette distribution dans le cadre de la modélisation de la survenance de sinistre.

2.2.2 Distribution Poisson Inverse Gaussienne (P-IG)

La densité de la loi Inverse Gaussienne IG, de paramètre $\theta = (\mu, \beta)$ est :

$$u_\theta(\lambda) = \mu(2\pi\beta\lambda^3)^{-1/2} e^{-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2\beta\lambda}}, \lambda > 0 (\mu > 0, \beta > 0)$$

Dans ce cas le nombre d'accidents à une période donnée se répartit selon une loi Poisson Inverse Gaussienne telle que :

$$p_k = P(N = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} u_\theta(\lambda) d\lambda, k \in \mathbb{N}$$

De moyenne $m = E(N) = \mu,$ de variance $\sigma^2 = V(N) = \mu(1+\beta)$ de fonction génératrice

$$g_N(s) = \exp\left\{\frac{\mu}{\beta}\left[1 - \left[1 + 2\beta(1-s)\right]^{1/2}\right]\right\}$$

Le principal problème lié à l'utilisation de cette distribution Inverse Gaussienne est qu'il n'est pas possible de calculer toutes les probabilités p_k à partir d'une seule fonction génératrice.

Par dérivation de la fonction génératrice, on obtient

$$p_0 = e^{\frac{\mu}{\beta}\left[1-\left[1+2\beta\right]^{1/2}\right]}$$

$$p_1 = \mu\left[1+2\beta\right]^{1/2} p_0$$

et la relation de récurrence permettant d'obtenir de proche en proche toutes les probabilités[3] p_n :

$$k(k-1)(1+2\beta)p_k = \beta(k-1)(2k-3)p_{k-1} + \mu^2 p_{k-2}, k \geq 2$$

3. Système de bonus-malus

Depuis leur introduction, les clauses de bonus-malus constituent un élément important de la tarification en assurance automobile.

Le principe de ces clauses est d'une part d'offrir une diminution de prime aux assurés n'ayant déclaré aucun accident responsable, et d'autre part de pénaliser les assurés accidentés en fonction du nombre de leurs accidents.

[3] Pour la démonstration voir TREMBLAY (1992)

Soit un risque dont la fréquence annuelle des accidents est distribué selon une loi de Poisson mélange. Si pour tout j entier on désigne par N_i^j cette fréquence pour la j^eme année de la i^eme individu, on dispose de la réalisation $(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t)$ du variable aléatoire $(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$ correspondant à l'observation de ce risque pendant t années.

La règle optimale du système bonus-malus donnera, connaissant l'information sur les t années $(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$, le meilleur estimateur des nombres d'accidents moyen à la période (t+1). Notons cet estimateur par $\lambda_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$

La quantité $\lambda_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$ (Estimateur de Bayes : l'espérance mathématique a posteriori de λ) est donnée par :

$$\lambda_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t) = \int_0^{+\infty} \lambda u_\theta(\lambda / N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t) d\lambda$$

3.1 l'Estimateur de Bayes de la loi Poisson mélange

3.1.1 Poisson-Gamma

En appliquant la loi binomiale négative, la distribution a posteriori de λ est la loi Gamma de densité :

$$u_\theta(\lambda / n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = \frac{(\alpha + t)^{r+\overline{n_i}} e^{-\lambda(\alpha+t)} \lambda^{r+\overline{n_i}-1}}{\Gamma(r + \overline{n_i})}$$

où $\overline{n_i} = \sum_{j=1}^{t} n_i^j$

d'où

$$\lambda^{t+1}(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = \frac{r + \overline{n_i}}{\alpha + t} \qquad (2)$$

Le système bonus-malus proposé est un cas particulier de la célèbre formule de crédibilité « bayesienne », qui postule que la prime modifiée par l'expérience (ici $\lambda^{t+1}(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t)$) devrait s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de la prime a priori (r / α) et des observations $(\overline{n} / t)$

$$\lambda^{t+1}(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = z\frac{\overline{n_i}}{t} + (1-z)\frac{r}{\alpha}, 0 \le z \le 1 \qquad (3)$$

En effet, il suffit de poser $z = \dfrac{t}{t+\alpha}$ pour constater que la formule (2) se ramène à (3).

Remarque

Le coefficient de crédibilité z accordé à l'expérience individuelle est une fonction croissante du temps. Il tend asymptotiquement vers1.

3.1.2 Poisson-Inverse Gaussienne

Dans le cas où λ suit une loi Inverse Gaussienne, la loi de λ connaissant les $n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t$ est la fonction densité :

$$u_\theta(\lambda / n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = \frac{e^{-\lambda a_t(\vartheta)}\lambda^{\overline{N_i}}u_\theta(\lambda)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda a_t(\vartheta)}\lambda^{\overline{N_i}}u_\theta(\lambda)d\lambda}$$

Avec $a_t(\vartheta) = \sum_{i=1}^{t} \vartheta^{i-1} = \begin{cases} t & si\vartheta = 1 \\ \dfrac{1-\vartheta^t}{1-\vartheta} & si\vartheta \neq 1 \end{cases}$

Avec ϑ : le paramètre représentant le taux de variation de la fréquence moyenne des accidents de la classe d'une année à l'autre.

La loi de λ sachant $N_i^1 = n_i^1, N_i^2 = n_i^2, ..., N_i^t = n_i^t$ est donc une loi Inverse Gaussienne (J.L.BESSON, C.PARTRAT, 1992).

$$IG\left(\sum_{j=1}^{t} n_i^j - \frac{1}{2}, \mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right], \beta\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]^{-1}\right)$$

On déduit que

$$\lambda^{t+1}(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = \mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]\frac{K_{\bar{n}+1/2}(\mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]/\beta\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]^{-1})}{K_{\bar{n}-1/2}(\mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]/\beta\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]^{-1})}$$

Avec $K_\xi(u) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{\xi-1}e^{-\frac{u}{2}(x+\frac{1}{x})}dx$: la fonction de Bessel de 3^e^ espèce modifiée (ERDELYIMAGNUS, 1953).

3.2 Estimation des paramètres

Si k est la plus grande valeur observée de N_i et υ_j le nombre d'observation de N_i égales à $j(j=0,...,k)$ avec $\sum_{j=0}^{k}\upsilon_j = K$ où K est la taille d'échantillon.

La moyenne est la variance empirique de N_i sont respectivement :

$$\bar{n} = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{k} j\upsilon_j, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{k} j\upsilon_j(j-\bar{n})^2$$

3.2.1 Poisson-Gamma

Ce cas particulier détaillé dans (LEMAIRE, 1985). Pour K-échantillon $(\hat{\sigma}_n^2 > \bar{n})$ l'estimateur $(\tilde{r},\tilde{\alpha})$ de (r,α) donnée par la méthode de moments :

$$\tilde{r} = \frac{\bar{n}^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \bar{n}}, \qquad \tilde{\alpha} = \frac{\bar{n}}{\hat{\sigma}_n^2 - \bar{n}}$$

3.2.2 Poisson-Inverse Gaussienne

L'estimateur $\tilde{\theta} = (\tilde{\mu},\tilde{\beta})$ de $\theta = (\mu,\beta)$ par la méthode des moments est déterminé par les moments factoriels (WILLMOT, 1986) :

$$m_{[j]} = E(N(N-1)...(N-j+1)) = \mu^j \frac{K_{\xi+1}(\mu/\beta)}{K_\xi(\mu/\beta)}, j \geq 1$$

3.3 Calcul de la prime de Bayes

Le principe de calcul des primes le plus simple pour une compagnie d'assurances consiste à demander à l'assuré la prime pure augmentée d'un chargement de sécurité proportionnel à celle-ci : c'est le principe de l'espérance mathématique.

3.3.1 Modèle de Poisson-Gamma

Ce principe conduit à exiger d'un assuré ayant subi l'historique $(n^1, n^2, ...n^t)$ une prime

$$P_{t+1}(n^1, n^2, ...n^t) = (1+\alpha_0)\lambda_i^{t+1}(n^1, n^2, ...n^t)$$

$$= (1+\alpha_0)\left[\frac{r+\overline{n}}{\alpha+t}\right]$$

où α_0 : chargement de sécurité

Pour le modèle de Poisson-Gamma (Binomiale négative), ce principe définit un système bonus-malus optimal. En effet :

- Le système est équitable : il fait payer à chacun, à tout moment, une prime proportionnel à l'estimation de sa fréquence des sinistres, étant donné l'information recueillie pendant t années.
- Il est équilibre financièrement[4].

3.3.2 Modèle de Poisson-Inverse Gaussienne

La prime pour l'année $(t+1)$ est donnée par (LUC TREMBLAY 1992) :

$$p_{t+1}(n^1, n^2, ..., n^t) = (1+\alpha_0)\lambda^{t+1}(n^1, n^2, ..., n^t)$$

$$= (1+\alpha_0)\mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]\frac{K_{\overline{n}+1/2}(\mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]/\beta\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]^{-1})}{K_{\overline{n}-1/2}(\mu\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]/\beta\left[1+2\beta a_t(\vartheta)\right]^{-1})}$$

3.4 Calcul de la prime par le principe de l'utilité nulle

3.4.1 Le principe de l'utilité nulle

Si l'on considère l'ensemble du portefeuille d'une compagnie, la situation financière de celle-ci à un instant donné peut être résumée par :

- Le montant global R des réserves dont elle dispose pour régler les sinistres
- La fonction de répartition $G(x)$ de la distribution du montant total des sinistres S.

