

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADÉMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et systèmes

Présenté par

Fatiha NASSANE

Baya OURDACHE

Thème

Application des algorithmes génétique pour la résolution d'un problème de
commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire

Mémoire soutenu publiquement le 25/06/2024 devant le jury composé de :

IDIRI Ghania

Encadrant

HAMMOUCHE Kamel

Président

TITOUCHE Kahina

Examinatrice

HAMMERIE Hakima

Examinatrice

Remerciement

***N**ous remercions tout d'abord le bon Dieu qui nous a donné le courage et la volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Nos sincères remerciements vont en particulier à notre promotrice Mme **Ghania IDIRI**, qui nous a dirigés afin de mener à bien ce travail avec ses conseils constructifs.*

Nos remerciements vont également aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Enfin, nous tenons à remercier tous les enseignants du département Automatique sans exception, qui ont contribué à notre formation avec beaucoup de compétence et dévouement, sans oublier nos amis de la promotion 2023-2024.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes parentes que dieu les protégés : Ce travail est l'un des fruits de vos efforts, mais aucune dédicace ne saurait exprimer mon profond amour et ma gratitude à votre égard.

Mes frères et mes sœurs.

Tous mes enseignants du primaire jusqu'à ce jour.

Tous mes amis(es) sans exception.

A ma Binôme *NASSANE Fatiha*.

BAYA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

♡ Mes chers parents sans lesquels rien ne serait, pour toutes les nuits qu'ils ont passées à vieillir pour que nous réussissions " Que Dieu vous procure santé et longue vie " .

♡ Ma chère grand -mère que Dieu lui procure santé et longue vie ♡ *Yemma Hebou* ♡.

♡ Mes chères sœurs *Sabrina, Zahia, Dehbia, Salima, Thaninna, Wissam, Sarah.*

♡ Mes chères frères *Akli, Takfarinesse, Ghilasse* .

♡ Mes nièces *Emilia, Mayel , Iline, Nayla.*

♡ Ma binôme *Baya OUREDACHE* avec qui j'ai passé de meilleurs moments qui restent de bons souvenirs pour toujours.

♡ *FATIHA* ♡

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Généralités sur la commande optimale	4
1.1 Introduction	4
1.2 Définition de la commande optimale	4
1.3 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale	5
1.4 Les domaines d'application de la commande optimale	10
1.5 Exemple de modélisation d'un problème de commande optimale	11
1.6 Méthodes de résolution d'un problème de commande optimale	14
1.7 Conclusion	26
2 Généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire	27
2.1 Introduction	27
2.2 Définition d'un système d'ordre fractionnaire	27
2.3 Fonctions spécifiques d'un système d'ordre fractionnaire	29
2.4 Définition de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire	32
2.5 Propriétés principales de la dérivée d'ordre fractionnaire	35
2.6 Avantages des systèmes d'ordre fractionnaire	36
2.7 Domaines d'application des systèmes d'ordre fractionnaire	37
2.8 Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire	38
2.9 Conclusion	40
3 Application des algorithmes génétiques pour la résolution d'un problème de commande optimale	41
3.1 Introduction	41
3.2 Définition des algorithmes génétique	41
3.3 Commande par retour d'état	49

3.4	Synthèse d'un retour d'état optimal d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les algorithmes génétiques	51
3.5	Exemples de synthèse d'un retour d'état optimal d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les algorithmes génétiques	52
3.6	Conclusion	57
	Conclusion Générale	58
	Bibliographie	

Liste des tableaux

3.1	La population initiale	47
3.2	La population initiale après l'évaluation de l'adaptation	47
3.3	Résultat de sélection	48
3.4	Résultat de l'application de l'opérateur de croisement	48
3.5	La nouvelle population après application des différents opérateurs	48

Table des figures

1.1	Système mécanique	11
1.2	L'évolution de la commande optimale $u^*(t)$	18
1.3	L'évolution de la trajectoire optimale $x^*(t)$	18
1.4	L'évolution de la commande optimale $u^*(t)$	23
1.5	L'évolution de la trajectoire optimale $x^*(t)$	23
2.1	Principe de généralisation de l'opération de dérivation à des ordres non entiers	32
2.2	Allure de $x(t)$ pour $\alpha = 0.5$ et $u(t) = 1$	39
2.3	Allure de $x(t)$ pour $\alpha = 0.5$ et $u(t) = \sin(t)$	39
3.1	Organigramme d'un algorithme génétique	43
3.2	Croisement selon un point	45
3.3	Croisement selon deux point	45
3.4	Croisement uniforme	45
3.5	Une mutation	46
3.6	Principe de retour d'état	50
3.7	Résultats de simulation de l'exemple 1 pour $\alpha = 0.9$	54
3.8	Résultat de simulation de l'exemple 1 pour $\alpha = 0.8$	54
3.9	Résultat de simulation de l'exemple 1 pour $\alpha = 0.3$	55
3.10	Résultat de simulation de l'exemple 2 pour $\alpha = 0.9$	56
3.11	Résultat de simulation de l'exemple 2 pour $\alpha = 0.8$	56
3.12	Résultat de simulation de l'exemple 2 pour $\alpha = 0.3$	57

Liste des symboles

$ \cdot $	Valeur absolue
$\lfloor \alpha \rfloor$	Nombre entier relatif immédiatement inférieur α
$\lceil \alpha \rceil$	nombre entier relatif immédiatement supérieur α
*	Grandeur optimale
A	Matrice d'évolution
a_i	La distance
b	Coefficient de frottement
C	Matrice d'observabilité
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexe
D	Matrice de commande
\mathcal{D}	Énergie dissipé liée à l'amortissement
E_α	Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre
$E_{\alpha,\beta}$	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres
F	La force
$f(x^i)$	Fonction d'adaptation
$f(x)$	Fonction à optimiser
J	Critère de performance
j	Entier naturel
H	Fonction Hamilton
h_i	facteur de pondération positive constant
i	Entier naturel
K	Le gain de retour d'état
k	La précision
K_i	Raideur du ressort
l	La taille de l'individu
l_i	La distance
l_j	Nombre entier
M	La taille de la population

m	Nombre entier
m_i	Les masses
m_j	Nombre de bit
\mathbb{N}	Ensembles des entiers naturels
n	Paramètres de récurrence de l'approximation
n_q	Nombre de contraintes intégrale
n_p	Nombre de contraintes instantanée
n_u	Nombre de variables de commande
n_x	Nombre de variables d'état
P	Problème d'optimisation
P_i	Quantité à calculer
p	Contrainte intégrale
Q	Matrice de pondération
q	Contrainte instantanée
R	Matrice de pondération
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^+	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
T	Horizon de commande
\mathcal{T}	Énergie cinétique
t	Variable de temps
t_0	L'instant initial
t_f	L'instant final
u	La variable commande
V	Énergie potentiel
\mathcal{V}	Espace vectoriel
V_{max}	Vitesse limitée
v	Variable supplémentaire
w	Paramètre de la fonction Bêta
x	La variable d'état
x_0	L'état initial
x_f	L'état final
x^d	L'état désiré
x^i	Individu
x_j^i	Variable entière
y	La variable de sortie
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs

\mathbb{Z}^-	Ensemble des entiers relatifs négatifs
$I^\alpha f(t)$	$(\alpha \in \mathbb{R})$ Intégrale non entière d'ordre α de la fonction $f(t)$
D^α	Opérateur de dérivation d'ordre non entier α
${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t)$	Dérivée d'ordre non entier α selon Grunwald-Letnikov
${}_{t_0}^R D_t^\alpha f(t)$	Dérivée d'ordre non entier α de la fonction $f(t)$ selon le définition de Riemann
${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t)$	Dérivée d'ordre non entier α de la fonction $f(t)$ selon le définition de Caputo
$\binom{\alpha}{j}$	Le binôme de Newton

Symboles grecs

α	Nombre réel positif
β	Nombre réel
μ	Nombre réel
θ	Nombre réel
Ψ	Fonction scalaire
Φ	Fonction scalaire
λ	Vecteur des variables adjointes
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma d'Euler
δ	Dérivée partielle
∇	Gradient d'une fonction
∇^2	Matrice hessienne

Introduction Générale

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation. Pour un système dynamique dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le *XIX^{ème}* siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application à lancer Apollo dans les années 1960. Depuis, les systèmes à commander devenant de plus en plus complexes, les lois de commande deviennent elles-mêmes complexes et parfois difficiles à mettre en œuvre[2][14].

La commande optimale est une technique développée pour assurer le fonctionnement satisfaisant d'un processus, même en présence d'incertitudes concernant le processus lui-même et les perturbations potentielles pendant son évolution. L'objectif de cette commande est de minimiser une fonction de coût.

Dans sa forme générale, la commande optimale permet de prendre en compte explicitement les objectifs ultimes de la commande (optimisation économique), les contraintes, les non-linéarités et l'aspect dynamique, ce qui est particulièrement intéressant pour les procédés discontinus. La formulation du problème est assez intuitive, ce qui facilite l'acceptation et la formulation des objectifs par des non spécialistes[4].

La commande optimale tire sa puissance de son modèle, qui agit comme un pilier fondamental de son fonctionnement. En utilisant les relations du modèle et les informations disponibles, on peut déterminer les actions les plus efficaces pour atteindre des objectifs spécifiques et prendre des décisions claires dans des environnements dynamiques et incertains. Parmi les modèles qui offrent une meilleure description de la réalité des systèmes, les modèles d'ordre fractionnaire se démarquent. Ces modèles sont des outils essentiels pour comprendre

la complexité des systèmes réels en capturant les phénomènes non linéaires et les interactions complexes de manière flexible et précise.

Le calcul fractionnaire est l'une des théories les plus populaires, car il peut apporter des résultats efficaces à la modélisation, à l'identification et à la commande des systèmes. La modélisation consiste à trouver un modèle paramétrique dont le comportement dynamique approche celui du système. Cette représentation est utilisée pour la simulation des systèmes dans le but de la conception et de la commande des systèmes[11].

Les problèmes de commande optimale d'ordre fractionnaire représentent un défi complexe en raison de la nature non entière dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques. Contrairement aux systèmes à ordre entier, les systèmes à ordre fractionnaire ne suivent pas les mêmes règles de calcul. Cela rend la conception de stratégies de commande optimale plus complexe, nécessitant des approches spécifiques pour modéliser et commander ces systèmes.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire. L'objectif de ce travail est la résolution d'un problème de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire en le transformant à un problème d'optimisation. L'idée est de supposer que la commande est sous forme d'un retour d'état, puis en remplaçant l'expression de la commande dans l'équation du modèle et dans le critère et résolvant l'équation du modèle. Ensuite en substituant l'expression de l'état $x(t)$ dans le critère, le problème de commande optimale devient un problème d'optimisation qu'on va résoudre à l'aide des algorithmes génétiques.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le **premier** chapitre est consacré à des généralités sur la commande optimale des systèmes dynamiques. On commence par définir la commande optimale, puis présenter la forme mathématique générale d'un problème de commande optimale en expliquant ses différentes parties. Ensuite, on explore les domaines d'application de la commande optimale. Enfin, le chapitre se termine par un exemple illustrant la résolution d'un problème de commande optimale.

Le **deuxième** chapitre est consacré aux notions de base du calcul fractionnaire. On débute par une définition des systèmes d'ordre fractionnaire, puis on introduit les fonctions spécifiques à ces systèmes, telles que les fonctions **Gamma**, **Mittag-Leffler** et **Bêta d'Euler**. Le

chapitre enchaîne avec la présentation des définitions usuelles de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire, notamment les définitions de **Riemann-Liouville**, **Caputo** et **Grunwald-Letnikov**. Ensuite, On aborde les avantages des systèmes d'ordre fractionnaire et leurs domaines d'application. Enfin, le chapitre se termine par deux exemples de simulation d'un modèle d'état d'ordre fractionnaire.

Le **troisième** chapitre est dédié à la synthèse d'un retour d'état optimal d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant des algorithmes génétiques. On commence par des définitions, puis cité les étapes à suivre pour la synthèse de la commande optimale. Enfin, deux exemples d'application sont présentés.

Le mémoire se termine par une conclusion générale sur l'étude réalisée tout en interprétant les résultats obtenus.

Chapitre 1

Généralités sur la commande optimale

1.1 Introduction

Pour réaliser les objectifs de la commande d'un système dynamique, plusieurs commandes sont utilisées parmi ces commandes, il existe des commandes qui réalisent ces objectifs tout en optimisant un critère de performance et respectant un certain nombre de contraintes. Ces commandes sont particulières et sont appelées commande optimale[15].

Dans ce premier chapitre on s'intéresse à la définition et la formulation mathématique d'un problème de commande optimale et les différentes méthodes utilisées pour sa résolution.

1.2 Définition de la commande optimale

La commande optimale s'intéresse à trouver une loi de commande $u^*(t)$ qui va conduire le système d'un état initial à un état final, avec certaines contraintes à respecter sur les signaux de commande et les états, en même temps qui va maximiser ou minimiser un critère de performance. Autrement dit, la commande optimale est une commande admissible qui respecte les conditions suivantes :

- Le modèle du système à commander sous forme d'état.
- Satisfaire les différentes contraintes imposées.
- Optimiser un critère de performances.

1.3 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale

La première étape qui est importante pour la résolution d'un problème de commande optimale, consiste à le mettre sous la forme mathématique. Cette étape s'appelle la modélisation. Elle consiste à préciser les éléments suivants[1] :

1.3.1 Système dynamique et ses caractéristiques

Un système dynamique est un concept utilisé en mathématique et en physique pour décrire l'évolution temporelle d'un système au fil de temps. Il est caractérisé par trois variables :

- Le vecteur de commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$.
- Le vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$.
- Le vecteur de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^r$.

où

m : est le nombre de commande.

n : est le nombre d'état.

r : est le nombre de sortie.

