



UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

Faculté Génie de la Construction

Département Génie Mécanique



Mémoire de Fin d'Etude

En vue de l'obtention du diplôme de Master académique en Génie Mécanique.

Option : Construction Mécanique.

Thème

Etude de flambement des structures métalliques

Proposé et encadré par :

Mr. ZIANI Hocine

Réalisé par :

MAKHLouF Omar

MANSOUR Nabil

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Nous tenons en premier lieu à remercier le bon dieu pour le courage et la patience qui nous a donné à fin de mener ce projet à terme.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de Plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toute notre reconnaissance.

Nous voudrions tout d'abord adresser toute notre gratitude à notre encadreur monsieur ZIANI Hocine, pour sa patience, sa disponibilité et ponctualité, ses exigences nous ont permit de franchir nos limites intellectuelles et ces judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous tenons à remercier également messieurs le président et les membres de jury pour nous avoir fait l'honneur de lire et jurer ce mémoire.

Nous remercions nos très chers parents, qui ont toujours été là pour nous, « vous avez tout sacrifié pour vos enfant n'épargnant ni santé ni efforts. Vous nous avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Nous sommes redevables d'une éducation dont nous sommes fier ».

Nous vaudrions exprimer notre reconnaissance envers nos chers amis et collègues qui nous ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de notre démarche. Un grand merci pour leur soutien inestimable. À tous ces intervenants, nous présentons nos remerciements, notre respect et notre gratitude.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

*A ma chère maman, pour son sacrifice, son amour, son tendresse,
son soutien tout au long de mes études,*

A mes chères Sœurs, pour leurs appuis et leurs encouragements,

*A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours
universitaire,*

*A tous mes amis, Nabil, Kossila, Samir, mouloud, Arezki, Faycel, Ali,
Sylia et toute la promotion 2019 de construction mécanique, pour le
goût à l'effort qu'ils ont suscité en moi,*

*Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le
fruit de votre soutien infaillible.*

Mr : MAKHLOUF Omar

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, pour leurs sacrifices, leurs amour, leurs tendresse, leurs soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chers frères et mes chères sœurs, pour leurs appuis et leurs encouragements,

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

A tous mes amis, Omar, Arezki, Yasmine, Faycel, Kossielà, Samir, mouloud, Ali, Lyes, Sofiane, Anis, nourdine et toute la promotion 2019 de construction mécanique, pour le goût à l'effort qu'ils ont suscité en moi,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infailible.

Mr : MANSOUR Nabil

Liste des symboles

E : Module de Young [MPa]

I : Moment d'inertie [mm^4]

N : Charge appliqué [N]

F : Force critique [N]

N_k : Charge critique d'Euler [N]

l_0 : Longueur de la poutre [mm]

l_f : Longueur de flambement [mm]

σ_k : Contrainte critique d'Euler [MPa]

σ_e : Limite élastique [MPa]

K_f : Coefficient de la longueur de flambement

f_c : Flèche maximale [mm]

ν : Coefficient de poisson

λ : Elancement

λ_k : Elancement critique d'Euler

$\bar{\lambda}$: Elancement réduit

i : Rayon de giration [mm]

P : Réaction transversale [N]

f_t : Flèche totale [mm]

M_f : Moment fléchissant [$N \cdot mm$]

M_0 : Moment fléchissant initiale [$N \cdot mm$]

Q : Charge concentrée [N]

q : Charge répartie [$N \cdot mm$]

V : Effort tranchant [N]

G : Module d'élasticité transversale de l'acier [MPa]

N_T : Charge critique de Tetmayer [N]

Liste des figures

➤ Chapitre I : Généralité sur le flambement

Figure I-1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique	2
Figure I-2 : Schématisation du flambage	2
Figure I-3 : L'effondrement du pont du Québec 1907	5
Figure I-4 : Poutre bi-articulé	6
Figure I-5 : Allures des déformées associées aux deux premières charges critiques	8

➤ Chapitre II : Aspect théorique du flambement

Figure II-1 : Poutre bi-articulée	14
Figure II-2 : Variation de la contrainte / L'élanement	16
Figure II-3 : Poutre encastree-articulée	17
Figure II-4 : Poutre bi-encastree	19
Figure II-5 : Poutre encastree-libre	21
Figure II-6 : Défaut de rectitude	22
Figure II-7 : Défauts de centrage	25
Figure II-8 : Sous charge concentrée	29
Figure II-9 : Sous charge répartie	31

➤ Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

Figure III-1 : Appareil de flambement (WP 120)	35
Figure III-2 : Poutre bi-articulée	38
Figure III-3 : Poutre encastree-articulée	40
Figure III-4 : Poutre bi-encastree	43

➤ Chapitre IV : Simulation numérique

Figure IV-1 : Discrétisation	48
------------------------------------	----

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Coefficient de réduction de la longueur.....	8
Tableau I-2 : Influence des liaisons aux appuis	9

Table des matières

➤ Introduction générale

➤ Chapitre I : Généralité sur le flambement

I.	INTRODUCTION :	1
I.1	Notion de la stabilité :	1
I.2	Définitions de flambement :	2
I.3	Lois de résistance au flambement :	2
I.4	Etude théorique :	3
I.5	Les origines des phénomènes d'instabilité élastique :	3
I.6	Les dangers de flambement :	4
I.7	Formule d'Euler :	6
I.7.1	Charge critique d'Euler :	6
I.7.2	Les différents modes de flambement :	8
I.7.3	Contrainte critique d'Euler :	8
I.8	Coefficient de réduction :	9
I.9	Influence des liaisons aux appuis :	10
I.10	Formule de Tetmayer :	11
I.11	PRINCIPE DE LA METHODE DE DUTHEIL :	11
I.11.1	Principe :	11
I.11.2	Calcul de résistance :	11
I.12	Formule de Rankine :	13
I.12.1	Charge critique de Rankine :	13
I.12.2	Contrainte de Rankine :	13
I.13	Récapitulatif des critères de résistance :	13
	➤ Chapitre II : Aspect théorique du flambement	
II.	Aspect théorique de flambement :	14
II.1	Poutre bi-articulée :	14
II.2	Poutre encastree en pied et articulée en tête :	17
II.3	Poutre bi-encastree :	18
II.4	Poutre encastree en pied et libre en tête :	20
II.5	Prise en compte des défauts de rectitude :	22
II.6	Prise en compte des défauts de centrage :	25
II.7	Flambement par flexion :	28
II.7.1	Sous charge concentrée Q :	29
II.7.2	Sous charge uniformément répartie q :	30

II.8	Influence de l'effort tranchant sur le flambement des pièces :	31
	➤ Chapitre III : Aspect expérimental du flambement	
III.	Aspect expérimental :	34
III.1	Description de l'appareil :	35
III.2	Description du matériau :	36
III.2.1	Dimension de l'éprouvette :	36
III.3	Partie pratique :	37
III.3.1	Poutre bi-articulée :	37
III.3.2	Poutre encastree-articulée :	40
III.3.3	Poutre bi-encastree :	43
III.3.4	Comparaison entre la théorie et la pratique :	45
	➤ Chapitre IV : Simulation numérique	
IV.	Principes généraux des méthodes numériques sur ordinateur :	47
IV.1	Différences finies :	47
IV.1.1	Avantage :	47
IV.1.2	Inconvénients :	47
IV.2	L'approche différences finies :	48
IV.3	Quelques formules simples d'approximation des dérivées par différences divisées :	48
IV.3.1	La dérivée première :	48
IV.3.2	La dérivée seconde :	49
IV.4	Poutre bi-articulée :	50
	➤ Conclusion générale	

Introduction générale

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure en équilibre, cesse d'être stable. Il est fondamental d'être sûr qu'une structure, légèrement écartée de sa position d'équilibre par des forces, des chocs, des vibrations, des imperfections, des contraintes résiduelles, etc. aura tendance à revenir à sa position initiale dès la suppression de la perturbation, nous avons trois phénomènes d'instabilité :

- Le flambement
- Le voilement
- Le déversement

On considère des systèmes avec un paramètre variable N qui représente classiquement la charge extérieure, pour chaque valeur de N . Dans les problèmes classiques de flambement, le système est stable si N est assez petit et devient instable quand N est grand. La valeur de N pour laquelle le système cesse d'être stable est appelée : valeur critique N_{cr} . plus généralement, il faut déterminer :

- Les configurations d'équilibre de la structure sous les chargements imposés.
- La valeur critique des chargements et les conséquences sur le comportement qu'ont ces niveaux de charge.

L'objectif de notre travail, est de faire la résolution des équations différentielles de différents cas de flambement, vu la complexité de ces équations, on fait appels aux méthodes numérique (Différences finis).

En utilisant la méthode d'Euler, pour un cas simple de flambement (poutre bi-articulée), son équation différentielle est défini : $EI_z \frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0$, sa résolution est de la forme : $y = A \sin ax + B \cos ax$, le problème rencontré est la détermination de la constante A .

On fait appel à la méthode expérimentale pour déterminer la charge critique d'EULER pour tous les cas de flambement, en comparant les résultats à la charge critique théorique.

Introduction générale

Le mémoire est composé de quatre chapitres, après l'introduction générale, le premier est consacré aux généralités des instabilités des structures (voilement et déversement), et en particulier sur le flambement des poutres élancées.

Le deuxième chapitre, traite l'aspect théorique de différents cas de flambement et la prise en charge des défauts (rectitude et centrage) avec la méthode d'EULER.

Le troisième chapitre est réservé à l'aspect expérimental du flambement ; les essais ont été réalisés à l'université de bejaia (département génie civil).

Le quatrième chapitre traite l'aspect numérique (méthode différence finis) avec le logiciel MATLAB.

Enfin le mémoire se termine avec une conclusion générale et perspective.

CHAPITRE (I)

Généralité sur le flambement

Chapitre I : Généralité sur le flambement

I. INTRODUCTION :

On dit qu'il y a flambage théorique ou instabilité élastique d'une construction soumise à un système d'efforts, lorsque pour une valeur particulière de chargement, appelée charge critique, il existe plusieurs états d'équilibre possibles.

Les déformations ne sont plus proportionnelles aux efforts appliqués et elles peuvent devenir considérables, ce qui entraîne automatiquement l'effondrement de la construction.

