MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTÉ : DES SCIENCES
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES
OPTION : ANALYSE

Présentée par :

Mannal SMAALI

Sujet :

ÉTUDE ET APPLICATION DE QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DANS LES ESPACES DE CALDERON LOZANOVSKII

Devant le jury d'examen composé de :

Mohamed AIDENE	Professeur	U.M.M.T.O.	Président
Mohamed MORSLI	Professeur	U.M.M.T.O.	Rapporteur
Paul RAYNAUD DE FITTE	Professeur	Univ. Rouen	Examinateur
Lahcen MEZRAG	Professeur	Univ. M'sila	Examinateur
Cheikh BOUZAR	Professeur	Univ. Oran	Examinateur
Fazia BEDOUHENE	M.C."A"	U.M.M.T.O.	Examinateur
Henryk HUDZIK	Professeur	U.A.M.Poznan	Invité

Soutenue le : 07/07/2010

Remerciements

Au terme de cette expérience que présente la réalisation d'une thèse, je tiens à remercier les personnes qui ont rendu posssible l'élaboration de ce manuscrit.

Je tiens d'abord à remercier vivement mon prof. Mohamed Morsli qui a encadré et soutenu ce travail.

Je remercie sincèrement le prof. Paul Raynaud de Fitte de m'avoir accueillie au sein du Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, afin de finaliser ma thèse. Je lui exprime ma grande reconnaissance pour toute l'aide qui m'a apporté tout au long de mon séjour.

Je suis très honorée que les professeurs : M. Aidene, F. Bedouhene, C. Bouzar, H. Hudzik, L. Mezrag et P. Raynaud de Fitte ont accepté d'être membres de mon Jury.

Merci à ma famille, mes parents en particulier pour leurs encouragements permanents et sur qui j'ai pu toujours compté.

Merci à mes amis du LMRS et LMPA : Ali, Amina, Fazia, Hamid, Islam, Ouerdia et Omar.

Table des matières

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de certaines questions concernant la structure géométrique dans des espaces de type Calderon-Lozanovskii. Nous introduisons une nouvelle classe dite de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques, dont nous caractérisons les propriétés géométriques fondamentales, la stricte convexité et l'uniforme convexité. L'étude de ces propriétés a nécessité le développement et la mise en évidence de nombreuses propriétés intermédiaires qui constituent les arguments clés dans les raisonnements développés.

Avant de décrire le contenu de cette thèse, il nous semble utile de présenter le cadre dans lequel se fait notre étude.
Suivant la construction faite en 1964 par A.P. Calderon [13] à partir d'une fonction puissance, l'extension au cadre plus large des espaces de Calderon-Lozanovskii, initiée par G.Ya. Lozanovskii [37] en 1967, consiste à prendre en lieu et place de la fonction $|.|^p$ dans la définition de Calderon, une fonction φ d'Orlicz. La généralisation au cas d'une fonction d'Orlicz à paramètre a été considérée pour la première fois, en 1997 par P. Foralewski et H. Hudzik [21], définissant ainsi les espaces de Calderon-Lozanovskii généralisés. Nous décrivons ici brièvement cette démarche :

Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ l'espace des fonctions $\Sigma-$mesurables définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit φ une fonction de Musielak-Orlicz c.à.d., une fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \Omega \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (t,u) & \mapsto & \varphi(t,u), \end{array}$$

vérifiant :

1. pour tout u dans $\mathbb{R}_+$, $\varphi(.,u)$ est une fonction $\Sigma-$ mesurable sur Ω,
2. pour tout t dans Ω, $\varphi(t,.)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 0 et qui est non identiquement nulle.

Lorsque φ ne dépend pas du paramètre t, elle est dite fonction d'Orlicz.
A toute fonction φ de Musielak-Orlicz telle que $\varphi(t,.)$ ne s'annule qu'en 0 μ-p.p. sur

Ω, on associe une fonction ψ_φ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccl} \psi_\varphi : & \Omega \times \mathbb{R}_+^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (t,u,v) & \mapsto & \begin{cases} v\varphi^{-1}(t, \frac{u}{v}) & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

où, pour tout t fixé, $\varphi^{-1}(t, .)$ est la réciproque de la fonction $\varphi(t, .)$.

Pour tout couple de lattices de Banach (E_1, E_2), l'espace de Calderon-Lozanovskii généralisé, noté par $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(E_1, E_2) = \ & \{x \in L^0 : |x(.)| \leqslant \lambda \psi_\varphi(., |x_1(.)|, |x_2(.)|) \mu\text{-p.p.} \\ & \text{pour un certain } \lambda > 0 \text{ et } x_i \in B(E_i), (i = 1, 2)\}, \end{aligned}$$

où $B(E_i)$ dénote la boule unité de $E_i, (i = 1, 2)$.

Lorsque l'espace E_2 est l'espace L^∞, les espaces $\psi_\varphi(E_1, E_2) = \psi_\varphi(E, L^\infty)$ forment une classe particulière d'espaces modulaires dite de type Musielak-Orlicz, notée par E_φ :

$$E_\varphi = \psi_\varphi(E, L^\infty) = \left\{x \in L^0 : \varphi\left(., \lambda |x(.)|\right) \in E \text{ pour un certain } \lambda > 0\right\}.$$

Cette classe englobe entre autres : les espaces de Lebesgue $L^p = \psi_p(L^1, L^\infty)$, les espaces de Musielak-Orlicz $L^\varphi = \psi_\varphi(L^1, L^\infty)$ et les espaces de Musielak-Lorentz $\Lambda_\omega^\varphi = \psi_\varphi(\Lambda_\omega, L^\infty)$.

Cette nouvelle présentation, issue des méthodes de la théorie de l'interpolation, a permis de développer une étude générale et abstraite de la structure géométrique de ces espaces, rassemblant ainsi une large classe d'espaces modulaires classiques.

Les méthodes géométriques constituent un outil commode de l'analyse fonctionnelle, notamment en théorie de l'approximation et de l'optimisation. Les propriétés géométriques d'un espace normé traduisent souvent un "caractère" de convexité de sa sphère unité. La convexité uniforme et la stricte convexité sont les plus connues et peuvent être considérées comme des propriétés "extrêmes".
L'étude de la géométrie des espaces de Calderon-Lozanovskii E_φ est un domaine largement étudié, les références [15], [20], [21], [22], [34] et [52] sont consacrées à ce sujet.

Les premiers résultats concernant cette étude remontent à l'année 1995, où J. Cerda, H. Hudzik et M. Mastylo [15] ont traîté certaines propriétés de monotonie et de convexité des espaces de Calderon-Lozanovskii (φ étant une fonction d'Orlicz). Ils fournissent des conditions suffisantes sur l'espace E et la fonction d'Orlicz φ qui assurent la stricte monotonie, l'uniforme monotonie, la stricte convexité et l'uniforme convexité de l'espace E_φ.

Les questions concernant la géométrie des espaces de calderon-Lozanovskii généralisés dans un cadre global ne sont pas triviales, d'ailleurs, les seules références dédiées à ce sujet sont les articles de P. Foralewskii [20] qui remonte à l'année 1998, où l'auteur étudie la stricte convexité, l'uniforme convexité, l'uniforme non l_n^1 et certaines propriétés de monotonie ; et celui récent (2009) de N. Petro et S. Suantai [52], qui caractérise la stricte monotonie et la stricte convexité des espaces E_φ.

Lorsque E est l'espace de Besicovitch $B^1(\mathbb{R})$:

$$B^1(\mathbb{R}) = \left\{ x \in M(\mathbb{R}) : \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|dt < +\infty \right\},$$

où $M(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions Lebesgue mesurables sur $\mathbb{R}$, alors selon la construction des espaces de Calderon-Lozanovskii, l'espace $E_\varphi = \psi_\varphi(B_1, L^\infty)$ est l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz, noté par $B^\varphi(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} B^\varphi(\mathbb{R}) &= \{x \in M(\mathbb{R}) : \varphi(., \lambda|x(.)|) \in B^1(\mathbb{R}) \text{ pour un certain } \lambda > 0\} \\ &= \left\{ x \in M(\mathbb{R}) : \overline{\lim_{T\to\infty}} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t, \lambda|x(t)|)dt < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Il est naturellement muni de la pseudonorme $\|.\|_\varphi$ dite de Luxemburg :

$$\|f\|_\varphi = \inf \left\{ k > 0 : \rho_\varphi\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1 \right\}, \qquad f \in B^\varphi(\mathbb{R}),$$

où ρ_φ est la pseudomodulaire associée :

$$\begin{array}{rccl} \rho_\varphi : & M(\mathbb{R}) & \to & [0, +\infty] \\ & f & \mapsto & \rho_\varphi(f) = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t, |f(t)|)\, dt. \end{array}$$

Toutefois, il est à signaler que l'étude faite dans le cadre général des espaces de Calderon-Lozanovskii E_φ n'englobe pas l'espace $B^\varphi(\mathbb{R})$, du fait que l'espace de Besicovitch $B^1(\mathbb{R})$ ne vérifie pas la propriété de Fatou, condition cruciale imposée sur l'espace E afin d'avoir des outils de convergence dans l'espace E_φ. Dans notre étude, on s'est restreint à la sous classe notée $B^\varphi_{p.p.}(\mathbb{R})$ des fonctions presque periodiques obtenue comme fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés par rapport à la pseudo-modulaire ρ_φ. Nous avons développé dans $B^\varphi_{p.p.}(\mathbb{R})$ des résultats de convergence, incluant une propriété "semblable" à celle de Fatou. Ces résultats de convergence sont les outils principaux dans les différentes démonstrations de nos résultats dans les espaces $B^\varphi_{p.p.}(\mathbb{R})$.

En considérant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés :

$$A = \left\{ P_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

par rapport à la modulaire ρ_φ et sa norme de Luxemburg $\|.\|_\varphi$, nous obtenons respectivement les deux espaces suivants :

$$\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in B^{\varphi}(\mathbb{R}) : \exists f_n \in A, \exists k_0 > 0, \lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi\left(k_0\left(f_n - f\right)\right) = 0 \right\},$$

et

$$\begin{aligned} B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in B^{\varphi}(\mathbb{R}) : \exists f_n \in A, \forall k > 0, \lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi\left(k\left(f_n - f\right)\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in B^{\varphi}(\mathbb{R}) : \exists f_n \in A, \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\varphi = 0 \right\}, \end{aligned}$$

que nous appelons espaces de Besicovith-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Notre contribution principale à travers cette thèse, porte sur la géométrie de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Cette nouvelle classe que nous avons introduit, généralise celle de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques initiée par J. Albrycht [2] et investie par H. Hillman [24]. Cette dernière référence constitue une étude plus complète sur la structure et autres propriétés topologiques de cet espace. La thèse de M. Morsli [43] est la première référence consacrée à la géométrie de l'espace en question, d'autres travaux les ont succédé par la suite, citons les travaux [7] et [12] qui portent sur la caractérisation de la stricte convexité, l'uniforme convexité, la k-convexité et la non-l^1_n lorsque l'espace est muni de la norme d'Orlicz.

Le document est organisé en quatre chapitre comme suit :

- Le premier chapitre est dédié à la géométrie des espaces de Banach. Nous donnons un aperçu sur les principales propriétés géométriques, les différents liens entre elles ainsi que le rôle important qu'elles jouent dans les applications.
- Dans le deuxième chapitre, nous présentons les espaces de Calderon-Lozanovskii. Une vue d'ensemble sur les techniques de calcul utilisées dans l'étude abstraite de la structure géométrique des espaces E_φ est faite, ainsi qu'une synthèse des travaux liés à la stricte et l'uniforme convexité de cette classe. Nous terminons ce chapitre par une présentation des espaces de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques.
- Dans le chapitre trois nous introduisons la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques, nous présentons l'essentiel de nos résultats de convergence et outils techniques. Ces résultats constituent une étape fondamentale pour notre approche des questions géométriques

- Nous terminons dans le chapitre quatre par nos principaux résultats. Nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent la stricte ainsi que l'uniforme convexité de la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Ces résultats ont fait l'objet des publications [45] et [46].

Chapitre 1

Sur la géométrie des espaces de Banach

Les propriétés géométriques ou métriques d'un espace normé sont celles qui se conservent par isométrie mais pas nécessairement par homéomorphisme . On peux en distinguer deux classes : des propriétés globales et d'autres locales.
La structure géométrique d'un espace normé se traduit par des propriétés de "régularité" de sa sphère unité. Comme exemples de telles propriétés, on peut citer : la stricte convexité, l'uniforme convexité local, la B-convexité, la P-convexité, l'uniforme convexité en toute direction, l'uniforme convexité, la "smoothness" et l'uniforme "smoothness".........

La géométrie locale d'un espace normé concerne des points particuliers de sa sphère unité qui possèdent des caractéristiques intéressantes, à savoir : les points extrêmes, les points fortements extrêmes, les "exposed points", les "denting points", les points de monotonie.
On peut aussi classifier les propriétés géométriques des espaces normés comme suit :

1. Propriétés de convexité.
2. Propriétés de "smoothness".
3. Propriétés de monotonie.
4. Propriétés de convexité complexe.
5. Propriétés liées à la théorie du point fixe (la propriété de Kadec-Klee, la propriété d'Opial, la structure normale ......)

Toutes ces propriétés présentent des applications dans divers domaines des mathématiques, en particulier : dans la théorie de l'approximation, la théorie du point fixe, la théorie ergodique, la théorie de l'optimisation et la théorie du contrôle.

1.1 Propriétés de convexité

Les notions de stricte convexité et d'uniforme convexité ont été introduites par J. A. Clarkson en 1936, dans [17]. Ces deux notions se sont avérés d'une très grande importance. D. Milman en 1938 (cf. [42]) démontra que tout espace uniformément convexe est réflexif. La relation entre les différents types de convexité des espaces de Banach et leur réflexivité a fait par la suite l'objet de nombreuses études et a été développée par plusieurs auteurs.

Cherchant des propriétés géométriques plus faibles impliquant la réflexivité, D. Giesy dans [23] et R. C. James dans [33] ont soulevé la question de savoir si les espaces de Banach uniformément non-l_n^1 pour un certain entier positif $n \geq 2$ (ou B-convexe) sont réflexifs. Ils ont eu quelques réponses affirmatives dans des cas particuliers mais dans le cas général, la réponse est négative (cf. [32]).
En 1970 C. A. Kottman dans [35] a introduit la notion de P-convexité qui est une propriété "légèrement " plus forte que la B-convexité et qui garanti la réflexivité de l'espace la possédant. De nombreuses autres propriétés intermédiaires entre la stricte et l'uniforme convexité ont été introduites, comme par exemple, l'uniforme convexité locale, la k-convexité et l'uniforme convexité dans toute direction (cf. [41]), elles s'avèrent aussi importantes dans les applications.

Définition 1.1. *Un espace normé $(X, \|.\|)$ est dit :*

1. *strictement convexe lorsque, tout point x de sa sphère unité $S(X)$ est un point extrême de sa boule unité $B(X)$, c'est à dire si,*
   $\forall x \in S(X), \forall y, z \in B(X)$, *on a :*
$$x = \frac{y+z}{2} \Longrightarrow x = y = z.$$
   - *Il revient au même d'affirmer que l'on a :*
$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1,$$
     pour tous $x, y \in X$ tels que
$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x - y\| > 0.$$
2. *uniformément convexe lorsque, Pour tout $\varepsilon \in]0, 2[$, il existe $\delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in S(X)$ vérifiant $\|x - y\| \geq \varepsilon$, on a :*
$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Dans cette définition, on peut prendre $x, y \in B(X)$.

Remarque 1.1. *La propriété d'uniforme convexité peut être caractérisée de l'une des deux manières équivalentes suivantes :*

a. Pour toutes suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans $S(X)$, la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

b. Pour toutes suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans X telles que la condition

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|,$$

soit vérifiée, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Ces propriétés de convexité peuvent être traduites par la notion de module de convexité :
La fonction $\delta_X(.) :]0, 2] \longrightarrow [0, 1]$ définie par la formule :

$$\begin{aligned} \delta_X(\epsilon) &= \inf \left\{1 - \left\| \tfrac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S(X); \|x - y\| = \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{1 - \left\| \tfrac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S(X); \|x - y\| \geq \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{1 - \left\| \tfrac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B(X); \|x - y\| \geq \epsilon \right\}, \end{aligned}$$

est appelée module de convexité de l'espace normé $(X, \|.\|)$. La fonction $\delta_X(.)$ est continue et croissante sur l'intervalle ouvert $]0, 2[$.
Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

- ✓ L'espace $(X, \|.\|)$ est strictement convexe si et seulement si $\delta_X(2) = 1$.
- ✓ L'espace $(X, \|.\|)$ est uniformément convexe si et seulement si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon \in]0, 2]$.

1.2 Propriétés de "smoothness"

Les propriétés dites de " smoothness" sont liées à la boule unité de l'espace. Un espace normé $(X, \|.\|)$ est smooth lorsque sa boule unité ne possède pas de "coins" ou de "points anguleux" c-à-d des points qui peuvent admettre plus d'un plan support. De manière précise,

Définition 1.2. *Soit $x \neq 0$ un élément d'un espace de Banach X, f une forme linéaire continue sur X telle que $\|f\|_{X^*} = 1$. Alors f est dite fonctionnelle support de x lorsque*

$$f(x) = \langle f, x \rangle = \|x\|.$$

Autrement dit lorsque le point $\dfrac{x}{\|x\|}$ *norme la fonction* f.

Notons qu'une telle fonctionnelle existe toujours comme conséquence du théorème de Hahn Banach.

Définition 1.3. *Soit* $f \in X^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Alors, l'hyperplan*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\},$$

est dit hyperplan d'appui ou plan support d'un sous ensemble C *de* X *lorsque*

$$C \subset \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \text{ ou } C \subset \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

et

$$H \cap C \neq \emptyset.$$

Remarque 1.2.
- ■ *Si* C *est la boule de centre* x *et de rayon* r, *alors* H *supporte* C *si et seulement si la distance* $d(x, H)$ *entre* x *et* H *est égale à* r.
- ■ *Si* f *est une fonctionnelle support d'un point* $x \in X$, *alors pour tout* $z \in X$ *l'hyperplan*

  $$H = \{y \in X : f(y - z) = \|x\|\},$$

  supporte la boule $B(z, \|x\|)$.

Définition 1.4. *Un élément* $x \in S(X)$ *est dit smooth lorsqu'il possède une unique fonctionnelle support notée* f_x.
Lorsque tous les points de la sphère unité $S(X)$ *sont smooth, l'espace* X *est dit smooth.*

Remarque 1.3. *Un point* $x_0 \in S(X)$ *est smooth si et seulement si il existe un unique hyperplan supportant la boule unité* $B(X)$ *au point* x_0.

Il existe une dualité entre la notion de "smoothness" d'un espace de Banach X et la stricte convexité de son dual X^* (cf. [41]). De manière précise :
✓Si X^* est smooth, alors X est strictement convexe.
✓Si X^* est strictement convexe, alors X est smooth.
✓Un espace de Banach réflexif est strictement convexe (resp. smooth) si et seulement si son dual est smooth (resp. strictement convexe).

- ■ le module de smoothness d'un espace de Banach X ($X \neq \{0\}$) est la fonction $\nu_X :]0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ définie par la formule :

$$\nu_X(t) = \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x + ty\| + \|x - ty\|) - 1 : x, y \in S(X)\right\}.$$

Définition 1.5. *L'espace X est dit uniformément smooth lorsque* $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\nu_X(t)}{t} = 0$.

Remarque 1.4. 1. *La fonction* $\dfrac{\nu_X(t)}{t}$ *est croissante sur* $]0, +\infty[$. *De plus*

$$\max\{0, t-1\} \leq \nu_X(t) \leq t,$$

pour tout $t > 0$, *(cf. [41]).*

2. *Un espace normé X est uniformément convexe (resp. uniformément smooth) si et seulement si son dual X^* est uniformément smooth (resp. uniformément convexe), (V.L. Smulian, 1940).*

De la même manière que la différentiabilité d'une fonction renseigne sur l'allure de son graphe, il y a une relation entre la smoothness d'un espace $(X, \|.\|)$ et la différentiabilité au sens de Gâteaux de sa norme.

Définition 1.6. *Soit f une fonction définie et continue sur un ouvert O de X et x un point de O.*

1. *Si pour tout $y \in X$, la limite :*

$$\partial f(x)(y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hy) - f(x)}{h}$$

existe, alors f est dite différentiable au sens de Gâteaux au point x (G-différentiable au point x).
Le point x est dit de G-différentiabilité et $\partial f(x)$ est la dérivée au sens de Gâteaux de f au point x.

2. *Lorsque,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \textit{tel que} \ \|h\| \leq \delta,$$

implique que $\forall y \in B(X)$,

$$\left| \frac{f(x+hy) - f(x)}{h} - \partial f(x)(y) \right| < \varepsilon, \tag{1.1}$$

f est dite différentiable au sens de Fréchet au point x (F-différentiable au point x). Le point x est dit de F-différentiabilité de f.
Si de plus la formule (1.1) est satisfaite uniformément par rapport à $x \in B(X)$, f sera dite uniformément Fréchet différentiable.

Les liens entre les propriétés de smoothness et les propriétés de différentiabilité de la norme sont résumés ainsi :

1. Soit $x_0 \in S(X)$. Alors le point x_0 est smooth si et seulement si la norme de X est Gateaux différentiable au point x_0. Dans ce cas l'unique fonctionnelle support de x_0 est $f_{x_0} = \partial f(x_0)$, (S. Banach, 1932).
2. X est uniformément smooth si et seulement si la norme de l'espace est uniformément Fréchet différentiable.

1.3 Propriétés de monotonie

Les propriétés de monotonie d'un lattice de Banach ont été introduites par G. Birkhoff [10], dans le cadre général d'un lattice normé abstrait. Ces propriétés ont différentes applications en théorie ergodique et aux problèmes de meilleure approximation (cf. [31]).
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ l'espace des fonctions $\Sigma-$mesurables définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour deux fonctions $x, y \in L^0$, on écrit $x \leq y$ lorsque $x(t) \leq y(t)$ μ-presque partout (μ-p.p.) sur Ω.
Un sous espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ de L^0 est dit lattice de Banach (lattice de Banach de fonctions ou espace de Köthe) lorsque :

i. à chaque fois que $x \in L^0$ et $y \in E$ sont tels que $0 \leq |x| \leq |y|$, on a $x \in E$ et $\|x\|_E \leq \|y\|_E$,

ii. il existe une fonction $x \in E$ tel que x est strictement positive μ- p.p. sur Ω.