[4] Pour le démontrer, il faut prouver que la moyenne des estimations des fréquences des sinistres est égale à la moyenne a priori r/α.

La situation d'une compagne peut être caractérisée par le couple

$$(R, G(x))$$

Le principe de l'utilité nulle consiste à exiger que l'utilité de la compagnie ne soit pas modifiée par la conclusion du contrat : l'espérance d l'utilité après signature de police vaut l'utilité avant signature

$$U(R) = \int_0^{+\infty} U(R + P - x) dG(x) \qquad (4)$$

Développons cette expression en série en supposant l'existence des deux premières dérivées

$$U(R) = \int_0^{+\infty} \left[U(R) + (P - x)U'(R) + \frac{(p - x)^2}{2} U''(\theta) \right] dG(x)$$

où θ est compris entre $R + P$ et $R + P - x$. Nous en déduisons

$$P = \int_0^{+\infty} x dG(x) - \frac{1}{U'(R)} \int_0^{+\infty} \frac{(P - x)^2}{2} U''(\theta) dG(x)$$

$$= \mu - \frac{1}{U'(R)} \int_0^{+\infty} \frac{(P - x)^2}{2} U''(\theta) dG(x)$$

Comme $U'(R) \geq 0$ et $U''(R) \leq 0,$ la prime est supérieur (ou égale) à l'espérance du risque

$$P \geq \mu$$

elle contient donc un chargement de sécurité.

Le principe de l'utilité nulle jouit de nombreuses propriétés théoriques intéressantes lorsqu'on emploie des fonctions d'utilités exponentielles

$$U(x) = \frac{1}{c}(1 - e^{-cx}), c > 0$$

Le paramètre c caractérise l'aversion au risque de la compagnie. Dans ce cas, la prime peut être calculée explicitement.

Proposition 4.1 : [27]

Soit $U(x)=\frac{1}{c}(1-e^{-cx})$ une fonction d'utilité exponentielle. Alors :

$$P=\frac{1}{c}\ln M(c)$$

où $M(t)$ est la fonction génératrice des moments de la distribution des sinistres.

Preuve

De l'équation (4), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}(1-e^{-cR}) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{c}(1-e^{-c(R+P-x)})dG(x)\\ &=\frac{1}{c}\int_0^{+\infty}dG(x)-\frac{1}{c}e^{-c(R+P)}\int_0^{+\infty}e^{cx}dG(x)\\ &=\frac{1}{c}-\frac{1}{c}e^{-cR}e^{-cP}\int_0^{+\infty}e^{cx}dG(x)\end{aligned}$$

et par la suite on a :

$$e^{cP}=\int_0^{+\infty}e^{cx}dG(x)=M(c)$$

Donc, on trouve

$$P=\frac{1}{c}\ln M(c)$$

Pour la prime de risque,

$$P(\lambda)=\frac{1}{c}\ln M(c,\lambda)$$

où $M(c,\lambda)=\int_0^{+\infty}e^{cx}dG_\lambda(x)$

$M(c)$ est liée à $M(c,\lambda)$ par la relation

$$M(c) = \int_0^{+\infty} e^{cx} dG(x) = \int_\Lambda \int_0^{+\infty} e^{cx} dG_\lambda(x) dU(\lambda) = \int_\Lambda M(c,\lambda) dU(\lambda)$$

3.4.2 Expression de la prime pour une fonction d'utilité exponentielle

Nous proposons de déterminer le système bonus-malus optimal si le principe d'utilité nulle est adoptée, avec une fonction d'utilité exponentielle

Dans le cas d'un système bonus-malus basé sur le modèle binomial négatif, il vient

$$P = \frac{1}{c} \ln \left[\int_0^{+\infty} M(c,\lambda) dU(\lambda) \right]$$

où $M(c,\lambda) = e^{\lambda(e^c - 1)}$ est la fonction génératrice des moments de la distribution de Poisson.

Comme la fonction de structure est de type Gamma et de fonction génératrice des moments

$M(t) = (1 - \frac{t}{\alpha})^{-r}$, la prime vaut

$$P = \frac{1}{c} \ln \left[\int_0^{+\infty} e^{\lambda(e^c-1)} dU(\lambda) \right] = \frac{1}{c} \ln \left[\int_0^{+\infty} e^{\lambda(e^c-1)} \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda} d\lambda \right] = \frac{1}{c} \ln M(e^c - 1)$$

il vient

$$P = \frac{1}{c} \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{\alpha} \right)^{-r} = \frac{r}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{\alpha} \right) \right| \qquad (5)$$

Expression qui n'a de sens que si $\alpha > e^c - 1$

De l'équation (5), on déduit que la prime pour (t+1) est :

$$p_{t+1}(n^1, n^2, ..., n^t) = \frac{r + \overline{n}}{c} \left| \ln \left(1 - \frac{e^c - 1}{t + \alpha} \right) \right|, \qquad c < \ln(\alpha + 1)$$

Conclusion :

En conclusion, Le modèle de Jewell (1974) montre que la prime bayesienne peut s'exprimer comme une fonction linéaire des observations pour tous les membres de la famille exponentielle unidimensionnelle.

La question naturelle à se poser est : « Peut-on obtenir une prime bayesienne linéaire seulement lorsque la fonction de vraisemblance appartient à la famille exponentielle ? ». Goel (1982) a cherché à répondre à cette question, mais n'a pu faire mieux que conjecturer une réponse affirmative. Selon lui, on' a trouver aucun cas où $f(s/\theta)$ n'était pas membre de la famille exponentielle et la prime bayesienne $E\left[\mu(\Theta)/\underline{S}\right]$ est linéaire.

Le problème est résolu d'un point de vue théorique, mais malheureusement, pour faire intervenir ce résultat en pratique, il y a des inconvénients qui surgissent :

1- Il faut pour chaque valeur de θ du paramètre de risque Θ déterminer la forme analytique de la distribution $f(s/\theta)$.

2- Il faut déterminer les fonctions de distribution du portefeuille $u(\theta)$.

3- Les calculs à effectuer pour déterminer la prime bayesienne seraient difficile à résoudre (sauf pour certaines distributions particulières), même où les fonctions de distributions seraient connues.

Chapitre III

Chapitre III : Modèle de crédibilité linéaire

Pour résoudre les problèmes confrontés par la crédibilité bayesienne, et répondre à les inconvénients majeurs à l'encontre de l'utilisation des primes pures a posteriori, ont fait naître le modèle construit par Bűhlmann (1967,1969) dont l'idée de base est de restreindre à des primes linéaires « appelées estimateur de crédibilité »

1. Définitions et résultats préliminaires

1.1 Paramètre de structure

La moyenne a posteriori est donnée par

$$\mu = E(S) = E(\mu(\Theta)) \text{ (la prime collective)} \tag{3.1}$$

Tandis que la variance a priori σ^2 se décompose en

$$\sigma^2 = s^2 + a \tag{3.2}$$

où

- $s^2 = E(\sigma^2(\Theta)) = E(V(S/\Theta))$: mesure[1] la part du hasard dans la variance a priori.

- $a = V(\mu(\Theta))$:mesure la part de la variance due à l'hétérogénéité du portefeuille.

Pour un portefeuille homogène, $\mu(o) = \mu$ et $a = 0$. Une valeur positive pour a indique donc un portefeuille hétérogène. Lorsque la valeur de a est élevée, la prime collective n'est pas une estimation juste des primes de risque. En effet, une valeur élevée signifie que les moyennes des sinistres des divers contrats composant le portefeuille varient sensiblement d'un contrat à l'autre.

Dans ce cas, la moyenne individuelle pourrait sembler une prime plus adéquate.

Définition 1.1:

μ, s^2 et a sont appelés paramètres de structure.

[1] $\sigma^2(\Theta)$ représente la variabilité moyenne de chaque contrat.

