

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI, TIZI-OUZOU  
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT AUTOMATIQUE

**Thèse de doctorat**

en **Automatique**

présentée par

**Ghania IDIRI**

Ingénieur UMMTO

Magister UMMTO

**Développement de méthodes de résolution de  
problèmes de contrôle optimal des systèmes d'ordre  
fractionnaire**

Thèse soutenue le **jeudi 06 juillet 2017** devant le jury composé de MM :

<b>HAMMOUCHE Kamal</b>	Professeur à l'UMMTO	<b>Président</b>
<b>DJENNOUNE Saïd</b>	Professeur à l'UMMTO	<b>Rapporteur</b>
<b>BETTAYEB Maamar</b>	Professeur à l'université de Sharjah (EAU)	<b>Co-Rapporteur</b>
<b>AIDENE Mohamed</b>	Professeur à l'UMMTO	<b>Examineur</b>
<b>BENCHOHRA Mouffak</b>	Professeur à l'université de Sidi-Bel-Abbès	<b>Examineur</b>
<b>LADACI Samir</b>	Professeur à l'ENP de Constantine	<b>Examineur</b>

# Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou (UMMTO), sous la direction de Monsieur *Saïd DJENNOUNE* Professeur au département Automatique de la Faculté de Génie Electrique et d'Informatique (UMMTO). Je tiens à lui exprimer ma gratitude et mes remerciements, les plus sincères, de m'avoir lancé sur une thématique de recherche d'actualité. Je le remercie également pour l'aide qu'il m'a apportée, tout au long de cette thèse, et ses conseils éclairés et fructueux ; qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance et considération.

Je tiens à remercier également Monsieur *Maamar BETTAYEB* Professeur à l'université de Sharjah (EAU), codirecteur de thèse, pour l'aide qu'il m'a apportée, son soutien et sa disponibilité.

Je tiens à remercier Monsieur *Kamal HAMMOUCHE*, Professeur à l'université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Que Monsieur *Mouffak BENCHOHRA*, Professeur à l'université Djillali Liabes de Sidi-Bel-Abbés, Monsieur *Samir LADACI*, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique de Constantine, ainsi que Monsieur *Mohamed AIDENE*, Professeur à l'université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou, veuillent trouver ici l'assurance de ma sincère reconnaissance pour avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et soutenu durant ma formation.

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à ma petite famille :  
Mon époux et mes deux enfants Nassim et Mastène.*



# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>9</b>
<b>Table des figures</b>	<b>11</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>13</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>21</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire</b>	<b>27</b>
1.1 Introduction . . . . .	27
1.2 Dérivée et intégrale d'ordre entier . . . . .	29
1.3 Dérivée et intégrale d'ordre fractionnaire . . . . .	32
1.4 Notion de l'opérateur non local . . . . .	36
1.5 Systèmes dynamique d'ordre fractionnaire . . . . .	38
1.6 Représentation d'état . . . . .	39
1.6.1 Représentation d'état d'un système fractionnaire linéaire . . . . .	40
1.6.2 Représentation d'état d'un système fractionnaire non linéaire . . . . .	44
1.7 Conditions initiales . . . . .	45
1.8 Exemple de modélisation . . . . .	45
1.9 Conclusion . . . . .	49

<b>2</b>	<b>Commande optimale des systèmes dynamiques</b>	<b>51</b>
2.1	Introduction . . . . .	51
2.2	Définition de la commande optimale . . . . .	52
2.3	Formulation mathématique d'un PCO . . . . .	53
2.4	Conditions d'existence de commande optimale . . . . .	57
2.5	Résolution d'un problème de commande optimale . . . . .	58
2.5.1	Calcul de la variation d'une fonctionnelle . . . . .	59
2.5.2	Principe d'optimalité de Bellman . . . . .	59
2.5.3	Conditions d'optimalité . . . . .	60
2.6	Méthodes de résolution des conditions d'optimalité . . . . .	72
2.6.1	Méthodes numériques . . . . .	72
2.6.2	Avantages et inconvénients des méthodes numériques . . . . .	78
2.7	Conclusion . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Méthode d'optimisation globale d'Alienor</b>	<b>81</b>
3.1	Introduction . . . . .	81
3.2	Problème d'optimisation . . . . .	83
3.3	Conditions d'optimalité . . . . .	86
3.4	Méthodes d'optimisation . . . . .	88
3.5	Optimisation globale par la méthode d'Alienor . . . . .	90
3.5.1	Transformations réductrices . . . . .	92
3.5.2	Rapidité et précision de la méthode d'Alienor . . . . .	97
3.6	Exemple illustratif . . . . .	98
3.7	Conclusion . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Méthode de l'itération variationnelle</b>	<b>103</b>
4.1	Introduction . . . . .	103
4.2	Equations différentielles ordinaires fractionnaires . . . . .	105

4.3	Existence de la solution d'une EDOF . . . . .	105
4.4	Méthodes de résolution des EDOFs . . . . .	106
4.4.1	Méthodes analytiques . . . . .	106
4.4.2	Méthodes numériques . . . . .	108
4.4.3	Méthodes approximatives . . . . .	111
4.5	Méthode de l'itération variationnelle fractionnaire . . . . .	112
4.5.1	Principe de la méthode . . . . .	112
4.5.2	Convergence de MIVF . . . . .	114
4.5.3	Exemples illustratifs . . . . .	116
4.6	Conclusion . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Commande d'un SOF par paramétrisation de la commande</b>	<b>123</b>
5.1	Introduction . . . . .	123
5.2	Commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire . . . . .	125
5.2.1	Formulation du problème de commande optimale . . . . .	126
5.2.2	Existence de la solution . . . . .	127
5.3	Etat de l'art de la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire . . .	128
5.4	Approche proposée . . . . .	131
5.5	Exemples d'application . . . . .	137
5.6	Conclusion . . . . .	143
	<b>Conclusion générale</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>



# Liste des tableaux

4.1	Itérations de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire pour l'équation (4.29). . . . .	117
5.1	Itérations de l'algorithme proposé pour l'exemple 1 pour $\sigma = 0,5$ . . . . .	140
5.2	Itérations de l'algorithme proposé pour l'exemple 2 avec $\sigma = 0,5$ . . . . .	142
5.3	Erreur maximale commise avec l'approche proposée. . . . .	143



# Table des figures

1.1	Dérivation et intégration d'ordre entier. . . . .	30
1.2	Graphe de la fonction $\Gamma(t)$ . . . . .	33
1.3	Première dérivée et dérivée fractionnaire d'ordre 0,5 de la fonction $f(t) = \sin(t)$ . . . . .	37
1.4	Dérivée fractionnaire qui agit sur le passé de $f(t)$ (partie en rouge). . . . .	38
1.5	Plaque rigide immergée dans un fluide Newtonien. . . . .	46
3.1	Graphe de la fonction $\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)$ du problème d'optimisation <b>(3.42)</b> . . . . .	99
3.2	Graphe de la fonction $\mathcal{G}(\theta)$ du problème d'optimisation <b>(3.45)</b> . . . . .	100
4.1	Solution exacte $Y(t)$ et solutions approximées $Y^{(k)}(t)$ de l'équation <b>(4.29)</b> obtenues par la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire pour $k = 1,$ $k = 4, k = 8$ et $k = 15$ . . . . .	118
4.2	Solution de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire <b>(4.36)</b> . . . . .	120
5.1	Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 1 pour $\sigma = 0,5$ . . . . .	140
5.2	Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 1 pour $\sigma = 0,8$ . . . . .	141
5.3	Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 2 pour $\sigma = 0,5$ . . . . .	143
5.4	Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 2 pour $\sigma = 0,6$ . . . . .	144



# Liste des symboles

*	Grandeur optimal
$\ \cdot\ $	Norme
$[\sigma]$	Nombre entier relatif immédiatement supérieure à $\sigma$
$[\sigma]$	Nombre entier relatif immédiatement inférieur à $\sigma$
$a$	Nombre réel strictement positif
$a_i$	Nombre réel
$a_k$	Coefficients de la paramétrisation
$A$	Matrice d'état
$\mathcal{A}$	Matrice de nombres réels
$b$	Nombre réel positif
$b_j$	Nombre réel
$B$	Matrice de commande
$c$	Nombre réel
$c_1$	Nombre complexe tel que $\Re\{c_1\} > 0$
$c_2$	Nombre complexe tel que $\Re\{c_2\} > 0$
$C$	Matrice de sortie
$C^k$	Espace des fonctions de classe $k$
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$d$	Distance euclidienne

