

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*  
**Université MOULOUD MAMMARI DE TIZI -OUZOU**



**Faculté des Sciences**  
**Département de Mathématiques**

## Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master

**Spécialité :**

Recherche Opérationnelle

## Thème

---

**Résolution d'un problème linéaire multiobjectifs  
par la théorie des jeux**

---

**Présenté par : *M<sup>elle</sup> MERABET* Sabrina**

**Devant le jury composé de :**

<b>Président :</b>	<i>M<sup>me</sup> BOUARAB</i> Ouiza	M.C.A, UMMTO
<b>Encadreur :</b>	<i>M<sup>me</sup> FAHEM</i> Karima	M.C.B, UMMTO
<b>Examinatrice :</b>	<i>M<sup>me</sup> ACHEMINE</i> Farida	M.C.A, UMMTO

Promotion : 2019/2020

## ~ Remerciements ~

Mes remerciements vont tout premièrement au bon Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude et remerciements les plus sincères à *Mme FAHEM* pour avoir dirigé mon travail, pour son soutien et pour le temps qu'elle m'a consacré.

Je remercie également le président et les membres de jury pour m'avoir fait l'immense privilège d'évaluer équitablement mon travail.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et à qui je ne pourrais jamais assez exprimer l'amour que je leur porte.

Je remercie ma soeur Kamilia pour sa confiance et son soutien ainsi que mon frère Mouhamed que Dieu les protège.

Je remercie mon mari Amar pour son soutien et ses encouragements ainsi que toute sa famille.

Je remercie ma copine Lamia pour sa confiance, son encouragement et son soutien ainsi que toute sa famille.

Je souhaite remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

A tous merci.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 L'optimisation linéaire mono et multiobjectifs</b>	<b>3</b>
1.1 Rappel sur la programmation linéaire . . . . .	4
1.1.1 Définitions et formalisation du problème . . . . .	4
1.1.2 La notion de dualité . . . . .	5
1.1.3 Méthodes de résolution . . . . .	7
1.2 L'optimisation multiobjectifs linéaire . . . . .	12
1.2.1 Concepts de base . . . . .	12
1.2.2 Dominance . . . . .	15
1.2.3 Efficacité (Pareto optimalité) . . . . .	16
1.2.4 Quelques méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs . . . . .	18
<b>2 Jeux coopératifs</b>	<b>27</b>
2.1 Définitions et propriétés . . . . .	28
2.2 Concepts de solutions . . . . .	32
2.2.1 Coeur . . . . .	33
2.2.2 Nucléole . . . . .	36
<b>3 Résolution d'un problème linéaire multiobjectifs par la théorie des jeux</b>	<b>45</b>
3.1 Les problèmes de programmation linéaire multiobjectifs et le nucléole généralisé	46
3.2 Calcul du nucléole généralisé pour un problème (MOLP) : . . . . .	48
3.3 Algorithme pour résoudre le problème (MOLP) . . . . .	55
<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques qui s'intéresse aux interactions stratégiques des agents (appelés "joueurs"). Les fondements mathématiques de la théorie moderne des jeux sont décrits autour des années 1920 par Ernst Zermelo (mathématicien allemand) dans l'article *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, et par Émile Borel dans l'article "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique". Ces idées sont ensuite développées par Oskar Morgenstern et John von Neumann en 1944 dans leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior* qui est considéré comme le fondement de la théorie des jeux modernes.

Les jeux coopératifs sont des modèles de situations où les joueurs peuvent former des coalitions pour atteindre ensemble un objectif donné. En supposant qu'il est plus avantageux pour les joueurs de travailler ensemble, une question naturelle est de savoir comment répartir la récompense de la collaboration entre les joueurs de manière à assurer la stabilité de la grande coalition, c'est-à-dire en évitant qu'un sous-groupe de joueurs ne se sépare pour former sa propre coalition et augmenter son gain total. Les concepts de solution dans les jeux coopératifs fournissent les moyens d'y parvenir.

Le nucléole est l'une des solutions importantes dans la théorie des jeux coopératifs à  $n$ -personnes avec des utilités transférables. Dans l'ensemble des solutions efficaces et individuellement rationnelles, le nucléole cherche le résultat qui minimise le malheur de la coalition la plus malheureuse (sentiment d'insatisfaction), de la deuxième coalition la plus malheureuse, ...etc.

**D.Schmeidler** (1969) a prouvé que sur cet ensemble de résultats, appelés les imputations,

le nucléole est unique sous conditions de régularités.

En s'inspirant du nucléole, **M. Justman** a défini le nucléole généralisé pour un ensemble de fonctions linéaires à minimiser sous des contraintes linéaires d'inégalités.

Ce travail est basé sur l'article de **Irinel Drangan** [5] qui propose de résoudre un problème linéaire multiobjectifs par le nucléole généralisé, nous montrons comment un tel problème peut être résolu, en donnant une méthode de recherche de nucléole généralisé où une certaine théorie de dualité est utilisée. Pour faire, nous avons élaboré le plan suivant : au premier chapitre nous présenterons un rappel sur la programmation linéaire mono et multiobjectifs. Nous rappelons des définitions de base (Formalisation de problème, Dominance, efficacité...) et quelques méthodes de résolutions (méthode lexicographique,  $\epsilon$  – *contrainte*, somme pondérée...). Au deuxième, nous étudierons les jeux dits "coopératifs" dans lequel le but d'un agent (joueur, participant...) est de maximiser son utilité espérée. On introduira dans cette partie différents concepts de solutions tel que le coeur et le nucléole. Quand au troisième chapitre, il est consacré à la présentation d'une autre méthode de résolution d'un problème linéaire multiobjectifs par un concept de la théorie des jeux coopératifs.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et les principales références bibliographiques.

# CHAPITRE 1

## L'OPTIMISATION LINÉAIRE MONO ET MULTI-OBJECTIFS

### Introduction

L'optimisation multiobjectifs est un axe de recherche très important à cause de la nature multiobjectifs de la plupart des problèmes réels. Les premiers travaux menés sur les problèmes multiobjectifs furent réalisés au 19<sup>ème</sup> siècle sur des études en économie par Edgeworth et généralisés par Pareto.

L'optimisation multiobjectifs est un domaine fondamental de l'aide à la décision multicritère, auquel de nombreux milieux scientifiques et industriels se doivent faire face, la résolution d'un problème d'optimisation multiobjectifs consiste à déterminer la solution correspondant au mieux aux préférences du décideur parmi les solutions de bon compromis.

Dans la plupart des problèmes du monde réel, il ne s'agit pas d'optimiser seulement un seul critère mais plutôt d'optimiser simultanément plusieurs critères et qui sont généralement conflictuels. Dans les problèmes de conception, par exemple, il faut le plus souvent trouver un compromis entre des besoins technologiques et des objectifs de coût. L'optimisation multiobjectifs consiste donc à optimiser simultanément plusieurs fonctions. La notion de solution optimale unique dans l'optimisation uni-critère disparaît pour les problèmes d'optimisation multiobjectifs au profit de la notion d'ensemble des solutions Pareto optimales.

Lorsqu'un seul objectif (critère) est donné, le problème d'optimisation est mono-objectif. Dans ce cas la solution optimale est clairement définie, c'est celle qui a le coût optimal (minimal, maximal).

## 1.1 Rappel sur la programmation linéaire

### 1.1.1 Définitions et formalisation du problème

**Définition 1.1** (Programme mathématique). Est un problème d'optimisation d'une fonction objectif de plusieurs variables en présence de contraintes.

**Définition 1.2** (Programme linéaire). Un programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (minimiser) une fonction objectif linéaire à  $n$  variables soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

#### Forme générale d'un programme linéaire

Le modèle mathématique de (PL) peut se mettre sous la forme suivante :

1. maximiser ou minimiser  $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$
2.  $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i$  (ou  $\geq$ ),  $\forall i = 1, \dots, m$
3.  $x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Le programme comporte :

- la fonction objectif à optimiser
- $m$  contraintes d'égalités ou d'inégalités
- $n$  variables non négatives dites variables de décision
- le coefficient de coût de la variable  $x_j$  est noté  $c_j$ , celui de la variable  $x_j$  dans la contrainte  $i$  est noté  $a_{ij}$
- la contrainte  $i$  a un second membre constant  $b_i$
- les contraintes simples de positivité ne sont pas incluses dans les  $m$  contraintes

Forme canonique	Forme Standard
Optimiser $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <b>S.C :</b> $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$ (resp $\geq$ ) $x_j \geq 0$	Optimiser $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <b>S.C :</b> $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$ $x_j \geq 0$

**Remarque 1.1.**

- On peut toujours écrire un problème canonique sous forme standard et vis versa.
- Les problèmes de minimisations et de maximisations sont équivalents puisque

$$\min Z = - \max(-Z)$$

$$\max Z = - \min(-Z)$$

**1.1.2 La notion de dualité**

La notion de dualité est un aspect très important de la programmation linéaire. Elle fut développée par John Newmann en 1947 où il a démontré qu'à tout modèle linéaire qu'on appelle programme primal (P) correspond un autre appelé programme dual (D).

**Problème dual d'un problème de programmation linéaire**

Considérons le problème de (PL) suivant :

$$(\mathbf{PL}) = \begin{cases} \text{Maximiser} & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \mathbf{S.C} & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Son dual est le programme linéaire suivant :

$$(\mathbf{D}) = \begin{cases} \text{Minimiser} & W = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \mathbf{S.C} & \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0, & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

On constate que les deux programmes comportent les mêmes éléments, mais arrangés de manière différente. Les relations suivantes existent entre les deux programmes.

**Relations entre le primal et le dual (Forme canonique) :**

1. Si la fonction objectif du primal doit être maximisée, celle du dual doit être minimisée (et inversement).
2. Les coefficients  $c_j$  de la fonction objectif du primal deviennent les seconds membres des contraintes du dual alors que les seconds membres des contraintes du primal deviennent les coefficients des variables duales dans la fonction objectif.
3. Les coefficients des variables dans les contraintes du dual sont ceux du primal mais transposés (les coefficients de la ligne  $i = k$  du primal deviennent les coefficients de la colonne  $j = k$  du dual).



4. A chaque contrainte du primal de type  $\leq$ , lui correspond une variable duale de signe  $\geq 0$ .
5. A chaque variable de décision non négative dans le primal, lui correspond une contrainte de type  $\geq$  dans le dual.
6. La dualité est une notion symétrique. L'un des programmes au choix est appelé le programme primal et l'autre le programme dual.
7. Le dual du dual est le programme primal.

### Définition du dual dans le cas général

Evidemment, on peut définir le dual de programme linéaire quelconque. Le tableau suivant résume les correspondances entre primal et dual et permet d'écrire directement le dual d'un programme linéaire quelconque.

$Z = (\max) C^T x$	$W = (\min) b^T y$
ième contrainte $\leq$	variable $y_i \geq$
ième contrainte $\geq$	variable $y_i \leq$
ième contrainte $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \leq 0$	jème contrainte $\leq$
$x_j \geq 0$	jème contrainte $\geq$
$x_j \in \mathbb{R}$	jème contrainte $=$

### Relations de dualité

- Soient  $x$  et  $y$  des solutions réalisables respectivement du primal et du dual. Si  $c^t x = y^t b$  alors,  $x$  et  $y$  sont des solutions optimales.
- Si un problème possède une valeur optimale infinie, son dual n'a pas de solutions.

**Propriété 1.1** (Dualité faible). Si  $x$  et  $y$  sont des solutions réalisables respectivement du primal (P) et de son dual (D), elles vérifient  $C^t x \leq y^t b$

**Propriété 1.2** (Dualité forte). Si le problème primal possède une solution optimale, alors il en est de même pour le problème dual et de plus, les deux problèmes ont la même valeur optimale  $Z^* = W^*$ .

### Conditions de complémentarité des écarts :

Soient  $x$  solution réalisable et  $y$  solution optimale respectivement au programme primal et dual si et si seulement si :

- $y_i (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m$

- $(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j)x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$

### Définition 1.3.

• **Combinaison linéaire convexe.** Soient  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , des éléments d'un espace vectoriel. On appelle combinaison linéaire convexe de ces vecteurs le vecteur

$$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p, \quad \text{où } a_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p a_i = 1$$

- **Point extrême.**  $v \in C$  (une partie de l'espace qui est convexe) est dit point extrême si  $v$  ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire convexe de deux points de  $C$ .
- **Solution.** Tout ensemble  $X_j$  qui satisfait les  $m$  contraintes (contraintes essentielles).
- **Solution réalisable.** Tout ensemble  $X_j$  qui satisfait les contraintes essentielles et les contraintes de positivités.
- **Régions des solutions réalisables.** L'ensemble des solutions réalisables.
- **Solution optimal.** Est une solution réalisable et qui réalise le minimum ou le maximum.

### 1.1.3 Méthodes de résolution

#### Méthode graphique :

Est aussi appelée résolution géométrique, elle est utilisée généralement pour des (PL) sous forme canonique à deux variables.

#### Démarche à suivre pour la résolution graphique :

- On reporte sur un graphique chacune des contraintes du modèle et on détermine la région commune à l'ensemble de ces contraintes. Cette région si elle existe constitue la région des solutions réalisables.
- On détermine les coordonnées des points extrêmes de la région des solutions réalisables, soit en les localisant directement sur le graphique en résolvant les équations des droites qui se coupent.
- On substitue ensuite les coordonnées de chaque point extrême dans l'expression de la fonction objectif. Le point extrême qui optimise la fonction objectif correspond à la solution optimale.

**Exemple 1.1.** soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \max \quad Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{S.C} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

**Solution :**

Sommet	Coordonnées $(x_1, x_2)$	Valeur objectif $Z$
<i>A</i>	(0, 0)	0
<i>B</i>	(0, 14)	28
<i>C</i>	(3, 12)	33
<i>D</i>	(6, 6)	30
<i>E</i>	(8, 0)	24

**Remarque 1.2.** Après l'évaluation de la fonction objectif  $(3x_1 + 2x_2)$  en chacun des points (résultat qu'on recueille dans le tableau ci-dessus).

