

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : Recherche Opérationnelle

Intitulé du mémoire

Contrôle optimal d'une épidémie

Réalisé par :

GRIB Sarah
DEHBI Lydia

Dirigé par :

M.
AIDENE Mohamed

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu , qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Nous tenons aussi à remercier notre encadreur Mr AIDENE Mohamed, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous voulons exprimer nos remerciements et notre gratitude à tous nos enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période d'étude, ainsi qu'à toutes les personnes qui nous ont apportés l'aide et l'assistance nécessaire et qui ont collaboré d'une façon ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

A mon cher frère pour son appui et son encouragement,

A mes amis avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables, je leur souhaite de ma part la réussite

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infallible,

Merci d'être toujours là pour moi

Sarah GRIB

Je dédie ce mémoire à ...

A ma très chère mère

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de faire depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon cher père

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour toi.

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

Avec tout mon amour que dieu te garde pour nous, pour une belle et longue vie.

A mon petit frère et ma petite sœur

Vous avez toujours été présent dans les bons moments comme dans les dures,

On a partagé de merveilleux moments,

Votre affection et votre soutien ont fait ma force et,

m'ont encouragé toujours à aller vers l'avant

Dieu vous garde pour moi.

A toute ma famille, oncles et tantes, cousins et cousines et tous mes amis.

Lydia DEHBI

Table des matières

Notation	5
Introduction général	6
1 Introduction à la théorie du contrôle optimal	9
1.1 Introduction	9
1.2 Théorie du contrôle	9
1.3 Contrôle optimal	10
1.3.1 Position du problème	10
1.4 contrôlabilité	11
1.4.1 Cas des systèmes linéaires	13
1.4.2 Cas des systèmes non linéaires	14
1.5 Principe du maximum de Pontryagin	16
2 Méthodes numériques en contrôle optimal	22
2.1 Méthodes directes	22
2.1.1 La discrétisation totale : tir direct	22
2.2 Méthodes indirectes	24
2.2.1 La méthode de tir simple	24
2.2.2 Méthode de tir multiple	25
2.2.3 Quelle méthode choisir ?	27
3 Contrôle optimal d'une épidémie	32
3.1 Introduction	32
3.2 Élaboration du modèle	32
3.3 Problème de contrôle optimal	36
3.4 Application du principe du maximum au problème de l'épidémie	37
3.4.1 Résolution théorique	37
3.4.2 Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB	40
3.4.3 Discussion des résultats	44

3.4.4 Conclusion	44
Conclusion générale	45
Bibliographie	47

Notations

\forall : Pour tout.

\exists : Il existe.

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} * \mathbb{R} * \dots * \mathbb{R}n$ fois.

A^{r} : Intérieur de l'ensemble A .

∂A : Frontière de A .

$| \cdot |$: Valeur absolue.

$M_{n,m}\mathbb{R}$: Ensemble des matrices à n lignes et à m colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

e^A , ou $\exp(A)$: Exponentielle de la matrice A .

A' : Transposée de la matrice A .

$df(x).h$: Différentielle de Fréchet de f au point x , appliquée au vecteur h (f est une application de $E * F$ dans H, E, F et H étant deux espaces de Banach).

$\text{Acc}(x_0, T)$: Ensemble accessible depuis x_0 , en temps T .

E_T : Application entrée sortie au temps T .

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: Dérivée de x par rapport à t .

\perp : perpendiculaire.

∇f : Gradient de la fonction f .

max : Maximum.

min : Minimum.

Introduction générale

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif de la théorie de contrôle est de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible à des perturbations; c'est ce qu'on appelle la stabilisation, ou de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, etc.

L'application de la théorie du contrôle optimal regroupe un nombre de sujets et de domaines extrêmement vastes : économie, mécanique, médecine, chimie, robotique, aéronautique et biologie, etc. En effet, de nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : système de freinage ABS, assistance à la conduite, contrôle des flux routiers, photographie numérique, contrôle de procédés chimiques, chaînes industrielles de montage, systèmes médicaux automatisés, guidage aérospatiaux, etc.

Nous nous intéressons à l'application de la théorie du contrôle optimal aux épidémies car aujourd'hui stopper les maladies infectieuses est plus que jamais un problème international et les mathématiques se sont révélées être un puissant outil, aussi bien d'aide à la décision que de prévision et de prévention.

Le contrôle optimal d'une épidémie consiste à définir une stratégie de vaccination pour lutter contre les sources de contamination et réduire la transmission afin de stopper sa propagation. Notre but est d'anticiper le nombre de personnes à vacciner tout en minimisant le coût subi par la société. Des résultats analytiques et numériques concernant des problèmes de contrôle optimal en épidémiologie mathématique se retrouvent dans plusieurs articles à partir des années 70. Par exemple, les applications de la théorie du contrôle optimal aux modèles épidémiques peuvent être trouvées dans [1], [14], [16], [6].

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre traite la théorie du contrôle optimal, nous y introduisons d'importantes définitions et nous y présentons également le principe du maximum de Pontryagin qui est le point clé de cette théorie.

Le second chapitre est dédié aux méthodes numériques de résolution en contrôle optimal : méthodes directes et méthodes indirectes.

Le troisième chapitre est consacré au contrôle optimal d'une épidémie, ce dernier est organisé en quatre parties : dans un premier lieu nous présentons la modélisation de la dynamique de la transmission des épidémies dans une situation naturelle où nous avons opté pour un modèle SIR [9], dans un second lieu nous nous intéressons au problème de contrôle optimal en introduisant une commande qui représente le taux de vaccination, ensuite nous appliquons le principe du maximum de Pontryagin afin de déterminer la commande optimale, enfin nous nous intéressons à la résolution numérique de notre problème en utilisant la méthode de tir simple implémentée sous MATLAB afin de déterminer le taux de vaccination et le meilleur moment pour la distribution du vaccin pour limiter la maladie de manière optimale en rendant le nombre d'infectés le plus petit possible tout en tenant compte du coût de la vaccination (le financement).

Chapitre 1

Introduction à la théorie du contrôle optimal

1.1 Introduction

La théorie mathématique du contrôle optimal a pris naissance dans les années quarante dans la qualité d'une partie spéciale des équations différentielles, c'est le prolongement du calcul variationnel [10].

La théorie du contrôle optimal analyse les propriétés des systèmes commandés c'est à dire des systèmes sur les quelles on peut agir au moyen d'une commande.

On dispose d'un système (robot, usine, four, fusée...) dont l'évolution dans le temps est gouvernée par des lois physiques (ordre mécanique, thermodynamique, transfert de matière...) qui lient ces variables d'états décrites par un vecteur X (position, vitesse, température,...), et des commandes u (accélération, flux de matières, poussée...).

1.2 Théorie du contrôle

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, une proclamation des contraintes physiques et la détermination du critère de performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées x_i , $i = 1, \dots, n$, si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t)$, $i = 1 \dots n$ où t désigne le temps défini dans un intervalle $[0, T]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

où f est un vecteur de n composantes $f_i, i = 1 \dots n$. f peut être linéaire ou non linéaire.

Définition 1.1 *Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.*

1.3 Contrôle optimal

1.3.1 Position du problème

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\begin{cases} J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min_u, & (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0, & (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1, & (4) \\ u \in U, t \in I = [0, T], & (5) \end{cases} \quad (1.1)$$

où M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (2), $x(T)$ est sa position terminale (finale). En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, etc. $u(\cdot)$ est la commande du système (1.1). U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

est appelé coût, critère de qualité ou but du problème (1.1).

On distingue trois problèmes importants :

Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

c'est à dire $g \equiv 0$.

Problème de Mayer

Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(T, u) = g(T, x(T))$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(T, u)$ est le coût terminal.

Problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

et où le temps final T n'est pas fixé. Soit M_1 une variété de \mathbb{R}^n . Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble U des contrôles admissibles, tel que $x(T) \in M_1$, et de plus $x(\cdot)$ minimise sur $[0, T]$ le coût.