$D$	Opérateur de dérivation
$\mathcal{D}$	Domaine admissible pour un problème d'optimisation
$\mathbb{D}$	Domaine de solutions d'une équation différentielle
$e$	Nombre réel
$E_{c_1, c_2}$	Fonction de <b>Mittag-Leffler</b> à deux paramètres
$E_x$	Erreur d'approximation de l'état
$E_u$	Erreur d'approximation de la commande
$E_{c_1}$	Fonction de <b>Mittag-Leffler</b> à un seul paramètre
$\mathcal{E}$	Erreur d'approximation
$\mathbb{E}$	Fonction vectorielle
$f$	Fonction analytique (scalaire)
$f_c$	Force
$f_k$	Force de rappel
$f_p$	Force (commande)
$F$	Primitive de la fonction $f$
$\mathcal{F}$	Fonction vectorielle
$\mathbb{F}_i$	Transformation réductrice (fonction analytique à une seule variable)
$g$	Fonction vectorielle
$G$	Fonction vectorielle
$\mathcal{G}$	Fonction analytique à une seule variable
$\mathbb{G}$	Fonction analytique
$h$	Pas de discrétisation
$H$	Fonction d'Hamilton (Hamiltonien)
$\mathcal{H}$	Fonction vectorielle
$i$	Entier naturel
$I$	Opérateur intégrale
$j$	Entier naturel

$J$	Critère de performances
$\mathcal{J}$	Fonctionnelle
$k$	Entier naturel
$k_i$	Entier naturel
$k_r$	Raideur du ressort
$K$	Solution de l'équation de <b>Ricatti</b>
$\mathcal{K}$	Fonction vectorielle
$l$	Constante positive (constante de <b>Lipschitz</b> )
$l_i$	Entier naturel
$l_1$	Constante positive (constante de <b>Lipschitz</b> )
$l_2$	Constante positive (constante de <b>Lipschitz</b> )
$L^2$	Espace des fonctions de carré sommable
$L^\nu$	Espace des fonctions mesurables
$L^\infty$	Espace des fonctions essentiellement bornées
$\mathcal{L}$	Opérateur différentiel linéaire
$m$	Entier naturel
$M$	Matrice de pondération
$M_p$	Masse de la plaque
$n$	Nombre d'état
$n_{CI}$	Nombre de conditions initiales
$n_q$	Nombre de contraintes intégrales
$n_u$	Nombre de commande
$n_{\mathcal{R}}$	Nombre de contraintes du type égalité
$n_{\mathcal{S}}$	Nombre de contraintes du type inégalité
$N$	Nombre de périodes d'échantillonnage
$N_e$	Nombre naturel
$N_p$	Nombre naturel

$N_1$	Nombre naturel
$\mathcal{N}$	Opérateur différentiel non linéaire
$\mathbb{N}$	Ensembles des entiers naturels
$p$	Fonction vectorielle (contrainte instantanée)
$n_p$	Nombre de contraintes instantanées
$n_{\mathcal{P}}$	Nombre de variables de décision (d'optimisation)
$\mathcal{P}$	Fonction à plusieurs variables (fonction objectif)
$q$	Fonction vectorielle (contrainte intégrale)
$Q$	Matrice de pondération
$r$	Nombre de sorties
$\bar{r}$	Rayon de la spirale d' <b>Archimède</b>
$R$	Matrice de pondération
$\mathcal{R}_i$	Fonction à plusieurs variables
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^-$	Ensemble des nombres réels négatifs ou nuls
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}_0^+$	Ensemble des nombres réels positifs
$s$	Variable d'intégration
$S$	Sous-espace
$S_p$	Surface de la plaque
$\mathcal{S}$	Fonction à plusieurs variables
$t$	Temps
$t_0$	Instant initial
$t_f$	Instant final
$T$	Transposée d'une matrice
$\mathcal{T}$	Instant intermédiaire
$u$	Variable de commande

$U_{ad}$	Domaine des commandes admissibles
$v$	Fonction vectorielle
$V$	Matrice de poursuite
$\mathcal{V}$	Ensemble des vecteurs de vitesse augmenté
$\mathbb{V}$	Domaine (voisinage d'un point)
$w$	Fonction vectorielle
$x$	Vecteur d'état
$x_0$	Etat initial
$x^d$	Etat désiré
$x_f$	Etat final
$\mathcal{X}$	Domaine de définition d'une fonction
$y$	Vecteur de variables de sortie
$\tilde{y}$	Déplacement de la plaque
$Y$	Fonction analytique (solution d'une équation différentielle)
$Y_0$	Conditions initiales
$\mathcal{Y}$	Image du domaine de définition d'une fonction
$z$	Variable spatiale
$Z$	Variable réelle
$\mathcal{Z}$	Fonction analytique
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^-$	Ensemble des entiers relatifs négatifs

### **Symboles grecs**

$\alpha$	Nombre réel positif
$\beta$	Nombre réel (ordre fractionnaire)
$\Gamma$	Fonction Gamma

$\gamma$	Pas de descente (méthode d'optimisation du gradient)
$\Delta$	Accroissement
$\Delta t$	Période d'échantillonnage
$\delta$	Première variation d'une fonction
$\delta^2$	Deuxième variation d'une fonction
$\epsilon$	Erreur de poursuite
$\varepsilon$	Tolérance
$\bar{\epsilon}$	Nombre réel positif très petit
$\zeta$	Nombre réel positif
$\eta$	Fonction analytique
$\Theta_k$	Fonction analytique orthogonale
$\theta$	Vecteur de variables de décision (optimisation)
$\theta^*$	Optimum global
$\hat{\theta}$	Optimum local
$\kappa$	Contrainte de cisaillement
$\Lambda$	Fonction sommable
$\lambda$	Vecteur des multiplicateurs de Lagrange
$\mu$	Viscosité
$\vartheta$	Fonction analytique (grandeur perturbatrice)
$\nu$	Nombre naturel strictement positif
$\xi$	Nombre réel compris entre 0 et 1
$\rho$	Masse volumique
$\rho_i$	Nombre réel positif
$\sigma$	Nombre réel (ordre fractionnaire)
$\sigma_i$	Nombre réel (ordre fractionnaire)
$\tau$	Horizon de commande
$\Upsilon$	Paramètre de pénalisation

$\Phi_i$	Nombre réel
$\phi$	Fonction scalaire
$\chi$	Fonction vectorielle
$\Psi_i$	Nombre réel
$\psi$	Fonction scalaire
$\omega$	Angle de la spirale d' <b>Archimède</b> (variable d'optimisation)
$\omega_{\max}$	Valeur maximale de $\omega$
$\Delta\omega$	Pas de discrétisation de $\omega$
$\nabla$	Gradient d'une fonction
$\nabla^2$	Matrice hessienne

# Production scientifique réalisée dans le cadre de la thèse

## Publications

- **Ghania IDIRI**, Saïd DJENNOUNE and Maamar BETTAYEB. Solving Fixed Final Time Fractional Optimal Control Problems Using the Parametric Optimization Method. *Asian Journal of Control*, Vol. 18, No. 5, pp. 1–13, 2016.

## Communications

- **Ghania IDIRI**, Saïd DJENNOUNE and Maamar BETTAYEB. Optimal Control of Fractional System Based on the Diffusive Representation. *3th International Conference on System and Control (ICSC'13)*, October 28–30, 2013, Algiers, Algeria.
- **Ghania IDIRI**, Saïd DJENNOUNE and Maamar BETTAYEB. Solving Fractional Optimal Control Problems Using Control Vector Parameterization. *International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'13)*, May 6–8, 2013, Tunisia.
- **Ghania IDIRI**, Saïd DJENNOUNE and Maamar BETTAYEB. Synthèse d'un Retour d'Etat à Gain Dynamique Optimal pour les Systèmes Fractionnaires. *3ème Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications (SOFA'12)*. Université 08 Mai 1945, 25–27 Novembre 2012, Guelma, Algérie.
- **Ghania IDIRI**, Saïd DJENNOUNE and Maamar BETTAYEB. Commande Optimale des Systèmes Fractionnaires par Paramétrisation du Vecteur de Commande. *The First International Conference on Electrical Engineering and Control Applications (ICEECA'2012)*. University of Abbés Laghrour, 20–22 Novembre 2012, Khenchela, Algérie.