1.3.2 Modèle mathématique

On modélise l'évolution d'un système dynamique par un ensemble d'équations, qui doit être simple pour la résolution mathématique et numérique.

Généralement un système dynamique est décrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.1}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \tag{1.2}$$

où

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ est une fonction vectorielle linéaire ou non linéaire.

$h = (h_1, h_2, \dots, h_r)^T$ est une fonction vectorielle linéaire ou non linéaire.

1.3.3 Conditions terminales

Les conditions terminales comportent deux états :

1.3.3.1 État initial $x(t_0)$

C'est l'état du système à l'instant initial noté t_0 (l'instant où on applique la commande).

1.3.3.2 État final $x(t_f)$

C'est l'état du système à l'instant final t_f (l'instant où on arrête d'appliquer la commande).

Remarque 1.1

1. L'état initial $x(t_0)$ est toujours connu.
2. L'état final $x(t_f)$ peut être :
 - Libre : L'état final non précis (non spécifié).
 - Connu : L'état final précis (spécifié).
3. Le temps $t_0 \rightarrow t_f$ est appelé horizon de commande, il peut être fini si t_f est fini ou infini si t_f est infini.

1.3.4 Contraintes physiques

Une contrainte est une condition qui doit satisfaire la solution d'un problème de commande optimale.

On distingue deux types de contraintes :

1.3.4.1 Contraintes instantanées

Une contrainte instantanée est une contrainte qui doit être satisfaite et respectée à tout instant.

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 \tag{1.3}$$

où

$$q \in \mathbb{R}^{n_q}$$

n_q : est le nombre de contraintes instantanées.

1.3.4.2 Contraintes intégrales

Une contrainte intégrale est une contrainte qui doit être satisfaite sur un horizon de commande $T = [t_0 \ t_f]$, et elle ne doit pas dépasser une certaine valeur.

Ce type de contrainte s'exprime comme suit :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad (1.4)$$

où

$p \in \mathbb{R}^{n_p}$, est une fonction de dimension n_p .

n_p : est le nombre de contraintes intégrales.

Remarque 1.2

1. Les contraintes dans la formulation d'un problème de commande optimale varient en fonction de cahier des charges.
2. On peut transformer des contraintes de type inégalité à des contraintes de type égalité, en introduisant des variables supplémentaires $v(t)$ et les contraintes deviennent :

$$q(x(t), u(t), t) + v(t) = 0 \quad (1.5)$$

1.3.5 Critère de performance

On choisit un critère à optimiser selon les exigences du cahier des charges et les performances désirées, il peut être lié à l'état ou à la commande.

L'expression générale du critère est donnée comme suit :

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.6)$$

— $\Psi(x(t_f), t_f)$: La partie terminale qui exprime l'objectif à optimiser à l'instant final t_f .

- $\int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt$: La partie intégrale exprime les objectifs à optimiser sur l'horizon de commande $T = [t_0 \ t_f]$.

Où

Ψ et Φ : sont deux fonctions scalaires.

On distingue trois types de problème de commande optimale :

- Problème de **Mayer** : Le critère comprend seulement la partie terminale.

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) \quad (1.7)$$

- Problème de **Lagrange** : Le critère comprend seulement la partie intégrale.

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.8)$$

- Problème de **Bolza** : Le critère comprend les deux parties (terminale et intégrale).

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.9)$$

1.3.6 Critère à optimiser

Parmi les critères qu'on peut optimiser :

1.3.6.1 Commande en temps minimal

Consiste à transférer l'état d'un système d'un état initial à un état final dans une durée du temps plus courte possible.

L'expression mathématique de la commande en temps minimal est donnée comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 \quad (1.10)$$

1.3.6.2 Commande à consommation minimale

Permet de diminuer les coûts de fonctionnement pour les systèmes de production continue. De point de vue physique il est lié à l'amplitude de la commande.

L'expression mathématique est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n h_i |u_i(t)| dt \quad (1.11)$$

$$h_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.12)$$

où h_i sont des facteurs de pondération positifs constants.

Pour les systèmes mono-variable $h_i = 1$ et le critère devient :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (1.13)$$

1.3.6.3 Poursuite

Elle s'agit de maintenir l'état $x(t)$ d'un système proche de $x^d(t)$ dans un horizon de commande $T = [t_0 \ t_f]$, donc on va avoir l'erreur $e(t) = x^d(t) - x(t)$ plus faible possible.

Mathématiquement, on doit minimiser :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [(x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t))] dt \quad (1.14)$$

telle que :

Q : Matrice de pondération généralement définie positif.

$Q = Q^T$, $Q \geq 0$ et $Q \in \mathbb{R}^{n_x * n_x}$.

où

n_x : le nombre de variables d'état .

1.3.6.4 Régulation

Est un cas particulier de la poursuite, dans ce cas on a ($x^d(t) = 0$) avec $T \in [t_0 \ t_f]$. L'objectif est de rejeter les perturbations.

Le critère est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [x(t)]^T Q [x(t)] dt \quad (1.15)$$

avec

$Q = Q^T, Q \geq 0$.

1.3.6.5 Commande à énergie minimale

Consiste à transférer l'état d'un système d'un état initial vers un état final en minimisant l'effort de la commande. De point de vue physique l'énergie est liée à l'évolution de la commande.

Le critère à minimiser est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \quad (1.16)$$

où

R : Matrice de pondération.

$R \in \mathbb{R}^{n_u * n_u}$ et $R = R^T$, $R \geq 0$

n_u : le nombre de variables de commande .

Finalement, la formulation mathématique d'un problème de commande optimale, est donné comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.17)$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.18)$$

$$x(t_0) = 0 \quad (1.19)$$

$$x(t_f) = x_f \text{ ou libre} \quad (1.20)$$

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (1.21)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad (1.22)$$

Où : (1.17) représente le critère à minimiser ou à maximiser (selon le problème), (1.18) représente le modèle d'état du système à commander, (1.19) et (1.20) représentent l'état initial ($x(t_0)$) et l'état final ($x(t_f)$) et (1.21) et (1.22) représentent les contraintes instantanées et les contraintes intégrales .

1.4 Les domaines d'application de la commande optimale

La commande optimale est une discipline de l'ingénierie qui trouve des applications dans divers domaines, notamment :

- **Ingénierie des systèmes dynamiques** : Contrôle de systèmes mécaniques, électriques, hydrauliques, etc.
- **Aérospatial** : Contrôle de satellites, véhicules spatiaux, drones, etc.
- **Automobile** : Contrôle de véhicules autonomes, systèmes de navigation, etc.
- **Robotique** : Contrôle de robots industriels, robots autonomes, drones, etc.
- **Énergie** : Optimisation de la production et de la distribution d'énergie électrique, contrôle de centrales électriques, etc.

1.5 Exemple de modélisation d'un problème de commande optimale

Considérons un système mécanique de la figure ci-après [15] :

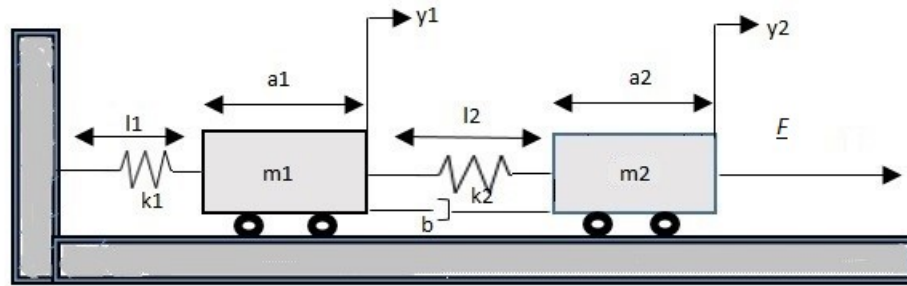


FIGURE 1.1 – Système mécanique

On désire déterminer la force $F(t)$ qui permet de déplacer la masse m_2 à une position égale au double de sa position initiale $x(t_0)$. Lors du déplacement, on doit maintenir une distance minimale entre m_1 et m_2 . Le déplacement doit se faire en 10s et l'énergie potentiel de k_1 ne doit pas dépasser la vitesse limitée V_{max} .

1- Modèle mathématique

Pour modéliser ce système on utilise le formalisme de **Lagrangien**. Pour chaque masse, l'équation différentielle qui caractérise sa dynamique est donnée comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}_i} = \sum F_{ext} \quad (1.23)$$

où

y_i : c'est l'état.

F_{ext} : Les forces extérieures.

\mathcal{T}, V et \mathcal{D} sont respectivement : énergie cinétique des masses (m_1 et m_2), énergie potentielle (ressort) et énergie dissipée liée à l'amortisseur.

b : Le coefficient de frottement.

Équation de la masse m_1 :

$$m_1 \ddot{y}_1(t) = -k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) - k_2 y_1(t) + b \dot{y}_2(t) - b \dot{y}_1(t) \quad (1.24)$$

Équation de la masse m_2 :

$$m_2 \ddot{y}_2(t) = k_2 y_1(t) - k_2 y_2(t) + b \dot{y}_1(t) - b \dot{y}_2(t) + F(t) \quad (1.25)$$

Dans (1.24) et (1.25) on a utilisé les variables y_1 et y_2 . Pour passer à (1.26), (1.27), (1.28) et (1.29) nous avons effectué un changement de variable, ce qui donne :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1.26)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{-k_1}{m_1} x_1(t) + \frac{k_2}{m_1} x_3(t) - \frac{k_2}{m_1} x_1(t) + \frac{b}{m_1} x_4(t) - \frac{b}{m_1} x_2(t) \quad (1.27)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (1.28)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{k_2}{m_2} x_1(t) - \frac{k_2}{m_2} x_3(t) + \frac{b}{m_2} x_4(t) + \frac{F(t)}{m_2} \quad (1.29)$$

2- Conditions terminales

Condition initiale ($t = 0$)

À $t = 0$, nous avons la position initiale de la masse m_1 est $x_1(0) = l_1 + \frac{a_1}{2}$, avec une vitesse initiale $x_2(0) = 0$, la position initiale nulle de la masse m_2 est $x_3(0) = l_1 + a_1 + l_2 + \frac{a_2}{2}$, avec sa vitesse initiale $x_4(0) = 0$.

Donc à $t = 0$ on a l'état initial $X(0)$:

$$X(0) = \begin{bmatrix} l_1 + \frac{a_1}{2} \\ 0 \\ l_1 + a_1 + l_2 + \frac{a_2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix}$$

Condition finale ($t = 10$)

À $t = 10$, nous avons la position finale de la masse m_1 est inconnue $x_1(10) = ?$, avec une vitesse finale inconnue $x_2(10) = ?$, la position finale de la masse m_2 est $x_3(10) = 2l_1 + 2a_1 + 2l_2 + a_2$, avec sa vitesse finale $x_4(10) = 0$.

Donc à $t = 10$, on a l'état final $X(10)$:

$$X(10) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ 2l_1 + 2a_1 + 2l_2 + a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Donc l'état final est inconnu, c'est-à-dire il est libre.

3- Contraintes

Énergie V ne doit pas dépasser $Vmax$:

$$\frac{1}{2} k_1 x_1^2(t) \leq Vmax \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{2} k_1 x_1^2(t) - Vmax \leq 0 \quad (1.33)$$

4- Critère

Pour garder une distance minimale entre m_1 et m_2 , on doit minimiser la distance entre m_1 et m_2 . Dans ce cas on a un problème de poursuite.

L'expression du critère est la suivante :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) dt \quad (1.34)$$

où

Q : est la matrice de pondération .

On prend la matrice Q comme une matrice identité, donc le critère est le suivant :

$$J = \int_0^{10} (x_1(t) - x_3(t))^2 + (x_2(t) - x_4(t))^2 dt \quad (1.35)$$

Le problème de commande optimale s'écrit :

$$\min_{F(t)} J(F(t)) = \int_0^{10} (x_1(t) - x_3(t))^2 + (x_2(t) - x_4(t))^2 dt \quad (1.36)$$

sujet à

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \frac{-k_1}{m_1}x_1(t) + \frac{k_2}{m_1}x_3(t) - \frac{k_2}{m_1}x_1(t) + \frac{b}{m_1}x_4(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) \\ x_4(t) \\ \frac{k_2}{m_2}x_1(t) - \frac{k_2}{m_2}x_3(t) + \frac{b}{m_2}x_4(t) + \frac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} l_1 + \frac{a_1}{2} \\ 0 \\ l_1 + a_1 + l_2 + \frac{a_2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$X(10) = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ 2l_1 + 2a_1 + 2l_2 + a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{2} k_1 x_1^2(t) - Vmax \leq 0 \quad (1.40)$$

1.6 Méthodes de résolution d'un problème de commande optimale

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre un problème de commande optimale et le choix de la méthode dépend du type de problème. Généralement les problèmes de commande optimale sont résolus par les trois méthodes principales suivantes :

1.6.1 Méthode de calcul des variations (Équation d'Euler-Lagrange)

Le calcul des variations est une branche des mathématiques appliquées qui s'intéresse à

l'optimisation des fonctionnelles[20].

1.6.1.1 Définition d'une fonctionnelle

Une fonctionnelle en mathématique est donnée comme suit :

Soit \mathcal{V} un espace vectorielle, une fonctionnelle J sur \mathcal{V} est une application dans \mathbb{R} , son expression est la suivante :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)dt \quad (1.41)$$

$x(t)$ est une fonction supposée continue sur l'intervalle $[t_0 \ t_f]$.

1.6.1.2 Variation fonctionnelle

Considérons deux fonctions continue $x(t)$ et $\delta x(t)$ pour les quelles la fonctionnelle J est défini, alors la variation de J , noté ΔJ donnée comme suit :

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (1.42)$$

où $\delta x(t)$ la variation de la fonction $x(t)$.

Le problème qui se pose est de trouver la fonction $x^*(t)$ pour laquelle la fonctionnelle $J(x(t))$ admet un extremum.