Notons par E_+ le cône des éléments positifs de E, i.e. $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$.

Définition 1.7. *Un lattice de Banach $(E, \|.\|_E)$ est dit :*

1. *Strictement monotone et on écrit $E \in (SM)$, lorsque pour tous $x, y \in E_+$ tels que $y \leq x, y \neq x$ on a $\|y\|_E < \|x\|_E$.*
   D'une manière équivalente, $E \in (SM)$ lorsque pour tous $x, y \in E_+$ tels que
   $$y \leq x, \;\; \|x\|_E = 1 \text{ et } y \neq 0,$$
   on a
   $$\|x - y\|_E < 1.$$
2. *Uniformément monotone et on écrit $E \in (UM)$, lorsque pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $\delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ tel que pour tous x,y $\in E_+$ vérifiant*
   $$y \leq x, \;\; \|x\|_E = 1 \text{ et } \|y\|_E \geq \varepsilon,$$
   l'inégalité
   $$\|x - y\|_E \leq 1 - \delta(\varepsilon),$$

est vraie.

✓Un lattice de Banach $(E, \|.\|_E)$ strictement convexe (resp. uniformément convexe) est strictement monotone (resp. uniformément monotone) (cf.[29]).
La fonction $\delta_{m,E} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par :

$$\delta_{m,E}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \|x-y\|_E : 0 \le y \le x, \|x\|_E = 1, \|y\|_E \ge \varepsilon\right\},$$

est appelée module de monotonie de l'espace E.
$\delta_{m,E}$ est une fonction convexe, croissante et continue sur l'intervalle $[0,1[$. De plus :
✓L'espace $(E, \|.\|_E)$ est strictement monotone si et seulement si $\delta_{m,E}(1) = 1$.
✓L'espace $(E, \|.\|_E)$ est uniformément monotone si et seulement si $\delta_{m,X}(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon \in]0,1]$.

1.4 Propriétés de convexité complexe

Le principe du maximum connu pour les fonctions complexes à valeurs complexes se généralise au cas des fonctions à valeurs vectorielles (à valeurs dans un $\mathbb{C}$-espace de Banach X) holomorphes sur un domaine du corps complexe $\mathbb{C}$. Cependant, le principe du maximum fort (cf. [19]) -qui est fondamental en théorie des opérateurs linéaires- n'est valide que lorsque l'espace d'arrivée X est complexe-strictement convexe.

Définition 1.8. *Soit X un $\mathbb{C}$-espace de Banach. Un point x d'un sous ensemble convexe A de X est dit point extrême complexe de A lorsque :*

$$\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\} \subset A \Rightarrow y = 0.$$

- *Si tout point de la sphère unité de X est un point extrême complexe de la boule unité de X, l'espace X est dit complexe-strictement convexe.*
- *Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que ;*

  $$x, y \in X, \|y\| > \varepsilon, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1 \text{ et } \|x + \lambda y\| \le 1,$$

  implique que

  $$\|x\| \le 1 - \delta(\varepsilon),$$

  alors l'espace X est dit complexe-uniformément convexe.

Remarque 1.5. *Tout point extrême d'un ensemble convexe A de X est un point extrême complexe de A. Par suite, tout $\mathbb{C}$-espace de Banach X strictement convexe est complexe-strictement convexe.*

Exemples 1.1. *1. L'espace de Lebesgue $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ est complexe-strictement convexe sans être strictement convexe (cf. [19]).*

2. Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \Sigma, \mu), 1 < p < \infty$ sont uniformément convexe et par suite complexe-strictement convexe.

Un résultat récent, dû à H. Hudzik et A. Narloch (cf. [31]) affirme que la stricte monotonie (resp. l'uniforme monotonie) d'un lattice de Banach E coincide avec La complexe-stricte convexité (resp. la complexe-uniforme convexité) de son complexifié $E^{\mathbb{C}}$, où le complexifié d'un lattice de Banach E est l'espace défini par :

$$E^{\mathbb{C}} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f = x + iy; x, y \in E\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{E^{\mathbb{C}}} = \left\|\sqrt{x^2 + y^2}\right\|_E = \||f|\|_E .$$

1.5 Un exemple de propriété liée à la théorie du point fixe

Un des outils importants de la théorie du point fixe, est la propriété d'Opial d'un espace de Banach X. Cette propriété introduite par Z. Opial dans [49] qui a lieu en particulier dans un espace de Hilbert, possède aussi des applications dans la théorie des équations différentielles et intégrales (cf. [18]).
Soit X un espace de Hilbert. Toute application $T : X \longrightarrow X$ 1-Lipschitzienne (i.e. $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in X$), asymptotiquement régulière
(i.e. $T^{n+1}x - T^n x = T^n(T - I)(x)$ tend vers zero à l'infini) et possédant au moins un point fixe, vérifie la propriété suivante :
Pour tout $x \in X$, une limite d'une sous suite faiblement convergente de la suite des approximations successives $\{T^n x\}$ est un point fixe de T.
Ce résultat établi par F.E. Browder et W.V. Petryshyn (cf. [49]) a été étendu par Z. Opial à la classe plus large des espaces uniformément convexes possédant la propriété dite d'Opial.

Définition 1.9. *Un espace de Banach X est dit :*

1. Possèder la propriété d'Opial si, pour toute suite $\{x_n\}$ faiblement convergente vers zero dans X et tout $x \in X \setminus \{0\}$, on a

$$\varliminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\| < \varliminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n + x\|.$$

2. *Possèder la propriété d'Opial uniforme, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$ avec $\|x\| \geq \varepsilon$ et toute suite $\{x_n\}$ de $S(X)$ faiblement convergente vers zero, on a*

$$1 + r \leq \underline{\lim}_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n + x\|.$$

- Le module d'Opial de l'espace X, est la fonction $\delta_{O,X} :]0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par :

$$\delta_{O,X}(\varepsilon) = \inf \left\{ \underline{\lim}_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n + x\| : \{x_n\} \subset S(X), x_n \rightharpoonup 0, \|x\| = \varepsilon \right\}.$$

Remarque 1.6. *X possède la propriété d'Opial uniforme si et seulement si $\delta_{O,X}(\varepsilon) > 1$ pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ (cf.[18]).*

Exemples 1.2. *1. Les espaces l_p $(1 < p < +\infty)$ possèdent la propriété d'Opial.*

2. *Les espaces de Lebesgue $L^p[0,2\pi]$ pour $(1 < p < +\infty, p \neq 2$ sont uniformément convexe, mais ne possèdent pas la propriété d'Opial (cf. [49]).*

Chapitre 2

Espaces de Calderon-Lozanovskii

Les espaces de Calderon-Lozanovskii notés $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ ont été introduits par G. Ya. Lozanovskii en 1969 (cf. [37]) comme classe d'espaces d'interpolation entre deux lattices de Banach E_1 et E_2. La démarche suit la construction faite par A.P. Calderon pour introduire la classe $E_1^\theta E_2^{1-\theta}$ (cf. [13]). Cette classe couvre un large spectre d'espaces fonctionnels usuels. Ce chapitre sera consacé à la structure géométrique de la sous classe des espaces notés E_φ dits de type Orlicz. Nous commençons par une présentation sommaire de ces espaces, puis par une brève synthèse de l'approche abstraite dans l'étude de la structure géométrique des espaces de type Orlicz, en particulier, la stricte et l'uniforme convexité de ces derniers. Nous terminons par la présentation des propriétés structurelles de l'espace de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques.

2.1 Présentation des espaces de Calderon-Lozanovskii

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré (μ une mesure complète et σ-finie). $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ désignera l'espace des fonctions $\Sigma-$mesurables définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite fonction d'Orlicz lorsqu'elle est convexe, non identiquement nulle et telle que $\varphi(0) = 0$.

Étant donnée une fonction d'Orlicz φ ne s'annulant qu'en zero, on note par φ^{-1} sa fonction réciproque. La fonction ψ_φ définie par :

$$\begin{array}{cccl} \psi_\varphi : & \mathbb{R}_+^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (u,v) & \mapsto & \begin{cases} v\varphi^{-1}(\frac{u}{v}) & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

est dite fonction de Calderon-Lozanovskii. Elle est continue, concave et homogène sur $\mathbb{R}_+^2$.

Remarque 2.1. *Notons par C l'ensemble des fonctions positives ψ définies sur $\mathbb{R}_+^2$ qui sont continues, concaves et homogènes, telles que $\psi(u,v)=0$ ssi $u=0$ ou $v=0$. Alors, il existe une bijection entre l'ensemble C et la classe des fonctions d'Orlicz ne s'annulant qu'en zero. Cette correspondance donnée par $\varphi \longleftrightarrow \psi_\varphi$ est clairement injective. Elle est aussi surjective :*
En effet, soit $\psi \in C$, il suffit de prendre comme fonction d'Orlicz $\varphi(.)$ la fonction réciproque de $\psi(.,1)$.

Définition 2.1. *Pour tout couple de lattices de Banach (E_1,E_2), l'espace de Calderon-Lozanovskii, noté par $\psi_\varphi(E_1,E_2)$ est défini comme suit :*

$$\begin{aligned}\psi_\varphi(E_1,E_2)= \quad & \{x\in L^0 : |x| \leqslant \lambda\psi_\varphi(|x_1|,|x_2|)\mu\text{-}p.p.\\ & \quad \textit{pour un certain } \lambda>0 \textit{ et } x_i\in B(E_i),(i=1,2)\},\end{aligned}$$

où $B(E_i)$ dénote la boule unité de $E_i,(i=1,2)$.

Une norme sur $\psi_\varphi(E_1,E_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}=\inf \quad & \{\lambda>0 : |x|\le\lambda\psi_\varphi(|x_1|,|x_2|)\mu\text{-p.p.}\\ & \quad \text{pour certains } x_i\in B(E_i),(i=1,2)\}\end{aligned}$$

Le couple $(\psi_\varphi(E_1,E_2),\|.\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)})$ est un espace de Banach (cf. [15], [40])
Les espaces de Calderon-Lozanovskii peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\psi_\varphi(E_1,E_2)= \quad & \{x\in L^0 : |x|=\psi_\varphi(|x_1|,|x_2|)\mu\text{-p.p.}\\ & \quad \text{pour certains } x_i\in E_i,(i=1,2)\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}=\inf \quad & \left\{\max(\|x_1\|_{E_1},\|x_2\|_{E_2}) : |x|=\psi_\varphi(|x_1|,|x_2|)\mu\text{-p.p.}\right.\\ & \quad \left.\text{pour certains } x_i\in E_i,(i=1,2)\right\}\end{aligned}$$

Une autre norme dite de type Orlicz, notée par $\|.\|^0_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}$, peut être définie sur ces espaces, au moyen de la formule :

$$\begin{aligned}\|x\|^0_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}=\inf \quad & \left\{\|x_1\|_{E_1}+\|x_2\|_{E_2} : x_1\in E_1, x_2\in E_2\right.\\ & \quad \left.\text{avec } |x|=\psi_\varphi(|x_1|,|x_2|)\mu\text{-p.p.}\right\}\end{aligned}$$

Remarque 2.2. *Pour le cas particulier de la fonction puissance $\varphi(t)=t^p$, $(p\ge 1)$, nous aurons :*

$$\begin{aligned}\psi_\varphi(u,v)=\psi_p(u,v) &= v\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= u^{\frac{1}{p}}v^{1-\frac{1}{p}}\\ &= u^\theta v^{1-\theta},(0<\theta=\tfrac{1}{p}\le 1).\end{aligned}$$

On retrouve ainsi les espaces classiques de Calderon $\psi_p(E_1,E_2)=E_1^\theta E_2^{1-\theta}$ (cf. [13]).

2.2 Interpolation des opérateurs linéaires

Pour un couple de lattices de Banach (E_1, E_2) (définies sur le même espace mesuré), les espaces

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ x \in L^0 : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \right\}$$

et

$$E_1 + E_2 = \left\{ x \in L^0 : x = x_1 + x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \right\},$$

sont des lattices de Banach pour les normes :

$$\|x\|_{E_1 \cap E_2} = \max \left(\|x\|_{E_1}, \|x\|_{E_2} \right)$$

et

$$\|x\|_{E_1 + E_2} = \inf \left(\|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2} : x = x_1 + x_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \right),$$

respectivement.

Définition 2.2. *Un lattice de Banach E est dit intermédiaire entre E_1 et E_2 si les inclusions suivantes :*

$$E_1 \cap E_2 \subset E \subset E_1 + E_2$$

ont lieu avec des injections continues.

✠ Les espaces de Calderon-Lozanovskii $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ sont des espaces intermédiaires entre E_1 et E_2 (cf. [40]).

Pour deux paires de lattices de Banach $\overline{X} = (X_1, X_2)$ et $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$ sur différents espaces mesurés en général, on note par :

- $L(\overline{X}, \overline{Y})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires $T : X_1 + X_2 \longrightarrow Y_1 + Y_2$ tels que la restriction de T à l'espace X_i est un opérateur borné de X_i dans $Y_i, i = 1, 2$, avec la norme

$$\|T\|_{L(\overline{X}, \overline{Y})} = \max \left(\|T\|_{X_1 \to Y_1}, \|T\|_{X_2 \to Y_2} \right)$$

- $L^+(\overline{X}, \overline{Y})$ le cône des opérateurs linéaires positifs de l'espace $L(\overline{X}, \overline{Y})$ i.e. des opérateurs $T \in L(\overline{X}, \overline{Y})$ tels que $Tx \geq 0$ pour tout $x \in X_1 + X_2$, $x \geq 0$.

Soit X un lattice de Banach intermédiaire entre X_1 et X_2 et Y un lattice de Banach intermédiaire entre Y_1 et Y_2.

Définition 2.3. *1. On dit que le couple (X, Y) est une paire d'interpolation (resp. d'interpolation d'opérateurs positifs) par rapport à $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, si tout opérateur T de $L(\overline{X}, \overline{Y})$ (resp. de $L^+(\overline{X}, \overline{Y})$) est borné de X dans Y et*

$$\|T\|_{X \to Y} \leq C \|T\|_{L(\overline{X}, \overline{Y})},$$

pour une certaine constante $C \geq 1$ *(dite constante d'interpolation) qui est indépendante de* $T \in L(\overline{X}, \overline{Y})$ *(resp.* $T \in L^+(\overline{X}, \overline{Y})$*).*

2. *Dans le cas où* $\overline{X} = \overline{Y}$ *l'espace* X *est dit espace d'interpolation par rapport à* $\overline{X}$*.*

Une méthode $\mathbf{F}$ de construction d'espaces intermédiaires est dite méthode d'interpolation (d'interpolation d'opérateurs positifs) sur la classe des lattices de Banach, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour toute paire de lattices de Banach $\overline{X} = (X_1, X_2)$, l'espace construit noté par $\mathbf{F}(\overline{X})$ est un lattice de Banach intermédiaire entre X_1 et X_2,
2. pour toute paire de lattices de Banach $\overline{X} = (X_1, X_2)$ et $\overline{Y} = (Y_1, Y_2)$, le couple $(\mathbf{F}(\overline{X}), \mathbf{F}(\overline{Y}))$ est une paire d'interpolation (d'interpolation d'opérateurs positifs) par rapport à $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

On a alors le résultat suivant (cf. [40]), obtenu indépendement par E. I. Berezhnoi (1981), V. A. Shestakov (1981) et L. Maligranda (1985) :

✠ La construction de Calderon-Lozanovskii est une méthode d'interpolation pour les opérateurs positifs.

Remarque 2.3. *En 1972 dans l'article [38], Lozanovskii avait déjà prouvé que sa construction n'est pas une méthode générale d'interpolation. En fait, il avait construit un contre exemple montrant que même la construction de Calderon ne l'est pas. Cependant si les lattices de Banach* E_1 *et* E_2 *possèdent la propriété de Fatou, l'espace* $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ *est un espace d'interpolation par rapport au couple* (E_1, E_2) *(cf.[50]).*

2.3 Espaces de type Orlicz

Les espaces de type Orlicz sont des espaces modulaires particuliers. Il constituent une importante classe d'espaces de Calderon-Lozanovskii. Avant de les introduire, nous présentons quelques rappels et propriétés essentielles des espaces modulaires.

2.3.1 Espaces modulaires. Topologie et convergence

Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).
Une fonction $\rho : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est dite pseudo-modulaire (resp. modulaire) lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\rho(0) = 0$ ($\rho(x) = 0$ ssi $x = 0$),
2. $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$,

3. $\rho(\alpha x+\beta y)\leq\rho(x)+\rho(y)$ pour tous $\alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1$.

Si de plus la fonctionnelle ρ est convexe i.e. :

$$\rho(\alpha x+\beta y)\leq\alpha\rho(x)+\beta\rho(y) \text{ pour tous } \alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1,$$

elle est dite pseudo-modulaire convexe (modulaire convexe).
L'espace

$$X_\rho=\{x\in X:\rho(\lambda x)<+\infty \text{ pour un certain } \lambda>0\},$$

est dit espace pseudo-modulaire (modulaire).
Lorsque la pseudo-modulaire (resp. modulaire) ρ est convexe, le couple $\left(X_\rho,\|.\|_\rho\right)$ est un espace pseudo-normé (resp.normé), où

$$\|x\|_\rho=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leq 1\right\},$$

est la pseudo-norme (norme) dite de Luxemburg.

- Une suite (x_n) d'éléments de l'espace X_ρ est dite convergente au sens de la pseudo-modulaire (resp. modulaire) ρ ou **ρ-convergente** vers $x\in X_\rho$ et on écrit $x_n\xrightarrow{\rho}x$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(\lambda\left(x_n-x\right)\right)=0$ pour un certain $\lambda>0$.
- La ρ-convergence est en général une propriété moins forte que la convergence en norme (la $\|x\|_\rho$-convergence), plus précisément :

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n-x\|_\rho=0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty}\rho\left(\lambda\left(x_n-x\right)\right)=0,\forall\lambda>0.$$

- Une suite (x_n) est dite de Cauchy au sens de la modulaire ρ ou **ρ-Cauchy** lorsque $\lim\limits_{k,l\to\infty}\rho\left(\lambda\left(x_k-x_l\right)\right)=0$ pour un certain $\lambda>0$.
- L'espace X_ρ est dit pseudo-modulaire (resp. modulaire) fortement complet ou **ρ-fortement complet** lorsqu'il existe une constante $\alpha>0$ telle que pour toute suite (x_n) ρ-Cauchy de X_ρ, il existe un $x\in X_\rho$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(\alpha\left(x_n-x\right)\right)=0$.
- Si X_ρ est ρ-fortement complet, alors il est complet en norme.
- Pour tout $x\in X_\rho$, la fonction $\alpha\longrightarrow\|\alpha x\|_\rho$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Une pseudo-modulaire (resp. modulaire) ρ est dite :

  a. **continue à droite**, lorsque $\lim\limits_{\lambda\to 1^+}\rho\left(\lambda x\right)=\rho\left(x\right)$ pour tout $x\in X_\rho$,

  b. **continue à gauche**, lorsque $\lim\limits_{\lambda\to 1^-}\rho\left(\lambda x\right)=\rho\left(x\right)$ pour tout $x\in X_\rho$,

  c. **continue**, lorsqu'elle est continue à droite et à gauche à la fois.

- Si ρ est continue à droite, alors pour tout $x\in X_\rho$ les inégalités $\|x\|_\rho<1$ et $\rho\left(x\right)<1$ sont équivalentes.

- Si ρ est continue à gauche, alors pour tout $x \in X_\rho$ les inégalités $\|x\|_\rho \leq 1$ et $\rho(x) \leq 1$ sont équivalentes.
- La fonctionnelle $\|.\|_\rho^A$ définie pour tout $x \in X_\rho$ par :

$$\|x\|_\rho^A = \inf \frac{1}{k} \left[1 + \rho(kx)\right],$$

est la pseudo-norme (norme) sur X_ρ dite norme d'Amemiya. Elle est équivalente à celle de Luxemburg, en effet, pour tout $x \in X_\rho$,

$$\|x\|_\rho \leq \|x\|_\rho^A \leq 2\|x\|_\rho.$$

- Un ensemble $A \subset X_\rho$ est dit **ρ-fermé**, si pour une suite (x_n) dans A telle que $x_n \xrightarrow{\rho} x$, alors x est dans A
- Le plus petit ensemble ρ-fermé contenant un sous-ensemble $A \subset X_\rho$ est appelé **ρ-fermeture** de A dans X_ρ et est noté par $\overline{A}^\rho$.
- un sous-ensemble $A \subset X_\rho$ est ρ-fermé si et seulement si $A = \overline{A}^\rho$. Si $A \subset X_\rho$ est ρ-fermé, alors A est fermé par rapport à $\|.\|_\rho$.
- Les inclusions suivantes $A \subset \overline{A}^{\|\cdot\|_\rho} \subset \overline{A}^\rho$ ont lieu, où $\overline{A}^{\|\cdot\|_\rho}$ désigne la fermeture de A par rapport à la norme $\|.\|_\rho$.

Pour plus de détails sur la théorie des espaces modulaires, nous référons le lecteur à [4], [47].

2.3.2 Espaces de type Orlicz

Les espaces dits de type Orlicz sont les espaces de Calderon-Lozanovskii pour $E_2 = L^\infty$, on les note par E_φ à la place de $\psi_\varphi(E, L^\infty)$. Dans ce cas l'espace E_φ est l'espace modulaire suivant :(cf. [15],[40])

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(E, L^\infty) = E_\varphi &= \{x \in L^0 : \varphi(\lambda x) \in E \text{ pour un certain } \lambda > 0\} \\ &= \left\{x \in L^0 : \rho_\varphi^E(\lambda x) < +\infty \quad \text{pour un certain } \lambda > 0\right\}. \end{aligned}$$

où ρ_φ^E est la modulaire associée donnée par l'expression :

$$\rho_\varphi^E(x) = \begin{cases} \|\varphi(\lambda x)\|_E & \text{si } \varphi(\lambda x) \in E, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus :

1. La norme $\|.\|_{E_\varphi}$ coincide avec la norme de Luxemburg $\|.\|_\varphi^E$:

$$\|x\|_{E_\varphi} = \|x\|_{\rho_\varphi^E} = \|x\|_\varphi^E = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\varphi^E\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

2. La norme de type Orlicz $\|x\|^0_{E_\varphi}$ est égale à celle d'Amemiya $\|x\|^A_{\varphi,E}$:

$$\|x\|^0_{E_\varphi} = \|x\|^A_{\rho^E_\varphi} = \|x\|^A_{\varphi,E} = \inf_{k>0}\left[\frac{1}{k}\left\{1+\|\varphi\left(k|x|\right)\|_E\right\}\right].$$

Exemples 2.1. *1.* ***Le p-convexifié de** E*

Si $\varphi(t) = t^p, 1 < p < +\infty$, l'espace

$$\psi_p\left(E, L^\infty\right) = E^{\frac{1}{p}}\left(L^\infty\right)^{1-\frac{1}{p}} = E^{(p)} = \left\{x \in L^0 : x^p \in E\right\},$$

est le p-convexifié de E.