L'unicité de la solution du système (2) – (4) est assurée par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles. Soit $x(\cdot)$ la solution de l'équation (2) du système (1.1). $x(\cdot)$ varie en fonction du contrôle u .

Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, on se pose les questions suivantes :

Question 1 : Existe-t-il un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à u joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état final $x_1 \in \mathbb{R}^n$ en un temps fini ? C'est le problème de contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, peut on déterminer un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état terminal $x_1 = x(T) \in \mathbb{R}^n$, en minimisant un certain critère de performance.

1.4 contrôlabilité

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle optimal, c'est la possibilité d'influencer l'état du système (sortie) en manipulant les entrées (commandes).

Définition 1.2 le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini.

Ensemble accessible

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, T]$$

.

Définition 1.3 *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en temps T est :*

$$Acc(x_0, T) = x_u(T), \quad u \in U$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (2) associée au contrôle u (voir Figure 1.1).

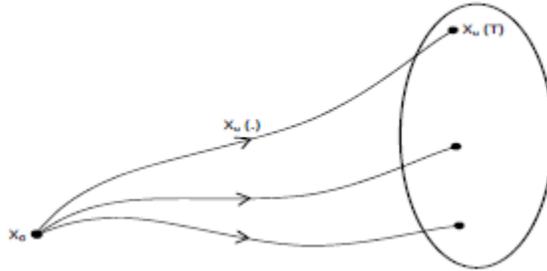


FIGURE 1.1 – Ensemble accessible

$Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2), en temps T lorsque le contrôle u varie.

Définition 1.4 *Le système (2) est dit contrôlable en temps T si*

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T)$$

Pour ce problème de contrôlabilité, Kalman [8] a donné dès 1949 une caractérisation des systèmes linéaires autonomes, contrôlables en dimension finie. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

1.4.1 Cas des systèmes linéaires

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in I = [0, T], \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

La solution du système (1.2) en temps t est

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \quad t \in I = [0, T], \quad x(0) = x_0$$

où $R(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t), \\ R(0) = Id, \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 1.1 [15] *Le système (1.2) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_0^T R^{-1}(t)B(t)B(t)'R(t)^{-1'}dt$$

est inversible. D est appelée matrice de contrôlabilité.

où B' est la transposée de B .

Systèmes linéaires autonomes

Le système linéaire autonome est un système invariant dans le temps décrit par

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Autrement dit le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Dans ce cas, la matrice $R(t) = e^{tA}$. Et la solution x du système associé au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = e^{At} \left(x_0 + B \int_0^t e^{-As} (u(s) ds) \right)$$

Théorème 1.2 [15] *Le système autonome*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in I = [0, T]$$

est dit contrôlable si la matrice

$$K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

est de rang n .

Remarque 1.1 $K \in \mathbb{M}_{n,m}$, est appelée matrice de Kalman. La condition $\text{Rang } K = n$ est appelée condition de Kalman. Où $n \leq m$

1.4.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t)), \\ x(0) = x_0, \quad u \in U, \quad t \in I = [0, T] \end{cases} \quad (1.3)$$

Où x est un vecteur de \mathbb{R}^n , A une matrice dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(\cdot)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (1.3).

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système (1.3).

Définition 1.5 Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.3) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 , si $x_1 \in \text{Acc}(x_0, T)^\circ$.

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x_1)$ tel que $V \subset \text{Acc}(x_0, T)$.

Application entrée sortie

Définition 1.6 Soit $T > 0$. L'application entrée sortie en temps T du système (1.3) initialisée à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_T : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\rightarrow x_u(T) \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, le problème est donc de trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ telle que la trajectoire associée à u , solution du système (1.3) vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1,$$

où x_u est la solution du système (1.3) associée au contrôle u initialisée à x_0 au temps $t = 0$.

On donne une autre caractérisation de la contrôlabilité locale.

Définition 1.7 Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.3) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 si

$$\exists V \in V(x) \mid \forall y \in V, \exists u \in U \text{ tels que } y = E_T(u).$$

Remarque 1.2 L'application entrée sortie E_T est différentiable au sens de Fréchet.

Calculons sa différentielle à l'ordre un.

$$E_T(u + \delta u)(t) = E_T(u(t)) + dE_T(u(t))\delta u + o(\|\delta u\|_{L^\infty}), \quad t \in [0, T], \quad (1.4)$$

Soit

$$\dot{x}_{u+\delta u}(t) = Ax_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)), \quad x_{u+\delta u}(0) = x_0, \quad t \in [0, T]$$

Notons par $\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)$, la variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$ (voir Figure 1.2).

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \dot{x}_{u+\delta u}(t) - \dot{x}_u(t) \\ &= Ax_{u+\delta u}(t) + B((u + \delta u)(t)) - Ax_u(t) - B(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ &= A(x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)) + B((u + \delta u)(t)) - B(u(t)), \quad t \in [0, T], \\ &= A\delta x(t) + dB((u(t))\delta u(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

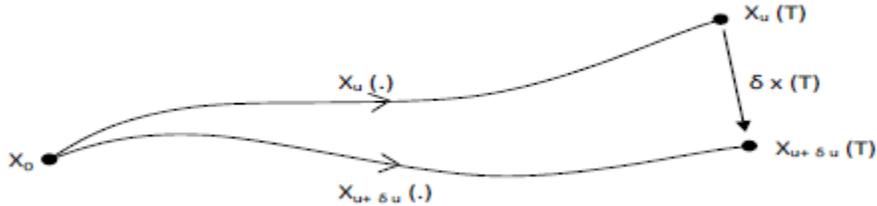


FIGURE 1.2 – Variation de la trajectoire x_u

De la condition d'admissibilité $\delta x(0) = 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0, \quad u \in U, \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (1.5)$$

Définition 1.8 *Le système (1.5) est appelé système linéarisé du système (1.3) le long de $u(\cdot)$. La solution du système linéarisé (1.5) en temps T est donnée par :*

$$\delta x(t) = \int_0^T e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s) ds,$$

$$dE_T(u)\delta u = x_{u+\delta u}(T) - x_u(T),$$

où $dE_T(u)$ est l'application entrée sortie du système (1.5).

Proposition 1.1 [15] *$dE_T(u)$ est surjective si et seulement si le système linéarisé est contrôlable.*

Proposition 1.2 [15] *Le système (1.3) est localement contrôlable au voisinage de $x_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si E_T est localement surjective au voisinage de x_1 .*

Remarque 1.3 *Si le système linéarisé (1.5) est contrôlable alors $dE_T(u)$ est surjective, en utilisant le théorème des fonctions implicites [13], on déduit que E_T est localement surjective, de la proposition 1.2, on déduit que le système de départ (1.3) est localement contrôlable au voisinage de x_1 .*

Théorème 1.3 [15] *Le système linéarisé (1.5) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_0^T e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))' e^{-tA'} dt$$

est inversible.

Où A' est la matrice transposée de A .

1.5 Principe du maximum de Pontryagin

On considère que la théorie moderne du contrôle optimal a commencé à la fin des années 1950 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations [10].

D'une manière générale, un système dynamique à contrôler est un processus comprenant des entrées et des sorties. Les entrées du système (les contrôles) sont choisies de manière à optimiser un critère de performance.

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

Définition 1.9 Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, T]$ si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (2.1) associée à u vérifie

$$x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t), \quad t \in I = [0, T].$$

Définition 1.10 Un contrôle $u^0(t)$, $t \in [0, T]$ est dit optimal si $u^0(\cdot)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$.

Théorème 1.4 [15] Considérons le système

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact.

Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $I = [0, T]$ si et seulement si il existe une solution non triviale $p(t)$, $t \in I$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v \quad (1.6)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Définition 1.11 Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

cas particulier

Si $\Omega \in [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$ positif, la condition (1.6) signifie que

$$u(t) = \text{asign}(p(t)B(t)).$$

on dit que $u(t)$, $t \in I$ est bang-bang.

Définition 1.12 Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation.

Définition 1.13 Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$ change de signe est appelé temps de commutation.