Théorème 1.1: [5]

Soient X,Y et Θ des variables aléatoires. Alors on a :

1/ $Cov(X,Y)=E(Cov(X,Y/\Theta))+Cov(E(X/\Theta),E(Y/\Theta))$

2/ $V(X)=E(\sigma^2(\Theta))+V(\mu(\Theta))=s^2+a$

Preuve :

1/ $Cov(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))$

$$=E((X-E(X/\Theta)+E(X/\Theta)-E(X))(Y-E(Y/\Theta)+E(Y/\Theta)-E(Y)))$$

$$=E(E((X-E(X/\Theta))(Y-E(Y/\Theta))/\Theta))$$

$$+E(E((E(X/\Theta)-E(X))(Y-E(Y/\Theta))/\Theta))$$

$$+E(E((X-E(X/\Theta))(E(Y/\Theta)-E(Y))/\Theta))$$

$$+E(E((E(X/\Theta)-E(X))(E(Y/\Theta)-E(Y))/\Theta))$$

comme

$$E((E(X/\Theta)-E(X))(Y-E(Y/\Theta))/\Theta)=0$$

et

$$E((X-E(X/\Theta))(E(Y/\Theta)-E(Y))/\Theta)=0$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E(E((X-E(X/\Theta))(Y-E(Y/\Theta))/\Theta))\\&\quad+E(E((E(X/\Theta)-E(X))(E(Y/\Theta)-E(Y))/\Theta))\\&=E(Cov(X,Y/\Theta))+Cov(E(X/\Theta),E(Y/\Theta))\end{aligned}\qquad(3.3)$$

2/ de la relation (3.3) déduit que :

$$\begin{aligned}V(X)&=Cov(X,X)\\&=E(Cov(X,X/\Theta))+Cov(E(X/\Theta),E(X/\Theta))\\&=E(V(X/\Theta))+V(E(X/\Theta))\\&=E(\sigma^2(\Theta))+V(\mu(\Theta))=s^2+a\end{aligned}$$

Théorème 1.2: [5]

$S_1/\Theta=\theta, S_2/\Theta=\theta,...,S_n/\Theta=\theta$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance $\mu(\theta)$ et de variance $\sigma^2(\theta)$. Alors,

1/

$$Cov(S_j,S_l)=a+\delta_{jl}s^2 \tag{3.4}$$

2/

$$Cov(S_j,\mu(\Theta))=a \tag{3.5}$$

δ_{jl} est le symbole de Kronecker tel que : $\delta_{jl}=\begin{cases}1 & si j=l\\ 0 & si j\neq l\end{cases}$

Preuve :

1/ de théorème 1, l'équation (3.4) peut être écrier comme

$$\begin{aligned}Cov(S_j,S_l)&=E(Cov(S_j,S_l/\Theta))+Cov(E(S_j/\Theta),E(S_l/\Theta))\\&=E(Cov(S_j,S_l/\Theta))+Cov(\mu(\theta),\mu(\theta))\end{aligned}$$

Avec

$$Cov(S_j,S_l/\Theta)=\begin{cases}\sigma^2(\theta) & si j=l\\ 0 & si j\neq l\end{cases}$$

d'où

$$Cov(S_j,S_l/\Theta)=\begin{cases}E(\sigma^2(\theta))+V(\mu(\theta)) & si j=l\\ \end{cases}$$

$$V(\mu(\theta)) \qquad\qquad sij \neq l$$

$$= \begin{cases} a + s^2 & sij = l \\ a & sij \neq l \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$C\,\text{ov}(S_j, S_l) = a + \delta_{jl} s^2$$

2/ De même, pour (3.5)

$$C\,\text{ov}(S_j, \mu(\Theta)) = E(Cov(S_j, \mu(\Theta)/\Theta)) + Cov(E(S_j/\Theta), E(\mu(\Theta)/\Theta))$$

$$= E(Cov(S_j, \mu(\Theta)/\Theta)) + Cov(\mu(\Theta), E(\mu(\Theta)/\Theta))$$

$$= E(Cov(S_j, \mu(\Theta)/\Theta)) + Cov(\mu(\Theta)\mu(\Theta))$$

$$= E(0) + V(\mu(\Theta))$$

$$= a$$

En effet, lorsque l'on connaît Θ , $\mu(\Theta)$ est considère comme une constante et donc

$$Cov(S_j, \mu(\Theta)/\Theta) = 0$$

1.2 Estimateurs de crédibilité :

Définition 1.2:

Soit X une variable aléatoire, l'estimateur de crédibilité de X en fonction des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ est défini comme étant le meilleur estimateur linéaire de la forme :

$$c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$$

où c_i sont des constantes $i = 0,1,...,n$

2. Modèle original de Bűhlmann

Dans le chapitre II, on montre que la prime bayesienne[2] pour l'année $n+1$:

$$\Pi(s_1,...,s_n) = E\left[\mu(\theta / s_1,...,s_n)\right] = E\left[S_{n+1} / S_1 = s_1, S_2 = s_2,..., S_n = s_n\right]$$

est optimal au sens des moindres carrés. Pratiquement cependant, l'espérance conditionnelle admet rarement d'expression explicite et la détermination de cette prime nécessite souvent de lourds calculs. Pour ces raisons, Bűhlmann a propose en 1967 de se limiter aux primes qui dépendent linéairement des observations. Plus précisément, on exigera pour l'année $n+1$ une prime de la forme

$$\Pi(s_1,...,s_n) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i s_i$$

où les c_i sont choisis de telle sorte à minimiser l'écart quadratique moyen

$$E\left[\left(\mu(\Theta) - c_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i s_i\right)^2\right]$$

Définition 1.3:

1/ $c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i s_i$ est appelé fonction linéaire non homogène des observations.

2/ Une fonction linéaire homogène est une fonction linéaire des observations sans terme constant c_0.

Dans ce modèle l'approximation de la prime de risque est obtenue par une fonction linéaire non homogène des observations.

[2] L'approche bayesienne pure en théorie de la crédibilité était construite dans un cadre paramétrique, donc exigeait de connaître les lois de $U(\theta) et F(s/\theta)$, la prime bayesienne pouvait parfois être très difficile à calculer, et en fin celle-ci n'était pas toujours une fonction linéaire des observations.

2.1 Hypothèse du modèle originale de Bűhlmann

Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

H_1 : Les variables $S_1, \ldots, S_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées conditionnellement au paramètre de risque Θ.

H_2 : $\mu(\Theta) = E(S_j / \Theta),\ j = 1,, 2, \ldots, n$

H_3 : $Cov(S_j, S_l) = \delta_{jl}\sigma^2(\Theta)$

Pour les hypothèses H_2 et H_3, on suppose que pour θ donnée, $\mu(\theta)$ et $\sigma^2(\theta)$ existent et sont finis.

2.2 Calcul de la prime de crédibilité

La distinction entre prime de risque et prime collective est théorique. En effet, dans beaucoup de cas (notamment en assurance automobile) le paramètre de risque n'est pas parfaitement connu. D'après les statistiques réunies dans un ensemble de contrats, on calcule une prime collective. Pour que la prime soit « la plus individuelle » et donc la plus juste possible, le risque assuré doit être cerné en le suivant au cours du temps.

La prime de crédibilité répond à ce besoin. C'est une approche séquentielle de la prime de risque à partir de la prime collective.

Supposons que l'on ait pu suivre un assuré pendant n périodes et que l'on se propose de définir sa prime à la période $n+1$

Théorème 1.3: [3]

Si les hypothèses H_1 et H_2 sont satisfaites, l'estimateur de crédibilité linéaire $\hat{\mu}(\Theta)$ (non homogène) optimale de $\mu(\Theta)$ est

$$\hat{\mu}(\Theta) = (1-z)\mu + z\overline{S}$$

Avec $\overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$ et $\mu = E\left[\mu(\Theta)\right]$.

Preuve :

Déterminons à présent les estimateurs de crédibilité, à savoir les valeurs de $c_0,...,c_n$ qui minimisent

$$Q = E\left[\left(\mu(\Theta) - c_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i S_i\right)^2\right]$$

Il suffit d'annuler les dérivées partielles de la fonction Q par rapport aux paramètres $c_0,...,c_n$, donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial c_0} = -2E\left[\mu(\Theta) - c_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i S_i\right] = 0$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial c_k} = -2E\left[\left(\mu(\Theta) - c_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i S_i\right) S_k\right] = 0, k = 0,...,n$$

On a donc un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues, à savoir

$$\begin{cases} \mu\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right) = c_0 \\ Cov(\mu(\Theta), S_k) + \mu^2 - c_0\mu - \sum_{i=1}^{n} c_i (Cov(S_i, S_k) + \mu^2) = 0 \, pour k = 1,2,...,n \end{cases}$$

Puisque

$$E(\mu(\Theta)S_k) = Cov(\mu(\Theta), S_k) + \mu^2 \quad \text{et} \quad E(S_i S_k) = Cov(S_i, S_k) + \mu^2$$

On peut simplifier les n dernières équations du système grâce la première ; en effet

$$\mu^2 - c_0\mu - \sum_{i=1}^{n} c_i \mu^2 = \mu\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right) - c_0\right] = 0$$

Il reste donc

$$\begin{cases} \mu\left(1-\sum_{i=1}^{n} c_i\right) = c_0 \\ Cov(\mu(\Theta), S_k) - \sum_{i=1}^{n} c_i Cov(S_i, S_k) = 0, \, pour k = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \mu\left(1-\sum_{i=1}^{n} c_i\right) = c_0 \\ a - \sum_{i=1}^{n} c_i (a + \delta_{ik} s^2) = 0, \, pour k = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