2. ***Les espaces d'Orlicz***

Si E est l'espace de Lebesgue L^1, alors :

- *$\psi_\varphi(L^1, L^\infty)$ est l'espace d'Orlicz L^φ, plus précisément :*

$$L^\varphi = \left\{x \in L^0 : \int_\Omega \varphi\left(\lambda|x(t)|\right) d\mu < +\infty, \textit{pour un certain } \lambda > 0\right\}.$$

- *Lorsque $\varphi(x) = |x|^p, (p \geq 1)$, $\psi_\varphi(L^1, L^\infty)$ n'est rien d'autre que l'espace de Lebesgue L^p.*

3. ***Les espaces d'Orlicz-Lorentz***

Si E est l'espace de Lorentz Λ_ω i.e.

$$\Lambda_\omega = \left\{x \in L^0 : \|x\|_{\Lambda_\omega} = \int_0^l x^*(t)\omega(t)dt < +\infty\right\},$$

où $\omega : [0, l[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de poids, à savoir, une fonction croissante et localement intégrable sur $[0, l[$ et x^* est le réarrangement décroissant de x. On retrouve l'espace d'Orlicz-Lorentz Λ^φ_ω, plus précisément :

$$\Lambda^\varphi_\omega = \left\{x \in L^0 : \int_0^l (\varphi \circ \lambda x)^*(t)\omega(t)dt < +\infty \textit{ pour un certain } \lambda > 0\right\}.$$

Rappelons que pour un x dans $L^0\left([0, l[, \Sigma, m\right)$, m mesure de Lebesgue. la fonction distribution de x noté par d_x est définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} d_x : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & \lambda & \mapsto & d_x(\lambda) = m\left\{t \in [0, l[: |x(t)| > \lambda\right\}, \end{array}$$

et la fonction réarrangement est :

$$\begin{array}{rccl} x^*(t) : & [0, l[& \to & \mathbb{R}_+ \\ & t & \mapsto & x^*(t) = \inf\left\{\lambda > 0 : d_x(\lambda) \leq t\right\}. \end{array}$$

2.3.3 Géométrie des espaces de type Orlicz

L'étude abstraite faite dans le cadre général des espaces de Calderon-Lozanovskii E_φ, repose sur une propriété de convergence importante imposée à l'espace E, appelée propriété de Fatou. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que E possède cette dernière.

Définition 2.4. *Un lattice de Banach E est dit possèder* ***la propriété de Fatou*** *($E \in (PF)$) lorsque :*
pour tout $x \in L^0$ et toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $0 \leq x_n \nearrow x$ μ-p.p. et vérifiant $\sup \|x_n\|_E < +\infty$*, on a $x \in E$ et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|_E = \|x\|_E$.*

Exemple 2.1. *Les espaces suivants :*
- *Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \Sigma, \mu), 1 \leq p < +\infty$,*
- *L'espace $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, ($\mu(\Omega) < +\infty$),*
- *Les espaces de Lorentz Λ_ω, possèdent la propriété de Fatou.*

Remarque 2.4.
- *Si E est uniformément monotone alors E possède la propriété de Fatou (cf. [10]).*
- *E_φ hérite la propriété de Fatou de E (cf. [15]).*

La propriété de Fatou sur E permet d'établir des liens entre la norme et la modulaire, elle garantit (cf. [15]) :

► la continuité à gauche de la fonction $f(\lambda) = \rho_\varphi^E(\lambda x)$ c'est à dire qu'on aura l'égalité suivante :

$$\sup \left\{\rho_\varphi^E (\lambda x) : |\lambda| \leq \lambda_0\right\} = \rho_\varphi^E(\lambda_0 x)$$

pour tout $\lambda_0 > 0$,

► pour tout $x \in E_\varphi$ tel que $\|x\|_\varphi^E \leq 1$, a lieu l'inégalité

$$\rho_\varphi^E (x) \leq \|x\|_\varphi^E, \tag{2.1}$$

► pour tout $x \in E_\varphi$ tel que $\|x\|_\varphi^E > 1$, a lieu l'inégalité

$$\|x\|_\varphi^E \leq \rho_\varphi^E (x). \tag{2.2}$$

Une condition de régularité très importante sur la fonction d'Orlicz est la condition Δ_2^E qui contrôle sa vitesse de croissance.

Définition 2.5. *On dit qu'une fonction d'Orlicz φ satisfait la condition Δ_2 et on écrit $\varphi \in \Delta_2$ lorsque :*

a. $\varphi \in \Delta_2(0)$ *i.e. : il existe* $k, u_0 > 0$ *tels que pour tout* $0 \leq u \leq u_0$*, on a* $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$*, si* E *s'injecte continûment dans* L^∞*.*

b. $\varphi \in \Delta_2(+\infty)$ *i.e. : il existe* $k, u_0 > 0$ *tels que pour tout* $u \geq u_0$*, on a* $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$*, si* L^∞ *s'injecte continûment dans* E*,*

c. $\varphi \in \Delta_2(\mathbb{R})$ *i.e. : il existe* $k > 0$ *tel que pour tout* $u \geq 0$*, on a* $\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$*, si, aucun des espaces* E*,* L^∞ *ne s'injecte continûment dans l'autre.*

Supposons maintenant que $\varphi \in \Delta_2$, alors on a les relations suivantes qui sont très utiles et permettent de calculer directement sur la modulaire au lieu de manipuler la norme. (cf. [15]) :

▶
$$\|x\|_\varphi^E = 1 \text{ ssi } \rho_\varphi^E(x) = 1, \tag{2.3}$$

▶ pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E_φ :

(i)
$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_\varphi^E = 1 \text{ ssi } \lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi^E(x_n) = 1 \tag{2.4}$$

et

(ii)
$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_\varphi^E = 0 \text{ ssi } \lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi^E(x_n) = 0. \tag{2.5}$$

Remarque 2.5. *les propriétés (i) et (ii) sont respectivement équivalentes à :*
i') pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$*, il existe* $\delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ *tel que :*

$$\left(x \in E_\varphi \text{ et } \rho_\varphi^E(x) \leq 1 - \varepsilon\right) \text{ implique que } \|x\|_\varphi^E \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

ii') pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $\eta(\varepsilon) > 0$ *tel que :*

$$(x \in E_\varphi \text{ et } \|x\|_\varphi^E \geq \varepsilon) \text{ implique que } \rho_\varphi^E(x) \geq \eta(\varepsilon),$$

Les premiers résultats concernant le cas général remontent à l'année 1995, où J. Cerda, H. Hudzik et M. Mastylo [15] ont étudié certaines propriétés de monotonie et de convexité.
Ils donnent des conditions suffisantes, sur l'espace E et la fonction d'Orlicz φ, qui assurent la stricte monotonie, l'uniforme monotonie, la stricte convexité et l'uniforme convexité de l'espace E_φ.

Définition 2.6. *On dit qu'une fonction d'Orlicz* φ *est strictement convexe lorsque :*

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\left\{\varphi(u) + \varphi(v)\right\},$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+,\ u \neq v$*.*

Définition 2.7. ***(W.A.J. Luxemburg [39])*** *On dit qu'une fonction d'Orlicz φ est uniformément convexe si, à tout réel $a \in]0,1[$ correspond un réel $\delta(a) \in]0,1[$ tel que*

$$\varphi\left(\frac{u+bu}{2}\right) \leq (1-\delta(a))\,\frac{1}{2}\left\{\varphi(u)+\varphi(bu)\right\},$$

pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et tout nombre réel b satisfaisant $0 \leq b \leq a$, (cf. [39]).

Remarque 2.6. *1. La définition précédente de l'uniforme convexité de la fonction φ est équivalente à chacune des deux reformulations suivantes :*

i. Pour tout réel $a \in]0,1[$, il existe un réel $\delta(a) \in]0,1[$ tel que

$$\varphi\left(\frac{u+au}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(1-\delta(a))\left\{\varphi(u)+\varphi(au)\right\},$$

pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, (cf. [1]).

ii. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $p(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(1-p(\varepsilon))\left\{\varphi(u)+\varphi(v)\right\},$$

pour tous u, v satisfaisant $|u-v| \geq \varepsilon \max(u,v)$, (cf. [53]).

2. Une fonction d'Orlicz φ est uniformément convexe si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante réelle $k_\varepsilon > 1$ telle que :

$$P\left((1-\varepsilon)\,u\right) \geq k_\varepsilon P\left(u\right),$$

pour tout $u \geq 0$, où P est la dérivée à droite de la fonction φ, (cf. [1]).

Exemple 2.2. *– Un exemple de fonction d'Orlicz strictement convexe qui n'est pas uniformément convexe est le suivant :*

$$\varphi\left(u\right) = \sqrt{u^2+1}-1.$$

– Les fonctions puissances $\varphi(u) = |u|^p$ avec $p > 1$ sont toutes uniformément convexes avec

$$\delta\left(a\right) = 1-2^{-p+1}\left(1+a\right)^p\left(1+a^p\right)^{-1}$$

Théorème 2.1. ***(Cerda, Hudzik et Mastylo,1995 [15])*** *Soit $E \in (SM)$, φ une fonction d'Orlicz strictement convexe et telle que $\varphi \in \Delta_2$.*
Alors l'espace E_φ est strictement convexe.

– Si à la place de la stricte monotonie de E, on prend la stricte convexité qui est une condition plus forte, on obtient la stricte convexité de E_φ sans avoir besoin d'imposer la condition de stricte convexité sur φ. Plus exactement :

Théorème 2.2. ***(Cerda, Hudzik et Mastylo,1995 [15])*** *Supposons que E est strictement convexe et soit φ une fonction d'Orlicz ne s'annulant qu'en zero, telle que $\varphi \in \Delta_2$. Alors l'espace E_φ est strictement convexe.*

On a un résultat similaire pour l'uniforme convexité :

Théorème 2.3. ***(Cerda, Hudzik et Mastylo,1995 [15])*** *Supposons que E est uniformement convexe et soit φ une fonction d'Orlicz ne s'annulant qu'en zero, telle que $\varphi \in \Delta_2$.*
Alors l'espace E_φ est uniformement convexe.

Définition 2.8. *On dit qu'une fonction d'Orlicz φ satisfait l'inégalité de Clarkson lorsque :*

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)+\varphi\left(\frac{|u-v|}{2}\right)\leq \frac{1}{2}\left\{\varphi(u)+\varphi(v)\right\},$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$.

Remarque 2.7.
- *Une fonction d'Orlicz satisfaisant l'inégalité de Clarkson est uniformément convexe.*
- *Si φ est une fonction d'Orlicz, la fonction d'Orlicz*

$$\Phi(u)=\varphi(u^p),\ (2\leq p<+\infty)$$

vérifie l'inégalité de Clarkson (cf. [27]).

Théorème 2.4. ***(Cerda, Hudzik et Mastylo,1995 [15])*** *Soit $E \in (UM)$, φ une fonction d'Orlicz satisfaisant l'inégalité de Clarkson et telle que $\varphi \in \Delta_2$.*
Alors l'espace E_φ est uniformement convexe.

Remarque 2.8. *Les hypothèses de stricte convexité de la fonction φ dans le théorème 2.1 et de la stricte convexité et l'uniforme convexité de l'espace E dans les théorèmes 2.2 et 2.3 respectivement, ne sont pas nécessaires en géneral. L'exemple suivant illustre parfaitement cette situation :*
Soient les deux fonctions φ_1 et φ_2 définies comme suit :

$$\varphi_1(u)=\begin{cases} |u| & si\ |u|\leq 1\\ u^2 & si\ |u|>1,\end{cases}$$

$$\varphi_2(u)=\begin{cases} u^2 & si\ |u|\leq 1\\ 2|u|-1 & si\ |u|>1.\end{cases}$$

Alors, φ_1 et φ_2 sont des fonctions d'Orlicz, vérifiant la condition $\Delta_2(\mathbb{R}_+)$ mais elles ne sont pas strictement convexes.
On peut facilement vérifier que la fonction $\varphi_1 \circ \varphi_2$:

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(u) = \begin{cases} u^2 & si\ |u| \leq 1 \\ (2|u|-1)^2 & si\ |u| > 1, \end{cases}$$

est une fonction d'Orlicz satisfaisant la condition $\Delta_2(\mathbb{R}_+)$. D'autre part, en remarquant que la fonction $\varphi_1 \circ \varphi_2\,(\sqrt{u})$ est une fonction d'Orlicz, on peut déduire que $\varphi_1 \circ \varphi_2$ vérifie l'inégalité de Clarkson. Du théorème 2.4, on déduit donc que l'espace d'Orlicz $L^{\varphi_1 \circ \varphi_2}$ est uniformement convexe.
Or on peut vérifier que $L^{\varphi_1 \circ \varphi_2} = (L^{\varphi_1})_{\varphi_2}$ avec égalité des normes (cf. par exemple [28]). En effet :
Par définition, un élément x est dans $(L^{\varphi_1})_{\varphi_2}$ lorsqu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\varphi_2 \circ \lambda x$ est dans L^{φ_1}. Cette dernière condition signifie qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\varphi_1 \circ [\alpha(\varphi_2 \circ \lambda x)]$ est dans L^1.
Posons $\beta = \min(\lambda, \alpha, 1)$. Alors on aura

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \beta^2 x \leq \varphi_1 \circ [\alpha(\varphi_2 \circ \lambda x)],$$

qui est donc dans L^1, ce qui entraine que x est dans $L^{\varphi_1 \circ \varphi_2}$.
Inversement, supposons que $x \in L^{\varphi_1 \circ \varphi_2}$, alors $(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \lambda x \in L^1$ pour un certain $\lambda > 0$, donc $\varphi_2 \circ \lambda x \in L^{\varphi_1}$ ce qui est équivalent à $x \in (L^{\varphi_1})_{\varphi_2}$.
Montrons maintenant l'égalité des normes.
Pour cela, on va utiliser l'équivalence :

$$\|x\|_{L^\varphi} \leq 1 \ ssi\ \rho_{L^\varphi} \leq 1,$$

dans le cas des espaces d'Orlicz L^φ.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \|x\|_{(L^{\varphi_1})_{\varphi_2}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \left\|\varphi_2 \circ \ \tfrac{x}{\lambda}\right\|_{L^{\varphi_1}} \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{L^{\varphi_1}}\left(\varphi_2 \circ \tfrac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{L^{\varphi_1 \circ \varphi_2}}\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \|x\|_{L^{\varphi_1 \circ \varphi_2}} \end{aligned}$$

En conclusion :
L'espace $(L^{\varphi_1})_{\varphi_2}$ est uniformement convexe au moment où l'espace L^{φ_1} et la fonction d'Orlicz φ_2 ne sont même pas strictement convexes.

En 2005, P. Kolwicz a établi les conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent la stricte et l'uniforme convexité de E_φ.

- Posons,

$$a_\varphi = \sup\{u \geq 0 : \varphi(u) = 0\} \text{ et } b_\varphi = \sup\{u \geq 0 : \varphi(u) < +\infty\}.$$

On écrit $\varphi > 0$ lorsque $a_\varphi = 0$ et $\varphi < +\infty$ lorsque $b_\varphi = +\infty$.
Soit φ_r la restriction de la fonction φ à l'ensemble G_φ, où

$$G_\varphi = \{0\} \cup]a_\varphi, b_\varphi] \text{ si } \varphi(b_\varphi) < +\infty \text{ et } G_\varphi = \{0\} \cup]a_\varphi, b_\varphi[\text{ sinon.}$$

Définition 2.9. *On dit que E_φ satisfait la condition norme-modulaire et on écrit $E_\varphi \in (nm)$ lorsque l'implication $\|x\|_\varphi^E = 1 \Rightarrow \rho_\varphi^E(x) = 1$ est vraie pour tout $x \in E_\varphi$.*

Théorème 2.5. ***(P. Kolwicz, 2005 [34])*** *L'espace E_φ est strictement convexe si et seulement si :*

i. $E_\varphi \in (nm), E \in (SM), \varphi > 0$ *et*

ii. pour tous $u, v \in S(E_+), u \neq v$, l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :
  α) $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E < 1$.
  β) $\max\left(\left\|u\chi_{A(u,v)}\right\|_E, \left\|v\chi_{A(u,v)}\right\|_E\right) > 0$,
  où

$$A(u,v) = \left\{t \in \Omega : \varphi\left(\frac{x(t)+y(t)}{2}\right) < \frac{1}{2}\left[\varphi(x(t)) + \varphi(y(t))\right]\right\},$$

  et $x = \varphi_r^{-1} \circ u, y = \varphi_r^{-1} \circ v$.

- Notons que la condition $i.$ est une caractérisation de la stricte monotonie de l'espace E_φ (cf. [15]).
- Il est clair que si la fonction φ est strictement convexe ou si l'espace E est strictement convexe, la condition $ii.$ est satisfaite.

Application aux espaces d'Orlicz

On sait que E_{φ_1} avec $E = L^{\varphi_2}$ est l'espace d'Orlicz $L^{\varphi_2 \circ \varphi_1}$.
Question : Supposons que $E = L^{\varphi_2}$ n'est pas strictement convexe c'est à dire que l'on a soit φ_2 ne vérifie pas la condition Δ_2, ou φ_2 s'annule en dehors de zero ou bien φ_2 n'est pas strictement convexe. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur φ_1 et φ_2 pour que l'espace $L^{\varphi_2 \circ \varphi_1}$ soit strictement convexe ?.
Rappelons qu'un intervalle $[a, b]$ est dit intervalle structurel affine (SAI) de φ lorsque φ est affine sur $[a, b]$ et ne l'est pas ni sur $]a - \delta, b]$ ni sur $[a, b + \delta[$ pour tout $\delta > 0$.
Le corollaire suivant nous fournit une réponse :

Corollaire 2.1. *Soit $E = L^{\varphi_2}$. Alors E_{φ_1} est strictement convexe si et seulement si :*

1. $\varphi_1 \in \Delta_2, \varphi_1 > 0, \varphi_2 \in \Delta_2, \varphi_2 > 0$ *et*
2. φ_1 *est strictement convexe sur* $[\varphi_1^{-1}(a), \varphi_1^{-1}(b)]$ *pour tout intervalle* $[a,b]$ *qui est structurel affine pour* φ_2.

On voit bien que l'espace $L^{\varphi_2 \circ \varphi_1}$ ne peut pas être strictement convexe si la fonction φ_2 ne vérifie pas la condition Δ_2 ou si elle s'annule en dehors de zero mais si φ_2 n'est pas strictement convexe, on peut l'obtenir si et seulement si φ_1 est "assez bonne".

Théorème 2.6. ***(P.Kolwicz, 2005 [34])*** *L'espace* E_φ *est uniformément convexe si et seulement si :*

i. $E \in (UM), \varphi > 0, \varphi < +\infty, \varphi \in \Delta_2$ *et,*

ii. pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que pour tous* $u, v \in S(E_+), u \neq v$ *avec* $\|u - v\|_E \geq \varepsilon$, *l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*
$\alpha)$ $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E \leq 1 - \delta$,
$\beta)$ $\max\left(\left\|u\chi_{A_\delta(u,v)}\right\|_E, \left\|v\chi_{A_\delta(u,v)}\right\|_E\right) \geq \delta$,
où

$$A_\delta(u,v) = \left\{t \in \Omega : \varphi\left(\frac{x(t)+y(t)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(1-\delta)\left[\varphi(x(t)) + \varphi(y(t))\right]\right\},$$

et $x = \varphi^{-1} \circ u, y = \varphi^{-1} \circ v$.

Nous avons accordé une attention particulière aux résultats concernant la stricte et l'uniforme convexité des espaces E_φ. D'autres propriétés ont été étudiées par différents auteurs. On peut noter à cet effet, la caractérisation de l'uniforme convexité locale de l'espace de Calderon-Lozanovskii E_φ, obtenu en 2007 par P. Foralewskii et P. Kolwicz [22].

2.4 L'espace de Besicovitch-Orlicz

Soit $M(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions Lebesgue mesurables et $B^1(\mathbb{R})$ l'espace de Besicovitch :

$$B^1(\mathbb{R}) = \left\{x \in M(\mathbb{R}) : \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |x(t)|dt < +\infty\right\}.$$

L'espace de type Orlicz $\psi_\varphi(B^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R}))$ est dans ce cas l'espace de Besicovitch-Orlicz, noté par $B^\varphi(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} B^\varphi(\mathbb{R}) &= \{x \in M(\mathbb{R}) : \varphi(\lambda|x|) \in B^1(\mathbb{R}) \text{ pour un certain } \lambda > 0\}. \\ &= \left\{x \in M(\mathbb{R}) : \overline{\lim_{T\to\infty}} \tfrac{1}{2T}\textstyle\int_{-T}^{+T} \varphi(\lambda|x(t)|)dt < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0\right\}. \end{aligned}$$

La pseudo-modulaire associée est donc définie par :

$$\begin{array}{rccl} \rho_{B^{\varphi}}: & M(\mathbb{R}) & \to & [0,+\infty] \\ & f & \mapsto & \rho_{B^{\varphi}}(f) = \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \varphi(|f(t)|)\,dt, \end{array}$$

et la pseudo-norme de Luxemburg est notée par $\|.\|_{B^{\varphi}}$,

$$\|x\|_{B^{\varphi}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Remarque 2.9. *L'espace de Besicovitch $B^1(\mathbb{R})$ est un lattice de Banach. Cependant, il ne vérifie pas la propriété de Fatou,*
En effet, soit la suite $\{x_n\}$ définie par :

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & si\ |t| \leq n \\ 0, & si\ |t| > n \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{B^1(\mathbb{R})} &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x_n(t)|dt \\ &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \tfrac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \chi_{[-n,n]}(t)dt \\ &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \tfrac{1}{2T}\mu([-T,+T]\cap[-n,n]) \\ &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \tfrac{1}{2T}\mu([-n,n]) \\ &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \tfrac{n}{T} = 0, \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{B^1(\mathbb{R})} = 0 < +\infty.$$

La suite $\{x_n\}$ est croissante vers $x \equiv 1$, alors que la suite des normes $\left\{\|x_n\|_{B^1(\mathbb{R})}\right\}$ ne converge pas vers $\|x\|_{B^1(\mathbb{R})} = 1$.