Théorème 1.5 [15] Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.7)$$

où $f : \mathbb{R} * \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous ensembles de \mathbb{R}^n . Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t .

On définit le coût

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

où $f^0 : \mathbb{R} * \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} * \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , $x(\cdot)$ est la solution de (1.7) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 et M_1 en minimisant le coût J . Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial P}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.8)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.9)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = p'(t)f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (1.10)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T

$$\max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \quad (1.11)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) = x_0 \in M_0$ et $x(T) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad (1.12)$$

et

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1. \quad (1.13)$$

Remarque 1.4 Si f et f^0 ne dépendent pas du temps t c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a

$$\forall t \in [0, T], \quad \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = C \text{ ste.}$$

Remarque 1.5 La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La condition $p^0 \geq 0$ conduira au principe du minimum.

Définition 1.14 Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), p^0)$ solution des équations (1.8), (1.9) et (1.10). Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0 \neq 0$, l'extrémale est dite normale.

Plusieurs travaux ont été réalisé dans ce sens, le lecteur est orienté vers les articles [17], [18], [19].

Remarque 1.6 Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (1.10) devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Définition 1.15 Les conditions (1.12) et (1.13) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

Exemple 1.1

$$\left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = -x(2) - y(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2 \\ u \in U, \quad t \in I = [0, 2] \end{array} \right. \quad (1.14)$$

L'Hamiltonien de ce système est :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + p^0 * \frac{1}{2} u^2$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x. \end{array} \right.$$

ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_x(t) = cst = c_1, \\ p_y(t) = -c_1t + c_2. \end{cases} \quad (1.15)$$

Avec c_1 et c_2 deux réels.

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien.

On pose $p^0 = -1$

$$H = p_x y + p_y u - \frac{1}{2}u^2.$$

Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} p_x(2) = 1, \\ p_y(2) = 1. \end{cases}$$

En remplaçant dans le système (1.15)

$$\begin{cases} p_x(2) = c_1 = 1, \\ p_y(2) = -2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 3. \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} p_x(2) = 1, \\ p_y(2) = -t + 3. \end{cases}$$

Condition de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_y(t) - u(t) = 0 \Rightarrow p_y(t)$$

De là, le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -t + 3.$$

Calculons les trajectoires associées au contrôle u^*

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 3 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + c_3.$$

$$\dot{x}(t) = y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + c_3 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + c_3t + c_4.$$

Condition initiale $x(0) = 1, y(0) = 2$

$$y(0) = c_3 = 2 \quad \text{et} \quad x(0) = c_4 = 1$$

De là, la solution du système (1.14)

$$\begin{cases} u^*(t) = -t + 3, \\ x^*(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1, \\ y^*(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 2. \end{cases}$$

Chapitre 2

Méthodes numériques en contrôle optimal

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal [15] : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "nonlinear programming"). Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

2.1 Méthodes directes

2.1.1 La discrétisation totale : tir direct

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme

$$\min_{Z \in C} F(Z), \quad (2.1)$$

Où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N)$, et

$$C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r \\ g_j(Z) \leq 0, j \in r + 1, \dots, m\}. \quad (2.2)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle,

par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite [7]. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Remarque 2.1 *Il existe une infinité de variantes. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, ou des splines. D'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), point milieu, Runge-Kutta [7], etc. Le choix de la méthode dépend du problème abordé.*

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \\ \min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N), \\ u_i &\in \Omega, \quad i = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

i.e. un problème du type (2.1).

Remarque 2.2 *Cette méthode est très simple à mettre en œuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.*

D'un point de vue plus général, cela revient à choisir une discrétisation des contrôles, ainsi que de l'état, dans certains espaces de dimension finie :

$$u \in \text{Vect}(U_1, \dots, U_N), \quad \text{i.e. } u(t) = \sum_{i=1}^N u_i U_i(t), \quad u_i \in \mathbb{R},$$

$$x \in \text{Vect}(X_1, \dots, X_N), \quad \text{i.e. } X(t) = \sum_{i=1}^N x_i X_i(t), \quad x_i \in \mathbb{R},$$

Où les $U_i(t)$ et $X_i(t)$ représentent une base de Galerkin. Typiquement, on peut choisir des approximations polynomiales par morceaux. L'équation différentielle, ainsi que les éventuelles contraintes sur l'état ou le contrôle, ne sont vérifiées que sur les points de la discrétisation. On se ramène bien à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme (2.1).

La résolution numérique d'un problème de programmation non linéaire du type (2.1) est standard. Elle peut être effectuée, par exemple, par une méthode de pénalisation [12], ou par une méthode SQP (sequential quadratic programming).

Dans ces méthodes, le but est de se ramener à des sous-problèmes plus simples, sans contraintes, en utilisant des fonctions de pénalisation pour les contraintes, ou bien d'appliquer les conditions nécessaires de Kuhn-Tucker pour des problèmes d'optimisation avec

contraintes. Pour le problème (2.1), (2.2), les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent

$$\nabla F(Z) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(Z) = 0,$$

Où les multiplicateurs de Lagrange λ_i vérifient

$$\lambda_i g_i(Z) = 0, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \in \{r+1, \dots, m\}.$$

Les méthodes SQP consistent à calculer de manière itérative ces multiplicateurs de Lagrange, en utilisant des méthodes de Newton ou quasi-Newton [11]. A chaque itération, on utilise une méthode de quasi-Newton pour estimer le Hessien du Lagrangien associé au problème de programmation non linéaire, et on résout un sous-problème de programmation quadratique basé sur une approximation quadratique du Lagrangien.

2.2 Méthodes indirectes

2.2.1 La méthode de tir simple

Le principe de cette méthode est le suivant :

Considérons le problème de contrôle optimal (1.1), (1.2), et supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme : $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0,$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème (2.3) aux valeurs limites est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0,$$

i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Remarque 2.3 *Si le temps final T est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant T comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\frac{dT}{dt} = 0$. On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutation. Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.*

2.2.2 Méthode de tir multiple

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode.

De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1, \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ \vdots & \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.4)$$

Où $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, T]$ peuvent être des temps de commutation; dans le cas où le problème inclut des contraintes sur l'état, ce peut être des temps de jonction avec un arc frontière, ou bien des temps de contact avec la frontière. On a de plus des conditions de continuité sur l'état et le vecteur adjoint aux points de commutation.

Remarque 2.4 *A priori le temps final T est inconnu. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé; on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.*

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en N sous intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue.

Plus précisément, soit $t_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k < T$ une subdivision fixée de l'intervalle $[t_0, T]$. En

tout point σ_i la fonction z est continue. On peut considérer σ_i comme un point de commutation fixe, en lequel on a

$$\begin{cases} z(\sigma_j^+) = z(\sigma_j^-), \\ \sigma_j = \sigma_j^* \quad \text{fixé.} \end{cases}$$

On définit maintenant les nœuds

$$\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \{t_0, T\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}. \quad (2.5)$$

Finalement on est conduit au problème aux valeurs limites

$$\bullet \dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_1(t, z(t)) & \text{si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ F_2(t, z(t)) & \text{si } \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\ \vdots \\ F_{m-1}(t, z(t)) & \text{si } \tau_{m-1} \leq t \leq \tau_m \end{cases}$$

- $\forall j \in \{2, \dots, m-1\} r_j(\tau_j, z(\tau_j^-), z(\tau_j^+)) = 0.$
- $r_m(\tau_m, z(\tau_1), z(\tau_m)) = 0.$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = T$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Remarque 2.5 *On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de nœuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de $T - t_0$. Bien sûr dans la méthode de tir multiple il y a beaucoup plus d'inconnues que dans la méthode de tir simple, mais éventuellement l'intégration du système (2.4) peut se paralléliser.*

Posons $z_j^+ = z(\tau_j^+)$, et soit $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+.$$

On a

$$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+).$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\begin{aligned} \forall j \in \{2, \dots, m-1\} \quad r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+, z_j^+)) &= 0, \\ r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Posons maintenant

$$z = (z_1^+, \tau_m, z_2^+, \tau_2, \dots, z_{m-1}^+, \tau_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{(2n+1)(m-1)},$$

Où $z \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors les conditions (2.6) sont vérifiées si

$$G(z) = \begin{pmatrix} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2^-, \tau_1, z_1^+), z_2^+) \\ \vdots \\ r_{m-1}(\tau_{m-1}, z(\tau_{m-1}^-, \tau_{m-2}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{pmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction G , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision. L'équation $G = 0$ peut alors être résolue itérativement par une méthode de type Newton.