Pour résoudre se problème, on utilise l'équation d'**Euler - Lagrange** qui est donnée comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.43)$$

Avec des conditions aux limites appropriées :

— **État final imposé :**

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.44)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.45)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (1.46)$$

— **État final libre :**

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.47)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (1.49)$$

1.6.1.3 Exemple illustratif

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^2 u^2(t) + 2tx(t) dt \quad (1.50)$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (1.51)$$

$$x(0) = 1 \quad (1.52)$$

$$x(2) = 5 \quad (1.53)$$

Le problème de calcul des variations qui correspond à ce problème de commande optimale, est obtenu en remplaçant dans le critère $J(u(t))$, $u(t)$ par $\dot{x}(t)$ ce qui donne :

$$\min_{x(t)} J(x(t)) = \int_0^2 \dot{x}^2(t) + 2tx(t) dt \quad (1.54)$$

sujet à :

$$x(0) = 1 \quad (1.55)$$

$$x(2) = 5 \quad (1.56)$$

Calcul de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (1.57)$$

avec

$$g(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2(t) + 2tx(t) \quad (1.58)$$

Ce qui donne l'équation suivante :

$$2t - 2\ddot{x}(t) = 0 \quad (1.59)$$

C'est-à-dire :

$$\ddot{x}(t) = t \quad (1.60)$$

On intègre l'équation (1.60) et on aura :

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2}t^2 + c1 \quad (1.61)$$

et :

$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 + c1t + c2 \quad (1.62)$$

Calcul des constantes $c1$ et $c2$, a partir des conditions terminales :

$$x(0) = 1 \Rightarrow x(0) = \frac{1}{6}(0)^3 + 1(0) + c2 = 1 \rightarrow c2 = 1 \quad (1.63)$$

$$x(2) = 5 \Rightarrow x(2) = \frac{1}{6}(2)^3 + 2c1 + 1 = 5 \rightarrow c1 = \frac{4}{3} \quad (1.64)$$

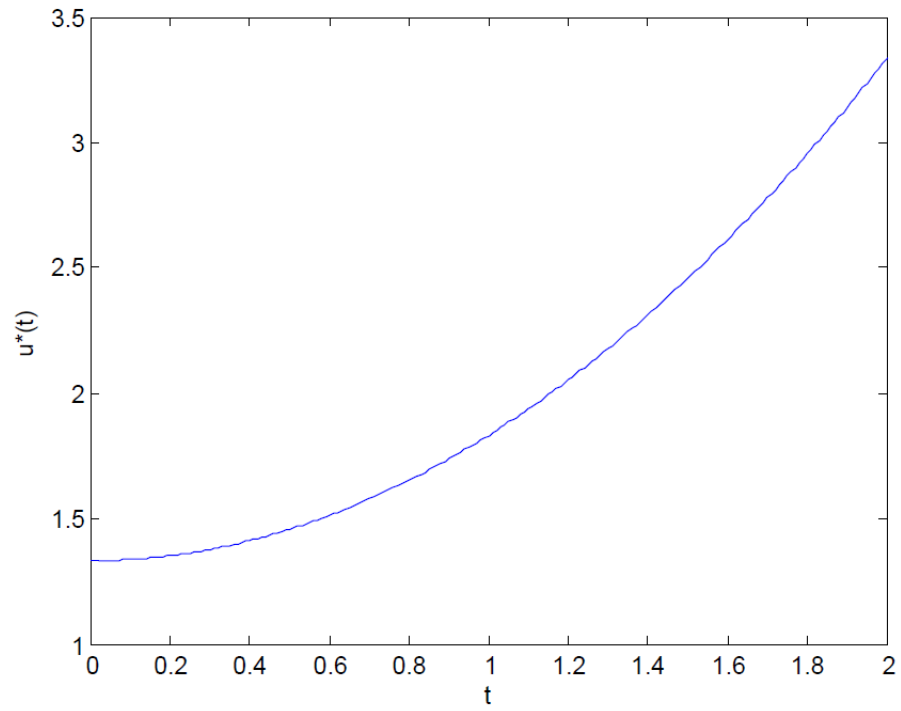
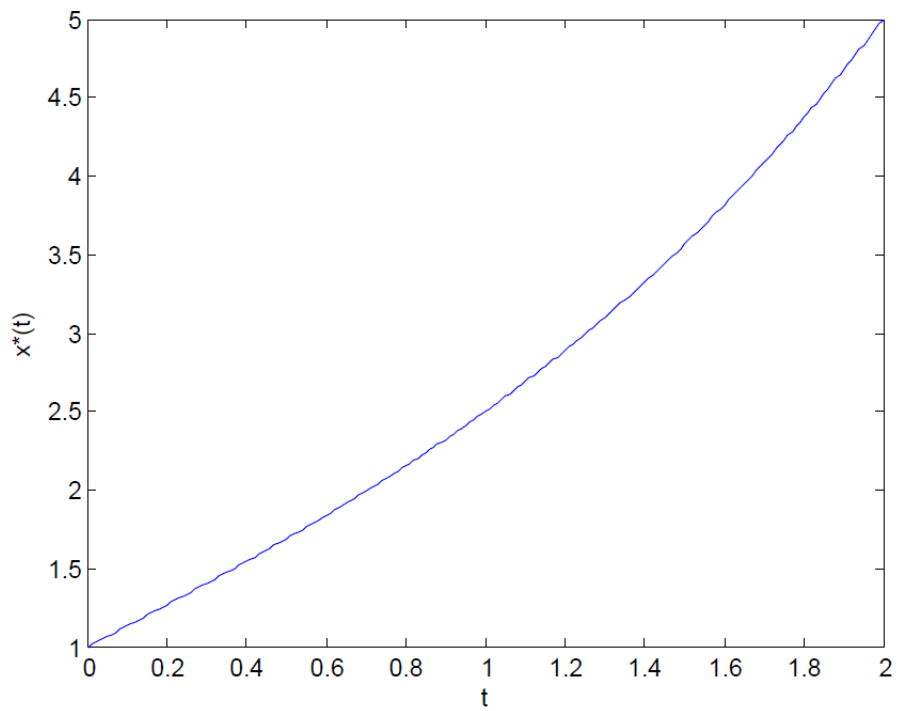
Expression de la trajectoire optimale :

$$x^*(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{4}{3}t + 1 \quad (1.65)$$

Expression de la loi de commande :

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3} \quad (1.66)$$

L'évolution de la commande optimale $u^*(t)$ et l'évolution de la trajectoire optimale $x^*(t)$ sont présentées par les figures (1.2) et (1.3) respectivement :

FIGURE 1.2 – L'évolution de la commande optimale $u^*(t)$ FIGURE 1.3 – L'évolution de la trajectoire optimale $x^*(t)$

1.6.2 Principe de Minimum de Pontryagin (PMP)

Le principe de minimum de Pontryagin est la méthode la plus utilisée pour la résolution des problèmes de commande optimale. Il est basé sur la méthode de multiplicateur de Lagrange. Cette méthode s'intéresse à la résolution des problèmes de commande optimale de type **Bolza**, formulé comme suit [19] :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.67)$$

soit à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.68)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.69)$$

$$x(t_f) = x_f \text{ ou libre} \quad (1.70)$$

Pour résoudre ce problème, **Pontryagin** a proposé d'introduire l'équation de modèle dans le critère en utilisant des variables adjointes $\lambda(t)$ (Multiplicateurs de Lagrange), comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) + \lambda^T [f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] dt \quad (1.71)$$

soit à :

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.72)$$

$$x(t_f) = x_f \text{ ou libre} \quad (1.73)$$

Pour la résolution du problème de commande optimale (1.71) on va définir la **Fonction d'Hamilton** comme suit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \Phi(x(t), u(t), t) + \lambda^T f(x(t), u(t), t) \quad (1.74)$$

Donc le critère $J(u(t))$ devient :

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t) dt \quad (1.75)$$

où $\lambda(t)$: Vecteur des variables adjointes.

Pour déterminer les conditions d'optimalité, on utilise la théorie de calcul des variations

et on annule la première variation δJ :

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial x} \delta x(t) \quad (1.76)$$

Ce qui donne :

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (1.77)$$

Il faut vérifier que $\nabla_{u(t)}^2 H \succ 0$ pour que le système admette des solutions .

où

$\nabla_{u(t)} H$: est le gradient de H par rapport à $u(t)$.

$\nabla_{u(t)}^2 H$: est la matrice Hessienne de H .

On obtient les équations d'**Hamilton Pontryagin** (HP) suivantes :

$$\dot{x}(t) = \nabla_{\lambda(t)} H^*(x(t), u(t), \lambda(t), t) \quad (1.78)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{\lambda(t)} H^*(x(t), u(t), \lambda(t), t) \quad (1.79)$$

où

$$H^*(x(t), u(t), \lambda(t), t) = H(x(t), u(t), \lambda(t), t) |_{u(t)=u^*(t)} \quad (1.80)$$

A partir de (1.77) on peut tirer l'expression de la commande optimale $u^*(t)$.

Remarque 1.3

Si l'état final $x(t_f)$ est libre, on aura cette relation à imposer :

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Psi(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \quad (1.81)$$

1.6.2.1 Exemple de résolution d'un problème de commande optimale par le principe de minimum de Pontryagin

On considère le même exemple de problème de commande optimale traité précédemment :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^2 u^2(t) + 2tx(t) dt \quad (1.82)$$

soit à :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (1.83)$$

$$x(0) = 1 \quad (1.84)$$

$$x(2) = 5 \quad (1.85)$$

On définit l'équation d'Hamilton :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \Phi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) \quad (1.86)$$

L'Hamiltonien s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = u^2(t) + 2tx(t) + \lambda(t)u(t) \quad (1.87)$$

L'expression de la commande optimale est obtenue à partir de la relation suivante :

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (1.88)$$

Ce qui donne :

$$2u(t) + \lambda(t) = 0 \rightarrow u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2} \quad (1.89)$$

En remplaçant $u^*(t)$ dans l'expression de H on aura :

$$H^*(x(t), u^*(t), \lambda(t), t) = H|_{u(t)=u^*(t)=-\frac{\lambda(t)}{2}} \quad (1.90)$$

Ce qui donne :

$$H^*(x(t), u^*(t), \lambda(t), t) = 2tx(t) + \frac{\lambda(t)}{4} \quad (1.91)$$

Calcul des équations d'Hamilton-Pontryagin :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda(t)} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{-\lambda(t)}{2} \quad (1.92)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{-\partial H^*}{\partial x(t)} \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = -2t \quad (1.93)$$

On intègre l'équation (1.93) on aura :

$$\lambda(t) = -t^2 + c3 \quad (1.94)$$

On remplace dans (1.92) :

$$\dot{x}(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{c3}{2} \quad (1.95)$$

On intègre l'équation(1.95),on aura :

$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{c3}{2}t + c4 \quad (1.96)$$

On impose les conditions terminales :

Pour $t = 0$, on a :

$$x(0) = 1 \implies c4 = 1$$

Pour $t = 2$, on a :

$$x(2) = 5 \implies c3 = -\frac{8}{3}$$

L'expression de la trajectoire optimale :

On intègre l'équation (1.95) on aura :

$$x^*(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{4}{3}t + 1 \quad (1.97)$$

L'expression de la commande optimale :

$$u^*(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3} \quad (1.98)$$

L'évolution de la commande optimale $u^*(t)$ et l'évolution de la trajectoire optimale $x^*(t)$ sont

présentées par les figures (1.4) et (1.5) respectivement :

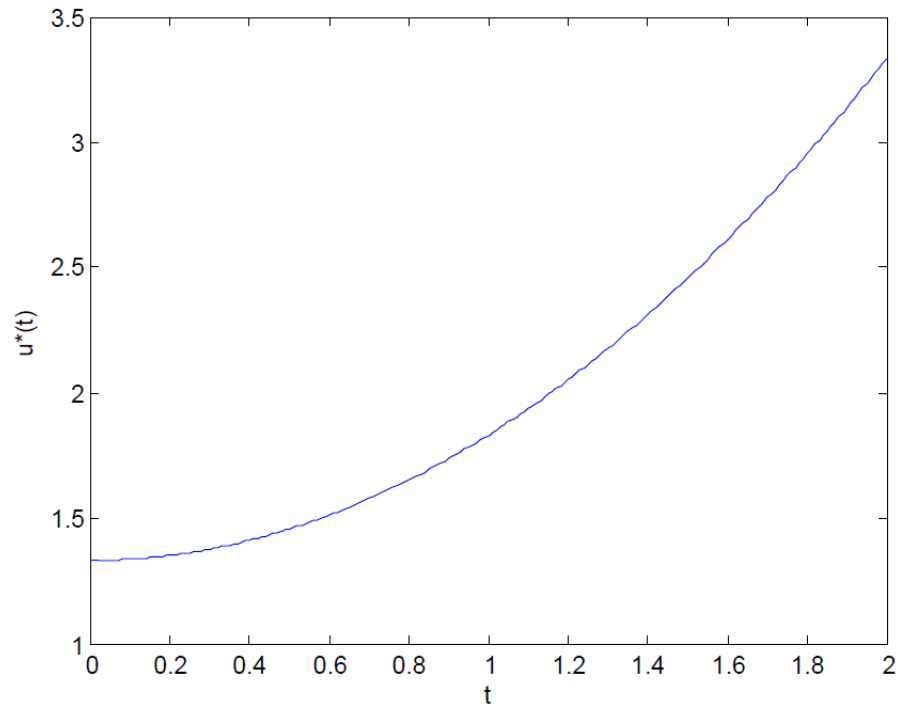


FIGURE 1.4 – L'évolution de la commande optimale $u^*(t)$

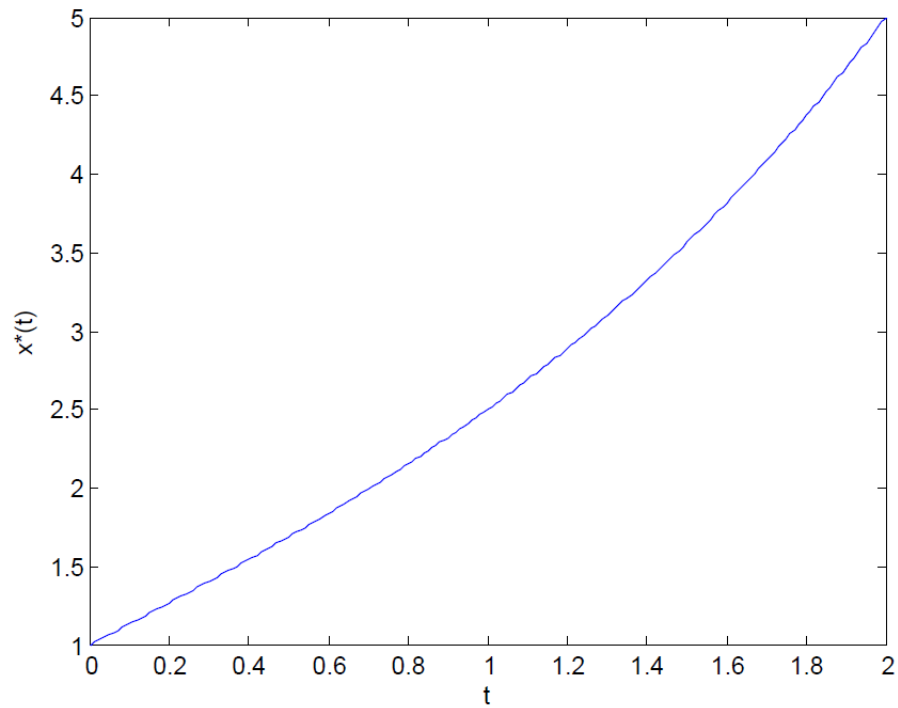


FIGURE 1.5 – L'évolution de la trajectoire optimale $x^*(t)$

1.6.3 Commande Linéaire Quadratique(LQ)

On parle de commande linéaire quadratique LQ ou LQR pour régulateur linéaire quadratique. Le système est linéaire et le critère est quadratique. La commande optimale est un retour d'état sous la forme [6][16] :