Comme le point *C* fournit la plus grande valeur à la fonction  $Z$  et l'objectif c'est de maximiser, ce point représente la solution optimale :  $Z = 33$  avec  $x_1 = 3$  et  $x_2 = 12$

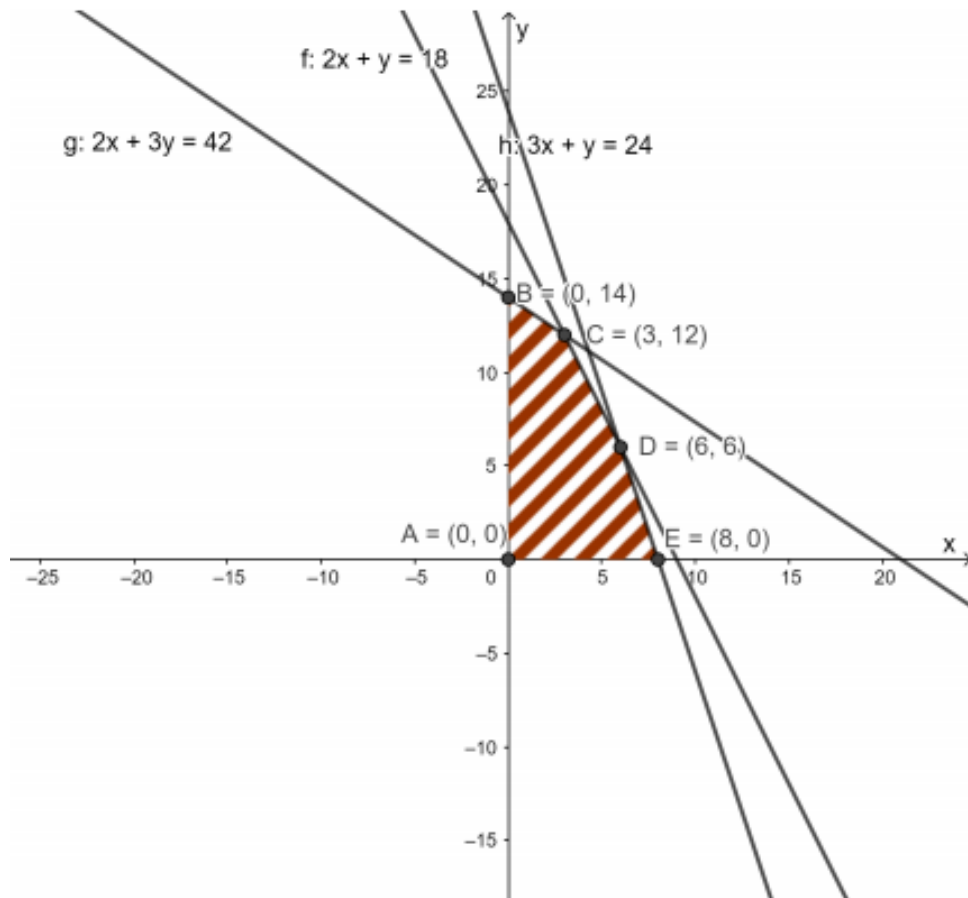


FIGURE 1.1 –

**Méthode du simplexe :**

L'algorithme du simplexe est une méthode générale de résolution des programmes linéaires dont les fondements ont été énoncés et publiés en 1947 par G.Danzig. C'est une technique informatique d'une grande richesse conceptuelle et d'une extraordinaire efficacité qui résulte d'expériences établies par la résolution de milliers de problèmes pratiques (qui trouvaient d'ailleurs leurs origines dans des secteurs variés de la vie économique), pouvant se modéliser comme des programmes linéaires. De plus, la méthode du simplexe avait une certaine profondeur mathématique et se révélait un outil de démonstration de résultats théoriques nouveaux, elle apporte donc cette fameuse synthèse "théorique-pratique" qui donne à la recherche opérationnelle et à la programmation linéaire, en particulier, ses premières lettres de noblesse en tant que discipline scientifique.

**Principe de la méthode du simplexe**

1. Déterminer une première solution de base réalisable, cette solution initiale sert de départ au cheminement vers la solution optimale si elle existe.
2. Si la solution obtenu en 1 n'est pas optimale déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

**Tableau du simplexe**

$C_j$	$C_1$	$C_2$	....	$C_m$	$C_{m+1}$	....	$C_j$	....	$C_n$	
$C_B$ base	$x_1$	$x_2$	....	$x_m$	$x_{m+1}$	....	$x_j$	....	$x_n$	$b_i$
$C_1 x_1$	1	0	....	0	$a_{1,m+1}$	....	$a_j$	....	$a_n$	$b_1$
$C_2 x_2$	0	1	....	0	$a_{2,m+1}$					$b_2$
			....							
$C_m x_m$	0	0	....	1	$a_{m,m+1}$	....	$a_{mj}$	....	$a_{mm}$	$b_m$
$Z_j$	$Z_1$	$Z_2$		$Z_m$	$Z_{m+1}$	....	$Z_j$	....	$Z_n$	$Z$
$C_j - Z_j$	$C_1 - Z_1$	$C_2 - Z_2$		$C_m - Z_m$	....	....	$C_j - Z_j$	....	$C_n - Z_n$	

**Choix de la variable entrante :**

- Cas du max :correspond à la variable de la plus grande valeur de  $C_j - Z_j$  avec  $C_j - Z_j > 0$
- Cas du min :correspond à la variable de la plus petite valeur de  $C_j - Z_j$  avec  $C_j - Z_j < 0$

**Choix de la variable sortante :**

Dans les deux cas (min ou max) elle correspond à la variable de la plus petite valeur de  $\frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}$  avec  $u_{ir} > 0$  ( $\bar{b}_i$  est la valeur de la solution de base,  $u_{ir}$  représente les  $a_{ij}$  de la colonne de la variable entrante).

**Critère d'arrêt**

Nous arrêtons la procédure lorsque nous obtenons le critère d'optimalité. L'algorithme du simplexe s'arrête lorsque :

- $C_j - Z_j \leq 0, j \in J_h$  : pour un problème de maximisation.
- $C_j - Z_j \geq 0, j \in J_h$  : pour un problème de minimisation ( $J_h$  est l'ensemble des indices des variables hors base).

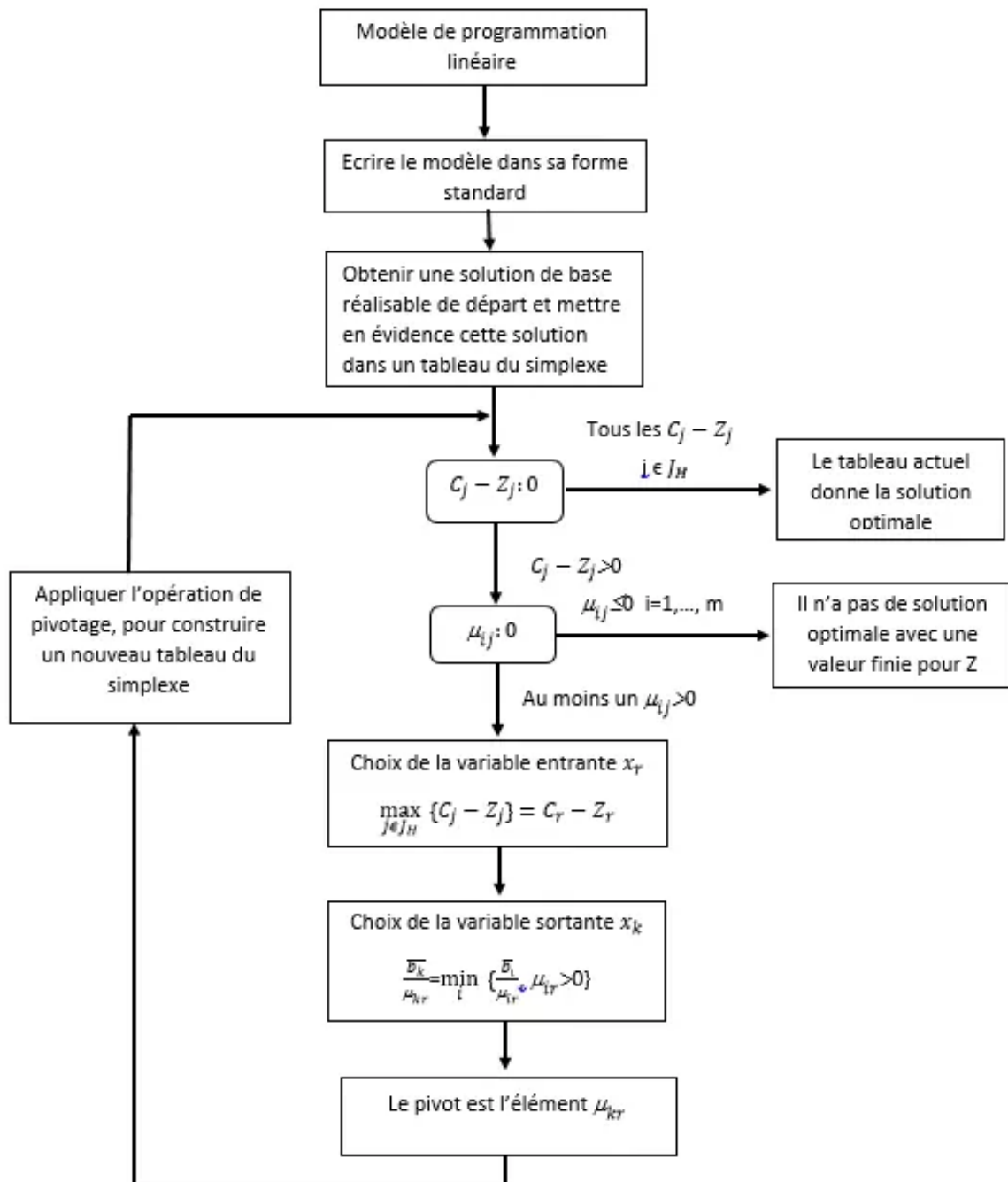


FIGURE 1.2 – Organigramme de l’algorithme du simplexe ”Maximisation”

## 1.2 L'optimisation multiobjectifs linéaire

### 1.2.1 Concepts de base

#### Formulation du problème

Comme le suggère son nom un problème d'optimisation linéaire multiobjectifs, multicritères où vectorielles consiste à optimiser plusieurs fonctions simultanément qui sont généralement conflictuelles ou contradictoires, notées  $Z_i$ , ( $i = 1, \dots, r$ ) avec  $r \geq 2$

$$(\text{MOLP}) \begin{cases} \text{"Optimiser"} & Z(x) = \{Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_r(x)\} \\ \text{S.C} \\ x \in S \end{cases}$$

où :  $r \geq 2$  est le nombre de fonctions objectifs.

$Z_i$  linéaires.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vecteur représentant les variables de décision,

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$  représente l'ensemble des solutions réalisables associées à des contraintes d'égalités, d'inégalités et des bornes explicites (espace de décision),

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;  $b \in \mathbb{R}$ .

$Z(x) = (Z_1(x), \dots, Z_r(x))$  vecteur des critères à optimiser.

$Z_i, i \leq r$  est la fonction à valeur réelle du vecteur de décision.

L'ensemble  $Y = Z(S)$  représente les points réalisables dans l'espace des critères (espace objectif), et  $Z = (Z_1(x), \dots, Z_r(x))$  avec  $Y_i = Z_i$  représente un point de l'espace des critères.

**Remarque 1.3.** Le symbole " ." signifie qu'il n'est généralement pas possible de trouver dans  $S$  une action qui optimise simultanément les  $r$  critères. Ainsi de cette façon, un problème multicritères est correctement formulé par rapport à la réalité concernée par le problème de décision.

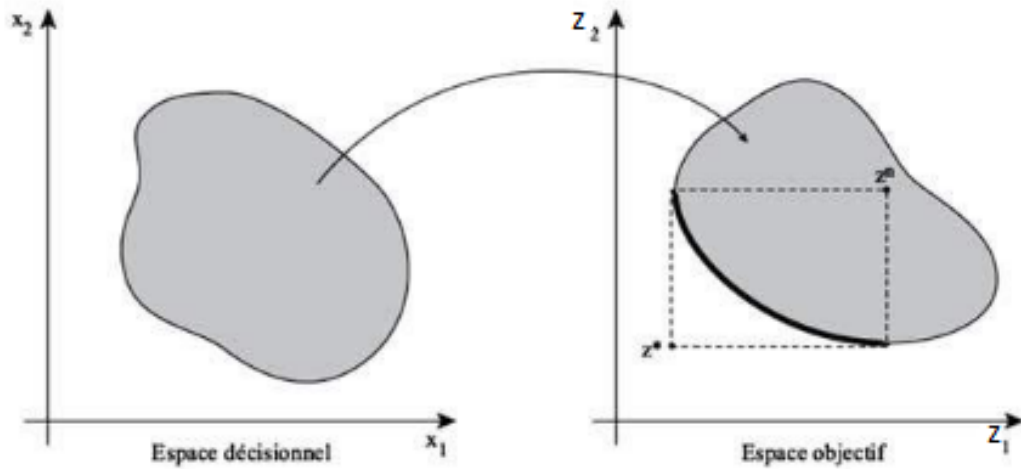


FIGURE 1.3 – Espace décisionnel et espace objectif d'un problème d'optimisation Multiobjectifs