Les espaces de Besicovitch-Orlicz $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ ne se prêtent donc pas à l'approche générale dans l'étude de leur géométrie. La difficulté principale rencontrée lorsqu'on traîte cette catégorie d'espaces est due au fait que la modulaire associée s'exprime comme étant une moyenne.
En se plaçant dans la sous classe de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques, M. Morsli (cf. thèse Morsli [44]) a surmonté ce problème en développant des outils de convergence par rapport à la fonction d'ensemble $\overline{\mu}$. Il obtient des résultats partiels "semblables" à ceux de la théorie de la mesure de Lebesgue, qui lui ont permis de développer une approche appropriée pour étudier la structure géométrique de ces derniers. Ces même outils sont aussi communs aux classes de Stepanoff-Orlicz et

Weyl-Orlicz.

✠ **L' espace de Stepanoff-Orlicz**

Lorsque E est l'espace de Stepanoff $S_l^1(\mathbb{R})$:

$$S_l^1(\mathbb{R}) = \left\{ x \in M(\mathbb{R}) : \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_s^{s+l} |x(t)|dt < +\infty \right\},$$

L'espace $E_\varphi = \psi_\varphi\left(S_l^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})\right)$ est l'espace de Stepanoff-Orlicz, noté par $S_l^\varphi(\mathbb{R})$:

$$S_l^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ x \in M(\mathbb{R}) : \rho_{S^\varphi}(\lambda x) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_s^{s+l} \varphi(\lambda|x(t)|)dt < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$

La pseudo-norme de Luxemburg associée est notée par $\|.\|_{S^{\varphi_l}}$.

✠ **L'espaces de Weyl-Orlicz**

Lorsque E est l'espace de Weyl $W^1(\mathbb{R})$:

$$W^1(\mathbb{R}) = \left\{ x \in M(\mathbb{R}) : \lim_{l\to+\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_s^{s+l} |x(t)|dt < +\infty \right\},$$

L'espace $E_\varphi = \psi_\varphi\left(W^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})\right)$ est l'espace de Weyl-Orlicz, noté par $W^\varphi(\mathbb{R})$:

$$W^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ x \in M(\mathbb{R}) : \rho_{W^\varphi}(\lambda x) = \lim_{l\to+\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_s^{s+l} \varphi(\lambda|x(t)|)dt < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$

La pseudo-norme de Luxemburg associée est notée par $\|.\|_{W^\varphi}$.

On a alors, les inégalités suivantes sur les normes : $\|.\|_{S^{\varphi_l}}$, $\|.\|_{W^\varphi}$ et $\|.\|_{B^\varphi}$,

$$\|.\|_{S^{\varphi}_l} \geq \|.\|_{W^\varphi} \geq \|x\|_{B^\varphi},$$

et par suite les inclusions suivantes sur les espaces respectifs :

$$S_l^\varphi(\mathbb{R}) \subset W^\varphi(\mathbb{R}) \subset B^\varphi(\mathbb{R}).$$

2.4.1 Fonctions presque périodiques, différentes généralisations

Depuis leurs introduction par H. Bohr dans les années vingts, les fonctions presque périodiques (p.p.) ont joué un important rôle dans différentes branches des mathématiques. Plusieurs variantes et extensions du concept de Bohr ont été introduites depuis, notamment par A.S. Besicovitch, V.V. Stepanoff et H. Weyl. Les travaux de ces auteurs ont d'ailleurs donnés lieu à des monographies et autres articles couvrant un large spectre de notions de presque périodicité et leurs applications.

Une des extensions du concept original (scalaire) de Bohr est la généralisation aux fonctions p.p. à valeurs vectorielles, les premiers travaux dans ce sens sont dus à

S. Bochner dans les années trentes. D'autres références sont venues par la suite, citons par exemples les monographies de L. Amerio et G. Prouse [3], de B.M. Levitan et V.V. Zhikov [36]. Le cas des fonctions presque périodiques à valeurs vectorielles (dans un espace de Banach) est particulièrement important pour les applications aux équations différentielles (comportement asymptotique des solutions) et aux systèmes dynamiques.

Il existe différentes approches pour introduire de nouvelles classes de fonctions p.p., ces nouvelles classes sont liées souvent aux noms de H. Bohr, S. Bochner, V.V. Stepanoff, H. Weyl et A.S. Besicovitch. On peut en distinguer deux approches essentielles : l'une topologique et l'autre structurelle.
Il est connu, par exemple, que les définitions des fonctions uniformément presque périodiques (u.p.p. ou p.p. de type Bohr) exprimées en termes :

- de relative densité de l'ensemble des presque périodes (critère de Bohr),
- de compacité de l'ensemble des translatés (critère de Bochner ou critère de normalité),
- de fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la norme uniforme (critère d'approximation),

sont équivalentes.
Ces équivalences reste vraies pour la classe de Stepanoff de fonctions p.p.(cf. [9], [11]), ce n'est pas le cas pour la classe de Besicovitch de fonctions p.p.. Pour la classe de Weyl, la situation est plus compliquée du fait que dans la définition standard (critère de Bohr) la métrique qui a été utilisée est celle de Stepanoff et non pas celle de Weyl. Outre ces définitions, il existe beaucoup d'autres caractérisations.

Fonctions presque périodiques de Bohr

Propriétés fondamentales

Définition 2.10. *Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense (r.d.) dans $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $l > 0$ pour lequel, tout intervalle $[a, a+l]$ contient au moins un point de l'ensemble X.*

Définition 2.11. *Une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$(l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$) est dite uniformément presque périodique (u.p.p.) si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensembe*

$$T(f, \varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \right\},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

– Les éléments de l'ensemble $T(f,\varepsilon)$ sont appelés ε-presque périodes de f ou ε-nombres de translation de f.

Les fonctions p.p. ainsi définies possèdent les propriétés suivantes :

- ▶ Toute fonction périodique continue est u.p.p.
- ▶ L'ensemble des fonctions u.p.p. a une structure d'algèbre.
- ▶ Toute fonction u.p.p. est uniformément continue.
- ▶ Toute fonction u.p.p. est bornée.
- ▶ Si une fonction f est la limite uniforme dans $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions u.p.p., alors f est u.p.p..

  On note par $\{u.p.p.\}$ l'ensemble de telles fonctions. $\{u.p.p.\}$ est alors fermé pour la norme uniforme. Comme c'est un sous ensemble fermé de l'espace de Banach $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}) = C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme sup), l'espace $\{u.p.p.\}$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.12. *une fonction $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dite uniformément normale si, de toute suite de nombres réels $\{h_i\}$, on peut extraire une sous suite $\{h_{ni}\}$ telle que la suite de fonctions $\{f(x+h_{ni})\}$ soit uniformément convergente.*

- Les fonctions $f^{h_i}(x) = f(x+h_i)$ sont appelées fonctions translatées de f.
- En d'autres termes, f est uniformément normale si l'ensemble de ses translatées est précompact dans $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
- Toute fonction obtenue comme limite d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés est u.p.p., en conséquence la définition suivante vient naturellement.

Définition 2.13. *On note par $C^0_{p.p.}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace de Banach obtenu comme fermeture de l'ensemble A des polynômes trigonométriques généralisés dans l'espace $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

On sait alors que (cf. [9])

$$f \in C^0_{p.p.}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Leftrightarrow f \in \{u.p.p.\} \Leftrightarrow f \text{ est uniformément normale .}$$

Ces caractérisations équivalentes sont à la base des différentes généralisations de la notion de presque périodicité.

Valeur moyenne d'une fonction u.p.p.

Pour toute fonction u.p.p. f, La valeur moyenne $M[f]$ définie par :

$$M[f] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x)dx,$$

existe et est finie.
De plus,

1. $M[f] = \lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T} \int_0^{+T} f(x)dx = \lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(x)dx,$
   et de manière générale,
2. $M[f] = \lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{2T} \int_{\alpha-T}^{\alpha+T} f(x)dx,$ uniformément par rapport à $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.10. *1. Toute fonction paire admettant une moyenne vérifie la propriété 1. précédente, par contre une condition nécessaire pour qu'une fonction impaire soit u.p.p. est que sa valeur moyenne soit nulle.*

2. La valeur moyenne d'une fonction u.p.p. positive non identiquement nulle est strictement positive.

Série de Fourier associée à une fonction u.p.p.

Comme pour toute fonction u.p.p. et tout nombre réel λ, la fonction $f(x)\exp(-i\lambda x)$ reste u.p.p., le nombre

$$a(\lambda, f) = M[f(x)\exp(-i\lambda x)],$$

existe toujours.
Pour toute fonction u.p.p. f, il existe un ensemble au plus dénombrable de réels λ vérifiant $a(\lambda, f) \neq 0$. De tels nombres sont les exposants de Fourier-Bohr de f et les valeurs $a(\lambda, f)$ associés sont les coefficients de Fourier-Bohr de la fonction f.
L'ensemble

$$\Lambda(f) = \{\lambda_n \in \mathbb{R} : a(\lambda_n, f) \neq 0\},$$

est appelé spectre de f.

– la série formelle
$$S(f)(x) = \sum_{n\geq 1} a(\lambda_n, f)\exp(i\lambda_n x),$$
est la série de Fourier-Bohr de f.
– Les coefficients de Fourier-Bohr d'une fonction u.p.p. f vérifie légalité de Parseval :
$$\sum_{n\geq 1} a(\lambda_n, f)^2 = M[f|(x)|^2].$$
– Deux fonctions u.p.p. distinctes possèdent différentes séries de Fourier-Bohr.
– Si la série de Fourier-Bohr d'une fonction u.p.p f est uniformément convergente, alors sa somme est égale à f.

Polynôme d'approximation de Bochner-Fejèr d'une fonction u.p.p.

L'égalité de Parseval, qui est un résultat fondamental dû à H. Bohr donne lieu à une propriété importante d'approximation d'une fonction u.p.p. par des polynômes trigonométriques particuliers dits polyômes de Bochner-Fejèr. Cette propriété généralise l'approximation de Fejèr pour les fonctions périodiques. Plus pécisément : Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ un ensemble dénombrable de nombre réels linéairement indépendants, c'est à dire tel que pour tout entier $p \geq 1$ les seuls rationnels $r_1, r_2, ..., r_p$ vérifiant l'équation :

$$r_1\alpha_{n_1} + r_2\alpha_{n_2} + ... + r_p\alpha_{n_p} = 0,$$

sont $r_1 = r_2 = ... = r_p = 0$.
Alors le polynôme de Bochner-Fejèr σ_B est donné par l'expression suivante :

$$\sigma_B(x) = M\left[(x+.)\, K_B(.)\right],$$

òu K_B est le noyau de Bochner-Fejèr défini par :

$$K_B(t) = K_{n_1}(\alpha_1 t)\, K_{n_2}(\alpha_2 t) ....K_{n_p}(\alpha_p t),$$

et pour tout i, $i = 1, ...n_p$

$$K_{n_i}(t) = \frac{1}{n_i}\left(\frac{\sin\frac{n_i}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right),$$

est le noyau classique de Fejèr.

- $\sigma_B(x) = \sigma_p(x) = \sum_{k=1}^{k=n_p} r_{k,p}\, a(\lambda_k, f)\exp(i\lambda_k x)$.
- La suite de polynômes de Bochner-Fejèr ainsi définie converge uniformément vers f lorsque p tend vers l'infini.

Fonctions presque périodiques de type Orlicz

Notons par A l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés :

$$A = \left\{P_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{2.6}$$

La classe $C^0_{p.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions presque périodiques au sens de Bohr est la fermeture de l'ensemble A par rapport à la norme uniforme dans l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Cette caractérisation topologique a été à la base des différentes extensions. En considérant la fermeture de l'ensemble A relativement à d'autres normes spécifiques, on peut obtenir une variété de nouvelles classes de fonctions presque périodiques. La première

généralisation est due à A. S. Besicovitch (cf. [9]) dans le contexte des espaces de Lebesgue L^p, définissant les espaces $S^q_{p.p.}$, $W^q_{p.p.}$ et $B^q_{p.p.}$ (resp. l'espace de Stepanoff, Weyl et Besicovitch de fonctions presque périodiques).
Dans [24], T. R. Hillmann a utilisé une approche similaire dans le cadre des espace d'Orlicz. Il introduit les espaces $S^\varphi_{p.p.}$, $W^\varphi_{p.p.}$ et $B^\varphi_{p.p.}$ (resp. l'espace de Stepanoff-Orlicz, Weyl-Orlicz et Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques). Son travail a été essentiellement consacré à l'étude des propriétés structurelles et topologiques de ces nouvelles classes.

Notons par $G^\varphi(\mathbb{R})$ l'un des trois espaces : $S^\varphi_1(\mathbb{R})$, $W^\varphi(\mathbb{R})$ ou $B^\varphi(\mathbb{R})$ et $\|.\|_{G^\varphi}$ la (pseudo)norme correspondante.
Il est clair que A est un sous espace linéaire de $G^\varphi(\mathbb{R})$. La fermeture de A relativement à la (pseudo)norme $\|.\|_{G^\varphi}$ permet de définir l'espace de type Orlicz de fonctions presque périodiques, noté $G^\varphi.p.p.$, appelé respectivement : Stepanoff-Orlicz, Weyl - Orlicz et Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. On écrit, donc :

$$G^\varphi.p.p. = \overline{A}^{\|\cdot\|_{G^\varphi}}$$

ou d'une manière plus explicite :

$$G^\varphi.p.p. = \left\{ f \in G^\varphi(\mathbb{R}),\ \exists \{f_n\}_{n\geq 1} \subset A,\ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{G^\varphi} = 0 \right\}.$$

La fermeture de A relativement à la (pseudo)modulaire ρ_{G^φ} permet de définir une classe plus large de fonctions presque périodiques, notée $\widetilde{G}^\varphi.p.p.$ Plus précisement :

$$\widetilde{G}^\varphi.p.p. = \left\{ f \in G^\varphi(\mathbb{R}),\ \exists \{f_n\}_{n\geq 1} \subset A,\ \exists k > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \rho_{G^\varphi}(k(f_n - f)) = 0 \right\}.$$

Il est clair que les deux espaces $G^\varphi.p.p.$ et $\widetilde{G}^\varphi.p.p.$ sont linéaires, de plus, on a l'inclusion suivante :

$$G^\varphi.p.p. \subset \widetilde{G}^\varphi.p.p.,$$

l'égalité des deux espaces a lieu si et seulement si φ vérifie la condition Δ_2.
Les fonctions de $\widetilde{G}^\varphi.p.p.$ peuvent aussi être caracterisées en termes de propriétés de translation ou de presque périodicité. La caractérisation des fonctions de $B^\varphi.p.p.$ n'est cependant pas commode. De manière précise :

1. Une fonction $f \in S^\varphi_1(\mathbb{R})$ sera dite satisfaire la propriété de translation au sens de Stepanoff-Orlicz lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$S^\varphi_1 T(f;\varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R},\ \|f_\tau - f\|_{S^\varphi_1} \leq \varepsilon \right\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

2. Une fonction $f \in W^{\varphi}(\mathbb{R})$ sera dite satisfaire la propriété de translation au sens de Weyl-Orlicz lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\ell_0(\varepsilon) = \ell_0 > 0$ tel que l'ensemble $S^{\varphi}_{\ell_0}T(f;\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
3. Une fonction $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ satisfait la propriété de translation au sens de Besicovitch-Orlicz, si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une suite $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels équirépartie dans $\mathbb{R}$, telle que :
   (a) $\rho_{B^{\varphi}}\left(\dfrac{f_{\tau_i} - f}{\alpha}\right) < \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\overline{M}_x\overline{M}_i\left\{\dfrac{1}{c}\int\limits_x^{x+c}\varphi\left(|f(x+\tau_i) - f(x)|\right)d\mu\right\} \leq \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall c > 0$, où α est une constante qui ne dépend que de f.

L'ensemble des fonctions de $G^{\varphi}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de translation correspondantes est noté $G^{\varphi}.p.t.$ Cet espace contient $G^{\varphi}.p.p.$ et lui est égal si et seulement si φ vérifie la condition Δ_2 (cf. [24]). Les propriétés topologiques essentielles des espaces $G^{\varphi}.p.p.(\mathbb{R})$ et $G^{\varphi}.p.t(\mathbb{R})$ sont étudiés dans [2], [24]. Tous ces espaces sont non séparables. Les espaces $S^{\varphi}_1.p.p.$, $S^{\varphi}_1.p.t$, $B^{\varphi}.p.p.$ et $B^{\varphi}.p.t$ sont complets alors que $W^{\varphi}.p.p.$ et $W^{\varphi}.p.t$ ne le sont pas.

Remarque 2.11. *Des résultats classiques d'analyse fonctionnelle affirment que les espaces $C_0([0,1])$ des fonctions continues f telles que $f(0) = f(1)$ et $L^p([0,1])$, $p \geq 1$ s'identifient à la fermeture de l'ensemble $A_0 = \langle\{\exp(2in\pi x), n \geq 0\}\rangle$ pour les normes correspondantes.*
La fermeture pour des pseudo-normes du même type de l'ensemble A des polynômes trigonométriques généralisés nous a permis de définir les différentes classes de fonctions presque périodiques. En fait on peut élargir cette identification (cf. [3], [24])

1. *L'algèbre $\{u.p.p.\}$ est isométriquement isomorphe à un espace abstrait $C(K)$ où K est le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$.*
2. *L'identification de 1. se prolonge en une identification entre les espaces $B^{\varphi}.p.p.(\mathbb{R})$ et $L^{\varphi}(K)$. (cf. [24])*

Comparaison des espaces $S^{\varphi}_1.p.p.$, $W^{\varphi}p.p.$ et $B^{\varphi}.p.p.$

Les espaces $S^{\varphi}_1.p.p.$, $W^{\varphi}.p.p.$ et $B^{\varphi}.p.p.$ sont par définition les fermetures respectives de l'ensemble A relativement aux (pseudo)normes $\|.\|_{S^{\varphi}_1}$, $\|.\|_{W^{\varphi}}$ et $\|.\|_{B^{\varphi}}$. Les inégalités sur les normes impliquent les relations d'inclusion :

$$A \subset \{u.p.p.\} \subset S^{\varphi}_1.p.p. \subset W^{\varphi}.p.p. \subset B^{\varphi}.p.p. \subset B^1.p.p.$$

Propriétés d'approximation dans les espaces $S_1^{\varphi}.p.p.$, $W^{\varphi}.p.p.$ et $B^{\varphi}.p.p.$

Toute fonction u.p.p. admet un développement en série de Fourier et peut être approximée, au sens de la norme uniforme, par une suite de polynômes de Bochner-Fejèr. Ce résultat se généralise aussi au cas de fonctions presque périodiques définies dans les espaces de type Orlicz. De manière précise, les fonctions de $B^1.p.p.(\mathbb{R})$, en particulier donc celles de $G^{\varphi}.p.p.(\mathbb{R})$ possèdent un développement en série de Fourier. A toute fonction f de $B^1.p.p.(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on associe le coefficient de Fourier-Bohr

$$a(\lambda) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \exp(-i\lambda t)\, dt.$$

Ces coefficients sont nuls sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ. On note $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_{2,\ldots,}\lambda_n, \ldots\}$ ces valeurs. On considère alors la série formelle

$$S(f)(x) = \sum_{n \geq 1} a(\lambda_n) \exp(i\lambda_n x).$$

Les questions concernant la convergence de cette série sont en général difficiles. On montre toutefois l'existence de polynômes d'approximation de Bochner-Fejèr. Cette approche généralise l'approximation classique de Fejèr dans le cas des fonctions périodiques :

Soient $f \in G^{\varphi}.p.p$, où $G^{\varphi}.p.p$ désigne toujours l'un des trois espaces $S_{\ell}^{\varphi}.p.p$, $W^{\varphi}.p.p$ ou $B^{\varphi}.p.p$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} a(\lambda_k, f)\, e^{i\lambda_k x}$ les sommes partielles de sa série de Fourier. Il existe une suite de polynômes trigonométriques $\sigma_m(f)$, $m \geq 1$ (qui sont les polynômes d'approximation de Bochner-Fejèr) de la forme (cf. [24]) :

$$\sigma_m(f)(x) = \sum_{k=1}^{r_m} \mu_{m\,k}\, a(\lambda_k, f)\, e^{i\lambda_k x} \qquad .$$

Les facteurs $\{\mu_{m\,k}\}$ dépendent seulement de la suite des exposants $\{\lambda_k\}$de f et on a : $0 < \mu_{m\,k} \leq 1$.

Pour tout $f \in G^{\varphi}p.p$, la suite $\{\sigma_m(f)\}$ possède les propriétés d'approximation suivantes :

1. $\|\sigma_m(f)\|_{G^{\varphi}} \leq \|f\|_{G^{\varphi}}$, $m = 1, 2...$ $(\rho_{G^{\varphi}}(\sigma_m(f)) \leq \rho_{G^{\varphi}}(f))$.
2. $\|\sigma_m(f) - f\|_{G^{\varphi}} \to 0$ quand $m \to \infty$.

2.4.2 Géométrie de l'espace de Besicovitch-Orlicz de fonctions p.p.

1. L'espace $\left(\widetilde{B}^{\varphi}.p.p, \|.\|_{B^{\varphi}}\right)$ est strictement convexe si et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   (a) la fonction φ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_{+}$,
   (b) la fonction φ vérifie la condition $\Delta_2\,(+\infty)$ (cf. [43]).
2. L'espace $\left(\widetilde{B}^{\varphi}.p.p, \|.\|_{B^{\varphi}}\right)$ est uniformément convexe si et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :
   (a) φ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_{+}$,
   (b) il existe une constante $d > 0$, telle que la fonction φ soit uniformément convexe sur $[d, +\infty[$,
   (c) φ vérifie la condition $\Delta_2\,(+\infty)$ (cf. [43]).

D'autres propriétés géométriques de ces espaces muni de la norme de Luxemburg, sont caractérisées : l'uniforme convexité locale et la H-propriété (cf. [8]), la B-convexité et la non l_n^1 (cf.[12]), la k-convexité (cf. [7]).

Chapitre 3

Espaces de Calderon-Lozanovskii généralisés

Les espaces de Calderon-Lozanovskii sont générés par deux lattices de Banach E_1, E_2 et une fonction d'Orlicz φ. En 1997, P. Foralewski et H. Hudzik dans [21] ont considéré le cas d'une fonction φ d'Orlicz dépendante d'un paramètre (ou fonction de Musielak-Orlicz). Ils introduisent ainsi la classe des espaces de Calderon-Lozanovskii généralisés. Cette généralisation été faite dans le cadre d'une étude globale de quelques propriétés topologiques de la classe des espaces dits de type Musielak-Orlicz. Dans [20] une étude des propriétés géométriques a été initiée. Dans ce contexte, différents concepts et propriétés ont été étendus : La condition Δ_2, la stricte et l'uniforme convexité de la fonction φ.
Dans ce chapitre nous introduisons la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques qui est une sous classe d'un espace de Calderon-Lozanovskii généralisé. Nos résultats de convergence seront énoncés.