Les n dernières équations de ce système sont donc

$$a - c_k s^2 - a\sum_{i=1}^{n} c_i = 0, \, pour k = 1, 2, ..., n$$

On déduit de cette dernière relation que c_k doivent être constants, c'est-à-dire $c_k = c, \, pour k = 1, 2, ..., n$, d'où

$$c(s^2 + na) = a \Rightarrow c = \frac{a}{s^2 + na}$$

De la première équation en tire la valeur de c_0

$$c_0 = \mu(1 - nc) = \mu(1 - \frac{na}{s^2 + na}) = \frac{s^2}{s^2 + na}\mu \quad \text{et} \quad c_k = \frac{a}{s^2 + na}, \, pour k = 1, ..., n$$

et par la suite on a :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\Theta) &= c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i S_i \\ &= \frac{s^2}{s^2 + na}\mu + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{s^2 + na} S_i \\ &= \frac{s^2}{s^2 + na}\mu + \frac{na}{s^2 + na}\overline{S} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{na}{s^2 + na}\right)\mu + \frac{na}{s^2 + na}\overline{S}$$

$$= (1 - z)\mu + z\overline{S}$$

avec $z = \dfrac{na}{s^2 + na}$ et $\mu = E\left[\mu(\Theta)\right]$

Il s'agit d'une prime de crédibilité car cette prime consiste donc en un compromis entre l'expérience $\overline{S}$ d'un contrat, et la prime collective μ. Le facteur de crédibilité $z = \dfrac{na}{s^2 + na}$ est de la forme

$$z = \frac{na}{s^2 + na} = \frac{n}{\frac{s^2}{a} + n} = \frac{n}{K + n}$$

où $K = \dfrac{s^2}{a}$.

Le facteur de crédibilité z tend en croissant vers 1 quand le nombre d'observation n tend vers l'infinie.

3. Modèle classique de Bühlmann

Le modèle classique de Bühlmann (1969) permet d'obtenir une approximation de la prime de risque par des fonctions linéaires ″homogène″ et ″ non homogène″ des observations.

3.1 Hypothèse du modèle classique de Bühlmann

Considérons un portefeuille de k contrats d'assurance hétérogène. Pour chacun de ces k contrats, on dispose d'un historique de n années d'observations. Chaque contrat i est caractérisé par un paramètre de risque (ou paramètre de structure) aléatoire Θ_i et des montants de sinistres $S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{in}$, on a affaire à une suite de variables

$$\Theta_i, S_{i1}, S_{i2}, ..., S_{in}$$

Ce portefeuille est représenté schématiquement

	Variable non observable	Observations Années						
		1	**2**	. . .	**j**	. . .	**n**
1	Θ_1	S_{11}	S_{12}		S_{1j}		S_{1n}
2	Θ_2	S_{21}	S_{22}		S_{2j}		S_{2n}
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
i	Θ_i	S_{i1}	S_{i2}		S_{ij}		S_{in}
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
k	Θ_k	S_{k1}	S_{k2}		S_{kj}		S_{kn}

Figure 3.1 : Illustration d'un portefeuille dans le modèle classique de Bühlmann

Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes :

H_1 : Les variables $(\Theta_i, \underline{S}_i), i = 1, 2, ..., k$ sont indépendantes et identiquement distribuées

H_2 : Les variables $S_{i1}, ..., S_{in}$, sont indépendantes et identiquement distribuées conditionnellement au paramètre de risque donné $\Theta_i = \theta_i$.

H_3 : $E(S_{ij} / \Theta_i) = \mu(\Theta_i), \quad i = 1, 2, ..., k, \quad j = 1, 2, ..., n$

H_4 : $Cov(S_{ij}, S_{il}) = \delta_{jl} \sigma^2(\Theta_i) \quad i = 1, 2, ..., k, \quad j = 1, 2, ..., n$

Lemme 1.1: [5]

Soient $\mu = E\left[\mu(\Theta_i)\right]$, $a = V(\mu(\Theta_i))$ et $s^2 = E\left[V(S_{ij} / \Theta_i)\right]$ Pour $i, i' = 1, 2, ..., k$, $j, j' = 1, 2, ..., n$, on a alors

1/ $Cov(S_{i'j}, \mu(\Theta_i)) = a\delta_{i'i}$

2/ $Cov(S_{ij'}, S_{ij}) = a + s^2 \delta_{jj'}$

3/ $Cov(S_{ij'}, S_{ij}) = o, pour j' \neq j$

3.2 Calcul de la prime de crédibilité :

La meilleure approximation de la prime de risque par des fonctions linéaires ″homogène″ et ″ non homogène″ des observations est donnée par les deux théorèmes suivants.

3.2.1 L'approximation non homogène linéaire

On cherche la meilleure approximation de $\mu(\Theta_i)$ par une variable aléatoire

$$Z = c_0^i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^i S_{ij} \tag{3.6}$$

où l'exposant i sert à identifier le contrat i

Théorème 1.4: [4]

Si les hypothèses du modèle classique de Bühlmann (H_1) et (H_2) sont satisfaites, alors la meilleure approximation non homogène linéaire $P_{i,n+1}$ au sens des moindres carrés, de la prime de risque $\mu(\Theta_i)$ du contrat i pour la période $n+1$ est

$$P_{i,n+1} = z\overline{S}_i + (1-z)\mu$$

où $\overline{S}_i = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}$ et $\mu = E\left[\mu(\Theta_i)\right]$, avec $z = \dfrac{n}{K+n}$, $K = \dfrac{s^2}{a}$

Preuve :

Pour tout contrat i, on cherche de déterminer les constantes c_{lj}^i, $(i,l = 1,2,...,k;\ j = 1,2,...,n)$ qui minimise la quantité suivante :

$$Q(c_0^i,...,c_{kn}^i) = E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i s_{ij}\right)^2\right] \tag{3.7}$$

Ces constantes sont trouvées par la résolution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial c_0^i} = -2E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i s_{ij}\right)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial c_{lj}^i} = -2E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i s_{lj}\right) s_{l'j'}\right] = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Comme $\mu = E\left[\mu(\Theta_i)\right] = E\left[S_{ij}\right]$ on obtient :

$$c_0^i = \mu\left(1 - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i\right) \tag{3.9}$$

En insérant (3.9) dans (3.8) puis en égalant à zéro la dérivée partielle de (3.8) par rapport à $c_{l'j'}^i$, on obtient

$$\frac{\partial Q}{\partial c_{l'j'}^i} = -2E\left[\left(\mu(\Theta_i) - \mu - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i (s_{lj} - \mu)(s_{l'j'} - \mu)\right)\right] = 0$$

Ce qui implique que :

$$Cov(\mu(\Theta_i), s_{l'j'}) = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i Cov(s_{lj}, s_{l'j'}) \quad l' = 1, 2, ..., k;\ j' = 1, 2, ..., n$$

Ainsi pour $l' = i$,

$$a = \sum_{j=1}^{n} (a + s^2 \delta_{jj'}) c_{ij}^i \tag{3.10}$$

Par conséquent, les constantes c_{ij}^i sont égaux pour $j = 1, 2, ..., n$. Donc on a

$$c_{ij}^i = \frac{a}{na + s^2}, i = 1, 2, ..., k$$

En remplaçant les expressions obtenus de c_0^i et c_{ij}^i, on trouve

$$Z = c_0^i + \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i S_{ij}$$

$$= \mu\left(1 - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i\right) + \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{lj}^i S_{ij}$$

$$= \mu\left(1 - \frac{na}{na+s^2}\right) + \frac{na}{na+s^2}\overline{S}_i$$

Pour $z = \dfrac{na}{na+s^2}$, on obtient la prime linéaire suivante :

$$P_{i,n+1} = z\overline{S}_i + (1-z)\mu$$

3.2.2 L'approximation homogène linéaire

On cherche la meilleure approximation de $\mu(\Theta_i)$ par une variable aléatoire

$$Z = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{i} S_{ij}$$

Théorème 1.5: [4]

Si les hypothèses du modèle classique de Bühlmann (H_1) et (H_2) sont satisfaites, alors la meilleure approximation homogène linéaire $P_{i,n+1}$ au sens des moindres carrés, de la prime de risque $\mu(\Theta_i)$ du contrat i pour la période $n+1$est

$$P_{i,n+1}^{h} = z\overline{S}_i + (1-z)\overline{S}$$

où $\overline{S}_i = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}$, $\overline{S} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{S}_i = \dfrac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}$ et $\mu = E\left[\mu(\Theta_i)\right]$, avec $z = \dfrac{n}{K+n}$, $K = \dfrac{s^2}{a}$

Remarque :

1/ La prime de crédibilité $P_{i,n+1}$ne dépend pas des autres contrats du portefeuille.

2/ La prime de crédibilité $P_{i,n+1}$possède deux propriétés importantes

a/ La prime $P_{i,n+1}$ est non biaisé : $E(P_{i,n+1}) = E(\mu(\Theta_i)) = E(S_{ij})$

b/ Lorsque le nombre de période d'observations est grand, la prime de crédibilité s'approche de la prime de risque ($\overline{S}_i \to \mu(\Theta_i)$ et $z \to 1 quandn \to +\infty$)

4. Interprétation des résultats

On s'attarde principalement au facteur de crédibilité

$$z = \frac{n}{K+n}, \; K = \frac{s^2}{a} = \frac{E(\sigma^2(\Theta))}{V(\mu(\Theta))}$$

1. Premièrement, $z \to 1 quand n \to +\infty \quad si 0 < K < \infty$

   - Le facteur de crédibilité z n'atteint jamais 1.
   - Le niveau de crédibilité augmente en fonction du volume d'expérience.