$$u(t) = -Kx(t) \quad (1.99)$$

La résolution d'un problème de commande optimale peut être simplifiée en considérant un modèle linéaire à condition que l'hypothèse de linéarité est vérifiée. Désignons par $x^d(t)$ l'état désiré et définissons l'erreur de poursuite :

$$e(t) = x^d(t) - x(t) \quad (1.100)$$

Le système est décrit par le modèle d'état linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.101)$$

Où

A : Matrice d'évolution.

B : Matrice de commande.

Le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [[e(t)]^T Q e(t) + [u(t)]^T R u(t)] dt \quad (1.102)$$

où

Q et R sont des matrices de pondérations.

En utilisant le principe du minimum, la fonction d'**Hamilton** s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2} [[e(t)]^T Q e(t) + [u(t)]^T R e(t)] + [\lambda(t)]^T \dot{x}(t) \quad (1.103)$$

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2} [[e(t)]^T Q e(t) + [u(t)]^T R e(t)] + [\lambda(t)]^T (Ax(t) + Bu(t)) \quad (1.104)$$

La fonction d'**Hamilton** est minimale pour :

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t)) = Ru(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad (1.105)$$

Alors l'expression de la commande optimale est :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) \quad (1.106)$$

Les équations d'**Hamilton-Pontryagin** s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} 0 \\ x^d(t) \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

On considère qu'il existe une relation linéaire entre $\lambda(t)$ et $x(t)$:

$$\lambda(t) = Kx(t) - V(t) \quad (1.108)$$

La dérivée de $\lambda(t)$ par rapport au temps :

$$\dot{\lambda}(t) = K(t)\dot{x}(t) + \dot{K}(t)x(t) - \dot{V}(t) \quad (1.109)$$

Ce qui donne :

$$\dot{\lambda}(t) = K(t)\dot{x}(t) + \dot{K}(t)x(t) - \dot{V}(t) = -A^T\lambda(t) + Q(x^d(t) - x(t)) \quad (1.110)$$

Après le remplacement de $\dot{x}(t)$ et $\dot{\lambda}(t)$ par leurs expressions, on aura :

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^TK(t) - K(t)SK(t) + Q = 0 \quad (1.111)$$

$$\dot{V}(t) + (A^T - K(t)S)V(t) - Qx^d(t) = 0 \quad (1.112)$$

La première équation appelée équation matricielle de **Riccati**.

L'expression de la commande est :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(K(t)x(t) - V(t)) \quad (1.113)$$

Remarque 1.4

$x(t)$ intervient dans l'expression de la loi de commande, ce qui permet d'avoir la commande optimale sous la forme d'un retour d'état.

1.7 Conclusion

Ce chapitre introduit et explique le concept de la commande optimale. Nous avons présenté des généralités sur la commande optimale. On a commencé par la définition d'un problème de commande optimale puis on s'est concentré sur la démarche à suivre pour la formulation mathématique de ce dernier en précisant les différentes parties d'un problème de commande optimale qu'on a illustré par un exemple.

Ensuite, nous avons présenté, les méthodes de la résolution d'un problème de commande optimale, la méthode de **calcul des variations**, la méthode du principe de **minimum de Pontryagin** et la commande linéaire quadratique(**LQ**) qui servent à résoudre des problèmes de commande optimale des systèmes d'ordre entier. A la fin du chapitre, nous avons résolu un problème de commande optimale par la méthode de **calcul des variations** et la méthode du principe de **minimum de Pontryagin**.

Le chapitre suivant est consacré sur des généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire.

Chapitre 2

Généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

L'extension du calcul d'ordre entier vers le calcul d'ordre non entier conduit au calcul dit fractionnaire, connu depuis le dix-septième siècle [7]. Le calcul non entier ou fractionnaire a beaucoup intéressé les chercheurs dans plusieurs domaines, où la première référence est une question posée dans une lettre datée du 3 septembre 1695 par l'**Hôpital** à **Leibniz**, un des pionniers du calcul intégral et différentiel, sur la possibilité de calculer une dérivée dont l'ordre n'est pas entier a annoncé le développement d'une nouvelle branche des mathématiques appelée calcul fractionnaire [12].

L'objectif principale de ce chapitre est de présenter certaines bases théoriques de calcul fractionnaire pour le développement de la commande des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, tout en rappelant les principales définitions et propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

2.2 Définition d'un système d'ordre fractionnaire

Un système d'ordre fractionnaire est un système dynamique réel dont le comportement est décrit comme dans le cas entier par trois modèles : une équation différentielle d'ordre fractionnaire, une fonction de transfert ou une représentation d'état contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire[3].

2.2.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire

L'équation différentielle représentant un système d'ordre fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \quad (2.1)$$

$$b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t)$$

Où

$y(t)$ et $u(t)$ désignent respectivement la sortie et l'entrée du système .

Les coefficients a_n et b_m sont des réels, les ordres de dérivation sont ordonnés pour des raisons d'identification $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ et $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m$, n et m sont des entiers. Comme dans le cas d'une équation différentielle d'ordre entier, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_n > \beta_m$ pour que le système soit strictement propre.

2.2.2 Une fonction de transfert d'ordre fractionnaire

L'application de la transformée de **Laplace** à l'équation différentielle (2.1) avec des conditions initiales nulles, donne la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.2)$$

2.2.3 Une représentation d'état

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire comporte deux équations :

- Une équation d'état d'ordre fractionnaire dont lequel le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel.
- Une équation d'observation identique à celle du cas entier .

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.4)$$

Avec : $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Où

A : matrice d'évolution.

B : matrice de commande.

C : matrice d'observation.

D : matrice d'action directe.

α : est l'ordre de la dérivée fractionnaire .

D^α : L'opérateur de la dérivée d'ordre α .

2.3 Fonctions spécifiques d'un système d'ordre fractionnaire

La fonction **Gamma**, la fonction **Bêta** et la fonction **Mittag-Leffler** sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

2.3.1 Définition de la fonction Gamma

Une des fonctions de base de calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(\cdot)$ qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières. En effet, la fonction **Gamma** est la généralisation aux nombres réels de la fonction factoriel définie pour les nombres entiers positifs [18].

On définit la fonction **Gamma** par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in C \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.5)$$

Propriétés de la fonction Gamma

La fonction **Gamma** satisfait les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. $z \rightarrow \Gamma(z)$ est une fonction monotone est strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.
3. La fonction **Gamma** $\Gamma(z)$ possède une propriété importante donnée par la relation de récurrence qui suit :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.6)$$

On peut démontrer (2.6) par une intégration par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-z-1} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (2.7)$$

4. La fonction $\Gamma(z)$ généralise la fonction factorielle dans le cas où :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.8)$$

5. La fonction **Gamma** peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.9)$$

2.3.2 Définition de la fonction Bêta d'Euler

La fonction Bêta d'Euler c'est une autre fonction spéciale qui est directement liée, à travers ses propriétés à la fonction **Gamma** [17].

La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de deuxième espèce :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (2.10)$$

Propriétés de la fonction Bêta d'Euler

La fonction Bêta d'Euler satisfait les propriétés suivantes :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \notin \mathbb{Z}^- \quad (2.11)$$

$$B(z, w) = \int_0^1 t^z (1-t)^w dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (2.12)$$

$$B(z+1, w+1) = \int_0^1 t^z (1-t)^w dt \quad (2.13)$$

Où

w : premier paramètre de la fonction Bêta.

Identités de la fonction Bêta d'Euler

La fonction Bêta d'Euler $B(z, w)$ satisfait aux identités suivantes :

$$B(z, w) = B(w, z) \quad (2.14)$$

$$B(z, w) = B(z + 1, w) + B(z, w + 1) \quad (2.15)$$

$$B(z, w + 1) = \frac{w}{z} B(z + 1, w) = \frac{w}{z + w} B(z, w) \quad (2.16)$$

2.3.3 Définition de la fonction classique de Mittag-Leffler

La fonction de **Mittag-Leffler** est très importante pour le calcul fractionnaire, elle représente la généralisation de l'exponentielle au calcul d'ordre non entier. On distingue deux types de fonctions de **Mittag-Leffler** : la fonction à deux paramètres et la fonction à un seul paramètre [17].

La fonction classique de **Mittag-Leffler** à un paramètre α , est définie par l'expression :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.17)$$

Exemple Pour $\alpha = 1$:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.18)$$

La fonction classique de **Mittag-Leffler** à deux paramètres α et β est donnée par l'expression :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.19)$$

Exemple Pour $\beta = 1$:

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_\alpha(z), \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0) \quad (2.20)$$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 2$:

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z} \tag{2.21}$$

Pour $\alpha = 2$ et $\beta = 2$:

$$E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \tag{2.22}$$

2.4 Définition de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire généralise la dérivée et l'intégrale d'ordre entier pour inclure l'ordre non entier (fractionnaire). Dans cette section nous reprenons les plus utilisées dans la littérature [12]. On trouve aussi les définitions de **Riemann Liouville**, **Caputo** et de **Grunwald-Letnikov** qui sont basées sur la définition usuelle de la dérivée d'ordre entier.

Pour mieux expliquer les trois définitions, considérons le schéma de la figure (2.1) suivante [9] :

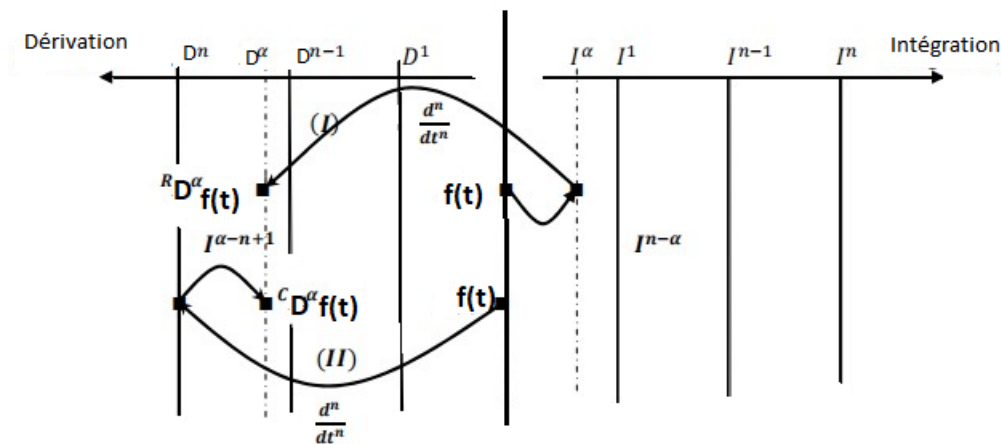


FIGURE 2.1 – Principe de généralisation de l'opération de dérivation à des ordres non entiers

Où

n : un entier positif.

f : une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty[$

La définition de **Riemann-Liouville** selon la figure ci-dessus obtenue par deux étapes :

- En intégrant la fonction à l'ordre non entier $n - \alpha$.
- En dérivant le résultat obtenu à l'ordre entier n .

La définition de **Caputo** est aussi obtenue par deux étapes selon la figure ci-dessus :

- En dérivant la fonction à l'ordre entier n .
- En intégrant le résultat obtenu à l'ordre non entier $\alpha - n + 1$.

2.4.1 Définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** est définie comme suit [12] :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(s) ds, & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} D_t^{\alpha-[\alpha]} f(t), & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.23)$$

ou encore :

$${}^{RL}D_{t_0}^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_t^{t_0} \frac{(s-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(s) ds, & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \alpha = 0 \\ (-1)^{[\alpha]} \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} {}_tD_{t_0}^{\alpha-[\alpha]} f(t), & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.24)$$

Où $[\alpha]$ est le nombre entier relatif immédiatement supérieure à α .

