

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par
Rabah OUIKENE
Saïd OULAL

Mémoire dirigée par **Mme Safia YOUSFI**

Thème

**Commande robuste des systèmes non
linéaires**

Mémoire soutenu publiquement le 03 juillet 2014 devant le jury composé de :

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Président

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Rapporteur

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

M Prénom NOM

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

Remerciement

Avant tout, nous remercions le bon dieu, le tout puissant de nous avoir donné la force nécessaire pour mener à terme ce travail.

Ensuite, nous tenons à témoigner notre profonde gratitude et nos remerciements les plus sincères à Madame YOUSFI, pour son aide et le temps qu'elle a bien voulu nous consacrer.

Nous exprimons aussi nos sincères reconnaissances à tous nos enseignants de la faculté du génie électrique pour leurs efforts fournis durant toute la période d'étude.

Nous tenons à remercier les membres du jury qui ont bien voulu accepter de jugé et valoriser ce travail.

En fin, à toute les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, de prés ou de loin nous ont aidé, encouragé, guidé et conseillé trouvez ici l'expression de notre sincère reconnaissance

Dédicace

Je dédie ce modeste travail a mes très chères parents et je les remercie pour leur soutien et leur présence auprès de moi durant tous le cycle d'étude, mes frères , a mes sœurs et toutes leurs familles, a mes amies, avec eux, j'ai partager les bons et les mauvais moments, pour tous les autres amis et pour toutes la promotion 2013/2014.

RABAH

Dédicace

A la mémoire de mon père

A ma mère

A ceux qui m'aiment

SAID

SOMMAIRE

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I :

Introduction à la commande robuste

I.1 Introduction	3
I.2 Asservissement nominal	3
I.2.1 Stabilité nominale	3
I.2.1.1 Stabilité au sens au Lyapunov	4
I.2.1.2 Stabilité interne	5
I.2.2 Performances nominales	5
I.2.2.1 Rejet de perturbations	5
I.2.2.2 Suivi de référence.....	5
I.2.2.3 Rejet des bruits de mesure	6
I.2.2.4 Modération de la commande	6
I.3 Fonction de sensibilité	6
I.4 Fonctions de pondérations	7
I.5 Représentation d'incertitudes.....	8
I.5.1 Incertitudes non structurées ou incertitudes dynamiques	8
I.5.2 Incertitudes structurées ou paramétriques	10
I.6 Analyse de la robustesse.....	11
I.6.1 Stabilité robuste	11
I.6.2 Performances robustes.....	12
I.7 Conclusion	13

Chapitre II

Méthodes de commande robuste des systèmes linéaires

II.1 Introduction	14
II.2 Commande LQ.....	14
II.2.1 Formulation d'un problème de commande LQ.....	14
II.2.2 Valeurs singulières du régulateur LQ	15

II.2.3 Calcul d'un régulateur LQ.....	17
II.2.4 Commande LQG.....	17
II.2.4.1 Formulation d'un problème de commande LQG.....	17
II.2.4.2 Théorème de séparation	18
II.2.4.3 Structure de la commande LQG.....	18
II.2.4.4 Choix des matrices de pondération	19
II.2.4.5 Réglage de l'estimateur d'état.....	19
II.2.5 Synthèse de la commande LQG/LTR.....	19
II.2.5.1 Recouvrement en entrée.....	19
II.2.5.2 Recouvrement en sortie.....	20
II.2.6 Application au pendule inversé.....	22
II.2.6.1 Modèle du système.....	22
II.2.6.2 Linéarisation du modèle.....	23
II.2.6.3 Analyse des résultats de simulation.....	24
II.2.6.2 Conclusion.....	26
II.3 La synthèse H_∞	27
II.3.1 : Fondements théoriques.....	27
II.3.1.1 Notion du petit gain.....	27
II.3.1.2 Sensibilité mixte.....	27
II.3.1.3 Notion de forme standard.....	28
II.3.1.4 Problème H_∞ standard.....	29
II.3.2 Résolution du problème H_∞ par équations de Ricatti.....	29
II.3.2.1 Conditions d'existence d'une solution.....	29
II.3.2.2 Solution au problème de sensibilité mixte	31
II.3.2.3 Choix des fonctions de pondérations.....	32
II.3.3 Résolution du problème H_∞ par les Inégalités Matricielles Linéaires « LMI ».....	35
II.3.3.a La faisabilité.....	35
II.3.3.b L'optimisation.....	35
II.3.3.1 Résolution du problème H_∞ standard par les LMI _s	35

II.3.3.2 Réalisation du correcteur.....	37
II.3.4: Application au pendule inversé.....	38
II.3.4.1 Cahier de charges	38
II.3.4.2 Analyse des résultats obtenus	39
II.4 Conclusion	43

Chapitre III

Commande H_∞ des systèmes non linéaires

III.1 Introduction	45
III.1.1 Système non linéaire.....	45
III.2 La commande H_∞ non linéaire	47
III.2.1 Norme H_∞ non linéaire.....	47
III.2.2 Gain L_2	47
III.2.3 Système dissipatif.....	48
III.3 Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire	49
III.4 Solution du problème de commande H_∞ non linéaire.....	50
III.4.1 Résolution du problème H_∞ par la méthode des approximations successives.....	51
III.4.1.1 Algorithme des approximations successives.....	52
III.4.2 Résolution du problème H_∞ par les inégalités matricielles non linéaires	53
III.4.2.1 Méthode des inégalités matricielles non linéaires NLMI.....	53
III.4.2.2 Conditions de solubilité du problème H_∞ non linéaire	54
III.5 Application de la commande H_∞ basée sur les NLMI sur un modèle non linéaire d'un pendule inversé	55
III.6 Conclusion.....	60
Conclusion générale	61
Annexe A : Les normes.....	62
Annexe B : Les valeurs singulières.....	63
Annexe C : Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT).....	65
Annexe D : Définitions.....	66

Table des figures

Figure I.1: système perturbé.....	6
Figure I.2 Représentation additive.....	9
Figure I.3 représentation multiplicative directe en entrée.	9
Figure I.4 : Représentation multiplicative directe en sortie.	9
Figure I.5 Représentation multiplicative inverse en entrée.	10
Figure I.6 Représentation multiplicative inverse en sortie	10
Figure I.7 représentation des incertitudes structurées	11
Figure I.8 Interconnexion G, Δ	12
Figure II.1 Schéma bloc du régulateur LQ.....	15
Figure II.2 schéma bloc de LQG	18
Figure II.3 Schéma bloc de l'observateur	21
Figure II.4 Gabarit sur KS	24
Figure II.5 fonction de sensibilité.....	24
Figure II.6 tracé de Bode de la fonction de sensibilité.....	25
Figure II.7 tracé de Bode de la fonction de sensibilité complémentaire.....	25
Figure II.8 connexion entre M et Δ	27
Figure II.9 Interconnexion de $K(s)$ et $P(s)$	28
Figure II.10 Système soumis aux pondérations	31
Figure II.11 diagramme de Bode des gabarits fréquentiels.....	33
Figure II.12 déplacement et angle du système non perturbé	39
Figure II.13 Vitesse linéaire vitesse angulaire du système non perturbé.....	39
Figure II.14 La commande appliquée au système non perturbé	40
Figure II.15 déplacement et angle du système perturbé	41
Figure II.16 Vitesse linéaire et vitesse angulaire du système perturbé.....	41

Figure II.17 déplacement et angle du système perturbé	42
Figure II.18 Vitesse linéaire vitesse angulaire du système perturbé	42
Figure II.19 La commande appliquée au système perturbé	43
Figure III.1 les 5 types usuels de non linéarité.....	46
Figure III.2 combinaisons de non linéarités.....	46
Figure III.3 Le déplacement e t l'ange d u pendule (cas non linéaire) non perturbé.....	56
Figure III.4 Les vitesses (linéaire+angulaire) du pendule (cas non linéaire) non perturbé.....	56
Figure III.5 Le déplacement e t l'ange d u pendule perturbé (cas non linéaire)	57
Figure III.6 Les vitesses (linéaire+angulaire) du pendule non perturbé (cas non linéaire) ...	57
Figure III.7 Le déplacement e t l'ange d u pendule perturbé (cas non linéaire).....	58
Figure III.8 Les vitesses (linéaire+angulaire) du pendule perturbé (cas non linéaire).....	58
Figure III.9 La commande appliquée au pendule perturbé (cas non linéaire).	59

Introduction générale

Introduction générale

Le mot **robuste** est d'origine indoeuropéenne *roudh*, qui signifie rouge ou rouvre (une variété de chêne très dur, identifiée par sa couleur). Il désigne tout ce qui est solide, résistant, dur et fort. En automatique, on qualifie un système de « robuste » en stabilité ou en performance quand sa stabilité et ses performances ne sont pas altérées par des incertitudes sur le modèle. Le rôle de l'automaticien est d'analyser la robustesse et de trouver un correcteur assurant les propriétés de robustesse.

La robustesse est considéré depuis longtemps, une exigence critique d'un système automatisé, cet intérêt particulier a motivé la recherche de théories et techniques garantissant la robustesse ; principalement pour les systèmes linéaires stationnaires, trois phases du développement de ces théories sont à noter.

Les années 30 ont vu émerger des méthodes fréquentielles avec les travaux de Black, Nyquist et Bode qui ont permis de quantifier la robustesse grâce aux notions de marge de gain et de phase .Ces méthodes constituent jusqu'à maintenant le noyau de la théorie de la robustesse et sont prioritairement enseignées, cependant ces méthodes exigent beaucoup de savoir-faire. De plus, elles sont mal adaptées aux systèmes multi-variables.

Les années 60 ont vu se développer, avec les travaux de Kalman, les méthodes optimales dites LQ (Linéaire Quadratique) qui reposent sur la représentation en modèle d'état et la construction d'observateurs, Ces méthodes sont parfaitement adaptées aux systèmes multivariable et sont plus faciles à mettre en œuvre.

Un nouvel élan a été donné aux méthodes fréquentielles durant les années 80 par les travaux de Safonov et Doyle qui ont montré que la robustesse pouvait être garantie par des contraintes sur certaines normes matricielles. D'autre part, les travaux de Zames ont démontré que des propriétés de performance pouvaient être traduites par des contraintes sur des normes pondérées d'opérateurs. Cela a donné naissance à la méthode H_∞ , également appelée méthode de commande fréquentielle avancée.

Ces nombreuses contributions ont enrichi la théorie de la commande robuste, ses objectifs sont passés de garantir la robustesse d'un modèle nominal, à garantir la robustesse de systèmes réels en prenant en compte toutes les incertitudes possibles.

Introduction générale

Plusieurs méthodes de commande robustes existent dans la littérature, on distingue :

- Commande H_∞
- Placement de pôles robuste
- Commande prédictive
- Commande QFT (Quantitative Feedback Theory)

Chacune de ses méthodes présente des points forts et des points faibles, le rôle de l'automaticien est de trouver la méthode adéquate suivant les exigences du cahier de charges en question.

Dans ce travail, seront présentés les fondements théoriques de certaines méthodes de commande robuste, et les résultats de synthèse de correcteurs via ces méthodes.

Le présent travail est organisé comme suit:

Le premier chapitre est consacré aux fondements de base de la commande robuste avec un intérêt particulier aux notions de robustesse, performances robustes, incertitudes, modélisation des incertitudes et fonctions de sensibilité.

Le deuxième chapitre présente deux méthodes de synthèse d'un correcteur robuste dans le cas d'un système linéaire à savoir la synthèse LQG et la synthèse H_∞ et leurs application à un modèle de pendule inversé linéarisé pour mieux illustrer les notions théoriques présentées et discuter des points de force et de faiblesse de chaque méthode.

Le troisième et dernier chapitre envisagera une extension de la méthode H_∞ au cas purement non linéaire. La partie théorique de ce chapitre portera sur deux méthodes de résolution du problème H_∞ qui sont : la technique des approximations successives et la technique des inégalités matricielles non linéaires (NLMI), un exemple de synthèse d'un correcteur via les NLMI sur un modèle de pendule inversé sera présenté ainsi que l'interprétation des résultats obtenus.

On termine ce travail par une conclusion générale évoquant une analyse des résultats obtenus.

Chapitre I

*Introduction à la
commande robuste*

I.1 Introduction

L'analyse de la robustesse d'un système est effectuée en deux étapes indissociables. En premier lieu, il s'agit de trouver un modèle, il existe pour cela plusieurs approches.

- Les modèles de connaissance qui mettent en œuvre les lois de la physique pour mettre un phénomène physique sous forme mathématique.
- Les modèles de représentation qui sont constitués de relations mathématiques qui relient les différentes variables du processus.

La deuxième étape consiste à formaliser les incertitudes entourant le processus et d'en tirer les relations mathématiques quantifiant ses incertitudes pour les injecter au modèle retenu en vue d'élaborer une commande assurant la robustesse du système perturbé.

Le chapitre actuel portera sur les fondements théoriques de la commande robuste dans le cas des systèmes linéaires à temps invariants (LTI)

I.2 Asservissement nominal [9]

On désigne par « système nominal » le modèle mathématique du système que l'on veut commander, ce modèle mathématique ne prend pas en considération les paramètres négligés ou omis durant la construction du dit modèle, regroupés dans la notion d'incertitudes présentée ultérieurement.

Concevoir un asservissement nominal consiste à trouver un correcteur $K(s)$ capable de garantir les performances voulues au système nominal.

Pour une bonne maîtrise de la conception du correcteur $K(s)$ il est nécessaire de comprendre l'intérêt des exigences de performances et de savoir les formuler en critères mathématiques.

I.2.1 Stabilité nominale

La stabilité est une exigence critique d'un asservissement, une perte de stabilité peut facilement détériorer un système et le rendre inutile et causer de graves pertes matérielles voir humaines.

La définition de la stabilité et les théorèmes utilisés pour sa quantification sont nombreux, par souci de commodité, on se propose de reprendre uniquement la définition de la stabilité suivant deux approches à savoir la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité interne.

I.2.1.1 Stabilité au sens au Lyapunov [5]

Définition I.1 :(Fonction de Lyapunov)

Une fonction de Lyapunov V également appelée fonction d'énergie est une fonction de l'état possédant un minimum global à l'équilibre x_0 :

$$V(x) > V(x_0) \text{ Pour tout } x \neq x_0 \quad (\text{I.1})$$

- **Stabilité au sens de Lyapunov**

Un point x_0 est stable au sens de Lyapunov s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ satisfaisant la condition suivante :

$$\frac{d}{dt}(V(x)) < 0 \text{ Pour tout } x \neq x_0 \quad (\text{I.2})$$

Interprétation : la condition imposée sur la fonction de Lyapunov garantit qu'à partir d'une condition initiale x_i différente de x_0 , l'énergie interne du système va décroître jusqu'à atteindre son minimum qui correspond à l'unique point x_0 ; l'état du système tendra donc nécessairement vers x_0 .

Pour appliquer cette approche l'unique inconvénient est le choix de la fonction d'énergie, celles plus utilisées sont de forme quadratique $V_x = (x - x_0)^T Q (x - x_0)$

Avec Q matrice de Lyapunov satisfaisant $Q = Q^T$; ensuite démontrer que :

$$\frac{d}{dt}(V(x)) = \frac{dV(x)}{dt} f(x) < 0 \quad \forall x$$

En appliquant cette définition aux systèmes LTI ou $f(x) = Ax$ et en choisissant $V(x) = x^T Q x$ Avec $Q = Q^T > 0$ Alors $x^T (A^T Q + Q A) x < 0$ sachant que le point d'équilibre est forcément $x = 0$, comme $(x^t x = I)$ pour $x \neq 0$ on aura

$$(A^T Q + Q A) < 0 \quad (\text{I.3})$$

Finalement un système est en stabilité quadratique (au sens de Lyapunov) si et seulement s'il existe une matrice définie positive Q vérifiant le système d'Inégalités Matricielles Linéaire (*en anglais : Linear Matrix Inequality LMI*) suivant :

$$\begin{cases} Q > 0 \\ (A^T Q + Q A) < 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

I.2.1.2 Stabilité interne

Un système est stable de façon interne si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle négative. Ceci assure que pour $u \equiv 0$, l'état $x(t)$ décroît vers 0 indépendamment de la condition initiale. En d'autres termes le système produit des sorties bornées pour des entrées bornées.

Note : La stabilité interne d'un système garantit sa stabilité BIBO mais la réciproque est fautive donc il est plus convenant d'étudier prioritairement la stabilité interne.

La stabilité au sens de Lyapunov impose que $(A^T Q + QA) < 0$.

Ce qui signifie que toutes les valeurs propres (réelles) de la matrice symétrique $(A^T Q + QA)$ sont strictement négatives.

I.2.2 Performances nominales [1]

Durant le processus de synthèse d'une commande l'Automaticien est censé respecter une série de contraintes imposées par son environnement et dictées dans un cahier de charges. En pratique il est difficile de répondre à toutes les spécifications en question. Pour chaque commande certaines spécifications sont satisfaites et d'autres non.

Dans le cas d'une commande robuste les spécifications sont définies dans le point suivant. Leur formulation mathématique est explicitée ultérieurement.

I.2.2.1 Rejet de perturbations

La spécification de rejet de perturbations est fondamentale pour tout système que l'on souhaite commander car les perturbations sont déstabilisantes, et épuisent le système (actionneurs, sources d'énergie...).

La perturbation « d » est rejetée si la différence entre le système perturbé ($d \neq 0$) et le système non perturbé ($d = 0$) est petite (idéalement $d \rightarrow 0$).

I.2.2.2 Suivi de référence

La spécification de suivi de référence également appelé suivi asymptotique de référence est la capacité de la boucle fermée à minimiser un rapport d'énergies, un système suit une référence si pour un signal de référence r donné l'erreur de poursuite $e = r - y$ est faible.

I.2.2.3 Rejet des bruits de mesure

Il s'agit d'étudier l'influence des signaux de bruit $w(t)$ sur le signal de commande $u(t)$ et sur le signal de sortie $y(t)$ (en général, le système à commander G est un système passe-bas, ce qui fait qu'il est plus impératif d'étudier l'influence du bruit $w(t)$ sur $u(t)$ que sur $y(t)$).

I.2.2.4 Modération de la commande

Modérer une commande signifie la minimiser. Cette exigence est importante pour éviter la saturation du système donc sa déstabilisation et garantir une durée de vie optimale pour les composants physiques du système (actionneurs, filtres...).

I.3 Fonction de sensibilité [2]

Les fonctions de sensibilité constituent l'outil mathématique permettant à l'Automaticien d'interpréter les clauses d'un cahier de charges, exprimées en littérature, en fonctions mathématiques en vue de les optimiser.

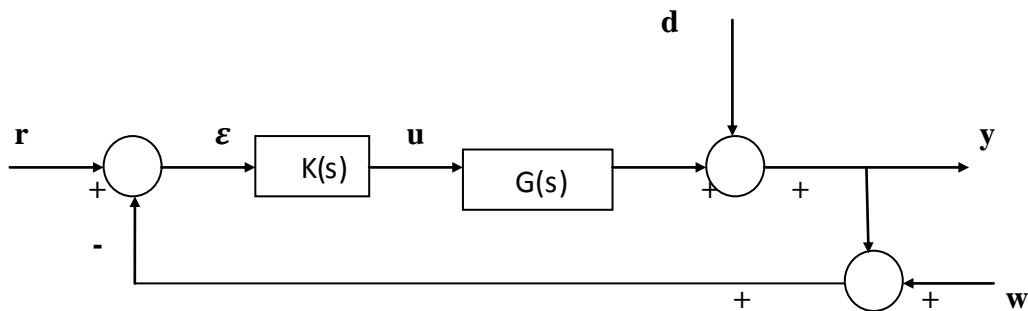


Figure I.1 : système perturbé

a) Fonction de sensibilité en sortie

Soit la matrice de sensibilité en sortie $S_y = (I_q + GK)^{-1}$ et la matrice de sensibilité complémentaire (matrice de transmission) $T_y = (I_q + GK)^{-1}GK$

Avec $S_y + T_y = I_q$

$$y = T_y r + S_y d - T_y w \quad (I.5)$$

$$\varepsilon = S_y r - S_y d + T_y w \quad (I.6)$$

$$u = K S_y (r - d - w) \quad (I.7)$$

Ces deux fonctions caractérisent le fonctionnement de système bouclé, en effet S_y représente :

- l'influence des perturbations sur la sortie et l'erreur.
- La fonction de transfert entre la référence et l'erreur.

De même T_y représente :

- L'influence des bruits de mesures sur la sortie et l'erreur.
- La fonction de transfert entre la référence et la sortie.

b) Fonction de sensibilité en entrée

On fait une permutation entre G et K et on définit les deux fonctions de sensibilité suivante :

$$S_u = (I_p + KG)^{-1} \quad \text{Fonction de sensibilité en entrée.}$$

$$T_u = (I_p + KG)^{-1}KG \quad \text{Fonction de sensibilité complémentaire.}$$

I.4 Les fonctions de pondérations [4]

A fin de garantir de bonnes performances sur le système on introduit des gabarits fréquentiels caractérisés par les filtres de pondération W_1, W_2, W_3 .