# Introduction générale

En automatique lorsque le cahier des charges impose l'optimisation d'un critère de performance et le respect d'un ensemble de contraintes, le problème revient à chercher une commande optimale [1–4]. La théorie de commande optimale désigne l'ensemble de théories et de méthodes utilisées pour concevoir des lois de commande optimales. Par définition, une commande optimale est une commande qui permet de transférer un système dynamique d'un état initial vers un état final, de respecter un certain nombre de contraintes sur l'état et la commande, et d'optimiser un critère de performances [5–8]. La commande optimale occupe une place importante en automatique et trouve des applications dans plusieurs domaines : génie chimique [9], navigation aérienne et spatiale [10, 11], mécanique [12], médical [13], thermique [14], biologique [15], économique [13, 16] et social [17]. La quasi-totalité des cahier des charges sont formulés par des problèmes de commande optimale. Ces problèmes allant de simples exemples comme le célèbre problème de brachistochrone [18] jusqu'aux systèmes complexes, par exemple la commande d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique [19]. Le problème de brachistochrone, posé par **Bernoulli**, a été l'origine de développement de la théorie du calcul des variations [20] qui devient par la suite la théorie de commande optimale.

Dans la formulation d'un problème de commande optimale, le modèle mathématique du système à commander influe considérablement sur la qualité de la commande optimale à obtenir [1, 5]. En général, toute la conception de la loi de commande repose essentiellement

sur le modèle utilisé, par conséquent les performances attendues dépendent de sa précision. Ces dernières années, le développement du calcul fractionnaire [21–24] a amorcé l’utilisation d’une classe de modèles appelés modèles fractionnaires qui représente une alternative intéressante aux modèles d’ordre entier [25–29]. Les modèles fractionnaires sont caractérisés par une faculté à décrire fidèlement certains phénomènes physiques comparativement aux modèles d’ordre entier. En effet, le comportement dynamique de certains systèmes dynamiques ne peut pas être régi par des opérateurs mathématiques classiques (dérivée entière) de manière précise.

En effet, physiquement, l’évolution postérieure d’une grandeur physique ou d’un phénomène dépend forcément de son évolution antérieure [24, 30]. Des études menées sur des exemples pratiques ont montré que cette réalité physique peut être précisément modélisée par un modèle fractionnaire faisant intervenir des dérivées d’ordre non-entier [25, 27, 29, 31, 32]. Mathématiquement, la dérivée fractionnaire est un opérateur non local qui régit parfaitement cette réalité physique désignée sous le vocable effet mémoire [24, 30]. La capacité d’un modèle fractionnaire à décrire avec précision le comportement dynamique d’un système physique a motivé leur utilisation dans des problèmes d’optimisation, de prédiction et de commande, en particulier de commande optimale [26, 33–37].

La commande optimale des systèmes d’ordre fractionnaire est un domaine de recherche très jeune et fertile [38–41]. Les différents résultats développés dans la littérature constituent des généralisations pour certaines théories du cas entier. Ces généralisations sont rendues possibles grâce au développement du calcul variationnel et de l’analyse fonctionnel [23, 42]. L’examen de la littérature dédiée à la commande optimale fractionnaire, nous a permis de définir trois classes de méthodes de résolution.

Le principe des méthodes de la première classe consiste à réduire le système d’ordre fractionnaire à un autre système d’ordre entier en approximant la dérivée fractionnaire [41, 43, 44]. L’objectif recherché est d’appliquer directement les méthodes de commande optimale d’un système d’ordre entier [1, 6], en l’occurrence l’équation d’**Euler-Lagrange**, le principe

du minimum [45], la programmation dynamique [46] et l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman** [1, 3, 6]. Les méthodes de cette classe nécessitent des efforts de calcul importants et la solution est obtenue généralement de manière numérique en utilisant les différences finies ou la méthode de tir [47, 48].

Les méthodes de la deuxième classe ont pour objectif de convertir le problème de commande fractionnaire en un problème d'optimisation statique en approximant la dérivée fractionnaire [22, 32, 49–51]. Par la suite, on applique des méthodes d'optimisation déterministes [52–54], stochastiques [53, 55, 56] ou mixtes pour déterminer la solution du problème d'optimisation résultant. Bien que la solution globale peut être localisée, néanmoins sa qualité dépend de la méthode utilisée pour réduire le problème de commande optimale en un problème d'optimisation et la dimension du problème d'optimisation. Généralement, une dimension importante améliore davantage la solution finale mais en contrepartie nécessite des efforts de calcul importants et des temps de convergences considérables pour le processus d'optimisation. Ces méthodes sont désignées par les méthodes directes [57, 58].

Les méthodes de la troisième classe sont des généralisations des méthodes indirectes du cas entier au cas fractionnaire. Les méthodes sont développées en exploitant la théorie du calcul variationnel fractionnaire qui connaît un essor spectaculaire [23, 42, 59, 60]. Cette branche des mathématiques est assez développée, ces dernières années, et a contribué énormément au développement de la commande optimale fractionnaire. Deux méthodes ont été étendues avec succès au cas fractionnaire : l'équation d'**Euler-Lagrange** [38, 59–64] et le principe du minimum [51, 65–67]. Ces deux méthodes permettent d'écrire les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale fractionnaire. Ces conditions sont données sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires fractionnaires souvent difficiles à résoudre analytiquement. Ainsi, des méthodes numériques [38, 51, 61, 62, 65–67] et approximatives [63, 68–72] ont été utilisées pour résoudre les conditions d'optimalité et déterminer la commande optimale. Pour les méthodes numériques, on distingue deux types [22]. Le premier type a pour principe l'approximation de la dérivée fractionnaire en utilisant des

schémas numériques explicites ou implicites. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer la formule de **Grünwald-Letnikoff** [54] et la méthode d'**Adams** [73]. Le deuxième type de méthodes est basée sur l'intégration de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire pour la convertir à une équation intégrale. Puis des quadratures (formules d'intégration numériques), par exemple la formule de **Simpson** et de **Gauss-Legendre** [47, 48], sont utilisées pour approximer numériquement le terme intégrale résultant. Ces méthodes nécessitent des choix judicieux pour certains paramètres, par exemple le pas de discrétisation, pour assurer la convergence et la précision souhaitée pour la solution. Ainsi, les méthodes approximatives (méthode de décomposition d'**Adomian** [68, 74], la méthode de l'itération variationnelle [69, 75, 76] et la méthode de la perturbation homotopique [71]) représente des alternatives intéressantes. Ces méthodes permettent de déterminer des solutions analytiques ou numériques approximées, selon la nature des équations, sans discrétisation ni linéarisation [70]. La solution est obtenue, à partir du solution initiale à choisir, en utilisant des formules itératives faciles à implémenter. Ces méthodes ont été largement utilisées pour la résolution des problèmes de commande optimale. Parmi les méthodes utilisées dans le cas de la commande optimale fractionnaire, on retrouve la méthode de l'itération variationnelle [63, 77]. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité et nécessite seulement l'identification du multiplicateur de Lagrange [69, 78–80]. Ce dernier peut être déterminée aisément en utilisant la théorie du calcul variationnel entier [20].

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire. L'objectif consiste à proposer des méthodes pour la détermination de lois de commande optimales, basée sur l'approche directe, en utilisant de nouveaux outils mathématiques pour convertir le problème de commande optimale en un problème d'optimisation classique.