Remarquons si $\alpha \in \mathbb{Z}$, les dérivées de **Riemann-Liouville** (2.23) et (2.24) coïncident respectivement avec les dérivées d'ordre entier. En particulier si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \quad (2.25)$$

$${}^{RL}D_{t_0}^\alpha f(t) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \quad (2.26)$$

Le symbole ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ désigne la dérivée d'ordre non entier α par rapport à t de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de **Riemann-Liouville**. Cette définition est très utilisée dans la théorie du calcul fractionnaire en particulier dans les mathématiques pures.

2.4.2 Définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

La dérivée de **Riemann-Liouville** est souvent utilisée pour modéliser des phénomènes réels à l'aide des équations différentielles fractionnaires, mais elle présente certain incon-

véniants. Ces inconvénients peuvent inclure une complexité excessive ou des difficultés de manipulation mathématique. En réponse à cela, une alternative modifiée de dérivée fractionnaire est proposée, qui semble mieux adapté à la modélisation de tels phénomènes. Cette deuxième option pourrait être plus simple à utiliser, plus intuitive ou mieux adaptée aux caractéristiques spécifiques des phénomènes réels étudiés.

La dérivée de **Caputo** est donnée comme suit :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(s) ds, & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \alpha = 0 \\ {}_{t_0} D_t^{\alpha - [\alpha]} \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} f(t), & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.27)$$

Ou encore :

$${}^C D_{t_0}^\alpha f(t) = \begin{cases} \int_t^{t_0} \frac{(s-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(s) ds, & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \alpha = 0 \\ (-1)^{[\alpha]} {}_t D_{t_0}^{\alpha - [\alpha]} \frac{d^{[\alpha]}}{dt^{[\alpha]}} f(t), & \text{si } \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.28)$$

Où $[\alpha]$ est le nombre entier relatif immédiatement supérieure à α .

Lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, on constate que les dérivées de **Caputo** (2.27) et (2.28) coïncident respectivement avec les dérivées d'ordre entier. Aussi, pour $\alpha \leq 0$, les définitions de **Caputo** et de **Riemann-Liouville** sont identiques.

Remarque

1. La différence entre les définitions de **Riemann-Liouville** et de **Caputo** réside dans le fait que la dérivée non entière d'une constante au sens de **Riemann-Liouville**, dépend de la variable t , tandis que sa dérivée au sens de **Caputo** est nulle.
2. Le symbole ${}^C D_t^\alpha f(t)$ désigne la dérivée d'ordre non entier α par rapport à t de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de **Caputo**.

2.4.3 Définition de la dérivée fractionnaire de Grunwald-Letnikov

La définition de **Grunwald-Letnikov** est basée sur la généralisation de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'une fonction $f(t)$. Elle est obtenue en utilisant la définition entière usuelle [12].

Elle est définie comme suit :

$${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)}{h^\alpha} \quad (2.29)$$

$${}_t^{GL} D_{t_0}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t + jh)}{h^\alpha} \quad (2.30)$$

Où

h est le pas de discrétisation.

$\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de **Newton** généralisé à des ordres réels donné par :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)} \quad (2.31)$$

$\lfloor \frac{t-t_0}{k} \rfloor$: Désigne la partie entière immédiatement inférieure à $\frac{t-t_0}{k}$.

${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t)$ désigne la dérivée non entière (fractionnaire) α par rapport à t , de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de **Grunwald-Letnikov**.

La définition de **Grunwald-Letnikov** est la plus utilisée pour la simulation des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ainsi sous l'hypothèse d'un pas h suffisamment très petit, la dérivée fractionnaire de $f(t)$ à l'instant t peut être approximée comme suit :

$${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)}{h^\alpha} \quad (2.32)$$

$${}_t^{GL} D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t + jh)}{h^\alpha} \quad (2.33)$$

2.5 Propriétés principales de la dérivée d'ordre fractionnaire

Les propriétés d'ordre fractionnaire [1] :

— Selon la définition de **Riemann-Liouville**

1. La dérivée d'une constante au sens de **Riemann-Liouville** à un point t_0 n'est pas nulle.
2. Linéarité : La différentiation et l'intégration sont des opérations linéaires.

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha (\mu f(t) + \theta g(t)) = \mu {}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) + \theta {}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha g(t) \quad (2.34)$$

Où μ et θ sont deux réelles.

3. Pour $\alpha = 0$, l'opérateur ${}_{t_0}D_t^\alpha$ est l'opérateur d'identité, ainsi :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha = 1 \quad (2.35)$$

— Selon la définition de Caputo

1. La dérivée d'une constante β au sens de **Caputo** est nulle.

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha \beta = 0 \quad (2.36)$$

2. La dérivée au sens de **Riemann-Liouville** est égale à la dérivée au sens de **Caputo**.

— Selon la définition de Grunwald-Letnikov

1. La dérivée d'une constante β n'est pas nulle.

$${}_{t_0}^{GL}D_t^\alpha \beta \neq 0 \quad (2.37)$$

2.6 Avantages des systèmes d'ordre fractionnaire

- L'identification des systèmes dynamiques à l'aide des équations différentielles d'ordre fractionnaire suscite un intérêt croissant en raison de sa capacité à représenter fidèlement le comportement réel des systèmes surpassant ainsi l'utilisation traditionnelle des équations d'ordre entier .
- L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique, les réseaux de télécommunication, les systèmes hydrauliques, la mécanique des fluides, la polarisation électrode-électrolyte, montre que les tracés de Bode de ces systèmes sont caractérisés par un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre

fractionnaire [8].

- Les systèmes d'ordre fractionnaire sont particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (Champ, température ...).
- Un modèle fractionnaire constitue un outil mathématique très intéressant pour décrire le comportement dynamique d'un système physique et certaines propriétés physiques [12].

2.7 Domaines d'application des systèmes d'ordre fractionnaire

Les différents domaines d'application des systèmes d'ordre fractionnaire sont [8] :

En Automatique

La première idée a été introduite par **Bode** qui a proposé un asservissement avec une fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme d'un intégrateur d'ordre fractionnaire. **Oustalop** a aussi introduit le contrôleur **CRONE** (Commande **R**obuste d'**O**rdre **N**on **E**ntier) et en 1999 **Podlubny** a proposé le régulateur **PID** fractionnaire qui est une généralisation du **PID** classique pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire .

En Électricité

En 1971, **Schmidt** et **Drumheller** ont basé dans leur travail sur des données expérimentales , ils ont montré que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension appliquée aux bornes de ce condensateurs. Dans leur résultats , une impédance sous forme de puissance $\frac{1}{2}$ de la variable de Laplace a été identifiée et appelée « **Fractor** » ou condensateur fractionnaire.

En Mécanique

Quelques matériaux tels que les polymères (gommes, caoutchouc) , présentent un comportement intermédiaire entre caractéristique élastique et visqueux , sont qualifiés de viscoélastique. De tels systèmes peuvent être modéliser à l'aide des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

En Thermique

L'exemple le plus simple des systèmes d'ordre fractionnaire est l'équation de la chaleur. L'identification d'un système de diffusion chaleur a montré que l'équation de la chaleur est modélisée en utilisant une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ fractionnaire.

En Traitement d'image

Au traitement d'image, l'utilisation des dérivées d'ordre fractionnaire a fait l'objet du travail de **Matieu**. En 2000 dans le domaine de la bio-médecine, dans la même année une application dans le domaine d'optique et en 2003, dans le domaine de géophysique.

2.8 Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire

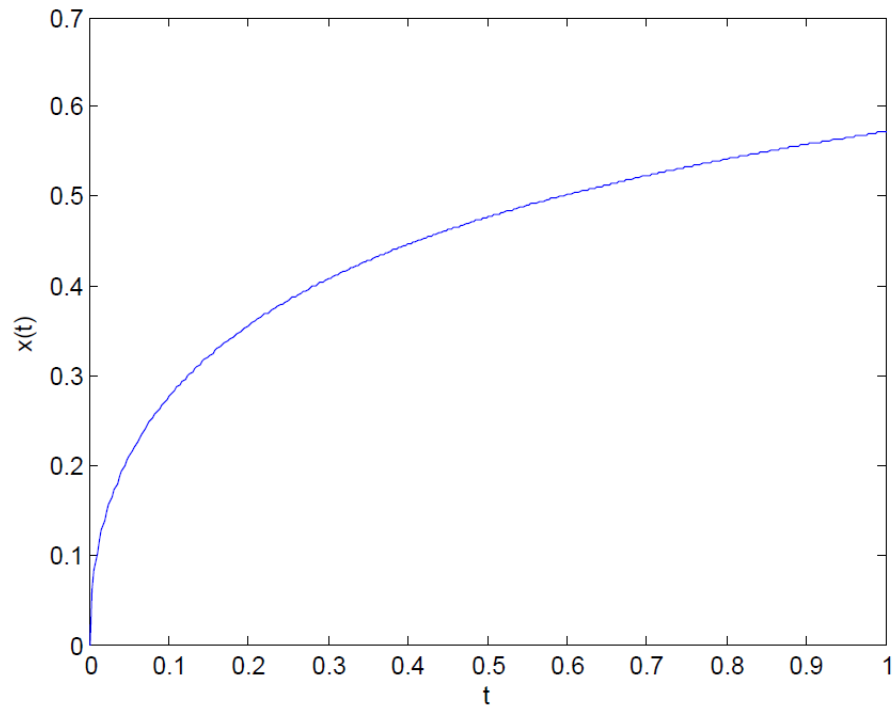
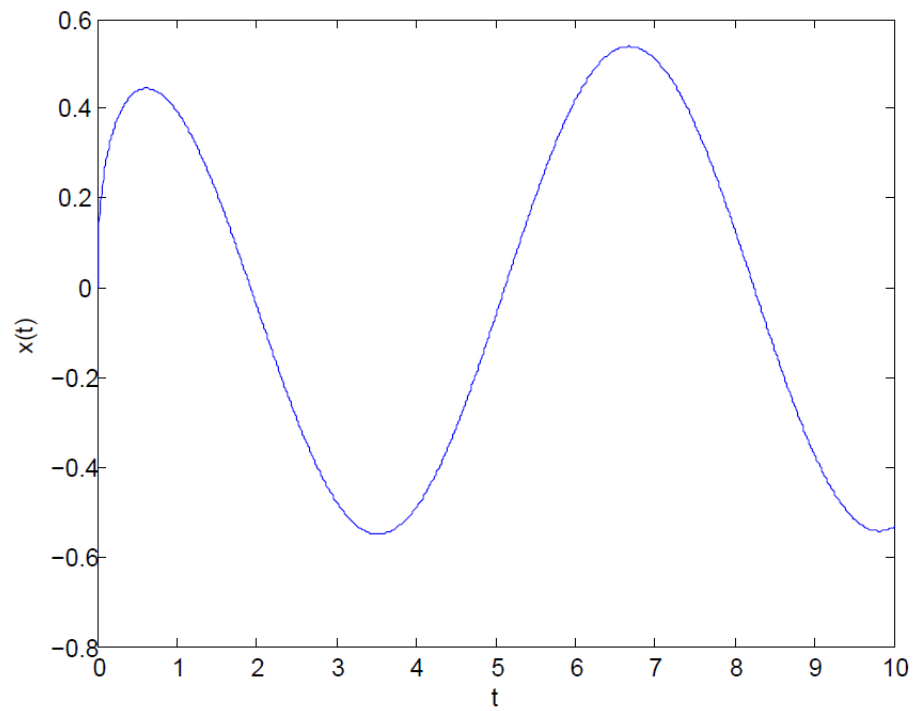
La simulation d'un système d'ordre fractionnaire consiste à résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire décrivant la dynamique de ce système. De point de vue mathématique, la simulation consiste à déterminer les solutions des équations différentielles à partir des conditions initiales supposées connues[1].

Exemple de simulation d'un modèle d'ordre fractionnaire Soit un système linéaire d'ordre fractionnaire décrit par le modèle d'ordre fractionnaire suivant :

$$D^\alpha x(t) = -x(t) + u(t) \quad (2.38)$$

Pour la simulation de l'équation (2.38) on remplace $D^\alpha x(t)$ par la définition de **Grunwald-Letnikov** (2.32) et en simplifiant l'équation on obtient l'expression de la solution $x(t)$. Sur Matlab, on peut directement résoudre l'équation (2.38) en utilisant la fonction **"fde"**.

Les résultats de simulation du système d'ordre fractionnaire de l'équation (2.38) pour les différentes valeurs de α et $u(t)$ sont représentés par les figures ci-dessous :

FIGURE 2.2 – Allure de $x(t)$ pour $\alpha = 0.5$ et $u(t) = 1$ FIGURE 2.3 – Allure de $x(t)$ pour $\alpha = 0.5$ et $u(t) = \sin(t)$

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base relatives au calcul des systèmes d'ordre fractionnaire. Nous avons entamé par la définition de ces systèmes, puis nous avons abordé quelques outils mathématiques essentiels. Pour introduire les dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire, nous avons commencé par la représentation des fonctions utiles telles que la fonction **Gamma d'Euler**. Ensuite, nous avons exposé les trois approches de dérivation fractionnaire : l'approche de **Riemann-Liouville**, celle de **Caputo** et celle de **Grunwald-Letnikov**. La suite du chapitre est consacrée aux avantages des systèmes d'ordre fractionnaire et à leurs domaines d'application. Enfin, pour conclure ce chapitre, nous avons montré comment simulé un modèle d'état d'ordre fractionnaire sur Matlab en utilisant la fonction "**fde**".

Dans le chapitre suivant, nous abordons la résolution d'un problème de commande optimale en utilisant une méthode d'optimisation stochastique basée sur les algorithmes génétiques.

Chapitre 3

Application des algorithmes génétiques pour la résolution d'un problème de commande optimale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous concentrons sur la synthèse d'un retour d'état optimal pour des systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant les algorithmes génétiques. Nous commencerons par une définition aux principes fondamentaux des algorithmes génétiques et à leur fonctionnement. Ensuite, on va définir la commande par retour d'état et nous détaillerons les étapes à suivre pour la synthèse d'un retour d'état optimale pour les systèmes d'ordre fractionnaire. Enfin, nous illustrerons notre démarche par des exemples pratiques et discuterons des résultats obtenus.