**Exemple 1.2.** Soit le problème multiobjectifs suivant :

$$(\text{MOLP}) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } Z_1 = -3x_1 - 8x_2 \\ \text{minimiser } Z_2 = 5x_1 + 4x_2 \\ S.C \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

l'espace decisionnel est donné par la figure 1.4



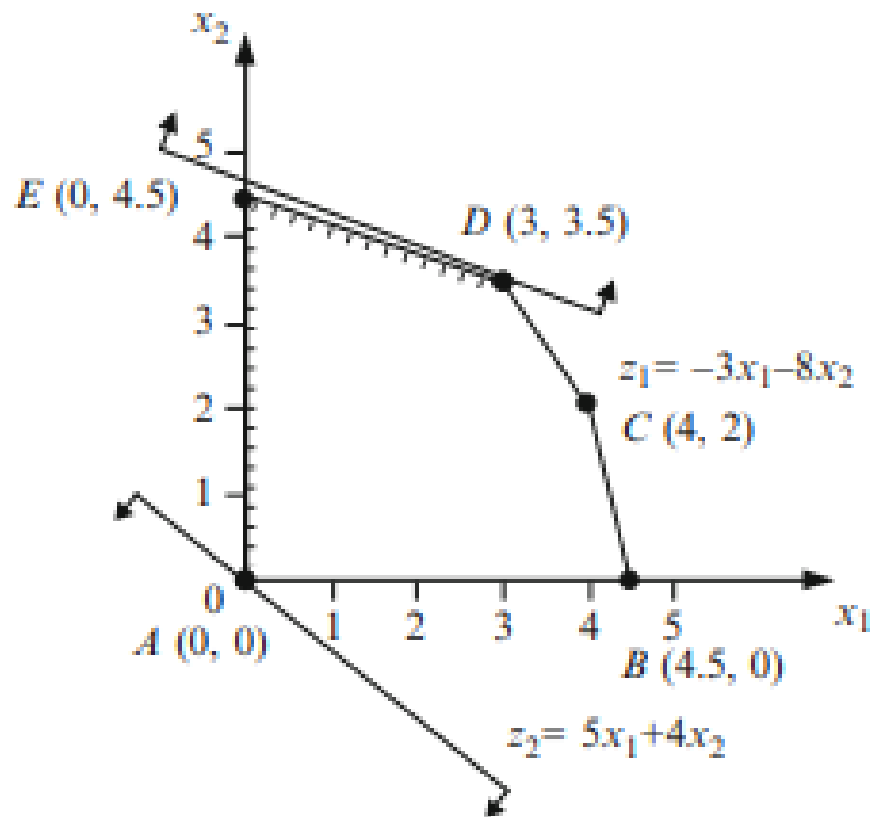


FIGURE 1.4 –

L'espace des critères est donné par la figure 1.5 où les sommets sont obtenus comme suit :

$$Y_A = Z(A) = (Z_1(A), Z_2(A)) = (0, 0)$$

$$Y_B = Z(B) = (Z_1(B), Z_2(B)) = (-13.5, 22.5)$$

$$Y_C = Z(C) = (Z_1(C), Z_2(C)) = (-28, 28)$$

$$Y_D = Z(D) = (Z_1(D), Z_2(D)) = (-37, 29)$$

$$Y_E = Z(E) = (Z_1(E), Z_2(E)) = (-36, 18)$$

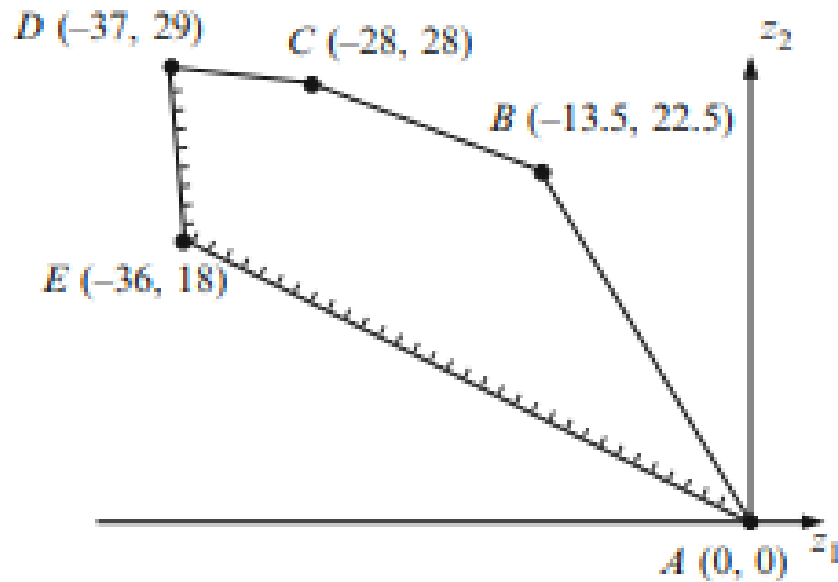


FIGURE 1.5 –

### 1.2.2 Dominance

À la fin du 19ème siècle l'économiste **Vilfredo Pareto** formule un concept d'optimalité qui porte son nom **Optimalité au sens de Pareto (Pareto optimality)** qui constitue les origines de la recherche sur l'optimisation multicritères, où la notion d'optimalité habituelle (optimum globale) n'a aucun sens ( voir [3] ).

**Remarque 1.4.** Les définitions et les relations qui suivent sont données pour un problème de minimisation.

**Définition 1.4** (Dominance). Soient deux vecteurs critères  $Z, Z' \in Y$

On dit que le vecteur  $Z$  domine  $Z'$  si et seulement si :

- $Z \leq Z'$  et  $Z \neq Z'$  ( c'est-à-dire  $Z_i \leq Z'_i$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  et  $Z_j < Z'_j$  pour au moins un indice  $j$  )

D'une manière équivalente, nous avons : un vecteur  $Z$  est meilleur qu'un vecteur  $Z'$  au sens de Pareto si et seulement si :

- les composantes de  $Z$  sont meilleures ou égales que les composantes de  $Z'$ ,
- au moins une composante de  $Z$  est strictement meilleure que la composante de  $Z'$

**Définition 1.5** (Dominance forte). Soient deux vecteurs critères  $Z, Z' \in Y$

On dit que le vecteur  $Z$  domine fortement  $Z'$  si et seulement si :

- $Z < Z'$  ( c'est-à-dire  $Z_i < Z'_i$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  ), si  $Z$  domine fortement  $Z'$ , alors  $Z$  est strictement meilleure que  $Z'$  pour tous les critères (toutes les composantes de  $Z$  sont strictement meilleure que les composantes de  $Z'$ )

**Définition 1.6** (Dominance faible). Soient deux vecteurs critères  $Z, Z' \in y$

On dit que le vecteur  $Z$  domine faiblement  $Z'$  si et seulement si :

- $Z \leq Z'$  ( c'est-à-dire  $Z_i \leq Z'_i \quad \forall i = 1, \dots, r$  )

Notons que pour toute paire de vecteurs  $u$  et  $v$  un et un seul des cas suivants peut se présenter :

- $u$  domine  $v$ .
- $u$  est dominé par  $v$ .
- $u$  et  $v$  sont équivalents au sens de Pareto.

Les solutions équivalentes au sens de Pareto sont appelées aussi, solutions non-dominées.

### Propriété de la relation de dominance

La relation binaire de dominance notée  $\prec$  :

- N'est pas reflexive car un vecteur ne se domine pas lui même.
- Est asymétrique  $\Leftrightarrow \forall u, v : \quad u \prec v \Rightarrow v \not\prec u$ .
- Est transitive, car si  $u \prec v$  et  $v \prec w$  alors  $u \prec w$ .

**Définition 1.7.** Une relation binaire " $\prec$ " est dite relation d'ordre partiel strict si elle est asymétrique et transitive.

### 1.2.3 Efficacité (Pareto optimalité)

**Définition 1.8** (Efficacité). Une solution  $x^* \in S$  est dite solution efficace (efficient solution) ou solution Pareto optimale pour le problème multiobjectifs si et seulement s'il n'existe pas de  $x \in S$  (une solution réalisable) tel que  $Z(x)$  domine  $Z(x^*)$

**Remarque 1.5.** Les solutions efficaces sont aussi connues sous le nom de solutions "Pareto optimales, ou de compromis".

**Définition 1.9** (Efficacité faible). Une solution  $x^* \in S$  est faiblement efficace si et seulement si il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $Z_i(x) \leq Z_i(x^*)$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  avec  $Z_j(x) <$

$Z_j(x^*)$  pour un certain  $j$

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère est faiblement non dominé.

**Définition 1.10** (efficacité forte). Une solution  $x^* \in S$  est fortement efficace si et seulement si il n'existe pas de  $x \in S$  tel que  $x \neq x^*$  et  $Z_i(x) < Z_i(x^*)$ .

Une solution est fortement efficace si son vecteur critère est fortement non dominé.

**Remarque 1.6.**

Dans l'espace réalisable l'ensemble des solutions efficaces ou Pareto-optimales du problème((MOLP)) est appelé l'ensemble de Pareto.

Résoudre un problème multiobjectifs (MOLP) revient à trouver :

- Soit l'ensemble des solutions efficaces (ensemble de Pareto).
- Soit l'ensemble des vecteurs non dominés (Front de Pareto)

**Définition 1.11** (Le point idéal). Le vecteur idéal  $Z^* = (Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_r^*)$  est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectifs  $Z_i$ , i.e :  $Z_i^* = \{\min(Z_i(x)), x \in S\}$ .

Il est clair que si le vecteur idéal est réalisable, il est la solution du problème ((MOLP)), mais ce n'est pas en général possible à cause des conflits qui existent entre les critères.

**Définition 1.12** (Le point anti-idéal). Le vecteur  $Z^* = (Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_r^*)$  défini par :  $Z_i^* = \{\max(Z_i(x)), x \in S\}$  est le point anti-idéal.

**Définition 1.13** (Front de Pareto). C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominées

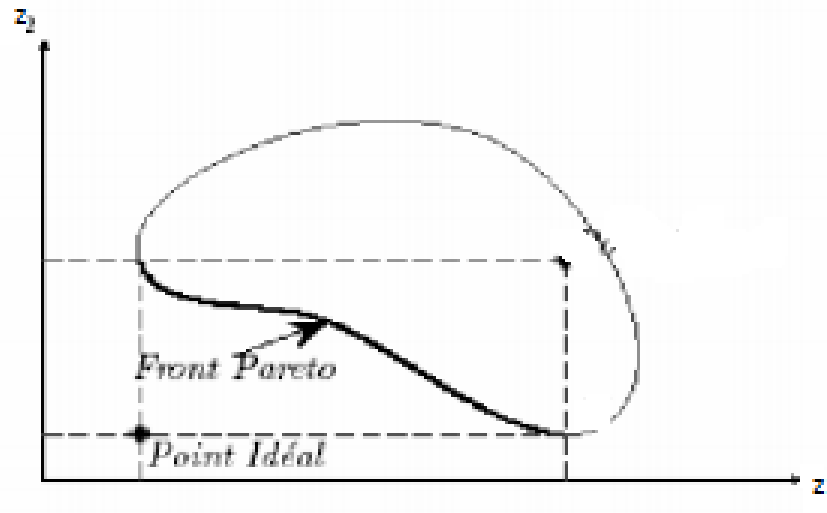


FIGURE 1.6 –

### 1.2.4 Quelques méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs

#### Méthode des contraintes

Elle est aussi dite méthode de compromis ou  $\epsilon$ -contrainte. Elle transforme un problème d'optimisation multiobjectifs en un problème d'optimisation mono-objectif de la façon suivante :

- choisir un objectif à optimiser prioritairement,
- choisir un vecteur de contraintes initiales  $\epsilon$ ,
- transformer le problème en gardant l'objectif prioritaire et en transformant les autres objectifs en contraintes d'inégalités comme suit :

$$(P_C) \begin{cases} \text{minimiser } Z_j(x) \\ \text{S.C } Z_i(x) \leq \epsilon_i, & i = 1, \dots, r; \quad i \neq j \\ x \in S \end{cases}$$

Les relations entre la solution optimale  $x^*$  du problème de contraintes et l'optimalité de Pareto d'un problème de programmation linéaire multiobjectifs peut être caractérisé par le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** Si  $x^* \in S$  est une solution optimale du problème  $(P_C)$  pour certains  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ ;  $i \neq j$ , alors  $x^*$  est une solution optimale de Pareto pour un problème (MOLP)

**Exemple 1.3.** Considérons l'exemple 1.2. Le problème de contrainte pour  $j = 1$  devient :

$$(P_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } Z_1 = -3x_1 - 8x_2 \\ S.C \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 \leq 18 \\ Z_2 = 5x_1 + 4x_2 \leq \epsilon_2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Ici, par exemple, si nous choisissons  $\epsilon_2 = 18$ , comme illustré ci-dessus, alors, la solution optimale à ce problème de contraintes se situe au point extrême  $E(-36, 18)$  par conséquent, donne une solution optimale de Pareto  $x^* = (0, 4.5)$ . Si nous choisissons un autre  $\epsilon_2 = 14$  on obtient le point extrême  $(Z_1, Z_2) = (-28, 14)$ , dont la solution optimale de Pareto est le point  $x^* = (0, 3.5)$

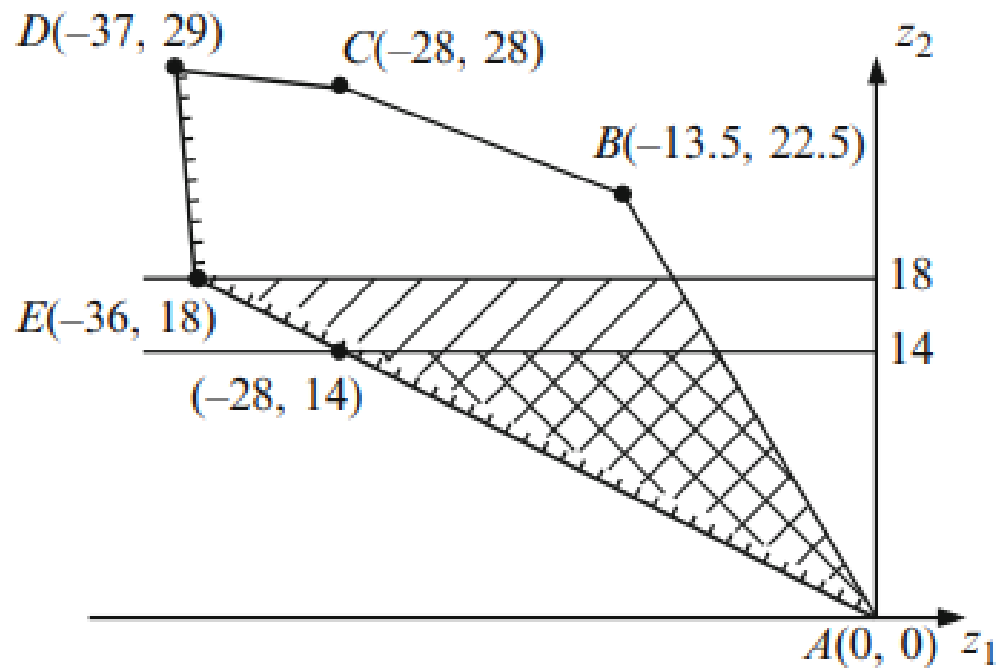


FIGURE 1.7 –

### Méthode d'agrégation par pondération

Dans cette méthode le but consiste à ramener le problème multiobjectifs à un problème mono-objectif plus simple à traiter (voir [10] ). Cette méthode est la plus simple des méthodes d'optimisation multiobjectifs. La transformation que l'on effectue est la suivante :

$$(P_w) \begin{cases} \text{Minimiser } wZ(x) = \sum_{i=1}^r w_i Z_i(x), \\ \text{avec } x \in S, \quad w_i \in [0, 1] \text{ et } \sum_{i=1}^r w_i = 1 \end{cases}$$

$w_i$  : appelé le poids de  $Z_i(x)$ , différents poids fournissent différentes solutions.

**Théorème 1.2.** Si  $x^* \in S$  est une solution du problème  $(P_w)$  pour certain  $w > 0$ , alors  $x^*$  est une solution optimale au sens de Pareto du problème linéaire multiobjectifs.