2.2.3 Quelle méthode choisir ?

Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes.

Méthodes directes	Méthodes indirectes
Mise en œuvre simple, sans connaissance à priori de la solution	Connaissance à priori de la structure de la trajectoire optimale
Facilité de la prise en compte des contraintes sur l'état.	Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état.
Peu sensible au choix de la condition initiale.	Très sensibles au choix de la condition initiale.
Contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée.	Contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte.
Précision numérique basse ou moyenne.	Très grande précision numérique.
Efficaces en basse dimension.	Efficaces en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisables

En conclusion, on utilisera plutôt une méthode directe si

- On n'a pas besoin d'une grande précision de calcul.
- La dimension d'espace est assez petite.
- On n'a aucune idée à priori de la trajectoire optimale recherchée, par exemple on ne sait Rien sur la structure des commutations.
- On veut introduire facilement des contraintes sur l'état.

On utilisera plutôt une méthode indirecte

- Si la dimension d'espace est assez grande.
- Si on a besoin de calculer la trajectoire optimale de manière très précise.
- Dans un deuxième temps, après avoir appliqué une méthode directe qui a donné une première approximation de la solution optimale.

Exemple 2.1 *Considérons le problème du temps minimal*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ \dot{y}(t) = x(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

Le contrôle $u(t)$, $t \in I = [0, T]$ vérifie $|u(t)| \leq 1$.

Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final $(-2, 2)$, en allant de l'origine. Cherchons la solution théoriquement et comparons les résultats des deux méthodes directe et indirecte.

L'Hamiltonien du système (2.8) est

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), t) = p_x(t)u + p_y(t)x + p^0$$

Où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p_y(t) \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_y(t) = Cste = c_1 \\ p_x(t) = -c_1 t + c_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien

$$H = p_x(t)u + p_y x + p^0$$

alors quelque soit la valeur de p^0 ,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(p_x(t)u + p_y(t)x(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u = \text{signe}(p_x(t))$$

De là, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{Si } p_x(t) < 0 \\ 1 & \text{Si } p_x(t) > 0, \quad t \in I, \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous avons mis en œuvre une méthode indirecte, les résultats sont tracés dans Figure 2.1

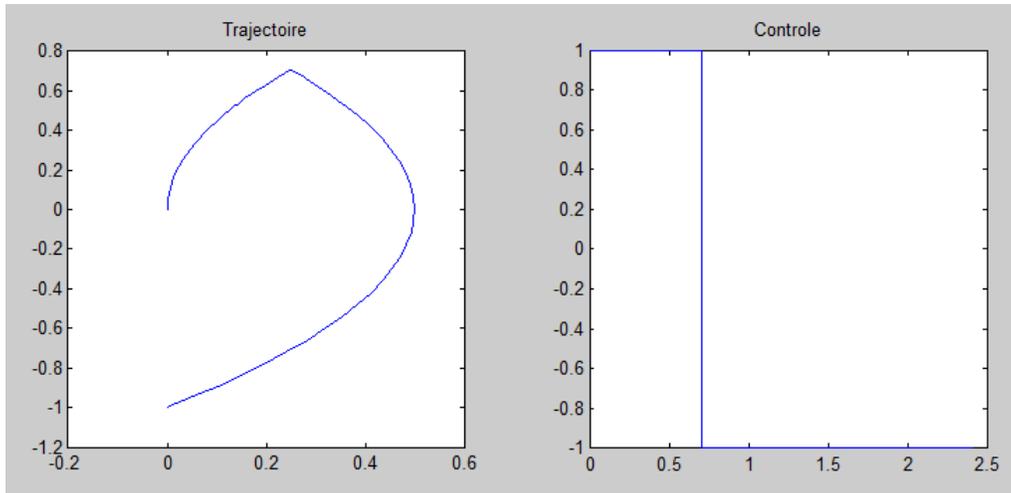


FIGURE 2.1 – Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte.

Dans le cas d'une méthode directe, on discrétise la commande $u(\cdot)$ et l'état $x(\cdot)$ en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N = T$$

Le problème (2.8) devient le problème suivant :

$$T \rightarrow \min$$

sous les contraintes :

$$x[i+1] = x[i] + \frac{[T]}{[N]}u[i]$$

$$y[i+1] = y[i] + \frac{[T]}{[N]}x[i]$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la Figure 2.2

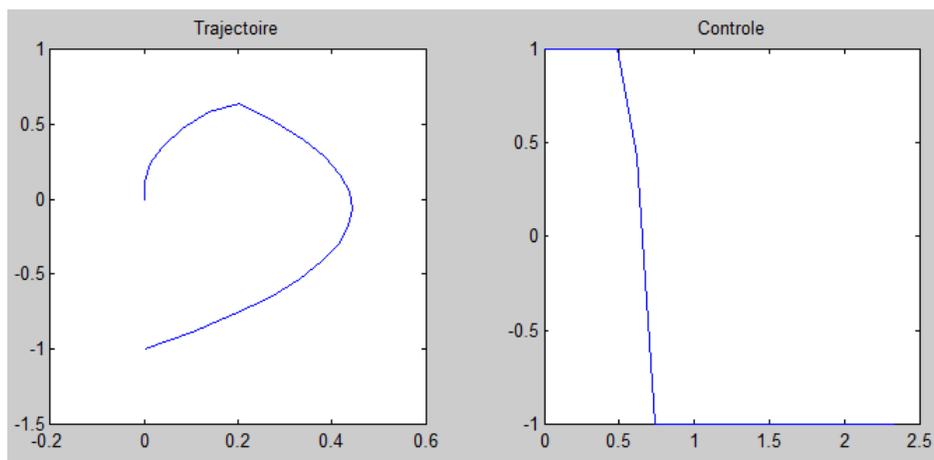


FIGURE 2.2 – Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.

Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit t_c , ce temps de commutation.

La trajectoire obtenue pour $u(t) = 1$ sur $[0, t_c]$ et pour $u(t) = -1$ sur $[t_c, T]$ est :

Si $t \in [0, t_c]$, on obtient

$$x(t) = t$$

et

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2$$

Si $t \in [t_c, T]$, on obtient

$$x(t) = -t + t_c$$

et

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t_c t - \frac{1}{2}t_c^2$$

Les trajectoires obtenues en prenant $u = +1$ puis $u = -1$ sont illustrées dans la Figure 2.3.

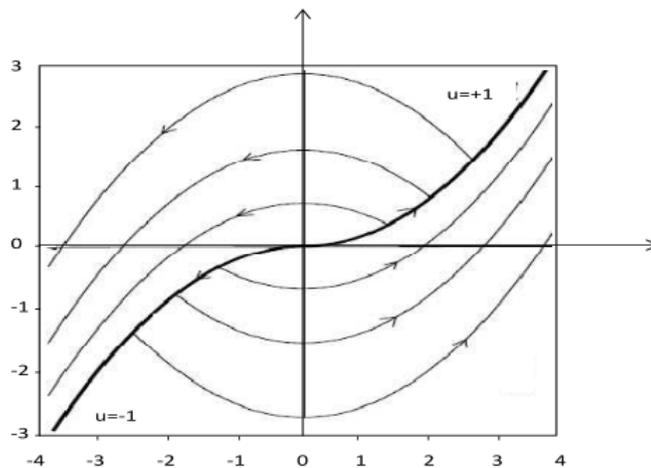


FIGURE 2.3 – Trajectoires optimales.