Ce phénomène présente une certaine analogie avec l'équilibre instable (ou équilibre autour d'une position d'instabilité) des solides rigides en mécanique analytique. [6]

I.1 Notion de la stabilité :

On peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement. Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par DIRICHLET: «L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ». Pour un corps élastique, tout comme pour un corps rigide, on peut parler de stabilité ou d'instabilité des positions d'équilibre (figure I.1). Si une fois l'action extérieure disparaît, le système retournant à sa position initiale, on dit que cette position est stable. Si le système n'y retourne pas, elle est instable. [10]

Chapitre I : Généralité sur le flambement

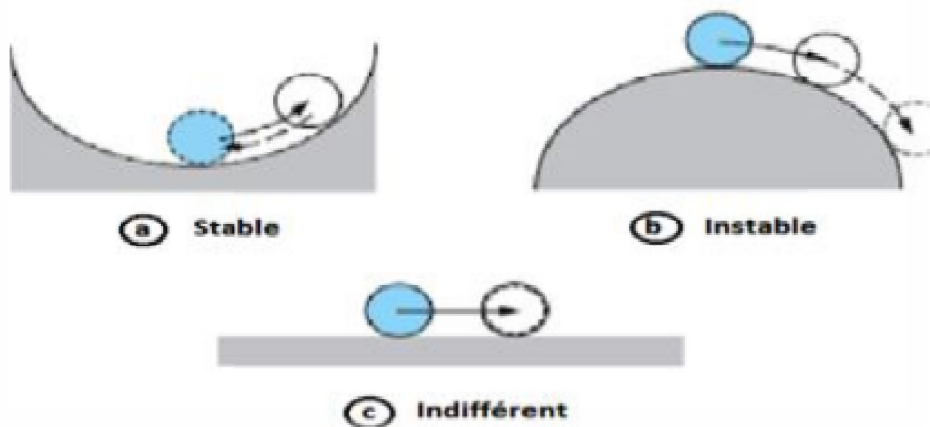


Figure I-1 : Les états d'équilibre d'un système mécanique [10]

I.2 Définitions de flambement :

Le flambage est un phénomène d'instabilité d'une structure, qui soumise à un effort normal de compression, a tendance à fléchir et à se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression. [2]

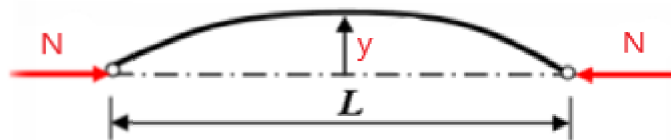


Figure I-2 : Schématisation du flambage [2]

I.3 Lois de résistance au flambement :

Plusieurs lois de comportement au flambement sont utilisées, les plus courantes sont celles d'Euler de Rankine de Tetmayer et la méthode de Dutheil. Certaines sont purement théoriques (Euler par exemple, la plus ancienne), les autres tiennent plus au moins compte de l'expérience.

EULER (1744) a été le premier à expliquer ce phénomène. Lorsqu'une tige mince rectiligne soumise à une force verticale N inférieure à la force critique N_c , une seule position d'équilibre stable existe: celle où la tige reste rectiligne Lorsque N est

Chapitre I : Généralité sur le flambement

supérieure à la force critique, deux positions d'équilibre existent: l'une où la tige est fléchie, l'autre où la tige reste rectiligne mais est alors instable. [9]

I.4 Etude théorique :

La théorie d'Euler met en évidence une charge critique en compression pour laquelle la poutre va fléchir de manière importante. Cette charge dépend:

- De la nature du matériau ;
- Des caractéristiques géométriques de la poutre;
- Des conditions d'appui imposées [9]

I.5 Les origines des phénomènes d'instabilité élastique :

Le calcul d'une structure exige que, sous toutes les combinaisons d'actions possibles, définies réglementairement, la stabilité statique soit assurée,

- tant globalement, au niveau de la structure
- qu'individuellement au niveau de chaque élément.

Les actions développent diverses sollicitations, qui génèrent des contraintes au sein du matériau et des déformations des éléments.

Il s'agit donc, afin de garantir le degré de sécurité, de vérifier que les contraintes et les déformations restent en deçà des limites admissibles.

Deux cas de figure se présentent :

➤ Cas de petites déformations

Tant que l'on reste dans le domaine des petites déformations, on admet que les sollicitations ne varient pas (ou peu) sous l'effet des déformations, ce qui conduit simplement à vérifier que les contraintes restent inférieures à la contrainte de ruine.

➤ Cas des grandes déformations

Dans ce cas, les déformations modifient considérablement les sollicitations qui les ont initiées et nécessitent des calculs spécifiques.

Chapitre I : Généralité sur le flambement

Les grandes déformations affectent les zones comprimées des pièces, qui peuvent présenter trois types de comportements caractéristiques, dénommés phénomènes d'instabilité, qui sont :

- Le flambement, qui affecte les barres simplement comprimées (flambement simple) ou comprimées et fléchies (flambement flexion) qui est très dangereux,
- Le déversement, qui affecte les semelles comprimées des pièces fléchies,
- Le voilement, qui affecte les âmes des pièces fléchies

L'étude des phénomènes d'instabilité élastique est particulièrement importante en construction métallique, car ils sont très fréquents du fait de l'utilisation d'éléments minces et de grand élancement.

Nous nous proposons donc d'examiner successivement le phénomène d'instabilité (flambement), sous leurs aspects théoriques et expérimentaux. [3]

I.6 Les dangers de flambement :

Le flambement est l'une des premières causes de sinistres des structures, parce qu'il affecte essentiellement les poteaux, l'élément porteur principal de bâtiment. Ces sinistres ont été à l'origine de grandes catastrophes comme l'effondrement du pont de Québec (1907, 74 morts, figure I.3). Dans une structure, le flambement d'un élément comprimé provoque des grandes déformations dues à la non linéarité géométrique, et par conséquent, il engendre une chute de la force supportée. Cela modifie le cheminement des forces dans la structure et peut causer l'instabilité des autres éléments. Les contreventements sont les plus exposées à ce type de risque. Pour l'éviter soit on dimensionne les éléments comprimé pour résister.

On peut améliorer la résistance au flambement d'un élément par plusieurs façons. La réduction du rapport d'élancement par l'augmentation des dimensions se traduira par une charge ultime plus élevée. Cela peut aussi être fait en répartissant le matériau de manière différente le long de l'élément. [11]



Figurel-3 : L'effondrement du pont du Québec 1907 [11]

I.7 Formule d'Euler

I.7.1 Charge critique d'Euler :

Modélisons la poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B , cette ligne moyenne prenne une très légère courbure (accentuée sur le schéma ci-contre)

Si x et y sont les coordonnées d'un point courant G de la fibre moyenne, y est la déformée de cette fibre.

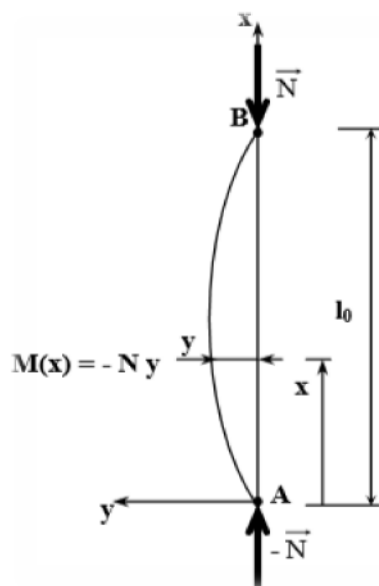


Figure I-4 : Poutre bi-articulée [2]

Chapitre I : Généralité sur le flambement

Habituellement, en ce qui concerne l'équilibre statique, on considère que les déformations sont petites et que la fibre moyenne n'a pas bougé après déformation.

Dans ce qui suit, nous allons au contraire prendre en compte l'influence des déformations sur l'équilibre statique et considérer le moment secondaire qu'elles provoquent. Ce moment de flexion dans la section vaut :

$$M_Z(x) = -N \cdot y \quad (1)$$

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI_{GZ} y'' = M_Z(x) \Leftrightarrow EI_{GZ} y'' - M_Z(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow EI_{GZ} y'' + Ny = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{N}{EI_{GZ}} y = 0 \quad \text{Équation différentielle de 2^{ème} ordre.}$$

La solution générale de cette équation est de cette forme :

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Avec :
$$\alpha^2 = \frac{N}{EI_{GZ}} \quad (3)$$

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

Pour $x = 0$, $y(0) = 0$; donc $A = 0$

Pour $x = l_0$, $y(l_0) = 0$; donc $B \sin \alpha x = 0$

A étant nul, il est évident que $B \neq 0$ (sinon pas de flambement)

$$\Rightarrow \sin \alpha l_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha l_0 = n \pi \text{ avec } n = \text{nombre entier}$$

$$n = 1 \quad \text{1^{er} mode de flambement} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{l_0} \quad (4)$$

Equation de la déformée ; $y(x) = B \sin \left(\frac{\pi x}{l_0} \right)$

De l'équation (3) et (4) :
$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{l_0^2} = \frac{N}{EI_{GZ}}$$

Chapitre I : Généralité sur le flambement

La résolution de cette équation permet de trouver N provoquant la déformée, c'est-à-dire la charge critique d'Euler N_c au-delà de laquelle le flambement se produit :

$$N_c = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{l_0^2}$$

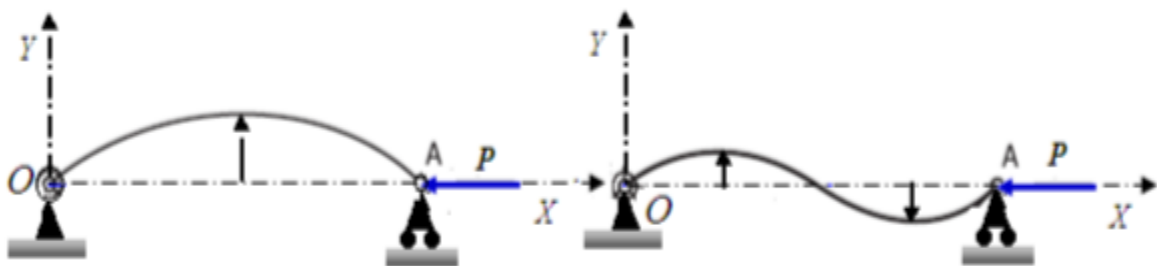
Dans le cas de la poutre bi-articulée étudiée ($l_f = l_0$) et I_{GZ} le moment quadratique le plus faible (ce n'est pas toujours le cas).

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

- $N < N_c$: compression simple, la poutre reste droite, elle est dite en équilibre stable.
- $N = N_c$: la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à B , elle est dite en équilibre neutre. A noter que $B = y_{maxi}$ est en général petit.
- $N > N_c$: il y a instabilité en position droite (équilibre instable) avec une forte tendance au flambement. B Augmentera très rapidement avec un léger accroissement de N . [2]

I.7.2 Les différents modes de flambement :

Les expressions des déformées associées aux deux premières charges critiques permettent de tracer leurs allures comme le montre la figure. [7]



(a)- 1^{er} mode de flambement.

(b)- 2^{ème} mode de flambement.

Figure I-5 : Allures des déformées associées aux deux premiers modes de flambement. [7]

Chapitre I : Généralité sur le flambement

I.7.3 Contrainte critique d'Euler :

A la force critique d'Euler N_c correspond une contrainte critique, qui peut prendre le nom de contrainte critique limite ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement.

Pour une poutre comprimée de section S , la contrainte critique σ_c est définie par la relation : [2]

$$\sigma_c = \frac{N_c}{S} \Leftrightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{l_f^2 \cdot S}$$

I.8 Coefficient de la longueur de flambement :

$$l_f = k_f l_0$$

k_f : Coefficient de la longueur l_f

l_0 : Longueur de la barre

Coefficient de la longueur de flambement (K_f)	
Poutre bi-articulée	1
Poutre encastree articulée	0,7
Poutre bi-encastree	0,5
Poutre encastree-libre	2

Tableau I- 1 : Coefficient de la longueur de flambement [2]

Ce coefficient k_f montre par combien il faut multiplier la longueur d'une tige articulée pour que sa charge critique soit égale à celle de la tige de longueur dans des conditions de fixations envisagées. [2]

Chapitre I : Généralité sur le flambement

I.9 Influence des liaisons aux appuis :

La charge critique se définit donc comme la charge axiale qui suffit à maintenir une barre élancée sous une forme légèrement fléchie.