**Exemple 1.4.** Considérons toujours l'Exemple 1.2. Le problème  $(P_w)$  pour  $w = (w_1, w_2)$  devient :

$$(P_w) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } wZ(x) = w_1(-3x_1 - 8x_2) + w_2(5x_1 + 4x_2) \\ S.C \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Choisissons  $w_1$  et  $w_2$  tel que  $w_1 + w_2 = 1$ , par exemple,  $w_1 = 0.4$  et  $w_2 = 0.6$  on obtient alors,  $wZ(x) = 1.8x_1 - 0.8x_2$

Comme le montre la figure 1.8, on peut facilement comprendre que la résolution du problème de pondération correspondant donne le point extrême  $E(0, 4.5)$  comme solution optimale de Pareto. En outre, comme deux cas extrêmes, si nous fixons  $w_1 = 1, w_2 = 0$  et  $w_1 = 0, w_2 = 1$ , à partir de la figure ci-dessus, les solutions optimales des problèmes de pondération correspondants deviennent les points extrêmes  $D(3, 3.5)$  et  $A(0, 0)$ , respectivement. Dans ces cas, bien que la condition  $w > 0$  du théorème 1.2 ne soit pas satisfaite, on peut voir sur la figure ci-dessus que ces deux points extrêmes sont des solutions optimales de Pareto.

**Remarque 1.7.**

- Les poids  $w_i$  et les seuils de satisfaction  $\epsilon_i$  sont fixés par le décideur.
- En faisant varier les points  $w_i$  et  $\epsilon_i$  dans les deux méthodes on peut générer un sous-ensembles de l'ensemble des solutions efficaces du (MOLP).



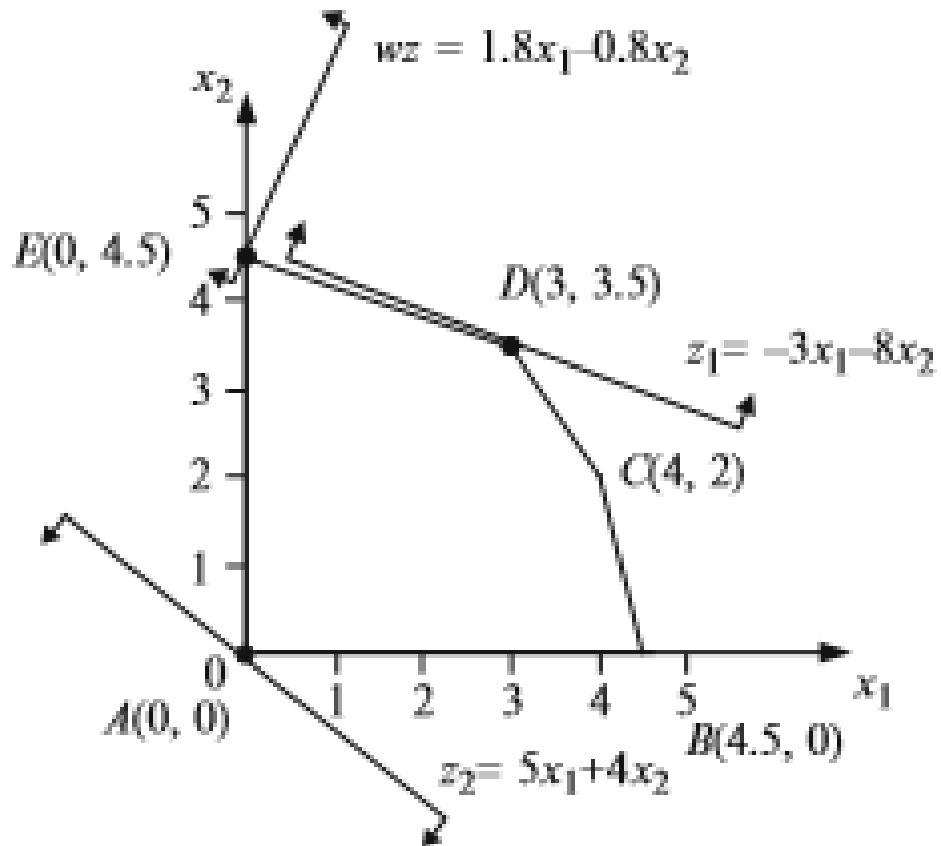


FIGURE 1.8 –

### Méthode lexicographique

Cette méthode suppose que les objectifs sont rangés par ordre d'importance décroissante par le décideur. Ensuite, les fonctions objectifs sont traitées dans cet ordre pour obtenir l'optimum. La méthode lexicographique peut s'exprimer de la manière suivante : supposons que l'on ait les fonctions objectif  $Z_i(x)$  avec  $i = 1, \dots, n$  classées de telle sorte que si  $i < j$  alors  $Z_i$  est prioritaire sur  $Z_j$ . On résout d'abord le problème :

$$(MOLP_{L1}) \begin{cases} \min Z_1(x) \\ t.q \\ x \in S \end{cases}$$

On obtient  $x_1^*$  la meilleure solution trouvée pour  $Z_1$ , associée à la valeur  $Z_1^* = Z_1(x_1^*)$ .  $Z_1^*$

devient alors une contrainte du problème associé à  $Z_2$  :

$$(MOLP_{L2}) \left\{ \begin{array}{l} \min Z_2 \\ t.q \\ x \in S \\ Z_1(x) = Z_1^* \end{array} \right.$$

La meilleure solution trouvée est alors  $x_2^*$  et on pose  $Z_2^* = Z_2(x_2^*)$  comme contrainte supplémentaire pour la résolution de  $Z_3$ . La procédure est itérée jusqu'à ce que tous les objectifs aient été traités. Ainsi le problème associé à la fonction  $Z_i$  est le suivant :

$$(MOLP_{Li}) \left\{ \begin{array}{l} \min Z_i(x) \\ t.q \\ x \in S \\ Z_1(x) = Z_1^* \\ Z_2(x) = Z_2^* \\ \dots \\ Z_{i-1}(x) = Z_{i-1}^* \end{array} \right.$$

$Z_i(x^*) = Z_i^*$  avec  $x^*$  la meilleure solution trouvée en optimisant la fonction objectif  $Z_i$  avec  $Z_1(x^*)Z_1^*, Z_2(x^*)Z_2^*, \dots, Z_{i-1}(x^*) = Z_{i-1}^*$  comme contraintes additionnelles.

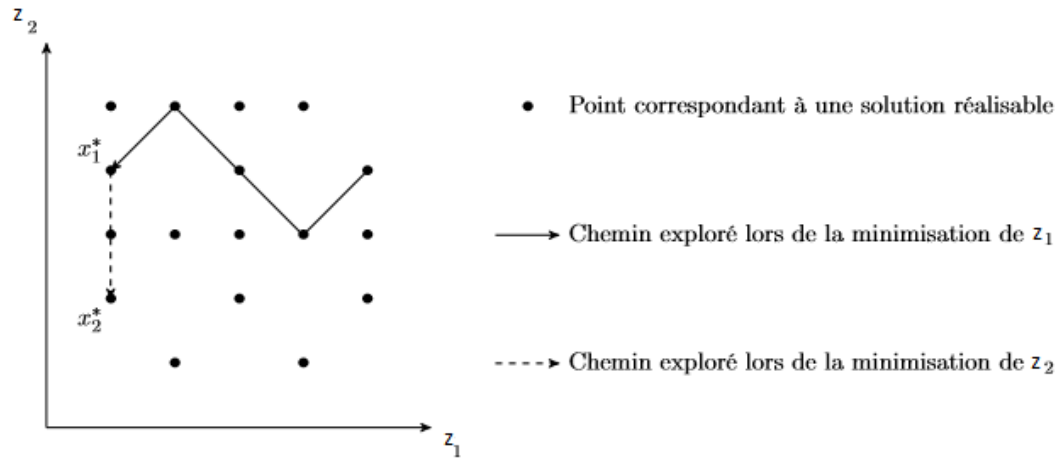


FIGURE 1.9 – La méthode lexicographique dans le cas bi-objectif

**Exemple 1.5.** Considérons l'exemple 1.2. Le problème devient :

$$(MOLP_{l1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } Z_1 = -3x_1 - 8x_2 \\ S.C \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Comme le montre la figure 1.10, on peut facilement comprendre que la résolution du problème lexicographique correspondant donne le point extrême  $D(3, 3.5)$  comme solution optimale de Pareto.

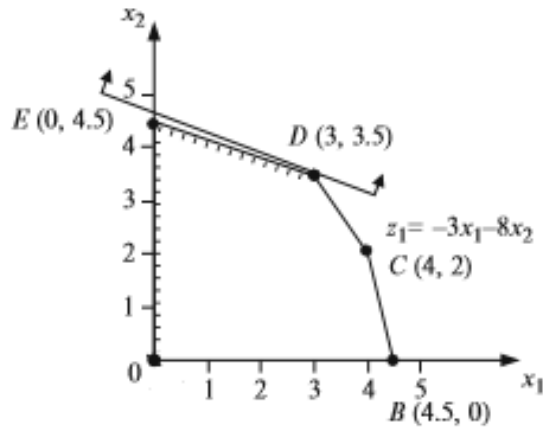


FIGURE 1.10 –

$Z(D) = -37$  alors  $-3x_1 - 8x_2 = -37$  devient une contrainte pour le nouveau problème

$$(MOLP_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } Z_2 = 5x_1 + 4x_2 \\ S.C \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + x_2 \leq 18 \\ -3x_1 - 8x_2 = -37 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Comme le montre la figure 1.11, on peut facilement comprendre que la résolution du problème lexicographique correspondant donne le point extrême  $A(0,0)$  comme solution optimale de Pareto.

Le point  $x^* = (0,0)$  est efficace pour le problème initial (MOLP).

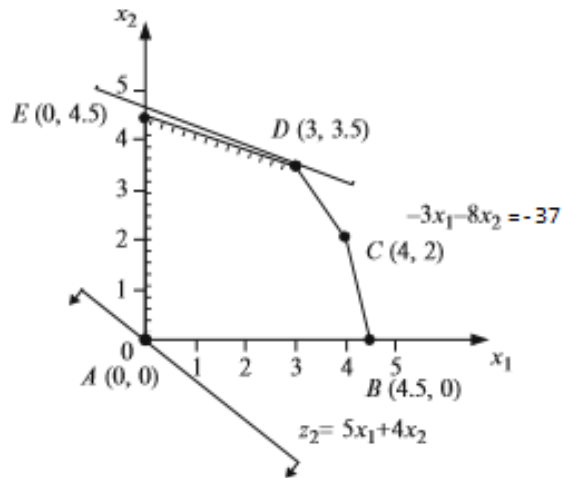


FIGURE 1.11 –

## Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à la programmation linéaire dans son aspect mono-critère, par lequel on a rappelé les notions de base. Comme méthodes de résolution, nous avons présenté brièvement la méthode graphique et la méthode du simplexe. Par la suite, on a considéré l'aspect multicritère. On a rappelé également les notions de base et nous avons présenté quelques méthodes de résolution.

## CHAPITRE 2

# JEUX COOPÉRATIFS

### Introduction

La théorie des jeux coopératifs offre un cadre particulièrement cohérent pour analyser les situations où les joueurs ont de fortes incitations à coopérer. Elle propose des outils relativement simples à mettre en oeuvre pour étudier et résoudre les problèmes de négociation, de partage ou de pouvoir.

Le concept de coopération est très important en théorie des jeux mais reste difficile à cerner. Coopérer veut dire agir ensemble dans un intérêt commun. Cependant pour que deux joueurs ou plus agissent ensemble pour un intérêt commun il est nécessaire de se séparer des utilités individuelle pour définir une sorte d'utilité commune qui va déterminer leur comportement commun. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse essentielles suivant laquelle le but d'un agent (joueur, participant...) est de maximiser son utilité espéré étant donné sa croyance. On a donc besoin de modéliser les comportements de coopération sans violer les fondements de la théorie des jeux.

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par un rappel des notions de base de la théorie des jeux coopératifs. Nous présenterons par la suite certains concepts des solutions comme le coeur et le nucléole.

## 2.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.1.** Le jeu coopératif, est un jeu où le simple plaisir de jouer est mis en avant dans la poursuite de l'objectif de groupe qui sera atteint grâce à l'entraide dans les interactions. Loin de critiquer les jeux de compétition qui développent aussi des valeurs, ici l'accent est mis sur la convivialité, le plaisir de jouer est mis en avant dans la poursuite de l'objectifs de groupe qui sera atteint grâce à l'entraide dans les interactions.

**Définition 2.2.** L'utilité transférable est un concept en théorie des jeux coopératifs et en économie, une utilité est transférable si un joueur peut transférer sans perte une partie de son utilité à un autre joueur.

Un jeu coopératif est à utilité transférable ( TU ) lorsque la négociation porte sur le partage d'un bien divisible (transférable) que les joueurs évaluent en utilisant la même échelle utilitaire. Cela suppose notamment qu'une "monnaie" commune existe et que les joueurs peuvent effectuer des transferts "monétaires" entre eux.

**Définition 2.3.** Soit  $N = \{1, \dots, n\}$  un ensemble de joueurs, **une coalition** est un sous-ensemble non vide  $S$  de joueurs, c'est à dire

$$S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

On appelle **structure de coalition**  $\varphi$  tout sous-ensembles de l'ensemble des joueurs  $N$ , autrement dit c'est une partition  $\varphi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  de l'ensemble  $N$ , telle que :

$$\begin{cases} S_K \subseteq N, \forall K = 1, \dots, k \\ \bigcup_{k=1}^K S_k = N \\ S_k \cap S_j = \emptyset, j \in 1, \dots, k; k \neq j \end{cases}$$

**Définition 2.4** (Fonction caractéristique).

La fonction caractéristique est une fonction qui associe à chaque coalition  $S$  de  $N$  ( des joueurs) une valeur  $v(S)$ .

cette fonction nous informe sur les résultats qui peuvent obtenir ces différentes coalitions en précisant le montant que les membres d'une coalition  $S$  peuvent s'assurer s'ils coopèrent ensemble sans l'aide des joueurs extérieurs à leur groupe. Elle est défini sur l'ensemble  $2^N$

de toutes les coalitions :

$$\begin{aligned} v : 2^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ S \subseteq N &\mapsto v(S) \end{aligned}$$

La fonction caractéristique  $v$  vérifie ces propriétés suivantes.

- $v(\emptyset) = 0$  (la valeur de la fonction caractéristique d'une coalition vide égale à zero)
- $v(S \cup C) \geq v(S) + v(C)$  ( si des coalitions disjointes ( $S \cap C = \emptyset$ ) sont réunies en une grande coalition on peut admettre que la valeur de la fonction caractéristique de cette grande coalition soit au moins égale à la somme des valeur des deux coalitions).

On dit que  $v$  est **super-additive**. Cette propriété stipule que la coopération est rentable.

### Notation

On note un jeu coopératif à utilité transférable ou sous forme caractéristique par

$$\langle N, v \rangle \tag{2.1}$$

où

- $N = \{1, \dots, n\}$  est l'ensemble des joueurs,
- $v$  est une fonction caractéristique

**Exemple 2.1.** Une banque propose un placement rémunérateur dont le taux d'intérêt est une fonction croissante de la somme déposée, exprimée en millions d'euros. Trois hommes d'affaires  $\{A, B, C\}$  décident un fonds commun d'investissement : ils déposent 5 million d'euros, 3 millions d'euros et 1 millions d'euros, respectivement.