On définit les normes H_2 et H_∞ d'une fonction de transfert $G(s)$ comme suit :

$$\|G(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega \right)^{1/2} \quad \text{(I.8)}$$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(j\omega)) \quad \text{(I.9)}$$

Avec σ_{max} : valeur singulière maximale:

Nous aurons donc :

- ✓ Pour un bon suivi de consigne et une rejection de perturbation :

$$\|W_1 S_y(s)\|_\infty \leq 1 \quad \text{(I.10)}$$

- ✓ La modération de la commande :

$$\|W_2 K(s)S_y(s)\|_\infty \leq 1 \quad \text{(I.11)}$$

- ✓ Filtrage des bruits de mesure :

$$\|W_3 G(s)S_y(s)\|_\infty \leq 1 \quad \text{(I.12)}$$

I.5 Représentation d'incertitudes [11]

Agir sur un système suppose au préalable connaître son comportement. Cette connaissance prend la forme d'un ensemble d'équations, appelé modèle mathématique, décrivant la relation existant entre les signaux que le système échange avec l'environnement.

Le modèle est obtenu généralement par modélisation à partir des lois physiques et par identification des paramètres à l'aide d'expériences. Il constitue toujours une représentation imparfaite du processus physique, qui par définition ne peut jamais être connu parfaitement.

La technique de contrôle la plus répandue est celle du contrôle par boucle fermée le contrôleur agit alors de façon à limiter l'erreur entre la mesure et la consigne désirée à partir de l'ensemble des mesures disponibles. Le correcteur est ajusté sur un modèle mathématique, il assure les performances à ce modèle mais peut dans nombreux cas ne pas assurer les performances voulues au système réel.

En plus, et par souci de simplicité, de nombreux paramètres agissant sur le système sont soit ignorées, soit mal interprétés en formulation mathématique, soit incertains.

Pour ces raisons, le contrôle en boucle fermée n'est jamais parfait, cette imperfection est certes tolérable pour une classe de systèmes ou il n'est pas forcément nécessaire d'atteindre entièrement les performances voulues mais reste intolérable pour d'autres classes de systèmes où ces dites performances doivent être scrupuleusement atteintes. D'où la nécessité de concevoir des contrôleurs robustes prenant en compte ces incertitudes, mais avant de concevoir, il faut commencer par définir et interpréter ces incertitudes.

Toutes les incertitudes sont regroupées dans la fonction Δ qui est soit paramétrique (incertitude structurées) ou non paramétrique (incertitude non structurées).

I.5.1 Incertitudes non structurées ou incertitudes dynamiques

Ces incertitudes rassemblent les dynamiques négligées dans le modèle, et les bruits des capteurs. La représentation de ces incertitudes reflète la connaissance des phénomènes physiques et notre capacité à les représenter sous forme simple et facile à manipuler. On distingue cinq représentations des incertitudes non structurées :

- incertitudes additives, Illustrées dans la figure suivante :

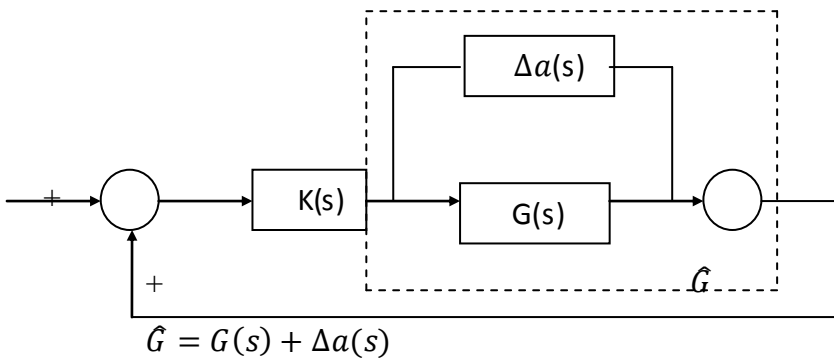


Figure I.2 : Représentation additive.

- incertitudes multiplicative directe en entrée, Illustrées dans la figure suivante :

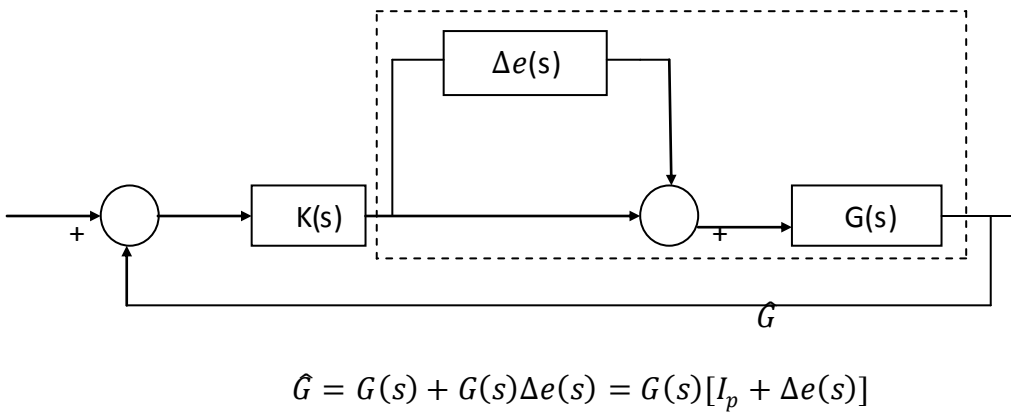


Figure I.3 : représentation multiplicative directe en entrée.

- Incertitudes multiplicatives directe en sortie. Illustrée dans la figure suivante:

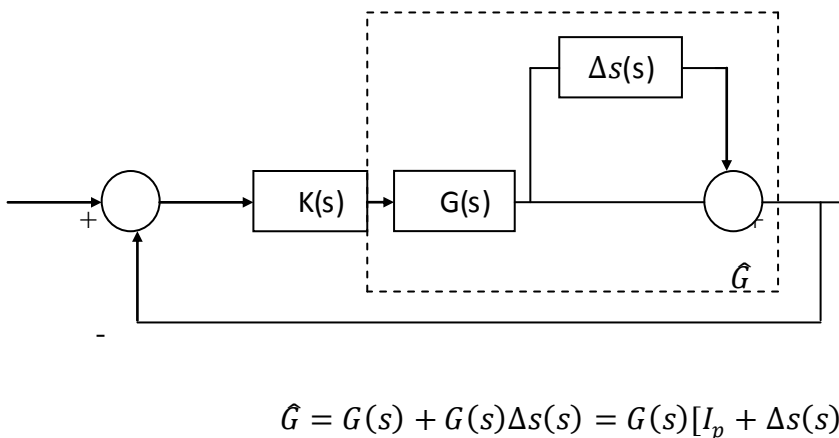


Figure I.4 : Représentation multiplicative directe en sortie.

- Incertitudes multiplicatives inverse en entrée. Illustrées dans la figure suivante :

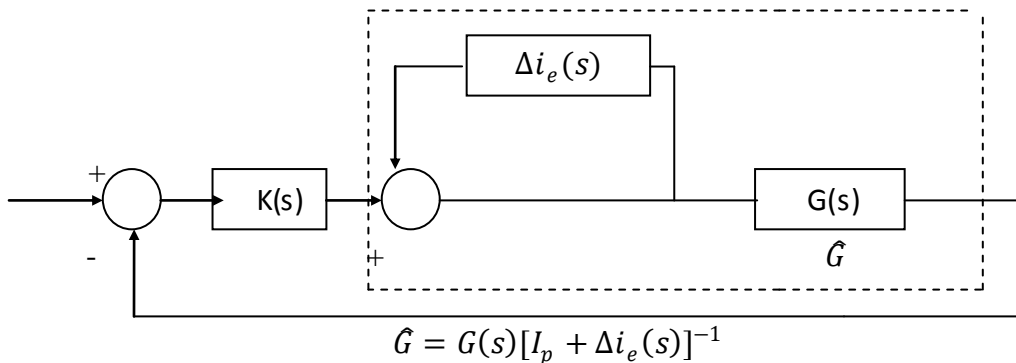


Figure I.5 : Représentation multiplicative inverse en entrée.

- Incertitude inverse en sortie. Illustrée dans la figure suivante :

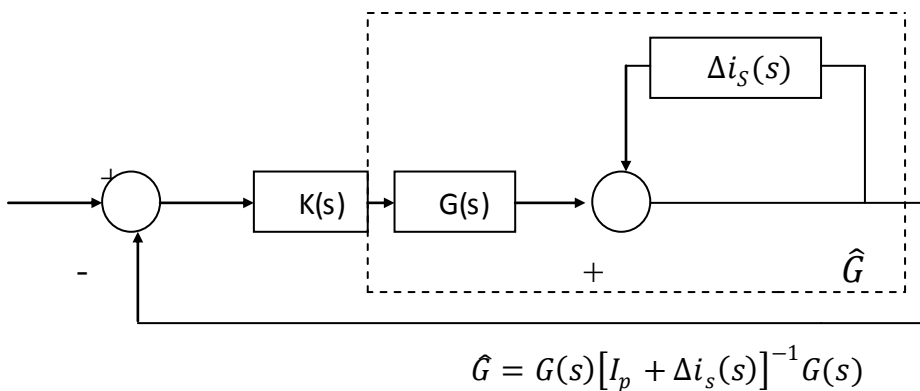


Figure I.6 : Représentation multiplicative inverse en sortie

I.5.2 Incertitudes structurées ou paramétriques

Ces incertitudes sont liées aux variations ou aux erreurs d'estimation sur certains paramètres physique du système, ou à des incertitudes de nature dynamique, mais entrant dans la boucle en différents points. L'incertitude paramétrique intervient principalement lorsque le modèle est obtenu à partir des équations de la physique. Contrairement aux incertitudes non structurées, confinées toutes dans un seul bloc où la seule information disponible est sa norme, les incertitudes structurées permettent de tenir compte de chaque type d'incertitudes, paramétriques ou autres, aux différents points de notre système.

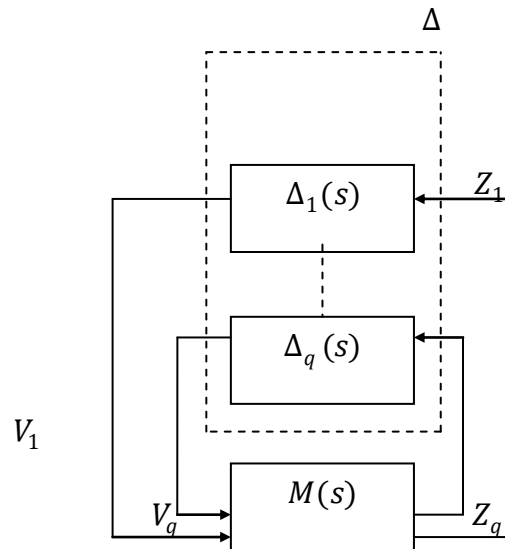


Figure I.7 : représentation des incertitudes structurées

Les différentes incertitudes vues précédemment sont ajoutées au système nominal tiré du modèle pour former un système incertain ou réel.

I.6 Analyse de la robustesse [6][9]

I.6.1 Stabilité robuste

Les systèmes incertains sont en générale définis par la loi dynamique suivante :

$$\dot{x} = f(x(t), \Delta(t))$$

Un système est dit robustement stable si pour chaque incertitude $\Delta(t)$ le système

$$\dot{x} = f(x(t), \Delta(t))$$

est stable.

Dans le contexte de l'étude de la stabilité de systèmes avec incertitudes, c'est-à-dire dans le contexte de l'analyse de stabilité robuste, plusieurs approches peuvent être trouvées dans la littérature.

➤ Approche algébrique

Cette approche envisage la stabilité par l'étude des polynômes caractéristique des systèmes. Elle étend les critères de Routh_Hurwitz au cas de polynômes incertains. Les systèmes sont modélisés par les polynômes de numérateur et dénominateur des fonctions de transfert.

Dans cette approche on trouve des difficultés liées à ce que les coefficients du polynôme caractéristique sont couplés entre eux, elle prend difficilement compte du couplage des coefficients quand ils dépendent des mêmes paramètres incertains.

➤ Approche temporelle

La stabilité est étudiée sur la base de la théorie de Lyapunov, alors il faut chercher une matrice le Lyapunov P qui vérifie pour le système dynamique $\dot{x} = A(\Delta)x + Bu$:

$$x^T [A^T(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta)]x < 0, \quad \forall x \neq 0$$

On trouve aussi dans la littérature la notation stabilité quadratique qui est vérifiée avec la recherche d'une fonction de Lyapunov unique pour toutes les incertitudes tels que :

$$x^T [A^T(\Delta)P + PA(\Delta)]x < 0, \quad \forall x \neq 0$$

Avec l'intention d'obtenir des conditions d'analyse chaque fois moins conservatives, des FLDP (fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres) ont été fréquemment utilisées. Ces FLDP sont des fonctions quadratiques dont la matrice $P(\Delta)$ dépend des paramètres.

➤ Approche fréquentielle

La stabilité dans cette approche est basée sur la représentation fréquentielle des incertitudes, parmi ses études on trouve la synthèse LQG/LTR (linear quadrique gaussien/loop transfert recovery). les modèles incertains peuvent être de type additif ou multiplicatif, la forme la plus adoptée maintenant est la forme LTI de la figure suivante :

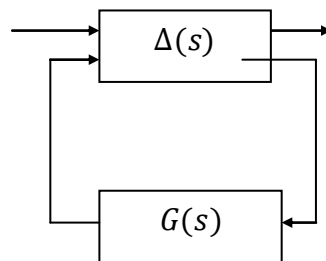


Figure I.8 : Interconnexion G, Δ

Cette modélisation est l'origine de la commande H_∞ qui suppose que l'opérateur $\Delta(s)$ non structuré complexe et borné.

I.6.2 Performances robustes

Les performances de système sont valides dans la mesure où l'ensemble des réalisations incertaines satisfont simultanément les mêmes performances. Un système incertain satisfait une performance robuste si et seulement si l'ensemble des systèmes LTI qui le constituent satisfont cette même performance.

Toutes les incertitudes définissent un transfert $w \rightarrow z$, noté $T(\Delta, s)$. Le coût H_∞ de ce transfert dépend de l'incertitude :

$$\Gamma \geq \|T(\Delta, s)\|_\infty$$

Pour fixer une performance robuste il nous faut imposer une borne supérieure à l'ensemble des coûts $\Gamma(\Delta)$. Cette méthode nous garantit une borne maximum sur toutes les incertitudes de l'amplification des perturbations.

La fonction de sensibilité S_y définie précédemment traduit parfaitement les performances puisqu'elle représente le transfert entre la référence et l'erreur et encore dans le transfert entre la perturbation et l'erreur.

I.7 Conclusion

L'intérêt de la commande robuste est essentiellement sa capacité à transformer les problèmes de synthèse de lois de commande classiques basées sur l'analyse nécessitant un savoir faire et des connaissances théoriques importantes de la part de l'Automaticien en des problèmes d'optimisation facilement compréhensibles et programmables.

Dans ce chapitre nous avons introduit les notions de base d'une commande robuste pour les systèmes LTI et les performances essentiellement attendues d'un correcteur robuste, mais comme tous les systèmes ne sont pas linéaires il est important d'étendre cette notion aux systèmes non linéaires mais avant de le faire, nous allons appliquer ces bases théoriques en premier lieu à un système linéaire ainsi le chapitre suivant portera sur les méthodes de commande robuste des systèmes linéaires.

Chapitre II

*Méthodes de commande
robuste des systèmes linéaires*

II.1 Introduction

Dans la littérature, plusieurs commandes robustes existent. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à deux méthodes de synthèse d'un correcteur robuste connues pour leur efficacité, à savoir la commande LQG et la commande H_∞ , le chapitre aura donc deux parties indépendantes chacune traitera d'une méthode spécifique, dans chaque partie seront exposés les fondements théoriques de chaque méthode ainsi que son algorithme de mise en œuvre et quelques remarques sur ces méthodes. Chaque partie se terminera par un exemple illustratif de mise en œuvre.

II.2 Commande LQ [17]

Les méthodes LQ ce sont développées durant les années 60, avec les travaux de Kalman, ces méthodes reposent sur la représentation en modèle d'état et la construction d'observateurs, Ces méthodes sont parfaitement adaptées aux systèmes multivariables et sont plus faciles à mettre en œuvre.

II.2.1 Formulation d'un problème de commande LQ

Soit un système linéaire continu invariant dans le temps, supposé commandable et observable décrit par les équations d'états suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Avec } e(t) = x^d(t) - x(t) \quad (\text{II.2})$$

Où $e(t)$: vecteur d'erreur

$x(t)$: vecteur d'état

x^d : vecteur de consigne

Où $A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in R^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{p \times n}$ matrice d'observation, $D \in R^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe.

Une matrice D non nulle correspond à une transmission directe d'information entre l'entrée et la sortie, pour beaucoup de modèles $D = 0$.

Le critère quadratique d'optimalité est donné par :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t)Qe(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (\text{II.3})$$

Avec $Q \geq 0$ et $R > 0$. Ces deux matrices sont appelées matrices de pondération dont Q donne un poids différent à chaque composante du vecteur erreur dans le critère, et R affecte un poids différent à chaque composante du vecteur de commande.

Soit le schéma suivant qui illustre le bloc du régulateur LQ :

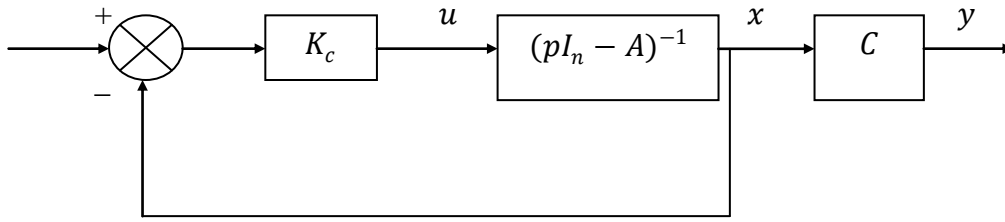


Figure II.1 : Schéma bloc du régulateur LQ

On obtient alors le régulateur LQ en appliquant directement la commande :

$$u(t) = -K_c x(t) \quad (\text{II.4})$$

Où
$$K_c = R^{-1} B P \quad (\text{II.5})$$

Avec P la solution de l'équation algébrique de Ricatti suivante :

$$P A + A P - P B R^{-1} B P + Q = 0 \quad (\text{II.6})$$

On constitue une boucle fermée par un correcteur $K(p) = K_c$ appliqué au système, de matrice de transfert suivante :

$$G(p) = (pI - A)^{-1} B \quad (\text{II.7})$$

La matrice de transfert de la boucle ouverte du système est :

$$T(p) = K(p)G(p) \quad (\text{II.8})$$

Où
$$K(p) = K_c (pI - A)^{-1} B \quad (\text{II.9})$$

II.2.2 Valeurs singulières du régulateur LQ

Théorème II.1 [16]

Si K_c et P vérifient l'équation de Ricatti (II.6) alors :

$$\forall \omega (I_m + K_c \varphi(j\omega)B)^* R (I_m + K_c \varphi(j\omega)B) = R + B^* \varphi(j\omega)^* \varphi(j\omega) B \quad (\text{II.10})$$

En notant $\varphi(j\omega) = (j\omega I_n - A)^{-1}$

Et $()^*$ désigne la matrice transposée conjuguée

Corollaire II.1

Q est définie semi-positive alors on peut écrire $Q = H^T H$ et on choisie $R = \rho I_m$

$$\forall \omega (I_m + K_c \varphi(j\omega)B)^* R (I_m + K_c \varphi(j\omega)B) = I_m + \frac{1}{\rho} (H\varphi(j\omega)B)^* (H\varphi(j\omega)B) \quad (\text{II.11})$$

On en déduit que

$$\sigma_i(I_m + K_c \varphi(j\omega)B) = \sqrt{\lambda_i(I_m + \frac{1}{\rho} (H\varphi(j\omega)B)^* (H\varphi(j\omega)B))} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{Soit encore} \quad \sigma_i(I_m + K_c \varphi(j\omega)B) = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i(H\varphi(j\omega)B)^2} \quad i=1, \dots, m \quad (\text{II.13})$$

Plusieurs résultats découlent de cette relation :

a) Marge de stabilité

La relation(II.11) implique que :

$$\forall \omega \sigma_i(I_m + K_c \varphi(j\omega)B) \geq 1 \quad (\text{II.14})$$

Or $K_c \varphi(j\omega)B$ est la matrice de transfert en boucle ouverte du régulateur LQ et la relation $\sigma_i(I_m + K_c \varphi(j\omega)B)$ est l'une des quantités caractéristiques de la robustesse traduit en termes de marge de stabilité, le fait que $B_2(B_2 = \min_{\omega} \sigma_i(I_m + K_c \varphi(j\omega)B))$ de cette quantité soit au moins égale à 1 indique que les marges minimales sont égales aux valeurs suivantes :

- Marge de gain :]0.5 +∞[
- Marge de phase :]-60° +60°[

b) Comportement des valeurs singulières de la boucle ouverte

Nous avons vu qu'on basse fréquences les valeurs singulières de la boucle ouverte doivent être grandes pour assurer des performances correctes.