On peut généraliser les résultats établis pour la poutre bi-articulée pour des poutres dont les conditions d'appuis sont différentes. [7]





Type de liaison	Schéma	Longueur de flambement (l_f)	Charge critique (N_c)
Appui Bi-Articulée		L	$N_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$
Libre-Encastrement		$2L$	$N_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$
Encastrement-Encastrement		$0,5L$	$N_c = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$
Appui simple-Encastrement		$0,7L$	$N_c = \frac{2\pi^2 EI}{L^2}$

Tableau I- 2 : Influence des liaisons aux appuis [7]

I.10 Formule de Tetmayer :

Formule expérimentale :

$$N_T \leq \frac{AR_{cf}}{\alpha}$$

R_{cf} : Résistance à la compression par flambement établi expérimentalement pour différents matériaux et en fonction de λ .

Elle est surtout utilisée dans le domaine des faibles élancements où la formule d'Euler donne des valeurs trop favorables, donc, présentant moins de sécurité. [9]

Chapitre I : Généralité sur le flambement

I.11 PRINCIPE DE LA METHODE DE DUTHEIL :

I.11.1 Principe :

La méthode de Dutheil a ceci de particulier, qu'elle est applicable à une pièce comprimée quel que soit élanement. Elle est par ailleurs vérifiée avec une précision très acceptable par l'expérience.

Sous l'action d'un effort de compression F , et en admettant que la poutre fléchisse, les contraintes dans une section droite sont les contraintes normales dues à une sollicitation composée de compression-flexion. [1]

$$|\sigma|_{max} = \left| \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}}{\frac{I_{Gz}}{\nu}} \right|$$

I.11.2 Calcul de résistance :

La flèche maximale au milieu d'une poutre ayant une flèche initiale a est donnée par la relation : [1]

$$f_c = \frac{a}{1 - \frac{F}{F_c}}$$

Dans la section supportant le moment de flexion maximal :

$$|M_{fz}|_{max} = F \times \frac{a}{1 - \frac{F}{F_c}} \quad \text{Avec : } F_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{L^2}$$

On écrit alors pour une charge axiale $|N| = F$:

$$|\sigma|_{max} = \frac{F}{S} + \frac{\pi^2 Eav}{L^2} \cdot \frac{F}{F_c - F} \quad (1)$$

Dans la suite des calculs, on écrira : $\sigma_c = \frac{F_c}{S}$ = contrainte critique d'Euler.

Dans la relation (1) exprimant la contrainte normale totale σ , posons pour simplifier

les écritures : $\sigma_0 = \frac{\pi^2 Eav}{L^2}$ (σ_0 est homogène à une contrainte).

Chapitre I : Généralité sur le flambement

Exprimons comme condition limite que $\sigma \leq \sigma_e$ pour une charge axiale $F = \sigma S$, ce qui revient à dire que la poutre sera calculée en compression mais en majorant la contrainte pour tenir compte du moment de flexion.

La relation (1) s'écrit alors après simplification par S :

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0) + \sigma_c \sigma_e \geq 0 \quad (2)$$

Notons qu'en écrivant $\sigma \leq \sigma_e$ aucun coefficient de sécurité n'intervient ; nous devons en tenir compte plus tard.

On sait résoudre cette inéquation (2) du second degré en σ . Pour simplifier les écritures, Dutheil a proposé d'écrire : $\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0 = \sigma_t$.

D'autre part, le terme σ_0 intervenant en terme correctif, Dutheil propose comme expression de σ_t :

$$\sigma_t \approx \sigma_c + 1,3\sigma_e \quad (3)$$

Ce qui évite le calcul de σ_0 . Notons que cette expression (3) repose sur une vérification expérimentale. La résolution de (2) donne alors :

$$\sigma \leq \frac{1}{2}\sigma_t - \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{4} - \sigma_e \sigma_c} \quad (4)$$

A noter. Cette formule de Dutheil est vraie quel que soit l'élanement de la poutre.

Notons cependant que la relation (4) ne fait intervenir aucun coefficient de sécurité.

La contrainte σ ainsi calculée est appelée **contrainte d'affaissement** ou **contrainte de ruine**. Pour un matériau comme la fonte ou le béton, la ruine intervient sur les fibres tendues car $\sigma_{e(ext)}$ est très inférieur à $\sigma_{e(comp)}$. **[1]**

Chapitre I : Généralité sur le flambement

I.12 Formule de Rankine :

I.12.1 Charge critique de Rankine :

Cette formule, à base expérimentale, exprime que pour les poutres élancées, la charge critique selon Rankine est égale à : [1]

$$N_c = \frac{R_e \cdot A}{(1 + \bar{\lambda}^2)}$$

$$\text{Avec : } \bar{\lambda} = \frac{\lambda_{\text{colonne}}}{\lambda_{\text{lim d'Euler}}}$$

$\bar{\lambda}$: Élancement réduit

$$\lambda_{\text{lim d'Euler}} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_e}}$$

$$\lambda_{\text{col}} = \frac{l_f}{r}$$

I.12.2 Contrainte de Rankine :

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A} = \frac{R_e}{(1 + \bar{\lambda}^2)}$$

Le problème de la stabilité d'une barre dont l'élancement est inférieur à l'élancement limite demande une étude particulière.

- Si $\lambda_{\text{colonne}} < \lambda_{\text{lim d'Euler}}$: on utilise la formule de Rankine.
- Si $\lambda_{\text{colonne}} > \lambda_{\text{lim d'Euler}}$: on utilise la formule d'Euler. [1]

I.13 Récapitulatif des critères de résistance :

Suivant la valeur de l'élancement λ , il est d'usage d'employer l'une des trois relations suivantes, On notera que pour des élancements croissants, la limite décroît.

- **Poutres courtes : $\lambda < 20$ (acier) :**

Calcul en compression simple :

$$F = \sigma_{pc} \text{ Compression.}$$

- **Poutres moyennes : $20 < \lambda < 100$ (acier) :**

Chapitre I : Généralité sur le flambement

On utilisera la formule expérimentale de Rankine : $F = \frac{\sigma_{pc} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ Rankine.

➤ **Poutres élancées : $\lambda > 100$ (acier) :**

Calcul au flambement d'Euler : $F = \frac{\sigma_{pc} \cdot S}{2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ Euler. [1]

CHAPITRE (II)

Aspect théorique de flambement

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

II. Aspect théorique du flambement :

II.1 Poutre bi-articulée :

Le flambement simple affecte les pièces soumises à la compression simple, son étude est due à EULER.

La théorie d'Euler est fondée :

- sur une poutre droite, bi-articulée à ses extrémités,
- soumise à un effort normal de compression centré N , appliqué dans l'axe $0x$.
- dont les dimensions transversales sont faibles en regard de la longueur (grand élancement) .
- dont les inerties sont maximale dans le plan $z0x$ et minimale dans le plan $y0x$ (voir figure 1).

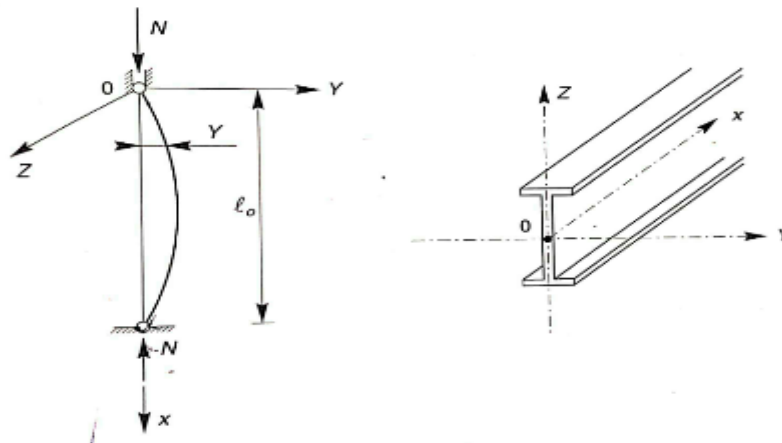


Figure II-1 : Poutre bi-articulée [3]

Lorsque N croît, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchi.

D'après la loi fondamentale de la flexion, issue de la résistance des matériaux, le moment fléchissant s'écrit :

$$M = -EI_z \frac{d^2y}{dx^2}$$

Or, $M = Ny$ donc : $EI_z \frac{d^2y}{dx^2} + Ny = 0$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

En posant $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, on obtient l'équation de l'élastique :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$$

Equation différentielle du second ordre, dont la solution générale est de la forme :

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

La résolution de cette équation s'opère grâce aux conditions aux limites :

- pour $x = 0$, $y(0) = 0$, $B = 0$
- pour $x = l_0$, $y(l_0) = 0$, $A \sin \alpha l_0 = 0$

Deux cas sont alors possibles :

- Si $\sin \alpha l_0 \neq 0$, $A = 0$ et $y(x) = 0$ quel que soit x . Dans ce cas, seul l'équilibre rectiligne est possible.
- Si $\sin \alpha l_0 = 0$, $\alpha l_0 = k\pi$

Soit :

$$\alpha = \frac{k\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

D'où :

$$N = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l_0^2}$$

-Si $k = 0$, $N = 0$ et la poutre est rectiligne, pour qu'elle reste fléchie, il faut que k soit au moins égal à 1, ce qui conduit à la valeur minimale de N , correspondant à un équilibre fléchi de la poutre, qui vaut :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

N_k = Force critique d'Euler

L'allure de la déflexion correspondant à cette force est :

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$y = A \sin \alpha x$$

Donc l'allure de la déflexion est une courbe sinusoïdale, il n'est pas possible d'obtenir l'amplitude du flambement notée par A . [8]

A la force critique d'Euler N_k correspond une contrainte critique $\sigma_k = \frac{N_k}{A}$, A étant la section droite de la poutre, qui s'écrit encore :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \cdot i^2$$

Avec $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$, rayon de giration minimal, correspondant à l'inertie I minimale et à l'élanement maximal $\lambda = \frac{l_0}{i}$, d'où finalement :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

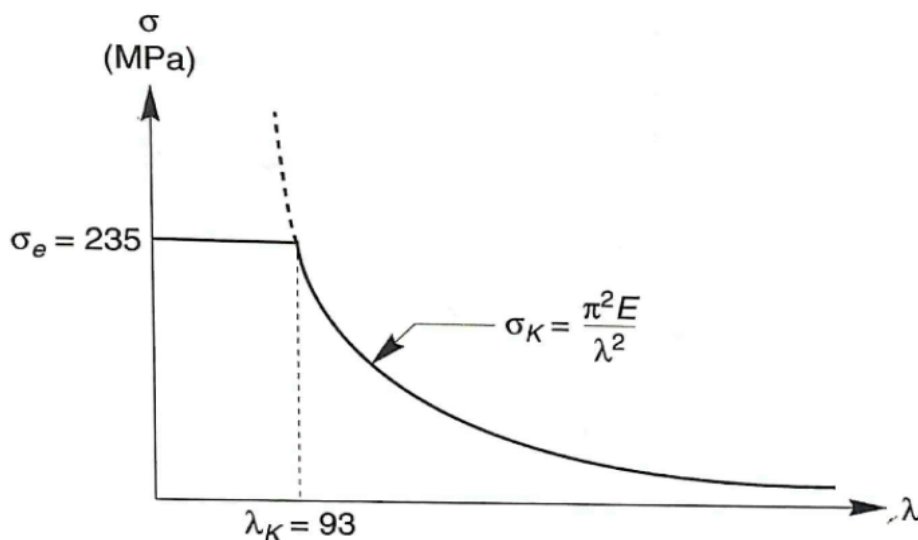


Figure II-2 : Variation de la contrainte / L'élanement [3]

- Lorsque $\sigma_k > \sigma_e$ aucun risque de flambement n'est à craindre et la ruine survient pour $\sigma = \sigma_e$.
- Lorsque $\sigma_k < \sigma_e$, il y a ruine par flambement dès lors que $\sigma = \sigma_k$.