La somme totale déposée à la banque excède le seuil à partir duquel le taux d'intérêt annuel maximal de 5% est appliqué, ce qui n'aurait pas été possible sans aucune forme de coopération.

Comment les trois investisseurs doivent-ils partager ces intérêts annuels entre eux ?

Pour répondre à cette question, nous pouvons représenter cette situation par un jeu coopératif. L'ensemble des joueurs est l'ensemble des trois investisseurs, noté  $N = \{A, B, C\}$ . La fonction caractéristique associe naturellement à chaque coalition d'investisseur, les intérêts annuels qu'elle reçoit si ses membres font un dépôt commun.

Pour le cas de la coalition  $\{A, B\}$ , la somme totale déposée est  $5 + 3 = 8$  millions d'euros, qui



rapporte,  $8 \times 0.05 = 0.4$  millions d'euros. En appliquant ce calcul à chaque coalition, nous obtenons les données du tableau ci-dessous (exprimées en milliers d'euros). À titre d'exemple, la contribution du joueur  $C$  à la coalition  $\{A, B\}$  est égale à  $v(\{A, B, C\}) - v(\{A, B\}) = 50$ , i.e la participation de  $C$  au projet commun augmente de 50 millions d'euros le totale des intérêts annuels perçus.

$S$	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{C\}$	$\{A,B\}$	$\{A,C\}$	$\{B,C\}$	$\{A,B,C\}$
$v(S)$	200	120	30	400	300	160	450

### Quelques types de jeux coopératifs

Un jeu  $(N, v)$  est dit :

1. **Symétrique** si  $v(S) = v(C)$ ,  $\forall S, C$ ,  $|S| = |C|$ .

Cette propriété stipule que la capacité d'une coalition dépend uniquement de sa taille et non de sa composition.

2. **Monotone** si  $v(S) \leq v(C)$ ,  $\forall S, C$ ,  $S \subseteq C$ .

Lorsque plus de joueurs rejoignent une coalition  $S$  ils forment une nouvelle coalition  $C$  dont la valeur sera ou moins égale à celle de la coalition  $S$ .

3. **Positif** si  $v(S) \geq 0$ ,  $S \subseteq N$

4. **Essentiel** si  $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$

C'est-à-dire s'il est effectivement dans l'intérêt des joueurs de former la grande coalition plutôt que chacun reste isolé.

5. **Convexe** si pour chaque coalitions  $S, C \subseteq N$  on a

$$v(S) + v(C) \leq v(S \cup C) + v(S \cap C) \quad (2.2)$$

6. **Sous-additif** si

$$v(S \cup C) \leq v(S) + v(C), \quad \forall S, C \text{ tel que } S \cap C = \phi$$

C'est-à-dire que coopération n'est pas favorable, les joueurs sont mieux quand ils sont seuls.

7. **Additif** si

$$v(S \cup C) = v(S) + v(C)$$

Dans ce cas on a :

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$$

C'est-à-dire que la valeur de chaque coalition est la même que ses membres coopèrent ou pas.

8. **Jeu simple** un jeu coalitionnel  $(N, v)$  est simple si

$$v(S) = 1 \quad (\text{coalition gagnante})$$

$$v(S) = 0 \quad (\text{coalition perdante})$$

$$v(N) = 1$$

- Un joueur a un **droit de veto** s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes ( $v(S) = 1 \Rightarrow j \in S$ )
- Un joueur est un **dictateur** si une coalition est gagnante si et seulement si il en fait partie ( $v(S) = 1 \Leftrightarrow j \in S$ )

**Exemple 2.2.** Soit le jeu  $(N, v)$  à 3-personnes

**Majorité simple.** Une coalition est gagnante si elle comprend au moins deux membres

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

**Unanimité.** Une coalition est gagnante si elle comprend tous les membres

$$\begin{cases} v(1, 2, 3) = 1 \\ v(S) = 0, \quad \forall S \neq \{1\}, \{2\}, \{3\} \end{cases}$$

**Droit de veto.** Une coalition est gagnante si et seulement si elle comprend au moins deux membres dont le joueur 2

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

**Dictature.** Une coalition est gagnante si et seulement si elle comprend le joueur 2

$$\begin{cases} v(1) = v(3) = v(1, 3) = 0 \\ v(2) = v(1, 2) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

## 2.2 Concepts de solutions

Généralement, un jeu coopératif sous forme caractéristique n'engendre pas une imputation unique. Par conséquent, l'intérêt des théoriciens s'est tourné vers la recherche de procédures qui permettent, faute d'avoir une solution unique, d'exclure un certain nombre d'imputations, appelées parfois présolutions (Shubik 1982).

Nous exposons dans cette section les solutions classiques les plus connues de jeux coopératifs tels que le **coeur (noyau)** et le **nucléole**

**Définition 2.5.** Une allocation pour un jeu  $(N, v)$  est un vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  où  $x_i$  est le "gain" ou "l'utilité" du joueur  $i$

**Définition 2.6** (Imputation). Une imputation pour le jeu  $(N, v)$  est une allocation satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$C_1. \quad x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N, \quad \text{(Rationalité individuelle)}$$

$$C_2. \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad \text{(Rationalité collective)}$$

où  $v(N)$  est le gain total du jeu

On note  $I(N, v)$  l'ensemble des imputations d'un jeu coopératif  $(N, v)$ , ainsi

$$I(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{et} \quad x_i \geq v\{i\}, \quad \forall i \in N \right\}$$

La première condition signifie qu'aucun joueur n'acceptera un partage lui attribuant moins de ce qu'il pourrait gagner en agissant seul (rationalité individuel), par ailleurs, un partage satisfaisant

$$\sum_{i \in N} x_i < v(N)$$

ne sera pas accepté par les joueurs parce qu'il revient à gaspier la quantité

$$v(N) - \sum_{i \in N} x_i.$$

D'autre part, si on suppose que

$$\sum_{i \in N} x_i > v(N)$$

ceci reviendra, selon L'Ekeland(1940)"à vendre la peau de l'ours avant de l'avoir tué" (qui veut dire la solution n'est pas réalisable)

Par conséquent :

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

cette condition est appelé rationalité collectives. (Le gain de la grande coalition doit être intégralement distribué entre les joueurs quand le jeu est supper-additif ou sous-additif)

### 2.2.1 Coeur

Le coeur est l'un des concepts de solutions pour les jeux coalitionnels (TU) qui exige qu'aucune coalition ne peut dévier en améliorant le paiement de tous ses membres.

Pour un profil de paiements (répartition)  $(x_i)_{i \in N}$  et une coalition  $S$

On note

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

la somme des paiements des membres de  $S$

**Définition 2.7.** Le coeur d'un jeu coalitionnel  $(N, v)$  est l'ensemble des imputations  $x$  vérifiant

$$x(S) \geq v(S), \quad \forall S \subseteq N$$

ou, de manière équivalente, telle qu'il n'existe pas de coalition  $S$  et une imputation  $(y_i)_{i \in N}$  où  $y_i > x_i$  pour tout  $i \in S$ .

La répartition  $(x_i)_{i \in N}$  ne peut pas être bloquée par une coalition  $S$  ("stabilité sociale")

On note  $C(N, v)$  le coeur du jeu,

$$C(N, v) = \{x \in I(N, v) : x(S) \geq v(S) \text{ pour chaque } S \subseteq N\}. \quad (2.3)$$

**Remarque 2.1.** Lorsque le jeu étudié est un jeu de coûts, ou plus généralement lorsque les valeurs de la fonction caractéristique représentent les pertes au lieu des gains, le coeur est défini en inversant les inégalités dans (2.3).

**Exemple 2.3.** Prenons le cas d'un jeu simple (l'exemple précédent)

**Majorité simple :**

L'allocation  $x(x_1, x_2, x_3)$  appartient au coeur si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \dots(1) \\ x_1 + x_2 \geq 1 & \dots(2) \\ x_1 + x_3 \geq 1 & \dots(3) \\ x_2 + x_3 \geq 1 & \dots(4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On additionne (2) et (3) et (4) on aura :

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$$

Or, on a  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  ceci implique que  $C(N, v) = \phi$

**Interpretation.** Dans ce cas, la grande coalition est instable, car qu'elle que soit la manière de distribuer les gains qu'elle décidera, il se trouvera toujours deux de ses membres qui pourront faire mieux en la quittant et en formant une coalition plus petite.

### Unanimité :

Une allocation  $x(x_1, x_2, x_3)$  est dans le coeur si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$C(N, v) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1; \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in (1, 2, 3)\}$$

Cela ne donne pas une solution unique (plusieurs solutions), puisque plusieurs propositions de partage vérifient ces conditions, par exemple l'allocation égalitaire  $(1/3, 1/3, 1/3)$ , ou des solutions extrême comme  $(1/3, 2/3, 0)$  et  $(2/3, 0, 1/3)$ .

### Droit de veto :

Une allocation  $x(x_1, x_2, x_3)$  est dans le coeur si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \dots(1) \\ x_1 + x_3 \geq 1 & \dots(2) \\ x_2 + x_3 \geq 1 & \dots(3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

En remplaçant  $x_1$  dans (2) on obtient :  $x_3 \leq 0$ , or  $x_3 \geq 0$  d'où  $x_3 = 0$ .

En remplaçant  $x_3$  par 0 dans (1) et (3) on aura :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 & \dots(4) \\ x_2 \geq 1 & \dots(5) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

(4)  $\Rightarrow x_2 = 1 - x_1$ , en remplaçant dans (5) on obtient :  $x_1 \leq 0$ , or  $x_1 \geq 0$  d'où  $x_1 = 0$  on obtient l'unique solution  $x = (0, 1, 0)$ . Le coeur du jeu est donc le singleton :

$$C(N, v) = \{(0, 1, 0)\}$$

### Dictature :

L'allocation  $x(x_1, x_2, x_3)$  est dans le coeur si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \dots(1) \\ x_1 + x_2 \geq 1 & \dots(2) \\ x_2 + x_3 \geq 1 & \dots(3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient alors  $C(N, v) = \{(0, 1, 0)\}$ .

D'après ces exemples on voit bien que le coeur peut être vide ou contenir plus d'une allocation. Pour certains types de jeux on a les résultats suivants sur la non vacuité du coeur.

**Proposition 2.1** (Shapley 1971). [8] Si un jeu coopératif est convexe, alors son coeur est non vide.

**Proposition 2.2.** Le coeur d'un jeu coopératif symétrique  $(N, v)$  est non vide si, et seulement si pour chaque coalition non vide  $S \subseteq N$  on

$$\frac{v(S)}{s} \leq \frac{v(N)}{n}$$

où  $s = |S|$

Pour les jeux simples on a

**Proposition 2.3.** Si un jeu coopératif est simple, alors

- son coeur est non vide si, et seulement si, le jeu possède au moins un joueur veto ;
- une imputation  $x$  appartient au coeur si, et seulement si,  $x_i = 0$  pour un joueur  $i \in N$  non veto.

### 2.2.2 Nucléole

Le nucléole est l'un des concepts de solution des jeux coopératifs, défini par **Schmeidler (1969)** [11].

Le principe du **nucléole** est de proposer une imputation  $x$  qui minimise lexicographiquement l'excédent de chacune des coalitions possibles  $e(x, S)$ . Il s'agit de rendre moins défavorisée la coalition qui est la plus défavorisée et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer le sort d'aucune coalition.

**Définition 2.8** (L'ordre lexicographique).

Soit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  et  $z = (z_1, \dots, z_n)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que le vecteur  $y$  est lexicographiquement plus petit que le vecteur  $z$ , s'il existe un  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $y_j < z_j$  et  $y_i = z_i$  pour tout  $i < j$ .

**Définition 2.9** (L'excédent).

Etant donné un jeu coopératif TU on appelle l'excédent d'une coalition  $S$  pour un vecteur de gain donné  $x = (x_1, \dots, x_n)$  la différence entre la valeur de la coalition et ses gains, soit

$$e(x, S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Si  $e(x, S) > 0$ , la coalition  $S$  s'estimera lésée par l'imputation  $x$  et bénéficiaire si  $e(x, S) < 0$ . L'excédent mesure l'insatisfaction de la coalition  $S$  face au vecteur de gains  $x$ .

Soit  $e(x)$  le vecteur des excédents dont les composantes sont classées par ordre décroissant  $e(x) = (e(x, S_1), \dots, e(x, S_m))$  où  $S_i \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ ,  $m = 2^n - 2$ , tel que

$$e(x, S_1) \leq e(x, S_2) \leq \dots \leq e(x, S_m).$$

Avec les définitions ci-dessus on peut à présent donner la définition du nucléole.

**Définition 2.10.** On appelle le nucléole du jeu  $(N, v)$ , l'ensemble des imputations qui minimisent lexicographiquement le vecteur des excédents  $e(x)$

$$N_u(N, v) = \{x \in I(N, v) : e(x) \leq_L e(y), \quad \forall y \in I(N, v)\}.$$

Si on définit le nucléole sur l'ensemble des vecteurs des gains

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, x(N) = v(N)\},$$

au lieu de  $I(N, v)$  alors on a

**Théorème 2.1.** [11] Si l'ensemble des gains  $X$  est non vide et compact, alors le nucléole du jeu coopératif  $(N, v)$

$$N_u(N, v) = \{x \in X : e(x) \leq_L e(y), \quad \forall y \in X\}$$

est non vide et compact.

Si de plus  $X$  est convexe, alors le nucléole ne contient qu'un seul vecteur.

**Remarque 2.2.** L'ensemble des imputations d'un jeu coopératif super-additif vérifie les hypothèses du Théorème 2.1, par conséquent le nucléole donné par la définition 2.10 est non vide et, de plus, contient exactement un élément. Cette propriété remarquable fait du nucléole un concept de solution très attrayant, car il spécifie une façon unique de diviser le gain de la grande coalition.

**Exemple 2.4.** Considérons le jeu à 3-personnes suivant :

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(12) = 1 \\ v(13) = 2 \\ v(23) = 3 \\ v(123) = 4 \end{cases}$$

Soit l'imputation  $x = (1, 1, 2)$ , on a :

$$e(x, S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

L'excédent de chaque coalition est :

$S$	1	2	3	12	13	23
$e(x, S)$	-1	-1	-2	-1	-1	0

$$e(x) = [0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2]$$

La Coalition  $\{23\}$  a le plus à se plaindre, tandis que  $\{3\}$  est la moins insatisfaite. L'étape suivante consiste à choisir un autre  $x$  puis un autre, si nécessaire pour essayer de faire en sorte que toutes les coalitions se plaignent le moins possible, tout en essayant de rendre le



degré de leurs plaintes aussi uniforme que possible.