Chapitre 3

Contrôle optimal d'une épidémie

3.1 Introduction

L'épidémiologie est l'étude de la distribution des maladies chez l'homme et des facteurs qui les influencent. Autrement dit c'est l'étude des épidémies et des facteurs qui pourraient les causer. Elle vise à la compréhension des causes des maladies et à l'amélioration de leur traitement et moyens de prévention car étudier, comprendre, analyser le développement d'une épidémie est une tâche difficile, mais indispensable pour prédire ce développement, et agir pour le freiner voire l'empêcher. Les mathématiques sont au cœur de ces études épidémiologiques.

Les modèles mathématiques constituent un outil puissant pour enquêter sur la dynamique et le contrôle des maladies infectieuses. La théorie du contrôle optimal est appliquée pour suggérer la stratégie d'atténuation la plus efficace afin de minimiser le nombre d'individus infectés au cours d'une infection tout en équilibrant efficacement la vaccination appliquée aux modèles avec divers scénarios de coûts.

La modélisation épidémiologique repose principalement sur les modèles dits à compartiments. Il s'agit de diviser la population en plusieurs classes, selon leur rapport à la maladie.

Ce chapitre présente le modèle SIR [9], mais il existe différents modèles à compartiments, si le lecteur est intéressé par d'autres modèles il est invité à consulter [2], [4], [5], [3].

3.2 Élaboration du modèle

Après quelques recherches, il s'avère que, en matière d'épidémiologie, nous nous intéressons principalement à la variation du nombre de cas en fonction du temps. Pour ce faire, les données les plus souvent considérées sont les différents états cliniques des populations étudiées, et non pas le comportement des infections chez chaque individu, qui relève plus du domaine des statistiques. Pour cela un modèle mathématique est très largement répandu. Il

s'agit du modèle compartimenté.

Ce modèle consiste, comme son nom l'indique à compartimenter la population étudiée selon les différents individus d'après les états cliniques que dénombre l'infection.

Présentation du modèle

Le choix du modèle quantitatif s'est porté sur un modèle déterministe, il s'agit du modèle proposé par Kermack Mckendrick en 1927 [9] qui suppose que la population est divisée en trois classes :

- Susceptible S : cette classe regroupe les personnes susceptibles de contracter la maladie ;
- Infecté I : il s'agit des personnes étant capables de transmettre la maladie, que des symptômes soient visibles ou non ;
- Rétabli R : cette dernière classe représente les personnes ayant eu la maladie, n'étant plus capables ni de la transmettre ni de la contracter à nouveau.

La définition de la classe R peut être différente selon les cas. Par exemple, dans un modèle où l'isolation des malades est possible, la classe R peut contenir aussi bien les personnes guéries ou décédées que les personnes infectieuses isolées, qui ne sont donc plus en capacité de transmettre la maladie mais qui ne sont pas encore guéries. Dans nos travaux, la classe R correspond à la première définition donnée.

Il paraît naturel de travailler avec le nombre de personnes dans chaque catégorie. Nous notons donc $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ le nombre d'individus de chacune des catégories à l'instant t .

Notre objectif est de connaître l'évolution de $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ au cours du temps. Pour cela nous cherchons dans un premier temps à déterminer les règles qui régissent les variations de ces variables.

les règles (hypothèses) retenues sont les suivantes

- La durée de la maladie est suffisamment faible devant la durée de vie pour pouvoir négliger les naissances et les décès dans la population, c'est pourquoi la population est constante.
- La maladie est caractérisée par le taux d'infection (noté $r > 0$) et un taux de guérison (noté $\gamma > 0$).
- La seule façon pour qu'un individu quitte le groupe « S » est en devenant infecté. Il est raisonnable de penser que le nombre de nouveaux cas sur une durée donnée est

proportionnel au nombre de contacts sur cette durée entre les individus susceptibles et les individus infectés ($S(t) \times I(t)$). Ce coefficient de proportionnalité est le taux d'infection r . Et la classe des susceptibles se vide au même rythme.

- Chaque personne qui a guéri de cette maladie est immunisée pour toujours contre cette maladie : la personne ne peut plus retomber malade.
- Nous faisons aussi l'hypothèse que toutes les personnes tombées malades finissent par guérir (ou mourir, selon la maladie, mais on ne fera pas la différence ici : dans les deux cas les individus ne peuvent plus retomber malade). Ainsi qu'une proportion γ des individus infectés passe dans le groupe des individus rétablis tous les jours. Par exemple si la durée moyenne d'infection est de $\sigma = 4$ *jours*, en moyenne chaque jour $\gamma = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{4}$ de la population infectée se rétablit (ou meurt).

Le schéma de progression d'un individu avec cette modélisation est $S \rightarrow I \rightarrow R$ comme présenté dans la Figure 3.1

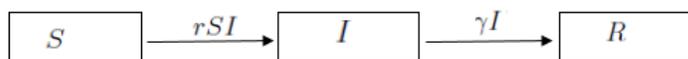


FIGURE 3.1 – Schéma d'évolution du système SIR.

Modélisation mathématique

Nous allons maintenant chercher à mettre les règles/hypothèses que nous venons d'énoncer sous forme mathématique.

1. En étudiant dans un premier temps l'évolution de jour en jour, nous pouvons alors écrire les taux de variations des proportions d'individus dans chaque catégorie ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S(t+1) - S(t) = -rS(t)I(t), \\ \frac{\Delta I}{\Delta t} = I(t+1) - I(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} = R(t+1) - R(t) = \gamma I(t). \end{array} \right.$$

2. On fait diminuer cette unité de temps à l'heure, à la minute, à la seconde, que nous notons Δt .

Pendant une unité de temps Δt , le nombre d'individus susceptibles passe de $S(t)$ à $S(t + \Delta t)$, et la variation de $S(t + \Delta t) - S(t)$ peut s'écrire alors :

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -rS(t)I(t).$$

Ainsi, de la même façon on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta S}{\Delta t} = -rS(t)I(t), \\ \frac{\Delta I}{\Delta t} = rS(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} = \gamma I(t). \end{array} \right.$$

Enfin, par passage à la limite des taux de variation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = -rS(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La figure 3.2 montre l'évolution des fonctions S, I, R au cours du temps. Les paramètres utilisés sont $(S_0, I_0, R_0) = (800, 10, 0)$, $r = 0.0025$, $\gamma = 0.111$ et $T = 6 \text{ mois}$.

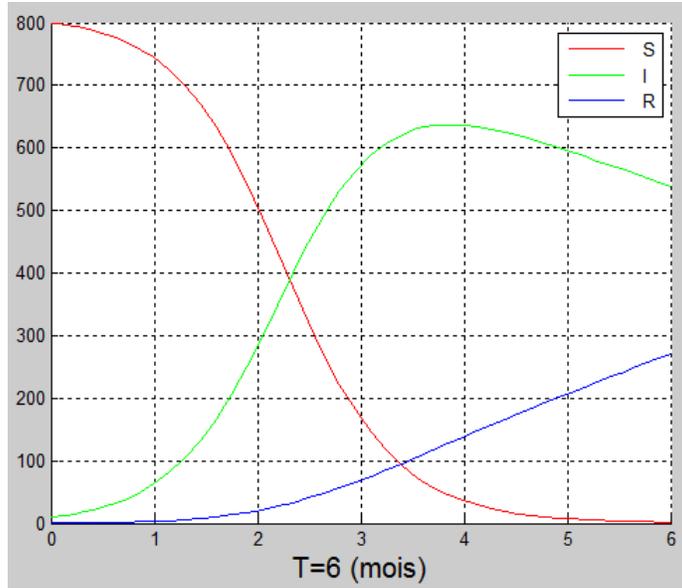


FIGURE 3.2 – Exemple d'évolution par rapport au temps d'un modèle SIR

3.3 Problème de contrôle optimal

Dans cette section, nous présenterons la stratégie d'intervention au moyen de la vaccination. Nous considérons ici une campagne de vaccination sur une période de temps fixe, $[0, T]$. Le vaccin conduit les individus susceptibles à la classe des rétablis. Nous introduisons donc le contrôle $u(t)$

Par conséquent, (3.1) devient

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -rS(t)I(t) - u(t)S(t), \\ \dot{I}(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t). \\ 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $u(t)$ est une fonction mesurable telle que : $0 \leq u(t) \leq a$, pour $t \in [0, T]$. a est le taux maximal de vaccination.