Le reste de la thèse est organisée comme suit :

Le **premier** chapitre est consacré à des notions de base du calcul fractionnaire utilisées dans les chapitres qui suivent. Le chapitre débute par définir la dérivée et l'intégrale

classiques (cas entier). Puis introduit la fonction Gamma utilisée fréquemment en calcul fractionnaire particulièrement dans la définition de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire [24]. Le chapitre enchaine par la présentation des définitions usuelles de la dérivée et de l'intégrale fractionnaires, en l'occurrence les définitions de **Riemann-Liouville**, de **Caputo** et de **Grünwald-Letnkoff**. La suite du chapitre est réservée à la représentation d'état des systèmes d'ordre fractionnaire commensurables et non commensurables. La fin du chapitre présente un exemple d'un système physique caractérisé par une dynamique fractionnaire. Il s'agit du déplacement d'une plaque métallique, supposée rigide, dans un fluide Newtonien.

Le **deuxième** chapitre est dédié à la commande optimale des systèmes dynamiques. Le chapitre commence par la définition de la commande optimale, puis présente la forme mathématique générale d'un problème de commande optimale tout en expliquant les différentes parties. La terminologie utilisée dans ce domaine est aussi précisée dans ce chapitre. La suite du chapitre est réservée à la résolution d'un problème de commande optimale. La première partie présente les différentes approches proposées dans littérature qui permettent d'écrire les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale. La deuxième partie expose les principes des différentes classes de méthodes numériques utilisées pour résoudre les conditions d'optimalité tout en précisant les avantages et les inconvénients de chaque classe.

Le **troisième** chapitre aborde la recherche de l'optimum globale d'une fonction à plusieurs variables. Le chapitre commence par un rappel sur les différentes notions de base relatives à la théorie de l'optimisation. Puis introduit les conditions d'optimalité pour un problème d'optimisation, sans contraintes, après avoir posé les hypothèses d'existence de la solution. Une revue sur les différentes méthodes d'optimisation globale est présentée dans ce chapitre. La suite du chapitre est réservée à la méthode d'optimisation globale d'Alienor [81, 82]. La méthode utilisent des transformations réductrices pour réduire la fonction à plusieurs variables en une autre fonction d'une seule variable. Le but est de faciliter la localisation d'un optimum global d'une fonction à plusieurs variables. La convergence de la méthode est mise en exergue, à la fin du chapitre, par un exemple d'application.

Le **quatrième** chapitre introduit la méthode de l'itération variationnelle. Cette méthode est utilisée pour résoudre des équations différentielles en utilisant une formule itérative à partir d'une solution initiale arbitraire [69, 83]. Cette méthode permet de déterminer des solutions analytiques approximatives. Ainsi, après avoir présenté le type d'équations différentielles ordinaires fractionnaires considéré et les conditions d'existence de solutions, nous avons présenté les différentes classes de méthodes de résolution de ce type d'équations. Par la suite l'accent est mis sur la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire utilisée dans le cadre de cette thèse. L'exposé commence par la présentation du principe de la méthode, puis précise les conditions nécessaires pour assurer la convergence et se termine par deux exemples d'applications illustrant l'efficacité de la méthode.

Le **cinquième** chapitre est consacré à la méthode de paramétrisation du vecteur de commande. Dans ce chapitre, une approche est proposée pour étendre l'application de cette méthode aux systèmes d'ordre fractionnaire. Le chapitre commence par la formulation mathématique du problème de commande optimale. Ensuite, les conditions nécessaires pour l'existence d'une solution sont précisées. Pour situer la contribution de la thèse, un état de l'art sur la commande optimale fractionnaire est donné dans ce chapitre. La suite du chapitre expose le principe de l'approche proposée, basée sur la méthode de l'itération variationnelle, pour convertir le problème de commande optimale en un problème d'optimisation à plusieurs variables après la paramétrisation de la commande. Le problème revient à chercher les coefficients optimaux de la paramétrisation permettant d'optimiser le critère de performances. Ces derniers sont déterminés en utilisant la méthode d'optimisation d'Alienor. Les différentes étapes de l'approche proposée sont résumées sous forme d'un algorithme. Deux exemples d'application sont présentés à la fin du chapitre pour montrer la convergence de l'algorithme proposée vers la solution exacte.

La thèse se termine par une conclusion générale sur l'étude réalisée tout en mentionnant un certain nombre de perspectives de continuité.

# Généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire

## 1.1 Introduction

La question posée, dans une lettre datée du 3 septembre 1695, par **Hôpital** à **Leibnitz**, un des pionniers du calcul intégral et différentiel, sur la possibilité de calculer une dérivée dont l'ordre n'est pas entier a amorcé le développement d'une nouvelle branche des mathématiques appelée *calcul fractionnaire*. Cette branche constitue une généralisation des concepts du calcul intégral et différentiel classique (entier) au cas non entier [21, 24, 32, 84, 85]. **Leibniz** dans sa réponse mentionnait qu'une telle expression mènera à un paradoxe, mais qu'un jour, il en découlera de très utiles résultats. Cette réponse est entièrement confirmée par le rôle prépondérant que joue le calcul fractionnaire dans les différents domaines. Le mérite revient aux mathématiciens **Abel**, **Liouville**, **Riemann**, **Grünwald** et **Letnikoff** qui ont posé les premiers fondements théoriques du calcul fractionnaire.

Le développement du calcul fractionnaire comprend deux volets : théorique et appliqué. Sur le plan théorique, l'objectif consiste à généraliser les différentes théories du calcul différentiel et intégral classique [24, 30, 32, 37]. Le deuxième volet s'intéresse principalement aux applications du calcul fractionnaire [21, 26, 28, 33–35]. Sur ce plan c'est la modéli-

sation mathématique qui tire profit des différents progrès réalisés. En effet, tous les problèmes pratiques, en particulier de l'ingénierie (optimisation, simulation, prédiction, commande, ...), nécessitent l'utilisation d'un modèle mathématique qui traduit convenablement le comportement dynamique des systèmes dont le modèle fractionnaire a démontré ses capacités [21, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35].

L'utilisation des modèles mathématiques fractionnaires et le calcul fractionnaire trouve des applications dans divers domaines [32, 33, 86] : biologique, mécanique, biomédical, imagerie, thermique, automatique, géotechnique, aéronautique, chimique et la liste est longue.

En automatique, l'utilisation du calcul fractionnaire en modélisation et en commande a largement contribué dans le développement de cette discipline [24, 26, 30, 33, 86]. Le succès d'une stratégie de commande est conditionné par l'utilisation d'un modèle fiable du système à commander. En règle générale, on exige un modèle n'est ni très complexe ni trop simplifié. Un modèle fractionnaire est l'un des modèles qui répond amplement à cette règle. Concernant la commande des systèmes, des travaux ont démontré l'apport d'un correcteur fractionnaire. En effet, l'intégration d'une dynamique fractionnaire permet d'améliorer davantage les performances et la robustesse [24, 26, 33, 35].

La prépondérance d'un modèle fractionnaire peut être expliquée par le fait que ce dernier est caractérisé par l'effet mémoire [24, 30]. D'un point de vue physique, l'évolution postérieure d'un phénomène dépend forcément de son évolution antérieure. Cette réalité physique peut être décrite fidèlement par un modèle fractionnaire. Cette caractéristique a fait des modèles fractionnaires des modèles prometteurs pour la modélisation et la prédiction dans plusieurs domaines [21, 25, 29, 31, 32]. En effet, plusieurs phénomènes physiques importants en électromagnétisme, en acoustique, en viscoélasticité, en électrochimie, en thermique peuvent être décrits avec précision par des modèles fractionnaires. En automatique, des résultats concluants sont obtenus et la théorie de commande fractionnaire est amplement développée avec des avancées notables [86].

Ainsi, le contenu de ce premier chapitre est dédiée à des généralités sur le calcul frac-

tionnaire et les systèmes d'ordre fractionnaire. Le chapitre commence par l'introduction des notions de base du calcul fractionnaire utilisées le long de cette thèse. Puis, on s'intéresse aux systèmes d'ordre fractionnaire et leur représentation par la forme d'état. La fin du chapitre présente un exemple d'un système physique dont la dynamique est décrite par un modèle fractionnaire. Il s'agit du déplacement verticale d'une plaque métallique, supposée rigide, dans un fluide Newtonien. La modélisation mathématique de l'évolution du déplacement conduit à un modèle fractionnaire.