A la limite de bifurcation d'équilibre, pour laquelle $\sigma_k = \sigma_e$, correspond un élanement critique dans le cas d'un poteau bi-articulée en acier **E235** vaut : [3]

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{235}} = 93$$

II.2 Poutre encastree en pied et articulée en tête :

La ligne d'action de N tend à se déplacer dans la section d'encastrement et génère une réaction transversale P , la ligne d'action passe par A , point d'inflexion de la déformée.

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -Ny + Px$$

Et a pour solution, en posant $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$:

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{P}{N} x$$

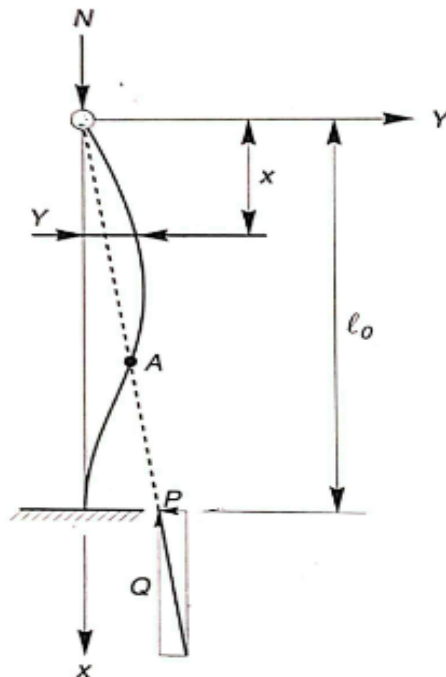


Figure II-3 : Poutre encastree-articulée [3]

La résolution s'effectue grâce aux conditions aux limites :

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$y(0) = 0, \quad \text{soit } B = 0$$

$$y(l_0) = 0, \quad \text{soit } A \sin \alpha l_0 + \frac{P}{N} l_0 = 0$$

$$y'(l_0) = 0, \quad \text{soit } A \alpha \cos \alpha l_0 + \frac{P}{N} = 0$$

D'où l'on tire l'équation transcendante $\tan \alpha l_0 = \alpha l_0$, qui a pour plus petite racine $\alpha l_0 = 4,5$.

Soit :

$$\alpha = \frac{4,5}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

D'où :

$$N_k = 2 \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

Ce qui montre, en se référant à la formule d'Euler pour une poutre bi-articulée, que :
[3]

$$\frac{2}{l_0^2} = \frac{1}{l_k^2}, \quad \text{soit } l_k = \frac{l_0 \sqrt{2}}{2} = 0,7 l_0$$

II.3 Poutre bi-encastée :

L'équation différentielle est :

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

L'expression du moment est de la forme :

$$M = -Ny + Cx + D$$

Par conséquent :

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = Cx + D$$

Et par intégration, il vient :

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + Cx + D$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

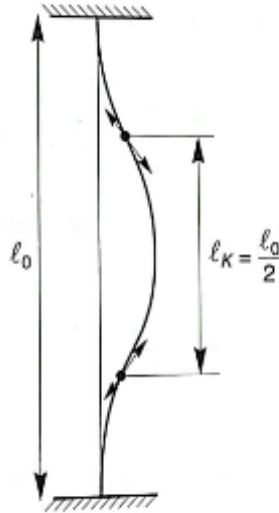


Figure II-4 : Poutre bi-encastée [3]

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$y(0) = y(l_0) = 0$$

$$\text{Soit } \begin{cases} A + D = 0 \\ B\alpha l_0 + C = 0 \\ A \cos \alpha l_0 + B \sin \alpha l_0 + Cl_0 + D = 0 \\ A\alpha \sin \alpha l_0 + B\alpha \cos \alpha l_0 + Cl_0 = 0 \end{cases}$$

$$y'(0) = y'(l_0) = 0$$

La déformation ne sera pas nul si le système obtenu en éliminant C et D a une solution différente de zéro :

$$A(1 - \cos \alpha l_0) + B(\alpha l_0 - \sin \alpha l_0) = 0$$

$$A \sin \alpha l_0 + B(1 - \cos \alpha l_0) = 0$$

C'est-à-dire si :

$$(1 - \cos \alpha l_0)^2 (\alpha l_0 - \sin \alpha l_0) \sin \alpha l_0 = 0$$

Soit en développant :

$$1 - 2 \cos \alpha l_0 + \cos^2 \alpha l_0 - \alpha l_0 \sin \alpha l_0 + \sin^2 \alpha l_0 = 0$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

Ou :

$$2(1 - \cos \alpha l_0) = \alpha l_0 \sin \alpha l_0$$

La plus petite racine non nulle de cette équation est :

$$\alpha l_0 = 2\pi$$

La force critique d'Euler est donc égale à :

$$N_k = 4\pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

D'une manière générale, selon les conditions aux appuis, la force critique d'Euler vaut :

$$N_k = m \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

l_0 étant la longueur réelle de la barre. En introduisant la longueur de flambement l_f , elle s'écrit alors :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad \text{Avec} \quad l_f = \frac{l_0}{\sqrt{m}} \quad [3]$$

On peut déduire alors que :

$$K_f = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

II.4 Poutre encastree en pied et libre en tete :

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI_{GZ} y'' = M_Z(x) \Leftrightarrow EI_{GZ} y'' - M_Z(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow EI_{GZ} y'' + Ny = 0$$

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{N}{EI_{GZ}} y = 0 \quad \text{Équation différentielle de 2^{eme} ordre}$$

La solution générale de cette équation est de cette forme :

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad \text{Avec } \alpha^2 = \frac{N}{EI_{GZ}} \quad (1)$$

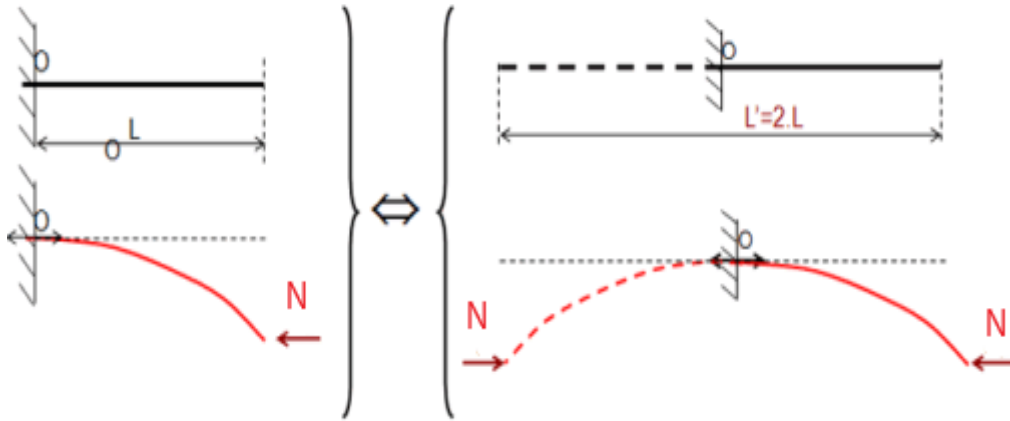


Figure II-5 : Poutre encastree-libre

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

Pour $x = 0$, $y(0) = 0$; donc $A = 0$

Pour $x = 2l$, $y(2l) = 0$; donc $B \sin \alpha 2l = 0$

A étant nul, il est évident que $B \neq 0$ (si non pas de flambement),

$$\Rightarrow \sin \alpha 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha 2l = n \pi \text{ avec } n = \text{nombre entier}$$

$$n = 1 \quad 1^{er} \text{ mode de flambement} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2l} \quad (2)$$

Equation de la déformée ; $y(x) = B \sin \left(\frac{\pi x}{2l} \right)$

De l'équation 1 et 2 : $\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} = \frac{N}{EI_{GZ}}$

La résolution de cette équation permet de trouver N provoquant la déformée, c'est-à-dire la charge critique d'Euler N_c au-delà de laquelle le flambement se produit :

$$N_c = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{4l^2}$$

On se référant à la formule d'Euler pour une poutre bi-articulé, que :

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$\frac{1}{4l^2} = \frac{1}{l_f^2}, \text{ soit } l_f = 2l$$

Pour une poutre comprimée de section S , la contrainte critique σ_c est définie par la relation :

$$\sigma_c = \frac{N_c}{S} \Leftrightarrow \sigma_c = \frac{\pi^2 EI_{GZ}}{l_f^2 \cdot S}$$

On sait que $r = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}$ le rayon de giration,

$$\text{Et : } \lambda = \frac{l_f}{r} \text{ avec } l_f = 2l \Leftrightarrow \lambda = \frac{2l}{r}$$

La contrainte critique s'exprime alors sous la forme : $\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

II.5 Prise en compte des défauts de rectitude :

Considérons une poutre dotée d'une courbure initiale $y_0 = f(x)$ et chargée centriquement (figure 6).

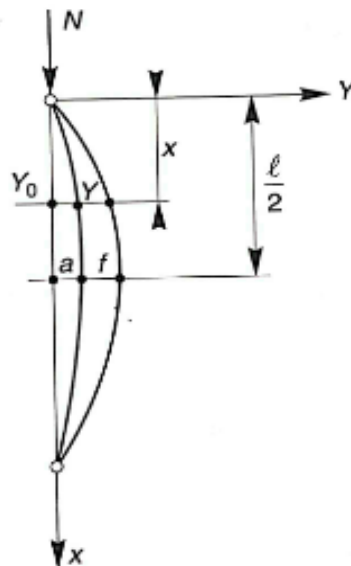


Figure II-6 : Défaut de rectitude [3]

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

Dans une section courante z , le moment fléchissant vaut :

$$M(x) = N(y + y_0)$$

L'équation de la déformée s'écrit :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -N(y + y_0)$$

D'où :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 (y + y_0) = 0$$

La déformée de la poutre, à vide, s'exprime par le développement en série de sinus suivante :

$$y_0 = \alpha_1 \frac{\sin \pi x}{l} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots$$

Qui, en première approximation (les autres termes étant négligeables), se résume à :

$$y_0 = \alpha \sin \frac{\pi x}{l}, \text{ soit :}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 \left(y + \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \right) = 0 \quad (1)$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$y = D \sin \frac{\pi x}{l}$$

Les dérivées sont :

$$\frac{dy}{dx} = D \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -D \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

L'équation (1) devient alors :

$$\sin \frac{\pi x}{l} \left(\alpha \alpha^2 + D \alpha^2 - D \frac{\pi^2}{l^2} \right) = 0$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

D'où l'on tire :

$$D = \frac{a}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1}$$

La flèche additionnelle y prise par la poutre vaut donc :

$$y = \frac{\alpha \sin \frac{\pi x}{l}}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1}$$

Elle est maximale à l'abscisse $x = \frac{l}{2}$

Soit :

$$y_{max} = f = \frac{a}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} \quad (2)$$

Compte tenu que $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ et $N_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, (2) s'écrit encore :

$$f = \frac{a}{\frac{N_k}{N} - 1}$$

Les déformations croissent hyperboliquement avec N .