Le but ici est de minimiser le nombre total d'individus infectés et le coût associé à la vaccination pendant la campagne de vaccination. Par conséquent, le problème de contrôle optimal est de minimiser, en un temps T fixé, le coût :

$$J(u) = \alpha I(T) + \int_0^T u^2(t) dt \quad (3.3)$$

avec le système (3.2) et les données initiales non négatives $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$
Le problème de contrôle optimal est donné comme suit :

$$\begin{cases} J(u) = \alpha I(T) + \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min_u \\ \dot{S}(t) = -rS(t)I(t) - u(t)S(t) \\ \dot{I}(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t) \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0 \\ t \in [0, T] \quad 0 \leq u(t) \leq a \end{cases} \quad (3.4)$$

Où r est le taux d'infection, γ le taux de guérison.
 $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$ le nombre de personnes dans chaque classe à l'instant $t = 0$.

Nous avons considéré un coût quadratique sur le contrôle, qui est la représentation non linéaire du coût de vaccination la plus simple et la plus large utilisée.

Le paramètre α est un paramètre de poids décrivant l'importance comparative des deux termes dans la fonctionnelle. Par exemple, une valeur élevée de α signifie que c'est Plus important de réduire le fardeau de la maladie que de réduire les coûts de vaccination.

3.4 Application du principe du maximum au problème de l'épidémie

3.4.1 Résolution théorique

Notre problème initial est :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \alpha I(T) + \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min_u, \\ \dot{S}(t) = -rS(t)I(t) - u(t)S(t), \\ \dot{I}(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t), \\ \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, \\ t \in [0, T], \quad 0 \leq u(t) \leq a. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Avant la caractérisation du contrôle optimal, nous définissons d'abord le Hamiltonien pour le problème de contrôle optimal par :

$$\begin{aligned} H(S, I, R, P_S, P_I, P_R, u, t) &= p^0 u^2 + P_s(-rSI - uS) + P_I(rSI - \gamma I) + P_R(\gamma I + uS) \\ &= p^0 u^2 - rSIP_s - uSP_s + P_I rSI - \gamma IP_I + P_R \gamma I + uSP_R \end{aligned}$$

Où P_S, P_I, P_R , sont les vecteurs adjoints.

Ensuite en appliquant le principe du maximum de Pontryagin nous obtenons :

Les equations adjointes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_S = -\frac{\partial H}{\partial S} = rIP_S - rIP_I + uP_S - uP_R \\ \dot{P}_I = -\frac{\partial H}{\partial I} = rSP_S - rSP_I + \gamma P_I - \gamma P_R \\ \dot{P}_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Les conditions de transversalité :

$$\begin{cases} P_S(T) = p^0 \frac{\partial \alpha I(T)}{\partial S} = 0 \\ P_I(T) = p^0 \frac{\partial \alpha I(T)}{\partial I} = p^0 \alpha \\ P_R(T) = p^0 \frac{\partial \alpha I(T)}{\partial R} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

On maximise le Hamiltonien H :

$$\max_{0 \leq u \leq a} H = \max_{0 \leq u \leq a} \left[p^0 u^2 - rSIP_s - uSP_s + P_I rSI - \gamma IP_I + P_R \gamma I + uSP_R \right]$$

Ce qui est équivalent à maximiser :

$$\phi(u) = p^0 u^2 + u(P_R - P_S)S$$

- Condition nécessaire

Cherchons les racines de sa dérivée

$$\phi'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow 2p^0 u + P_R S - P_S S = 0$$

$$\Leftrightarrow u^* = \frac{(P_R - P_S)S}{-2p^0}$$

$$\text{On pose } p^0 = -\frac{1}{2}, \text{ on aura } u^* = (P_R - P_S)S.$$

- Condition suffisante

$$\phi''(t) = 2p^0 = -1 < 0 \quad \Rightarrow u^* = (P_R - P_S)S \text{ est un maximum.}$$

Et, en prenant en compte les limites sur u , la caractérisation du contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & (P_R(t) - P_S(t))S(t) < 0 \\ (P_R - P_S)S & 0 \leq (P_R(t) - P_S(t))S(t) \leq a \\ a & (P_R(t) - P_S(t))S(t) > a \end{cases} \quad (3.8)$$

Qui, sous forme abrégée, peut être écrit :

$$u^* = Max \left\{ \min \left\{ (P_R(t) - P_S(t))S(t), a \right\}, 0 \right\} \quad (3.9)$$

Le contrôle optimal et l'état sont trouvés en résolvant le système d'optimalité qui comprend le système d'état (3.2) les conditions initiales, le système adjoint (3.6), les conditions de transversalités (3.7) et la caractérisation du contrôle optimal (3.8).

Problème aux deux bouts

Le PMP nous donne une condition nécessaire d'optimalité et nous conduit à un problème aux deux bouts (Two Points Boundray value problem).

$$(PDB) \left\{ \begin{array}{ll} \dot{S}(t) = -rS(t)I(t) - u(t)S(t) & S(0) = S_0, \\ \dot{I}(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t) & I(0) = I_0, \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t) & R(0) = R_0, \\ \dot{P}_S = rIP_S - rIP_I - uP_R + uP_S & , P_S(T) = 0, \\ \dot{P}_I = rSP_S - rSP_I + \gamma P_I - \gamma P_R, & P_I(T) = -\frac{1}{2}\alpha, \\ \dot{P}_R = 0, & P_R(T) = 0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

avec

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & (P_R(t) - P_S(t))S(t) \leq 0, \\ (P_R - P_S)S & 0 < (P_R(t) - P_S(t))S(t) < a, \\ a & (P_R(t) - P_S(t))S(t) \geq a. \end{cases}$$

En posant $y = (S, I, R, P_S, P_I, P_R) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$

On aura alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{y}_1 = -ry_1y_2 - u(t)y_1, & y_1(0) = y_{10}, \\ \dot{y}_2 = ry_1y_2 - \gamma y_2, & y_2(0) = y_{20}, \\ \dot{y}_3 = \gamma y_2 + u(t)y_1, & y_3(0) = y_{30}, \\ \dot{y}_4 = ry_2y_4 - ry_2y_5 - uy_6 + uy_4, & y_4(T) = 0, \\ \dot{y}_5 = ry_1y_4 - ry_1y_5 + \gamma y_5 - \gamma y_6, & y_5(T) = -\frac{1}{2}\alpha, \\ \dot{y}_6 = 0, & y_6(T) = 0. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

avec :

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & (y_6 - y_4)y_1 < 0 \\ (y_6 - y_4)y_1 & 0 \leq (y_6 - y_4)y_1 \leq a \\ a & (y_6 - y_4)y_1 > a \end{cases} \quad (3.12)$$

Donc le problème aux deux bouts est équivalent à $\dot{y} = F(t, y)$, avec :

$$Y(0) = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \\ P_S(0) \\ P_I(0) \\ P_R(0) \end{pmatrix} \quad y(T) = \begin{pmatrix} S(T) \\ I(T) \\ R(T) \\ P_S(T) \\ P_I(T) \\ P_R(T) \end{pmatrix}$$

Le problème de Cauchy associé au problème est :

$$\dot{y} = F(t, y), \quad y(0) = y^0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \\ P_S(0) \\ P_I(0) \\ P_R(0) \end{pmatrix}$$

La solution de notre système s'écrit

$$y(T, y^0) = y(T) = \begin{pmatrix} S(T) \\ I(T) \\ R(T) \\ P_S(T) \\ P_I(T) \\ P_R(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(T) \\ I(T) \\ R(T) \\ 0 \\ \frac{-\alpha}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La fonction de tir est définie par :

$$G(y^0) = y(T, y^0) - y(T)$$

Résoudre le problème (PDB) est équivalent à trouver un zéro de la fonction de tir $G(y^0)$, c'est à dire chercher $y^0/G(y^0) = 0$.