## 1.2 Dérivée et intégrale d'ordre entier

Etant donnée une fonction analytique  $f(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , on rappelle les notions de dérivée et de l'intégrale, d'ordre  $k \in \mathbb{N}$ , associées à  $f(t)$ . Dans ce qui suit, on suppose que la variable dépendante  $f(t)$  est de classe  $k$ , c'est-à-dire  $f(t) \in C^k(\mathbb{R})$ .  $t \in \mathbb{R}^+$  est la variable indépendante qui représente le temps le long de cette thèse.

**Définition 1.1** ([68]). *Si la limite suivante existe,*

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(t - j h)}{h^k} \quad (1.1)$$

*elle est appelée dérivée d'ordre  $k$  de la fonction  $f(t)$  au point  $t$ . La fonction analytique  $f(t)$  est dite alors  $k$  fois dérivable au point  $t$ . La variable  $h \in \mathbb{R}$  représente le pas de discrétisation.*

**Remarque 1.1.** *Dans la définition de la dérivée (1.1), le nombre de combinaisons, sans répétition, de  $k$  objets  $j$  à  $j$  (nombre de groupes de  $j$  objets différents qu'on peut former avec  $k$  objets sans tenir compte de l'ordre) est défini comme suit :*

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (1.2)$$

avec  $k, j \in \mathbb{N}$ .

La primitive d'ordre  $k$ , d'une fonction analytique  $f(t)$ , peut être définie intuitivement comme l'opération inverse de la dérivée. Parfois, elle est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée d'ordre  $k$ .

**Définition 1.2** ([87]). *Si*

$$\frac{d^k F(t)}{dt^k} = f(t) \quad (1.3)$$

alors  $F(t)$  est appelée primitive d'ordre  $k$  de la fonction analytique  $f(t)$ .

En introduisant l'opérateur mathématique  $D^k$ , qui agit sur la fonction  $f(t)$ , les dérivées et les primitives d'ordre  $k \in \mathbb{Z}$  (Figure 1.1) peuvent être définies comme suit [24, 30] :

$${}_t D_t^k f(t) = \begin{cases} \frac{d^k f(t)}{dt^k}, & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ f(t), & \text{si } k = 0 \\ \int_{t_0}^t {}_t D_t^{k+1} f(t) dt, & \text{si } k \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \quad (1.4)$$

ou encore

$${}_t D_{t_0}^k f(t) = \begin{cases} (-1)^k \frac{d^k f(t)}{dt^k}, & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ f(t), & \text{si } k = 0 \\ \int_t^{t_0} {}_t D_{t_0}^{k+1} f(t) dt, & \text{si } k \in \mathbb{Z}^- \end{cases} \quad (1.5)$$

La récurrence utilisée pour définir la primitive d'ordre  $k$  signifie

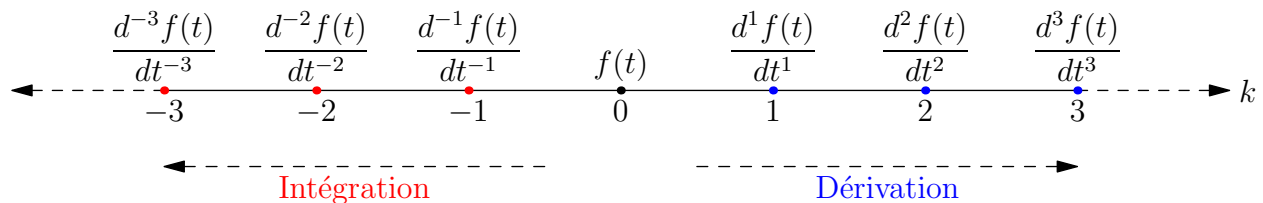


FIGURE 1.1: Dérivation et intégration d'ordre entier.

$${}_{t_0}D_t^k f(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t f(t) dt \dots dt}_{|k| \text{ intégrations}} \quad k \in \mathbb{Z}^- \quad (1.6)$$

$${}_tD_{t_0}^k f(t) = \underbrace{\int_t^{t_0} \dots \int_t^{t_0} f(t) dt \dots dt}_{|k| \text{ intégrations}} \quad k \in \mathbb{Z}^- \quad (1.7)$$

**Remarque 1.2.** La notion  ${}_{t_0}D_t^k$  utilisée pour l'opérateur de la dérivée est celle proposée par [88]. Les réels  $t$  et  $t_0$  désignent respectivement la variable indépendante par rapport à laquelle on applique l'opérateur de dérivation et sa valeur initiale. La dérivée  ${}_{t_0}D_t^k$  est appelée dérivée à gauche de  $f(t)$ , c'est-à-dire l'opérateur  $D^k$  agit sur le passé de  $f(t)$ .  ${}_tD_{t_0}^k$  représente la dérivée fractionnaire à droite. Dans ce cas, l'opérateur  $D^k$  agit sur le futur de  $f(t)$ .

**Remarque 1.3.** Lorsque  $k \in \mathbb{Z}_0^+$ , on remarque que les indices  $t_0$  et  $t$  sont inutiles ; c'est-à-dire le changement de l'indice  $t_0$  n'affecte pas le résultat final. Par exemple,  ${}_0D_t^3 f(t) = {}_\infty D_t^3 f(t)$ . Dans ce cas, l'opérateur  $D^k$  est dit local. Par contre, pour  $k \in \mathbb{Z}_*^-$ , le résultat dépend de la valeur de  $t_0$ . Par exemple,  ${}_0D_t^{-2} f(t) \neq {}_1D_t^{-2} f(t)$ . Dans ce cas,  $D^k$  est dit non-local.

Les relations (1.6) et (1.7) peuvent être exprimées sous forme d'une intégrale en utilisant la formule de **Cauchy** donnée par le Théorème 1.1.

**Théorème 1.1** ([24]). L'intégrale indéfinie d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  d'une fonction  $f(t)$  est donnée comme suit :

$${}_{t_0}D_t^{-k} f(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t f(t) dt \dots dt}_k \text{ intégrations} = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{(k-1)}}{(k-1)!} f(s) ds, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

$${}_tD_{t_0}^{-k} f(t) = \underbrace{\int_t^{t_0} \dots \int_t^{t_0} f(t) dt \dots dt}_k \text{ intégrations} = \int_t^{t_0} \frac{(s-t)^{(k-1)}}{(k-1)!} f(s) ds, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.9)$$

Comme l'intégrale de **Riemann** est défini comme suit,

$$\int_{t_0}^t f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} h f(t - kh) \quad (1.10)$$

alors d'après la relation (1.8) du Théorème 1.1, on a

$${}_t D_t^{-k} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} h \frac{(kh)^{k-1}}{(k-1)!} f(t - kh) \quad (1.11)$$

avec  $\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor$  est le nombre entier relatif immédiatement inférieure à  $\frac{t-t_0}{h}$ .

### 1.3 Dérivée et intégrale d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire est la généralisation de la dérivée et de l'intégrale d'ordre entier pour inclure l'ordre non entier (fractionnaire). Dans ce cas, plusieurs définitions existent dans la littérature [22, 30, 32, 37]. Avant de les présenter, on commence par la présentation de la fonction  $\Gamma(t)$  très utilisée en calcul fractionnaire.