C'est si le cas, la relation (II.11) nous permet d'écrire :

$$\sigma_i(I_m + K_c \varphi(j\omega)B) \approx \frac{\sigma_i(H\varphi(j\omega)B)}{\sqrt{\rho}} \quad \text{si } \sigma_i(K_c \varphi(j\omega)B) \gg 1 \quad (\text{II.15})$$

On peut montrer aussi qu'en hautes fréquences on obtient l'approximation suivante :

$$\sigma_i(K_c \varphi(j\omega)B) \approx \frac{\sigma_i(HB)}{\omega \sqrt{\rho}} \quad \text{pour } \omega \rightarrow +\infty \quad (\text{II.16})$$

Si $\sigma_i(K_c \varphi(j\omega)B)$ est faible on retrouve approximativement (II.15). Or pour $\omega \rightarrow +\infty$

$\varphi(j\omega)$ se comporte comme $(\frac{1}{j\omega})I_m$

On peut donc faire les constatations suivantes :

- Les valeurs singulières de la boucle ouverte sont directement liées aux matrices de pondération $Q = H^T H$ et $R = \rho I_m$ du critère. Et si on n'a pas les matrices comme données on peut à l'aide des approximations orienter le choix de H et ρ pour modeler les valeurs singulières de la boucle ouverte en hautes et basse fréquences.
- En hautes fréquences, l'atténuation se produit nécessairement suivant une loi $\frac{1}{\omega}$ ce qui peut être insuffisant vis-à-vis des incertitudes de modélisation hautes fréquences, si celle-ci croissent beaucoup plus vite, ainsi que pour l'atténuation des bruits de mesure. Ceci peut être considéré comme le prix à payer pour obtenir des excellentes marges de stabilité qui garantissent le comportement pour des incertitudes aux fréquences moyennes (au voisinage de fréquence de coupure).

II.2.3 Calcul d'un régulateur LQ

Dans la théorie classique du régulateur LQ les matrices de pondérations sont en général choisies à partir de considérations physiques et par essais successifs. Les objectifs de performance nominale et de robustesse en stabilité peuvent en effet être traduits en terme de 'loop_shaping' sous la forme générale suivante :

$$\underline{\sigma}(K_c \varphi(j\omega)B) > |w_1(j\omega)| \quad \text{pour } \omega < \omega_b \quad (\text{II.17})$$

$$\overline{\sigma}(K_c \varphi(j\omega)B) < \left| \frac{1}{w_3(j\omega)} \right| \quad \text{pour } \omega > \omega_h \quad (\text{II.18})$$

Ces deux contraintes étant plus faciles à satisfaire que les valeurs singulières sont équilibrées, c'est-à-dire proches les unes des autres. On général on peut atteindre des objectifs de ce type avec une pondération diagonale sur la sortie.

$Q = C^T \text{diag}\{q^1 \dots q^p\}C$ et au critère :

$$J = \int_0^\infty (\sum_{i=1}^p q_i y_i(t)^2 + \rho \sum_{j=1}^m u_j(t)^2) dt \quad (\text{II.19})$$

II.2.4 Commande LQG [16][17]

II.2.4.1 Formulation d'un problème de commande LQG

Soit le système décrit par les équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = Cx(t) + w(t) \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Où le bruit d'état v et le bruit de mesure w sont des bruits blancs centrés, de variance :

$$\begin{aligned} E\{v \cdot v^T\} &= v \geq 0 \\ E\{w \cdot w^T\} &= w > 0 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Le régulateur LQG réalise l'optimisation du critère quadratique :

$$J^* = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \right\} \quad (\text{II.22})$$

II.2.4.2 Théorème de séparation

Ce théorème énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- Un observateur de Kalman permettant de donner l'estimé \hat{x} de x .
- La commande par retour d'état $u(t) = -K_c \hat{x}(t)$ à \hat{x} où K_c est calculé en considérant le problème LQ correspondant.

II.2.4.3 Structure de la commande LQG

L'estimée optimale \hat{x} est donnée par l'observateur d'équation d'état :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t)K_f(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (\text{II.23})$$

Où le gain du filtre de Kalman est :

$$K_f = \Sigma C^T w^{-1} \quad (\text{II.24})$$

Avec Σ est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$\Sigma A^T + A\Sigma - \Sigma C^T w^{-1} C \Sigma + v = 0 \quad (\text{II.25})$$

On constitue ainsi une boucle fermée par un correcteur $K^*(p)$ donnée par :

$$K^*(p) = K_c (pI_n - A + BK_c + K_f C)^{-1} \quad (\text{II.26})$$

Et appliqué au système de matrice de transfert suivante :

$$G^*(p) = C (pI_n - A)^{-1} B \quad (\text{II.27})$$

Comme le montre le schéma suivant :

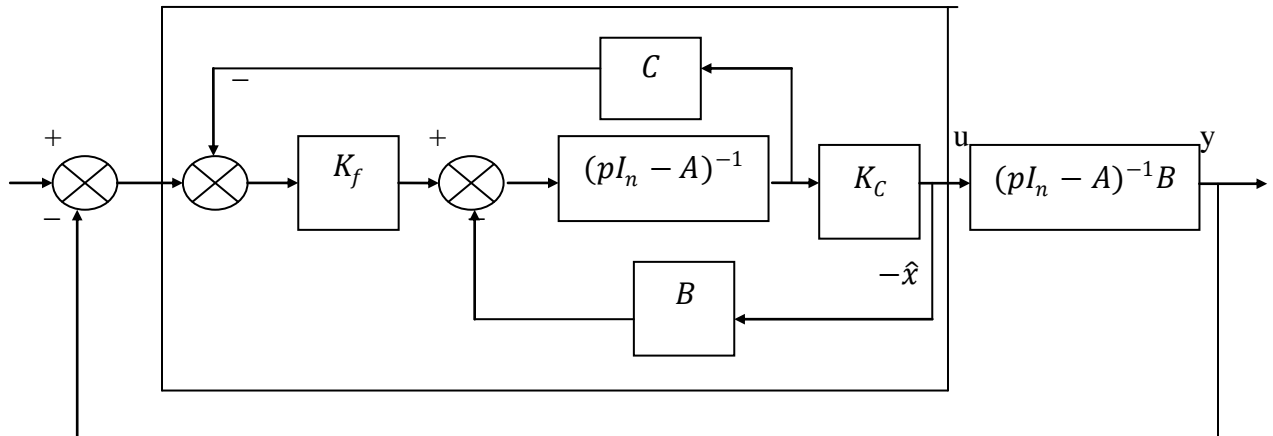


Figure II.2 : schéma bloc de LQG

La matrice de transfert en boucle ouverte à l'entrée du système est donc :

$$T^*(p) = G^*(p)K^*(p) \quad (\text{II.28})$$

Avec
$$G^*(p)K^*(p) = K_c(pI_n A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f C \Phi(p) \quad (\text{II.29})$$

II.2.4.4 Choix des matrices de pondération

La configuration du régulateur LQG nécessite l'introduction de quatre matrices de pondération :

Q et R pour le retour d'état

V et W pour l'estimateur

La méthode de réglage la plus simple est de régler V et W de sorte que l'état soit bien reconstruit ensuite régler Q et R pour avoir un bon retour d'état

Remarque : si les dynamiques de la régulation sont lentes devant celles de l'observation on peut supposer que l'état est parfaitement connu et la commande sera robuste .sinon, la robustesse ne peut plus être assurée.

II.2.4.5 Réglage de l'estimateur d'état

L'estimateur d'état repose sur la commande u et la mesure y , compte tenu des incertitudes affectant le modèle et des bruits affectant la mesure.

Evaluer le bruit de mesure w en observant y ; ce qui n'est pas le cas du bruit d'état v . Ce bruit peut être attribué à la commande u en choisissant $v = Bv_u B^T$ avec v_u la variance du bruit de mesure. la principale source de bruit d'état d'un modèle provient des erreurs de modélisation. La validation du filtre de Kalman peut se faire en simulation.

II.2.5 Synthèse de la commande LQG/LTR

II.2.5.1 Recouvrement en entrée

Considérons le système :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = Cx(t) + w(t) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

On considère comme matrices de covariance des bruits :

$$\begin{cases} E\{vv^T\} = V + V_0 + q^2 BB^T \\ E\{ww^T\} = W_0 \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Où :

V_0 et W_0 sont les matrices de covariance nominales des bruits assurant au filtre une dynamique satisfaisante

q est un paramètre scalaire ajoutant un bruit fictif sur la commande, non corrélé avec le véritable bruit d'état et dont la covariance est $q^2 I_m$.

Théorème II.2

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- i. $\dim y \geq \dim u$ ($p \geq m$)
- ii. $G^*(p) = C(pI_n - A)^{-1}B$ n'a aucun zéro dans le demi-plan droit $Re(p) \geq 0$.

Alors quand $q \rightarrow \infty$:

$$\triangleright K_f \rightarrow qBM_q(W_0^{1/2})^{-1} \quad (\text{II.32})$$

Où M_q est une matrice $m \times p$ de rang m vérifiant $M_q M_q^T = I_m$ et $W_0^{1/2}$ est une matrice carrée $p \times p$ vérifiant $W_0^{1/2}(W_0^{1/2})^T = W_0$

Pour toute valeur de p :

$$\triangleright T^*(p) \rightarrow T(p) = K_c(pI_n - A)^{-1}B \quad (\text{II.33})$$

Pour la boucle fermée par l'observateur et le régulateur le principe de la synthèse est d'augmenter progressivement q jusqu'à obtenir une matrice de transfert suffisamment proche de la matrice obtenue pour le régulateur d'état. Pour ce faire, on compare les valeurs singulières des matrices $T^*(p)$ et $T(p)$.

Si l'on cherche un recouvrement en sortie, il convient d'appliquer la procédure duale exposée ci-dessous.

II.2.5.2 Recouvrement en sortie

Soit le système (II.30). On considère comme matrice de covariance :

$$\begin{cases} E\{vv^T\} = V = LL^T \\ E\{ww^T\} = W = \mu I_p \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

L'observateur d'équation :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t)K_f(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (\text{II.35})$$

Peut être interprété comme un modèle du système, bouclé par le gain K_f

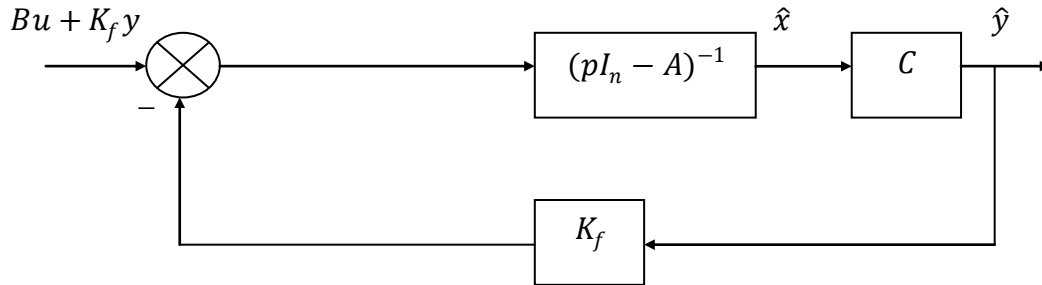


Figure II.3 : Schéma bloc de l'observateur

On forme alors la matrice de la boucle ouverte :

$C(pI_n - A)^{-1}K_f$ elle possède les propriétés suivantes :

$$\forall \omega \quad \sigma_i(I_p + C\phi(j\omega)K_f) \geq 1 \quad (\text{II.36})$$

- $\sigma_i(C\phi(j\omega)K_f) \approx \frac{\sigma_i(C\phi(j\omega)L)}{\sqrt{\mu}}$ si $\sigma_i(C\phi(j\omega)K_f) \gg 1$ (II.37)

Donc en basses fréquences

- $\sigma_i(C\phi(j\omega)K_f) \approx \frac{\sigma_i(CL)}{\sqrt{\mu}}$ pour $\omega \rightarrow \infty$ (II.38)

On peut donc choisir L et μ afin d'obtenir pour $(C\phi(j\omega)K_f)$ des valeurs singulières correctes, respectant des conditions de performances ($\underline{\sigma}(C\phi K_f)$ suffisamment grandes en basses fréquences) et de robustesse ($\overline{\sigma}(C\phi K_f)$ suffisamment faible en hautes fréquences).

Le retour d'état K_c est ensuite calculé pour obtenir le recouvrement de la matrice de transfert en boucle ouverte $(C\phi(j\omega)K_f)$ de l'observateur. A cette fin on prend pour matrice de pondération du critère quadratique :

$$\begin{cases} Q = Q_0 + q^2 C^T C \\ R = R_0 \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\dim u \geq \dim y \quad (m \geq p)$$

$$G(p) = C(pI_n - A)^{-1}B \quad \text{n'a aucun zéro dans le demi-plan droit } \operatorname{Re}(p) \geq 0.$$

Alors quand $q \rightarrow \infty$:

$$\triangleright K_c \rightarrow q(R_0^{1/2})^{-1}N_q C \quad (\text{II.40})$$

Où N_q est une matrice $m \times p$ de rang p vérifiant $N_q^T N_q = I_p$ et $R_0^{1/2}$ est une matrice

carrée $m \times m$ vérifiant $R_0^{1/2}(R_0^{1/2})^T = R_0$

Pour toute valeur de p :

$$\triangleright T^*(p) \rightarrow T(p) = C(pI_n - A)^{-1}K_f \quad (\text{II.41})$$

L'approche duale assure le recouvrement pour la matrice de transfert de la boucle ouverte en sortie du système.

II.2.6 Application au pendule inversé

En ce qui suit nous allons nous intéresser à un exemple pratique de mise en œuvre d'un correcteur robuste LQG

Le procédé visé est un pendule inversé.

Le pendule inversé est couramment utilisé comme simulateur, atout de la robotique ce même principe est utilisé par exemple en médecine pour illustrer les différentes contraintes auxquelles est soumise une prothèse de hanche.

II.2.6.1 Modèle du système [15]

La dynamique du système « pendule+chariot » est obtenue en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange à 2 degrés de liberté (x et θ).

Le système d'équations obtenu est le suivant :

$$(M + m)\ddot{x} + f\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F(t) \quad (\text{II.42})$$

$$ml \cos \theta \ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (\text{II.43})$$

L'interprétation et les valeurs numériques des différents paramètres sont détaillés au tableau suivant :

Paramètre	valeur
g : Gravité	$9.81 m/s^2$
L : longueur de la tige	0.38 m
M : masse du chariot	2.4 kg
m : masse du pendule	0.23 kg
I : moment d'inertie du pendule	0.099
F : coefficient de frottements du chariot	0.05
K : coefficient d'amortissement	0.005

Le système obtenu est non linéaire à cause des fonctions « sin et cos », l'étude d'un correcteur directement à partir du système non linéaire n'est pas l'objectif de cet exemple illustratif donc nous opterons pour la linéarisation du système avant de concevoir le correcteur.

II.2.6.2 Linéarisation du modèle

Ce système admet 2 points d'équilibre par rapport à l'axe y qui sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Le modèle obtenu sera par conséquent valable pour de petites variations de θ autour de 0 et π de $\pm 10^\circ$

Linéarisation autour du point $\theta = 0$:

$$\text{Dans ce cas } \begin{cases} \cos \theta \cong 1 \\ \sin \theta \cong 0 \\ \dot{\theta} \approx 0 \text{ et } \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent les équations du système deviennent :

$$(M + m)\ddot{x} + f\dot{x} + ml\ddot{\theta} = F(t) \quad (\text{II.44})$$

$$ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} - mgl\theta = 0 \quad (\text{II.45})$$

Linéarisation autour du point $\theta = \pi$:

$$\text{Dans ce cas } \begin{cases} \cos \theta \cong -1 \\ \sin \theta \cong 0 \\ \dot{\theta} \approx 0 \text{ et } \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent les équations du système deviennent :

$$(M + m)\ddot{x} + f\dot{x} - ml\ddot{\theta} = F(t) \quad (\text{II.46})$$

$$-ml\ddot{x} + (I + ml^2)\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (\text{II.47})$$

Les variables qui nous intéressent sont la position du chariot (x) et l'angle que fait le pendule (θ)

Pour la mise sous forme de représentation d'état le vecteur d'état retenu est :

$$X = (x_1; x_2; x_3; x_4)^T = (x; \frac{dx}{dt}; \theta; \frac{d\theta}{dt})^T ;$$

La représentation d'état trouvée est la suivante :

Pour $\theta = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-f(I+ml^2)}{I(m+M)+Mml^2} & \frac{-(ml^2)g}{I(m+M)+Mml^2} & \frac{+kml}{I(m+M)+Mml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{+mlf}{I(m+M)+Mml^2} & \frac{+ml(M+m)g}{I(m+M)+Mml^2} & \frac{-(M+m)k}{I(m+M)+Mml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1+m)l^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{-ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{pmatrix} u \quad (\text{II.48})$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Le programme réalisé sous Matlab permet de :

- Calculer le modèle.
- Représenter le système incertain ou augmenté.
- Synthétiser le correcteur LQG.
- Tracer les gabarits sur S et KS.

II.2.6.3 Analyse des résultats de simulation :

Les figures suivantes illustrent les gabarits sur la fonction de sensibilité S et le transfert KS

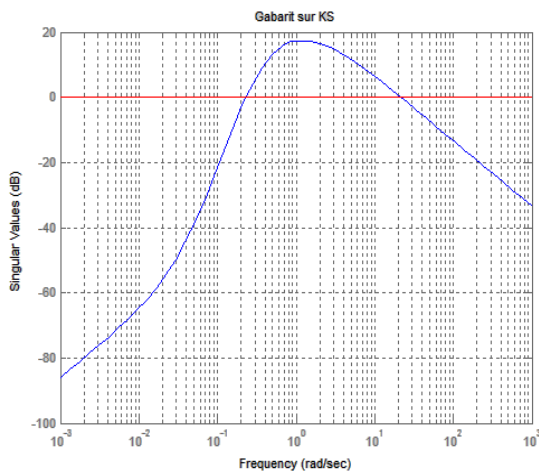


Figure II.4 : Gabarit sur KS

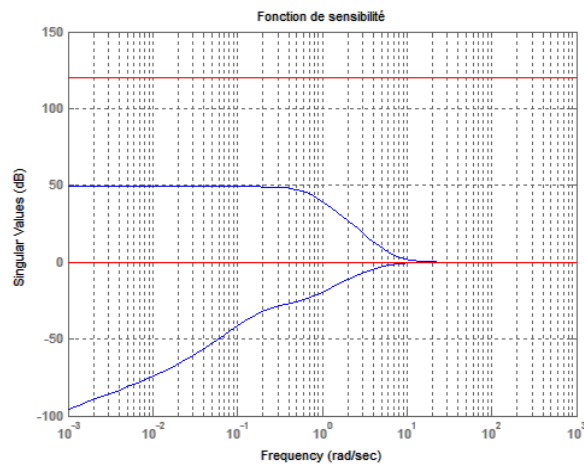
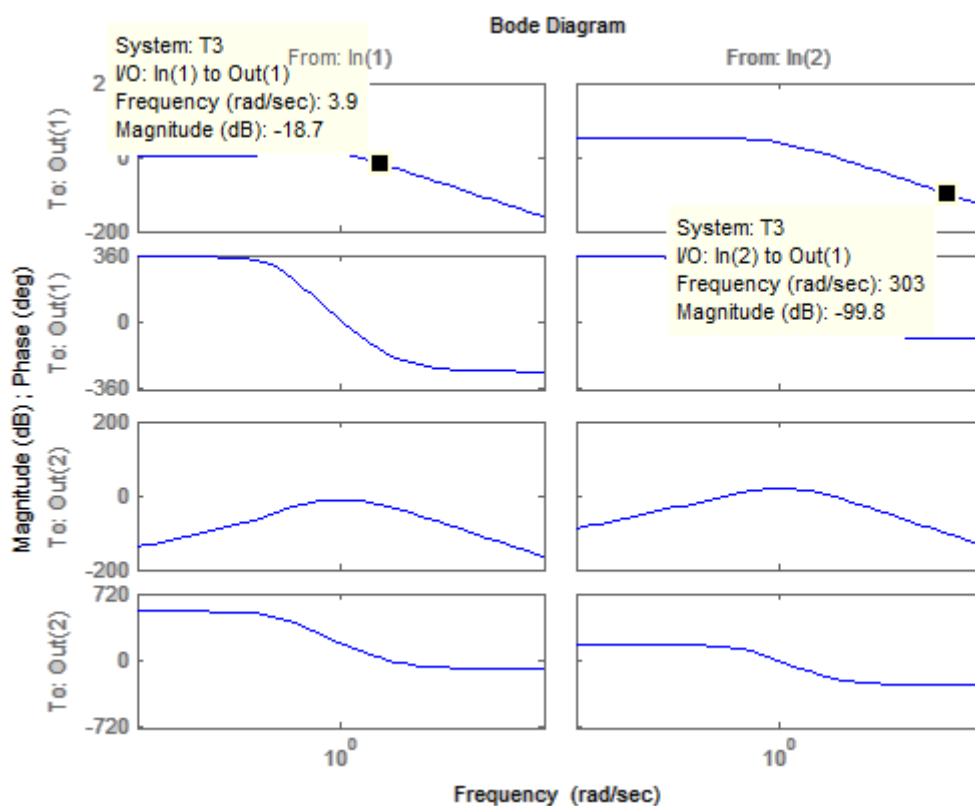
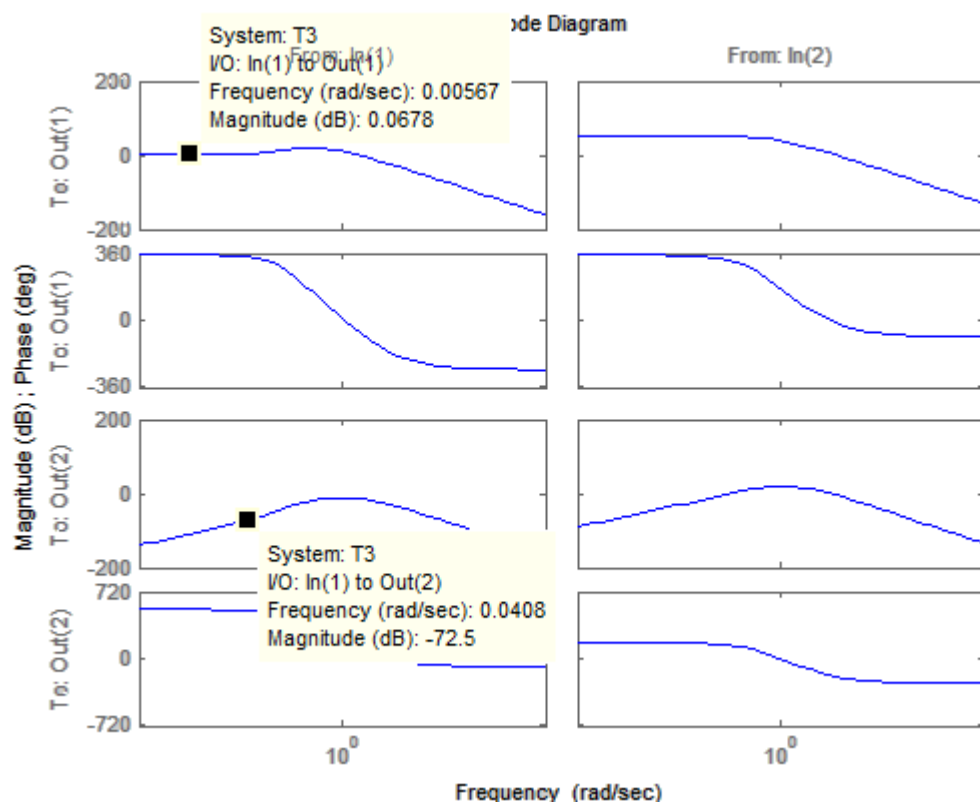


Figure II.5 : fonction de sensibilité

Les figures suivantes montrent les allures de la fonction de sensibilité $S = \text{inv}(I_q + GK)$ et la fonction de sensibilité complémentaire $T = \text{inv}(I_q + GK)GK$



La fonction de sensibilité S en sortie montre un gain très faible en basses fréquences (0.0678 dB à 0.00567 rad/s et -72.5 dB à 0.0408 rad/s) .ce qui implique une erreur très faible et une bonne rejection des perturbations.