3.1 Présentation des espaces de Calderon-Lozanovskii généralisés

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré (μ une mesure complète, σ-finie et non atomique). $L^0 = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ désignera l'espace des fonctions $\Sigma-$mesurable définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.1. *Une fonction*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Omega \times \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (t,u) & \mapsto & \varphi(t,u), \end{array}$$

est dite de Musielak-Orlicz lorsque :

1. *pour tout u dans $\mathbb{R}_+$, $\varphi(.,u)$ est une fonction Σ-mesurable sur Ω,*
2. *pour μ-p.p. t dans Ω, $\varphi(t,.)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en zero et qui est non identiquement nulle.*

Exemples 3.1. 1. *Pour $p > 1$, la fonction :*

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_1: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (t,u) & \mapsto & \varphi_1(t,u) = \dfrac{u^p}{t}, \end{array}$$

est bien une fonction de Musielak-Orlicz.

2. *Soit $P : \Omega \longrightarrow [1, +\infty[$ une fonction Σ-mesurable sur Ω. Alors*

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_2: & \Omega \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (t,u) & \mapsto & \varphi_2(t,u) = u^{P(t)}, \end{array}$$

est une fonction de Musielak-Orlicz.

Quelques propriétés de la fonction φ.

1. $\forall t \in \Omega$, $\varphi(t,.)$ admet une dérivée à droite $p(t,.)$ qui est croissante vers l'infini et de plus :
$$\varphi(t,u) = \int_0^u p(t,s)ds.$$
2. $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \Omega$
$$up\,(t,u) \leq \varphi\,(t,2u) \leq 2up\,(t,2u)\,.$$

Supposons maintenant que φ est une fonction de Musielak-Orlicz telle que pour tout $t \in \Omega$, $\varphi(t,.)$ ne s'annule qu'en zero. Pour tout $t \in \Omega$ la fonction $\varphi(t,.)$ est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Notons par ψ_φ la fonction définie comme suit :

$$\begin{array}{rlcl} \psi_\varphi: & \Omega \times \mathbb{R}_+^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (t,u,v) & \mapsto & \begin{cases} v\varphi^{-1}(t,\frac{u}{v}) & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

où, pour tout t fixé, $\varphi^{-1}(t,.)$ est la réciproque de la fonction $\varphi(t,.)$. Il est facile de voir que $\psi_\varphi(t,.,.)$ est continue, concave et homogène sur $\mathbb{R}_+^2$.

Remarque 3.1. *Notons par C l'ensemble des fonctions ψ_φ définies sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui sont continues, concaves et homogènes sur $\mathbb{R}_+^2$, telles que pour μ-p.p. t dans Ω, $\psi_\varphi(t,u,v) = 0$ ssi $u = 0$ lorsque $v \neq 0$ et $\psi_\varphi(t,u,0) = 0$ pour tout*

u dans $\mathbb{R}_+$.
Alors, comme dans le cas sans paramètre, il existe une bijection entre l'ensemble C *et la classe des fonctions de Musielak-Orlicz.*
En effet, soit $\psi \in C$*, il suffit de prendre comme fonction de Musielak-Orlicz* $\varphi(t,.)$ *la fonction réciproque de* $\psi(t,.,1)$.

Définition 3.2. *Pour tout couple de lattices de Banach* (E_1, E_2)*, l'espace de Calderon-Lozanovskii généralisé, noté par* $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ *est défini comme suit :*

$$\begin{aligned}\psi_\varphi(E_1, E_2) = \ & \{x \in L^0 : |x(.)| \leqslant \lambda\psi_\varphi(., |x_1(.)|, |x_2(.)|)\mu\text{-}p.p. \\ & \quad \textit{pour un certain } \lambda > 0 \textit{ et } x_i \in B(E_i), (i = 1, 2)\},\end{aligned}$$

où $B(E_i)$ *dénote la boule unité de* $E_i, (i = 1, 2)$.

Une norme sur l'espace $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} = \inf \ & \{\lambda > 0 : |x(.)| \leq \lambda\psi_\varphi(., |x_1(.)|, |x_2(.)|)\mu\text{-p.p.} \\ & \quad \text{pour certains } x_i \in B(E_i), (i = 1, 2)\}\end{aligned}$$

Théorème 3.1. *Le couple* $(\psi_\varphi(E_1, E_2), \|.\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)})$ *est un lattice de Banach.*

Ce résultat est cité dans [21], mais sans démonstration, ni référence. Ici nous présentons une démonstration en reprenant les calculs faits par L. Maligranda dans [40] pour les espaces de Calderon-Lozanovski (cas sans paramètre).
Démonstration. La propriété de lattice est immédiate. Pour montrer la complétude de l'espace $(\psi_\varphi(E_1, E_2), \|.\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)})$, il suffit de vérifier l'inégalité :

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \right\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)},$$

pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ (caractérisation de la complétude d'un lattice).
Soit donc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de l'espace $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} < +\infty.$$

Pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un $\lambda_n > 0$ et $x_n^i \in B(E_i)(i = 1, 2)$ vérifiant :

$$|x_n(t)| \leq \lambda_n \psi_\varphi\left(t, \left|x_n^1(t)\right|, \left|x_n^2(t)\right|\right) \ \mu p.p.$$

et

$$\lambda_n \leq \|x_n\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} + 2^{-n}\varepsilon.$$

Pour un t fixé dans Ω, en utilisant l'inégalité de Jensen pour la fonction concave et homogéne $\psi_\varphi(t,.,.)$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n(t)| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\psi_\varphi\left(t,\left|x_n^1(t)\right|,\left|x_n^2(t)\right|\right)\\ &\leq \psi_\varphi\left(t,\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left|x_n^1(t)\right|,\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left|x_n^2(t)\right|\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\psi_\varphi\left(t,\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left|x_n^1(t)\right|}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n},\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left|x_n^2(t)\right|}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n}\right).\end{aligned}$$

Pour $i=1,2$ posons

$$x^i=\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left|x_n^i(t)\right|}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n},$$

alors, comme

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left|x_n^i\right|\right\|_{E_i} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\left\|x_n^i\right\|_{E_i}\\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n,\end{aligned}$$

il vient que $x^i\in B(E_i),(i=1,2)$ et par conséquent $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|x_n|\in\psi_\varphi(E_1,E_2)$, avec une norme

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|\right\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\|x_n\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}+2^{-n}\varepsilon\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}+\varepsilon.\end{aligned}$$

Maintenant, ε étant arbitraire, on déduit que :

$$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|\right\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)},$$

ce qui nous prouve la complétude de l'espace $\psi_\varphi(E_1,E_2)$ et en même temps l'inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}$.
L'homogénéité de $\|.\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}$ est claire, il reste donc à montrer que $\|.\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}$ ne s'annule qu'en zero. Pour cela supposons que $\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}=0$.
Alors, pour tout entier naturel n, il existe des fonctions $x_n^i\in E_i$ avec $\|x_n^i\|_{E_i}\leq 1$, $i=1,2$ telles que

$$\begin{aligned}|x(.)| &\leq n^{-2}\psi_\varphi\left(.,\left|x_n^1(.)\right|,\left|x_n^2(.)\right|\right)\\ &= \psi_\varphi\left(.,n^{-2}\left|x_n^1(.)\right|,n^{-2}\left|x_n^2(.)\right|\right).\end{aligned}$$

Mais, pour $i = 1, 2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\| n^{-2} x_n^i \right\|_{E_i} < \infty$$

d'où, pour $i = 1, 2$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} x_n^i(t) = 0 \ \mu\text{-p.p.},$$

et donc $x = 0$ μ-p.p.. Ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 3.2.

$$\begin{aligned}\psi_\varphi(E_1, E_2) = \quad & \{x \in L^0 : |x(.)| = \psi_\varphi(., |x_1(.)|, |x_2(.)|)\mu\text{-}p.p. \\ & \textit{pour certains } x_i \in E_i, (i = 1, 2)\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} = \inf \quad & \{\max(\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}) : |x(.)| = \psi_\varphi(., |x_1(.)|, |x_2(.)|)\mu\text{-}p.p. \\ & \textit{pour certains } x_i \in E_i, (i = 1, 2)\}\end{aligned}$$

Une autre norme définie sur ces espaces est celle notée par $\|.\|^0_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}$, dite de type Orlicz,

$$\begin{aligned}\|.\|^0_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} = \inf \quad & \{\|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2} : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \\ & \text{avec } |x(.)| = \psi_\varphi(., |x_1(.)|, |x_2(.)|)\mu\text{-p.p.}\}\end{aligned}$$

sous des conditions supplémentaire sur la fonction φ, les espaces de Calderon-Lozanovskii généralisés $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ sont des espaces intermédiaires entre les lattices de Banach E_1 et E_2.

Théorème 3.2. *Soit φ une fonction de Musielak-Orlicz vérifiant :*

1. *$\forall t \in \Omega$, $\varphi(t, .)$ ne s'annule qu'en zero,*
2. *$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi^{-1}(., x)$ est bornée et telle que $\inf_{t\in\Omega} \varphi^{-1}(t, x) = \alpha(x) > 0$.*

Alors, les espaces de Calderon-Lozanovskii généralisés $\psi_\varphi(E_1, E_2)$ sont des espaces intermédiaires entre E_1 et E_2.

Démonstration. Soit $x \in E_1 \cap E_2$ et $\|x\|_{E_1\cap E_2} \leq 1$.
Comme $\forall t \in \Omega$,

$$\begin{aligned}|x(t)| &= \frac{\psi_\varphi(t, |x(t)|, |x(t)|)}{\varphi^{-1}(t, 1)} \\ &\leq \frac{\psi_\varphi(t, |x(t)|, |x(t)|)}{\alpha(1)},\end{aligned}$$

il vient que $x \in \psi_\varphi(E_1, E_2)$ et de plus $\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)} \leq \dfrac{1}{\alpha(1)}$.
D'un autre coté, si $|x(t)| \leq \lambda\psi_\varphi(t, |x_1(t)|, |x_2(t)|)$ avec $\|x_i\|_{E_i} \leq 1$, $i = 1, 2$,

$$|x| = \lambda\left(|x_1 h| + |x_2 h|\right),$$

où $h = \dfrac{|x|}{\lambda\left(|x_1| + |x_2|\right)}$ sur le support de la fonction $g = (|x_1| + |x_2|)$ et $h = 0$ ailleurs. Nous aurons donc sur le support de g (en utilisant l'homogénéité de $\psi_\varphi(t, ., .)$),

$$\begin{aligned}
|h(t)| &\leq \frac{\lambda\psi_\varphi(t, |x_1(t)|, |x_2(t)|)}{\lambda\left(|x_1(t)| + |x_2(t)|\right)} \\
&\leq \psi_\varphi\left(t, \frac{|x_1(t)|}{|x_1(t)| + |x_2(t)|}, \frac{|x_2(t)|}{|x_1(t)| + |x_2(t)|}\right) \\
&\leq \psi_\varphi(t, 1, 1) \\
&= \varphi^{-1}(t, 1) \\
&\leq \sup_{t\in\Omega}\varphi^{-1}(t, 1).
\end{aligned}$$

Finalement $h \leq \sup\limits_{t\in\Omega}\varphi^{-1}(t, 1) = \beta(1)$ et

$$\begin{aligned}
\|x\|_{E_1+E_2} &\leq \lambda\left(\|x_1 h\|_{E_1} + \|x_2 h\|_{E_2}\right) \\
&\leq 2\lambda\beta(1),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|x\|_{E_1+E_2} \leq 2\beta(1)\,\|x\|_{\psi_\varphi(E_1,E_2)}.$$

□

Remarque 3.3. *Dans le cas où Ω est un compact. Une fonction φ de Musielak-Orlicz telle que :*

a. pour tout $t \in \Omega$, $\varphi(t, .)$ ne s'annule qu'en zero,

b. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(., x)$ est une fonction continue sur Ω.

est un exemple de fonction vérifiant les conditions du théorème précédent.

3.2 Espaces de type Musielak-Orlicz

Lorsque le deuxième lattice de Banach est l'espace L^∞, l'espace de Calderon-Lozanovskii généralisé associé est noté par E_φ à la place de $\psi_\varphi(E, L^\infty)$. Dans ce cas l'espace E_φ est l'espace modulaire suivant :(cf. [21],[40])

$$\begin{aligned}
\psi_\varphi(E, L^\infty) = E_\varphi &= \{x \in L^0 : \varphi\left(., \lambda|x\left(.\right)|\right) \in E \quad \text{pour un certain } \lambda > 0\} \\
&= \left\{x \in L^0 : \rho_\varphi^E\left(\lambda x\right) < +\infty \quad \text{pour un certain } \lambda > 0\right\}.
\end{aligned}$$

où ρ_φ^E est la modulaire associée donnée par l'expression :

$$\rho_\varphi^E\left(x\right) = \begin{cases} \|\varphi\left(., \lambda|x\left(.\right)|\right)\|_E & \text{si } \varphi\left(., \lambda|x\left(.\right)|\right) \in E, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, la norme $\|.\|_{\psi_\varphi(E,E_\infty)}$ coincide avec la norme de Luxemburg $\|.\|_\varphi^E$ définie par

$$\|x\|_\varphi^E = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\varphi^E\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\},$$

En effet, si $x \in E_\varphi$ et $\|x\|_\varphi^E \leq \lambda$, alors

$$\left\|\varphi\left(., \frac{|x(.)|}{\lambda}\right)\right\|_E \leq 1.$$

Comme

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \lambda\varphi^{-1}\left(t, \varphi\left(t, \frac{|x(t)|}{\lambda}\right)\right) \\ &= \lambda\psi_\varphi\left(t, \varphi\left(t, \frac{|x(t)|}{\lambda}\right), 1\right), \end{aligned}$$

on aura $x \in \psi_\varphi(E, L^\infty)$ et $\|x\|_{\psi_\varphi(E,L^\infty)} \leq \lambda$ c'est à dire que

$$\|x\|_{\psi_\varphi(E,L^\infty)} \leq \|x\|_\varphi^E.$$

D'un autre coté, si x est dans $\psi_\varphi(E, L^\infty)$ et $\|x\|_{\psi_\varphi(E,L^\infty)} \leq \lambda$, alors il existe $x_0 \in E$ et $x_1 \in L^\infty$ avec $\|x_0\|_E \leq 1$, $\|x_1\|_{L^\infty} \leq 1$ tels que

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \lambda\psi_\varphi(t, |x_0(t)|, |x_1(t)|) \\ &\leq \lambda\psi_\varphi(t, |x_0(t)|, 1) \\ &= \lambda\varphi^{-1}(t, |x_0(t)|); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi\left(t, \frac{|x(t)|}{\lambda}\right) &\leq \varphi\left(t, \varphi^{-1}\left(t, |x_0(t)|\right)\right) \\ &\leq |x_0(t)| \in E. \end{aligned}$$

Finalement x est dans E_φ avec $\|x\|_\varphi^E \leq \|x\|_{\psi_\varphi(E,L^\infty)}$

Exemples 3.2. *1.* ***Les espaces de Musielak-Orlicz***

Si E est l'espace de Lebesgue L^1, l'espace $\psi_\varphi(L^1, L^\infty)$ est l'espace de Musielak-Orlicz L^φ, plus précisément :

$$L^\varphi = \left\{x \in L^0 : \int_\Omega \varphi(t, \lambda|x(t)|)d\mu < +\infty, \textit{pour un certain } \lambda > 0\right\}$$

2. ***Les espaces de Stepanoff-Musielak-Orlicz***

Lorsque E est l'espace de Stepanoff $S_l^1(\mathbb{R})$, l'espace $\psi_\varphi(S_l^1, L^\infty)$ est l'espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz, noté par $S_l^\varphi(\mathbb{R})$:

$$S_l^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{x \in L^0 : \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l}\int_s^{s+l} \varphi(t, \lambda|x(t)|)dt < +\infty \textit{ pour un certain } \lambda > 0\right\}.$$

3. ***Les espaces de Weyl-Musielak-Orlicz***
   Lorsque E est l'espace de Weyl $W^1(\mathbb{R})$, E_φ est l'espace de Weyl-Musielak-Orlicz, noté par $W^\varphi(\mathbb{R})$:
$$W^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ x \in L^0 : \lim_{l \to +\infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_s^{s+l} \varphi(t, \lambda |x(t)|) dt < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$
4. ***Les espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz***
   Lorsque E est l'espace de Besicovitch $B^1(\mathbb{R})$, E_φ est l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz, noté par $B^\varphi(\mathbb{R})$:
$$B^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ x \in L^0 : \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t, \lambda |x(t)|) dt < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$

Remarque 3.4. *La norme de type Orlicz dans E_φ est égale à celle d'Amemiya :*
$$\begin{aligned}
\|x\|^0_{E_\varphi} &= \inf \{ \|x_0\|_E + \|x_1\|_{L^\infty} : |x(t)| = \psi_\varphi(t, |x_0(t)|, |x_1(t)|), x_0 \in E, x_1 \in L^\infty \} \\
&= \inf \{ \|x_0(t)\|_E + c : |x(t)| \le \psi_\varphi(t, |x_0(t)|, c), x_0 \in E, c > 0 \} \\
&= \inf \left\{ \|x_0\|_E + c : c\varphi(t, \tfrac{|x(t)|}{c}) \le |x_0(t)|, x_0 \in E, c > 0 \right\} \\
&= \inf \left\{ c \left\| \varphi(., \tfrac{|x(.)|}{c}) \right\|_E + c : c > 0 \right\} \\
&= \inf_{k>0} \left[\frac{1}{k} \{ 1 + \|\varphi(., k|x(.)|)\|_E \} \right].
\end{aligned}$$

3.3 Géométrie des espaces de type Musielak-Orlicz

Comme dans le cas sans paramètre, l'étude des questions géométriques dans l'espace E_φ, s'est faite sous la condition que le lattice de Banach E vérifie la propriété de Fatou. Cette propriété se transmet alors naturellement à l'espace E_φ.
La condition Δ_2 pour une fonction de Musielak-Orlicz est donnée par la définition suivante (cf. [47]) :

Définition 3.3. ***(Condition** Δ_2^E**)*** *On dit qu'une fonction de Musielak-Orlicz φ satisfait la condition Δ_2^E et on ecrit $\varphi \in \Delta_2^E$ s'il existe une constante $k > 0$ et une fonction positive h, h dans E tels que l'inégalité suivante :*
$$\varphi(t, 2u) \le k\varphi(t, u) + h(t),$$
soit vérifiée pour μ-p.p. t dans Ω et pour tout u dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.5. *Cette condition peut être reformulée d'une manière équivalente sous la forme suivante :*
$$\varphi(t, 2u) \le k_1 \varphi(t, u),$$
pour μ-p.p. t dans Ω et pour tout $u \ge f(t)$, où f est une fonction positive sur Ω telle que $\varphi \circ 2f \in E$ et $k_1 > 0$. (cf. [30])

La condition Δ_2^E sur la fonction de Musielak-Orlicz permet de conserver les équivalences (2.3) (2.4) et (2.5) (cf. [21]).

Définition 3.4. *On dit qu'une fonction de Musielak-Orlicz $\varphi(t,x)$ est strictement convexe lorsque :*

$$\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\left\{\varphi(t,u) + \varphi(t,v)\right\},$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$ et pour μ-p.p. $t \in \Omega$.

Une généralisation naturelle de la notion d'uniforme convexité au cadre des fonctions d'Orlicz à paramètre est celle introduite par J. Musielak :

Définition 3.5. ***(J. Musielak [47])*** *Une fonction de Musielak-Orlicz $\varphi(t,u)$ est dite* ***uniformément convexe sur*** *$\mathbb{R}_+$ si pour tout $a \in]0,1[$, il existe $\delta(a) \in]0,1[$ tel que l'inégalité suivante :*

$$\varphi(t, \frac{u+au}{2}) \leq (1-\delta(a))\frac{\varphi(t,u)+\varphi(t,au)}{2},$$

soit vraie pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et pour μ p.p. $t \in \Omega$.

La définition précédente peut être reformulée comme suit :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $p(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1-p(\varepsilon)\right)\left\{\varphi(t,u) + \varphi(t,v)\right\},$$

pour tous u, v satisfaisant $|u-v| \geq \varepsilon \max(u,v)$.
Avec ces généralisations de la condition Δ_2^E, de la stricte et l'uniforme convexité au cas des fonction d'Orlicz à paramètre, P. Foralewskii, dans [20], a montré que les théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 s'étendent aux espaces de type Musielak-Orlicz E_φ.
Dans le même article, il donne des conditions suffisantes sur l'espace E et la fonction de Musielak-Orlicz φ qui garantissent l'uniforme convexité de l'espace E_φ, plus exactement :

Théorème 3.3. ***(P. Foralewskii, 1998 [20])*** *Soit E uniformément monotone et φ une fonction de Musielak-Orlicz strictement convexe, vérifiant la condition Δ_2^E et satisfaisant la condition suivante :*
$\forall a \in]0,1[, \exists \delta(a) \in]0,1[, \exists g_a \in (L^0)_+$ avec $\varphi \circ g \in E$ tels que pour μ-p.p. $t \in \Omega$ et pour tout $u \geq g_a(t)$:

$$\varphi\left(t, \frac{u+au}{2}\right) \leq \frac{1-\delta(a)}{2}\left\{\varphi(t,u) + \varphi(t,au)\right\}.$$

Alors E_φ est uniformement convexe.

Des conditions nécessaires et suffisantes pour la stricte convexité de l'espace E_φ ont été obtenues récemment dans [52].

3.4 L'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions p.p.

3.4.1 Définitions et notations

Dans la suite nous considérons une classe restreinte de fonctions de Musielak-Orlicz.
Soit donc $\varphi : \mathbb{R}\times [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continue sur $\mathbb{R}\times [0,+\infty[$ telle que :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}, \varphi(t,.)$ est une fonction convexe sur $[0,+\infty[$ t.q. $\varphi(t,0) = 0$.
2. Pour tout $u \in [0,+\infty[\,,\ \varphi(.,u)$ est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, la période T est fixée et indépendante de $u \in [0,+\infty[$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $T = 1$
3. Pour tout $\alpha > 0$, $\inf\{\varphi(t,\alpha) : t \in \mathbb{R}\} = \phi(\alpha) > 0$.