**Définition 1.3** ([24, 30]). *Pour  $t \in \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\Gamma(t)$  est définie comme suit :*

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(t-1)} ds \quad (1.12)$$

La fonction  $\Gamma(t)$  admet, parmi d'autres, les deux propriétés principales suivantes :

$$\Gamma(1) = 1 \quad (1.13)$$

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad (1.14)$$

De la propriété (1.14), on peut facilement déduire que pour  $k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad (1.15)$$

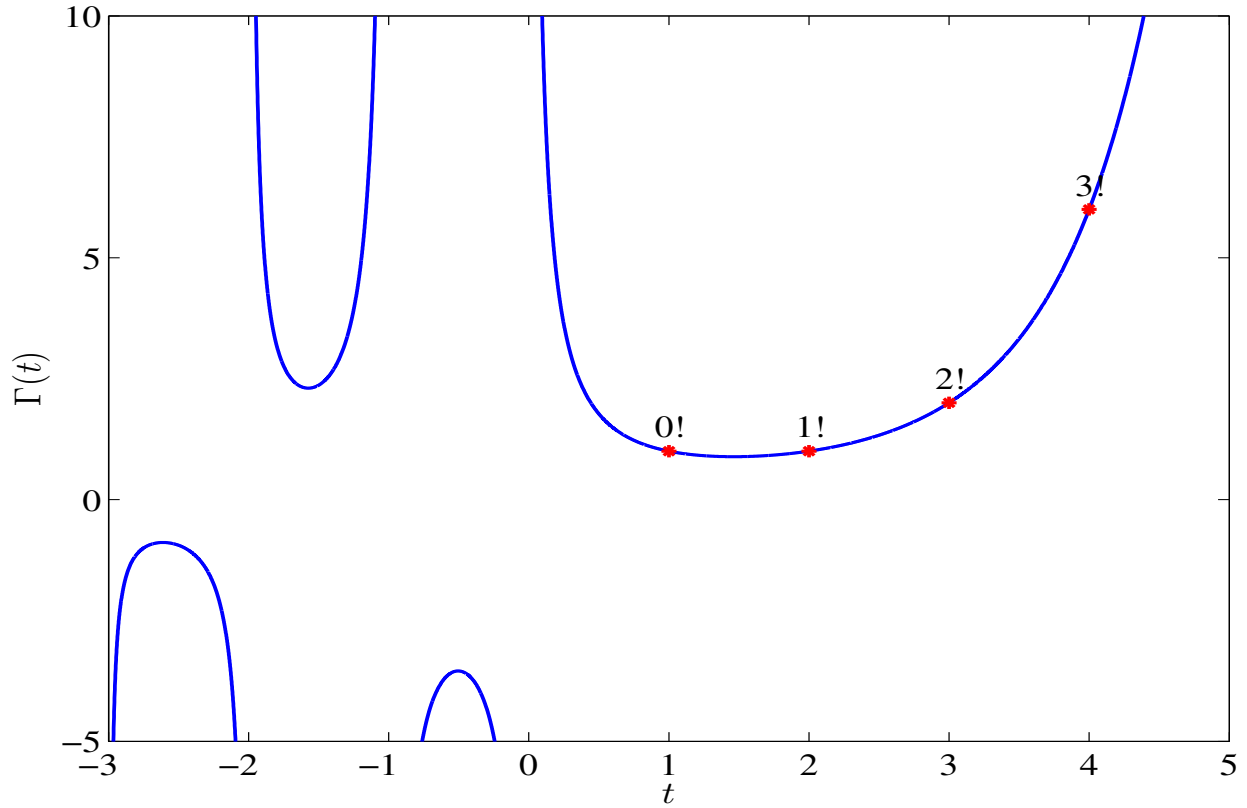


FIGURE 1.2: Graphe de la fonction  $\Gamma(t)$ .

Par conséquent, la fonction  $\Gamma(k)$  est une généralisation de la factorielle pour  $k \in \mathbb{R}$  [24]. L'évolution de la fonction  $\Gamma(t)$  est illustrée sur la Figure 1.2. La Figure 1.2 montre clairement que pour  $t \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\Gamma(t)$  coïncident avec la factorielle de  $t - 1$  (relation 1.15).

Notons que, grâce à la fonction  $\Gamma(t)$ , le nombre de combinaisons (1.2) peut être généralisé au cas non entier ( $c, e \in \mathbb{R}$ ) comme suit

$$\binom{c}{e} = \begin{cases} \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(e+1)\Gamma(c-e+1)}, & \text{si } c, e, c-e \notin \mathbb{Z}^- \\ \frac{(-1)^e \Gamma(e-c)}{\Gamma(e+1)\Gamma(-c)}, & \text{si } c \in \mathbb{Z}^- \wedge e \in \mathbb{Z}_0^+ \\ 0 & \text{si } [(e \in \mathbb{Z}^- \vee e-c \in \mathbb{N}) \wedge c \notin \mathbb{Z}^-] \vee (c, e \in \mathbb{Z}^- \wedge |c| > |e|) \end{cases} \quad (1.16)$$

Pour le cas fractionnaire, il existe plusieurs définitions pour la dérivée. Dans cette section,

on reprend les plus utilisées dans la littérature [24, 30, 32].

**Définition 1.4** ([24, 30, 32]). *La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** est définie comme suit :*

$${}_t D_t^\sigma f(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)} f(s) ds, & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \sigma = 0 \\ \frac{d^{[\sigma]}}{dt^{[\sigma]}} {}_t D_t^{\sigma-[\sigma]} f(t), & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.17)$$

ou encore

$${}_t D_{t_0}^\sigma f(t) = \begin{cases} \int_t^{t_0} \frac{(s-t)^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)} f(s) ds, & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \sigma = 0 \\ (-1)^{[\sigma]} \frac{d^{[\sigma]}}{dt^{[\sigma]}} {}_t D_{t_0}^{\sigma-[\sigma]} f(t), & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.18)$$

avec  $[\sigma]$  est le nombre entier relatif immédiatement supérieure à  $\sigma$ .

Remarquons si  $\sigma \in \mathbb{Z}$ , les dérivée de **Riemann-Liouville** (1.17) et (1.18) coïncident respectivement avec les dérivées d'ordre entier (1.4) et (1.5). En particulier si  $\sigma \in \mathbb{N}$ , on a

$${}_t D_t^\sigma f(t) = \frac{d^\sigma f(t)}{dt^\sigma} \quad (1.19)$$

$${}_t D_{t_0}^\sigma f(t) = (-1)^\sigma \frac{d^\sigma f(t)}{dt^\sigma} \quad (1.20)$$

Notons, aussi, que la définition de **Riemann-Liouville** (1.17) et (1.18) généralise la formule de **Cauchy** (1.8) ou (1.9) pour le cas  $\sigma < 0$ .

Cette définition est très utilisée dans la théorie du calcul fractionnaire en particulier dans les mathématiques pures.

**Définition 1.5** ([24, 30, 32]). *La dérivée de **Caputo** est définie comme suit :*

$${}_t D_t^\sigma f(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)} f(s) ds, & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \sigma = 0 \\ {}_t D_t^{\sigma-[\sigma]} \frac{d^{[\sigma]}}{dt^{[\sigma]}} f(t), & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.21)$$

ou encore

$${}_t D_{t_0}^\sigma f(t) = \begin{cases} \int_t^{t_0} \frac{(s-t)^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)} f(s) ds, & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^- \\ f(t), & \text{si } \sigma = 0 \\ (-1)^{[\sigma]} {}_t D_{t_0}^{\sigma-[\sigma]} \frac{d^{[\sigma]}}{dt^{[\sigma]}} f(t), & \text{si } \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.22)$$

Lorsque  $\sigma \in \mathbb{Z}$ , on constate que les dérivées de **Caputo** (1.21) et (1.22) coïncident respectivement avec les dérivées d'ordre entier (1.4) et (1.5). Aussi, pour  $\sigma \leq 0$ , les définitions de **Caputo** et de **Riemann-Liouville** sont identiques.