2.Deuxièmement, $z \to 1 quand \; s^2 \to 0 \quad pour 0 < a < \infty$

   - s^2 mesure la variabilité des sinistres dans le temps.
   - $s^2 \to 0 \Leftrightarrow$ moyennes individuelles sont connues avec certitude $\Rightarrow z \to 1$
   - $s^2 \to \infty \Leftrightarrow$ l'expérience fluctue trop autour de la moyenne pour être

     faible $\Rightarrow z \to 0$

5. Estimation des paramètres de structure

5.1 Estimation de la moyenne μ

Théorème 1.6: [5]

1/ Pour le contrat i :

$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} = S_{i\bullet}$ est l'estimateur conditionnellement sans biais de $\mu(\Theta_i)$ où Θ_i un paramètre de risque caractérisant le contrat i et S_{ij} le montant des sinistres pour le contrat i durant la période $j (i = 1, 2, ..., k, \; j = 1, 2, ..., n)$

2/ Pour le portefeuille :

$\hat{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \hat{\mu}_i = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} = S_{\bullet\bullet}$ est l'estimateur sans biais de μ où $S_{\bullet\bullet}$ la moyenne générale des observations.

Preuve :

Comme $\mu = E(\mu(\Theta_i)) = E(E(S_{ij} / \Theta_i)) = E(S_{ij})$, alors montrons que $\mu = E(S_{i\bullet}) = E(S_{\bullet\bullet})$.

En effet,

$$E(\hat{\mu}_i) = E(S_{i\bullet}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu = \mu.$$

Donc $\hat{\mu}_i$ est un estimateur sans biais de μ.

De même, on a

$$E(\hat{\mu}) = E(S_{\bullet\bullet}) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} E(S_{ij}) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \mu = \mu.$$

Donc $\hat{\mu}$ est un estimateur sans biais de μ.

L'estimateur $\hat{\mu}$ est strictement préférable à $\hat{\mu}_i$ car

$$V(\hat{\mu}) = \frac{1}{k}\left(a + \frac{s^2}{n}\right) < V(\hat{\mu}_i) = a + \frac{s^2}{n}$$

5.2 Estimation de la moyenne s^2

Théorème 1.7 : [5]

1/ $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(S_{ij} - S_{i\bullet})^2$ est un estimateur conditionnellement sans biais de $\sigma_i^2(\Theta_i)$.

2/ $\hat{s}_i^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{\sigma}_i^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(S_{ij} - S_{i\bullet})^2$ est un estimateur sans biais de s^2.

Preuve :

1/ $E(\hat{\sigma}_i^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} E\left[(S_{ij} - S_{i\bullet})^2\right]$.

$$E\left[(S_{ij} - S_{i\bullet})^2\right] = V(S_{ij} - S_{i\bullet})$$

$$= V(S_{ij}) + V(S_{i\bullet}) - 2Cov(S_{ij}, S_{i\bullet})$$

$$= a + s^2 + a + \frac{s^2}{n} - 2\left(a + \frac{s^2}{n}\right) \tag{3.11}$$

$$= s^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

D'où $E(\hat{\sigma}_i^2) = \frac{n}{n-1} s^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = s^2$

2/ $E(\hat{s}_i^2) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} E(\hat{\sigma}_i^2) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s^2 = \frac{1}{k} ks^2 = s^2$

5.3 Estimation de la moyenne a

Théorème 1.8: [5]

$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(S_{i\bullet} - S_{\bullet\bullet})^2 - \frac{1}{n}\hat{s}^2$ est un estimateur sans biais de a

Preuve :

$$E\left[(S_{i\bullet} - S_{\bullet\bullet})^2\right] = V(S_{i\bullet} - S_{\bullet\bullet})$$

$$= V(S_{i\bullet}) + V(S_{\bullet\bullet}) - 2Cov(S_{i\bullet}, S_{\bullet\bullet})$$

$$= a + \frac{s^2}{n} + \frac{1}{k}\left(a + \frac{s^2}{n}\right) - \frac{2}{k}\left(a + \frac{s^2}{n}\right)$$

$$= \frac{k-1}{k}\left(a + \frac{s^2}{n}\right)$$

Et donc on déduit que :

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} E\left[(S_{i\bullet} - S_{\bullet\bullet})^2\right] - \frac{1}{n}E(\hat{s}^2)$$

$$= \frac{k}{k-1} E\left[(S_{i\bullet} - S_{\bullet\bullet})^2\right] - \frac{s^2}{n}$$

$$= \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k-1}{k}\right)\left(a + \frac{s^2}{n}\right) - \frac{s^2}{n}$$

$$= a$$

L'estimation de a à l'aide de la statistique $\hat{a}$ pose un problème dans la mesure où a est un réel positif ou nul (c'est une variance) alors que la valeur prise par $\hat{a}$ peut être négative.

6. Illustration numérique : Application de la formule de crédibilité après estimation des paramètres de structure

Les données se présente sous la forme des deux tableaux suivants :

Contrat / Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\overline{S}_i$	$\hat{\sigma}_i^2$	$P_{i,n+1}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.20	0.178	0.1822
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0.20	0.178	0.1822
7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0.20	0.178	0.1822
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
9	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0.60	0.267	0.4526
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.10	0.100	0.1146
11	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0.40	0.267	0.3174
12	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0.30	0.233	0.2498
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.10	0.100	0.1146
14	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.10	0.100	0.1146
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470
17	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0.50	0.278	0.3850
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.10	0.100	0.1146
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.10	0.100	0.1146
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0470

Tableau 3.1 : Application de la formule de crédibilité après estimation des paramètres de structure

Estimateur moyenne collective : $\hat{\mu} = 0.145$

Estimateur de s^2 : $\hat{s}^2 = 0.10388$

Estimateur de a : $\hat{a} = 0.02169$

Coefficient de crédibilité : $z = 0.6761$

Nous somme dans le cas d'un portefeuille de vingt contrats qui sont observable pendant dix ans ($k = 20, \quad n = 10$). On travaille sur les fréquences, ce qui nous ramène à supposer que les sinistres sont de montants unitaires.

Contrat / Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\overline{S}_i$	$\hat{\sigma}_i^2$	$P_{i,n+1}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.20	0.178	0.1906
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0.20	0.178	0.1906
7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0.20	0.178	0.1906
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
9	0	1	1	0	1	2	1	0	0	1	0.70	0.456	0.5568
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.10	0.100	0.1174
11	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0.40	0.267	0.3371
12	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0.30	0.233	0.2639
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.10	0.100	0.1174
14	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.10	0.100	0.1174
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442
17	1	1	0	1	3	0	1	0	0	1	0.80	0.844	0.6300
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.10	0.100	0.1174
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.10	0.100	0.1174
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0.000	0.0442

Tableau 3.2 : Application de la formule de crédibilité (augmentation de nombre de sinistres aux niveaux 9 et 17)

Estimateur moyenne collective : $\hat{\mu} = 0.165$

Estimateur de s^2 : $\hat{s}^2 = 0.14166$

Estimateur de a : $\hat{a} = 0.03875$

Coefficient de crédibilité : $z = 0.7323$

Prenons le contrat 9 ($i = 9, \quad n = 10$) du tableau 3.1

$$\hat{\mu}_9 = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} s_{9j} = s_{9\bullet} = 0.6, \quad \hat{\sigma}_9^2 = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{10}(s_{9j} - s_{9\bullet})^2 = 0.267$$

De même, on trouve $\hat{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{\mu}_i = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} = S_{\bullet\bullet} = \frac{29}{200} = 0.145$; cela veut dire qu'en moyenne un assuré cause 14.5 sinistres sur une période de 100.

$$\hat{a} = 0.02169 \qquad \hat{s}^2 = 0.10388$$

Ce qui implique que $z = \frac{na}{s^2 + na} = \frac{10 \times 0.02169}{10 \times 0.02169 + 0.10388} = 0.6761$ et la prime de crédibilité

$$P_9 = (1 - 0.6761) \times 0.145 + 0.6761 \times 0.6 = 0.4526$$

Prenons le contrat 9 ($i = 9, \quad n = 10$) du tableau 3.2 où nous avons aggravé le cas du contrat 9 par l'augmentation des sinistres.

$$\hat{\mu}_9 = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} s_{9j} = s_{9\bullet} = 0.7, \quad \hat{\sigma}_9^2 = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{10}(s_{9j} - s_{9\bullet})^2 = 0.456$$

De même, on trouve $\hat{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{\mu}_i = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} = S_{\bullet\bullet} = \frac{33}{200} = 0.165$; cela veut dire qu'en moyenne un assuré cause 16.5 sinistres sur une période de 100.

$$\hat{a} = 0.03875 \qquad \hat{s}^2 = 0.14166$$

Ce qui implique que $z = \frac{na}{s^2 + na} = \frac{10 \times 0.03875}{10 \times 0.03875 + 0.14166} = 0.73229$ et la prime de crédibilité

$$P_9 = (1 - 0.73229) \times 0.165 + 0.73229 \times 0.7 = 0.5572$$

Donc l'augmentation des sinistres du contrat 9 implique une augmentation de z , d'où l'augmentation de la prime de crédibilité.