Choisissons  $x = [0.5 \quad 1.25 \quad 2.25]$  et trouvons l'excédent pour chaque coalition S

$$\begin{array}{rcccccc}
 S & 1 & 2 & 3 & 12 & 13 & 23 \\
 e(x, S) & -0.5 & -1.25 & -2.25 & -0.75 & -0.75 & -0.5
 \end{array}$$

$$e(x) = [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.75 \quad -0.75 \quad -1.25 \quad -2.25]$$

On a bien ce vecteur d'excédent est lexicographiquement plus petit que le premier vecteur parce que :  $-0.5$  est plus petit que 0, cette allocation est elle **le nucléole** ?

Le nucléole tel qu'il défini, est l'allocation qui minimise la plainte la plus importante (le plus grand excédent), par conséquent, s'il y'a une meilleure répartition, nous serons en mesure de minimiser l'excédent pour les deux coalitions 1 et 23

On cherche donc un autre  $x = (x_1, x_2, x_3)$  tel que

$$\begin{aligned}
 v(1) - x_1 \leq -0.5 &\implies 0 - x_1 \leq -0.5 && \text{( pour la coalition 1)} \\
 &\implies x_1 \geq 0.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(23) - x_2 - x_3 \leq 0.5 &\implies 3 - x_2 - x_3 \leq 0.5 && \text{( pour la coalition 23)} \\
 &\implies x_2 + x_3 \geq 3.5
 \end{aligned}$$

Comme  $v(N) = 4$ , nous savons  $x_1 = 0.5$  et  $x_2 + x_3 = 3.5$ .

Nous ne pouvons pas déterminer la valeur spécifique de  $x_2$  et  $x_3$ . Nous devons donc maintenant déterminer si nous pouvons réduire au minimum l'excédent suivant :

$$\begin{aligned}
 v(12) - x_1 - x_2 \leq -0.75 &\implies 1 - x_1 - x_2 \leq -0.75 && \text{( pour la coalition 12)} \\
 &\implies x_1 + x_2 \geq 1.75
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(13) - x_1 - x_3 \leq -0.75 &\implies 2 - x_1 - x_3 \leq -0.75 && \text{( pour la coalition 13)} \\
 &\implies x_1 + x_3 \geq 2.75
 \end{aligned}$$

On a déjà  $x_1 = 0.5$ , il s'ensuit donc que  $x_2 \geq 1.25$  et  $x_3 \geq 2.25$

En attribuant à chaque coalition sa limite inférieure nous obtenons :

$$x_1 = 0.5, x_2 = 1.25, x_3 = 2.25$$

Qui satisfait  $x_1 + x_2 + x_3 = 4$  Et toutes les inégalités ci-dessus.

Cette allocation est également celle que nous avons testé, Par conséquent

$$x = [0.5 \quad 1.25 \quad 2.25]$$

est le nucléole, car nous ne pouvons pas obtenir une meilleure solution.

### Calcul du nucléole par la programmation linéaire

Comme le principe du nucléole est de minimiser les excédent ,il est possible de le calculer en utilisant une approche de programmation linéaire [2] .

**L'objectif donc est :**

$$\min_{\{x: \sum x_i = v(N); x_i \geq v(i)\}} \quad \max_{\{\phi \subset S \subset N\}} e(x, S)$$

Si on pose

$$\alpha = \max_{\{\phi \subset S \subset N\}} e(x, S)$$

Alors,  $\alpha \geq e(x, S) \quad \forall S$  et on obtient le PL suivant :

**Objectif :**  $\min \quad \alpha$

**Contraintes :**

$$\begin{cases} \alpha \geq e(x, S) = v(S) - x(S) & \forall S, \quad S \neq N, \phi \\ x_i \geq v(\{i\}) \\ \sum x_i = v(N) \\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N \end{cases}$$

D'une manière plus précise

(PL)

**Objectif :**  $\min \quad \alpha \quad \dots(1)$

**Sous contraintes :**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha + \sum x_i \geq v(S) & \dots(2) \\ x_i \geq v(\{i\}) & \dots(3) \\ \sum x_i = v(N) & \dots(4) \\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N & \dots(5) \end{array} \right.$$

(1)  $\rightarrow$  fonction objectif

(2)  $\rightarrow \alpha$  ne peut pas être plus grand que l'excédent d'aucune coalition

(1) et (2)  $\rightarrow \alpha$  est l'excédent le plus large

(3)  $\rightarrow$  rationalité individuelle

(4)  $\rightarrow$  rationalité collective

(3) et (4)  $x$  est une imputation

(5)  $\rightarrow$  nature des variables

La Solution de (P) n'est pas nécessairement unique. De plus une solution de (P) nous donne une imputation qui minimise le plus grand excédent, mais pas nécessairement le second ou les plus grands excédents qui suivent.

Le nucléole peut être trouvé en résolvant une série de (PL) :

Soit  $\alpha_1$  la solution optimale de (P). Le  $k$ ème (PL), ( $k > 1$ ) est formulé comme suit :

**Objectif :**  $\min \quad \alpha_k \quad \dots (6)$

**Contraintes**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_k + \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N, \quad S \notin F_k & \dots(7) \\ \alpha_i + \sum_{i \in S} x_i = v(S) \quad \forall S \subset N, S \in F_i, i = 1, \dots, k-1 & \dots(8) \\ x_i \geq v(\{i\}) & \dots(9) \\ \sum_{i \in N} x_i = v(N) & \dots(10) \\ \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N & \dots(11) \end{array} \right.$$

Dans le  $k$ ème PL, la fonction (6) et la contrainte (7) stipulent que le  $k$ ème maximum excédent est minimisé.

La contrainte (8), atteste que l'excédent des coalitions des  $F_i$  doit être égale à l'optimum du

kième PL.

L'ensemble  $F_i$  est l'ensemble de toutes les coalitions pour lesquelles la contrainte (7) est satisfaite avec égalité pour toutes les solutions du kième PL. Ainsi l'excédent des coalitions qui sont dans  $F_i$  doit être fixé à  $\alpha_i$  au kième PL,  $k > i$  tel qu'il est énoncé par la contrainte (8), et  $F_k = \cup_{i < k} F_i$ .

Par définition  $F_1 = \phi$ , et la contrainte (8) est omise pour  $k = 1$

La question est comment déterminer  $F_i$ , et c'est là que la programmation linéaire dual joue un rôle important.

Le dual ( $D$ ) de ( $P$ ), peut-être formulé ainsi

$$\begin{aligned} \text{Objectif :} & \quad \max \sum_s v(S)y_s \\ \text{Contraintes :} & \quad \begin{cases} \sum_{s \neq N} y_s = 1 & \text{pour } i \in N \\ \sum_{S \subset N, j \in N} y_s = 0 & \forall j \in N \end{cases} \end{aligned}$$

De la théorie de dualité, plus exactement les écarts complémentaires,  $F_i$  est l'ensemble de toutes les coalitions  $S$  pour laquelle les valeurs de la solution optimale dual est positive. D'une manière analogue pour un  $k$  quelconque, l'ensemble  $F_k$  contient les coalitions dont la variable dual associée à la contrainte (7) est positive dans la solution optimal du problème dual du kième PL.

Le nucléole est obtenue lorsque la solution optimale du problème primal est unique. Une telle solution est obtenue lorsque les contraintes (8) et (9) définissent un système de  $n$  équations linéairement indépendantes.

**Exemple 2.5.** Pour illustrer le fonctionnement de cette méthode, considérons le jeux à 3-personne d'exemple précédent :

$$\begin{cases} v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(12) = 1 \\ v(13) = 2 \\ v(23) = 3 \\ v(123) = 4 \end{cases}$$

Pour ce jeu ( $P$ ) est donné par :

$$\begin{array}{r} \min \quad \alpha \\ \text{S.C} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq 0 - x_1 \\ \alpha \geq 0 - x_2 \\ \alpha \geq 0 - x_3 \\ \alpha \geq 1 - (x_1 + x_2) \\ \alpha \geq 2 - (x_1 + x_3) \\ \alpha \geq 3 - (x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

En simplifiant, on aura :

$$\begin{array}{r} \min \quad \alpha \\ \text{S.C} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad \quad + \alpha \geq 0 \\ \quad \quad x_2 \quad + \alpha \geq 0 \\ \quad \quad \quad x_3 + \alpha \geq 0 \\ x_1 + x_2 \quad + \alpha \geq 1 \\ x_1 + \quad x_3 + \alpha \geq 2 \\ \quad \quad x_2 + x_3 + \alpha \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{array}$$

Le dual correspondant à ce PL est :

$$\begin{array}{r} \max \quad 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_{12} + 2y_{13} + 3y_{23} + 4y_{123} + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ \text{S.C} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_{12} + y_{13} + 0y_{23} + y_{123} + S_1 = 0 \\ 0y_1 + y_2 + 0y_3 + y_{12} + 0y_{13} + y_{23} + y_{123} + S_2 = 0 \\ 0y_1 + 0y_2 + y_3 + 0y_{12} + y_{13} + y_{23} + y_{123} + S_3 = 0 \\ \quad \quad \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_{12} + y_{13} + y_{23} + 0y_{123} = 1 \\ y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_{12}, \quad y_{13}, \quad y_{23}, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3 \geq 0 \\ \quad \quad \quad y_{123} \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{array}$$

La résolution du dual à l'aide de la méthode du simplexe permet de déterminer la solution primal optimale ainsi que la solution dual optimale .

La première solution optimale dual et primal :

**Solution dual**

$$y_1 = 1/2$$

$$y_{13} = 0$$

$$y_{23} = 1/2$$

$$y_{123} = -1/2$$

En utilisant le théorème des écarts complémentaires :

$$\alpha = -1/2$$

$$x_1 = 1/2$$

$$x_2 + x_3 = 7/2$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_3 \geq 2$$

Puisque plusieurs allocations peuvent satisfaire ces équations par exemple  $x = [1/2 \quad 3/2 \quad 2]$ , on aura donc un nouveau PL à résoudre.

**Le nouveau primal est**

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha_2 \\ \text{S.C} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_2 + \alpha \geq 0 \\ x_3 + \alpha \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \alpha \geq 1 \\ x_1 + x_3 + \alpha \geq 2 \\ x_2 + x_3 = 7/2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

**Son dual correspondant est :**

$$\max \quad 1/2y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_{12} + 2y_{13} + 7/2y_{23} + 4y_{123} + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\text{S.C} \left\{ \begin{array}{l} y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_{12} + y_{13} + 0y_{23} + y_{123} + S_1 = 0 \\ 0y_1 + y_2 + 0y_3 + y_{12} + 0y_{13} + y_{23} + y_{123} + S_2 = 0 \\ 0y_1 + 0y_2 + y_3 + 0y_{12} + y_{13} + y_{23} + y_{123} + S_3 = 0 \\ 0y_1 + y_2 + y_3 + y_{12} + y_{13} + 0y_{23} + 0y_{123} = 1 \\ y_2, y_3, y_{12}, y_{13}, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \\ y_1, y_{23}, y_{123} \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Nous trouvons maintenant la deuxième solution optimale primal et dual :

**Solution dual**

$$y_1 = 18.19$$

$$y_{13} = 1/2$$

$$y_{12} = 1/2$$

$$y_{23} = 18.69$$

$$y_{123} = -19.19$$

Par les relations de la dualité on obtient la solution du primal est :

$$\alpha_2 = -1/2$$

$$\mathbf{x}_1 = 1/2$$

$$\mathbf{x}_2 = 5/4$$

$$\mathbf{x}_3 = 9/4$$

qui est unique. Par conséquent

$$N_u(N, v) = (1/2, \quad 5/4, \quad 9/4)$$

**Conclusion**

Ce chapitre est construit autour de trois objectifs. Premièrement, nous avons présenté le modèle de jeu coopératif à utilité transférable et quelques différents types de jeux. Par la suite, on a introduit et étudié les principaux concepts de solutions pour cette catégorie de jeux coopératifs (le coeur (noyau) et le nucléole). Enfin, on a présenté une méthode de recherche du nucléole en utilisant la programmation linéaire.

## CHAPITRE 3

# RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME LINÉAIRE MULTIOBJECTIFS PAR LA THÉORIE DES JEUX

### Introduction

La plupart des problèmes du monde réel nécessitent l'optimisation simultanée de plusieurs objectifs concurrents. Par conséquent, pour mieux saisir la structure réelle d'un problème donné, l'utilisation de l'approche multiobjectifs devient inévitable et permet de fournir de meilleures solutions au problème posé. Contrairement à un problème d'optimisation mono-critère, la solution à un problème d'optimisation multiobjectifs est généralement une combinaison de solutions qui forment un compromis entre les différents objectifs. Ces solutions sont également connues sous le nom de solutions Pareto-Optimales ou efficientes solutions. Par conséquent, le but de l'optimisation multiobjectifs, consiste à obtenir des solutions de Pareto optimales et, par conséquent, à connaître tous les compromis possibles entre les objectifs.

La résolution de problèmes de programmation linéaire à multiobjectifs a reçu une certaine attention de la part de la communauté scientifique et différentes méthodes ont été conçues, certaines d'entre elles ont été présentées au premier chapitre.

Dans ce chapitre, nous présenterons une autre méthode de résolution qui est proposée par [5]. Elle consiste à minimiser l'insatisfaction du décideur sur ses critères basée sur un concept des jeux coopératifs qu'est le nucléole.



### 3.1 Les problèmes de programmation linéaire multiobjectifs et le nucléole généralisé

Considérons le problème de la programmation multiobjectifs défini par un ensemble réalisable :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \quad x \geq 0\} \quad (3.1)$$

et un ensemble de  $p$  fonctions linéaires à minimiser :

$$U = \{U_k(x) : U_k(x) = a_k^T x + \beta_k, \quad k = 1, \dots, p\} \quad (3.2)$$

avec :

$A$  est une matrice  $m \times n$ ;  $b \in \mathbb{R}^m$ ; et  $\beta \in \mathbb{R}$  pour  $k = 1, \dots, p$ .

Rappelons que pour un jeu coopératif (TU)  $(N, v)$ , l'ensemble des imputations est :

$$I(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{et} \quad x_i \geq v\{i} \quad \forall i \in N\}. \quad (3.3)$$

Et pour l'ensemble de toutes les coalitions on obtient un ensemble de  $p = 2^N - 2$  fonctions linéaires.

$$E = \{e(x, S) : e(x, S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i, \quad S \subset N, \quad S \neq \phi\} \quad (3.4)$$

$e(x, S)$  est l'excédent d'une coalition  $S$  pour un vecteur de gain  $x$ .