La fonction de sensibilité complémentaire T montre un gain très faible en hautes fréquences (-18.7 dB à 3.9rad/s et -99.8 dB à 303 rad/s) ce qui implique une très bonne atténuation des bruits.

II.2.6.2 Conclusion

D'après les résultats de simulation, le régulateur LQG permet de :

- atténuer les bruits.
- rejeter les perturbations.
- Réduire l'erreur à une valeur très faible.

II.3 La synthèse H_∞

La synthèse H_∞ est l'une des méthodes les plus utilisées en commande robuste, elle permet de répondre à un bon nombre de spécifications d'un cahier de charges. L'intérêt de cette commande est sa simplicité de mise en œuvre, elle peut aisément être programmée sur un ordinateur.

II.3.1 : Fondements théoriques

Les notions supplémentaires suivantes non introduites précédemment sont indispensables à la synthèse d'un correcteur H_∞ .

II.3.1.1 Notion du petit gain [1]

Théorème II.4 : (Théorème du petit gain)

La famille de systèmes (M, Δ) représentées en figure II.6 est stable pour toutes les (matrices des) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$ (respectivement $\|\Delta\|_\infty < \gamma$) si et seulement si $\|M\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ respectivement $\|M\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$

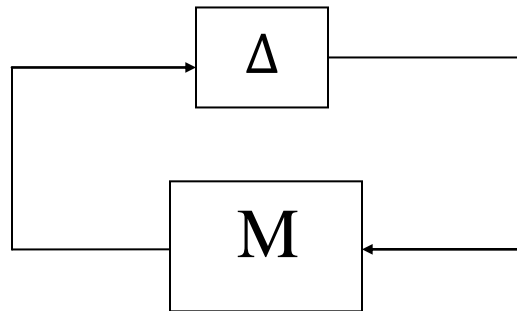


Figure II.8 : connexion entre M et Δ

La démonstration du théorème du petit gain est basée sur le critère de Nyquist dans le cas des systèmes multi variables.

Le théorème du petit gain est un outil adéquat pour traiter le problème de stabilité robuste car il jouit de la particularité (une fois vérifié) de garantir la stabilité de la famille de systèmes entière.

II.3.1.2 Sensibilité mixte [11]

La formalisation mathématique du cahier de charges introduite au premier chapitre peut être résumée comme suit:

Exigence	Condition de satisfaction
Bon suivi de consigne et rejet de perturbation	$\ W_1 S_y\ _\infty \leq 1$
Modération de la commande	$\ W_2 K S_y\ _\infty \leq 1$
Filtrage des bruits de mesure	$\ W_3 G S_y\ _\infty \leq 1$

Les fonctions KS_y et GS_y jouent le même rôle, ainsi il est plus judicieux de résoudre uniquement l'un des deux problèmes suivants qui désignent le problème de sensibilité mixte :

$$\left\| \frac{W_1 S_y}{W_3 G S_y} \right\|_{\infty} < 1 \quad \text{Ou} \quad \left\| \frac{W_1 S_y}{W_2 K S_y} \right\|_{\infty} < 1 \quad (\text{II.49})$$

II.3.1.3 Notion de forme standard [11]

Après avoir introduit ces notions théoriques il est temps de s'intéresser au problème H_{∞} et sa solution. Commençons par considérer le système représenté en figure (II.8)

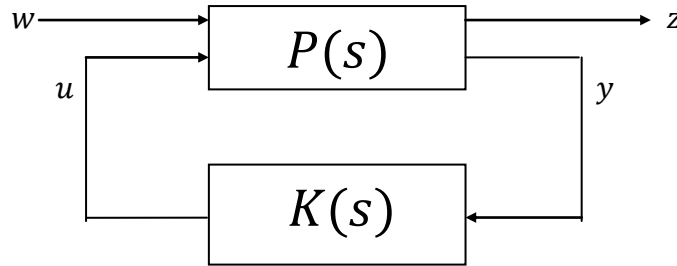


Figure II.9 : Interconnexion de K(s) et P(s)

Cette structure représente la forme standard qui explicite les interconnexions entre deux ensembles d'entrées et deux ensembles de sortie, on note par :

w : Les entrées extérieures (références, perturbations, bruits).

u : Les commandes.

z : Les sorties régulées et les grandeurs à surveiller.

y : Mesures (observables) disponibles pour élaborer une commande

En présence des entrées extérieures, le système devient un système augmenté noté $P(s)$.

$$P(s) = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) & +B_{\omega} w(t) & +B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) & +B_{z\omega} w(t) & +D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) & +D_{y\omega} w(t) & +D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

Avec $x(t_0) = x_0$

Dans le domaine de Laplace le système précédant s'écrit :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{z\omega}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{y\omega}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{z\omega} & D_{zu} \\ D_{y\omega} & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B_{\omega} \quad B_u] \quad (\text{II.51})$$

Lorsque ce système est rebouclé sur la commande $u = K(y)$ On définit par $Z(s)$ le transfert entre z et u tel que :

$$Z(s) = \left(P_{z\omega}(s) + P_{zu}(s)K(s) \left(I - P_{yu}(s)K(s) \right)^{-1} P_{y\omega}(s) \right) w(s) \quad (\text{II.52})$$

Noté aussi $\mathcal{F}_l(P, K)$ ou produit de Redheffer défini en annexe.

II.3.1.4 Problème H_∞ standard [11]

Pour le système décrit par les équations (II.50) et supposé de réalisation minimale, Etant donné $\gamma > 0$, trouver un correcteur $u = K(y)$ tel que la boucle fermée $\mathcal{F}_u(P, K)$ soit :

- Asymptotiquement stable (tous les pôles sont à partie réelle négative)
- $\|\mathcal{F}_u(P, K)\|_\infty < \gamma$

Ce problème peut être résolu via deux approches. La première approche repose sur la résolution d'une série d'équations de Ricatti également appelée algorithme de Glover-Doyle. Cette approche nécessite la vérification d'un certain nombre d'hypothèses qui peuvent être non vérifiées alors que le problème H_∞ standard admet une solution, autrement dit ces hypothèses garantissent des calculs allégés, sans ces hypothèses le calcul sera très complexe et la méthode perdra de sa rentabilité. Une deuxième solution au problème H_∞ standard permet de faire l'économie de ces hypothèses, elle est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

II.3.2 Résolution du problème H_∞ par équations de Ricatti

II.3.2.1 : Conditions d'existence d'une solution

Pour vérifier l'existence d'une solution au problème il est nécessaire de vérifier les quatre hypothèses suivantes :

- i. (A, B_u) est stabilisable et (C_y, A) est détectable, cette hypothèse garantit la stabilité du système en boucle fermée
- ii. $\text{Rang}(D_{zu} = m_u)$ et $\text{rang}(D_{y\omega} = p_y)$ ce sont deux conditions suffisantes pour que le correcteur $K(s)$ soit propre
- iii. $\text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix} = n + m_u$, cette hypothèse garantit que le transfert P_{zu} n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire.
- iv. $\text{Rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_\omega \\ C_y & D_{y\omega} \end{bmatrix} = n + p_y$, cette hypothèse garantit que le transfert $P_{y\omega}$ n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire.

Les quatre hypothèses précédentes doivent être impérativement vérifiées pour garantir un correcteur optimal.

Pour simplifier les calculs cette méthode introduit les conditions supplémentaires suivantes :

$$D_{z\omega} = 0, \quad D_{zu}^T [C_z \quad D_{zu}] = [0 \quad I_{mu}], \quad D_{yu} = 0, \quad \begin{bmatrix} B_\omega \\ D_{y\omega} \end{bmatrix} D_{y\omega}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{py} \end{bmatrix}$$

Sous les hypothèses (i à iv) et les hypothèses supplémentaires il existe une loi de commande $K(p)$ solution du problème H_∞ standard si et seulement si les cinq conditions suivantes sont satisfaites :

1. la Hamiltonienne $H_\infty = \begin{bmatrix} A & -\gamma^{-2}B_\omega B_\omega^T - B_u B_u^T \\ -C_z^T C_z & A^T \end{bmatrix}$, n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

2. Il existe une matrice symétrique $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$.

3. la Hamiltonienne $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & -\gamma^{-2}C_z^T C_z - C_y^T C_y \\ -B_\omega B_\omega^T & -A \end{bmatrix}$, n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

4. Il existe une matrice symétrique $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$.

5. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ (module de la plus grande valeur propre (Rayon spectral)).

Remarque1 : L'ensemble des correcteurs $K(p)$ stabilisant le système et satisfaisant $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ sont donnés par la LFT suivante :

$$K(s) = \mathcal{F}_l(K_a(s), \Phi(s)) \quad (\text{II.53})$$

Où $\Phi(s)$ est une matrice de transfert arbitraire mais stable de norme $H_\infty < \gamma$ et

$$K_a(s) = \begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T X_\infty & 0 & I_{mu} \\ -C_y & I_{ny} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Avec
$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2}B_\omega B_\omega^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C_y$$

Et
$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2}X_\infty Y_\infty)^{-1}$$

Remarque2 : Le correcteur obtenu pour $\Phi = 0$ est appelé correcteur central :

$$K_0(s) = \begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

Pour mettre en œuvre cette solution, la première étape consiste à trouver la valeur minimale de γ notée γ_{opt} , sans calculateur cette valeur est approchée par des méthodes itératives. Sous matlab cette valeur est obtenue par la fonction *hinfsyn*.

II.3.2.2 Solution au problème de sensibilité mixte [1]

Le problème de sensibilité mixte présenté précédemment peut être mis sous la forme d'un problème standard. Pour cela, considérons le schéma de la figure (II.9).

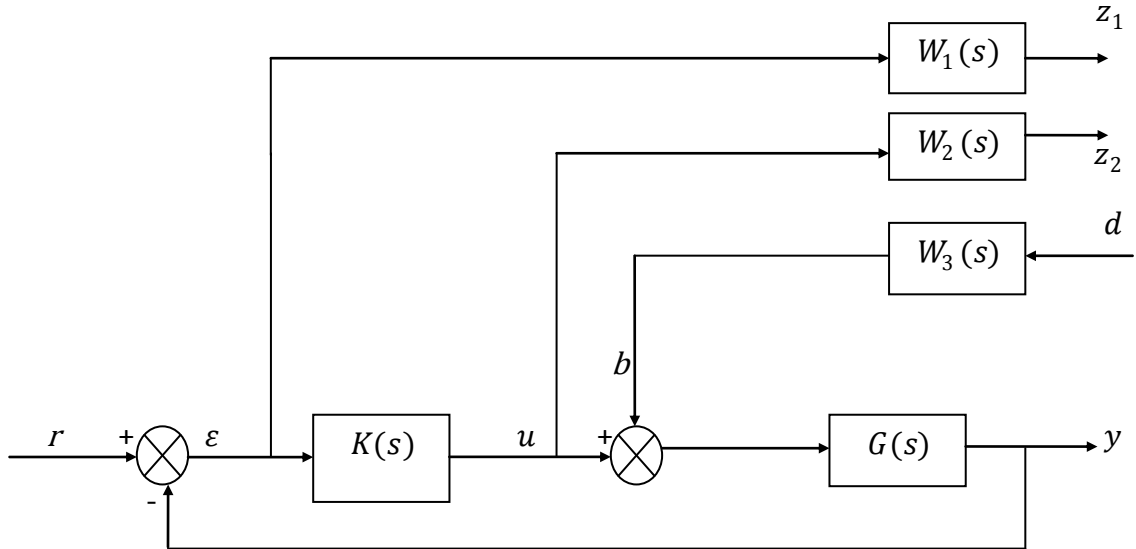


Figure II.10 Système soumis aux pondérations

Le vecteurs d'erreurs \mathbf{z} a deux composantes : z_1 qui est le signal d'erreur ϵ qu'on souhaite mettre à 0, ce signal est filtré par la matrice $w_1(p)$ de même z_2 est obtenu en filtrant les commandes u par $w_2(p)$

Le seul signal externe est le signal de référence r

D'après le schéma on a :

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 K S \end{pmatrix} r \tag{II.56}$$

La résolution du problème de sensibilité mixte se ramène à trouver la matrice $P(p)$ du problème standard permettant d'obtenir : $\begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 K S \end{pmatrix} \equiv \mathcal{F}_l(P, K)$. Pour se faire il faut écrire les signaux d'erreur z_1 et z_2 et l'entrée du correcteur ϵ en fonction de la référence r et la commande u .

$$\begin{cases} z_1 = w_1 (r - Gu) \\ z_2 = w_2 Gu \\ \epsilon = (r - Gu) \end{cases} \tag{II.57}$$

Finalemment :

$$P(p) = \begin{bmatrix} w_1(p)I & -w_1(p)G(p) \\ 0 & w_2(p)I \\ I & -G(p) \end{bmatrix}. \quad (\text{II.58})$$

La résolution du problème standard donne :

$$\|\mathcal{F}_u(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{II.59})$$

Le problème H_∞ standard consiste à trouver un correcteur permettant de minimiser la norme H_∞ de la matrice de transfert entre les entrées et les signaux d'erreurs

II.3.2.3 Choix des fonctions de pondérations [13][11]

Les fonctions de pondération (W_1, W_2, W_3) sont des filtres qui, suivant le signal auquel elles s'appliquent, permettent de privilégier un domaine de fréquence particulier, ceci garantit que le filtre interviendra uniquement dans des intervalles de fréquences choisis pour booster une performance donnée.

Pour bien choisir les fonctions de pondération il faut commencer par considérer les propriétés suivantes :

$$\checkmark \quad \|W_1 S\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in R \quad |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_1(j\omega)} \quad (\text{II.60.a})$$

$$\checkmark \quad \|W_2 KS\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in R \quad |K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_2(j\omega)} \quad (\text{II.60.b})$$

$$\checkmark \quad \|W_1 W_3 SG\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in R \quad |S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_1(j\omega)W_3(j\omega)} \quad (\text{II.60.c})$$

$$\checkmark \quad \|W_2 W_3 KSG\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in R \quad |K(j\omega)S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_2(j\omega)W_3(j\omega)} \quad (\text{II.60.d})$$

La réponse fréquentielle des fonctions S, KS, SG et KSG présente des gabarits typiques qui dépendent des pondérations choisies comme le montre la figure suivante.

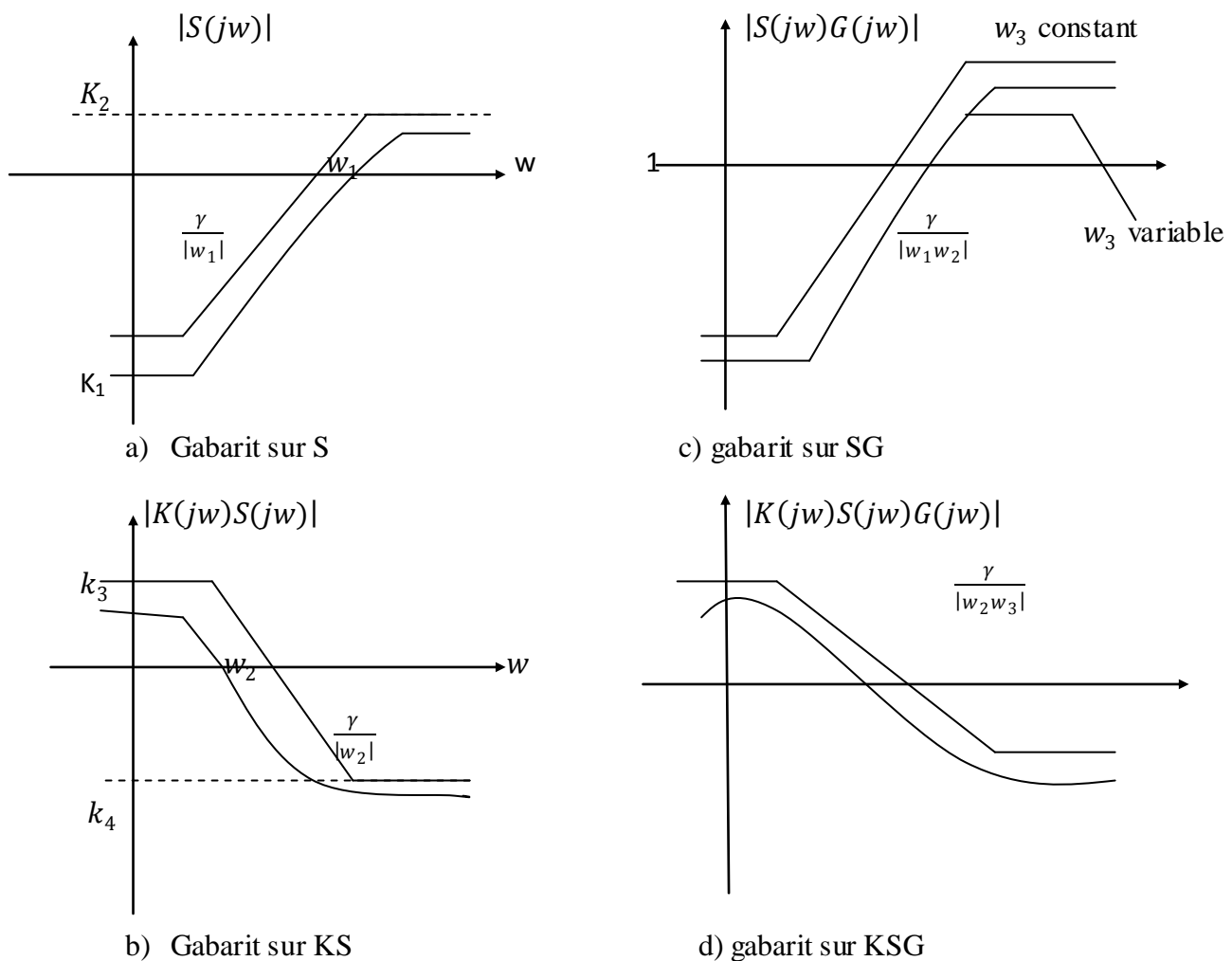


Figure II.11 : Diagramme de Bode des gabarits fréquentiels

- Le gabarit sur $S(s)$ est choisit à une valeur k_1 faible en basses fréquences pour assurer les objectifs de précision. La pulsation ω_1 pour laquelle le gabarit coupe l'axe 0dB peut être interprétée comme la bande passante minimale souhaitée pour l'asservissement. La valeur k_2 limite le maximum de la réponse fréquentielle de $S(s)$ en hautes fréquences, ce qui impose une marge de module au moins égale à $1/k_2$ cependant aucune contrainte n'est imposée à $S(s)$ en hautes fréquences.
- La valeur k_3 du gabarit sur $KS(s)$ ne lui impose aucune contrainte en basses fréquences cependant la valeur k_4 impose une contrainte en hautes fréquences
- Le gabarit sur $SG(s)$ dépend des deux filtres $W_1(s)$ et $W_3(s)$ dans certains cas il suffit de prendre $W_3(s)$ constant ce qui permet de régler l'atténuation en basses fréquences

mais $W_3(s)$ permet aussi de modifier le comportement de SG en moyennes fréquences ce qui permet d'obtenir un comportement transitoire correct en réponse à une perturbation.