Remarque 3.6. *Dans la définition précédente, la condition* 3. *est équivalente à la suivante :*

$3'$. *pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t,x) > 0$.

En effet, cela découle du fait que la fonction $\varphi(.,\alpha)$ *est périodique et continue sur* $\mathbb{R}$.

Soit maintenant $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz :

$$\begin{aligned} B^{\varphi}(\mathbb{R}) &= \left\{f \in M(\mathbb{R}) : \varphi(.,\alpha|f(.)|) \in B^1(\mathbb{R}),\ \text{pour un certain } \alpha > 0\right\} \\ &= \left\{f \in M(\mathbb{R}) : \rho_{\varphi}(\alpha f) < +\infty,\ \text{pour un certain } \alpha > 0\right\} \end{aligned}$$

où $M(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions Lebesgue mesurables et

$$\begin{array}{rlcl} \rho_{\varphi} : & M(\mathbb{R}) & \to & [0,+\infty] \\ & f & \mapsto & \rho_{\varphi}(f) = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t,|f(t)|)\,dt \end{array}$$

est une pseudomodulaire convexe. L'espace $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ est muni naturellement de la pseudonorme :

$$\|x\|_{\varphi} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{\varphi}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

En considérant la fermeture de l'ensemble A (voir formule (2.6)) par rapport à la modulaire ρ_{φ} (resp. par rapport à la norme $\|.\|_{\varphi}$), nous obtenons respectivement, les deux espaces suivants :

$$\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}) = \left\{f \in B^{\varphi}(\mathbb{R}) : \exists f_n \in A, \exists k_0 > 0, \lim_{n\to+\infty} \rho_{\varphi}(k_0(f_n - f)) = 0\right\},$$

et

$$\begin{aligned} B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in B^{\varphi}(\mathbb{R}) : \exists f_n \in A, \forall k > 0, \lim_{n \to +\infty} \rho_{\varphi}(k(f_n - f)) = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in B^{\varphi}(\mathbb{R}) : \exists f_n \in A, \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\varphi} = 0 \right\} \end{aligned}$$

$\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ et $B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ sont les nouvelles classes de fonctions presque périodiques. Ces derniers espaces seront appelés espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. On a alors clairement les inclusions suivantes :

$$B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}) \subseteq \widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}) \subseteq B^{\varphi}(\mathbb{R}).$$

Remarque 3.7. *L'espace* $\left(\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}), \|.\|_{\varphi}\right)$ *est complet.*
En effet, $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ *est* ρ_{φ}*-fermé et donc* $\|.\|_{\varphi}$*-fermé dans* $B_{\varphi}(\mathbb{R})$ *qui est complet.*

3.4.2 Résultats de convergence et Lemmes techniques

Dans ce qui suit, nous présentons nos principaux lemmes techniques et résultats de convergence. Ces résultats constituent l'outil fondamental dans notre étude de la structure géométrique des espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. L'espace $B^1(\mathbb{R})$ ne possédant pas la propriété de Fatou, nous avons établi une propriété "analogue" dans l'espace $B^1_{p.p.}(\mathbb{R})$. Cette dernière se transmet à l'espace $B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ et nous permet d'avoir les liens nécessaires entre la modulaire ρ_{φ} et la norme de Luxemburg associée $\|.\|_{\varphi}$. Notre démarche est inspirée de l'étude faite dans le cadre des espaces de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques, ainsi que celle faite dans le cadre des espaces de Musielak-Orlicz.
Soit $\Sigma = \Sigma(\mathbb{R})$ la $\sigma-$algèbre de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mu}$ la fonction d'ensemble définie sur Σ par :

$$\bar{\mu}(A) = \overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \chi_A(t)\, dt = \overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{1}{2T} \mu(A \cap [-T, +T]),$$

où μ désignera ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.8.
- *Si* $E \in \Sigma$, $\mu(E)$ *est finie, alors* $\bar{\mu}(E)$ *est nulle.*
- $\bar{\mu}$ *n'est pas* $\sigma-$*additive, il suffit pour le voir de remarquer que* $\bar{\mu}(\mathbb{R}) = 1$ *alors que* $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]-n, +n[$ *et* $\bar{\mu}]-n, +n[= 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Définition 3.6. *Une suite* $\{f_n\} \subset B^{\varphi}(\mathbb{R})$ *est dite* $\bar{\mu}-$*convergente vers* $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ *et on écrit* $f_n \overset{\bar{\mu}}{\to} f$ *lorsque, pour tout* $\alpha > 0$ *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{\mu}\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\} = 0.$$

Lemme 3.1. *Soit*

$$\nu(A) = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t, \chi_A)\, dt.$$

Alors, la fonction d'ensemble $\bar{\mu}$ *est absolument continue par rapport à* ν*, i.e. : pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$(A \in \Sigma, \nu(A) < \delta) \Rightarrow (\bar{\mu}(A) < \varepsilon). \tag{3.1}$$

Démonstration. Supposons que l'assertion (3.1) soit fausse. Alors on peut trouver un certain réel strictement positif ε_0 tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existera un ensemble mesurable $E_n \in \Sigma$ vérifiant

$$\nu(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ et } \bar{\mu}(E_n) > \varepsilon_0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\nu(E_n) &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t, \chi_{E_n}(t))\, dt \\
&= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t, 1)\, \chi_{E_n}(t)\, dt \\
&\geq \phi(1)\, \bar{\mu}(E_n) \\
&\geq \phi(1)\, \varepsilon_0,
\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\nu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ $\square$

Lemme 3.2. *Soit* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset B^{\varphi}(\mathbb{R})$ *une suite convergente au sens de la modulaire vers* $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$*. Alors,* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *est* $\bar{\mu}$ *convergente vers* f*.*

Démonstration. Par un simple calcul, on peut voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_{\varphi}(f_n - f) = 0$ implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_{\phi}(f_n - f) = 0$.
Maintenant, il suffit juste de remarquer que la fonction ϕ est une fonction d'Orlicz : en effet :

$$\begin{aligned}
\phi :\ & [0, +\infty[&& \longrightarrow && \mathbb{R}^+ \\
& x && \longmapsto && \phi(x) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t, x),
\end{aligned}$$

est une fonction convexe sur $[0, +\infty[$ ne s'annulant qu'en zero.
Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_{\phi}(f_n - f) = 0$ (cf. [44]) assure que $f_n \overset{\bar{\mu}}{\to} f$. $\square$

Remarque 3.9. *Si la condition* $\inf\{\varphi(t,\alpha), t\in\mathbb{R}\} = \phi(\alpha) > 0, \forall\alpha > 0$ *n'est pas satisfaite, alors on peut se retrouver dans la situation d'une suite de fonctions convergente en modulaire sans qu'elle le soit en mesure* $\bar{\mu}$*, c'est le cas dans l'exemple suivant :*

Nous définissons $\varphi : \mathbb{R}\times [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *par* $\varphi(t,u) = f(t).u^2$ *où* $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ *est une fonction continue et périodique (avec une période* $T = 1$*) définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t\in\left[0,\frac{3}{8}\right] \\ 8t-3 & si \quad t\in\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right] \\ -8t+5 & si \quad t\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right] \\ 0 & si \quad t\in\left[\frac{5}{8},1\right] \end{cases}$$

Considérons aussi la fonction continue et périodique (avec une période $T = 1$*) définie comme suit :*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t\in\left[0,\frac{1}{4}\right[\\ -8t+3 & si \quad t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right[\\ 0 & si \quad t\in\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right[\\ 8t-5 & si \quad t\in\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right[\\ 1 & si \quad t\in\left[\frac{3}{4},1\right] \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\varphi(t,|h(t)|) = f(t)\ h^2(t) = 0\ \forall t\in\mathbb{R}$*, d'où* $\rho_\varphi(h) = 0$*. Mais* $\bar{\mu}\left\{t\in\mathbb{R}, |h(t)| \geq \frac{1}{2}\right\} \geq \frac{1}{2}$*.*

Lemme 3.3. *Soit* $h\in\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ *tel que* $\rho_\varphi(h) = a > 0$*. Alors, pour tout* $\bar{\theta}\in\,]0,1[$ *il existe des constantes positives* β, T_0 *et un ensemble* $\bar{G} = \{t\in\mathbb{R}, |h(t)| \leq \beta\}$ *tels que*

$$\mu\left\{\bar{G}\cap[-T,+T]\right\} \geq \bar{\theta}.2T, \tag{3.2}$$

pour tout $T \geq T_0$*.*

Démonstration. Il est clair que $h\in\widetilde{B}^{\phi}_{p.p.}(\mathbb{R})$. Alors, si $\rho_\phi(h) > 0$, la conclusion découle d'un résultat similaire pour la fonction ϕ sans paramètre (cf. [44]). La conclusion est immédiate pour $\rho_\phi(h) = 0$. $\square$

Lemme 3.4. *Soit* $g\in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$*. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *et* $T_0 > 0$ *tels que* $\rho_\varphi(g\chi_Q) \leq \varepsilon$*, pour tout ensemble mesurable* $Q\in\Sigma$ *vérifiant*

$$\mu\{Q\ \cap[-T,+T]\} \leq \delta.2T,$$

pour tout $T \geq T_{0.}$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que la quantité $\rho_\varphi(g)$ est strictement positive.

Soit $\varepsilon > 0$ et $P_\varepsilon \in A$ tels que

$$\rho_\varphi\left(2\left(g - P_\varepsilon\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilisant les propriétés de φ, nous avons $\varphi\left(t, 2\left|P_\varepsilon(t)\right|\right) \in C^0 p.p.$ (cf. [16]). Posons alors

$$M_\varepsilon = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi\left(t, 2\left|P_\varepsilon(t)\right|\right).$$

Nous choisissons $\bar{\theta} \in \left]0, 1\right[$ de sorte que $M_\varepsilon\left(1 - \bar{\theta}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, par le Lemme 3.3 il existe des constantes strictements positives β, T_0 et un ensemble $\bar{G} = \{t \in \mathbb{R}, |g(t)| \leq \beta\}$ pour lequel

$$\mu\left\{\bar{G} \cap [-T, +T]\right\} \geq \bar{\theta}.2T,$$

pour tout $T \geq T_0$,
D'où, en notant par $\bar{G}'$ l'ensemble complémentaire de $\bar{G}$, nous obtiendrons pour tout $T \geq T_0$

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{\bar{G}'\cap[-T,+T]} \varphi\left(t, |g(t)|\right) dt \qquad (3.3)\\
\leq\ & \frac{1}{2} \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{\bar{G}'\cap[-T,+T]} \left[\varphi\left(t, 2\left|g(t) - P_\varepsilon(t)\right|\right) + \varphi\left(t, 2\left|P_\varepsilon(t)\right|\right)\right] dt \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} M_\varepsilon\left(1 - \bar{\theta}\right) 2T.\frac{1}{2T} \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t, \beta)}.$$

Soit $Q \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $T \geq T_{0.}$

$$\mu\left\{Q\ \cap [-T, +T]\right\} \leq \delta.2T.$$

Alors, si $Q_1 = Q \cap \bar{G}$ et $Q_2 = Q \cap \bar{G}'$, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int\limits_{Q_1\cap[-T,T]}\varphi\left(t,\left|g\left(t\right)\right|\right)dt &\leq \frac{1}{2T}\int\limits_{Q_1\cap[-T,T]}\varphi\left(t,\beta\right)dt\\ &\leq \frac{1}{2T}\mu\left(Q_1\right)\sup_{t\in\mathbb{R}}\varphi\left(t,\beta\right)\\ &\leq \delta\sup_{t\in\mathbb{R}}\varphi\left(t,\beta\right)\\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

D'une manière similaire, en utilisant l'inégalité (3.3) nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int\limits_{Q_2}\varphi\left(t,\left|g\left(t\right)\right|\right)dt &\leq \frac{1}{2T}\int\limits_{\bar{G}'\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\left|g\left(t\right)\right|\right)dt\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{Q\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\left|g\left(t\right)\right|\right)dt\leq\varepsilon,$$

c'est à dire que $\rho_\varphi\left(g\chi_Q\right)\leq\varepsilon.$ $\square$

Proposition 3.1. *Soit $f\in B^{\varphi}_{p.p.}\left(\mathbb{R}\right)$. Alors, $\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\in B^{1}_{p.p}\left(\mathbb{R}\right)$ et en conséquence, la limite $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)dt$ existe et est finie.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de polynômes trigonométriques telle que $\left\|f_n-f\right\|_\varphi\to0$. En utilisant le Lemme 3.2 on a aussi $f_n\overset{\bar{\mu}}{\to}f$.

Soit $\bar{\theta}\in\left]0,1\right[$. Par le Lemme 3.3, il existe une constante strictement positive β pour laquelle $\bar{\mu}\left(\bar{G}\right)\geq\bar{\theta}$ où

$$\bar{G}=\left\{t\in\mathbb{R}:\left|f\left(t\right)\right|\leq\beta\right\}.$$

Pour $\alpha>0$ et

$$A_n^\alpha=\left\{t\in\mathbb{R}:\left|f_n\left(t\right)-f\left(t\right)\right|>\alpha\right\}.$$

On a $\left|f_n\left(t\right)\right|\leq\beta+\alpha,\forall t\in\bar{G}\cap\left(A_n^\alpha\right)'$.

Comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}\times\left[0,+\infty\right[$, elle est uniformément continue sur $[0,1]\times[0,\alpha+\beta]$. De plus, la périodicité de $\varphi\left(t,u\right)$ par rapport à $t\in\mathbb{R}$, fait que φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}\times\left[0,\alpha+\beta\right]$.

Alors, pour tout réel $\eta>0$, il existe $\alpha_\eta>0$ tel que pour tout $t\in\bar{G}\cap\left(A_n^\alpha\right)'$:

$$\left|\varphi\left(t,\left|f_n\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\Longrightarrow\left|f_n\left(t\right)-f\left(t\right)\right|>\alpha_\eta.$$

Mais $f_n \overset{\bar{\mu}}{\to} f$, d'où nous aurons aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{\mu} \left\{ t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)' : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \right\} = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \bar{\mu} \{ t \in \mathbb{R} : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \} \\
\leq \;& \bar{\mu} \left\{ t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)' : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \right\} \\
& + \bar{\mu} \left\{ t \in \left(\bar{G}\right)' : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \right\} \\
& + \bar{\mu} \{ t \in A_n^\alpha : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \} \\
\leq \;& \bar{\mu} \left\{ t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)' : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \right\} \\
& + \bar{\mu} \left((\bar{G})' \right) + \bar{\mu}(A_n^\alpha) \\
\leq \;& \bar{\mu} \left\{ t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)' : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \right\} \\
& + \left(1 - \bar{\theta}\right) + \bar{\mu}(A_n^\alpha).
\end{aligned}$$

Faisant tendre n vers l'infini, nous obtiendrons :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \bar{\mu} \{ t \in \mathbb{R} : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \} \leq \left(1 - \bar{\theta}\right).$$

Finalement, comme $\bar{\theta} \in]0,1[$ est arbitraire , on déduit que

$$\forall \eta > 0, \lim_{n\to+\infty} \bar{\mu} \{ t \in \mathbb{R} : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \eta \} = 0. \tag{3.4}$$

D'un autre coté, Par le Lemme 3.4, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel strictement positif δ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$tels que l'implication suivante :

$$(Q \in \Sigma, \bar{\mu}(Q) \leq \delta) \Longrightarrow \max\left(\rho_\varphi(f\chi_Q), \rho_\varphi(f_n\chi_Q)\right) \leq \varepsilon,$$

soit vérifiée pour tout entier $n \geq n_0$. Posons

$$E_n^\varepsilon = \{ t \in \mathbb{R} : |\varphi(t,|f_n(t)|) - \varphi(t,|f(t)|)| \geq \varepsilon \}.$$

Par la propriété (3.4) on sait que pour tout entier $n \geq n_0$, $\bar{\mu}(E_n^\varepsilon) \leq \delta$. Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
& \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left|\varphi\left(t, \left|f_n\left(t\right)\right|\right) - \varphi\left(t, \left|f\left(t\right)\right|\right)\right| dt \\
\leq\ & \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{E_n^{\varepsilon}\cap[-T,T]} \left|\varphi\left(t, \left|f_n\left(t\right)\right|\right) - \varphi\left(t, \left|f\left(t\right)\right|\right)\right| dt \\
& + \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{(E_n^{\varepsilon})'\cap[-T,T]} \left|\varphi\left(t, \left|f_n\left(t\right)\right|\right) - \varphi\left(t, \left|f\left(t\right)\right|\right)\right| dt. \\
\leq\ & 2\varepsilon + \varepsilon \\
=\ & 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Maintenant, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il vient que :

$$
\lim_{n\to+\infty} \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left|\varphi\left(t, \left|f_n\left(t\right)\right|\right) - \varphi\left(t, \left|f\left(t\right)\right|\right)\right| dt = 0.
$$

Il reste à voir que $\varphi\left(t, \left|f_n\left(t\right)\right|\right) \in C^0 p.p.$, ce qui est une conséquence directe des propriétés de la fonction φ et du fait que $f_n \in A$. (cf. [16]) $\square$

Lemme 3.5. *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B^1(\mathbb{R})$ *une suite* $\bar{\mu}$*-convergente vers* $f \in B^1(\mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe une fonction* $g \in B^1_{p.p}(\mathbb{R})$ *tel que* $\max\left(\left|f_n\right|, \left|f\right|\right) \leq g$. *Alors*

$$
\rho_1\left(f_n\right) \to \rho_1\left(f\right).
$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ la constantes associé à g dans le Lemme 3.4. Posons alors,

$$
A_n^{\varepsilon} = \left\{t \in \mathbb{R} : \left|f_n\left(t\right) - f\left(t\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.
$$

Comme $f_n \xrightarrow{\bar{\mu}} f$, il s'ensuit que $\bar{\mu}\left(A_n^{\varepsilon}\right) \leq \delta$ pour tout entier $n \geq n_0$. Utilisons une deuxième fois le Lemme 3.4, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\rho_1\left(\left|f_n - f\right| \chi_{A_n^{\varepsilon}}\right) &\leq \rho_1\left(2g\chi_{A_n^{\varepsilon}}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, pour tout entier $n \geq n_0$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
\rho_1\left(\left|f_n - f\right|\right) &\leq \rho_1\left(\left|f_n - f\right| \chi_{A_n^{\varepsilon}}\right) + \rho_1\left(\left|f_n - f\right| \chi_{(A_n^{\varepsilon})'}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_1(f_n)=\rho_1(f).$$

□

Lemme 3.6. *Soit* $f\in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$. *Alors, la fonctionnelle* $\lambda\mapsto\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

Démonstration. Notons que $f\in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ entraîne que $\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right)<+\infty$ pour tout réel $\lambda>0$.
Soit alors $\lambda_0\in]0,+\infty[$ et $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres réels convergente vers λ_0.

Nous avons, pour tout entier $n\geq n_0$

$$\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda_n}-\frac{f}{\lambda_0}\right)\leq\left|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_0}\right|\rho_\varphi(f),$$

d'où,

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda_n}-\frac{f}{\lambda_0}\right)=0.$$

Du Lemme 3.2, on sait que

$$\frac{f}{\lambda_n}\xrightarrow{\bar{\mu}}\frac{f}{\lambda_0},$$

par suite (voir la preuve de la Proposition 3.1),

$$\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{\lambda_n}\right)\xrightarrow{\bar{\mu}}\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{\lambda_0}\right).$$

De plus,

$$\max\left(\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{\lambda_n}\right),\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{\lambda_0}\right)\right)\leq\varphi\left(t,\frac{2}{\lambda_0}|f(t)|\right),$$

et par la Proposition 3.1, on a :

$$\varphi\left(t,\frac{2}{\lambda_0}|f(t)|\right)\in B^1_{p.p}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent, et en utilisant le Lemme 3.5, nous avons

$$\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda_n}\right)\to\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda_0}\right).$$

Ce qui signifie que $\lambda\mapsto\rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right)$ est continue sur$]0,+\infty[$. □

Corollaire 3.1. *Soit* $f\in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$. *Alors,*

1. $\|f\|_\varphi \leq 1$ *si et seulement si* $\rho_\varphi(f) \leq 1$.
2. $\|f\|_\varphi = 1$ *si et seulement si* $\rho_\varphi(f) = 1$.
3. $\forall \varepsilon \in]0,1[\,, \exists \delta(\varepsilon) \in]0,1[$ *tel que* $\rho_\varphi(f) \leq \delta(\varepsilon)$ *implique* $\|f\|_\varphi \leq \varepsilon$.

Démonstration. Ces équivalences sont une conséquence directe du Lemme 3.6 et des arguments usuels de la théorie des espaces d'Orlicz (cf. [14], [53]) □
Rappelons que le résultat similaire dans les espaces de Musielak-Orlicz a lieu sous la condition supplémentaire $\Delta_2^{L^1}$. Cette condition n'est pas nécessaire dans notre cas car nous nous sommes restreint à $f \in B^\varphi_{p.p.}(\mathbb{R})$.

- Dans la suite nous posons $\Delta_2^{B^1} = \Delta_2$.

Lemme 3.7. *Soit* $\varphi \in \Delta_2$. *Alors, la condition suivante, notée par* Δ_2' *est satisfaite :*
Pour tout $\theta \in]0,1[$ *et* $\varepsilon > 0$ *il existe* $h_\varepsilon \in B^\varphi(\mathbb{R})$, $k' > 1$ *et un ensemble* $G \in \Sigma$ *tels que :*

$$\varphi(t, 2u) \leq k'\varphi(t,u) \quad \forall u \geq h_\varepsilon(t), \forall t \in G \tag{3.5}$$

avec $\bar{\mu}(G') < \theta$ *et* $\rho_\varphi(h_\varepsilon) < \varepsilon$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \Delta_2$. Alors, il existe $k > 1$ et $h \in B^\varphi(\mathbb{R})$ tels que

$$\varphi(t, 2u) \leq k\varphi(t,u),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u \geq h(t)$.

Remarquons qu'on peut supposer dans cette définition que $h(t) \geq \delta$, $\forall t \in \mathbb{R}$ pour un certain $\delta > 0$. .

Du Lemme 3.3, pour tout $\theta \in]0,1[$ il existe $\beta > 0$ pour lequel $\bar{\mu}(G') \leq \theta$ où

$$G = \{t \in \mathbb{R} : |h(t)| \leq \beta\}.$$

Posons maintenant

$$h_1(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si} \quad t \in G \\ \beta & \text{si} \quad t \in G' \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$ nous avons $\rho_\varphi\left(\dfrac{h_1}{\eta_0}\right) < \varepsilon$ pour un certain $\eta_0 \geq 1$.