La flèche totale f_t (flèche initiale + flèche additionnelle) vaut donc :

$$f_t = a + f = \frac{a}{1 - \frac{N}{N_k}} \quad (3)$$

- lorsque $N = 0$, $f_t = a$ (état initial)
- lorsque $N \rightarrow N_k$, $f_t \rightarrow \infty$ (état de ruine)

La contrainte maximale, caractérisant l'état de ruine, est obtenue pour :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{N f v}{I}$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

Compte tenu que $c = \frac{I}{vA} = \frac{i^2}{v}$, i étant le rayon de giration et c la distance du centre de gravité de la frontière du noyau central, on a :

$$\sigma_e = \sigma \left(1 + \frac{a}{c} \frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma} \right) \quad (4)$$

$\frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma}$ = Coefficient d'amplification de la flèche initiale

$\left(1 + \frac{a}{c} \frac{\sigma}{\sigma_k - \sigma} \right)$ = Coefficient d'amplification de la contrainte.

La charge de ruine N est obtenue par la relation (4), en portant $\sigma = \frac{N}{A}$ et $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$. On obtient l'équation suivante du second degré, qui donne N : [3]

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2 EA} N^2 - \left(\frac{\lambda^2 \sigma_e}{\pi^2 E} + \frac{a}{c} + 1 \right) N + A \sigma_e = 0$$

II.6 Prise en compte des défauts de centrage :

Considérons cette fois-ci une poutre rectiligne, chargée d'une force normale N , parallèle à son axe moyen, mais excentrée de e (Figure 7)

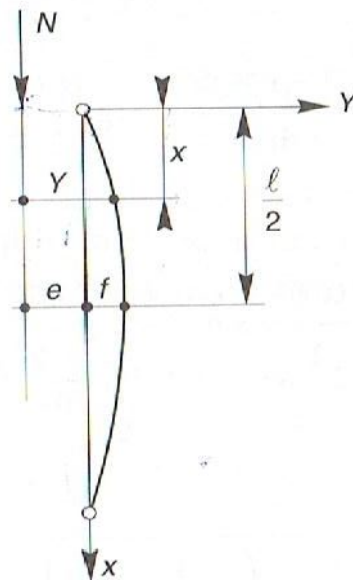


Figure II-7 : Défauts de centrage [3]

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

- Equation de la déformée :

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$$

- Solution générale :

$$Y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

- Condition aux limites

$$y(0) = e, \text{ soit } B = e$$

$$y(l) = e, \text{ soit } A = e \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l}$$

D'où

$$y = e \left(\cos \alpha x + \sin \alpha x \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \right)$$

- Flèche totale maximale, pour $x = \frac{l}{2}$:

$$e + f = e \left[\cos \alpha \frac{l}{2} + \sin \alpha \frac{l}{2} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \right]$$

Or :

$$\cos \alpha l = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha l}{2}$$

$$\sin \alpha l = 2 \sin \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2}$$

$$\frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = \tan \frac{\alpha l}{2}$$

La flèche totale vaut alors :

$$e + f = e \left(\cos \frac{\alpha l}{2} + \sin \frac{\alpha l}{2} \cdot \tan \frac{\alpha l}{2} \right) = \frac{e}{\cos \frac{\alpha l}{2}}$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

Soit :

$$f = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (5)$$

- Lorsque $N = 0$, $f = 0$ (état initial)
- Lorsque $N \rightarrow N_k$, $f \rightarrow \infty$ (état de ruine)

f Varie hyperboliquement en fonction de N et a pour asymptote horizontale N_k .

Le moment fléchissant maximal vaut :

$$M_f = N(e + f) = \frac{N \cdot e}{\cos \frac{\alpha l}{2}}$$

La contrainte maximale, caractérisant l'état de ruine, est obtenue pour

$$\sigma_e = \frac{N}{A} + \frac{N(e + f)v}{I}$$

Qui s'écrit encore, en portant $c = \frac{i^2}{v}$ et f tirée de la relation (5) :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{c \cdot \cos \frac{\alpha l}{2}} \right)$$

$$\text{Or, } \cos \frac{\alpha l}{2} = \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} \cdot \frac{l}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{N}{EA}}$$

Soit enfin :

$$\sigma_e = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{c} \frac{1}{\cos \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{N}{EA}}} \right) \quad (6)$$

La charge de ruine N peut être obtenue par résolution de l'équation (6) ; cependant, plus simplement, tant que N reste faible vis-à-vis de N_k (petites déformations), on peut admettre avec une précision suffisante, αl étant faible, que :

$$\cos \frac{\alpha l}{2} = 1 - \frac{\alpha^2 l^2}{8}$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

L'équation (5) s'écrit alors :

$$f = e \left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha^2 l^2}{8}} - 1 \right)$$

En portant $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$, on obtient finalement :

$$N = \frac{8EI f}{l^2(e+f)} \quad (7)$$

II.7 Flambement par flexion :

Il s'agit dans ce cas, d'une poutre idéale rectiligne, soumise simultanément à un effort normal N et à un moment fléchissant M_0 .

En comparaison au flambement simple, il y a dans e une amplification de la déformée et donc des contraintes de flexion et de compression.

Si $M_0(x)$ est le moment fléchissant initial, le moment fléchissant total dans la poutre, comprimée et fléchie, vaut :

$$M(x) = M_0(x) + Ny$$

La déformée a pour équation :

$$EI = \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = -M_0(x)$$

Pour les fonctions simple de $M_0(x)$, l'intégration est possible.

Considérons les deux cas les plus courants de moment :

- Moment sous charge concentrée transversale.
- Moment sous charge uniformément répartie transversale.

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

II.7.1 Sous charge concentrée Q :

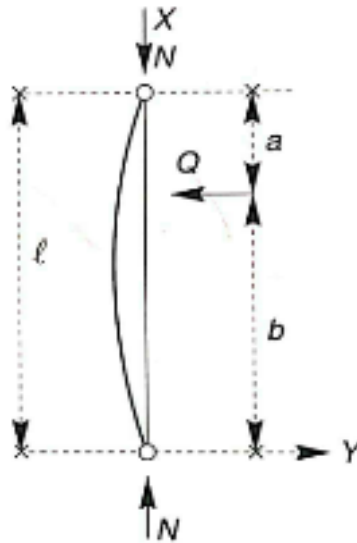


Figure II-8 : Sous charge concentrée [3]

Nous avons : si $x \leq a$ $\mu(x) = Q_x \frac{l-a}{l}$

si $x \geq a$ $\mu(x) = Q_a \frac{l-x}{l}$

L'intégrale générale a pour expression :

- Si $0 \leq x \leq a$

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{Q}{N} x \frac{l-a}{l}$$

- Si $a \leq x \leq l$

$$y(x) = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x + \frac{Q}{N} a \frac{l-x}{l}$$

Les coefficients A, B, C, D sont des déterminés en écrivant que :

$$A = 0 ;$$

$$B = -\frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha(l-a)}{\sin \alpha l} ;$$

$$C = -D \tan \alpha l ;$$

$$D = \frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha a}{\tan \alpha l} \Rightarrow C = -\frac{Q}{\alpha N} \sin \alpha a$$

Finalement :

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

- Si $0 \leq x \leq a$:

$$y(x) = -\frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha(l-a)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x + \frac{Q}{N} x \frac{l-a}{l}$$

- Si $a \leq x \leq l$:

$$y(x) = \frac{Q}{\alpha N} \frac{\sin \alpha a}{\sin \alpha l} \sin \alpha(l-x) + \frac{Q}{N} \alpha \frac{l-x}{l}$$

Pour $x = \frac{l}{2}$ et $a = \frac{l}{2}$

$$u = \frac{\alpha l}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{N}{El_z}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_K}}$$

$$y_{max} = -\frac{Ql^3}{48El_z} \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3}$$

$$y_{max} = \frac{Ql}{4} \frac{\operatorname{tg} u}{u}$$

II.7.2 Sous charge uniformément répartie q :

$\mu(x) = \frac{qx}{2}(l-x)$ En posant : $u = \frac{\alpha l}{2}$; il vient :

$$y(x) = \frac{Ql^4}{16El_z u^4} \left[1 - \frac{\cos \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\cos u} \right] + \frac{ql^2 x}{8El_z u^2} (l-x)$$

La flèche maximale pour $x = \frac{l}{2}$ s'écrit :

$$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{El_z} \frac{24(1 - \cos u) - 12u^2 \cos u}{5u^4 \cos u}$$

$$y_{max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(\cos u - 1)}{u^2 \cos u}$$

Les résultats, pour les cas usuels, sont rassemblés dans le tableau ci-après, dans

lequel $t = \frac{\alpha l}{2}$, [3]

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

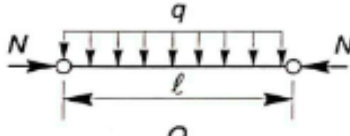
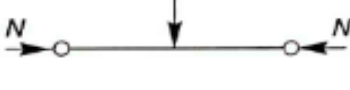
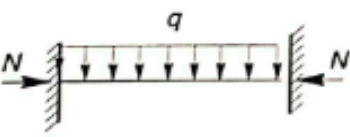

Cond. aux appuis	Cas de charges	M_0 max. pour $z = \frac{\ell}{2}$	M max. pour $z = \frac{\ell}{2}$	Coefficient d'amplification des moments : $r = \frac{M \text{ max}}{M_0 \text{ max}}$
Bi-articulé		$q \frac{\ell^2}{8}$	$q \frac{\ell^2}{8} r$	$\frac{2}{t^2} \left(\frac{1}{\cos t} - 1 \right)$
		$Q \frac{\ell}{4}$	$Q \frac{\ell}{4} r$	$\frac{1}{t} \operatorname{tg} t$
Bi-encasté		$q \frac{\ell^2}{24}$	$q \frac{\ell^2}{24} r$	$\frac{3}{t \sin 2t} - \frac{3}{2t^2}$
		$Q \frac{\ell}{8}$	$Q \frac{\ell}{8} r$	$\frac{1}{t} \operatorname{tg} t$

Figure II-9 : Sous charge répartie [3]

II.8 Influence de l'effort tranchant sur le flambement des pièces :

La sollicitation d'effort tranchant, généralement présente dans les pièces fléchies, entraîne des déformations dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent. En fait, la présence d'un effort tranchant ne modifie d'une manière sensible la charge critique.

Reprenons le cas simple de la poutre d'Euler bi-articulé sollicitée en compression simple.

Nous avons :

$$M = Ny \quad \text{et} \quad V = \frac{dM}{dx} = N \frac{dy}{dx}$$

L'équation de la déformée s'écrit, en prenant en compte les déformations engendrées par l'effort tranchant :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V}{GA_1} \right)$$

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Ny}{EI} + \frac{N}{GA_1} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Soit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left(1 - \frac{N}{GA_1}\right) + \frac{N}{EI} y = 0$$

Posons :

$$\beta^2 = \frac{N}{EI \left[1 - \frac{N}{GA_1}\right]}$$

L'équation devient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y = 0$$

Elle est analogue à l'équation différentielle du (II.1) Précédent, et se résout de la même façon.

La force critique de flambement, qui valait $N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$, est réduite en raison

de l'influence de l'effort tranchant et devient :

$$N_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \frac{1}{GA_1}}$$

Ou :

$$N_k = \frac{N_k}{1 + \frac{N_k}{GA_1}}$$

A_1 étant la section réduite à l'effort tranchant.