- Le gabarit sur $KSG(s)$ peut être ajusté par $W_3(s)$ mais si $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ sont bien choisies alors son gabarit sera bien déterminé.
- Le cas MIMO est plus complexe à cause des aspects directionnels. Les spécifications peuvent en effet différer d'une pair entrée/sortie à l'autre; par exemple, on pourra exiger de bonnes performances de suivi de la consigne r_1 par la sortie y_1 , et au contraire une réjection de l'entrée r_2 au niveau de y_1 . Ce scénario est classique lorsqu'on cherche à découpler l'effet des commandes sur les sorties. De telles spécifications introduisent des contraintes directionnelles sur S et T ; à une même fréquence ω , $T(j\omega)$ devra se comporter comme I dans la direction r_1 et comme 0 dans la direction r_2 . On est donc amené à modéliser séparément chaque valeur singulière de S et T . Ceci requiert l'utilisation de fonctions de pondération matricielles.

Il est à noter qu'il est impératif de choisir des pondérations d'ordre le plus faible possible afin de limiter l'ordre du correcteur. En effet, l'ordre du correcteur est égal à l'ordre du système à asservir plus l'ordre des différentes pondérations. De plus, afin d'obtenir le correcteur d'ordre le plus faible possible, il est possible de mettre en œuvre des méthodes de réduction de modèles.

II.3.3 Résolution du problème H_∞ par les Inégalités Matricielles « LMI »[10]

Définition

Une inégalité matricielle linéaire est une inégalité de la forme :

$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0$ l'ensemble $\{x \mid F(x) > 0\}$ est convexe.

On définit alors un système d'inégalité matricielle comme un ensemble fini d'inégalités matricielles linéaires.

$$F_i(x) > 0, \dots, \text{ et } F_n(x) > 0 \quad (\text{II.61})$$

Un système de LMIs peut être écrit sous une seule LMI

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n(x) \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

Si les matrices F_i sont diagonales, la LMI $F(x) > 0$ est un ensemble d'inégalités linéaires.

II.2.3.a La faisabilité

Le test d'existence d'une solution x telle que $F(x) > 0$ est appelé le problème de faisabilité. L'ensemble des variables x satisfaisant une inégalité matricielle s'appelle l'ensemble faisable. Suivant que cet ensemble est vide ou non, l'inégalité est dite non faisable ou faisable.

II.2.3.b L'optimisation

Soit $F: s \rightarrow R$ où $s = \{x \mid F(x) > 0\}$ et R l'ensemble des réels. Le problème de déterminer $V_{opt} = \inf_{x \in s} F(x)$ est appelé le problème d'optimisation ayant une contrainte LMI.

II.3.3.1 Résolution du problème H_∞ standard par les LMIs [9][14][1]

Alors que les méthodes basées sur les équations de Riccati supposent le calcul analytique d'une solution, l'émergence des LMI modifie la façon de présenter et de résoudre les problèmes en automatique.

Considérons un système donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

avec $x(t)$ le vecteur d'état du système, $e(t)$ le vecteur d'erreur, $y(t)$ le vecteur de sortie du système, $w(t)$ le vecteur des entrées exogènes et $u(t)$ le vecteur des entrées de commande de système.

La résolution du problème, par la méthode basée sur les LMI n'est possible que sous :

Hypothèse1 : (A, B_u) est stabilisable et (C_y, A) est détectable. Ceci garantit l'existence d'une loi de commande K qui stabilise le système en boucle fermée.

La résolution du problème H_∞ utilisant les LMI s'effectue en deux étapes. La première est le test de la faisabilité par le lemme borné réel. La deuxième est le calcul de correcteur.

➤ **Lemme borné réel (BRL)**

Pour un système linéaire $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. $\|D + C(SI - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$ et $\Re(\lambda_i(A)) < 0$ (II.63)
- ii. Il existe une solution $X > 0$ de l'inégalité matricielle linéaire

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.64})$$

Théorème II.5

Sous l'hypothèse 1 et la condition $D_{yu} = 0$ le problème H_∞ standard a une solution si et seulement si deux matrices R et S existent, vérifiant les trois inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{nw} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_e^T & B_w \\ C_e R & -\gamma I_{ne} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{ew}^T & -\gamma I_{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{nw} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.65})$$

$$\begin{bmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I_{ne} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_e^T \\ B_w^T S & -\gamma I_{nw} & D_{ew}^T \\ C_e & D_{ew} & -\gamma I_{ne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s & 0 \\ 0 & I_{ne} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.66})$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{II.67})$$

Où N_R et N_s constituent une base des noyaux $(B_u^T \ D_{eu}^T)$ et $(C_y \ D_{yw})$ respectivement.

Il est possible de calculer le γ minimum directement. En effet, au lieu de réduire itérativement la borne supérieure de γ , on peut rechercher directement la valeur optimale de γ en résolvant le problème suivant qui est un problème d'optimisation convexe.

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \gamma \quad \text{sous les contraintes des LMI}$$

II.3.3.2 Réalisation du correcteur [9][14][1]

Le correcteur recherché à la forme particulière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y(t) \\ u(t) = C_c(t) \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Avec x_c le vecteur d'état du correcteur, $y(t)$ la sortie du système, et $u(t)$ le vecteur de commande.

La fonction de transfert en boucle fermée $F_b(P, K)$ du système (II.62) a pour représentation d'état :

$$F_b(P, K): \begin{bmatrix} A & B_u C_c & B_w \\ B_c C_y & A_c & B_c C_{yw} \\ C_e & D_{eu} C_c & D_{ew} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

Où $K: \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix}$ désigne la représentation d'état du correcteur à synthétiser.

Afin de séparer les matrices du système de celles du correcteur, regroupons ces dernières dans une nouvelle matrice :

$$\Theta: \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

La représentation d'état du système bouclé devient alors :

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \bar{D}_{eu} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{D}_{yw} \end{bmatrix} \quad (\text{II.71})$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & B_w \\ 0 & 0 & 0 \\ C_e & 0 & D_{ew} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I_k & 0 \\ 0 & D_{eu} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} 0 & I_k & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} \end{bmatrix} \quad (\text{II.72})$$

Cette relation montre que les matrices de la boucle fermée dépendent de façon affine de la variable du correcteur Θ . Toutes les autres matrices ne comportent que les données du système.

La stabilité de $F_b(P, K)$ et la contrainte de la norme H_∞ peuvent se résumer à l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X + X A_{cl} & X B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -\gamma I_{m1} & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I_{p1} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.73})$$

Où $X \in \mathfrak{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ représente la matrice de Lyapunov définie positive $X > 0$. Les matrices inconnues de l'inégalité sont X et les matrices du correcteur. Alors cette inégalité n'est pas une LMI à cause du produit entre les deux variables inconnues. Une telle inégalité est une inégalité matricielle bilinéaire (en anglais *Bilinear Matrix Inequality BMI*)

L'inégalité (II.73) peut être transformée en une LMI en respectant les étapes suivantes :

- Obtenir une matrice X en effectuant une décomposition en valeurs singulières de $I_n - RS$ d'où on obtient deux matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de plein rang vérifiant :

$$MN^T = I_n - RS \quad (\text{II.74})$$

Qui permettent de déterminer la matrice $X = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^\circ RN \end{bmatrix}$ (II.75)

M° désigne la pseudo inverse de M autrement dit ($M^\circ M = I_r$)

- Remplacer X par sa valeur dans l'inégalité (II.73) pour qu'elle devienne une LMI dont la résolution fournit le correcteur.

II.3.4: Application au pendule inversé

Le programme réalisé sous Matlab permet de :

- Calculer le modèle.
- Représenter le système incertain ou augmenté.
- Synthétiser le correcteur H_∞ par l'introduction des LMI.
- Tracer les états du système bouclé par le correcteur.
- Tracer la commande appliquée.

II.3.4.1 Cahier de charges :

- La stabilité.
- Bon suivi de consigne avec une erreur de l'ordre de 10^{-6} sur la deuxième et quatrième sortie.
- Rejet de toutes les perturbations et tous les bruits.
- Minimisation de l'effort de la commande.

II.3.4.2 Analyse des résultats obtenus :

- L'application de la commande « H_∞ LMI » sur le modèle pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène nulle aboutie aux résultats suivants :

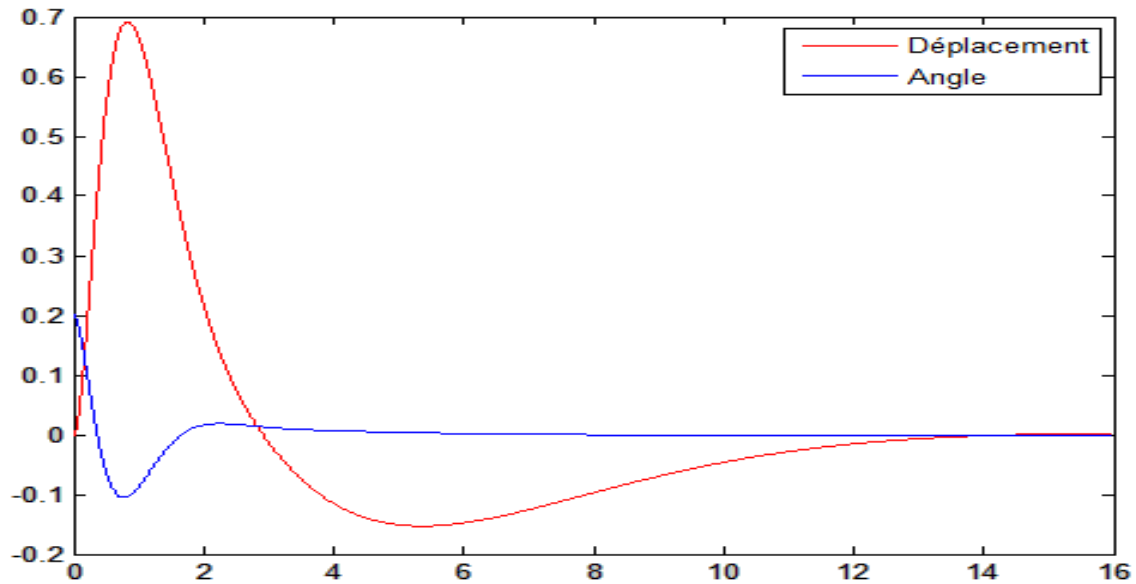


Figure II .12 : déplacement et angle du système non perturbé

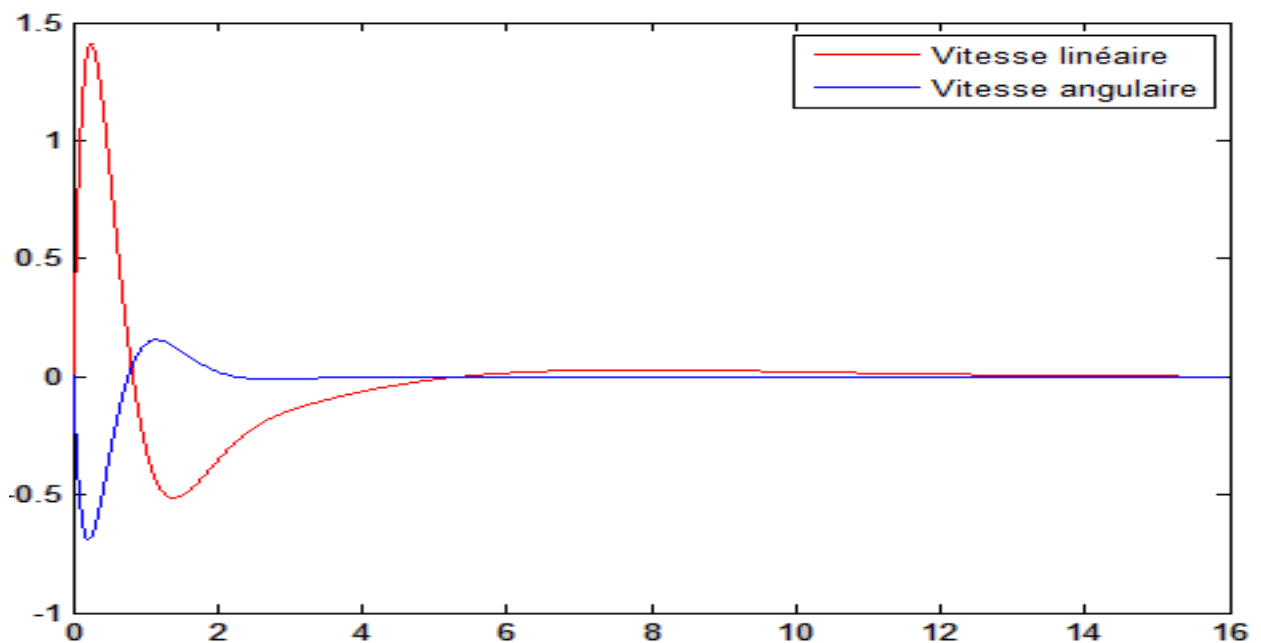


Figure II.13 : Vitesse linéaire vitesse angulaire du système non perturbé.

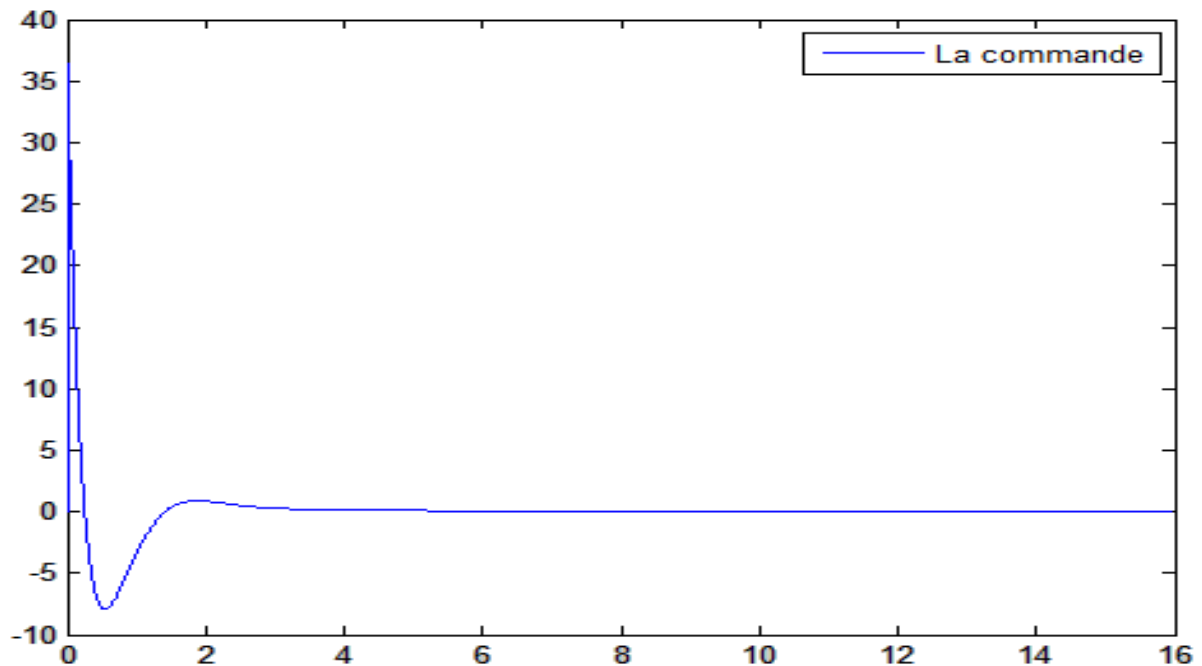


Figure II.14 : La commande appliquée au système non perturbé

La valeur maximale de déplacement est de 0.7 m et la valeur maximale de l'angle est de 0.1 rad. Pour la vitesse linéaire 1.4 m/s et pour la vitesse angulaire 0.6 rad/s.

On voit bien que le système atteint un angle acceptable au bout de 2 secondes. Puis se stabilise complètement au bout de 4 secondes. Et que le système revient à son état initial en position au bout de 10 secondes.

La commande appliquée présente une allure acceptable.

➤ Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.6 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène

$w = 0.04 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ L'application de la même commande nous donne les résultats suivants :

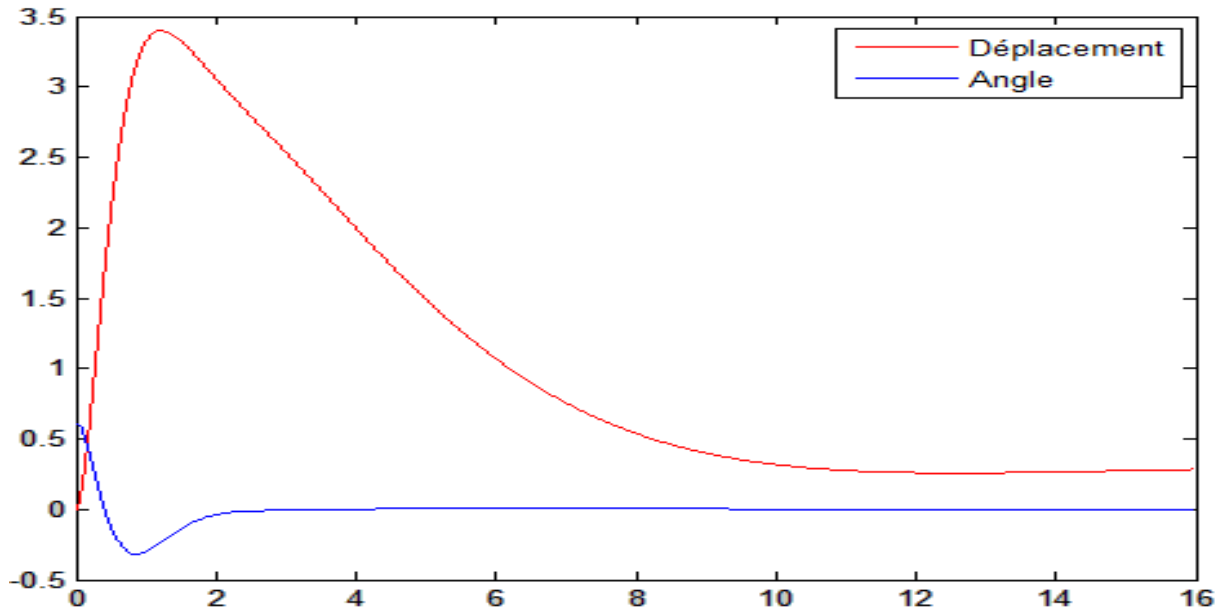


Figure II.15 : déplacement et angle du système perturbé

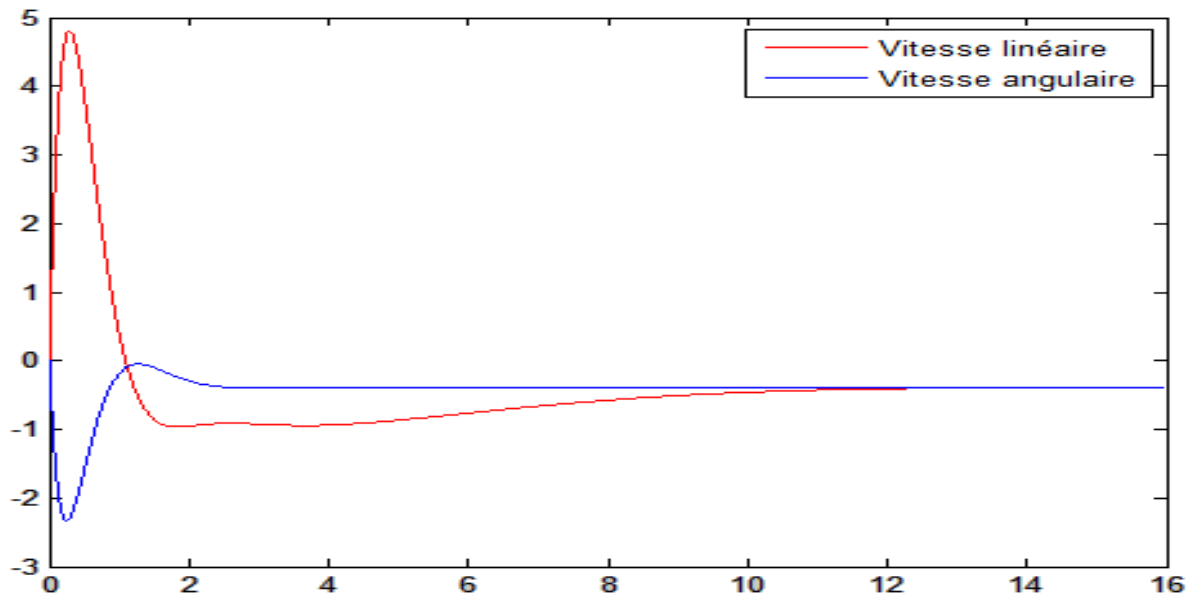


Figure II.16 : Vitesse linéaire vitesse angulaire du système perturbé

La valeur maximale de déplacement est de 0.91 m et la valeur maximale de l'angle est de 0.22 rad. Pour la vitesse linéaire 2.3 m/s et pour la vitesse angulaire 2.5 rad/s.

On voit bien que le système atteint un angle acceptable au bout de 2 secondes. Puis se stabilise complètement au bout de 4 secondes. Et que le système revient à son état initial en position au bout de 10 secondes.