3.4.2 Implémentation de la méthode de tir sous MATLAB

Résoudre le système d'équations différentielles revient à trouver le zéro de la fonction de tir $G(y^0)$ en utilisant la commande **fsolve** sous MATLAB. L'algorithme d'intégration d'un

système différentielle à valeur initial est effectué en utilisant la commande **ode** de MATLAB.

Le programme suivant nous permet d'afficher les solutions du problème.

Programme

```
[1] function tirsimple
[2] clear all; clf; clc;
[3] global x0;
[4] x0=[800,10,0];T=6;r=0.0025; gamma=0.111;
[5] p0=[1,1,1]; alpha=1;
%=====Calcul du zéro de la fonction de tir=====
[6] options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[7] [p0tf,FVAL,EXITFLAG] = fsolve(@G,[p0,tf],options);
[8] EXITFLAG
%=====Tracer les trajectoires optimales=====
[10] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[11] [t,y] = ode45(@sys,[0;p0tf(4)],[x0,p0tf(1),p0tf(2),p0tf(3)],options);
[12] subplot(421); plot(t,y(:,1)); title('Trajectoire de S(t)'); grid on
[13] subplot(422); plot(t,y(:,2)); title('Trajectoire de I(t)'); grid on
[14] subplot(423); plot(t,y(:,3)); title('Trajectoire de R(t)'); grid on
[15] subplot(424); plot(t,y(:,4)); title('Trajectoire de ps(t)');grid on
[16] subplot(425); plot(t,y(:,5)); title('Trajectoire de pi(t)');grid on
[17] subplot(426);plot(t,y(:,6)); title('Trajectoire de pr(t)');grid on
%===== Trajectoire du contrôle optimal=====
[18] if (y(:,6) - y(:,4)) * y(:,1) < 0
[19] y(:,7) = 0;
[20] elseif (y(:,6) - y(:,4)) * y(:,1) > 1
[21] y(:,7) = 1;
[22] else y(:,7) = (y(:,6) - y(:,4)) * y(:,1);
[23] end
[24]subplot(424);plot(t,y(:,7)); title('Trajectoire de u(t)');grid on
%===== Définition de la fonction de tir =====
[25]function Yzero=G(y)
[26]global x0;
[27]gamma=0.111; r=0.0025;
[28] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[29] [t,y] = ode45(@sys,[0,y(4)],[x0,y(1),y(2),y(3)],options);
[30] if (y(:,6) - y(:,4)) * y(:,1) < 0
[31] hamend = -r*y(end,1)*y(end,2)*y(end,4)+r*y(end,1)*y(end,2)*y(end,5) - gamma*
y(end,2) * y(end,5) + gamma * y(end,2) * y(end,6);
```

```

[32] elseif (y(:,6) - y(:,4)) * y(:,1) > 1
[33] hamend = -r*y(end,1)*y(end,2)*y(end,4)+r*y(end,1)*y(end,2)*y(end,5)-gamma*
y(end,2)*y(end,5)+gamma*y(end,2)*y(end,6)-1/2+y(end,1)*y(end,6)*(y(6)-y(4))*
y(1);
[34] else
[35] hamend = -r*y(end,1)*y(end,2)*y(end,4)+r*y(end,1)*y(end,2)*y(end,5)-gamma*
y(end,2)*y(end,5)+gamma*y(end,2)*y(end,6)-((y(6)-y(4))*y(1))/2+((y(6)-y(4))*
y(1))* (y(end,4)+y(end,5));
[36] end
[37] Yzero=[y(end,4)
[38] y(end,5) - (alpha/ - 2)
[39] y(end,6)
[40] hamend];
%===== Système extrémal =====
[41] function ydot=sys(t,y)
[42] if (y(6) - y(4)) * y(1) < 0
[43] u = 0;
[44] elseif (y(6) - y(4)) * y(1) > 1
[45] u = 1;
[46] else
[47] u = (y(6) - y(4)) * y(1);
[48] [1] end
[49] ydot = [-r * y(1) * y(2) - u * y(1);
[50] r * y(1) * y(2) - g * y(2);
[51] gamma * y(2) + u * y(1);
[52] r * y(2) * y(4) - r * y(2) * y(5) + u * y(4) - u * y(6);
[53] r * y(1) * y(4) - r * y(1) * y(5) + gamma * y(5) - gamma * y(6);
[54] 0;

```

Les résultats d'exécutions sous MATLAB (pour différentes valeurs de α sont représentés par les figures suivantes.