- Si A_1 est très grande :

Chapitre II : Aspect théorique du flambement

$$\beta^2 = \alpha^2 = \frac{N}{EI} \text{ et } N_K = N_K \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

- Si, au contraire l est très grand :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left(1 - \frac{N}{GA_1} \right) = 0$$

Ce qui est vérifié pour $\frac{N}{GA_1} = 1$, c'est à-dire que la force critique de flambement d'effort tranchant est :

$$N_k = GA_1$$

En général, on a :

$$N_K = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \left(1 - \frac{N_k}{GA_1} \right)$$

C'est à-dire :

$$N_k = N'_K \left(1 - \frac{N_K}{N''_K} \right)$$

Ou encore :
$$\frac{1}{N_K} = \frac{1}{N'_K} + \frac{1}{N''_K}$$

Si la diminution est faible pour les poutres à âme pleine, et négligeable, elle est, au contraire, sensible pour les poutres triangulées. [3]

CHAPITRE (III)

Aspect expérimental du flambement

III. Aspect expérimental :

L'expérimentation en laboratoire, effectuée sur des poutres élancées soumises à des efforts de compression progressivement croissants.

➤ **But :**

Le but de cette manipulation est de déterminer les charges critiques d'Euler pour différentes conditions.

➤ **Hypothèses :**

Poutre parfaitement rectiligne, homogène, isotrope, longue par rapport aux dimensions transversales, comprimée par deux forces axiales opposées.

Dans ces conditions, la poutre est soumise à une compression pure, et en tenant compte du fait que dans le cas réel les charges ne sont pas concentriques, ce chargement entraînera son fléchissement.

Pour les poutres longues et minces, il existe une valeur de N , qu'on appelle **valeur critique N_c** , à partir de laquelle la poutre peut passer d'une sollicitation de compression simple (stable) à une sollicitation composée de flexion et de compression simple (instable).

Ce passage peut être considéré comme une instabilité du comportement de la poutre car sa résistance en compression pure est très affaiblie par l'apparition de la flexion.

Cependant on ne peut pas faire varier beaucoup N au-delà de N_c car les déformations augmentent très vite et les conditions de ruine sont donc rapidement atteintes.

On dit alors que la poutre flambe et le phénomène est le « **flambement d'une poutre comprimée** »

III.1 Description de l'appareil :



Figure III- 1 : Appareil de flambement (WP 120)

Dans le domaine de la mécanique appliquée, la perte de stabilité est appelée flambement. Lorsque l'axe de la barre est soumis à des forces de compression sous une charge croissante, il se déporte latéralement jusqu'à une défaillance soudaine et violente avant d'avoir atteint la limite de résistance à la rupture. À ce stade-là, les contraintes dans la barre restent souvent dans la zone élastique.

WP 120 examine le comportement au flambement de barres soumises à diverses influences. Tous les problèmes de flambement importants sont illustrés ici dans les essais. Pour cela, une barre est encastrée ou rotulée aux deux extrémités de l'appareil d'essai selon le cas de flambement. Une force de compression est appliquée sur la barre via une traverse de charge réglable en hauteur et une broche à commande manuelle. Un palier axial situé entre la broche et l'appui de la barre empêche toute sollicitation en torsion de la barre d'essai. La force appliquée est mesurée hydrauliquement et s'affiche sur un dynamomètre à cadran. Un comparateur à cadran affiche la déviation latérale de la barre.

Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

Les essais permettent d'illustrer l'influence de différents facteurs comme les longueurs des barres, les matériaux et les types d'appui, sur le comportement de flambement. Un dispositif de charge transversale permet de générer des efforts tranchants supplémentaires sur la barre d'essai. Les essais peuvent être réalisés en position verticale ou horizontale, le dynamomètre à cadran étant orientable à 90°. Un jeu complémentaire de barres d'essai permet d'étendre les possibilités d'essai du WP120.

Les pièces de l'essai sont disposées de manière claire, et bien protégées dans un système de rangement.

III.2 Description du matériau :

- Choix de l'acier (C48) : L'acier C48 est un acier au carbone à teneur plus élevée que pour les autres aciers standard, il est très utilisé en mécanique générale, il a une bonne usinabilité et excellentes caractéristiques mécaniques, Idéal pour les pièces soumises aux chocs et nécessitant une bonne résistance, son module d'élasticité à 20°C est $E=205\ 000\ \text{N/mm}^2$.

III.2.1 Dimension de l'éprouvette :

Les éprouvettes en acier (C48) ont été réalisées au halle de technologie de oued aissi :



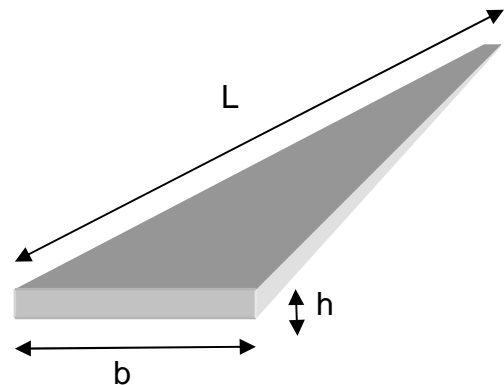
Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

Les dimensions standard des éprouvettes sont :

$$L=500 \text{ mm}$$

$$b=18 \text{ mm}$$

$$h= 4 \text{ mm}$$



- Moment d'inertie de l'éprouvette :

$$I = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow I = \frac{18 \times 4^3}{12} \Rightarrow I = 96 \text{ mm}^4$$

- Rayon de giration :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{I}{b \cdot h}} = \sqrt{\frac{96}{4 \times 18}} = 1,155 \text{ mm}$$

- Elancement :

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{500}{1,155} = 433$$

Avec :

$$\lambda > 93$$

Donc on utilise la formule d'Euler pour déterminer la charge critique de chaque poutre.

III.3 Partie pratique :

III.3.1 Poutre bi-articulée :

On place la poutre entre deux extrémités articulées, et on fait varier la charge appliquée aux extrémités de la poutre pour relever la valeur de la flèche maximale en fonction de la charge N et déduire la charge critique N_c .



Figure III- 2: Poutre bi-articulée

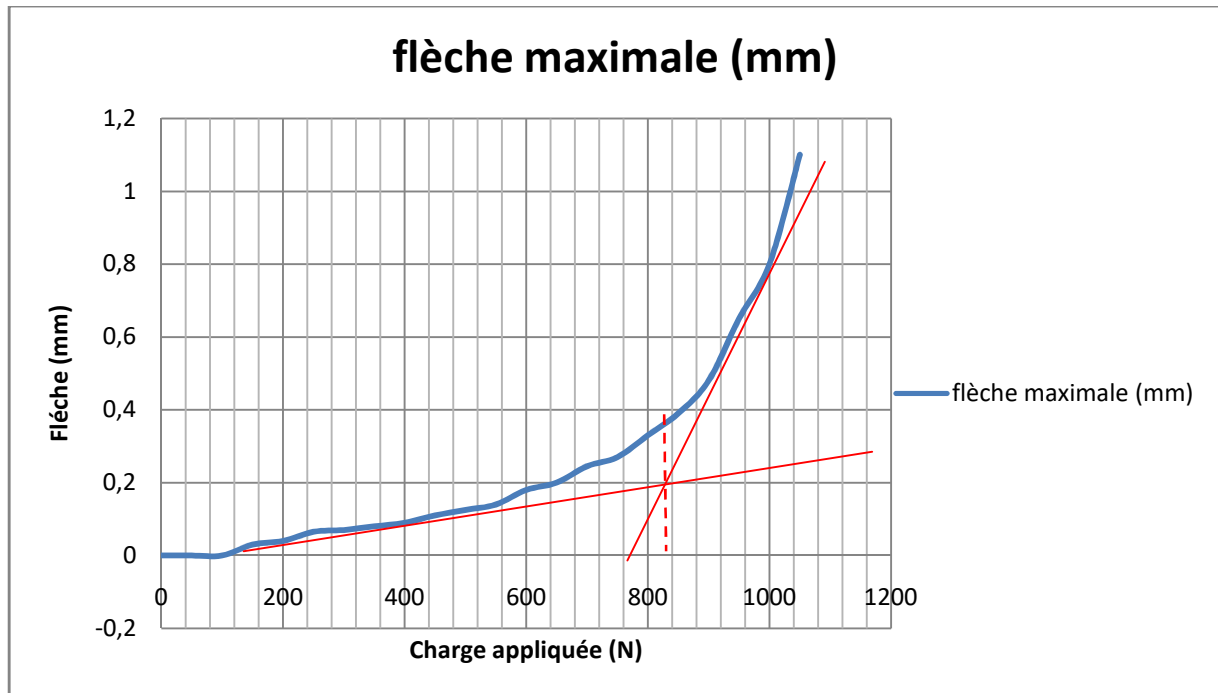
➤ Tableau de mesure :

charge appliquée N (Newton)	flèche maximale (mm)
0	0
50	0
100	0
150	0,03
200	0,04
250	0,065
300	0,07
350	0,08
400	0,09
450	0,11
500	0,125
550	0,14
600	0,18
650	0,20
700	0,245
750	0,27

Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

800	0,33
850	0,39
900	0,48
950	0,65
1000	0,80
1050	1,10

➤ La courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N :



➤ Détermination de la charge critique théorique :

On sait que :

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

A.N:

$$N_c = \frac{\pi^2 \cdot 205000 \cdot 96}{(500)^2} \Rightarrow N_c = 776,94 \text{ N}$$

➤ Détermination de la charge critique expérimentale :

- On remarque que la forme de la courbe à **840 N** fait un changement inattendu et un grand accroissement de la flèche au-delà de cette charge.
- On peut déduire la charge critique expérimentale vaut **840 N**

III.3.2 Poutre encastrée-articulée :

On place la poutre entre deux extrémités, une est encastrée et l'autre articulée, et on fait varier la charge appliquée aux extrémités de la poutre pour relever la valeur de la flèche en fonction de la charge N et déduire la charge critique N_c .