Posons $h_\varepsilon = \dfrac{h_1}{\eta_0}$ et $k' = \max(k, k_1)$ où

$$k_1 = \max\left(\frac{\varphi(t,2u)}{\varphi(t,u)},\ u \in \left[\frac{\delta}{\eta_0}, \beta\right],\ t \in \mathbb{R}\right),$$

nous obtiendrons (3.5). □

Lemme 3.8. *Soit* $f \in \widetilde{B}^{\varphi}_{p.p}(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \Delta_2$. *Alors, pour tout* $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ *il existe* $\delta(\varepsilon) \in \left]0,1\right[$ *tel que*

$$\rho_\varphi(f) \leq 1-\varepsilon \Rightarrow \|f\|_\varphi \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

Démonstration. Soit $p(t,u)$ la dérivée à droite de $\varphi(t,u)$ par rapport à la deuxième variable u. Alors (cf. [14], [47])

$$up(t,u) \leq \varphi(t,2u) \leq 2up(t,2u) \ \ \forall u \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour $\lambda \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, nous avons,

$$\frac{\varphi\left(t,\frac{u}{1-\lambda}\right)}{\varphi(t,u)} = 1 + \int_u^{\frac{u}{1-\lambda}} \frac{p(t,s)}{\varphi(t,u)} ds$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi\left(t,\frac{u}{1-\lambda}\right)}{\varphi(t,u)} - 1\right| &\leq \left(\left|\frac{u}{1-\lambda} - u\right| / \varphi(t,u)\right) . \max\left(p\left(t,\frac{u}{1-\lambda}\right), p(t,u)\right) \\
&\leq \left|\frac{1}{1-\lambda} - 1\right| u . \left(\frac{p(t,2u)}{\varphi(t,u)}\right) \qquad (3.6) \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{\lambda}{1-\lambda} . \frac{\varphi(t,4u)}{\varphi(t,u)} \\
&\leq \lambda \frac{\varphi(t,4u)}{\varphi(t,u)} . \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$f_\lambda(t,u) = \frac{\varphi\left(t,\frac{u}{1-\lambda}\right)}{\varphi(t,u)}.$$

De l'inégalité (3.7), pour tous $u \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$f_\lambda(t,u) \leq 1 + \lambda \frac{\varphi(t,4u)}{\varphi(t,u)},$$

et en utilisant la condition Δ_2', nous obtiendrons

$$f_\lambda(t,u) \leq 1 + (k')^2 \lambda, \ \forall u \geq h_\varepsilon(t), \forall t \in G,$$

avec $\bar{\mu}(G') < \theta$ et $\rho_\varphi(h_\varepsilon) < \varepsilon$.

De plus, il est facile de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tel que $|\lambda| \leq \delta_1(\varepsilon)$ implique que

$$\begin{aligned}
f_\lambda(t,u) &\leq 1 + (k')^2 \lambda \\
&\leq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}.
\end{aligned}$$

On peut prendre par exemple

$$\delta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(2k'^2)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

D'où

$$f_{\delta_1(\varepsilon)}(t,u) \leq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

C'est à dire :

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{u}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right) \leq \varphi(t,u),$$

$\forall u \geq h_\varepsilon(t), \forall t \in G$ avec $\bar{\mu}(G') < \theta$ et $\rho_\varphi(h_\varepsilon) < \varepsilon$. Cette inégalité reste vraie pour tout réel $\delta \leq \delta_1(\varepsilon)$ (on peut supposer $\delta_1(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}$). Supposons maintenant que $\rho_\varphi(f) \leq 1-\varepsilon$ et posons

$$E = \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \geq h_\varepsilon(t)\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt \\
= &\frac{1}{2T}\int_{G\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt \\
&+\frac{1}{2T}\int_{G'\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt.
\end{aligned}$$

Pour être dans les conditions du Lemme 3.4, nous choisisons $\theta \in]0,1[$ telle que $\bar{\mu}(G') \leq \theta$ implique $\rho_\varphi(2f\chi_{G'}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int_{G'\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt \\
\leq &\frac{1}{2T}\int_{G'\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(t,2|f(t)|)\,dt \\
\leq &\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

D'un autre coté :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt\\
=\ &\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt\\
&+\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt\\
\leq\ &\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E\cap[-T,+T]}\varphi(t,|f(t)|)\,dt\\
&+\frac{1}{2T}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt\\
\leq\ &\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap[-T,+T]}\varphi(t,|f(t)|)\,dt-\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\varphi(t,|f(t)|)\,dt\\
&+\frac{1}{2T}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt\\
\leq\ &\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap[-T,+T]}\varphi(t,|f(t)|)\,dt\\
&+\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\left[\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)-\varphi(t,|f(t)|)\right]dt\\
&-\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt\\
\leq\ &\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap[-T,+T]}\varphi(t,|f(t)|)\,dt\\
&+\frac{1}{2T}\int\limits_{G\cap E'\cap[-T,+T]}\left[\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)-\varphi(t,|f(t)|)\right]dt.
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour $t\in E'\cap G$ nous avons

$$|f(t)|\leq h_\varepsilon(t)\leq\beta \text{ et } \frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\leq 2\beta.$$

En utilisant la continuité de φ (en prenant $\delta_1(\varepsilon)$ suffisamment petit) et sa périodicité par rapport à $t\in\mathbb{R}$, nous obtiendrons pour $t\in E'$

$$\left|\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)-\varphi(t,|f(t)|)\right|\leq\frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors, il vient que pour tout $T \geq T_0$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right)dt \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,|f(t)|)\,dt+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Faisons tendre T vers l'infini, nous aurons

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\rho_\varphi\left(\frac{f}{1-\delta_1(\varepsilon)}\right) &\leq \rho_\varphi(f)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq 1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\\ &= 1-\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Finalement, $\|f\|_\varphi \leq 1-\delta_1(\varepsilon)$. $\square$

Lemme 3.9. *Soit* $f \in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ *avec* $\|f\|_\varphi = 1$. *Alors, il existe des nombres réels* $0<\alpha<\beta$ *et* $\theta \in (0,1)$ *tels que, si*

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : \alpha \leq |f(t)| \leq \beta\},$$

on a $\bar{\mu}(G_1) \geq \theta$.

Démonstration. Soit $\bar{\theta} \in \,]0,1[$. Alors, du Lemme 3.3 il existe $\beta>0$ et $T_0>0$ tels que pour $\bar{G} = \{t \in \mathbb{R} : |h(t)| \leq \beta\}$, on a

$$\mu\left\{\bar{G}\cap[-T,+T]\right\} \geq \bar{\theta}.2T,$$

pour tout $T \geq T_0$. Montrons d'abord que la propriété suivante est vraie :

pour tout $\delta \in \,]0,1[$ il existe $\tilde{\theta} \in \,]0,1[$, $T_0>0$ et un ensemble

$$\tilde{G} = \{t \in \mathbb{R}, \varphi(t,|f(t)|) \leq 1-\delta\}$$

tels que pour tout $T \geq T_0$,

$$\mu\left\{\tilde{G}\cap[-T,+T]\right\} < \tilde{\theta}.2T. \tag{3.8}$$

Pour cela, soit $\delta \in \,]0,1[$ et $\{P_n\}$ une suite de polynômes trigonométriques approchant f c'est à dire telles que $\|f-P_n\|_\varphi \to 0$. Prenons P_δ tel que

$$\rho_\varphi(2|f(t)-P_\delta(t)|) < \frac{\delta}{4},$$

et posons

$$M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t,2P_\delta(t)).$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left(\frac{\delta}{4} + M\varepsilon\right) < \delta,$$

et supposons que l'inégalité (3.8) n'est pas satisfaite. Posons $\tilde{\theta} = 1 - \varepsilon$, il existerait alors une suite $\{T_n\}$ croissante vers l'infini pour laquelle

$$\mu\left\{\tilde{G} \cap [-T_n, +T_n]\right\} \geq \tilde{\theta}.2T_n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2T_n}\int_{-T_n}^{+T_n} \varphi\left(t, |f\left(t\right)|\right) dt \\
= \; & \frac{1}{2T_n}\int_{\tilde{G}\cap[-T_n,+T_n]} \varphi\left(t, |f\left(t\right)|\right) dt + \frac{1}{2T_n}\int_{\left(\tilde{G}\right)'\cap[-T_n,+T_n]} \varphi\left(t, |f\left(t\right)|\right) dt \\
\leq \; & \left(1-\delta\right) + \frac{1}{2T_n}\int_{\left(\tilde{G}\right)'\cap[-T_n,+T_n]} \varphi\left(t, |f\left(t\right)|\right) dt
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2T_n}\int_{\left(\tilde{G}\right)'\cap[-T_n,+T_n]} \varphi\left(t, |f\left(t\right)|\right) dt \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2T_n}\int_{\left(\tilde{G}\right)'\cap[-T_n,+T_n]} \varphi\left(t, 2\left|f\left(t\right) - P_\delta\left(t\right)\right|\right) dt + \frac{1}{2T_n}\int_{\left(\tilde{G}\right)'\cap[-T_n,+T_n]} \varphi\left(t, 2\left|P_\delta\left(t\right)\right|\right) dt\right] \\
\leq \; & \frac{1}{2}\left[\frac{\delta}{4} + M\varepsilon\right] \\
\leq \; & \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T_n}\int_{-T_n}^{+T_n} \varphi\left(t, |f\left(t\right)|\right) dt & \leq 1 - \delta + \frac{\delta}{2} \\
& \leq 1 - \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

par conséquent, lorsque n tend vers l'infini, nous avons

$$\rho_\varphi\left(f\right) \leq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Finalement, utilisant le lemme 3.8, nous obtiendrons

$$\|f\|_{\varphi} \leq 1 - p(\delta)$$

pour un certain $p(\delta) \in]0,1[$. ce qui contrdit le fait que $\|f\|_{\varphi} = 1$.

– Montrons maintenant le résultat du Lemme :

Soit $\delta \in]0,1[$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t,\alpha) \leq 1 - \delta.$$

Choisissons $\tilde{\theta}$ comme dans l'inégalité (3.8) et prenons $\bar{\theta} > \tilde{\theta}$ comme dans le Lemme 3.3. Si $\beta > \alpha$ est un nombre fixé, nous définissons l'enssemble :

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : \alpha \leq |f(t)| \leq \beta\}.$$

Alors, comme

$$(G_1)' \cap [-T,T] = \{t \in [-T,T] : |f(t)| \leq \alpha\} \cup \{t \in [-T,T] : f(t) \geq \beta\} \subset \tilde{G} \cup \left(\bar{G}\right)',$$

nous avons, pour tout $T \geq T_0$,

$$\begin{aligned} \mu\left((G_1)' \cap [-T,T]\right) &\leq \mu\left(\tilde{G} \cap [-T,T]\right) + \mu\left(\left(\bar{G}\right)' \cap [-T,T]\right) \\ &\leq \tilde{\theta}.2T + \left(1-\bar{\theta}\right).2T \\ &= \left(1 - \left(\bar{\theta} - \tilde{\theta}\right)\right) 2T \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout $T \geq T_0$, nous avons :

$$\mu\left(G_1 \cap [-T,T]\right) \geq \left(\bar{\theta} - \tilde{\theta}\right).2T.$$

□

Chapitre 4

Structure géométrique de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques

Dans ce chapitre, nous étudions la structure du point de vue géométrique de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Il s'agira des structures fondamentales que sont la stricte et l'uniforme convexité. Pour chacune de ces propriétés, des conditions nécessaires et suffisantes sont énoncées. Pour cela, nous démontrons d'abord un résultat important concernant l'injection isométrique de l'espace de Musielak-Orlicz $L^{\varphi}[0,1]$ dans notre espace $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$

Lemme 4.1. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n > 0$ une suite de nombres réels et $\alpha \in]0,1[$. Pour tout entier n, on associe un ensemble mesurable A_n tel que*

i. $A_i \cap A_j = \phi$, *pour* $i \neq j$ *et* $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \subset [0,\alpha[\,, \alpha < 1$.

ii. $\sum\limits_{n\geq 0} \int\limits_0^1 \varphi(t, a_n\chi_{A_n})\,dt < +\infty$.

Considérons la fonction $f = \sum\limits_{n\geq 1} a_n\chi_{A_n}$ *sur* $[0,1]$ *et soit* $\tilde{f}$ *l'extension périodique de* f *à la droite réelle* $\mathbb{R}$ *(avec la période* $\tau = 1$*). Alors* $\tilde{f} \in \widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$

Démonstration. On sait que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un ensemble mesurable $A_n \subset [0,\alpha[$ pour lequel

$$\int\limits_0^1 \varphi(t, a_n\chi_{A_n})\,dt < \frac{1}{n^2}.$$

Il est donc clair qu'on peut choisir les A_n vérifiant les conditions de notre lemme. Maintenant, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, nous fixons n_0 tel que

$$\sum_{n \geq n_0} \int_0^1 \varphi\left(t, a_n \chi_{A_n}\right) dt \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et nous posons

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n_0} a_i \chi_{A_i}$$

sur $[0, 1[$.

Soit alors

$$M = \max_{i \leq n_0} \sup_t \varphi\left(t, 2a_i\right) \text{ et } \delta \leq \frac{\varepsilon}{3M},$$

(remarquons qu'on peut supposer que $1 - \alpha > \delta$).

Notons par f_1^r la resriction de la fonction f_1 à l'intervalle $[0, 1-\delta]$. Par le théorème de Luzin, il existe une fonction continue g_ε^r sur $[0, 1-\delta]$ telle que

$$\mu\left\{t \in [0, 1-\delta] : \varphi\left(t, \left|f_1^r(t) - g_\varepsilon^r(t)\right|\right) > 0\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3M}.$$

De plus, comme la fonction f_1 est bornée, la fonction g_ε^r l'est aussi.
soit maintenant g_ε l'extension linéaire de g_ε^r à l'intervalle $[0, 1]$, plus précisément g_ε est telle que $g_\varepsilon = g_\varepsilon^r$ sur $[0, 1-\delta]$, g_ε est linéaire entre $1-\delta$ et 1 et $g_\varepsilon(1) = g_\varepsilon^r(0)$.

Nous obtiendrons donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \varphi\left(t, \frac{|f(t) - g_\varepsilon(t)|}{2}\right) dt \\
\leq\ & \int_0^1 \varphi\left(t, \frac{|f(t) - f_1(t)| + |f_1(t) - g_\varepsilon(t)|}{2}\right) dt \\
\leq\ & \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi\left(t, |f(t) - f_1(t)|\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi\left(t, |f_1(t) - g_\varepsilon(t)|\right) dt \\
\leq\ & \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi\left(t, \sum_{n \geq n_0} a_n \chi_{A_n}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^{1-\delta} \varphi\left(t, \left|f_1^r(t) - g_\varepsilon^r(t)\right|\right) dt + \frac{1}{2} \int_{1-\delta}^1 \varphi\left(t, |f_1(t) - g_\varepsilon(t)|\right) dt \\
\leq\ & \frac{1}{2} \sum_{n \geq n_0} \int_0^1 \varphi\left(t, a_n \chi_{A_n}\right) dt + \frac{1}{2} M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{1}{2} M \frac{\varepsilon}{3M} \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement la fonction continue $g_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfait :

$$g_\varepsilon(0) = g_\varepsilon(1) \text{ et } \int_0^1 \varphi\left(t, \frac{|f(t) - g_\varepsilon(t)|}{2}\right) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{g}_\varepsilon$ les extensions périodiques respectives de f et g_ε à la droite réel $\mathbb{R}$ (avec la période $T = 1$). On voit clairement que $\tilde{g}_\varepsilon$ est *u.p.p.* par suite, elle est aussi dans $B^\varphi_{p.p.}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, il existe $P_\varepsilon \in A$ pour lequel

$$\rho_\varphi\left(\frac{\tilde{g}_\varepsilon - P_\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'un autre coté $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont périodiques $T = 1$, en utilisant la périodicité de φ (avec $T = 1$), nous avons,

$$\begin{aligned} \rho_\varphi\left(\frac{\tilde{f} - \tilde{g}_\varepsilon}{2}\right) &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(t, \frac{\left|\tilde{f}(t) - \tilde{g}_\varepsilon(t)\right|}{2}\right) dt \\ &= \int_0^1 \varphi\left(t, \frac{|f(t) - g_\varepsilon(t)|}{2}\right) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \rho_\varphi\left(\frac{\tilde{f} - P_\varepsilon}{4}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\rho_\varphi\left(\frac{\tilde{f} - \tilde{g}_\varepsilon}{2}\right) + \rho_\varphi\left(\frac{\tilde{g}_\varepsilon - P_\varepsilon}{2}\right)\right] \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

c'est à dire que $\tilde{f} \in \widetilde{B}^\varphi_{p.p.}$. $\square$

Proposition 4.1. *Soit*

$$L^\varphi = L^\varphi([0,1]) = \left\{ f \in M(\mathbb{R}) : \int_0^1 \varphi(t, \lambda |f(t)|)\, dt < +\infty \textit{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}$$

l'espace usuel de Musielak-Orlicz et $\|.\|_{L^\varphi}$ *sa norme de Luxemburg associée.*

Alors l'injection :

$$i : (L^\varphi, \|.\|_{L^\varphi}) \hookrightarrow \left(\widetilde{B}^\varphi_{p.p.}(\mathbb{R}), \|.\|_\varphi\right), \qquad i(f) = \widetilde{f},$$

est une isométrie, où $\widetilde{f}$ *est l'extension périodique (avec une période* $T = 1$*) de* f *à* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Nous montrons d'abord que $i\left(L^{\varphi}\right) \subset \widetilde{B}_{p.p.}^{\varphi}\left(\mathbb{R}\right).$

Soit $f \in L^{\varphi}\left([0,1]\right).$ Alors, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right)\right|\right) \in L^{1}\left([0,1]\right).$

Des arguments usuels de la théorie de la mesure de Lebesgue, nous avons $\lim\limits_{N\to+\infty} \mu\left(V_N\right) = 0$ où

$$V_N = \left\{t \in [0,1] : \varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right)\right|\right) \geq N\right\}.$$

Soit

$$E_N = \left\{t \in [0,1] : \left|f\left(t\right)\right| \geq N\right\}$$

Alors, pour $t \in E_N$ nous avons

$$\begin{aligned} \varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right)\right|\right) &\geq \varphi\left(t, \lambda N\right) \\ &\geq \lambda N \varphi\left(t, 1\right) \\ &\geq \lambda N \phi\left(1\right) \end{aligned}$$

où $\phi\left(1\right) = \inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \varphi\left(t, 1\right)$, $\phi\left(1\right) > 0$ (on peut supposer que $\phi\left(1\right) = 1$)

Il vient que $E_N \subset V_{\lambda N}$ et nous aurons par suite que $\lim\limits_{N\to+\infty} \mu\left(E_N\right) = 0.$

Considérons la fonction

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad f(t) \leq N. \\ N & \text{si} \quad f(t) \geq N. \end{cases}$$

Il est clair que $\{f_N\}$ est croissante et $f_N \leq f.$

De plus, comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \mu\left(E_N\right) = 0$, nous avons $\lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_{E_N} \varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right)\right|\right) dt = 0.$

Alors, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int\limits_0^1 \varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right) - f_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right|\right) dt \leq \int\limits_{E_{N\varepsilon}} \varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right)\right|\right) dt \leq \varepsilon.$$

Maintenant, comme f_{N_ε} est bornée, il existe une suite de fonctions simples $\left(S_{N_\varepsilon}\right)_n$ uniformément convergente vers f_{N_ε}. En particulier, une fonction simple S_{N_ε} telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\lambda\left(f_{N_\varepsilon}\left(t\right) - S_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right)\right| \leq \inf_{t\in[0,1]} \varphi^{-1}\left(t, \varepsilon\right).$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 \varphi\left(t, \frac{\lambda}{2}\left|f\left(t\right) - S_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right|\right) dt \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 \varphi\left(t, \lambda\left|f\left(t\right) - f_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right|\right) dt + \int\limits_0^1 \varphi\left(t, \lambda\left|f_{N_\varepsilon}\left(t\right) - S_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right|\right) dt\right] \\ \leq\ & \varepsilon. \end{aligned}$$

Notons par $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}_{N_\varepsilon}$ et $\widetilde{S}_{N_\varepsilon}$ les extensions périodiques réspective (avec une période $T=1$) des fonctions f, f_{N_ε} et S_{N_ε}. Des propriétés de périodicité de φ, $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}_{N_\varepsilon}$ et $\widetilde{S}_{N_\varepsilon}$, nous déduisons,

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{\lambda}{2}\left(\widetilde{f}-\widetilde{S}_{N_\varepsilon}\right)\right) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{\lambda}{2}\left|\widetilde{f}(t)-\widetilde{S}_{N_\varepsilon}(t)\right|\right)dt \\
&= \int_0^1 \varphi\left(t,\frac{\lambda}{2}\left|f(t)-S_{N_\varepsilon}(t)\right|\right)dt \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

De plus, par le Lemme 4.1, nous avons $\widetilde{S}_{N_\varepsilon} \in \widetilde{B}^{\varphi}_{p.p}(\mathbb{R})$. Alors, il existe $P_\varepsilon \in A$ pour lequel

$$\rho_\varphi\left(\frac{1}{4}\left(\widetilde{S}_{N_\varepsilon}-P_\varepsilon\right)\right)\leq\varepsilon$$

(Voir la preuve du Lemme 4.1).

Finalement, posons $\alpha=\min\left(\lambda,\frac{1}{4}\right)$ nous aurons :

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\left(\widetilde{f}-P_\varepsilon\right)\right) &\leq \frac{1}{2}\left\{\rho_\varphi\left(\frac{\lambda}{2}\left(\widetilde{f}-\widetilde{S}_{N_\varepsilon}\right)\right)+\rho_\varphi\left(\frac{1}{4}\left(\widetilde{S}_{N_\varepsilon}-P_\varepsilon\right)\right)\right\} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

C'est à dire que $\widetilde{f}\in\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p}(\mathbb{R})$.
Maintenant, pour tout $f\in L^\varphi$, l'égalité des modulaires de f dans L^φ et de $\widetilde{f}$ dans $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$ étant évidente, il s'ensuit que $\|f\|_{L^\varphi}=\left\|\tilde{f}\right\|_\varphi$. □

4.1 Stricte convexité de l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$

Lemme 4.2. *Supposons que la fonction $\varphi(t,u)$ est strictement convexe et $f_n, g_n \in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ deux suites telles que, pour un certain $r>0$, nous avons :*

$$\rho_\varphi(f_n)\leq r, \rho_\varphi(g_n)\leq r \text{ et } \lim_{n\to\infty}\rho_\varphi\left(\frac{f_n+g_n}{2}\right)=r.$$

Alors $(f_n-g_n)\xrightarrow{\bar{\mu}}0$.