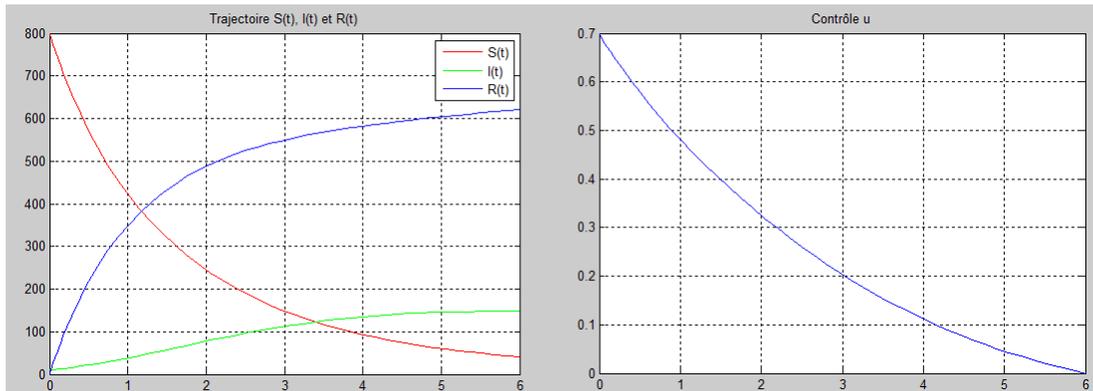


FIGURE 3.3 – Solution optimale obtenue avec $\alpha = 0.005$

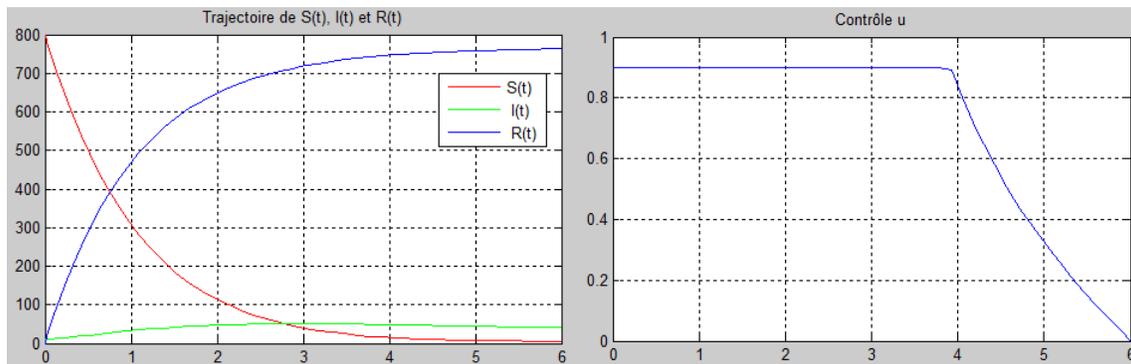


FIGURE 3.4 – Solution optimale obtenue avec $\alpha = 1$

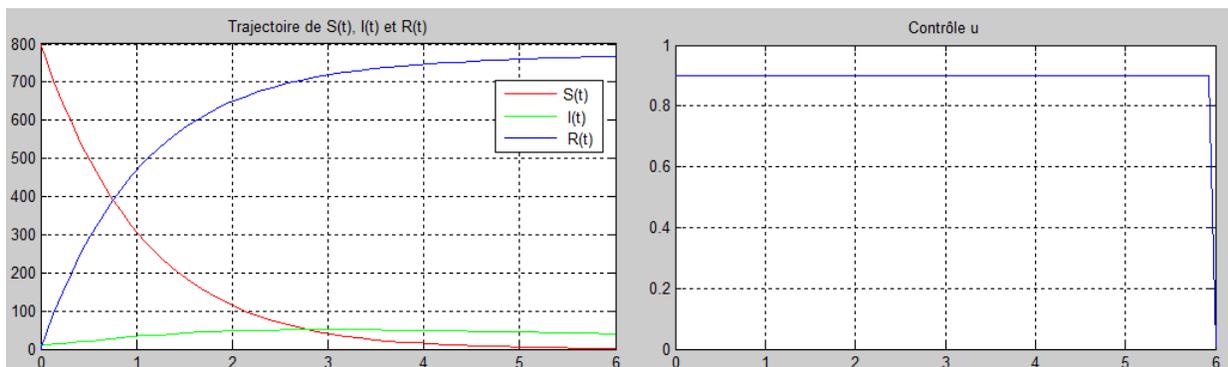


FIGURE 3.5 – Solution optimale obtenue avec $\alpha = 200$

3.4.3 Discussion des résultats

Les résultats de la campagne de vaccination de 6 mois pour différentes valeurs de α sont présentés dans les figures 3.3, 3.4 et 3.5.

Nous notons d'abord que le taux de vaccination est à la plus haute valeur possible au début de la campagne de vaccination, puis décroît et s'annule, et cela quelque soit la valeur de α .

par conséquent on constate que vacciner au plus haut taux possible le plus tôt possible est essentiel pour contrôler une épidémie.

Nous avons donné plusieurs valeurs au paramètre α afin d'imaginer le rôle du coût relatif de la vaccination dans la stratégie de vaccination.

En donnant une petite valeur ($\alpha = 0.005$) nous observons que le taux de vaccination décroît de 0.7 à 0. Et le nombre d'individus infectés se stabilise à partir du quatrième mois (Voir Figure 3.3).

En augmentant le paramètre ($\alpha = 1$ ou $\alpha = 200$) le taux de vaccination prend la valeur maximale ($u = 0.9$) pendant les premiers mois, puis diminue et s'annule (voir Figure 3.4 et Figure 3.5).

Si on donne plus d'importance au coût de vaccination on attribue au paramètre (α) une petite valeur (telle que $\alpha = 0.005$), qui assurera un contrôle u moins important que si on lui attribue une valeur assez grande (telle que 1 ou 200). Par conséquent, si le coût de la vaccination est relativement élevé, une augmentation graduelle du taux de vaccination est suggérée. Bien sûr plus la réduction des coûts est prioritaire, l'efficacité de la campagne de vaccination est réduite.

3.4.4 Conclusion

Lors d'un contrôle de vaccination on utilise des méthodes mathématiques qui permettent de mesurer le taux de vaccination afin d'enrayer une épidémie; l'étude est portée sur un modèle SIR [9] cherchant ainsi à réduire le nombre de susceptibles et des infectés tout en minimisant le coût engendré par la campagne de vaccination.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons considéré un problème de contrôle optimal d'une épidémie. Nous avons modélisé le problème dont le but est de déterminer le taux de vaccination nécessaire pour stopper la propagation de l'épidémie en minimisant un certain coût.

Pour la résolution de notre problème nous avons d'abord commencé par appliquer théoriquement le principe du maximum de Pontryagin qui donne les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, puis numériquement avec une implémentation sous MATLAB en utilisant la méthode de tir simple. Ce qui nous a permis de déterminer une stratégie de vaccination optimale.

On pourrait par la suite, largement raffiner les modèles en utilisant des données bien précises et en considérant une population non constante.

Il est également intéressant d'envisager un deuxième contrôle qui représente un traitement. En effet, le traitement peut être une ressource précieuse pour diminuer la contagiosité afin que, à son tour, cela puisse avoir un grand effet sur la stratégie de vaccination. On peut aussi représenter le coût de cette dernière par une fonction linéaire.

Bibliographie

- [1] H. Behncke. Optimal control of deterministic epidemics. *Appl. Meth*, (21) :269–285, 2000.
- [2] N. F. Britton. *Essential mathematical biology*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2003.
- [3] D. J. Daley and J. Gani. *Epidemic modelling : an introduction, volume 15 of Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [4] O. Diekmann and J. A. P. Heesterbeek. *Mathematical epidemiology of infectious diseases*. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley and Sons, Ltd, Model building, analysis and interpretation, 2000.
- [5] O. Diekmann and J. A. P. Heesterbeek. *Modeling the interplay between human behavior and the spread of infectious diseases*. Springer, New York, 2013.
- [6] S. Lenhart E. Asano, L. J. Gross and L. A. Real. *Optimal control of vaccine distribution in a rabies metapopulation model*. Math. Biosci. Engineering, 2008.
- [7] André Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*. 2008.
- [8] R.E. Kalman. Mathematical discription of linear dynamical system siam. *journal of control*, 1963.
- [9] William O Kermack and Anderson G McKendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics. In *Proceedings of the Royal Society of London A : mathematical, physical and engineering sciences*, volume 115, pages 700–721. The Royal Society, 1927.
- [10] K. Louadj. *résolution des problèmes paramétrés en contrôle optimal. Thèse de doctorat*. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2012.
- [11] Michel Minoux. *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*. 2007.
- [12] Pierre Nepomiastchy. Méthode de pénalisation et applications : résolution et optimisation de modèles macroéconomiques. mod lisation et simulation. 1979.
- [13] Francis Sergeraert. Un théoreme de fonctions implicites sur certains espaces de fréchet et quelques applications. In *Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure*, volume 5, pages 599–660. Elsevier, 1972.

- [14] S. P. Sethi and P. W. Staats. *Optimal control of some simple deterministic epidemic models*. Number 29. J. Opl. Res. Soc, 1978.
- [15] E. Trélat. *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Université Paris-Sud Laboratoire EN-EDP Mathématiques, 2005.
- [16] K. H. Wickwire. *Optimal isolation policies for deterministic and stochastic epidemics*. 1975.
- [17] F. Jean Y. Chitour and E. Trélat. *Propriétés génériques des trajectoires singulières*, pages 49–52. C R Math Acad Sci Paris 337, 2003.
- [18] F. Jean Y. Chitour and E. Trélat. *Genericity results for singular curves*, pages 45–73. J Differential Geom 73, 2006.
- [19] F. Jean Y. Chitour and E. Trélat. *Singular trajectories of control affine systems*. *SIAM J Control Optim vol 2*, pages 1078–1095, 2008.

Résumé :

Dans ce travail nous avons considéré un problème de contrôle optimal d'une épidémie. Nous avons modélisé le problème dont le but est de déterminer le taux de vaccination nécessaire pour stopper la propagation de l'épidémie en minimisant un certain coût.

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre traite la théorie du contrôle optimal, nous y introduisons d'importantes définitions et nous y présentons également le principe du maximum de Pontryagin qui est le point clé de cette théorie.

Le second chapitre est dédié aux méthodes numériques de résolution en contrôle optimal : méthodes directes et méthodes indirectes.

Le troisième chapitre est consacré au contrôle optimal d'une épidémie, ce dernier est organisé en quatre parties : dans un premier lieu nous présentons la modélisation de la dynamique de la transmission des épidémies dans une situation naturelle où nous avons opté pour un modèle SIR, dans un second lieu nous nous intéressons au problème de contrôle optimal en introduisant une commande qui représente le taux de vaccination, ensuite nous appliquons le principe du maximum de Pontryagin afin de déterminer la commande optimale, enfin nous nous intéressons à la résolution numérique de notre problème en utilisant la méthode de tir simple implémentée sous MATLAB afin de déterminer le taux de vaccination et le meilleur moment pour la distribution du vaccin pour limiter la maladie de manière optimale en rendant le nombre d'infectés le plus petit possible tout en tenant compte du coût de la vaccination (le financement).

Mots clés : Contrôle optimal, méthodes numériques en contrôle optimal, épidémie, vaccination, modèle d'épidémie SIR.