- En gardant les mêmes conditions initiales et pour une perturbation $w = 0.2 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ nous aurons les résultats suivantes :

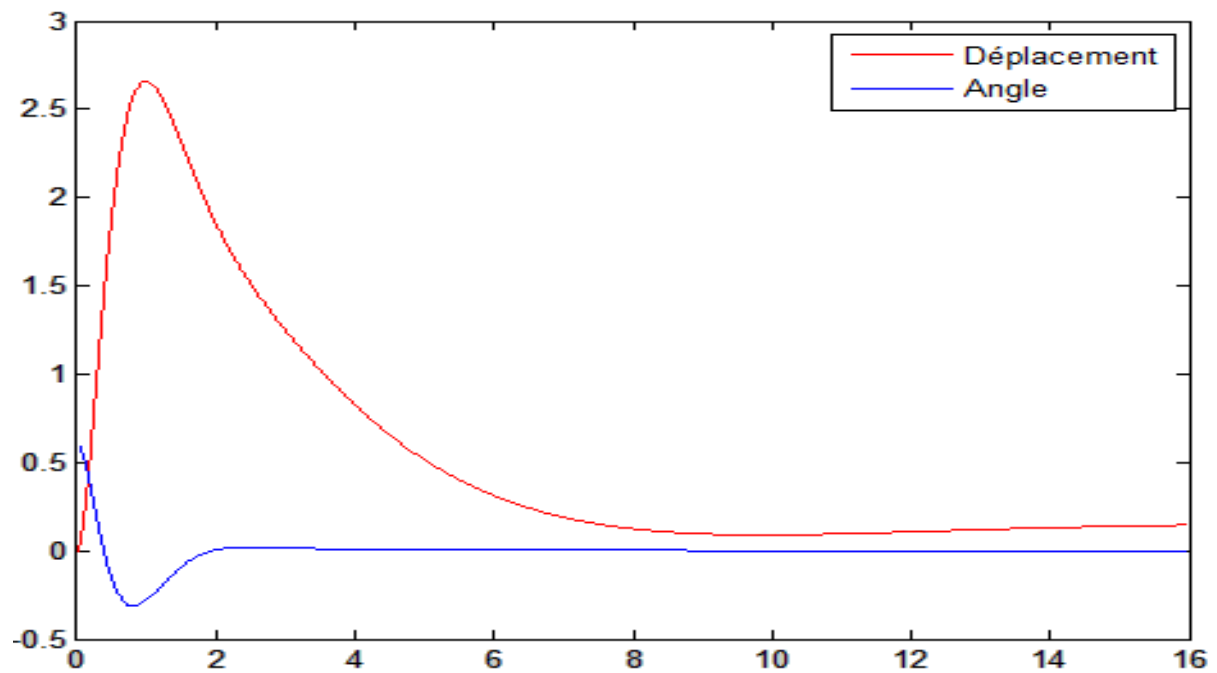


Figure II.17 : déplacement et angle du système perturbé

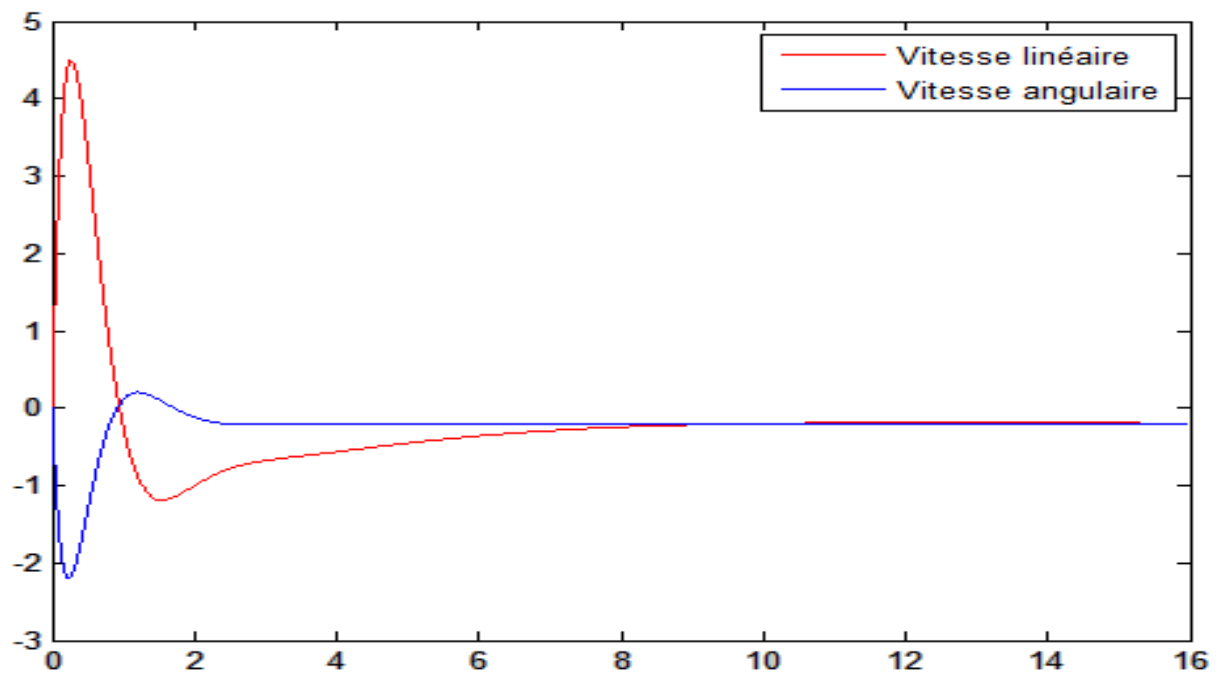


Figure II.18 : Vitesse linéaire vitesse angulaire du système perturbé

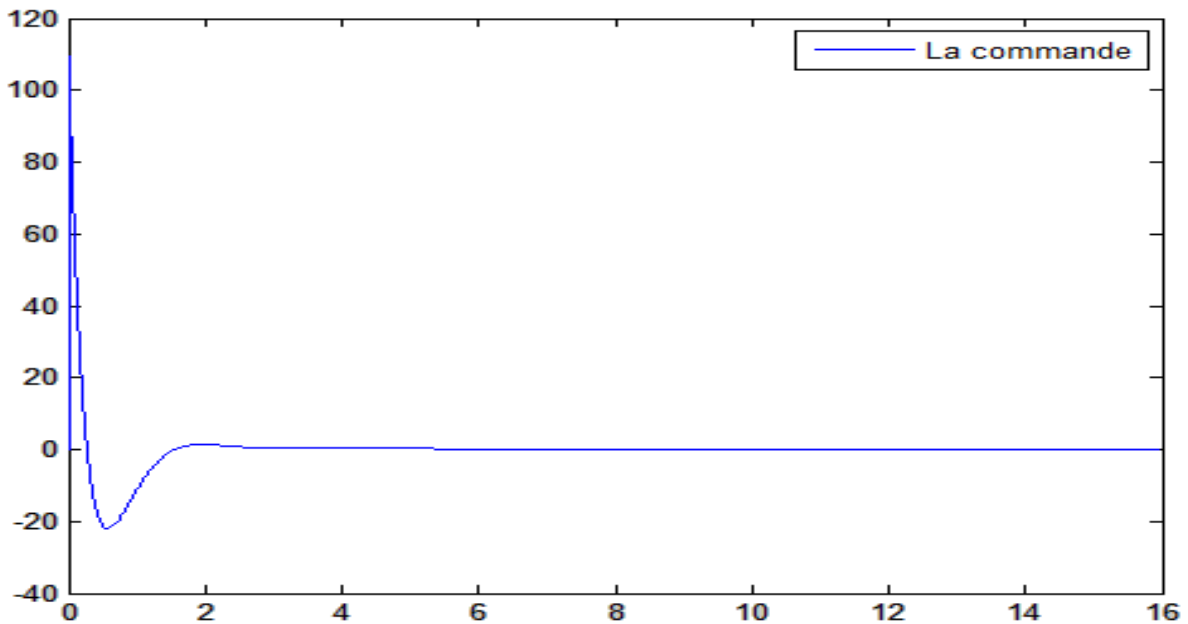


Figure II.119 : La commande appliquée au système perturbé

La valeur maximale de déplacement est de 1.2m et la valeur maximale de l'angle est de 0.22 rad. Pour la vitesse linéaire 2.3 m/s et pour la vitesse angulaire 2.5 rad/s.

La commande appliquée est importante mais reste acceptable.

Pour le système nominal et les deux systèmes perturbés que nous avons simulé, le correcteur calculé par la méthode « H_∞ LMI » satisfait le cahier de charges imposé.

- Le système reste stable même avec l'introduction de perturbations et le changement des conditions initiales.
- Le système suit la consigne avec une erreur presque nulle en régime permanent.
- La commande appliquée est modérée.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit deux méthodes de commande robuste appliquées à un modèle de pendule inversé, mais vu que l'intérêt du présent chapitre n'est pas la comparaison entre ces méthodes, on se contentera de dire que les résultats des simulations montrent que les deux commandes satisfassent le cahier de charges imposé.

Chapitre II : Méthodes de commande robuste des systèmes linéaires

Les méthodes d'étude des systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles (algèbre linéaire, équations différentielles et systèmes différentiels linéaires, etc.). Malgré tout, ces méthodes présentent plusieurs limitations :

- Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint.
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, à des systèmes linéaires.

Vu ces faiblesses, et les atouts de la commande H_∞ en particulier, une piste qui a été exploitée est l'extension de cette méthode au cas non linéaire qu'on essaiera d'explicitier au prochain chapitre.

Chapitre III

Commande H_∞ des systèmes non linéaires

III.1 Introduction

En pratique, on ne peut pas toujours modéliser de façon satisfaisante un processus physique comme un système linéaire stationnaire : une représentation réaliste implique souvent un modèle non linéaire. Le développement de méthodes puissantes, performantes et permettant de traiter à la fois performance et robustesse dans le contexte non linéaire est donc d'un intérêt crucial. Or les méthodes non linéaires classiques (linéarisation par bouclage, back-stepping, modes glissants, ...) ne sont pas tout à fait satisfaisantes de ce point de vue : d'une part, ce ne sont pas des méthodes automatiques mais des méthodes qui demandent au contraire un certain savoir-faire de la part de l'utilisateur. D'autre part, elles n'offrent pas un cadre permettant de prendre en compte la robustesse de façon explicite.

Au vu des succès des méthodes existant dans le contexte linéaire stationnaire, une piste qui a naturellement été explorée est celle qui consiste à rechercher une extension de ces méthodes au contexte non linéaire. Cette démarche a donné naissance à la famille des méthodes de séquençement de gains, qui ont commencé à être étudiées théoriquement à la fin, des années 80 qui se sont intéressés en particulier à l'extension de la méthode H_∞ .

III.1.1 Système non linéaire [3]

Par définition, un système non linéaire (au sens physique) est un système qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition, explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

On peut recenser cinq types usuels de non-linéarités: La courbure, la saturation, le seuil, l'hystérésis, le commutateur tout-ou-rien et. Ces cinq types se rencontrent en commande d'axe, parfois simultanément.

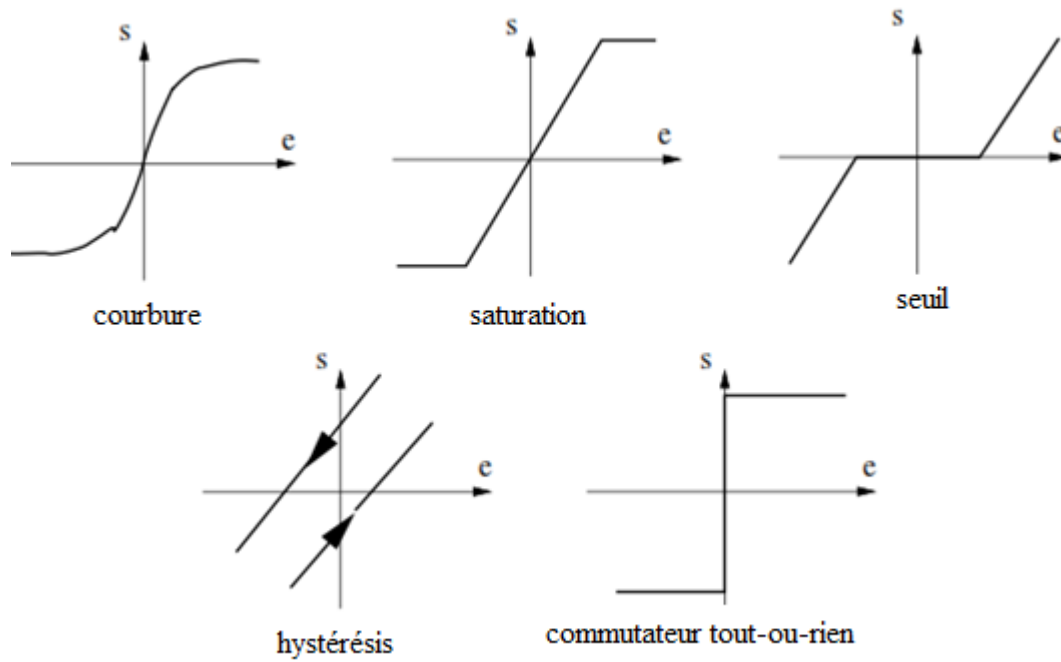


Figure III.1 : les 5 types usuels de non linéarités

Ces cinq non-linéarités de base peuvent se combiner pour former des non linéarités plus complexes, comme la montre la Figure suivante :

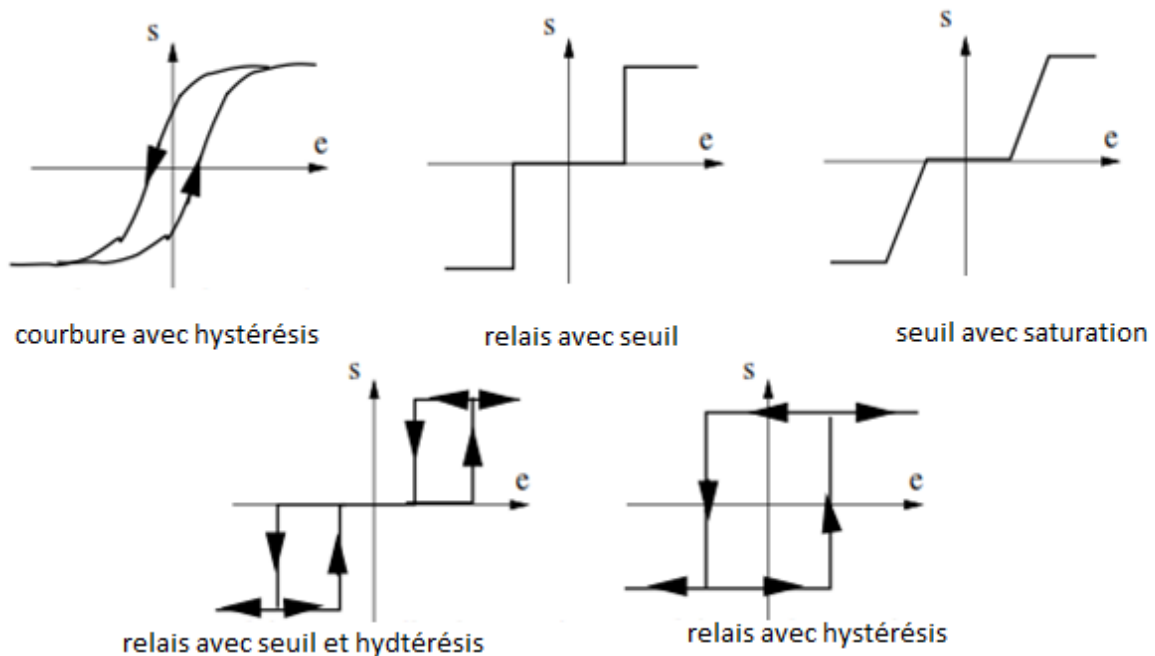


Figure III.2 : combinaisons de non linéarités.

On appelle système non linéaire affine par rapport à l'état, un système dont la représentation d'état prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x(t) + B(u) \\ y = C(u)x(t) + D(u) \end{cases} \quad (\text{III.1.a})$$

Dans la cas d'un système non linéaire affine par rapport à l'entrée, la représentation d'état est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) + B(x)u(t) \\ y = C(x) + D(x)u(t) \end{cases} \quad (\text{III.1.b})$$

Cette représentation est rencontrée souvent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x)(t) \end{cases} \quad (\text{III.1.c})$$

III.2 La commande H_∞ non linéaire

Le problème de commande H_∞ non linéaire consiste à concevoir un contrôleur dynamique qui assure :

- La stabilité asymptotique du système non linéaire en boucle fermée.
- L'atténuation des effets des entrées exogènes.

Et qui a comme modèle d'état :

$$K: \begin{cases} \dot{\zeta} = A_K(\zeta) + B_K(\zeta)y \\ u = C_K(\zeta) \end{cases} \quad (\text{III.1.d})$$

Avec ζ est le vecteur d'état du correcteur, y est le vecteur de sortie de système, u est la commande.

Ce contrôleur est composé d'un observateur non linéaire (observateur) et d'une action de control.

Le problème d'atténuation des entrées exogènes par retour d'état d'un système non linéaire est équivalent à une commande qui rend ce système dissipatif.

III.2.1 Norme H_∞ non linéaire

La norme H_∞ linéaire est définie comme une norme sur les matrices de transfert et ne se généralise pas directement aux systèmes non linéaires. Cependant dans le domaine de temps, la norme H_∞ n'est rien d'autre que la norme induite par la norme L_2 sur ses signaux :

Alors pour un système Σ de vecteur d'entrée u et vecteur de sortie y :

$$\|\Sigma\|_\infty = \max_{u \in L_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad (\text{III.2})$$

III.2.2 Gain L_2 [8]

Nous considérons la forme générale d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = Z(x, u) \\ y = Y(x, u) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure, $z \in R^s$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène.

Le gain L_2 d'un tel système est défini comme suit :

$$\text{Gain } L_2 = \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (\text{III.4})$$

T représente ici l'horizon.

Un système non linéaire avec l'état initial $x(0) = 0$ a un gain L_2 inférieur ou égal à γ ($\gamma > 0$) si pour tout $T \geq 0$ et $w(t) \in L_2 [0, T]$ on a :

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (\text{III.5.a})$$

III.2.3 Un système dissipatif [10][18]

Un système non linéaire de forme générale est dissipatif s'il existe une fonction $V(x)$ non négative telle que $V(0) = 0$ et

$$\int_0^T \{\|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2\} dt \leq V(0) - V(T) \leq -V(T) \quad (\text{III.5.b})$$

cette dernière inégalité signifie que la norme H_∞ du système, pour $T \rightarrow \infty$ est inférieure ou égale à γ . Pour $\gamma = 1$, cela signifie que l'énergie en entrée est plus grande ou égale à l'énergie de la sortie. En d'autre terme l'énergie a été dissipée.

Remarque

Il faut ajouter une autre condition à notre correcteur de la forme (III.1.d) en plus de la stabilisation de système, la minimisation de :

$$\frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (\text{III.6})$$

III.3 Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire

La résolution du problème de commande H_∞ non linéaire n'est possible que sous les hypothèses suivantes :

- **Hypothèse 1**

Il existe des fonctions uniques $w_*(x,p)$ et $u_*(x,p)$ définies au voisinage de $(0,0)$ qui satisfaites

$$\frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$w_*(0,0) = 0 \quad u_*(0,0) = 0 \quad (\text{III.9})$$

Tel que

$$H(x, p, w, u_*(x, p)) \leq H(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) \leq H(x, p, w_*(x, p), u) \quad (\text{III.10})$$

H est la fonction Hamiltonienne définie par

$$H(x, p, w, u) = p^T F(x, w, u) + \|z(x, u)\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \quad (\text{III.11})$$

Et

$$p^T = V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{III.12})$$

- **Hypothèse 2**

Chaque trajectoire $x(t)$ du système $\dot{x} = F(x(t), 0, u(t))$ satisfait $z(x(t), u(t) = 0)$ pour tout $t \geq 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Dans la littérature le problème de commande H_∞ non linéaire est traité pour une classe particulière des systèmes non linéaires cette classe est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{11}(x)w + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w + K_{22}(x)u \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Les systèmes non linéaires qui s'écrivent de cette manière, sont appelés systèmes non linéaires affines aux entrées.

- **Hypothèses simplificatrices**

- $K_{11}(x) = 0$ et $K_{22}(x) = 0$
- $K_{12}(x)^T [h_1(x) \ K_{12}(x)] = [0 \ I]$
- $\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} K_{21}^T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$
- $[h_1(x) \ f(x)]$ est détectable à l'état nul.

➤ Le système nominal est atteignable à l'origine.

Le système (III.13) peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

III.4 Solution du problème de commande H_∞ non linéaire

Théorème III.1

Sous les hypothèses précédentes, s'il existe une fonction positive définie V au voisinage de $x = 0$ tel que $V(0)=0$ qui satisfait l'inégalité (III.5.b), alors la loi de commande $u = -\frac{1}{2}g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = -g_2^T X$ résout le problème de commande H_∞ non linéaire, avec un contrôleur H_∞ non linéaire donné par :

$$K: \begin{cases} \dot{\zeta} = A_k(\zeta) + B_k(\zeta)y \\ u = C_k(\zeta) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Où} \quad A_k = f(\zeta) + \gamma^{-2}g_1(\zeta)g_1^T(\zeta)X(\zeta) + g_2(\zeta)C_k(\zeta) - B_k(\zeta)h_2(\zeta) \quad (\text{III.16})$$

$$C_k(\zeta) = -g_2^T(\zeta)X(\zeta) \quad (\text{III.17})$$

Et $B_k(\zeta)$ satisfait l'équation :

$$[Y(x) - X(x)]^T B_k(\zeta) = \gamma^2 h_2^T(\zeta) \quad (\text{III.18})$$

ζ est le vecteur d'état du correcteur.