3.2 Définition des algorithmes génétique

Les algorithmes génétiques (AGs) sont basés sur une analogie avec le phénomène de l'évolution et de la sélection naturelle. Le pionnier dans ce domaine est **John Holland**, qui a été le premier à tenter d'implémenter artificiellement des systèmes évolutifs basés sur le processus de la sélection naturelle. Par la suite, ces méthodes sont évoluées vers des algorithmes robustes d'optimisation [5].

3.2.1 Vocabulaire

- **Gène** : est défini comme une unité d'information génétique. Plus spécifiquement, dans le contexte des AGs un gène fait référence à une séquence de symboles qui codent la valeur d'une variable. En général, un gène correspond à un seul symbole, tel que (0 ou 1) dans le cas de la représentation binaire.
- **Génotype** : Correspond à l'ensemble des valeurs des gènes.
- **Individu** : Il représente le codage d'une solution potentielle, c'est-à-dire un élément de l'espace de recherche.
- **Chromosome** : Un chromosome est constitué de gènes, et l'ensemble des chromosomes d'un individu regroupe l'intégralité de son patrimoine génétique. Généralement, dans un algorithme génétique, un chromosome est utilisé par individu.
- **Phénotype** : Dans la nature le phénotype est le résultat de comment votre ADN réagit avec le monde autour de vous. Dans les algorithmes génétiques, les structures décodées représentent simplement une solution ou un point dans l'espace des solutions, souvent appelé espace phénotypique.
- **Population** : La population est un ensemble fini (de taille n) d'individus.
- **Génération** : Correspond à l'itération, mais ce terme signifie parfois la population en une itération.

3.2.2 Principe de fonctionnement des algorithmes génétiques

Soit le problème d'optimisation noté (**P**) suivant :

$$\min_x f(x) \text{ (ou } \max_x f(x)) \quad (3.1)$$

Où

$$f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Le principe de fonctionnement des algorithmes génétiques est résumé par la figure suivante :

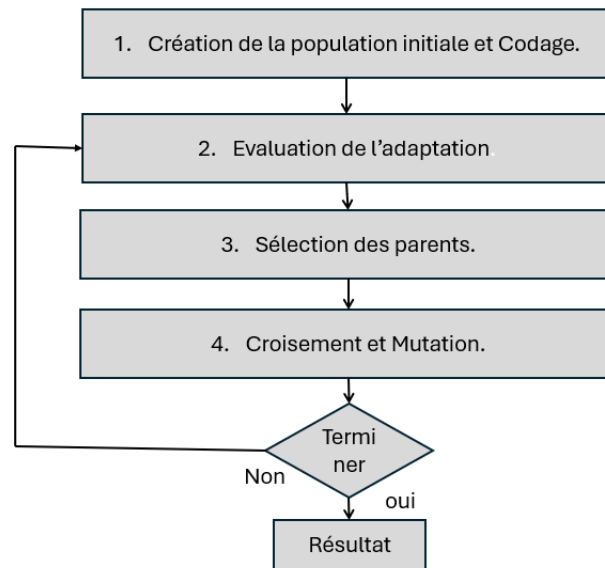


FIGURE 3.1 – Organigramme d'un algorithme génétique

3.2.2.1 Création de la population initiale et codage

Si on n'a aucune idée de la solution du problème, la population (ensembles d'individus) est générée aléatoirement. Sinon, on crée des individus qui représentent les solutions dont on dispose. Mais le principal problème est de choisir la taille m de la population. Les biologistes ont introduit le concept de diversité requise pour représenter le fait que pour survivre, une espèce doit être suffisamment hétérogène. Par ailleurs, une population trop grande augmente le temps de calcul. Il faut donc trouver le bon compromis.

Un algorithme génétique ne travaille pas avec la variable x de la population, mais par le code attribué à cette variable (variable codée). Chaque variable de décision est codée sous forme d'une chaîne de symboles appelé **chromosome** (chaîne de bit), la taille de ce dernier est la même pour toutes les variables de la population. Les éléments du chromosome sont choisis à partir d'un ensemble de symboles appelé alphabet. Un choix typique de l'alphabet est l'ensemble des éléments binaire, c'est-à-dire 0 et 1. Dans ce cas un chromosome est une chaîne de caractère composée des 1 et 0.

3.2.2.2 Sélection des parents

On choisit les individus (les parents) sur lesquels vont s'appliquer les opérations de reproduction (Croisement, Mutation) pour la création de la future génération (enfants), on doit faire l'accouplement des meilleurs individus. Chaque individu aura donc une chance proportionnelle à son adaptation de devenir parent. Ainsi, on choisit un nombre $\alpha \in [0, 1]$, puis pour

chaque individu x^i de la population on calcule la quantité suivante :

$$P_i = \frac{f(x^i)}{\sum_{j=1}^m f(x^j)} \quad (3.2)$$

Si $P_i \succ \alpha$, sélectionner x^i . A partir des éléments sélectionnées, on forme une nouvelle population dont la taille est la même que celle de la population initiale M .

Où P_i la probabilité pour qu'un individu x^i de valeur d'adaptation ou fitness $f(x^i)$ soit sélectionné.

Remarque 3.1 La sélection des parents peut être mis en œuvre sous forme algorithmique de différentes méthodes :

1. Soit des méthodes déterministes : Ces méthodes impliquent des hypothèses supplémentaires sur la fonction $f(x)$ à optimiser, telle que $f(x)$ soit continue, dérivable et uni-modale (concave ou convexe). Malheureusement, en pratique il est très difficile de savoir si la fonction objectif $f(x)$ satisfait ou non à telles conditions, de plus la plupart des fonctions sont multimodales (plusieurs maximums et minimums), discontinues et non dérivable (méthodes étudiées jusqu'à maintenant).
2. Soit des méthodes stochastiques (aléatoire) : ce qui signifie que la procédure de minimisation dépend en partie d'évènements probabilistes. L'inconvénient majeur de ces méthodes est qu'on ne peut garantir leur convergence que de manière asymptotique. En utilise dans ces méthodes les techniques stochastiques telles que la roulette biaisée.

3.2.2.3 Opérateurs génétique

3.2.2.3.1 Croisement (Crossover) L'idée de croisement est de créer des enfants (nouveaux individus ou chromosomes). On associé donc aléatoirement des individus de la population deux à deux afin de former des couples. Chaque couple va donner naissance à deux enfants comportant chacun des séquences chromosomiques (ou des gènes) de chaque parent. Ce phénomène, passent dans la nature, est appelé Crossover. Il s'agit d'un phénomène essentiel qui permet d'explorer l'ensemble des solutions possibles.

Il existe différentes types de croisement [13] :

3.2.2.3.1.1 Croisement selon un point Déterminer aléatoirement un point de coupure et échange la deuxième partie des deux parentes.

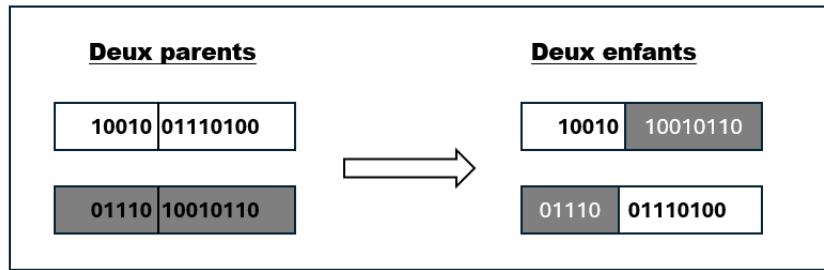


FIGURE 3.2 – Croisement selon un point

3.2.2.3.1.2 Croisement selon deux point Possède deux points de coupure qui sont déterminés aléatoirement.

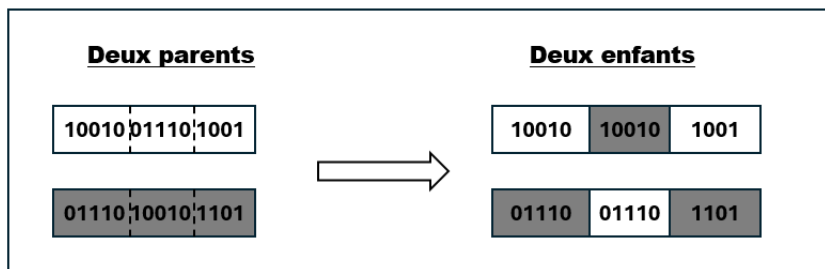


FIGURE 3.3 – Croisement selon deux point

3.2.2.3.1.3 Croisement uniforme Échange chaque bit avec une probabilité fixe à 0.5.

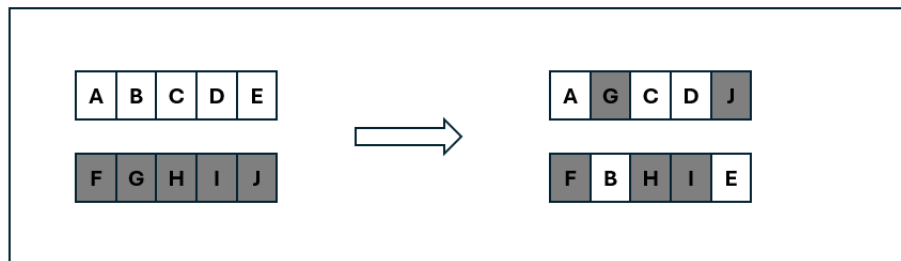


FIGURE 3.4 – Croisement uniforme

3.2.2.3.2 Mutation La mutation est celle appliquée à des chromosomes codés en binaire. Les mutations sont des modifications aléatoires du génome. Il est évident qu'il ne faut pas muter tous les gènes d'un individu, sinon il serait complètement déterminé aléatoirement.

Il faut juste modifier une petite partie, dans le but d'introduire une chose de nouveau à l'individu.

Si la valeur du bit est égale à 0 alors elle sera remplacée par 1 et si elle est égale à 1 alors elle sera remplacée par 0.

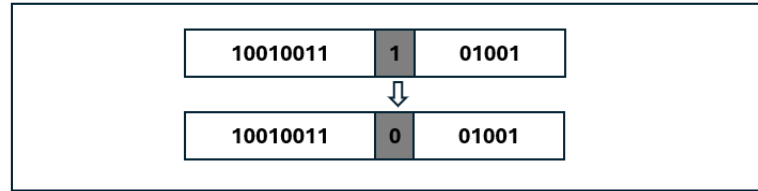


FIGURE 3.5 – Une mutation

Remarque 3.2 La mutation est considérée comme moins importante que le croisement génétique, avec une probabilité généralement faible autour de 0.001.

3.2.2.4 Sélection des survivants

Cette étape consiste à ne garder que les solutions les plus intéressantes. On choisit en général de conserver la taille de la population d'une génération à l'autre, il y aura donc autant de morts que de nouveau-nés. Parfois, on choisit de garder seulement les enfants. Cela assure la diversité requise et l'évolution de la population.

3.2.2.5 Critère d'arrêt

Les étapes d'évaluation reproduction /sélection sont appliquées d'une manière itérative sur la population , jusqu'à satisfaction d'une condition Fin cette condition est soit un nombre maximum de générations, soit une valeur de fitness minimale, soit une convergence vers la meilleure solution [13].

Remarque 3.3

1. La taille de la population joue un rôle très important dans l'emploi des AGs comme procédures d'optimisation. Si la taille est petite, cela implique une exécution rapide et une convergence incertaine. Si la taille est importante, le problème du temps de calcul apparaît.
2. Chaque itération appelée une génération. Le nombre de génération peut varier de 50 à 500.

3.2.2.6 Exemple d'optimisation à l'aide des algorithmes génétiques

Considérons le problème de maximisation suivant :

$$\max_x f(x) = x^2 \quad (3.3)$$

sujet à :

$$1 \leq x \leq 31 \quad (3.4)$$

3.2.2.6.1 Codage de problème Chaque individu représentera une valeur pour x . Son génotype sera la valeur de x exprimée en binaire, alors il suffit de 5 bits, car 31 se note 11111.

3.2.2.6.2 Population initiale On choisit ici une population de 4 individus. On détermine la population initiale en tirant au hasard la valeur de chaque allèle. Supposons que l'on obtienne les individus suivants :

Numéro de l'individu	Génotype	Phénotype
1	01101	13
2	11000	24
3	01000	8
4	10011	19

TABLE 3.1 – La population initiale

3.2.2.6.3 Évaluation de l'adaptation Dans ce cas la fonction d'adaptation (objectif) est simple : il s'agit de la fonction $f(x) = x^2$. Ainsi pour calculer l'adaptation du premier individu, il suffit de calculer le carré de 13. On obtient ainsi :

Numéro de l'individu	Génotype	Phénotype	Adaptation	$P_i(\alpha = 0.1)$
1	01101	13	169	0.1444
2	11000	24	576	0.4923
3	01000	8	64	0.0547
4	10011	19	361	0.3085

TABLE 3.2 – La population initiale après l'évaluation de l'adaptation

3.2.2.6.4 Sélection des parents Il suffit de tirer au hasard 4 individus parmi la population en tenant compte de leurs adaptations respectives. On obtient, ainsi, une nouvelle population comprenant par exemple :

- Une copie de l'individu 1.

- Une copie de l'individu 4.
- Deux copies de l'individu 2.
- Aucune copie de l'individu 3.

C'est-à-dire :

Numéro de l'individu	Génotype	Phénotype	Adaptation
1	01101	13	169
2	11000	24	576
3	11000	24	576
4	10011	19	361

TABLE 3.3 – Résultat de sélection

3.2.2.6.5 Recombinaison On choisit ici, pour le croisement de déterminer au hasard les deux 2 parents, et de couper les chromosomes au hasard : la première partie du chromosome ira au premier descendant, alors que la second ira à l'autre. Supposons que l'individu 1 se recombine avec l'individu 2 et l'individu 3 avec l'individu 4. (On note || la cassure).