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n-g_n)\neq 0$ au sens de la $\bar{\mu}-$convergence . Alors, il existe $\varepsilon>0$, $\sigma>0$ et $n_k\nearrow^{\infty}$ tels que, si $E_k=\{t\in\mathbb{R}:|f_{n_k}(t)-g_{n_k}(t)|\geq\sigma\}$

nous aurons $\bar{\mu}(E_k) > \varepsilon$. Prenons un nombre $k_\varepsilon > 1$ tel que (voir le Lemme 3.1) l'inégalité suivante soit vraie

$$\bar{\mu}(E) \geq \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \rho_\varphi(\chi_E) > \frac{r}{k_\varepsilon}.$$

Où $r > 0$ est la constante du Lemme.

Posons alors,

$$\begin{array}{rcl} A_k & = & \{t \in \mathbb{R} : |f_{n_k}(t)| > k_\varepsilon\} \\ B_k & = & \{t \in \mathbb{R} : |g_{n_k}(t)| > k_\varepsilon\} \end{array}$$

Nous obtiendrons :

$$\begin{array}{rcl} r & \geq & \rho_\varphi(f_{n_k}) \\ & = & \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{+T} \varphi(t, |f_{n_k}(t)|)\, dt \\ & \geq & \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{A_k\cap[-T,T]} \varphi(t, k_\varepsilon)\, dt \\ & \geq & k_\varepsilon \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{A_k\cap[-T,T]} \varphi(t, 1)\, dt \\ & = & k_\varepsilon \rho_\varphi(\chi_{A_k}). \end{array}$$

Par suite,

$$\rho_\varphi(\chi_{A_k}) \leq \frac{r}{k_\varepsilon},$$

d'où

$$\bar{\mu}(A_k) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De la même manière, nous montrons que

$$\bar{\mu}(B_k) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Maintenant, soit l'ensemble :

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \, |u| \leq k_\varepsilon, |v| \leq k_\varepsilon, |u - v| \geq \sigma\},$$

et considérons la fonction :

$$F(t, u, v) = \frac{2\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right)}{\varphi(t, u) + \varphi(t, v)}.$$

Comme φ est strictement convexe, $F(t,u,v) < 1, \forall\ (t,u,v) \in \mathbb{R}\times Q$. et en utilisant la continuité de φ sur $\mathbb{R}\times Q$ (où Q est un ensemble compact sur $\mathbb{R}^2$) et sa péridicité par rapport à t, il vient que pour un certain $\delta > 0$,

$$\sup_{\mathbb{R}\times Q} F(t,u,v) = 1-\delta.$$

Plus précisément, pour tout $(t,u,v) \in \mathbb{R}\times Q$, nous avons :

$$\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta)\,\frac{\varphi(t,u)+\varphi(t,v)}{2}.$$

Soit maintenant $t \in E_k \backslash (A_k \cup B_k)$, Alors $f_{n_k}(t), g_{n_k}(t) \in Q$ et par conséquent,

$$\varphi\left(t, \frac{|f_{n_k}(t)+g_{n_k}(t)|}{2}\right) \leq (1-\delta)\,\frac{\varphi(t,|f_{n_k}(t)|)+\varphi(t,|g_{n_k}(t)|)}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& r-\rho_\varphi\left(\frac{f_{n_k}+g_{n_k}}{2}\right)\\
\geq\ & \frac{\rho_\varphi(f_{n_k})+\rho_\varphi(g_{n_k})}{2} - \rho_\varphi\left(\frac{f_{n_k}+g_{n_k}}{2}\right)\\
\geq\ & \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{[E_k\backslash(A_k\cup B_k)]\cap[-T,+T]}\left[\frac{\varphi(t,|f_{n_k}(t)|)+\varphi(t,|g_{n_k}(t)|)}{2} - \varphi\left(t,\frac{|f_{n_k}(t)+g_{n_k}(t)|}{2}\right)\right]dt\\
\geq\ & \frac{\delta}{2}\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{[E_k\backslash(A_k\cup B_k)]\cap[-T,+T]}\left[\varphi(t,|f_{n_k}(t)|)+\varphi(t,|g_{n_k}(t)|)\right]dt\\
\geq\ & \delta\,\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{[E_k\backslash(A_k\cup B_k)]\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\frac{|f_{n_k}(t)-g_{n_k}(t)|}{2}\right)dt\\
\geq\ & \delta\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\\
=\ & \delta\frac{\varepsilon}{2}\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
r-\rho_\varphi\left(\frac{f_n+g_n}{2}\right) &\geq \delta\frac{\varepsilon}{2}\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)\\
&> 0,
\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse $\rho_\varphi\left(\dfrac{f_n+g_n}{2}\right) \to r.$ $\square$

Théorème 4.1. *L'espace $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ est strictement convexe si et seulement si φ est strictement convexe et $\varphi \in \Delta_2$.*

Démonstration. Suffisance :

Supposons que φ est strictemnt convexe, $\varphi \in \Delta_2$ mais $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ n'est pas strictement convexe. Alors pour certains f et $g \in \widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$ nous aurons

$$\|f\|_{\varphi} = \|g\|_{\varphi} = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{\varphi} = 1.$$

Du corollaire 3.1, nous obtiendrons

$$\rho_{\varphi}(f) = \rho_{\varphi}(g) = \rho_{\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\right) = 1.$$

Alors par le Lemme 4.2, il vient que pour tout $\alpha > 0$,

$$\bar{\mu}\{t \in \mathbb{R} : |f-g| > \alpha\} = 0.$$

Finalement, en utilisant le Lemme 3.9, on aura

$$\rho_{\varphi}(f-g) = 0.$$

Contradiction.

Nécessité : Comme l'injection $i : (L^{\varphi}, \|.\|_{L^{\varphi}}) \hookrightarrow \left(\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R}), \|.\|_{\varphi}\right)$ est une isométrie, la stricte convexité de $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p}(\mathbb{R})$ implique celle de l'espace de Musielak-Orlicz $L^{\varphi}[0,1]$.

Par conséquent $\varphi(t,u), t \in [0,1], u \in \mathbb{R}^+$ est strictement convexe et satisfait la condition $\Delta_2^{L^1}$ (cf. [25]) i.e. : il existe $k > 0$ et $h \geq 0$ avec $\int_0^1 h(t)dt < \infty$ telle que $\varphi(t,2u) \leq k\varphi(t,u) + h(t)$ pour tout $u \geq 0$ et μ-p.p. $t \in [0,1]$.

Les fonctions prolongées périodiquement (avec une période $T = 1$) $\varphi(t,u), t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+$ et $\tilde{h}(t), t \in \mathbb{R}$ satisfont la condition $\tilde{h} \in B^1(\mathbb{R})$ et $\varphi(t,2u) \leq k\varphi(t,u) + \widetilde{h}(t)$ pour tout $u \geq 0$ et μ-p.p. $t \in \mathbb{R}$.

Posons maintenant,

$$f(t) = \sup\left\{u \geq 0 : \varphi(t,u) \leq \tilde{h}(t)\right\},$$

alors f est une fonction mesurable et $\varphi(t, f(t)) = \widetilde{h}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Finalement, on obtient :

$$\varphi(t,2u) \leq k\varphi(t,u) + \tilde{h}(t) \leq (k+1)\varphi(t,u),$$

pour tout $u \geq f(t)$, pour μ-p.p. $t \in \mathbb{R}$, i.e. φ vérifie la condition Δ_2 pour l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz. $\square$

4.2 Uniforme convexité de l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$

Dans [26], H. Hudzik a introduit une notion d'uniforme convexité "légèrement" moins forte que celle introduite par J. Musielak. Cette condition est celle qui ajoutée à la condition $\Delta_2^{L^1}$ caractérise l'uniforme convexité de l'espace de Musielak-Orlicz L^{φ}.

Définition 4.1. ***(H.Hudzik [25])*** *Une fonction de Musielak-Orlicz $\varphi(t,u)$ est dite* ***E-uniformément convexe*** *lorsque :*

$$\forall \varepsilon \in \left]0,1\right[, \exists f_{\varepsilon} \in L^0 \text{ avec } \rho_{\varphi}^{E}(f_{\varepsilon}) = \varepsilon \text{ et } \exists p(\varepsilon) \in \left]0,1\right[\text{ tel que } : \forall x, y \in [0,+\infty[$$
$$\left[\varphi(t,|f_{\varepsilon}(t)|) \leq \max(\varphi(t,x), \varphi(t,y)) \leq \varepsilon^{-1}\varphi\left(t, \frac{x-y}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \varphi\left(t, \frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1-p(\varepsilon)}{2}\left(\varphi(t,x)+\varphi(t,y)\right), \text{ pour } \mu\text{-p.p.}t \in \Omega.$$

Contrairement à celle donnée par J. Musielak. On remarque que cette propriété dépend de l'espace E. Il est à noter aussi que la définition originale de Hudzik est donnée pour le cas particulier où $E = L^1$.

Théorème 4.2. *L'espace $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$ est uniformément convexe si et seulement si φ est B^1-uniformément convexe et satisfait la condition Δ_2.*

Démonstration. Suffisance :

Soit $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ et f,g dans $\widetilde{B}^{\varphi}_{p.p.}$ telles que

$$\|f\|_{\varphi} = \|g\|_{\varphi} = 1, \text{ et } \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{\varphi} \geq \varepsilon.$$

Du corollaire 3.1, on a aussi

$$\rho_{\varphi}(f) = \rho_{\varphi}(g) = 1 \text{ et } \rho_{\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\right) \geq \delta,$$

pour un certain $\delta = \delta(\varepsilon) \in \left]0,1\right[$.

Soit h_{δ} une fonction mesurable telle que $\rho_{\varphi}(h_{\delta}) = \frac{\delta}{4}$, alors de l'uniforme convexité de φ, il existe $p(\delta) \in \left]0,1\right[$ pour lequel l'implication suivante :

$$\left[|h_{\delta}(t)| \leq \max(|f(t)|, |g(t)|) \leq \frac{4}{\delta}|f(t)-g(t)|\right]$$
$$\Longrightarrow \left[\varphi\left(t, \frac{|f(t)+g(t)|}{2}\right) \leq \frac{1-p(\delta)}{2}\left[\varphi(t,|f(t)|)+\varphi(t,|g(t)|)\right]\right]$$

est vérifiée. Posons

$$B = \left\{t \in \mathbb{R}, |h_{\delta}(t)| \leq \max(|f(t)|, |g(t)|) \leq \frac{4}{\delta}|f(t)-g(t)|\right\},$$

alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{|f(t)+g(t)|}{2}\right)\chi_B dt\\
\leq\ &\frac{1-p(\delta)}{2}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,|f(t)|)\chi_B dt+\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,|g(t)|)\chi_B dt\right],
\end{aligned}$$

il vient que

$$\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\chi_B\right)\leq\frac{1-p(\delta)}{2}\left[\rho_\varphi(f\chi_B)+\rho_\varphi(g\chi_B)\right]$$

d'où,

$$\begin{aligned}
1-\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi(f)+\rho_\varphi(g)\right)-\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi(f\chi_B)+\rho_\varphi(g\chi_B)\right)-\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\chi_B\right)\\
&\geq \frac{p(\delta)}{2}\left(\rho_\varphi(f\chi_B)+\rho_\varphi(g\chi_B)\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Nous définissons les ensembles :

$$C=\{t\in B' \text{ t.q. } \max(|f(t)|,|g(t)|)<|h_\delta(t)|\}$$

$$D=\left\{t\in B' \text{ t.q. } |f(t)-g(t)|<\frac{\delta}{4}\max(|f(t)|,|g(t)|)\right\}.$$

Alors $B'=CUD$ et

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_C\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\rho_\varphi(f\chi_C)+\rho_\varphi(g\chi_C)\right]\\
&\leq \frac{\delta}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_D\right) &\leq \frac{\delta}{8}\left[\rho_\varphi(f\chi_D)+\rho_\varphi(g\chi_D)\right]\\
&\leq \frac{\delta}{4}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_{B'}\right)\leq\frac{\delta}{2}$$

$$\rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_B\right)\geq\frac{\delta}{2},$$

d'où,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2} &\leq \rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_B\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi\left(f\chi_B\right)+\rho_\varphi\left(g\chi_B\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (4.1), on déduit :

$$\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\right)\leq 1-\frac{\delta p\left(\delta\right)}{2}.$$

Finalement, comme $\varphi\in\Delta_2$ (rappelons que $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)$ dépend de ε), par le Lemme 3.8, il existe $q\left(\varepsilon\right)\in\left]0,1\right[$ tel que $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|\leq 1-q\left(\varepsilon\right).$

Nécessité :

Comme l'injection $i:\left(L^\varphi,\|.\|_{L^\varphi}\right)\hookrightarrow\left(\widetilde{B}^\varphi_{p.p.}\left(\mathbb{R}\right),\|.\|_\varphi\right)$ est une isométrie, l'uniforme convexité de $\widetilde{B}^\varphi_{p.p}\left(\mathbb{R}\right)$ implique celle de l'espace de Musielak-Orlicz $L^\varphi\left[0,1\right]$ (cf. [26]),

par conséquent $\varphi\left(t,u\right),t\in\left[0,1\right],u\in\mathbb{R}^+$ est L^1 -uniformément convexe, donc $\varphi\left(t,u\right),t\in\mathbb{R},u\in\mathbb{R}^+$ est B^1 -uniformément convexe.

La nécessité de la condition Δ_2 découle de sa nécessité pour la stricte convexité de l'espace $\widetilde{B}^\varphi_{p.p.}$ (voir la preuve du théorème 4.1). $\square$

Conclusion et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, nous avons introduit une nouvelle classe d'espaces de type Calderon-Lozanovskii : la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques $B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$. L'essentiel de notre travail a porté sur la caractérisation de la stricte et l'uniforme convexité des espaces en question, via des propriétés de régularité de la fonction génératrice φ de Musielak-Orlicz.

Une des difficultés majeures qui fait que cette classe ne se prête pas à l'étude faite dans le cadre général des espaces de Calderon-Lozanovskii est le fait que la propriété de Fatou n'est pas vérifiée dans l'espace $B^1(\mathbb{R})$. Pour y remédier, nous avons développé des outils adéquats incluant une propriété "analogue" à celle de Fatou.

Nous envisageons de compléter notre étude, en considérons d'autres questions encore non traitées :

- Les questions concernant d'autres propriétés géométriques de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques muni de la norme de Luxemburg.
- Définition de la norme d'Orlicz dans les espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Cette norme coincide avec celle d'Amemiya dans les espaces de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. Une question naturelle est de voir si c'est le cas dans nos espaces. Notons qu'en suivant la même démarche que celle faite dans le cas des espaces de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques, la question suivante reste ouverte : La suite des polynômes de Bochner-Fejer assoiciée à f est-elle convergente vers celle-ci dans l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques ?
- Pour les questions liées à l'analyse de Fourier, une propriété principale qui reste à examiner est l'inclusion de l'espace $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ dans l'espace $B^1(\mathbb{R})$.

Pour finir, nous pensons que la condition de périodicité par rapport au paramètre t imposée à la fonction φ peut être affaiblie en la remplaçant par la presque périodicité.

Bibliographie

[1] Akimovic B.A., On uniformly convex and uniformly smooth Orlicz spaces, Teonia Funkcii Funk. Anal. i Pril. 15 (1970), 114-120.

[2] Albrycht J., The theory of Marcinkiewicz-Orlicz spaces, Dissertation Math, No 27 (1962).

[3] Amerio L., Prouse G., Almost periodic functions and functional equations. New-York : Van Norstrand Reinhold Co.1971.

[4] Bardaro C., Musielak J., Vinti G., Nonlinear integral operators and applications, Walter de Gruyter. berlin. New York 2003.

[5] Bedouhene F., Morsli M., On the strict convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions, Revista Matematica Complutense 16, Num.2 (2003), 399-415.

[6] Bedouhene F., Morsli M., On the uniform convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions with Orlicz norm, Colloquium Mathematicum, Vol. 102, No 1 (2005), 97-111.

[7] Bedouhene F., Structure générale et métrique des espaces de type Orlicz de fonctions presque périodiques, Thèse de doctorat (2004).

[8] Bedouhene F., Morsli M., Smaali M., On some geometic properties in the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions with Luxemburg norm, Comment. Math. Univ. Carolin (2010) (à paraitre).

[9] Besicovitch A.S., Almost periodic functions, Dover publ. Inc. , New York, 1954.

[10] Birkhoff G. Lattice Theory, Amer. Math. Soc., providence, R.I., 1967.

[11] Bohr H., Fœlner, On some type of fonctional spacesœ, Acta Math., 76 (1945), 31-155.

[12] Boulahia F., Étude des propriétés de convexité dans les espace de type Orlicz, Thèse de doctorat (2006).

[13] Calderon A.P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. 24(1964),113-190.

[14] Chen S., Geometry of Orlicz spaces, Dissertationes Math. No 356, (1996)

[15] Cerda J., Hudzik H., Mastylo, M., On the geometry of some Calderon-Lozanovskii interpolation spaces, Indag. Mathem., N.S., 6(1) (1995), 35-49.

[16] Corduneanu C., Gheorghiu N. and Barbu V., Almost periodic function, Chelsea Publishing company, (1989).

[17] Clarkson J. A., Uniformly convex spaces, Trans. Amer Math. Soc. 40, (1936), 394-414.

[18] Cui Y., Hudzik H., Yu F., On Opial properties and Opial modulus for Orlicz sequence spaces, Nonlinear Analysis, 55 (2003) 335-350.

[19] Istraliscu, V.I., Strict convexity and complex strict convexity, Theory and application, lecture note in pure and applied mathematics, Marcel Dekker. INC. New York and Basel (1984).

[20] Foralewski P., On some geometric properties of generalized Calderon-Lozanovskii spaces,Acta Math.Hungar., 80 (1-2) (1998), 55-66.

[21] Foralewski P., Hudzik H., Some basic properties of generalized Calderon-Lozanovskii spaces, Commect. Math. 48, 4-6 (1997), 523-538.

[22] Foralewskii P., Kolwicz P., Local uniform rotundity in Calderon-Lozanovskii spaces, Journal of Convex Analysis, Volume 14, No. 2,(2007) 395-412.

[23] Giesy D., On a convexity condition in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc, 125 (1969), 114-146.

[24] Hillmann T.R., Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions. Real and Stochastic Analysis. 164, Wiley Ser. in probability and Math. Stat., Wiley., New York, 1986.

[25] Hudzik H., Strict convexity of Musielak- Orlicz spaces with Luxemburg 's Norm, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 39, No 5-6 (1981), 235-247.

[26] Hudzik H., Convexity in Musielak- Orlicz spaces, Hokkaido Mathematical journal, Vol. 14 (1985), p. 85-96.

[27] Hudzik, H., An estimation of the modulus of convexity in a class of Orlicz spaces. Math. Japonica 32(2), 227-237 (1987).

[28] Hudzik H., Geometry of some classes of Banach function spaces, Proceedings of the International Symposium on Banach and function Spaces, Kitakyushu, Japan, October, 2-4 (2003), 17-57.

[29] Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M., Monotonocity and rotundity properties in Banach Lattices, Rocky Mountain, Journal of Mathematics, 30(3), 933-950 (2000).

[30] Hudzik H., Kaminska A., On uniformly convexifiable and B-convex Musielak-Orlicz spaces, Comment. Math. Prace Mat. 25,(1985), 59-75.

[31] Hudzik H., Narloch A., Relationships between monotonicity and complex rotundity properties with some consequences, Math. Scand, 96 (2005), 289-306.

[32] James R. C., A nonreflexive Banach space that is uniformly nonoctahedral, Israel J. Math., 18 (1974), 145-155.

[33] James R. C., Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math., 2 (1964), 542-550.

[34] Kolwicz P., Rotundity proprerties in Calderon-lozanovskii spaces, Houston Journal of Mathematics, volume 31, No. 3, (2005), 883-912.

[35] Kottman C. A., Paking and reflexivity in Banach spaces, Trans. Math. Soc., 150 (1970), 565-576.

[36] Levitan B. M. and V. Zhikov, Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press 1982.

[37] Lozanovskii G.Ya, On some Banach lattices, Sbirsk. Math. Zh. 10 (1969), 584-599.

[38] Lozanovskii G.Ya, Remark on an interpolation theorem of calderon, Funkcional Anal. i Prilozen. 6 (1972), 89-90 ; English translation in Functional Anal. Appl. 6 (1972), 333-334.

[39] Luxemburg W.A.J., Banach Function Spaces, Thèse de doctorat, 1955.

[40] Maligranda L., Orlicz spaces and interpolation, seminarios de mathematica 5, Departamento de Matematica, Campinas, 1989.

[41] Megginson R.E., An introduction to Banach spaces theory, Springer, 1998.

[42] Milmann D., On some criteria for the regularity of spaces of type (B), Doklady Akad. Nauk SSSR, 20 (1938).

[43] Morsli M., Espace de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. Structure générale et géométrie, Thèse de Doctorat (1996).

[44] Morsli M., On some convexity properties of the Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions, Comment. Math. 34 (1994), 137-152.

[45] Morsli M. and Smaali M., Characterization of the strict convexity of the Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions, Comment. Math. Univ. Carolin 48,3 (2007), 443-458.

[46] Morsli M. and Smaali M., Characterization of the uniform convexity of Besicovitch-Musielak-Orlicz spaces of almost periodic functions, Commentationes Mathematicae, Prace matematyczne, XLVI (2), (2006) 215-231.

[47] Musielak J., Orlicz spaces and Modular spaces, Lecture notes in math. 1034, springer-Verlag, 1983.

[48] Musielak J. and Orlicz W., On modular spaces, Studia Math. 18 (1959), 49-65.

[49] Opial Z., Weak convergence of the sequence of successive approximation of nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 591-597.

[50] Ovchinnikov V.I., Interpolation theorems resulting from an inequality of Grothendieck, Functional Anal. i Prilozen 10, 45-54 (1976).

[51] Pankov A., Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. London : Kluwer Acad. Publ. 1990.

[52] Petrot N., Suantai Suthep, The criteria of strict monoticity and rotundity points in generalized Calderon-Lozanovskii spaces, Nonlinear Analysis 70 (2009) 2206-2215.

[53] Rao M.M., Ren, Z.D., Theory of Orlicz spaces, Marcel Dekker, Inc. (1991).