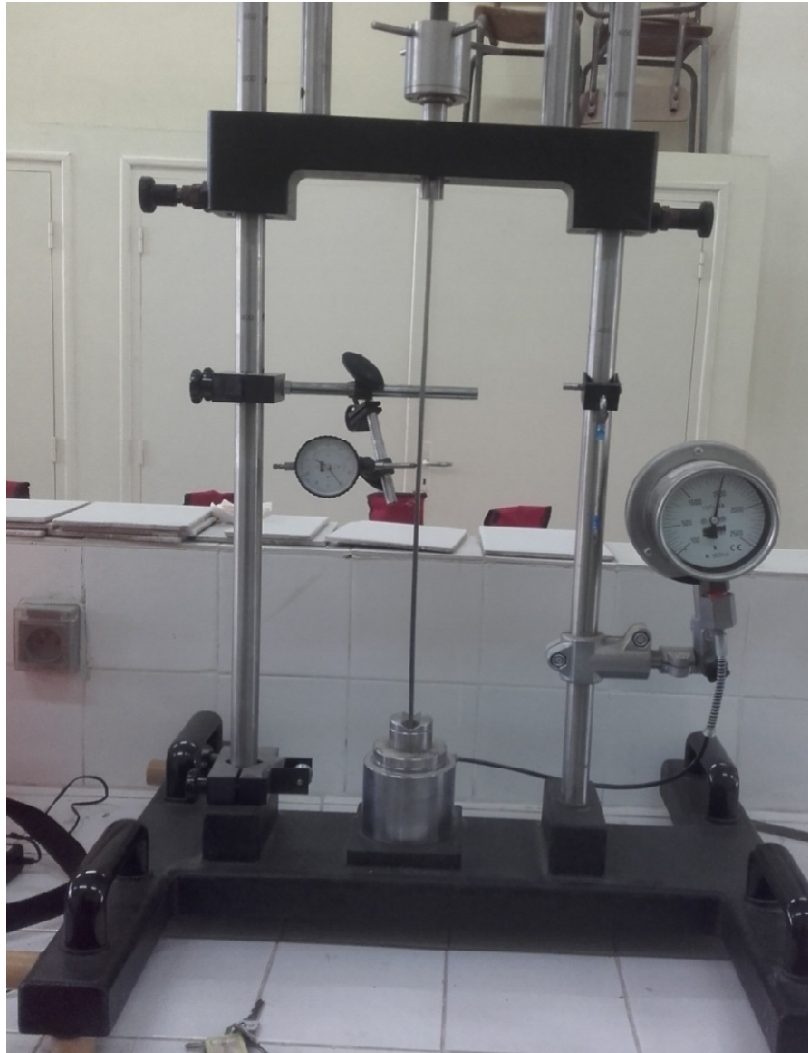


Figure III- 3: Poutre encastrée-articulée

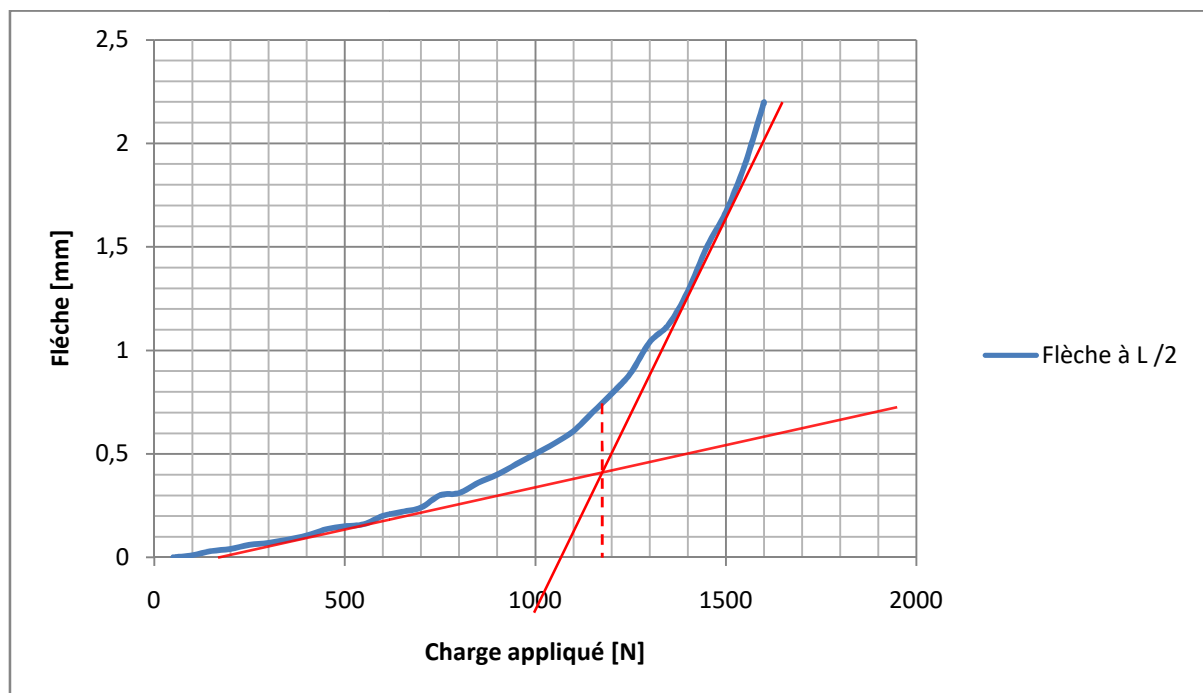
➤ Tableau de mesure :

Charge appliquée N (Newton)	Flèche à $L/2$ (mm)
50	0
100	0,01
150	0,03
200	0,04
250	0,06
300	0,07
350	0,085
400	0,105
450	0,135

Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

500	0,15
550	0,16
600	0,20
650	0,22
700	0,24
750	0,30
800	0,31
850	0,36
900	0,40
950	0,45
1000	0,50
1050	0,55
1100	0,61
1150	0,70
1200	0,79
1250	0,89
1300	1,04
1350	1,125
1400	1,285
1450	1,50
1500	1,67
1550	1,90
1600	2,20

➤ La courbe de la flèche à $L/2$ en fonction de la charge N :



Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

➤ Détermination de la charge critique théorique :

On sait que :

$$N_c = 2 \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

A.N :

$$N_c = 2 \frac{\pi^2 \cdot 205000 \cdot 96}{(500)^2}$$

$$\Rightarrow N_c = 1553,87 \text{ N}$$

➤ Détermination de la charge critique expérimentale :

- On remarque que la forme de la courbe à **1170 N** fait un changement inattendu et un grand accroissement de la flèche au-delà de cette charge.
- On peut déduire la charge critique expérimentale vaut **1170 N**

III.3.3 Poutre bi-encastée :

On place la poutre entre deux extrémités encastées, et on fait varier la charge appliquée aux extrémités de la poutre pour relever la valeur de la flèche maximale en fonction de la charge N et déduire la charge critique N_c .

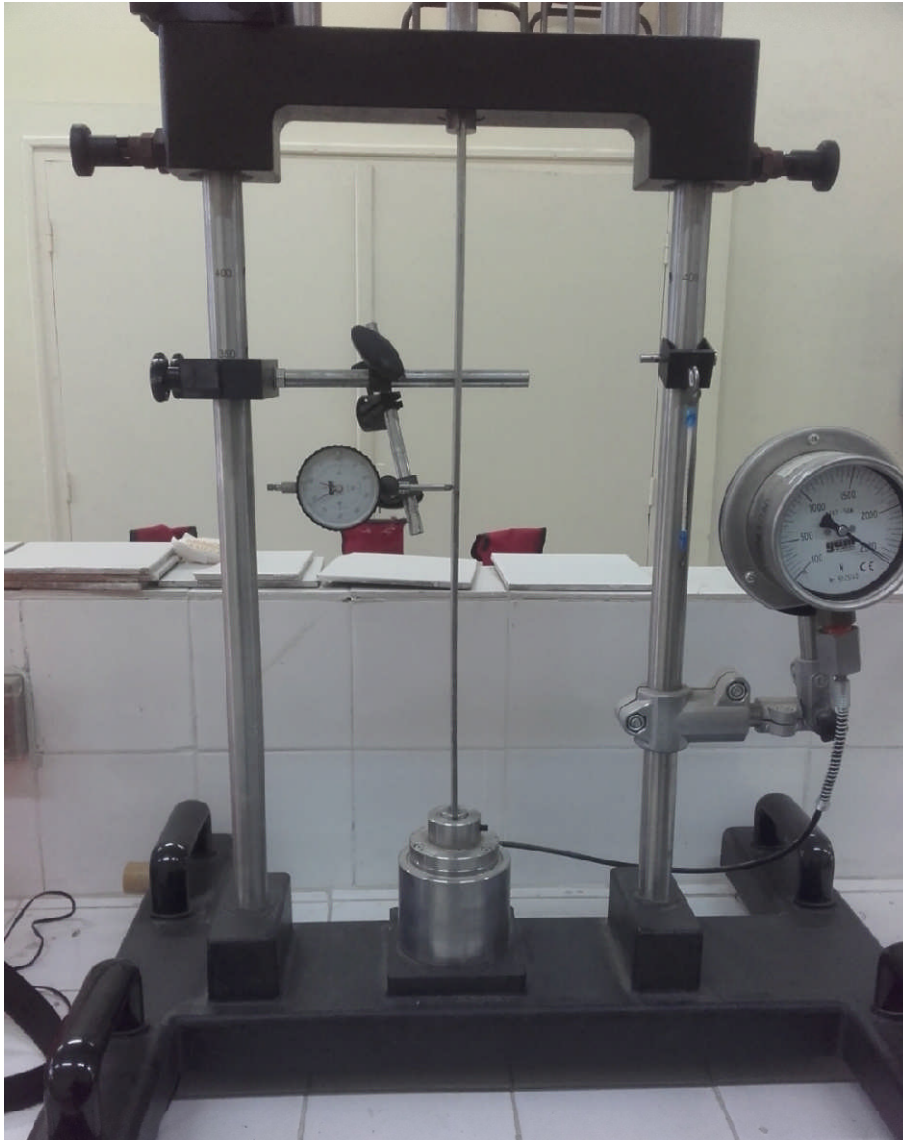


Figure III- 4: Poutre bi-encastée

➤ Tableau de mesure :

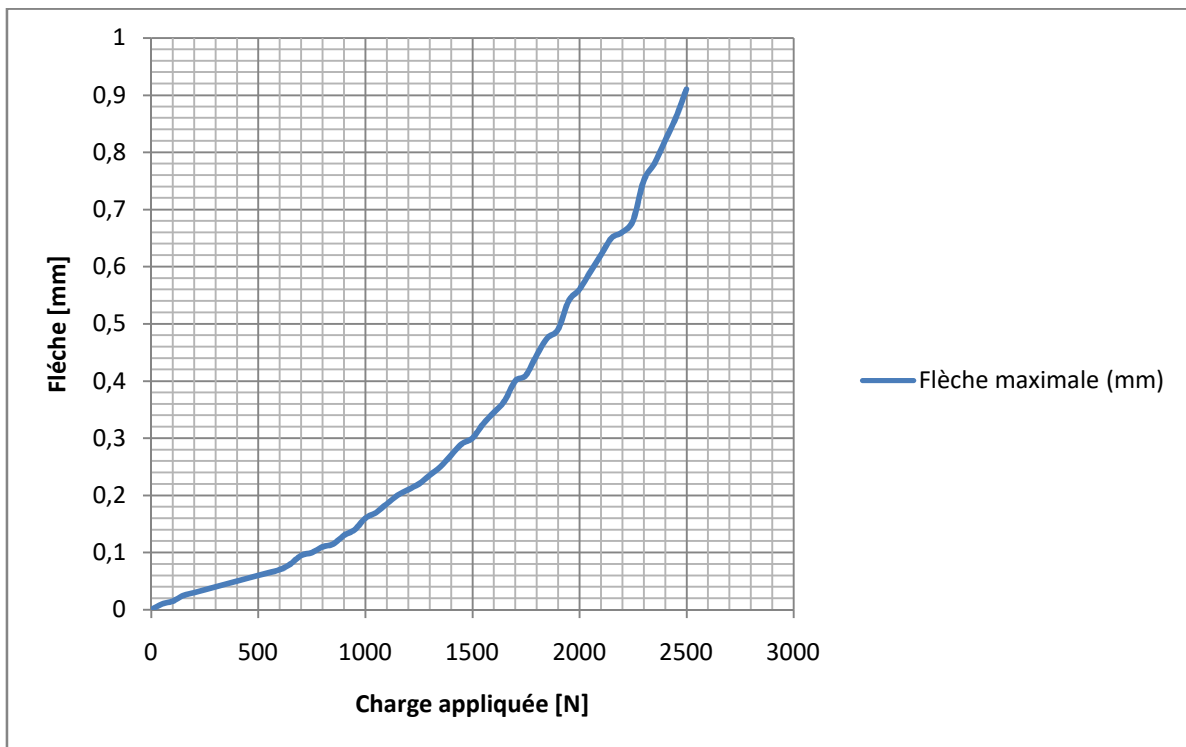
Charge appliquée N (Newton)	Flèche maximale (mm)
0	0
50	0,01
100	0,015
150	0,025
200	0,03
250	0,035

Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

300	0,04
350	0,045
400	0,05
450	0,055
500	0,06
550	0,065
600	0,07
650	0,08
700	0,095
750	0,10
800	0,11
850	0,115
900	0,13
950	0,14
1000	0,16
1050	0,17
1100	0,185
1150	0,20
1200	0,21
1250	0,22
1300	0,235
1350	0,25
1400	0,27
1450	0,29
1500	0,30
1550	0,325
1600	0,345
1650	0,365
1700	0,40
1750	0,41
1800	0,445
1850	0,475
1900	0,49
1950	0,54
2000	0,56
2050	0,59
2100	0,62
2150	0,65
2200	0,66
2250	0,68
2300	0,75
2350	0,78
2400	0,82
2450	0,86
2500	0,91

Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

- La courbe de la flèche maximale en fonction de la charge N :



- Détermination de la charge critique théorique :

On sait que :

$$N_c = 4 \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

A.N :

$$N_c = 4 \frac{\pi^2 \cdot 205000 \cdot 96}{(500)^2}$$

$$\Rightarrow N_c = 3107,74 \text{ N}$$

- Détermination de la charge critique expérimentale :

On ne peut pas déterminer la charge critique expérimentale car la machine ne peut pas aller au-delà de **2500 N**.