$X(\zeta)$ et $Y(\zeta)$ sont les solutions des deux équations dites équations de Hamilton -Jacobi données par :

$$H_{FI}(V, x) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (\gamma^{-2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T h_1 = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$H_{FC}(U, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial x} f + \gamma^{-2} h_1^T h_1 - h_2^T h_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial U^T}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\text{Où} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2X \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2Y$$

L'équation (III.19) est dite de filtrage, et l'équation (III.20) est dite de contrôle.

La théorie de commande H_∞ des systèmes non linéaires est basée sur l'analyse du gain \mathcal{L}_2 . Son application s'avère difficile à cause des équations de Hamilton-Jacobi, dont la solution exacte est soit très difficile soit impossible à calculer. Dans le but d'apporter une solution deux approches ont été développées. La première utilise un algorithme d'approximations successives pour le calcul d'une solution approximée de l'équation de

Hamilton-Jacobi. La seconde est celle basée sur les inégalités matricielles non linéaires (NLMI)

III.4.1 Résolution du problème H_∞ par la méthode des approximations successives [10][14][9]

L'approche basée sur la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi est le résultat de l'extension de la méthode de Glover-Doyle basée sur les équations de Riccati dans le cas linéaire. Sa mise en œuvre nécessite donc la linéarisation du système non linéaire autour de l'origine.

Considérons le système représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

$$\text{Avec} \quad A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad C_1 = \left. \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad C_2 = \left. \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0};$$

$$\text{Et} \quad B_1 = g_1(0); \quad B_2 = g_2(0); \quad D_{12} = K_{12}(0); \quad D_{21} = K_{21}(0)$$

La solution approximée de l'équation d'Hamilton-Jacobi calculée à partir de ces égalités est la suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = & \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \\ & Q_h^{(k)} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Avec $k \geq 3$ est un entier

$$\text{Et } F_c = A + R_s X$$

X est la solution de l'équation de Riccati :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$R_s = (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) \quad (\text{III.24})$$

R_h, f_h, Q_h sont calculées à partir des équations suivantes :

$$f(x) = Ax + f_h(x); \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{1}{4}(\gamma^{-2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) g_2^T(x)) = \frac{1}{4}(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) + R_h(x); \quad (\text{III.26})$$

$$h_1^T(x)h_1(x) = x^T C_1^T C_1 x + Q_h ; \quad (\text{III.27})$$

$$f_h(x) = O(x^2) \quad ; R_h(x) = O(x) \quad ; Q_h(x) = O(x^3) \quad (\text{III.28})$$

$O(x^n)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre n .

On peut établir une série d'équations linéaires en comparant les coefficients des deux membres de l'égalité (III.22). $V^{(k)}$ est la solution unique de toutes ces équations linéaires.

Pour chaque étape k

$$V^{[k]}(x) = \sum_{m=2}^k V^{(m)}(x) = x^T X x + \sum_{m=3}^k V^{(m)}(x) \quad (\text{III.29})$$

$(\bullet)^{(k)}$ est un terme d'ordre k

$(\bullet)^{[k]}$ est un terme d'ordre k accumulé incluant $x^{(k)}$

$$\frac{\partial V^{[k]}}{\partial x} = 2x^T X + \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} \quad (\text{III.30})$$

Donc la solution approximée de l'équation de Hamilton-Jacobi est :

$$X^{[k-1]}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = Xx + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} \quad (\text{III.31})$$

$$= X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \quad (\text{III.32})$$

III.4.1.1 Algorithme des approximations successives

Etape 1 : Initialisation

- Linéariser le modèle autour de l'origine.
- Calculer la solution de l'équation de Riccati X (III.22) et γ optimal.
- Initialiser la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi $\frac{\partial V^2}{\partial x} = 2x^T X$
- Fixer le vecteur de tolérance ε
- Fixer le nombre d'itérations

Etape 2 : Calcul des approximations

- Calcul des approximations successives en comparant les coefficients de l'équation (III.21)
- Calcul de la solution approximée de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$X^{[k-1]}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = Xx + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x}$$

Etape 3 : Vérification

Si $X^{[k-1]}(x) - X^{[k-2]}(x) \leq \varepsilon$

Calculer la commande $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$

Sinon $k \leftarrow k + 1$

Si $k \leq N + 3$

Recommencer l'étape 2

Sinon calculer la commande $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$

Fin

Fin

Une fois la solution approximée de l'inégalité de Hamilton-Jacobi trouvée, on la remplace par sa valeur dans les équations (III.16) et (III.17) pour trouver les matrices A_k et C_k . Pour ce qui est de B_k , vu qu'elle nécessite de résoudre la deuxième inégalité de Hamilton-Jacobi (III.20), de nombreux travaux, notamment ceux de **Lu** et **Chang** proposent de la considérer comme égale à son équivalent dans le cas du correcteur linéaire.

Pour la résolution du problème H_∞ nous avons opté pour une méthode plus récente et plus efficace qui est la méthode des inégalités matricielles non linéaires (NLMI)

III.4.2 Résolution du problème H_∞ par les inégalités matricielles non linéaires

Vu le grand progrès apporté à la commande robuste par la méthode des LMI et ses succès pratiques, la possibilité d'étendre cette méthode au cas non linéaire a préoccupé les chercheurs. L'extension aux systèmes non linéaire a fait l'objet de nombreuses publications et a abouti à une méthode efficace que nous exposerons ci-dessous.

III.4.2.1 Méthode des inégalités matricielles non linéaires NLMI [14][10][9]

Cette méthode fut développée pour une classe particulière de systèmes non linéaires, appelé système non linéaire à paramètres variants (en anglais : *Linear Parameter Varying system LPV*) qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(x) + B_1(x)w \\ z = C_1x(x) + D_{11}(x)w \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

La variable t (temps) a été ôtée pour simplifier l'écriture.

z est le vecteur des sorties du système, w est le vecteur de entrées exogènes.

Avant d'aborder le problème, la définition suivante s'impose.

➤ **Complément de Schur [1]**

Soit F une fonction définit par : $F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}$ (III.34)

Où $F_{11}(x)$ est carrée. Alors $F(x) \succ 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} F_{11}(x) \succ 0 \\ F_{22}(x) - F_{12}F_{11}^{-1}F_{21} \succ 0 \end{cases} \quad (III.35)$$

III.4.2.2 Conditions de solubilité du problème H_∞ non linéaire

Le problème H_∞ non linéaire est soluble s'il existe deux fonctions matricielles continues définies positives Y et Z tel que :

$$\begin{bmatrix} N_B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_1^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.36)$$

$$\begin{bmatrix} N_C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Z + ZA & ZB_1 & C_1^T \\ B_1^T Z & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.37)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (III.38)$$

N_B et N_C sont des matrices dont les colonnes forment des bases d'espaces nuls de $B_1(x)$ et $C_1(x)$ respectivement.

Théorème III.2

Le théorème suivant permet de vérifier la faisabilité d'un problème H_∞ non linéaire à partir de la faisabilité du problème H_∞ linéaire du système linéarisé autour de l'origine.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) + K(x)w \end{cases} \quad (III.39)$$

Le système considéré est asymptotiquement stable et possède un gain $L_2 \leq \gamma$ s'il existe une fonction positive définie $V: X \rightarrow R^+$ tel que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \gamma^{-1} h^T(x) h(x) & \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) + \gamma^{-1} h^T(x) K(x) \\ \frac{1}{2} g^T(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \gamma^{-1} K^T(x) h(x) & \gamma^{-1} K^T(x) K(x) - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (III.40)$$

Pour des systèmes de la forme (III.39), l'inégalité précédente prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x^T (A^T P + PA + \gamma^{-1} C^T C) x & x^T (PB + \gamma^{-1} C^T D) \\ (B^T P + \gamma^{-1} D^T C) x & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.41})$$

$$\text{Avec } \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x) \text{ et } P(x) = P^T(x) \quad (\text{III.42})$$

Cette dernière NLMI n'est satisfaite que si l'inégalité ci-dessous est satisfaite

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \gamma^{-1} C^T C & PB + \gamma^{-1} C^T D \\ B^T P + \gamma^{-1} D^T C & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.43})$$

Théorème III.3

Considérons le système décrit par l'équation (III.33)

Pour $P(x) = P^T(x): X \rightarrow R^{n \times n}$ les deux points suivants sont équivalents

- i. $P(x)$ satisfait (III.43)
- ii. $P(x)$ satisfait
$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x) + P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -\gamma I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.44})$$

Pour tout x et s'il existe une fonction V telle que $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ alors le système à un gain $L_2 \leq \gamma$ et il est asymptotiquement stable.

En utilisant ce résultat on peut aboutir à une autre écriture de l'équation (III.40) qui sera comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) & \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) & h(x)^T \\ \frac{1}{2} g(x)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x} & -\gamma I & K(x)^T \\ h(x) & K(x) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.45})$$

Contrairement au cas linéaire, le problème n'est pas de dimension finie, seulement si les matrices $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $K(x)$ qui forment cette NLMI sont bornées alors il suffit de considérer des x_i sur l'intervalle où ses fonctions sont bornées et de résoudre les LMIs correspondants.

Alors la solution commune de toutes ces LMI est la solution de la NLMI.

La commande H_∞ basée sur les NLMIs est la suivante :

$$u = -\frac{1}{2} g_2^T \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{III.46})$$

III.5 Application de la commande H_∞ basée sur les NLMIs sur un modèle non linéaire d'un pendule inversé [10] [14]

L'application de la commande non linéaire sur le modèle du pendule inversé pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène nulle aboutie aux résultats suivants :

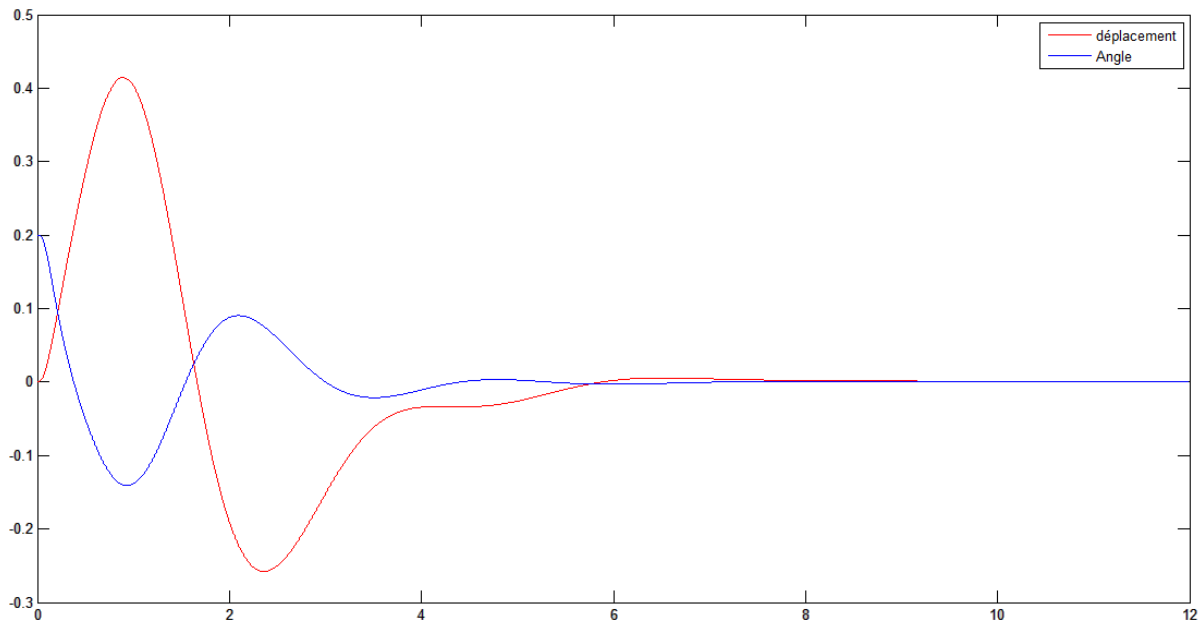


Figure III.3 : Le déplacement et l'angle du pendule (cas non linéaire) non perturbé

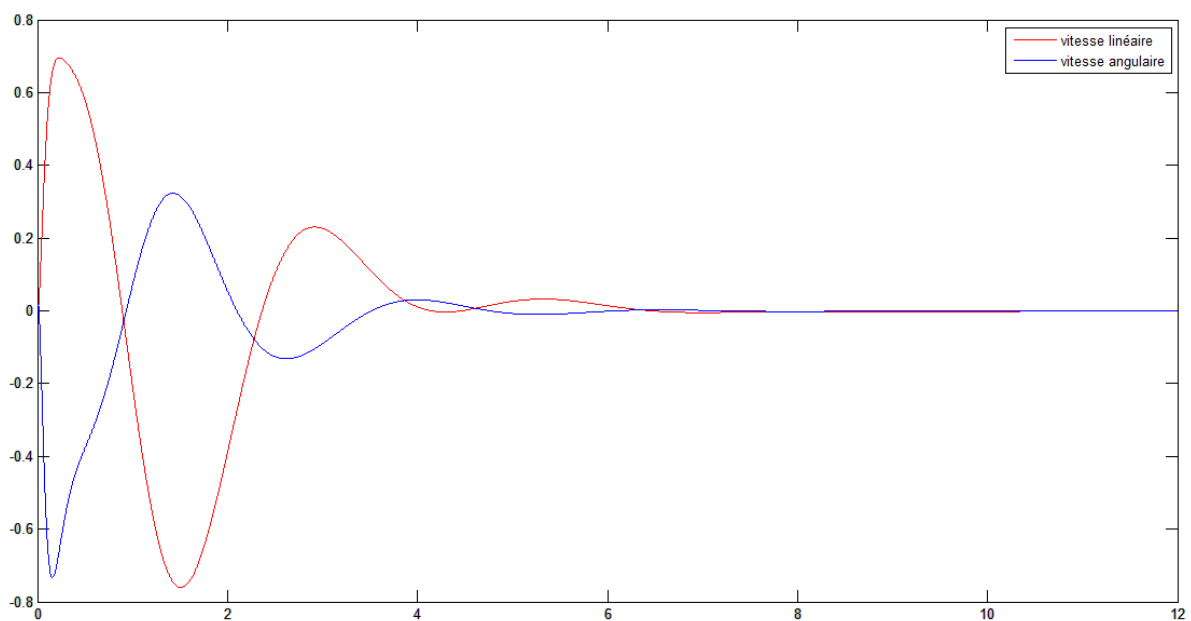


Figure III.4 : Les vitesses (linéaire+angulaire) du pendule (cas non linéaire) non perturbé

La commande non linéaire aboutie aux résultats suivants :

La valeur maximale de déplacement est de 0.42m, 0.15rad pour l'angle, 0.7 m/s pour la vitesse linéaire et 0.7 rad/s pour la vitesse angulaire.

Le système se stabilise complètement au bout de 8 secondes.

- Pour les mêmes conditions initiales et pour une entrée exogène

$w = 0.2 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ L'application de la commande non linéaire nous donne les résultats suivants :

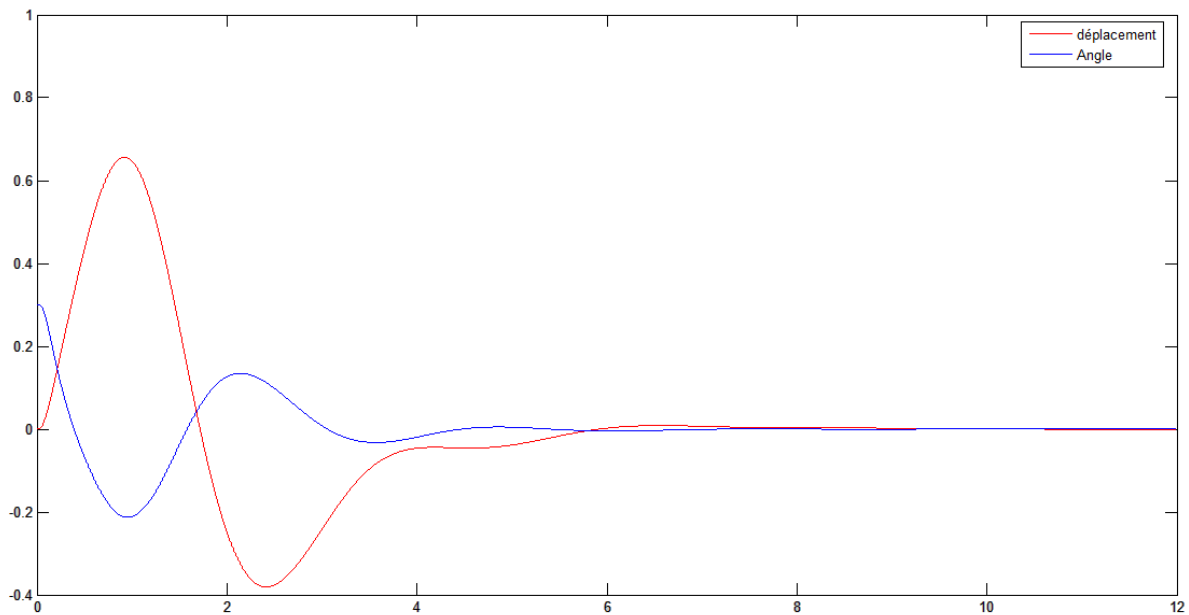


Figure III.5 : Le déplacement et l'angle du pendule perturbé (cas non linéaire)

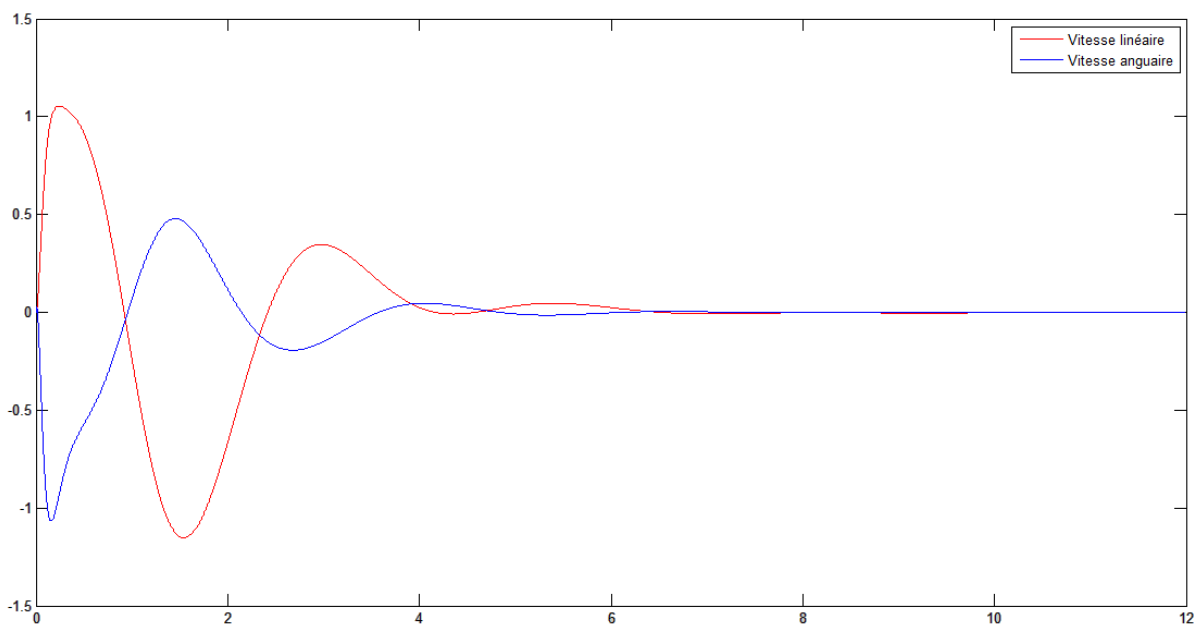


Figure III.6 : Les vitesses (linéaire+angulaire) du pendule non perturbé (cas non linéaire)

Nous avons les valeurs maximales suivantes :

Déplacement max=0.66 m et l'angle max=0.3 rad et la vitesse linéaire max=1.1 m/s et la vitesse angulaire max=1.1 rad/s.

Le système se stabilise complètement au bout de 8 secondes.