Analyse empirique

L'échantillon aléatoire [1] contient de l'information sur 1000 assurés. Pour chaque assuré, nous connaissons : le nombre des accidents de l'individu durant l'année (01, 02,03, 04).

Année / Nombre d'accidents	2006	2007	2008	2009
0	**673**	**628**	**661**	**713**
1	**224**	**239**	**214**	**196**
2	**67**	**90**	**83**	**71**
3	**26**	**29**	**34**	**16**
4	**10**	**14**	**8**	**4**
Total	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**

Tableau 1 : Répartition des assurés selon le nombre d'accidents (2006-2009)

[1] Données obtenues par la SAA

Analyse des résultats

Modèle de Poisson Gamma

1- L'Année 2006 :

L'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) donner par la méthode des moments est :

$$\tilde{r} = 1.2313913, \quad \tilde{\alpha} = 2.58695652$$

Comparaison des fréquences observées et théoriques

Nombre d'accidents	Fréquence observée	Loi de Poisson $\lambda = 0.476$ — Fréquence théorique	Loi de P-Gamma — Fréquence théorique
0	**673**	**621**	**670**
1	**224**	**295**	**230**
2	**67**	**70**	**70**
3	**26**	**11**	**20**
4	**10**	**3**	**10**
Total	**1000**	**1000**	**1000**
	Khi deux calculé	**65.084**	**2.0984**
	Khi deux tabulé	**5.99**	**7.81**

Tableau 2 : Fréquences observées et théoriques " P-Gamma "pour l'année 2006

La méthode des moments nous conduise à estimer le paramètre λ de la distribution par la moyenne observée. En ajustant la distribution observée par une distribution Poisson de paramètre $\tilde{\lambda} = 0.476$, nous obtenons des fréquences théoriques très éloignés des fréquences observés. Le test χ^2 $(\chi_c^2 = 65.084 > \chi_T^2 = 5.99)$ confirme la très mauvaise qualité de l'ajustement, ce qui nous amène à rejeter le modèle. L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille ne résiste pas à l'analyse. Par contre l'ajustement de la distribution observée par une loi binomiale négative est excellent, car $\chi_c^3 = 2.0984 < \chi_3^2 = 7.81$ (Les fréquences théoriques sont très proches des fréquences observées).

2- L'Année 2007 :

L'estimateur $(\tilde{r},\tilde{\alpha})$ de (r,α) donner par la méthode des moments est :

$$\tilde{r} = 1.5332233, \quad \tilde{\alpha} = 2.72815534$$

Comparaison des fréquences observées et théoriques

Nombre d'accidents	Fréquence observée	Loi de Poisson $\lambda = 0.562$ Fréquence théorique	Loi de P-Gamma Fréquence théorique
0	**628**	**570**	**620**
1	**239**	**320**	**250**
2	**90**	**90**	**90**
3	**29**	**17**	**30**
4	**14**	**3**	**10**
Total	**1000**	**1000**	**1000**
	Khi deux calculé	**54.77**	**2.22**
	Khi deux tabulé	**5.99**	**7.81**

Tableau 3 : Fréquences observées et théoriques " P-Gamma "pour l'année 2007

La méthode des moments nous conduise à estimer le paramètre λ de la distribution par la moyenne observée. En ajustant la distribution observée par une distribution Poisson de paramètre $\tilde{\lambda} = 0.562$, nous obtenons des fréquences théoriques très éloignés des fréquences observés. Le test χ^2 $(\chi_c^2 = 54.77 > \chi_T^2 = 5.99)$ confirme la très mauvaise qualité de l'ajustement, ce qui nous amène à rejeter le modèle. L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille ne résiste pas à l'analyse. Par contre l'ajustement de la distribution observée par une loi binomiale négative est excellent, car $\chi_c^2 = 2.22 < \chi_3^2 = 7.81$ (Les fréquences théoriques sont très proches des fréquences observées).

3- L'Année 2008 :

L'estimateur $(\tilde{r},\tilde{\alpha})$ de (r,α) donner par la méthode des moments est :

$$\tilde{r} = 1.30790099, \ \ \tilde{\alpha} = 2.54455446$$

Comparaison des fréquences observées et théoriques

Nombre d'accidents	Fréquence observée	Loi de Poisson $\lambda = 0.514$ Fréquence théorique	Loi de P-Gamma Fréquence théorique
0	**661**	**598**	**648**
1	**214**	**307**	**239**
2	**83**	**79**	**79**
3	**34**	**13**	**26**
4	**8**	**3**	**8**
Total	**1000**	**1000**	**1000**
	Khi deux calculé	**80.69**	**5.539**
	Khi deux tabulé	**5.99**	**7.81**

Tableau 4 : Fréquences observées et théoriques " P-Gamma "pour l'année 2008

La méthode des moments nous conduise à estimer le paramètre λ de la distribution par la moyenne observée. En ajustant la distribution observée par une distribution Poisson de paramètre $\tilde{\lambda} = 0.514$, nous obtenons des fréquences théoriques très éloignés des fréquences observés. Le test χ^2 $(\chi^2_c = 8.69 > \chi^2_T = 5.99)$ confirme la très mauvaise qualité de l'ajustement, ce qui nous amène à rejeter le modèle. L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille ne résiste pas à l'analyse. Par contre l'ajustement de la distribution observée par une loi binomiale négative est excellent, car $\chi^2_c = 5.539 < \chi^2_3 = 7.81$ (Les fréquences théoriques sont très proches des fréquences observées).

4- L'Année 2009 :

L'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) donner par la méthode des moments est :

$$\tilde{r} = 1.30325806, \quad \tilde{\alpha} = 3.24193548$$

Comparaison des fréquences observées et théoriques

Nombre d'accidents	Fréquence observée	Loi de Poisson $\lambda = 0.402$ Fréquence théorique	Loi de P-Gamma Fréquence théorique
0	**713**	**668**	**705**
1	**196**	**268**	**217**
2	**71**	**54**	**59**
3	**16**	**7**	**15**
4	**4**	**3**	**4**
Total	**1000**	**1000**	**1000**
	Khi deux calculé	**45.80**	**4.630**
	Khi deux tabulé	**5.99**	**5.99**

Tableau 5 : Fréquences observées et théoriques " P-Gamma "pour l'année 2009

La méthode des moments nous conduise à estimer le paramètre λ de la distribution par la moyenne observée. En ajustant la distribution observée par une distribution Poisson de paramètre $\tilde{\lambda} = 0.402$, nous obtenons des fréquences théoriques très éloignés des fréquences observés. Le test χ^2 $(\chi_c^2 = 45.80 > \chi_T^2 = 5.99)$ confirme la très mauvaise qualité de l'ajustement, ce qui nous amène à rejeter le modèle. L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille ne résiste pas à l'analyse. Par contre l'ajustement de la distribution observée par une loi binomiale négative est excellent, car $\chi_c^2 = 4.630 < \chi_2^2 = 5.99$ (Les fréquences théoriques sont très proches des fréquences observées).

Donc la loi de Poisson est utilisée pour modéliser la variable aléatoire : nombre d'accidents pour un seul individu, mais dans ce cas elle n'est pas acceptable car le portefeuille automobile est toujours hétérogène, puisque le nombre moyen d'accidents λ varie d'un assuré à un autre, par contre la loi Binomial Négative permet de modéliser l'événement de survenance d'accidents.

La prime pure a Posteriori (la prime de Bayes)

1 Modèle de Poisson Gamma

La prime pour l'année $t+1$ est proportionnelle à l'espérance de Bayes de λ :

$$\tilde{P}_i^{t+1}(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = 1000\left[\frac{\tilde{r}+\overline{n}}{\tilde{\alpha}+t}\right].\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{r}}$$

où la prime de base est égale à 1000

$t \backslash \overline{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	**1000**				
1	**721.137**	**1306.952**	**1892.766**	**2478.581**	**3064.396**
2	**563.890**	**1021.964**	**1480.039**	**1938.114**	**2396.189**
3	**462.943**	**839.013**	**1215.084**	**1591.155**	**1967.226**
4	**392.651**	**711.620**	**1030.589**	**1349.558**	**1668.527**

Tableau 6 : Calcul de la prime Modèle poisson-Gamma

Remarque :

On remarque que la prime Bayesienne diminue au fil du temps pour les assurés qui n'ont jamais causé de sinistres, le contraire est constaté pour ceux qui ont une plus grande sinistralité. On voit dans ce tableau que l'assuré qui a causé quatre (4) ou plus sinistres payera la plus grande prime (3064.396 DA) contrairement l'individu qui n'a causé aucun sinistre payera la plus petite prime (392.651 DA).