Nous savons que chercher le nucléole revient à chercher une allocation dans l'ensemble des imputations  $I(N, v)$  qui minimisent les excédents des coalitions. De ce fait on peut identifier (3.3) et (3.4) à un problème de programmation linéaire multiobjectifs, dans lequel (3.3) est de même forme que (3.1), En effet, il suffit de prendre comme nouvelles variables les différences  $x_i - v(\{i\})$ , et l'ensemble  $E$  est similaire à (3.2), en posant  $a_k^T x = -\sum x_i$ ,  $v(S) = \beta_S$ ,  $S \in 2^N \setminus \{\phi, N\}$ .

On rappelle le nucléole d'un jeu coopératif  $(N, v)$

$$N_u(N, v) = \{x' \in I : \quad e(x') \leq_L e(x), \quad \forall x \in I\} \quad (3.5)$$

où :  $\leq_L$  est l'ordre l'exicographique.

**M. Justman** a introduit dans [7] le nucléole généralisé associé à un ensemble de contraintes linéaires (3.1), et un ensemble de fonctions linéaires (3.2) à minimiser.

**Définition 3.1.** Pour chaque  $x$  une solution réalisable de (3.1), soit le vecteur  $\theta(x)$  des valeurs des fonctions linéaires (3.2) prises dans un ordre décroissant, alors le **nucléole généralisé** est l'ensemble  $N_u(\Omega, U)$  défini par :

$$N_u(\Omega, U) = \{x^* \in \Omega : \theta(x^*) \leq_L \theta(x), \quad \forall x \in \Omega\} \quad (3.6)$$

**Remarque 3.1.** Le nucléole d'un jeu coopératif étudié au Chapitre 2 est un cas particulier du nucléole généralisé.

Pour l'existence du nucléole généralisé, Justman [7] a démontré un résultat analogue au Théorème 2.1 dont l'énoncé est :

**Théorème 3.1.** Si  $\Omega$  est un ensemble non vide et compact et  $U$  un ensemble de fonctions linéaires continues sur  $\Omega$  alors :  $N_u(\Omega, U) \neq \emptyset$

Notons également que l'interprétation du nucléole généralisé comme les points malheur minimal du joueur le plus malheureux, du deuxième joueur le plus malheureux, ..., etc, est un argument montrant que le nucléole généralisé est un "bon" concept de solution pour les problèmes multiobjectifs.

Un autre argument conduisant à la même conclusion est que tout point du nucléole généralisé est un point optimale de Pareto.

**Théorème 3.2.** Si  $\Omega$  est un ensemble compact non vide, une intersection de demi-espaces défini en (3.1) et  $U$  est un ensemble de fonctions linéaires définies par (3.2), alors tout point du nucléole généralisé est un point optimale de Pareto de  $\Omega$  par rapport à  $U$ .

**Preuve.** Soit  $x^* \in \Omega$  est un optimum de Pareto de  $\Omega$  par rapport à l'ensemble des fonctions  $U$ , s'il n'existe pas de point  $x \in \Omega$  tel que :

$$U_k(x) \leq U_k(x^*), \quad \forall k = 1, \dots, p \quad (3.7)$$

$$U_j(x) < U_j(x^*), \quad \text{pour un certain } j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.8)$$

Supposons que  $x^* \in N_u(\Omega, U)$  n'est pas un optimum de Pareto, alors il existe un point  $x \in \Omega$

tel que (3.7) et (3.8) soient vérifiées.

On peut supposer sans perte de généralité que

$$\theta_k(x) = U_k(x), \quad \forall k = 1, \dots, p$$

C'est-à-dire que la numérotation des fonction a été choisie de telle manière qu'on a

$$U_1(x) \geq U_2(x) \geq \dots \geq U_p(x) \quad (3.9)$$

Soit le p-vecteur  $\eta(x^*) = (U_k(x^*))$ , dont les coordonnées sont les valeurs des fonctions déjà numérotées au point  $x^*$ . On ne peut pas dire que

$$\theta_k(x^*) = U_k(x^*), \quad \text{pour certain } k$$

Selon les hypothèses (3.7) et (3.8), on obtient  $\begin{cases} \theta_k(x) \leq \eta_k(x^*), & \forall k = 1, \dots, p \\ \theta_j(x) < \eta_j(x^*), & \text{pour certain } j \in \{1, \dots, p\}. \end{cases}$

Comme

$$\theta_1(x) \leq \eta_1(x^*) \leq \max U_k(x^*) = \theta_1(x^*) \quad (3.10)$$

Alors  $\theta_1(x) \leq \theta_1(x^*)$ . Mais on a  $x^* \in N_u(\Omega, U)$ , et  $x \in \Omega$  montre que l'inégalité  $\theta_1(x) < \theta_1(x^*)$  ne peut pas être vraie; par conséquent  $\theta_1(x) = \eta_1(x^*) = \theta_1(x^*)$

En appliquant le même raisonnement à la paire  $\theta_2(x)$  et  $\eta_2(x^*)$ , on obtient  $\theta_2(x) = \eta_2(x^*) = \theta_2(x^*)$ . Par induction on prouve que  $\theta_k(x) = \eta_k(x^*)$ ;  $k = 1, \dots, p$ . Ce qui contredit l'hypothèse  $\theta_j(x) < \eta_j(x^*)$  pour certain  $j \in \{1, \dots, p\}$

## 3.2 Calcul du nucléole généralisé pour un problème (MOLP) :

L'idée principale de l'algorithme à présenter ci-dessous pour résoudre les problèmes (MOLP), sera celle de remplacer à chaque étape le problème donné par un nouveau problème (MOLP), dans lequel certaines des fonctions objectifs sont incluses dans les contraintes définissant le nouvel ensemble réalisable, la même idée a été utilisé par **A.Kopelowitz** (voir [1]) le nombre de fonctions objectifs est réduit à chaque étape de l'algorithme, jusqu'à ce qu'elles soient épuisées.

L'algorithme conserve le nucléole généralisé de l'ensemble réalisable initial dans les ensembles réalisables successifs et on prouve que l'ensemble réalisable finale ne présente que le nucléole

généralisé, c'est-à-dire la solution du problème des (MOLP), la méthode a été suggérée par [1] et [9].

Dans cette section, on présentera les résultats justifiant les différentes étapes de l'algorithme de recherche du nucléole généralisé pour le problème linéaire multiobjectifs (3.1) et (3.2).

Considérons le problème de la programmation linéaire (P) associé ou problèmes (3.1) et (3.2) :

$$(P) \quad \min\{t : x \in \Omega, \quad U_k(x) \leq t; \quad k = 1, \dots, p\} \quad (3.11)$$

Comme le deuxième groupe de restrictions peut s'écrire  $\max U_k(x) \leq t$ , il est clair que si  $\Omega \neq \phi$ , le problème (P) a des solutions réalisables et vis versa. Ainsi, le cas  $\Omega = \phi$  qui rend le problème de (MOLP) insensé et découvert en résolvant le problème (P), si  $\Omega$  est un ensemble compact non vide, le problème (P) a une solution optimale. Le point crucial dans la construction d'une méthode primal pour résoudre le problème de (MOLP) est le suivant :

**Lemme 3.1.** Si  $\Omega$  est un ensemble compact non vide et  $t^*$  est la valeur optimale de (P), alors il existe un nombre entier ;  $(1 \leq p^* \leq p)$ , et un ensemble d'indice  $k_{i1}, \dots, k_{ip^*}$  dans  $\{1, \dots, p\}$ , tels que pour toute solution optimale  $(x^*, t^*)$  de (P) on a

$$U_{k_i}(x^*) = t^*; \quad i = 1, \dots, p^* \quad (3.12)$$

**Preuve.**  $t^*$  étant la valeur optimale de (P), supposons que pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ , il existe une solution optimale  $(x^k, t^*)$  telle que  $U_k(x^k) < t^*$ , où  $x^k \in \Omega$ ,  $k = 1, \dots, p$  sont les vecteurs distincts, ou non, nous montrons que cela ne peut pas être vrai. Considérons le vecteur :

$$x = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x^k \quad (3.13)$$

qui est un point dans  $\Omega$ , parce que c'est un ensemble convexe. Pour tout  $j \in \{1, \dots, p\}$  on a

$$U_j(x^k) \leq t^*, \quad \text{si } j \neq k, \quad U_k(x^k) < t^* \quad (3.14)$$

A partir de (3.13), par la linéarité des fonctions objectifs on obtient

$$U_j(x) < t^* \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, p\}.$$

Cela signifie que  $(x, \max U_j(x))$  est une solution réalisable de (P), qui donne à la fonction objectif une valeur inférieure à la valeur optimale  $t^*$ . Contradiction avec  $t^*$  valeur optimale.

Le Lemme 3.1 assure qu'en ajoutant aux contraintes du problème (P) les équations  $U_{ki}(x^*) = t^*$ , pour  $i = 1, \dots, p^*$  toute solution optimale sera conservée. Il convient évidemment d'expliquer comment les indices des fonctions figurant dans les équations (3.12) peuvent être trouvés, ce sera au milieu de cette section.

**Exemple 3.1.** Soit le problème (MOLP) suivant :

$$\min \quad \{U_1(x) = 2x + y; \quad U_2(x) = x - 2y\}$$

Sur un ensemble  $\Omega$ , défini par le système des inégalités linéaires suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y \leq 1 \\ -x + y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right.$$

notons que  $t$  est une variable libre. Le problème (P) illustré au point (3.11) est le suivant :

$$(P) \quad \min \quad t \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y \leq 1 \\ -x + y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \\ 2x + y \leq t \\ x - 2y \leq t \\ x \geq 0, y \geq 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \text{Sous contraintes :}$$

Dont la solution optimale est  $x^* = 0, \quad y^* = 1, \quad t^* = 1$

On remarque que la contrainte  $2x + y \leq t$  est saturée, par contre la contrainte  $x - 2y \leq t$  ne l'est pas, donc  $p^* = 1$  et l'équation  $2x + y = 1$  doit être ajoutée aux contraintes du problème (P), pour former un nouveau problème (MOLP).

Maintenant, supposons que par une méthode quelconque, on ait trouvé l'ensemble des indices  $\Pi$  avec  $|\Pi| = p^*$ ,  $1 \leq p^* \leq p$  tel que pour toute solution optimale  $(x^*, t^*)$  de (P), on a

$$U_k(x^*) = t^*; \quad \forall k \in \Pi, \tag{3.15}$$

et deux cas peuvent se présenter : Soit  $p^* = p$  ou  $p^* < p$ .

Évidemment si  $p^* < p$ , en plus de (3.15), on a les inégalités

$$U_k(x^*) < t^*, \quad \forall k \notin \Pi \quad (3.16)$$

**Lemme 3.2.** Si  $\Omega$  est un ensemble compact non vide,  $t^*$  est la valeur optimale du problème (P), et  $p^* \leq p$  est le nombre entier défini ci-dessus, alors pour tout élément  $x^* \in N_u(\Omega, U)$ , on a  $(x^*, t^*)$  est une solution optimale du problème (P), et

$$\theta_1(x^*) = \dots = \theta_{p^*}(x^*) = t^* \quad (3.17)$$

**Preuve.** Soit  $(x', t^*)$  une solution de (P) alors,  $x' \in \Omega$ , de (3.6) on a  $\theta(x^*) \leq_L \theta(x')$ . Donc  $\theta_1(x^*) \leq \theta_1(x')$ , et selon la définition de  $p^*$ , on obtient  $\theta_1(x') = t^*$ , c'est-à-dire  $\theta_1(x^*) \leq t^*$ . Cette inégalité et la définition de  $\theta(x^*)$  impliquent  $U_k^* \leq t^*$  pour tout  $k = 1, \dots, p$  de sorte que  $(x^*, t^*)$  soit une solution optimale du problème (P).

De toute évidence, la valeur maximale des objectifs au point  $x^*$  est  $t^*$ , sinon  $t^*$  ne serait pas la valeur optimale. Les égalités (3.17) découleront de la définition de  $p^*$ .

Notons que par le Lemme 3.2 aucun élément du nucléole généralisé n'est perdu en ajoutant (3.15) à l'ensemble des contraintes. Par conséquent, dans le second cas,  $p^* < p$ , nous devrions encore examiner le nouveau problème (MOLP) qui consiste à minimiser les objectifs  $U_k(x)$ ,  $\forall k \notin \Pi$  sur le nouvel ensemble réalisable

$$\Omega^* = \{x \in \Omega; U_k(x) = t^*, \quad \forall k \in \Pi\}, \quad (3.18)$$

où  $t^*$  est la valeur optimale de (P) et  $\Pi$  est défini par (3.15) et (3.16).

Maintenant, considérons le nouvel ensemble

$$S_{OPT} = \{x \in \Omega, \quad (x, t^*) \text{ est une solution optimale de (P)}\} \subseteq \Omega^* \quad (3.19)$$

Le Lemme 3.2 prouve l'inclusion et montre que  $N_u(\Omega, U) \subseteq S_{OPT}(P)$ , d'où de (3.19) il découle que  $N_u(\Omega, U) \subseteq \Omega^*$ .

Notons que le résultat est vérifié dans les deux cas  $p = p^*$  et  $p^* < p$ , mais on doit prouver que dans le premier cas nous avons  $S_{OPT}(P) = \Omega^*$ .

**Théorème 3.3.** Si  $\Omega$  est un ensemble compact non vide, et  $t^*$  la valeur optimal de (P), et pour toute solution optimale  $(x^*, t^*)$  de (P) nous avons  $U_k(x^*) = t^*$ , pour  $k = 1, \dots, p$  alors nous obtenons  $N_u(\Omega, U) = \Omega^*$

**Preuve.** Comme nous l'avons déjà fait remarquer, nous avons  $N_u(\Omega, U) \subseteq S_{OPT}(P)$ . Supposons qu'il y ait  $x' \in S_{OPT}(P)$ , et  $x' \notin N_u(\Omega, U)$ , alors il existe  $x^* \in N_u(\Omega, U)$  tel que  $\theta(x^*) \leq_L \theta(x')$ .

Mais d'après l'hypothèse on obtient  $\theta_k(x') = t^*$ ,  $\forall k = 1, \dots, p$  il s'ensuit alors

$$\theta_k(x^*) = t^*, \quad \forall k = 1, \dots, p, \quad \text{d'où} \quad \theta(x^*) = \theta(x')$$

contradiction avec  $\theta(x^*) \leq \theta(x')$ , d'où le résultat.

Le Théorème 3.3 montre si  $p^* = p$ , alors  $N_u(\Omega, U) = \Omega^*$ , en d'autres termes  $p^* = p$  est le critère d'arrêt de la méthode ( toutes les fonctions objectifs ont été minimisées).