**Définition 1.6** ([24, 30, 32]). La dérivée fractionnaire **Grünwald-Letnikov** est définie comme suit :

$${}_t D_t^\sigma f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\sigma}{j} f(t-jh)}{h^\sigma} \quad (1.23)$$

$${}_t D_{t_0}^\sigma f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\sigma}{j} f(t+jh)}{h^\sigma} \quad (1.24)$$

La dérivée de **Grünwald-Letnikov** est basée sur les différences finies fractionnaires. Cette définition peut être vue comme une extension de la dérivée dans le cas entier (1.1) en utilisant la fonction  $\Gamma(t)$  qui généralise la factorielle au cas réel. La définition de **Grünwald-Letnikov** est plus utilisée pour la simulation des équations différentielles d'ordre fraction-

naire [22]. Ainsi sous l'hypothèse d'un pas  $h$  suffisamment très petit, la dérivée fractionnaire de  $f(t)$  à l'instant  $t$  peut être approximée comme suit :

$${}_{t_0}D_t^\sigma f(t) \approx \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\sigma}{j} f(t-jh)}{h^\sigma} \quad (1.25)$$

$${}_tD_{t_0}^\sigma f(t) \approx \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\sigma}{j} f(t+jh)}{h^\sigma} \quad (1.26)$$

D'après la définition de la dérivée de **Grünwald-Letnikoff**, il ressort que la borne supérieure de la somme diverge vers  $\infty$ . Ainsi, lorsque  $\sigma \in \mathbb{N}$ , tous les termes avec  $j > \sigma$  sont nuls, par conséquent la dérivée de **Grünwald-Letnikoff** (1.23) est équivalent à la dérivée d'ordre entier d'ordre  $k$  (1.1) lorsque  $h > 0$ , c'est-à-dire c'est la dérivée à droite de  $f(t)$ . De même, lorsque  $h < 0$ , la dérivée de **Grünwald-Letnikoff** (1.24) est équivalent à (1.1) multipliée par  $(-1)^\sigma$ , c'est-à-dire c'est la dérivée à gauche de  $f(t)$  multipliée par  $(-1)^\sigma$ . Si  $f(t)$  est dérivable, les deux dérivées sont égales, et la définition de **Grünwald-Letnikoff** est une généralisation de la dérivée d'ordre entier (1.1). Notons aussi pour  $\sigma \in \mathbb{N}$ , le nombre de termes de la somme est fini, c'est-à-dire c'est le seul cas où la dérivée ne dépend pas de  $t_0$  (opérateur local).

La Figure 1.3 montre les évolutions de la première dérivée ( $\sigma = 1$ ) et de la dérivée fractionnaire d'ordre  $\sigma = 0,5$  de la fonction  $f(t) = \sin(t)$ .

## 1.4 Notion de l'opérateur non local

La caractéristique commune pour les différentes définitions de la dérivée fractionnaire est très claire. En effet, l'opérateur de la dérivée  ${}_{t_0}D_t^\sigma f(t)$  dépend toujours des limites  $t_0$  et  $t$  sauf lorsque  $\sigma \in \mathbb{Z}_0^+$ . Par conséquent l'opérateur  ${}_{t_0}D_t^\sigma f(t)$  est dit non-local [24]. Cette ca-

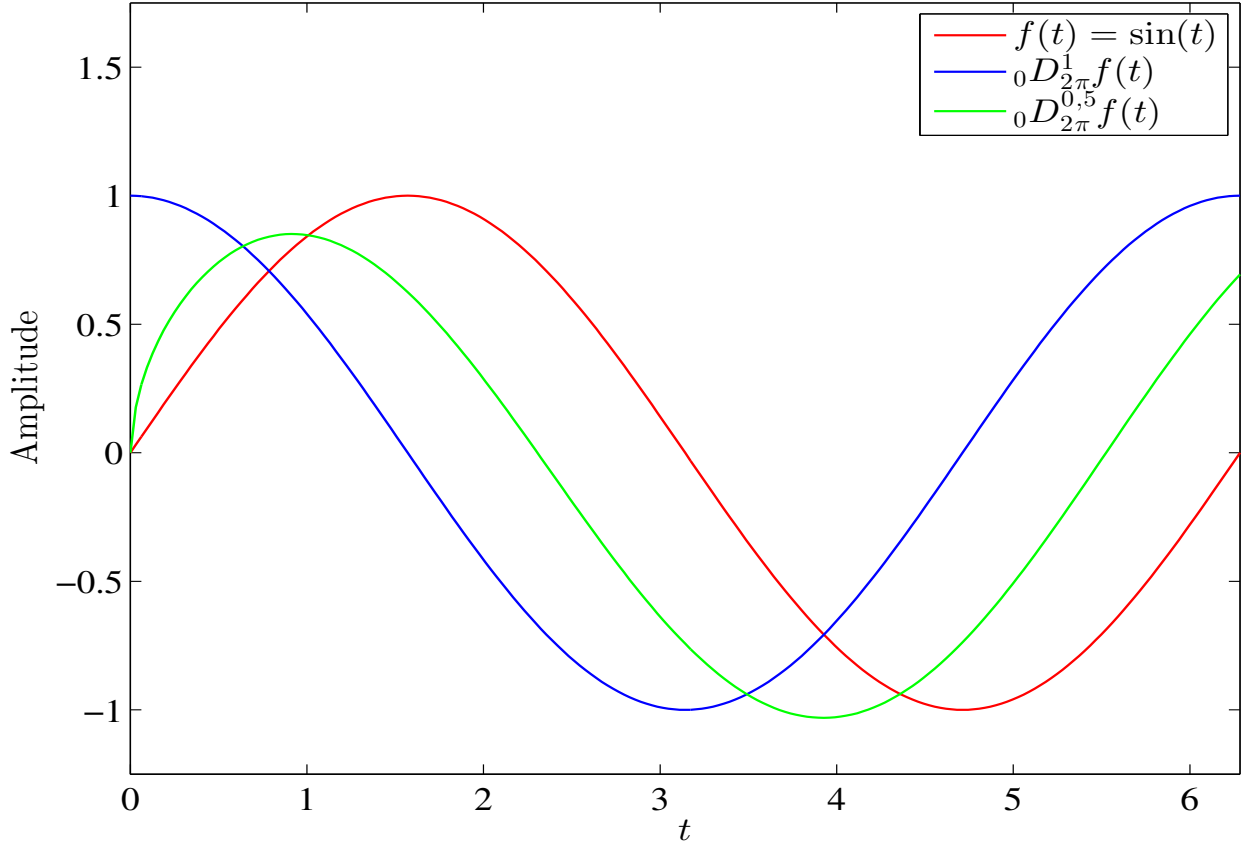


FIGURE 1.3: Première dérivée et dérivée fractionnaire d'ordre 0, 5 de la fonction  $f(t) = \sin(t)$ .

caractéristique représente le point fort des modèles d'ordre fractionnaire dans la modélisation des systèmes physiques. En effet, la dérivée fractionnaire de la variable  $f(t)$  à  $t_1$  dépend de l'historique de la variable  $f(t)$ , c'est-à-dire de  $f(t)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_1$  (Figure 1.4). En d'autres termes, l'opérateur  ${}_t D_t^\sigma$  possède l'effet mémoire [30]. Cette caractéristique remarquable traduit convenablement la réalité physique puisque l'évolution d'un phénomène dépend inéluctablement de son évolution antérieure.

La dérivée fractionnaire  ${}_t D_{t_0}^\sigma f(t)$ , dépend des valeurs de la fonction  $f(t)$  après l'instant  $t$ . Si  $t$  est l'instant courant, l'opérateur  ${}_t D_{t_0}^\sigma f(t)$  est non causal car il est impossible de connaître les valeurs futures de  $f(t)$  [24].

Bien que les deux opérateurs  ${}_t D_t^\sigma f(t)$  et  ${}_t D_{t_0}^\sigma f(t)$  sont utilisés pour définir la dérivée fractionnaire, comme les systèmes physiques sont causaux ; leur dynamique ne peut être décrite qu'en utilisant l'opérateur  ${}_t D_t^\sigma f(t)$ . L'opérateur  ${}_t D_{t_0}^\sigma f(t)$  peut être utilisé pour évaluer la

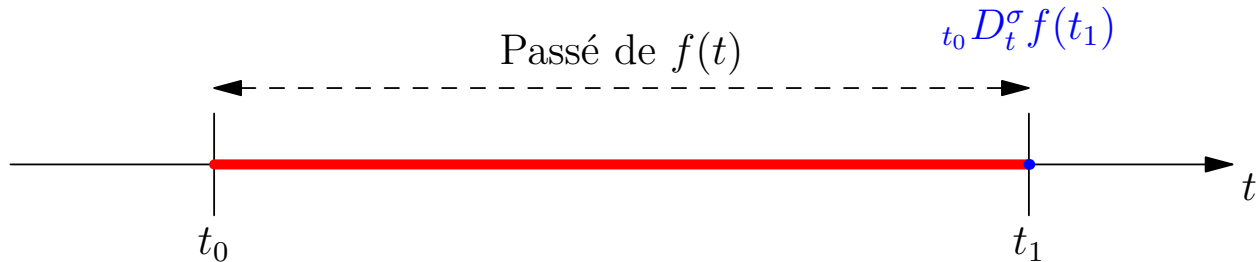


FIGURE 1.4: Dérivée fractionnaire qui agit sur le passé de  $f(t)$  (partie en rouge).

dérivée fractionnaire d'une fonction analytique  $f(t)$ .