2 Modèle Binomial négatif-Fonction d'utilité exponentielle

La prime pour l'année $t+1$ est donnée par [2]:

$$\tilde{P}_i^{t+1}(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t) = k\frac{\tilde{r}+\overline{n}}{c}\left|\ln\left(1-\frac{e^c-1}{t+\tilde{\alpha}}\right)\right| \qquad c < \ln(1+\tilde{\alpha})$$

Si l'on choisit une aversion de risque $c = 0.4$ correspond à un chargement de sécurité de 25% environ, on obtient un système avec $k = 1540.487$, pour normaliser la prime c'est-à-dire rendant la prime pour $t = 0$, $\overline{n} = 0$ égale à 1000 (prime de base)

$t \setminus \overline{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	**1000**				
1	**894.975**	**1621.775**	**2348.575**	**3075.375**	**3802.176**
2	**699.862**	**1268.213**	**1836.563**	**2404.914**	**2973.265**
3	**574.595**	**1041.217**	**1507.840**	**1974.463**	**2441.085**
4	**487.362**	**883.145**	**1278.927**	**1674.709**	**2070.491**

Tableau2.8: Calcul de la prime Fonction d'utilité exponentielle

Ce système n'est pas équilibré financièrement. L'encaissement pour l'année $t+1$ vaut (Lemaire 1995) :

$$\sum\frac{r+\overline{n}}{c}\left|\ln\left(1-\frac{e^c}{t+\alpha}\right)\right|\overline{P}(n^1, n^2, ..., n^t) = -\frac{r}{c}\ln\left(1-\frac{e^c}{t+\alpha}\right)\frac{\alpha+t}{\alpha} \neq \frac{r}{\alpha} \quad \text{(moyenne a priori)}$$

$$\overline{P}(n^1, n^2, ..., n^t) = \int_0^{+\infty} P(n^1, n^2, ..., n^t / \lambda)dU(\lambda)$$

Conclusion :

Les principales conclusions qui se dégagent de notre analyse sont les suivantes :

[2] Pour plus de détails voir Jean Lemaire (1985)

- Nos résultats montrent, pour le modèle de Poisson-Gamma, que la prime ne dépend que du nombre total d'accident sur les t années, et non de leur séquence.

- Le nombre d'observations étant très important, le test du χ^2 rejette l'ajustement par la loi de Poisson.

- L'adéquation est donc globalement meilleur pour la loi de Poisson-Gamma que pour le principe de l'utilité nulle car le système bonus-malus pour le modèle Binomiale Négative est optimal c'est-à-dire :

  1. Il est équitable ; il faut payer à chacun à tout moment une prime proportionnelle à sa fréquence propre estimé $\frac{r+\overline{n}}{\alpha+t} = z\frac{\overline{n}}{t} + (1-z)\frac{r}{\alpha}$, $0 \leq z = \frac{t}{\alpha+t} \leq 1$, il se dégage que l'application du principe de crédibilité au calcul des primes d'assurances de responsabilité civil apporte les mêmes avantages que le bonus-malus (pour l'assuré comme l'assureur). En effet, cette tarification possèdes les critères suivants : répondre au désir de justice des assurés, converger vers la prime individuelle et prévenir les accidents.
  2. Financièrement équilibre ; la moyenne des fréquences individuelles des sinistres est égale à la moyenne générale $\frac{\tilde{r}}{\tilde{\alpha}}$. En d'autres termes, le montant perçu par la compagnie est stationnaire[3].

[3] Pour plus de détails voir Jean Lemaire (1985)

Conclusion générale

L'objectif principal de notre étude est de déterminer la prime à payer par chaque assuré en appliquant le principe de tarification a posteriori en assurance.

A ce titre, nous avons établi les aspects généraux des principes de calcul de la prime. Ces principes sont définis comme l'ensemble des méthodes qui permettent à la compagnie d'assurance de déterminer la prime qui doit être payée par un assuré pour se voir garantir un risque. Il s'agit de principes opérationnelles et autres non opérationnelles.

La loi des grands nombres permet d'utiliser la moyenne sur le portefeuille global comme étant une bonne approximation de la prime pure globale, mais sur un sous portefeuille beaucoup plus petit, ces théorèmes asymptotiques ne marchent plus. On ne peut généralement pas tarifer un contrat auto individuel en ne prenant en compte que le passé sinistre d'un client.

Par ailleurs, nous avons présenté le premier modèle qui apparaît pour déterminer la prime pure, il s'agit du modèle bayesien. Qui consiste a mettre en évidence la tarification a posteriori de la prime de Bayes qui repose sur l'historique sinistres de l'assureur. En effet,il existe certaines difficultés pour déterminer la prime selon cette approche. Jewell a établit une solution à cette préoccupation en utilisant une classe des fonctions, il s'agit des conjugués naturelles. Il démontre que lorsqu'une fonction de vraisemblance est combinée avec sa conjuguée naturelle, la prime Bayesienne est toujours une prime de crédibilité exacte. Celle-ci comporte des inconvénients pratiques. En outre, il y a eu la présentation de la tarification d'expérience par les lois mélangées dont l'objet est de présenter le système bonus-malus pour les lois de Poisson-Gamma, Poisson-Inverse Gaussienne et le calcul de la prime par le principe de l'utilité nulle.

Nos résultats montrent que :

1- Pour le modèle de Poisson-Gamma, la prime ne dépend que du nombre total d'accidents sur les t années, et non de leur séquence.

2- Le nombre d'observations étant très important, le test du χ^2 rejette l'ajustement par la loi de Poisson.

3- L'adéquation est donc globalement meilleure pour la loi de Poisson-Gamma que pour le principe de l'utilité nulle car le système bonus-malus pour le modèle Binomial Négatif est optimale c'est-à-dire :

a- Il est équitable, il fait payer à chacun à tout moment une prime proportionnelle à sa fréquence propre estimée $\frac{r+\overline{n}}{\alpha+t}$

b- Il est financièrement équilibré ; la moyenne des fréquences individuelles des sinistres est égale à la moyenne générale $\frac{r}{\alpha}$, en d'autres termes, le montant perçu par la compagnie est stationnaire.

Mais pour le modèle de principe de l'utilité nulle il ne l'est pas

Enfin, nous avons souligné que le modèle construit par Bűhlmann (1967,1969) dont l'idée de base est de restreindre à des primes linéaires « appelées estimateur de crédibilité » est le suivant : $P_{i,n+1} = z\overline{S}_i + (1-z)\mu$ ou $z = \frac{n}{n+K}$, $K = \frac{s^2}{a} = \frac{E(\sigma^2(\Theta))}{V(\mu(\Theta))}$

A la lumière de ce modèle, nous obtenons les interprétations suivantes:

1- $z \to 1$ lorsque $n \to +\infty$, $0 < K < \infty$; le facteur de crédibilité z n'atteint jamais 1.

2- $z \to 1$ lorsque $s^2 \to 0$ pour $0 < a < \infty$:

- s^2 mesure la variabilité des sinistres dans le temps.

- $s^2 \to 0 \Leftrightarrow$ moyennes individuelles sont connues avec certitude $\Rightarrow$ $z \to 1$

- $s^2 \to \infty$ $\Leftrightarrow$ l'expérience fluctue trop autour de la moyenne pour être faible $\Rightarrow$ $z \to 0$

$s^2 = E(\sigma^2(\Theta))$ petit $\Rightarrow$ grand facteur de crédibilité

$s^2 = E(\sigma^2(\Theta))$ grand $\Rightarrow$ petit facteur de crédibilité

3- $z \to 1$ lorsque $a \to \infty$ pour $0 < s^2 < \infty$:

- a mesure l'hétérogénéité du portefeuille.

- $a \to \infty$ $\Leftrightarrow$ moyennes individuelles très différents $\Rightarrow$ $z \to 1$

- $a \to 0$ $\Leftrightarrow$ le portefeuille est très homogène, les contrats sont très similaires $\Rightarrow$

$z \to 0$

$a = V(\mu(\Theta))$ grand $\Rightarrow$ grand facteur de crédibilité

$a = V(\mu(\Theta))$ petit $\Rightarrow$ petit facteur de crédibilité

4- Si s^2 et a varient dans des directions opposées, il est difficile d'interpréter les résultats.

Le modèle Bűhlmann ne permet de traiter que des cas où les n contrats (ou classes de contrats) peuvent être considérés comme indiques (et indépendants) selon les critères de l'analyse a priori. Il est donc d'une portée assez limitée pour aborder les applications pratiques. En effet, dans de nombreux cas, pour ne pas dire dans la plupart des cas, on ne peut pas se placer sous ces hypothèses du fait que, par exemple, les classes de contrats constituées sont d'importance inégale ne serait-ce que par le nombre de contrats regroupés.

Pour améliorer et exploiter ce travail nous suggèrrons :

1- la tarification a posteriori pour les modèles à effet aléatoire en introduisant les caractéristiques de l'individu dont ($\lambda_i = \exp(x_i\beta + \varepsilon_i)$),

2- Apporter une généralisation au modèle de Bűhlmann en appliquant le modèle de Bűhlmann-Straub qui intègre dans le calcul de la prime le poids de l'assuré dans le portefeuille et le facteur de crédibilité varie d'un assuré a l'autre ce qui permet de mieux mesurer le risque individuel dans l'ensemble de portefeuille.