- En choisissant comme condition initiale $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et pour une perturbation $w = 0.2 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ nous aurons les résultats suivants :

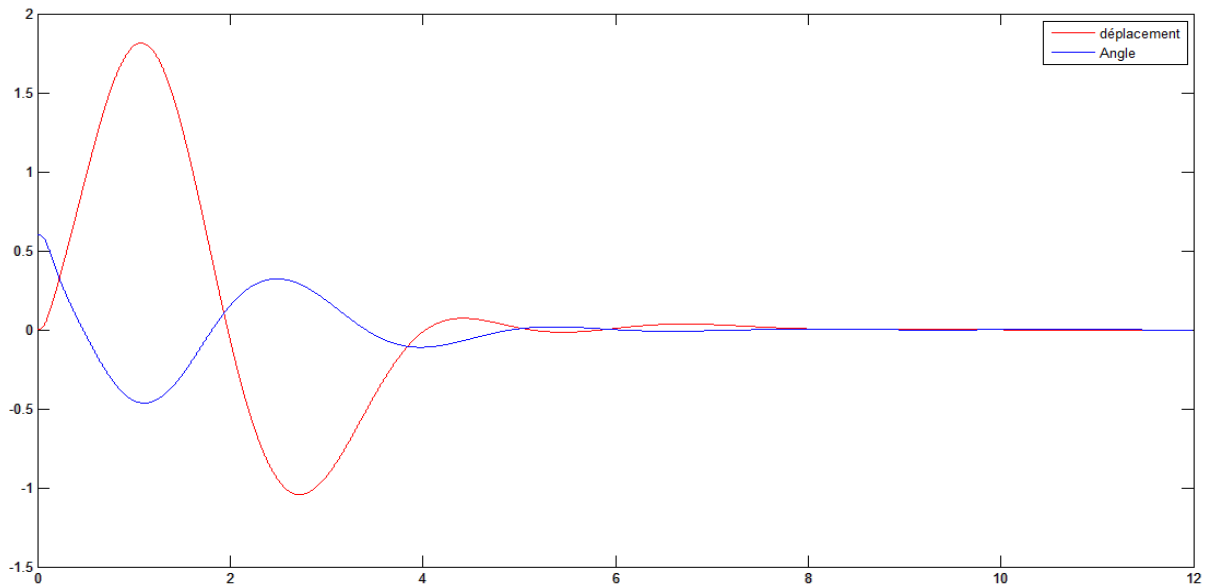


Figure III.7 : Le déplacement et l'angle du pendule perturbé (cas non linéaire)

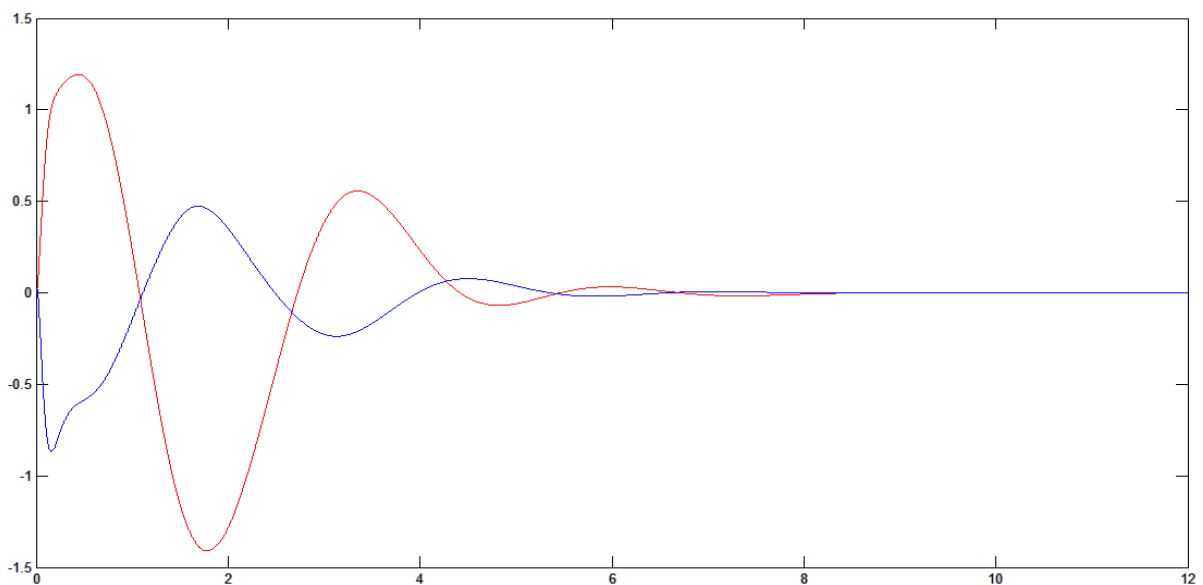


Figure III.8 : Les vitesses (linéaire+angulaire) du pendule perturbé (cas non linéaire).

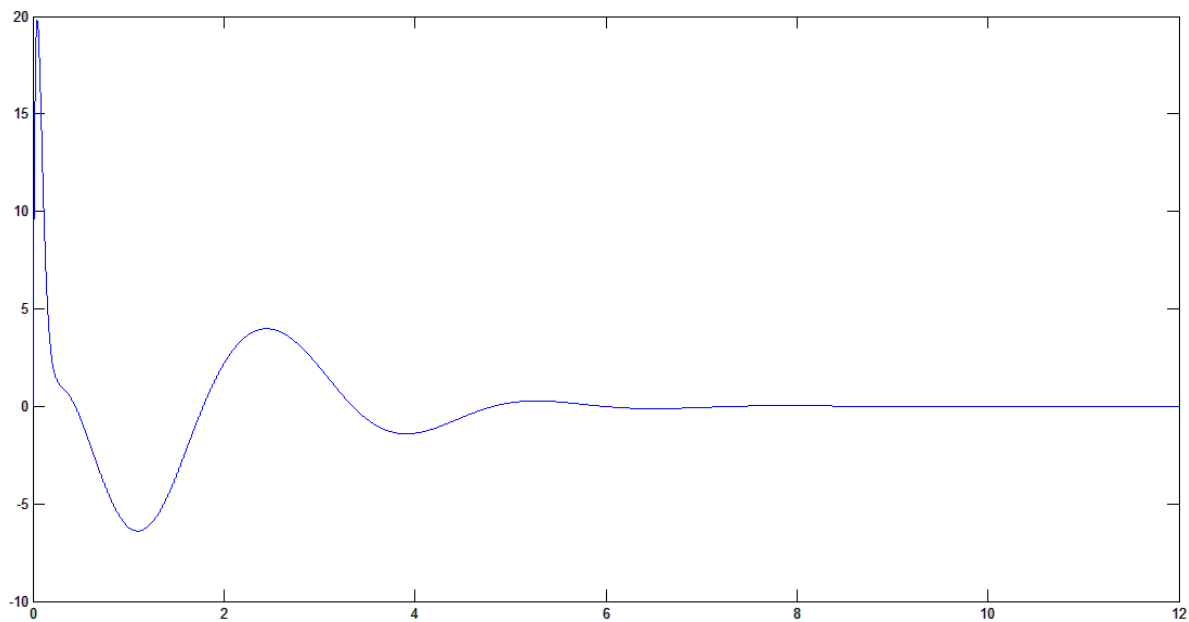


Figure III.9 : La commande appliquée au pendule perturbé (cas non linéaire).

Nous avons remarqué que la commande appliquée au troisième cas est la moins modérée donc nous avons choisi de la tracer.

La commande non linéaire nous donne les résultats suivants :

Un déplacement max de 1.8 m, un angle max de 0.5 rad, une vitesse linéaire de 1.5 m/s et une vitesse angulaire max de 0.5 rad/s.

Le système se stabilise complètement au bout de 8 secondes.

D'après les résultats de simulation de cette application, la commande H_∞ non linéaire calculée par les méthodes basées sur les NLMI, stabilise le système et atténue l'effet des perturbations puisqu'elle maintient toujours le pendule à la position verticale malgré l'allure des courbes qui montrent des réponses oscillatoires en régime transitoire. Ceci est due au fait que le temps mis par la commande est presque le même pour les trois cas que nous avons simulés. Donc lorsque la perturbation intervient, le système est censé la rejeter rapidement, la commande agit sur la perturbation brutalement donc le système devient oscillatoire.

III.6 Conclusion

D'après les résultats de simulation de la commande H_∞ par les NLMI nous pouvons conclure les points suivants :

La commande H_∞ par les NLMI répond à toutes les exigences du cahier de charges en matière de stabilisation, rejet de perturbations et modération de la commande.

Cette même méthode présente des dépassements faibles sur toutes les sorties du système malgré l'introduction de perturbations et le changement des conditions initiales.

Le temps mis par le système pour se stabiliser est le même pour les trois simulations présentées et est jugé très satisfaisant, ceci dit que même en présence des perturbations, le système garde ses performances temporelles.

La commande présentée pour le troisième cas où les perturbations sont très importantes est la moins modérée par rapport aux deux autres, mais respecte acceptable car elle est faible en module et courte en durée.

De manière générale, le correcteur non linéaire est jugé robuste en stabilité et en performances.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la commande robuste des systèmes non linéaires avec une application de la commande H_∞ basée sur les NLMI à un pendule inversé. La technique NLMI a été proposée comme une extension et une alternative à l'approche LMI dans le contexte des systèmes non linéaires.

Il nous a été donné de constater que l'approche basée sur les NLMI propose un cadre théorique attractif et bien posé et qu'elle peut ainsi constituer, vu sa souplesse, une alternative rigoureuse aux approches linéaires : H_∞ par équations de Ricatti, H_∞ par les LMI et LQG qui restent délicates quand elles sont appliquées à certains modèles, ceci étant due au nombre important de conditions d'existence d'une solution que ces méthodes exigent.

De plus, il n'est pas toujours possible ou facile de trouver des modèles linéaires capables de bien modéliser un système non linéaire.

Cette attractivité théorique fut complétée par les résultats des simulations qui ont nettement démontré sa supériorité par rapport à la technique H_∞ par les LMI en matière de rapidité de stabilisation, rejet de perturbations, limitation du dépassement et modération de la commande.

De plus la technique de commande H_∞ basée sur les NLMI présente une commande globale et unique qui n'utilise que d'une réalisation matérielle minimale.

Cependant, l'utilisation des NLMI pour la commande des systèmes non linéaires reste aujourd'hui modérée, du moins à notre niveau. C'est en partie ce constat qui a motivé en grande partie ce modeste travail.

Comme perspectives, nous proposons d'étendre l'étude de la commande H_∞ non linéaire par les NLMI aux systèmes non linéaires plus généraux.

Annexe

A.1 Norme euclidienne

Soit un vecteur $x \in R^n$, on définit la norme euclidienne de ce vecteur comme suit :

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

A.2 1-Norme :

La 1-Norme d'un signal $u(t)$ est l'intégrale de sa valeur absolue

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt$$

A.3 Norme H_2 :

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega \right)^{1/2} \\ &= \sup_{U(s) \in H_\infty} \frac{\|G(s)\|_2}{\|U(s)\|_\infty} \end{aligned}$$

Interprétation: c'est l'énergie en sortie du système lorsqu'on injecte un Dirac en entrée (cas SISO), où plus généralement un bruit blanc vérifiant $U(j\omega)U^*(j\omega)=I$ (densité spectrale uniforme). La norme $\|G(s)\|_2$ est finie si et seulement si $G(s)$ est strictement propre.

On définit aussi la norme induite par la norme euclidienne définie comme suit :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

A.4 Norme H_∞ :

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_\infty &= \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \\ &= \sup_{U(s) \in H_\infty} \frac{\|G(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \end{aligned}$$

Interprétation: c'est la norme induite par la norme des fonctions de H_2 . Elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle $G(j\omega)$.

A.5 Propriétés des normes :

- i) $\|u\| \geq 0$;
- ii) $\|u\| = 0 \equiv u(t) = 0$
- iii) $\|au\| = |a|\|u\|$
- iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

La minimisation d'une norme H_∞ correspond à la minimisation de la valeur singulière maximale, tandis que celle d'une norme H_2 minimise la somme des carrés de toutes les valeurs singulières pour toutes les fréquences possibles. En général, Les normes H_2 et H_∞ définissent respectivement le gain moyen et maximal d'un système multivariable.

B.1 Valeurs singulières

Décomposition en valeurs singulières d'une matrice complexe

Soit A une matrice complexe de dimension $m \times n$.

La matrice A est définie comme étant le produit de trois matrices :

$$A = V\Sigma W^*$$

Tel que : $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $W \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $VV^* = I_m$ et $WW^* = I_n$.

La notation V^* désigne la matrice adjointe de V

Et Σ s'écrit comme suit :

$$\text{Si } m = n : \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } m > n : \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } m < n : \Sigma = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Les σ_i sont appelées valeurs singulières de la matrice A , elles sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A si $m > n$, AA^* sinon. On les note $\sigma_i(A)$ avec la convention $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots 0$. La plus grande et la plus petite valeur singulière sont notées $\sigma_{\max}(A)$ et $\sigma_{\min}(A)$, respectivement.

B.2 Valeurs singulières des matrices de transfert :

Considérons un système LTI ayant $e(t)$ comme vecteur d'entrée de dimension m et $y(t)$ comme vecteur de sortie de dimension n , $G(s)$ est sa matrice de transfert.

En réponse à une entrée harmonique $e(t) = E e^{j\omega t}$, la sortie du système s'écrit :

$$S(t) = G(s)E e^{j\omega t}$$

Pour un système monovarié, on définit à partir de cette relation le gain du système à la pulsation ω par le module de $|G(j\omega)|$.

Pour un système multivarié, on utilise la notion de valeurs singulières définies comme suit : $\sigma_i(j\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega))G(-j\omega)^T}$

A.3 Propriétés des valeurs singulières :

- $\sigma_{max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$
- $\sigma_{min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$
- $\sigma_i(A) = \lambda_i(AA^T)^{1/2} = \lambda_i(A^T A)^{1/2}$
- $\sigma_{min}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{max}(A)}$
- $\sigma_{min}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \sigma_{max}(A)$
- $\sigma_{min}(A) = \sigma_1 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
- $\sigma_{max}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\sigma(\alpha A) = |\alpha| \sigma(A)$
- $\sigma_{max}(A + B) \leq \sigma_{max}(A) + \sigma_{max}(B)$
- $\sigma_{max}(AB) \leq \sigma_{max}(A) \sigma_{max}(B)$
- $\sigma_i(A) - \sigma_{max}(P) \leq \sigma_{max}(A + P) \leq \sigma_i(A) + \sigma_{max}(P)$

Cette propriété signifie que si une perturbation P agit sur un système de matrice A , la matrice A devient $(A + P)$ mais ses valeurs singulières seront perturbées, dans le pire des cas, de $\sigma_{max}(P)$ (norme de la perturbation P).

- Soit deux matrices carrées $A, P \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$\det(A + P) = 0 \Rightarrow \sigma_{max}(P) \geq \sigma_{min}(A)$$

Alors si $\sigma(P) \leq \sigma(A) \Rightarrow \det(A + P) \neq 0$

En utilisant les propriétés des normes on abouti à :

$$\sigma_{min}(G(j\omega)) \leq \frac{\|G(j\omega)Ee^{j\omega t}\|_2}{\|Ee^{j\omega t}\|_2} \leq \sigma_{max}(G(j\omega))$$

Les valeurs propres de $(G(j\omega))$ sont une généralisation de la notion du gain aux systèmes multivariable. Le gain d'un système à une fréquence donnée dépendra de la perturbation mais sera compris, au pire des cas, entre $\sigma_{i \equiv \omega}(A) - \sigma_{max}(P)$ et $\sigma_{i \equiv \omega}(A) + \sigma_{max}(P)$

$\sigma_{i \equiv \omega}(A)$ est la valeur propre à la fréquence ω

C.1 Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT)

Les LFT sont utilisées pour la formulation du problème H_2 et H_∞ car la forme standard n'est qu'une LFT entre le correcteur et le système augmenté. Les incertitudes dynamiques ou paramétriques sont aussi des expressions LFT.

Pour calculer une LFT, considérons deux matrices K et $P = \begin{bmatrix} P_{z\omega} & P_{zu} \\ P_{y\omega} & P_{yu} \end{bmatrix}$ et on supposant que leurs inverses existent alors les LFT supérieures $\mathcal{F}_u(P, K)$ et inférieures $\mathcal{F}_l(P, K)$ se calculent comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_u(P, K) &= \left(P_{yu} + P_{y\omega} K (I - P_{z\omega} K)^{-1} P_{zu}(s) \right) \\ \mathcal{F}_l(P, K) &= \left(P_{z\omega} + P_{zu} K (I - P_{yu} K)^{-1} P_{y\omega}(s) \right)\end{aligned}$$

C.2 Produit de Redheffer ou produit \star (*en anglais 'star product'*)

Pour des matrices de dimensions appropriées,

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

et en supposant l'existence des inverses, on définit le produit de Redheffer $N \star M$

$$\text{par } N \star M = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_l(N, M_{11}) & N_{12}(I - M_{11}N_{22})^{-1} M_{12} \\ M_{21}(I - N_{22}M_{11})^{-1} N_{21} & \mathcal{F}_u(M, N_{22}) \end{bmatrix}$$

D.1 Commandabilité des systèmes linéaires

La commandabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classer, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé mais ne permet cependant pas de construire des lois de commande de façon effective, sauf éventuellement dans le cas des systèmes linéaires. Cependant, elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'une grande importance pratique, comme la planification de trajectoires.

D.1.1 Définition

Un état x_i est commandable en t_0 s'il est possible de déterminer $u(t)$ sur l'intervalle $[t_0 \ t_f]$ conduisant tout état initial $x_i(t_0)$ vers 0 en $t_0 \leq t_i \leq t_f$.

Si cette propriété est vraie $\forall t_0$ et $\forall i = 1, \dots, n$ alors le système est complètement commandable.

D.1.2 Critère De Commandabilité (Kalman)

C'est un critère qui permet de définir la commandabilité d'un système LTI avec l'information des matrices A et B .

Un système LTI représenté par l'équation dynamique d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Où $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité, C est de rang n ,

$$\text{rang}(C) = \text{rang}([B : AB : \dots : A^{n-1}B]) = n$$

Le rang d'une matrice A est: le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes linéairement indépendants).

D.2 Observabilité des systèmes linéaires

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état d'un système, ou d'un système en soi même, qui nous indique la capacité pour un système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées.

D.2.1 Définition

Un état x_i est observable en t_0 s'il est possible de déterminer $x_i(t_0)$ connaissant (t) sur l'intervalle $[t_0 \ t_f]$.

Si cette propriété est vraie $\forall t_0$ et $\forall i = 1, \dots, n$ alors le système est complètement observable.

D.2.2 Critère D'observabilité (Kalman)

La notion d'observabilité fait intervenir la matrice dynamique A et la matrice de sortie C . Un système LTI représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Où $A \in R^{n \times n}$, $C \in R^{r \times n}$, est observable si et seulement si la matrice d'observabilité, \mathcal{O} est de rang n :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ \cdot \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Remarques

- Si un système est partiellement commandable alors pour certaines conditions initiales il n'existe pas d'entrée de commande pouvant ramener le système à l'origine.
- La commandabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que l'on puisse commander le système afin de modifier son comportement (stabilisation d'un système instable, modification des dynamiques propres). Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état.

D.3 Système propre, Réalisation minimale

Pour des systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

La fonction de transfert est : $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Egalement notée $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Pour des systèmes de dimension finie, $G(s)$ est une matrice de fractions rationnelles. $G(s)$ est **propre** si $\|G(\infty)\| < +\infty$, et **strictement propre** si $G(\infty) = 0$.

Le quadruplet $(A; B; C; D)$ s'appelle une **réalisation** de la fonction de transfert propre $G(s)$. Cette réalisation est minimale si $(A; B)$ est commandable et $(C; A)$ est observable.

D.4 Convexité

D.4.1 Ensemble convexe

Un ensemble E est dit convexe si et seulement si pour tout couple de points (x, y) , le segment qui les relie appartient aussi à l'ensemble E

$$\left. \begin{array}{l} x \in E \\ y \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in E, \forall \lambda \in [0,1]$$

D.4.2 Fonction convexe

La fonction f est dite convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall (x_1, x_2) \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit :

$$\min_{x \in E} f(x)$$

Où E est un ensemble convexe et $f(x)$ une fonction convexe.

De même, une contrainte $f(x) \leq 0$ est dite convexe si la fonction f est convexe. Un des avantages de la convexité est que toute optimisation d'une fonction convexe définie sur un ensemble convexe peut se traiter localement car toute solution locale devient globale.

Références bibliographiques

Bibliographie

[1] SCORLETTI G , FROMION V , Introduction à la commande multivariable des systèmes : Méthodes de synthèse fréquentielle h_{∞} , cours de 3A Instru Auto de l'ENSI de Caen .

[2] F.BINET STS MAI. LYP Jean – Jaurès Cours d'asservissement.

[3] Yves Granjon. Système linéaire, non linéaire à temps continu, à temps discret, représentation d'état 2^{ème} édition

[4] Doyle J.C ., GLOVER K., Khargonekar P.P., Francis B.A., State space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems, IEEE trans. Aut. Control, 34(8):831-847, august, 1989

[5] Edouard Laroche. Identification et commande robuste des systèmes électromécaniques, 2007.

[6] Gilles Duc., Stéphane Font commande H_{∞} et μ -analyse des outils pour la robustesse.

[7] Christian Mira, Systèmes asservis non linéaires. : aspects continus et discrets, Hermès, Paris, 1990.

[8] A.J Van der schaft., L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_{∞} control. IEEE Trans. Automatic control vol.37, pp770-784, 1992.

[9] Safta de Hillerin, *commande robuste des systèmes non linéaires incertains (Applications dans l'aérospatiale)*.

Thèse de doctorat à l'Ecole Centrale de Lyon, 2011

[10] YOUSFI safia, Développement d'algorithmes pour la commande H_{∞} des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel. Mémoire de magister à l'université de Tizi-Ouzou 2010.

[11] Pierre APKARIAN, *Eléments de la théorie de la commande robuste*.

[12] John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum, *Feedback control theory* Macmillan publishing Co 1990

Bibliographie

[13] Edouard Laroche, *Commande Robuste*

Université de Strasbourg Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg

<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>

[14] Shr-Shiung Hu, Bor-Chin Chang . Design of a Nonlinear H_∞ Controller for the Inverted Pendulum System, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications ;Trieste, Italy 1-4 Septembre 1998

[15] TALEB fahem, SLIMANI merzouk : Commande H_∞ d'un pendule inversé, mémoire de fin d'études d'ingénieur en Automatique Université de Tizi-Ouzou,2010

[16] Gilles Duc. Robustesse des systèmes multivariables. Edition :Supelec 1993.

[17] Pierre Naslin. Théorie de la commande et conduite optimale. Edition :Dunod 1996.

[18] A. Isidori, W. Kang, " H_∞ Control via Measurement Feedback for Nonlinear

Systems," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 40, No. 3, pp.466-472, 1995.

[19] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM*, Philadelphia, USA, 1994.