Numéro de l'individu	Avant	Après
1	011 01	0110 0
2	110 00	1100 1
2	110 00	1101 1
4	100 11	1000 0

TABLE 3.4 – Résultat de l'application de l'opérateur de croisement

3.2.2.6.6 Seconde génération Dans cet exemple, on choisit de limiter la durée de vie de chaque individu à une génération. La nouvelle génération sera donc composée exclusivement des enfants :

Numéro de l'individu	Génotype	Phénotype	Adaptation	$P_i(\alpha = 0.1)$
1	01100	12	144	0.0821
2	11001	25	625	0.3563
3	11011	27	729	0.4156
4	10000	16	256	0.1459

TABLE 3.5 – La nouvelle population après application des différents opérateurs

Si on calcule la moyenne des valeurs d'adaptation, on choisit 293 pour la génération initiale, contre 439 pour la seconde. On se reproche bien de la solution. Si on réitère le processus, on obtiendra des valeurs de plus en plus grandes jusqu'à l'obtention de la solution.

3.2.2.7 Avantages et inconvénients des algorithmes génétiques

On peut citer plusieurs avantages et plusieurs inconvénients des algorithmes génétiques [13] :

- Élimination de solutions non valides.
- Permet de traiter des espaces de recherche importants (beaucoup de solutions , pas de parcourt exhaustif envisagé).
- Nombre de solutions important.
- Relativité de la qualité de la solution selon le degré de précision demandé.

Inconvénients

- Nécessitent plus de calculs que les autres algorithmes méta heuristiques (notamment la fonction évaluation).
- Paramètres difficiles à fixer (taille de la population , % mutation).
- Choix de la fonction d'évaluation délicat.

3.3 Commande par retour d'état

La commande par retour d'état, inventée à la suite de la représentation d'état, utilise tous les états du système à travers un régulateur proportionnel. En supposant que l'état est entièrement mesurable et commandable, le régulateur par retour d'état est illustré par le schéma de la Figure (3.6). Contrairement au contrôle classique, la commande appliquée au système dépend de la dynamique de toutes les variables et non d'une seule. Cela permettra par un régulateur simple de régler toutes les dynamiques [10] .

La figure (3.6) présente une représentation schématique de ce concept :

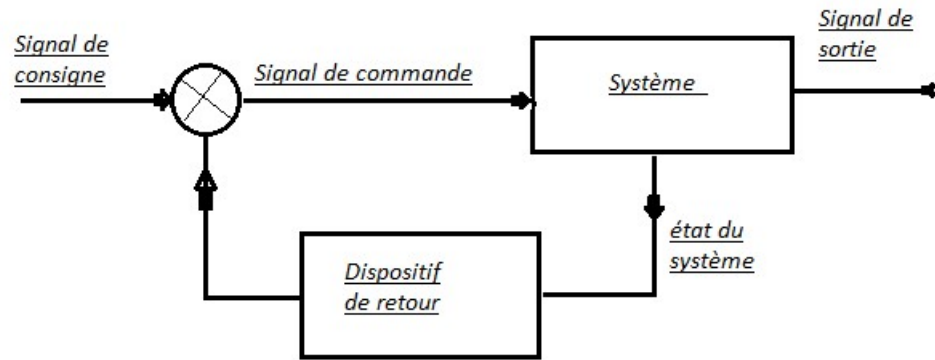


FIGURE 3.6 – Principe de retour d'état

Le retour d'état est la moyen le plus classique d'envisager la commande d'un système modélisé par une représentation d'état. Il suppose que toutes les composantes $x_i(t)$ du vecteur d'état $x(t)$ sont accessibles à la mesure. Une loi de la commande possible est alors une commande linéaire du type :

$$u(t) = Kx(t) \quad (3.5)$$

Où

$K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ est appelée le gain du retour d'état.

3.4 Synthèse d'un retour d'état optimal d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les algorithmes génétiques

Soit le problème de commande optimale d'ordre fractionnaire décrit sous la forme suivante :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad (3.6)$$

sojet à :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.7)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.8)$$

$$x(t_f) = \text{fixe ou libre.} \quad (3.9)$$

Où

D^α : est l'ordre de la dérivée d'ordre fractionnaire.

Pour résoudre ce problème de commande optimale d'ordre fractionnaire, nous proposons de suivre les étapes suivantes :

Étape 1

Nous supposons que la commande est un retour d'état écrit par cette forme :

$$u(t) = Kx(t) + Lx^d(t) \quad (3.10)$$

Où

K et L : Sont des coefficients à déterminer (matrices dans le cas de plusieurs états).

$x(t)$: est le vecteur d'état.

$x^d(t)$: est la consigne désiré.

Ainsi, le problème de détermination de la commande optimale $u(t)$ revient à déterminer les coefficients K et L .

Étape 2

On va remplacer la commande $u(t)$ par son expression (3.10) dans l'équation de modèle (3.7) :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t), Kx(t) + Lx^d(t), t) \quad (3.11)$$

Puis on va résoudre l'équation de modèle (3.11) en utilisant la fonction Matlab '**fde**' qui

nous permet d'obtenir la solution $x(t)$ en fonction de K et L . L'expression de la solution $x(t)$ prend la forme suivante :

$$x(t) = F(K, L) \quad (3.12)$$

Où :

F est une fonction mathématique .

Étape 3

On remplace l'expression de $x(t)$ (3.12) et l'expression de la commande $u(t)$ (3.10) dans l'équation du critère (3.6) .

On aura :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(F(K, L), Kx(t) + Lx^d(t), t)dt \quad (3.13)$$

Étape 4

L'évaluation de la partie intégrale dans (3.13), donne l'expression de J comme suit :

$$J = G(K, L) \quad (3.14)$$

On voit bien que le problème de commande optimale donné par les équations (3.6) jusqu'à (3.9) est transformé à un problème d'optimisation (3.14).

Étape 5

Résoudre le problème d'optimisation obtenu dans l'étape 4. Dans ce travail, pour la résolution du problème d'optimisation, nous allons utilisés les AGs.

3.5 Exemples de synthèse d'un retour d'état optimal d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant les algorithmes génétiques

Exemple 1

On considère le problème de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire donné

comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 (x(t) - x^d(t))^2 + u^2(t) dt \quad (3.15)$$

Sujet à :

$$D^\alpha x(t) = -2x^2(t) + u(t) \quad (3.16)$$

$$x(0) = 1 \quad (3.17)$$

Les objectifs visés en minimisant le critère $J(u(t))$ sont la poursuite et l'énergie minimale.

Pour la résolution de ce problème de commande optimale d'ordre fractionnaire, on va utiliser les étapes précédentes.

1. $u(t)$ est une commande par retour d'état son expression :

$$u(t) = Kx(t) + Lx^d(t) \quad (3.18)$$

Où

$u(t)$ est la commande.

K et L deux matrices à déterminer.

2. On remplace l'équation (3.18) dans l'expression du modèle (3.16) on obtient l'équation du modèle :

$$D^\alpha x(t) = -2x^2(t) + (Kx(t) + Lx^d(t)) \quad (3.19)$$

Puis on résout l'équation (3.19) en utilisant la fonction Matlab '**fde**' qui nous permet d'obtenir la solution $x(t)$ en fonction de K et L :

$$x(t) = F(K, L) \quad (3.20)$$

3. On remplace l'expression de $u(t)$ et $x(t)$ dans le critère et pour : $x^d = 0.4$ on obtient :

$$J = \int_0^1 (F(K, L) - 0.4)^2 + (K(F(K, L) + Lx^d(t)))^2 dt \quad (3.21)$$

4. On va évaluer la partie intégrale dans l'expression du critère J (3.21), nous aurons la fonction à minimiser dont les variables de décision sont K et L :

$$J = G(K, L) \quad (3.22)$$

Ainsi le problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{K,L} J = G(K, L) \quad (3.23)$$

5. On résoud le problème d'optimisation obtenu dans (3.23) par les algorithmes génétiques.

On a pour $\alpha = 0.3$, les résultats du simulation donnent les valeurs optimales suivantes : $K = 0.1904$ et $L = -0.3331$.

Les évolutions de la commande $u(t)$ et de l'état $x(t)$ pour $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.9$ avec $x^d = 0.4$ et en prenant $x(0) = 1$ sont présentées par les figures suivantes :

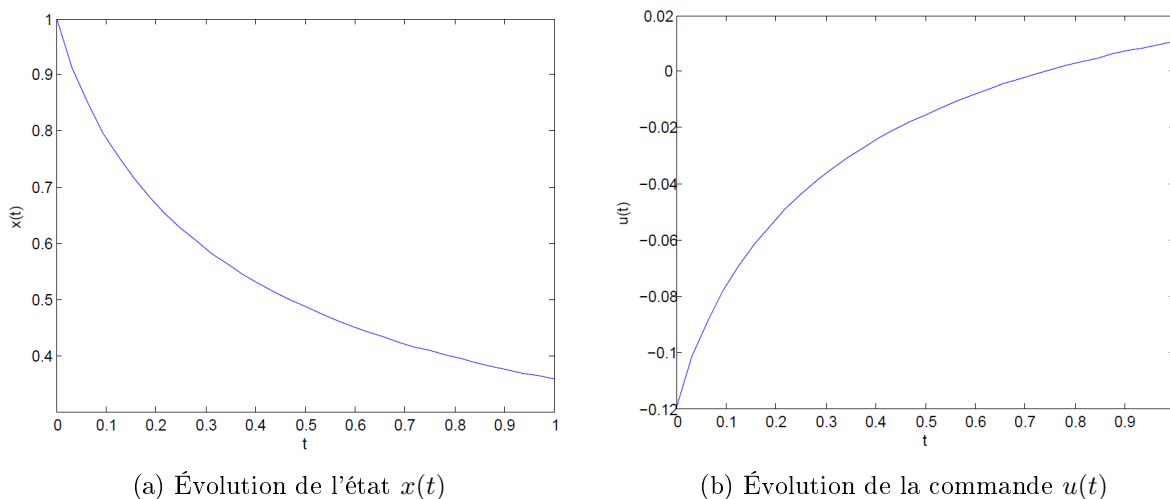


FIGURE 3.7 – Résultats de simulation de l'exemple 1 pour $\alpha = 0.9$

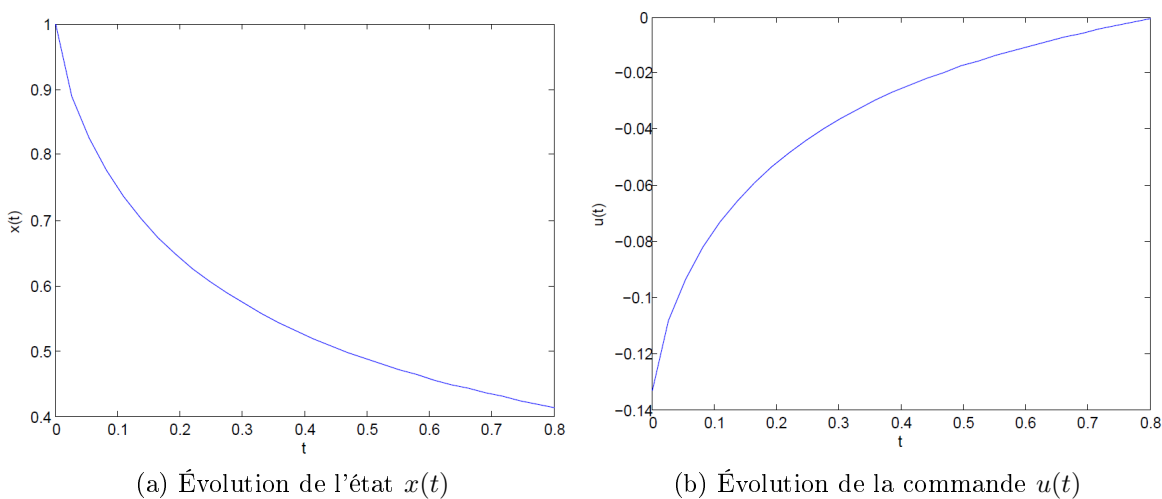
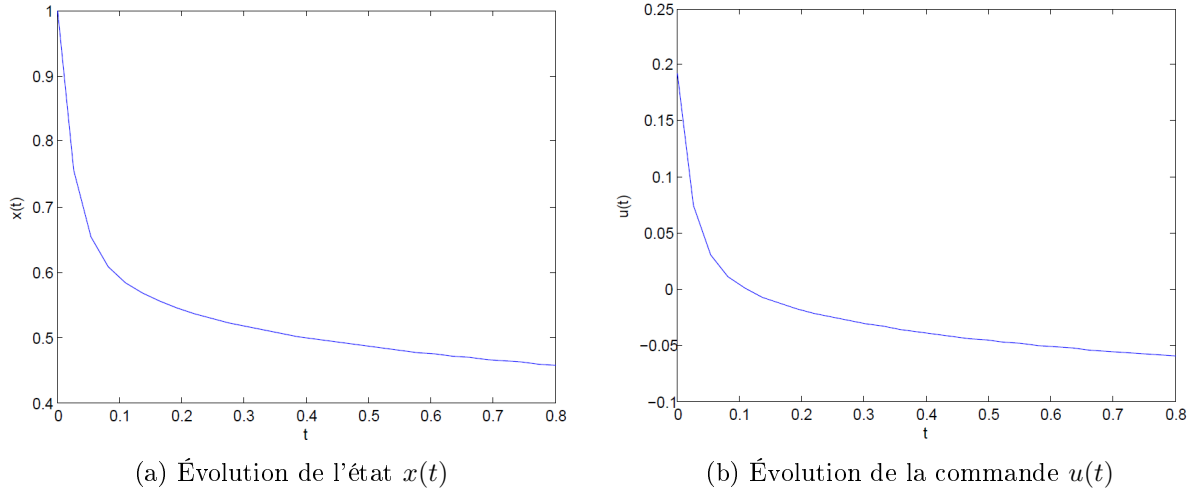


FIGURE 3.8 – Résultat de simulation de l'exemple 1 pour $\alpha = 0.8$

FIGURE 3.9 – Résultat de simulation de l'exemple 1 pour $\alpha = 0.3$

D'après les résultats de simulation présentés par les figures précédentes (3.7),(3.8) et(3.9), nous constatons que l'état $x(t)$ est réalisée. Même en modifiant la valeur de paramètre α le système tend vers la valeur désirée $x^d = 0.4$. L'objectif de la poursuite est réalisé.