Annexe

Le système bonus-malus défini par la formule :

$$\lambda_i^{t+1}(n^1, n^2, ..., n^t) = \frac{r + \overline{n}}{\alpha + t}$$

Est équilibre. Il faut prouver que la moyenne des estimations des fréquences des sinistres est égale à la moyenne a priori $\frac{r}{\alpha}$. Soient

$$P(n^1, n^2, ..., n^t / \lambda) = \prod_{j=1}^{t} p_\lambda(j) = \prod_{j=1}^{t} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n^j}}{n^j!} = \frac{e^{-t\lambda}\lambda^{\overline{n}}}{\prod_{j=1}^{t} n^j!}$$

et

$$\overline{P}(n^1, n^2, ..., n^t) = \int_0^{+\infty} P(n^1, n^2, ..., n^t / \lambda) dU(\lambda)$$

En notant $\sum$ la somme portant sur tous les historiques sinistres $\underline{n} = (n^1, n^2, ...n^t)$, il vient, à chaque étape,

$$\sum \lambda_i^{t+1}(\underline{n})\overline{P}(\underline{n}) = \int_0^{+\infty} \sum \frac{r + \overline{n}}{\alpha + t} P(n^1, n^2, ...n^t / \lambda) dU(\lambda)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\sum \frac{r + \overline{n}}{\alpha + t} \frac{e^{-t\lambda}\lambda^{\overline{n}}}{\prod_{j=1}^{t} n^j!} \right] dU(\lambda)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{r}{\alpha + t} \sum \frac{e^{-t\lambda}\lambda^{\overline{n}}}{\prod_{j=1}^{t} n^j!} + \frac{1}{\alpha + t} \sum \frac{\sum n^l e^{-t\lambda}\lambda^{\overline{n}}}{\prod_{j=1}^{t} n^j!} \right] dU(\lambda)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{r}{\alpha + t} \sum \prod_{j=1}^{t} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n^j}}{n^j!} + \frac{1}{\alpha + t} \sum \sum_{l} n^l \prod_{j=1}^{t} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n^j}}{n^j!} \right] dU(\lambda)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{r}{\alpha + t} \prod_{j=1}^{t} \sum_{n^j \geq 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n^j}}{n^j!} + \frac{1}{\alpha + t} \sum \sum_{l=1} \frac{n^l e^{-\lambda}\lambda^{n^j}}{n^j!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{t} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n^j}}{n^j!} \right] dU(\lambda)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{r}{\alpha + t} + \frac{1}{\alpha + t} t\lambda \right] dU(\lambda)$$

$$= \frac{r}{\alpha + t} \int_0^{+\infty} dU(\lambda) + \frac{t}{\alpha + t} \int_0^{+\infty} \lambda dU(\lambda)$$

$$= \frac{r}{\alpha + t} + \frac{t}{\alpha + t} \frac{r}{\alpha}$$

$$= \frac{r}{\alpha}$$

Bibliographie

[1]- ACHER, J. (1985). Analyse de la survenance des Sinistres en Assurance Automobile, Système de Bonus-Malus. Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 126, N° 2, 55-62.
[2]- BESSON,J.L, PARTRAT,C (1992). Trend et système de bonus-malus. Astin bulletin, vol. 22, N° 1, 1992.
[3]- BŰHLMANN, H. (1967). Experience Rating and Credibility. ASTIN Bulletin, 4, 199-207.
[4]- BŰHLMANN, H. (1969). Experience Rating and Credibility. ASTIN Bulletin, 5, 157-165.
[5]- BŰHLMANN, H. (1970). Mathematical Methods In Risk Theory, Springer-Verlag, Berlin.
[6]- BŰHLMANN, H. GISLER, A (2005). A Course in Credibility Theory end its Applications. Springer-Verlag, Berlin.
[7]- CUMMINS, J. D., DIONNE, G., MCDONALD,J. B., PRITCHETT, B. M. (1988). Application of the GB2 Distribution In Modeling Insurance Loss Processus. Mimeo, Department of Insurance, University of Pennsylvania.
[8]- DEELSTRA, G., PLANTIN, G. (2006). Théorie du Risque et Réassurance. Ed. Economica.
[9]- DELAPORTE, P. J. (19**). Les Mathématiques de l'assurance Automobile. ASTIN Bul- letin, *, 185-190.
[10]- DENUIT, M., CHARPENTIER, A. (2004). Mathématiques de l'assurance Non-Vie, Tome1 : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque. Ed. Economica.
[11]- DENUIT, M., CHARPENTIER, A. (2005). Mathématiques de l'assurance Non-Vie, Tome2 : Tarification et Provisionnement. Ed. Economica.
[12]- DIONNE, G., VANASSE, C. (1997). Une Evaluation Empirique De La Nouvelle Tarification De L'assurance Automobile (1992) Au Québec. L'Actualité Economique, Revue d'analyse économique, 73, N° 1-2-3, 47-76.
[13]- DIONNE, G., VANASSE, C. (1992). Automobile Insurance Ratemaking in the Presence of Asymmetrical Information. Journal of Applied Econometrics, Vol. 7, 149-165.
[14]- DIONNE, G., VANASSE, C. (1989). A Generalization of Actuarial Automobile Insurance Rating Models: The Negative Binomial Distribution With a Regression Component. ASTIN Bulletin, 19, 199-212.
[15]- GOMEZ-DENIZ, E., VAZQUEZ-POLO, F. O., PEREZ, J. M. (2006). A Note On Computing Bonus-Malus Insurance Premiums Using a Hierarchical Bayesien Framework, Sociedad de Estadistica e Investigation Operativa Test, Vol. 15, N° 2, 345-359.
[16]- GOULET, V. (1998). Principles and Application of Credibility Theory. Journal of Actuarial Practice, Vol.6, Nos. 1&2, pp 5-62.
[17]- GOURIEROUX C. (1999): Statistique de l'assurance. Economica.
[18]- HERZOG, T. N. (1999). Introduction to credibility Theory. Actex Publication.

[19]- JEWELL, D. S. (1974) Credible Mean Are Exact Bayesian For Exponential Families. ASTIN Bulletin, 8, 77-90.
[20]- JUSTENS, D., HULIN, L. (2003) Theories Actuarialles. Editions du Céfal.
[21]- KESTEMONT, R. M., PARIS, J. (1985). Sur l'Ajustement du Nombre de Sinistres. Bulletin of the Swiss Actuaries, pp 157-164.
[22]- LATRECHE, A. (2004). La Tarification par l'expérience a posteriori ; Système Bonus-Malus : Etude Empirique (Cas de la SAA). Revue de la statistique appliquées INPS, N°4,
[23]- LATRECHE, A. (2007). Estimation de la probabilité d'accident par le modèle Probit dans le cas de l'assurance automobile (Une étude empirique). Les Annales ROAD du Lab.LAID3, n° 15
[24]- LEHMANN, E. L. (1983). Theory of Point Estimation. Wiley, New York
[25]- LEMAIRE, J. (1979). How To Define A Bonus-Malus System With An Exponential Utility Function. ASTIN Bulletin, 10, 274-282.
[26]- LEMAIRE, J. (1985). Automobile Insurance: Actuarials Models. Kluwer Nijhoff Publishing.
[27]- LEMAIRE, J. (1995). Bonus-Malus Systems In Automobile Insurance. Kluwer Academic Publisher, Boston.
[28]- MAYERSON, A. L. (1964). A Bayesian View of Credibility, Proceedings of the Casualty Actuarial Socity 51, pp 85-104.
[29]- MARILLO, I., BERMUDEZ, L. (1999). An Optimal Bonus-Malus System. Papers presented at the third congress on Insurance: Mathematics and Economics, 6.
[30]- PARTRAT, C., BESSON, J. C. (2005) Assurance Non-Vie: Modélisation, Simulation. Ed. Economica.
[31]- SARABIA, J. M., DENIS, E. G., VASQUEZ-POLO, F. J. (2004). O, the Use of Conditional Specification Models in Claim Count Distribution : An Application to Bonus-Malus Systems. ASTIN Bulletin, Vol. 34, 85-98.
[32]- TREMBLY, L (1992): Using The Poisson Inverse Gaussian in Bonus-Malus Systems. ASTIN Bulletin, Vol. 22, N° 1, 1992.
[33]- WILLMONT, G. (1987). The Poisson –Inverse Gaussian Distribution as an alternative to the Negative Binomial. Scand. Actuarial J. 113-127.
[34]- ZINOVIY, M. L., UDI, E. M. (1998). Exponential Dispersion Models and Credibility. Scandinavian Actuarial Journal, 1, 89-96.
[35]- Mezai adjila " La tarification à posteriori en assurance automobile par le principe de maximisation de l'utilité espéré cas SAA année 2007.
[36]- Ait ameur samia, Benmouffok mourad: La théorie de crédibilité: Approche Bayesien et Modèle de Buhlmann. cas SAA année 2011