III.3.4 Comparaison entre la théorie et la pratique :

On remarque que la charge critique expérimentale est supérieure à la charge critique théorique dans le cas d'une poutre bi-articulée, et inférieure à la charge critique théorique dans le cas d'une poutre encastree-articulée, cela implique que la

Chapitre III : Aspect expérimental du flambement

poutre ne répond pas aux hypothèses théoriques, (poutre parfaitement rectiligne, homogène, isotrope, longue par rapport aux dimensions transversales, comprimée par deux forces opposées), et que ces paramètres ont une influence sur la charge critique.

CHAPITRE (IV)

Simulation numérique

IV. Principes généraux des méthodes numériques sur ordinateur :

Les mathématiques utilisent couramment les notions d'infini et de continu. La solution exacte d'un problème d'équations différentielles ou aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel.

En vue du passage d'un problème exacte (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- équilibre des forces en chaque point pour les différences finies
- minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis
- loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

Nous n'utiliserons ici que la méthode des différences finies. [4]

IV.1 Différences finies :

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction ou un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

IV.1.1 Avantage :

Grande simplicité d'écritures et faible coût de calcul.

IV.1.2 Inconvénients :

Limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs. [4]

IV.2 L'approche différences finies :

Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisations du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas des différences finies on discrétise l'intervalle continu $[a, b]$ en un nombre fini de points x_i .

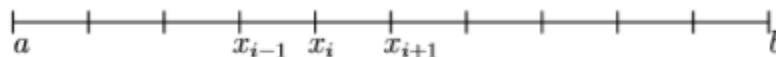


Figure IV- 1: Discrétisation [4]

On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées u_i des solutions exactes $u(x_i)$ aux points x_i de la discrétisation. Mais on ne peut plus, dans ce cas, conserver les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues. On les remplace par des analogues discrets, les différences divisées ou différences finies. [4]

IV.3 Quelques formules simples d'approximation des dérivées par différences divisées :

IV.3.1 La dérivée première :

- différences divisée progressive :

Le développement limité :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} u''(\xi_i) \quad (1.1)$$

Conduit à l'approximation suivante :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.2)$$

- différences divisée régressive :

De même le développement limité :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i-h})}{h} + \frac{h}{2} \mathbf{u}''(\boldsymbol{\eta}_i) \quad (1.3)$$

Donne :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i) = \frac{d\mathbf{u}}{dx}(\mathbf{x}_i) \approx \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (1.4)$$

- différence divisée centrée :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i) = \frac{\mathbf{u}(x_i + \frac{h}{2}) - \mathbf{u}(x_i - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{12} \mathbf{u}'''(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (1.5)$$

Ce qui conduit, dans le cas de discrétisations uniformes de pas constant h , à :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}_i) = \frac{d\mathbf{u}}{dx}(\mathbf{x}_i) \approx \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2h} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{u}_{i+1/2} - \mathbf{u}_{i-1/2}}{h} \quad (1.6)$$

IV.3.2 La dérivée seconde :

- différence divisée centrée

Dans le cas particulier des points x_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on retrouve en utilisant :

$$\mathbf{u}''(\mathbf{x}_i) = \frac{\mathbf{u}'(x_i + \frac{h}{2}) - \mathbf{u}'(x_i - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{12} \mathbf{u}^{(4)}(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (1.7)$$

Et (1.5), la discrétisation centrée classique de la dérivée seconde

$$\mathbf{u}''(\mathbf{x}_i) = \frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2}(\mathbf{x}_i) = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{h^2} \quad (1.8)$$

On obtient ainsi le système d'équations linéaires suivant dont la résolution donne les valeurs \mathbf{u}_i de la solution approchée

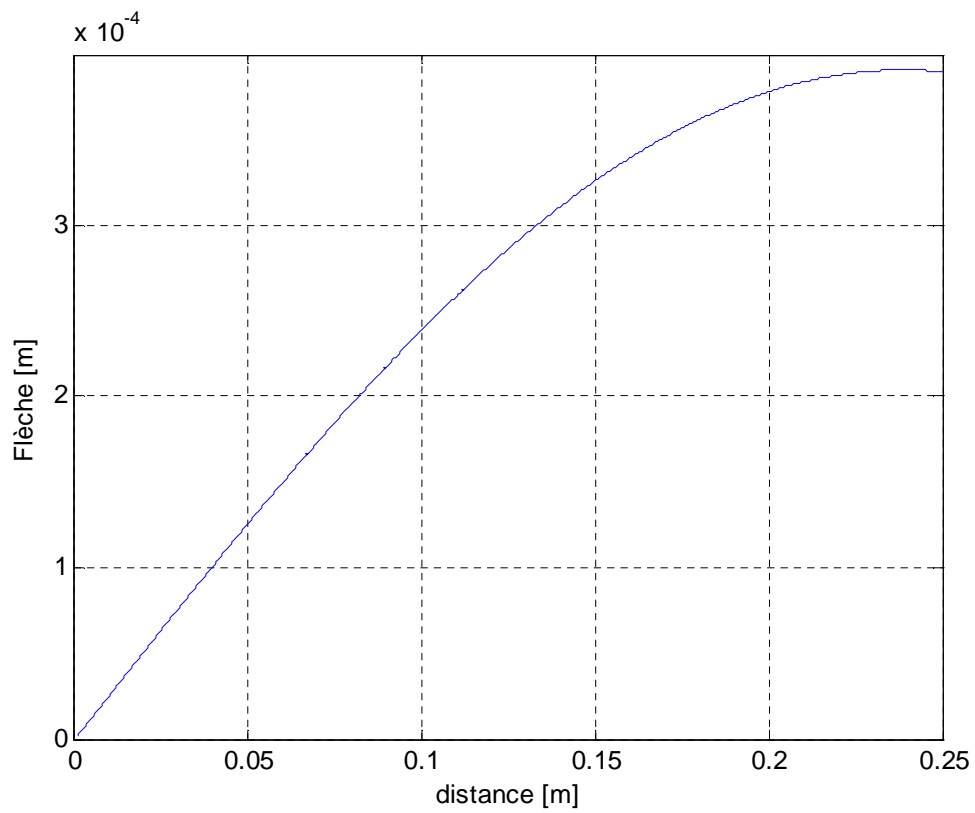
$$\begin{cases} -\frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{h^2} = f_i & \text{pour } i = 1, N-1 \\ \text{avec } \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_N = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_{N-2} \\ \mathbf{u}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_i \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

IV.4 Poutre bi-articulée :

- La courbe de la flèche en fonction de la distance :



On remarque que la flèche augmente en fonction de la distance et il est maximale à $L/2$.

Conclusion générale

Après l'étude qu'on a effectué pour les différents cas, on a conclu que les poutres élancées, sont très sensibles aux efforts de compression et de flexion, qui causent le flambement et par conséquent la connaissance des charges critiques est nécessaire pour la conception des structures.

La déflexion des poutres par les différents cas de flambement est insoluble (équations triviales).

D'après les résultats obtenus, on a remarqué que les conditions d'appuis jouent un rôle très important sur la valeur de la charge critique N_{cr} .

Les résultats théorique obtenus est différents aux résultats expérimental, d'où on déduit que dans le cas réel la poutre ne répond pas aux hypothèses théorique.

La manière la plus efficace d'améliorer la résistance au flambement, consiste à augmenter les dimensions de la section droite.

Références bibliographiques

- [1] **Dunod**, Paris 1999 pour la 1^{er} édition ISBN 978-2-10-051634-6.
- [2] **Mécanique des structures.**
- [3] **Jean MOREL**, Calcul des structures métalliques selon l'EUROCODE3, 2^{ème} tirage 1996
- [4] **J-H SAIAC**, Polycopié des cours de Calcul Scientifique CSC108 et CSC 109, 08 juin 2006.
- [5] **APK** (Association pour la promotion de l'enseignement de la construction acier). "Stabilité appliqué".
- [6] **Source internet**, <https://campus.mines-douai.fr/> .
- [7] **Cours de RDM II**, Université hassiba benbouali de chlef.
- [8] **Série schaum**, WILLIAM A. NASH, Ph.D, Professor of Engineering Mechanics, University of Florida, RDM 2 cours et problemes, Edition française, dixième tirage.
- [9] **Mémoire De Magister**, étudié par Mr Mohammed DJELIL, 2006.
- [10] **BAPTISTA A.M. MUZEAU J.P. (2002)** "Elastic design of tapered beams-columns subjected to concentrated axial and transversal loads" Proceedings of the 3rd European Conference on Steel Structures, Eurosteel, Coimbra.
- [11] **Mr BENKABA Abdelhak**, Etude de problème du flambement des profiles a inertie variable, 2013.

Annexe : Programme de différence finie sur matlab

```
% Programme Différences finies 1 D pour résoudre l'équation d'une poutre bi
articulée :

clear all
close all
clc
tic

% Données du problème

N=850;
E=205e9;
b=18e-3;
h=4e-3;
n=1000;
L=1/4;

% Conditions aux limites

Dir1=0;
DirN=39e-5;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I=(b*h^3)/12;
alpha=sqrt(N/(E*I));

% Discrétisation

dx=L/n;
x=0:dx:L;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

K=sparse(n,n);
K1=sparse(n+1,n+1);
A=sparse(n+1,n+1);
M=sparse(n+1,n+1);

% Construction de la matrice M

M1=(alpha^2)*eye(n-1,n-1);
M0= zeros(1,n+1); M01=zeros(n-1,1);
M00=[M01 M1 M01];
M=[M0;M00;M0];

% Construction de la matrice K

for i=2:n
    for j=2:n
        if i==j
            K(i,j)=-2;
            if i~=1
                K(i,j-1)=1;
            end
            if i~=n
                K(i,j+1)=1;
            end
        end
    end
end
end
```

Annexe : Programme de différence finie sur matlab

```
K=(1/dx^2)*K;  
  
% Génération du système global  
  
K(1,1)=1;  
Y1=zeros(1,n);  
Y2=zeros(n-1,1);  
Y3=(1/dx^2)*[Y2 ; 1];  
K1=[K Y3;Y1 1];  
  
A= K1+M;  
  
% Introduction des Conditions aux limites Dirichlet  
  
F(1)=Dir1;  
F(n+1)=DirN;  
F(2:n)=zeros(1,n-1);  
F(2:n)=(2:n);  
  
% Résolution du système  
  
y=A\F';  
toc  
  
plot(x,y)  
grid  
xlabel('distance [m]')  
ylabel ('Flèche [m]')
```