Exemple 2

Considérons le problème de commande optimale :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^3 x^2(t) + u^2(t) dt \quad (3.24)$$

Sujet à :

$$D^\alpha x(t) = -x(t) + u(t) \quad (3.25)$$

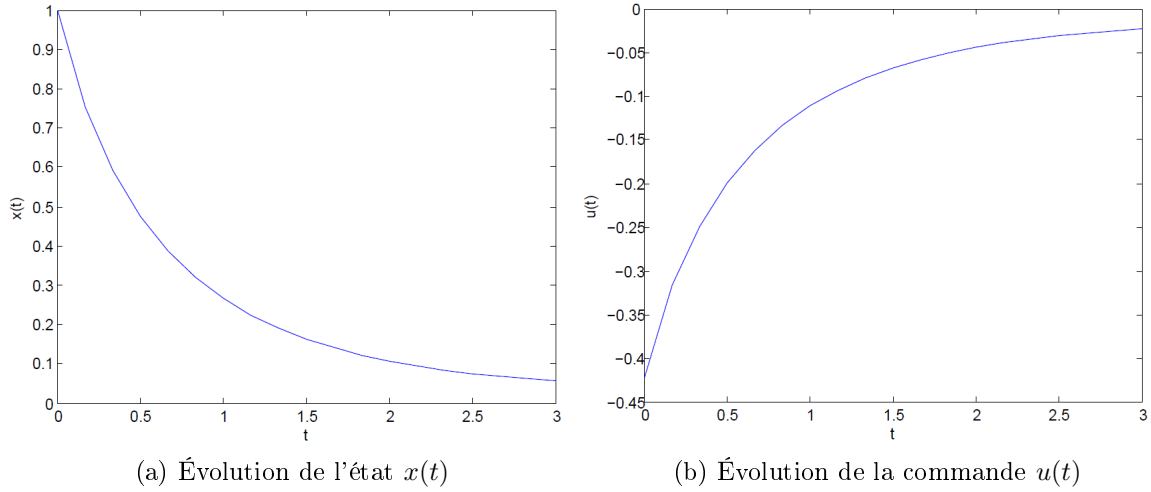
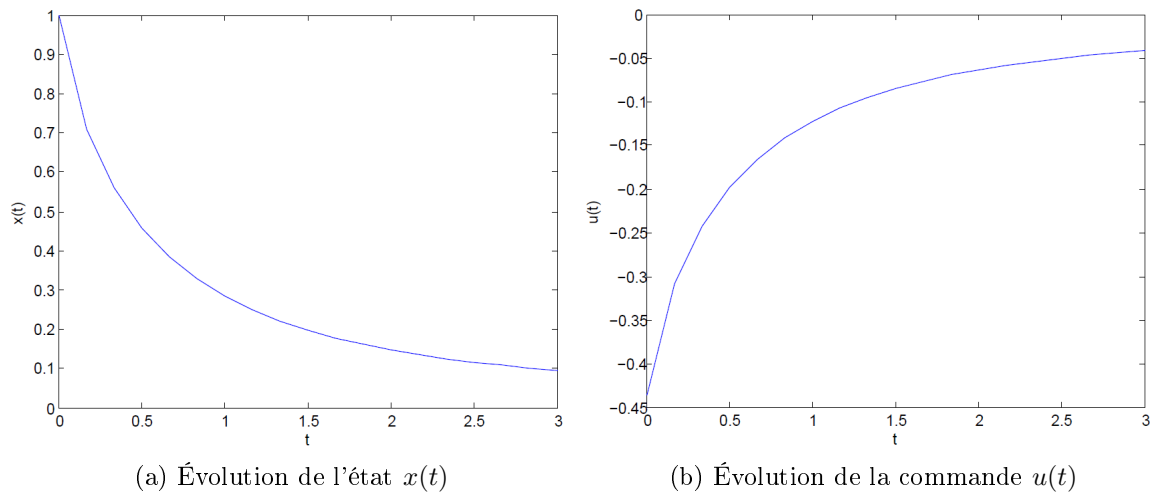
$$x(0) = 1 \quad (3.26)$$

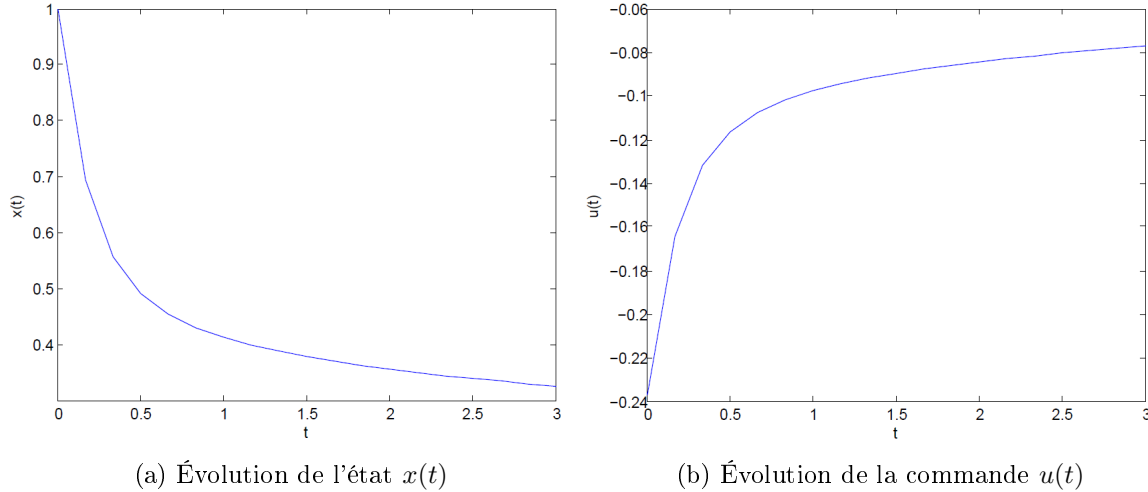
Les objectifs visés en minimisant le critère $J(u(t))$ sont : la régulation et l'énergie minimale.

La commande est sous la forme :

$$u(t) = Kx(t) \quad (3.27)$$

La solution de ce problème, en utilisant les même étapes expliquées précédemment conduit aux résultats de simulation présentés par les figures suivantes :

FIGURE 3.10 – Résultat de simulation de l'exemple 2 pour $\alpha = 0.9$ FIGURE 3.11 – Résultat de simulation de l'exemple 2 pour $\alpha = 0.8$

FIGURE 3.12 – Résultat de simulation de l'exemple 2 pour $\alpha = 0.3$

D'après les résultats de simulation présentés par les figures précédentes (3.10) ,(3.11) et (3.12) , nous constatons que l'objectif de la régulation est réalisé.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement décrit le principe des algorithmes génétiques, qui permettent de résoudre la majorité des problèmes d'optimisation grâce à un formalisme simple. Puis nous sommes concentrés sur leur principe de fonctionnement, que nous avons illustré par un exemple. Ensuite, nous avons abordé la commande par retour d'état et les étapes à suivre pour résoudre un problème de commande par retour d'état optimal pour un système d'ordre fractionnaire en utilisant les algorithmes génétiques.

A la fin nous avons illustré l'intérêt de cette approche à l'aide des exemples d'application.

Conclusion générale

Le travail réalisé dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la résolution d'un problème de commande optimale pour un système d'ordre fractionnaire. L'objectif est d'appliquer des algorithmes génétiques pour la synthèse d'un retour d'état optimal pour un système d'ordre fractionnaire.

En premier, nous avons présenté les principales étapes de la formulation d'un problème de commande optimale, en définissant l'ensemble des éléments qui le constituent et en les expliquant à l'aide d'un exemple. Puis, trois méthodes de résolution d'un problème de commande optimale ont été exposées : la méthode du calcul des variations, le principe du minimum, et la commande linéaire quadratique, chacune illustrée par un exemple. Ensuite, nous avons présenté des notions de base relatives aux systèmes d'ordre fractionnaire, qui nous semblent utiles pour la compréhension de notre travail. Ainsi, nous avons donné les définitions les plus utilisées de l'opérateur fractionnaire, nous avons décrit la représentation des systèmes d'ordre fractionnaire et nous avons exposé leurs propriétés d'analyse en vue de leur simulation. Enfin nous avons donné des notions de base sur les algorithmes génétiques et la commande par retour d'état, nous avons détaillé les étapes à suivre pour la synthèse d'un retour d'état d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant des algorithmes génétiques.

L'objectif de ce travail est la résolution d'un problème de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire, en le transformant à un problème d'optimisation. L'idée est de supposer que la commande est sous forme d'un retour d'état, puis en remplaçant l'expression de la commande dans l'équation du modèle et dans l'équation du critère, et en résolvant l'équation du modèle. Ensuite, en substituant l'expression de l'état $x(t)$ dans le critère le problème de commande optimale devient un problème d'optimisation qu'on a résolu avec des algorithmes génétiques. L'intérêt et la justesse de cette approche est démontré à l'aide des résultats de simulation obtenus.

Bibliographie

- [1] S.AHMEDI et L.BABOUCHE. *Résolution d'un problème de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode d'approximation de Laplace*. mémoire de Fin d'Étude, Département d'automatique, Université de Tizi-Ouzou, 2023.
- [2] J.Baptiste et H.Urruty. *Les mathématiques du mieux faire, volume 2 : La commande optimale pour les débutants*, Édition Ellipses, Paris, 2008.
- [3] A.BEN MESSAOUD et S.TELMOUDI. *Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles extrêmes d'ordre entier*. Université de Tunis El Manar, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, LR11ES20 Laboratoire d'Analyse, de Conception et de Commande des Systèmes (LACS) 1002, Tunis . Vol.14.pp 134 -140, 2019.
- [4] Blondel.V, Gevers.M and Lindquist. A. *Survey on the state of systems and control*. European Journal of Control, vol.1,1(1995), p.5-23, 1995.
- [5] Charlent FLEURENT et Jacques A. Ferland. *Algorithmes génétiques Hybrides pour l'optimisation combinatoire (*)*. PAIRO, recherche opérationnelle, Tome 30 ,n^o 04, 1996.
- [6] A.CHERIFI et A.NAMOUS. *Commande Optimale de Suspensions Automobiles en vue du Contrôle des Dynamiques Verticales de Châssis*. Mémoire de Fin d'Études, Université de Dr.Tahar Moulay-Saida, 2021.
- [7] H.Delavari, A.N.Ranjbar, R. Ghaderi and S.Momani. *Fractional order control*. Journal of Nonlinear Dynamics, Vol.61,pp. 383-397, 2010.
- [8] S.ELARBI RABAH. *Réglage optimal de la commande PID fractionnaire par PSO*. Projet de Fin d'Étude, Université SAAD DAHLEB-Blida1 , 2021/2022.
- [9] M.ELDJAALA et S.HADJ MOHAND. *Identification des systèmes d'ordre fractionnaire*. Mémoire de Fin d'Étude de Master ACADÉMIQUE, Département Automatique, Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2014.
- [10] A.GUERBAZI. *Cours Énergie Renouvelable*. Département de Génie Électrique, Université de Mohamed Khider-Biskra, 2019/2020 .

- [11] B.HERISSI. *Identification et commande des systèmes bases sur les équations d'ordre fractionnaire*. Thèse de doctorat, Département électronique et télécommunications, Université 8 Mai 1945 GURLMA, 2020/2021.
- [12] G.IDIRI. *Développement de méthodes de résolution de problème de contrôle optimale des systèmes d'ordre fractionnaire*. Thèse de doctorat, Département Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2017.
- [13] N.KHELOUI et N.LEKRIM. *Optimisation d'un contrôleur flou par les algorithmes génétiques*. Mémoire de Fin d'Études, Département d'Automatique , Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2016 .
- [14] E.Larouche. *Commande optimale*. Ecole Natoinal superieur de physique. Edition Starsbourg, 2009.
- [15] A.MAIDI. *Cours de Commande optimale*. Département Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2015/2016.
- [16] Min-Sang Seong , Seung-Bok Choi and Kum-Gil Sung. *Control Strategies For Vehicle Suspension System Featuring Magnetorheological (MR) Damper*. Chapitre dans le livre. *Vibration Analysis and Control*. New Trends and Developments, *Francisco Beltran-Carbajal*, 2011.
- [17] I.Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic press, 1999.
- [18] A.TAIEB. *Étude Analytique des équations différentielles fractionnaires et applications*. Thèse de Doctorat, Département de Mathématiques-Informatique, Université ABDELHAMID BEN BADIS MASTAGANEM, 2015/2016.
- [19] C.TEBBICHE et M.TOUBOUACHE. *Résolution d'un Problème de Commande Optimale en Utilisant l'Identité de Beltrami : Application au Remplissage d'un Bac de Stockage*. Mémoire de Fin d'Étude de Master ACADÉMIQUE, Département d'Automatique , Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2016.
- [20] D.YOUSFI et J.BERKHOU. *Résolution d'un problème de commande optimale par la méthode de tir*. Mémoire de fin d'étude, Département Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2016.

Résumé :

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier l'une des méthodes d'optimisation globale dans une stratégie de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire. L'objectif du travail ;consiste à appliquer des algorithmes génétiques pour la synthèse d'un retour d'état optimal pour un système d'ordre fractionnaire .

Mots clés :

Commande optimale, système d'ordre fractionnaire, retour d'état, algorithmes génétiques.