Il reste à considérer le cas  $p^* < p$ , comme nous l'avons déjà fait remarquer, par le Lemme 3.2 on a  $N_u(\Omega, U) \subseteq \Omega^*$  d'où  $\Omega^* \neq \phi$ . Nous formons le problème MLOP ( $P^*$ ) qui consiste à minimiser les fonctions  $U_k(x)$ ,  $\forall k \notin \Pi$ , sur  $\Omega^*$  donné par (3.18). De plus  $\Omega^*$  est un ensemble compact, donc  $N_u(\Omega^*, U^*) \neq \phi$ .

**Lemme 3.3.** Si  $\Omega$  est un ensemble compact non vide, et  $t^*$  la valeur optimal de (P), on a  $p^* < p$ , on construit le nouvel ensemble  $\Omega^*$ , donné par (3.18), et le problème ( $P^*$ ) est obtenue en utilisant les objectifs  $U^*$ .

Alors :

$$x^* \in N_u(\Omega^*, U^*) \Rightarrow \begin{cases} (x^*, t^*) \text{ est une solution optimale de } (P^*) \\ \theta_1(x^*) = \dots = \theta_{p^*}(x^*) = t^* \end{cases} \quad (3.20)$$

**Preuve.** Soit  $(x', t^*)$  une solution de (P) alors,  $x' \in \Omega$ , et on a  $\theta(x^*) \leq_L \theta(x')$ . Ainsi,  $\theta_1(x^*) \leq \theta_1(x')$ , et selon la définition de  $p^*$ , on obtient  $\theta_1(x') = t^*$  i.e  $\theta_1(x^*) \leq t^*$

Cette inégalité et la définition de  $\theta(x^*)$  donnent :

$$U_k(x^*) \leq t^*, \quad k = 1, \dots, p, \quad (3.21)$$

par conséquent  $(x^*, t^*)$  est la solution optimale de (P). De toute évidence  $\max U_k(x^*) = t^*$ , sinon  $t^*$  ne serait pas la valeur optimale. Les égalités données dans le lemme découlent de la définition de  $P^*$

La conséquence de ce Lemme est

$$N_u(\Omega^*, U^*) \subseteq S_{OPT}(P) \subseteq \Omega^* \subseteq \Omega.$$

Il reste à justifier pourquoi explorer encore l'ensemble  $N_u(\Omega^*, U^*)$ , en construisant un nouveau problème de programmation linéaire ( $P^*$ ), et comment terminer la procédure en résolvant le nouveau problème.

**Théorème 3.4.** Soit  $\Omega$  est un ensemble compact non vide, et  $t^*$  la valeur optimale de (P), on considère l'ensemble  $\Omega^* = \{x \in \Omega; U_k(x) = t^*, \forall k \in \Pi\}$  où  $\Pi$  est défini par (3.15) et (3.16), alors on a

$$N_u(\Omega, U) = N_u(\Omega^*, U^*).$$

**Preuve.** On montre la double inclusion. Soit à prouver  $N_u(\Omega, U) \subseteq N_u(\Omega^*, U^*)$ .

Soit  $x^* \in N_u(\Omega, U)$ , comme  $N_u(\Omega, U) \subseteq \Omega^*$  on a  $x^* \in \Omega^*$ . Si  $x^* \notin N_u(\Omega^*, U^*)$ , alors il existe  $x' \in N_u(\Omega^*, U^*)$  tel que  $\theta(x') \leq_L \theta(x^*)$ . D'après le Lemme 3.2 et le Théorème 3.3 on a :

$$\theta_1(x') = \theta_1(x^*) \dots \theta_{p'}(x') = \theta_{p'}(x^*). \quad (3.22)$$

Il existe donc un indice  $k'$ , tel que  $p' < k' < p$  de sorte que

$$\begin{cases} \theta_k(x') = \theta_k(x^*), & \forall k = 1, \dots, k' \\ \theta_{k'+1}(x') < \theta_{k'+1}(x^*). \end{cases}$$

Comme  $x' \in \Omega$ , l'existence de  $k'$  contredit  $x' \in N_u(\Omega, U)$ , en conséquence,  $N_u(\Omega, U) \subseteq N_u(\Omega^*, U^*)$ .

Soit à montrer l'inclusion inverse :  $N_u(\Omega^*, U^*) \subseteq N_u(\Omega, U)$ .

Soit  $x' \in N_u(\Omega^*, U^*)$  et  $x' \notin N_u(\Omega, U)$ , comme  $x' \in \Omega$ , alors

$$\theta(x^*) \leq_L \theta(x') \text{ pour tout } x^* \in N_u(\Omega, U)$$

D'après Le Lemme 3.2 et le Théorème 3.3 on a

$$\theta_1(x^*) = \theta_1(x') \dots \theta_{p'}(x^*) = \theta_{p'}(x'), \quad (3.23)$$

il existe donc un indice  $k'$ , tel que  $p^* < k' < p$  de sorte que

$$\begin{cases} \theta_k(x^*) = \theta_k(x'), & \forall k = 1, \dots, k' \\ \theta_{k'+1}(x^*) < \theta_{k'+1}(x') \end{cases}$$

Comme  $N_u(\Omega, U) \subseteq N_u(\Omega^*, U^*)$  alors  $x^* \in N_u(\Omega^*, U^*)$ , il s'ensuit que  $x' \in N_u(\Omega, U)$ , par conséquent,  $N_u(\Omega, U) \subseteq N_u(\Omega^*, U^*)$ .

D'où le résultat.

Maintenant, le Théorème 3.4 ci-dessus justifie l'étape de l'algorithme dans le cas où  $p^* < p$ , c'est-à-dire que les fonctions objectifs n'ont pas encore été toutes épuisées.



Précisément, pour trouver le nucléole généralisé du problème initial (MOLP), on peut résoudre un nouveau problème (MOLP) sur l'ensemble réalisable  $\Omega^*$ , défini par (3.18), avec

$$U^* = \{u_k(x) : u_k(x) = a_k^T x + \beta_k, \quad k \notin \Pi\} \quad (3.24)$$

Il reste à expliquer comment trouver l'ensemble d'indice  $\Pi$  introduit dans Lemme 3.1, certains éléments de la théorie de la dualité de la programmation linéaire seront utilisées (voir[4] ). considérons le problème dual de (P), tel que  $\Omega$  peut être écrit sous la forme

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0\}, \quad (3.25)$$

où  $A_i$  est la ligne  $i$  de  $A$ .

Le problème (P) est :

$$\min\{t : \quad A_i x \leq b_i; \quad i = 1, \dots, m; \quad a_k^T x - t \leq -\beta_k, \quad k = 1, \dots, p; \quad x \geq 0\}, \quad (3.26)$$

et son dual (D) est :

$$\max\{-\sum_1^m b_i \sigma_i + \sum_1^p \beta_k \tau_k : \sum_1^m A_i \sigma_i + \sum_1^p \alpha_k \tau_k \geq 0; \quad \sum_1^p \tau_k = 1 : \quad \tau \geq 0, \quad \sigma \geq 0\}, \quad (3.27)$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}^m$  et  $\tau \in \mathbb{R}^p$  sont les vecteurs des variables duales.

Les conditions de complémentarité sont les suivantes

$$\sigma_i(b_i - A_i x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad \tau_k(t - U_k(x)) = 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.28)$$

Supposons que le problème (P) a été résolu. Alors toute solution optimale  $(x^*, t^*)$  de (P) et toute solution optimal du dual  $(\sigma^*, \tau^*)$  de (P), les conditions de complémentarité devraient être satisfaites, parmi elles

$$\tau_k^*(t^* - U_k(x^*)) = 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.29)$$

On a  $\sum_1^p \tau_k^* = 1$ , donc dans  $\tau^*$  il existe au moins une coordonnée positive.

On désigne

$$\Pi = \{k : \quad k \in \{1, \dots, p\}, \quad \tau_k^* > 0\}, \quad (3.30)$$

alors, pour toute solution optimale  $(x^*, t^*)$  de (P), on a

$$U_k(x^*) = t^*, \quad \forall k \in \Pi \quad (3.31)$$

Si  $|\Pi| = p$  le problème des (MOLP) est résolu, comme l'explique le Théorème 3.3, si  $|\Pi| = p^* < p$ , alors le problème (MOLP) devraient être remplacé par un nouveau, comme l'explique le Théorème 3.4.

**Exemple**

Revenons à l'exemple précédent et écrivons le problème dual (3.27) pour ce problème

$$\begin{array}{l} \min \quad \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 - \sigma_4 \\ \text{Sujet à} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 + 2\tau_1 + \tau_2 \geq 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 + \tau_1 - 2\tau_2 \geq 0 \\ \tau_1 + \tau_2 = 1, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_3 \geq 0, \quad \sigma_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Parmis les conditions de complémentarité que nous avons

$\tau_1(t - 2x - y) = 0$ ;  $\tau_2(t - x - 2y) = 0$  la solution optimale trouvée en résolvant le problème (P),  $x^* = 0$ ;  $y^* = 1$ ;  $t^* = 1$ , et la contrainte  $\tau_1 + \tau_2 = 1$ , donnent  $\tau_1^* = 1, \tau_2^* = 0$ . Comme expliqué ci dessus dans (3.30) et (3.31), on aura  $\Pi = \{1\}$ , tel que pour toute solution optimal de (P) on doit avoir  $2x + y = 1$  équation à ajouter aux contraintes en (P), afin d'obtenir le nouveau problème (MOLP) à résoudre pour obtenir le nucléole généralisé du problème initial.

**minimiser la fonction**

$$U_2(x) = x - 2y$$

Sur l'ensemble  $\Omega^*$  défini par le système d'inégalités linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y \leq 1 \\ -x + y \leq 2 \\ x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \\ 2x + y = 1 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

On obtient la solution optimal  $x^* = 0$ ;  $y^* = 1$ ;  $t^* = -2$ , est  $x = 0$ ,  $y = 1$  unique, et les objectifs ont des valeurs incluses dans le vecteur  $\theta^T = (1, -2)$ .

**3.3 Algorithme pour résoudre le problème (MOLP)**

L'algorithme pour résoudre un problème (MOLP), c'est-à-dire pour trouver un point dans le nucléole généralisé de l'ensemble compact des solutions réalisables  $\Omega$ , par rapport aux fonctions linéaires  $U$ , peut être énoncé comme suit :

**Étape 0** : découvrir si  $\Omega \neq \Phi$  ou non. Dans le second cas, arrêter; le problème

(MOLP) n'a pas de solution. Avant l'étape S,  $S \geq 1$  un ensemble de solutions réalisables  $\Omega^S$  et un système de fonctions linéaires  $U^S$  sont disponibles.

Pour  $S = 1$ ; on a  $\Omega^1 = \Omega$ ,  $U^1 = U$ ,  $p_1 = |U^1| = p$

### Ètape S :

1. Résoudre le problème  $PL(P^S)$  :  
*Minimiser*  $t$ , **S.C**  $x \in \Omega^S$ ,  $U_k^S \leq t$ ,  $k = 1, \dots, p_S$   
 Soit  $t^S$  la valeur optimale
2. Trouver une solution optimal dual  $(\sigma^S, \tau^S)$  et déterminer l'ensemble des indices  
 $\Pi^S = \{k : \tau_k^S > 0\}$
3. Mettre à jour  $\Omega^S$  et  $U^S$  ;  
 $\Omega^S := \{x \in \Omega^S : U_k^S = t^S, k \in \Pi^S\}$  Puis  
 $p_S := p_S - |\Pi^S|$ , et  $U^S := \{U_k^S : k = 1, \dots, p_S; k \notin \Pi^S\}$ .
4. Vérifier si  $p^S = 0$  où  $p^S > 0$ ; dans le premier cas; passer à 5; dans le second cas; prener  $S := S + 1$  et passer à une nouvelle étape.
5. Arrêter la procédure; la solution est l'ensemble  $\Omega^S$ . Si un seul élément du nucléole généralisé est souhaité, prener la partie  $x$  de la solution optimale du problème (P).

La convergence en un nombre fini d'étapes est assurée par le fait qu'à chaque étape au moins une fonction objectif du problème (MOLP) courant est incorporée dans les contraintes.

Par conséquent, le nombre d'étapes est au plus  $p$ .

## CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de notre travail était de mettre en évidence l'utilité de la théorie des jeux coopératifs comme un cadre conceptuel pour approcher les problèmes liés à la répartition équitable de ressources communes à plusieurs agents économiques.

L'accent à été mis sur une technique particulière, le nucléole qui est l'un des solutions importants dans la théorie des jeux coopératifs à n-personnes avec des utilité transférable. Dans l'ensemble des solutions efficaces et individuellement rationnels, le nucléole cherche le résultat qui minimise le malheur de la coalition la plus malheureuse (sentiment d'insatisfaction), de la deuxième coalition la plus malheureuse,...etc. Une méthode de calcul de nucléole par la programmation linéaire est utilisé.

En s'inspirant du nucléole, **M.Justman** à défini le nucléole généralisé pour un ensembles de fonctions linéaires à minimiser sous des contraintes linéaires d'inégalités.

Ce travail est basé sur l'article de **Irinel Drangan** [5] qui propose de résoudre un problème linéaire multiobjectifs par le nucléole généralisé, nous montrons comment un tel problème peut être résolu, en donnant une méthode de recherche de nucléole généralisé où une certaine théorie de dualité est utilisée, en donnant un algorithme pour résoudre ce problème (MOLP).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.Kopelowitz. Computations of the kernels of simple games and the nucleolus of a n-person game. 1967.
- [2] V. Chvátal. *Linear Programming*. 1983.
- [3] Cours de Master 2. Optimisation multiobjectifs linéaire. *Université MOULOUD MEM-MERI Tizi Ouzou*.
- [4] G.Bruynel. On balanced sets with applications in game theory. pages 93–108, (1978).
- [5] I.Dragan. A game theoretic approach for solving multiobjective linear programming problems. *LIBERTAS MATHEMATHECA*, XXX :149–158, (2010).
- [6] M.Ansing J.Potters, J.Reijnierse. Computing the nucleolus by solving a prolonged simplexe algorithm. 21.3 :757–768, 1996.
- [7] M. Justman. Iterative processes with nucleolar restrictions. *IJGT*, 6.4 :181–212, 1977.
- [8] L.S.Shapley. Cores of convex games international jommap of game theory. 1.1 :11–26, 1971.
- [9] L.S.Shapley M.Maschler, B.Peleg. Geometric properties of the karnel and nucleolus and related solution concepts. 4.4 :303–339, 1979.
- [10] M.Sakawa. Linear and multiobjective programming with fuzzy stochastic. (2013).
- [11] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal Appl. Math*, 17.6 :1163–1170, 1969.

---