**Remarque 1.4.** *Si le sens physique de la dérivée d'ordre entier est bien maîtrisé ; dans le cas fractionnaire l'interprétation physique de la dérivée fractionnaire est très difficile [89]. Cette question sur le sens physique de la dérivée fractionnaire remonte à la première conférence sur le calcul fractionnaire en 1974 (New Haven, USA) et demeure un problème ouvert. Pour élucider cette question, on peut citer la contribution de [36] .*

## 1.5 Systèmes dynamique d'ordre fractionnaire

Ces dernières années, plusieurs travaux ont montré l'utilité et l'avantage de l'utilisation des modèles fractionnaires [21, 25, 28, 31, 32]. En effet, comme a été souligné précédemment, l'effet mémoire qui caractérise la dérivée fractionnaire reflète une réalité physique concernant le comportement dynamique des systèmes [30]. Pratiquement, l'évolution d'une variable physique (phénomène) dépend de son passé. Ainsi, un modèle fractionnaire constitue un outil mathématique très intéressant pour décrire le comportement dynamique d'un système physique et certaines propriétés physiques [26, 32, 34, 35].

Un modèle fractionnaire peut être obtenu soit par modélisation mathématique ou par modélisation expérimentale (identification) [86]. La modélisation mathématique consiste à écrire les lois physiques faisant intervenir des calculs de nature fractionnaire [32, 86]. Ce type de modélisation est généralement très difficile et demande des connaissances poussées sur la physique des phénomènes à considérer. L'identification utilise les mesures effectuées sur

l'évolution des variables caractéristiques du système à modéliser [25, 86]. Sur la base de ces mesures, une structure de modèle est proposée et ces différents paramètres sont identifiés en utilisant des méthodes dédiées. Cette dernière étape est généralement réalisée par optimisation ; les paramètres sont identifiés de sorte à minimiser l'écart entre la sortie prédite par le modèle et la mesure réelle collectée.

En automatique, on distingue deux représentations couramment utilisées pour l'étude d'un système d'ordre fractionnaire : la fonction de transfert (dans le cas linéaire) et la représentation d'état [30]. En commande optimale, le modèle du système doit être sous la forme d'état [1, 5]. Ainsi, dans ce qui suit, on s'intéresse seulement à la représentation d'état.

## 1.6 Représentation d'état

Le comportement dynamique d'un système dynamique est souvent décrit par des équations différentielles [1, 32]. Ces dernières représentent les relations mathématiques entre les entrées et les sorties. Souvent la modélisation mathématique conduit à des équations différentielles. Pour les problèmes d'automatique, on a toujours recours à les mettre sous forme exploitable pour l'analyse et la synthèse. La forme d'état est l'une des représentations les plus utilisées [1, 3, 8]. Cette représentation interne, appelée aussi boîte blanche, donne toutes les relations entre les variables caractéristiques du système (commande, état et sortie). Les états et les commandes sont liés par une équation différentielle appelée équations d'état. Par contre les états, les sorties et éventuellement les commandes sont liés par une équation algébrique appelée équation de sorties. Notons aussi que dans la formulation d'un problème de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire, la dynamique du système est décrite par l'équation d'état [38, 63, 90].

### 1.6.1 Représentation d'état d'un système fractionnaire linéaire

La modélisation d'un système fractionnaire linéaire monovariante conduit à l'équation différentielle ordinaire fractionnaire de la forme

$$a_n D^{\sigma_n} y(t) + a_{n-1} D^{\sigma_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (1.27)$$

où  $a_i$  et  $b_j$  sont des coefficients réels pour  $i = 0, \dots, n$  et  $j = 0, \dots, m$  avec  $m \leq n$ . Les variables  $y(t)$  et  $u(t)$  sont respectivement la sortie et la commande du système.

Selon la nature des ordres  $\sigma_i$  et  $\beta_j$  ( $i = 0, \dots, n$ ;  $j = 0, \dots, m$ ), on peut distinguer deux types de systèmes [33] : les systèmes commensurables et non commensurables. On utilise aussi la terminologie systèmes d'ordres commensurables et non commensurables. Dans ce qui suit, on utilise la première appellation.

Pour un système commensurables, les ordres  $\sigma_i$  et  $\beta_j$  sont des multiples entiers d'un ordre  $\sigma \in \mathbb{R}$  appelée ordre de base. Dans ce cas, on a

$$\frac{\sigma_i}{\sigma} = k_i, \quad k_i \in \mathbb{N} (i = 0, \dots, n) \quad (1.28)$$

$$\frac{\beta_j}{\sigma} = l_j, \quad l_j \in \mathbb{N} (j = 0, \dots, m) \quad (1.29)$$

Ainsi, l'équation différentielle (1.27) prend la forme suivant :

$$a_n D^{k_n \sigma} y(t) + a_{n-1} D^{k_{n-1} \sigma} y(t) + \dots + a_0 D^{0 \times \sigma} y(t) = b_m D^{l_m \sigma} u(t) + b_{m-1} D^{l_{m-1} \sigma} u(t) + \dots + b_0 D^{0 \times \sigma} u(t) \quad (1.30)$$

qu'on peut récrire comme suit :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{k_i \sigma} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{l_j \sigma} u(t) \quad (1.31)$$

Remarquons que pour une entrée  $u(t)$  connue la deuxième somme de l'équation (1.31) peut être évaluée, donc on peut poser [30]

$$\sum_{j=0}^m b_j D^{l_j \sigma} u(t) = U(t) \quad (1.32)$$

où  $U(t)$  représente la nouvelle excitation pour le système.

Si les deux conditions (1.28) et (1.29) ne sont pas remplies, le système fractionnaire est dit non commensurables [30].

### Cas d'un système fractionnaire non commensurable

Pour mettre le système fractionnaire non commensurable dont la dynamique est décrite par l'équation différentielle fractionnaire (1.27) sous la forme d'état, on commence par écrire cette dernière sous la forme suivante [30] :

$$a_n D^{\sigma_n} y(t) + a_{n-1} D^{\sigma_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\sigma_1} y(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (1.33)$$

En divisant cette dernière par  $a_n \neq 0$ , il vient :

$$D^{\sigma_n} y(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\sigma_{n-1}} y(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} D^{\sigma_1} y(t) - \frac{a_0}{a_n} y(t) + \frac{1}{a_n} u(t) \quad (1.34)$$

et en introduisant les variables d'état  $x_i$  tel que

$$x_1^{\sigma_1}(t) = D^{\sigma_1} y(t) \quad (1.35)$$

$$x_i^{\sigma_i - \sigma_{i-1}}(t) = D^{\sigma_i} y(t), \quad i = 2, \dots, n \quad (1.36)$$

on obtient le modèle d'état suivant :

$$x_1^{\sigma_1}(t) = x_2(t) \quad (1.37)$$

$$x_i^{\sigma_i - \sigma_{i-1}}(t) = x_{i+1}(t), \quad j = 2, \dots, n-1 \quad (1.38)$$

$$x_n^{\sigma_n - \sigma_{n-1}}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \frac{1}{a_n} u(t) \quad (1.39)$$

ce qui conduit à la forme d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1^{\sigma_1}(t) \\ x_2^{\sigma_2 - \sigma_1}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^{\sigma_n - \sigma_{n-1}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ 0 \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.40)$$

qu'on peut mettre sous la forme matricielle suivante

$$x^{\tilde{\sigma}}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1.41)$$

avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 - \sigma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_n - \sigma_{n-1} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

**Remarque 1.5.** *Pour compléter la forme d'état, on doit préciser l'équation de sortie :*

$$y(t) = C x(t) \quad (1.43)$$

*La matrice  $C$  est déterminée selon la sortie considérée (voir l'exemple de la Section 1.8).*

### Cas d'un système fractionnaire commensurable

Dans ce cas, on introduit les variables d'états tel que [30]

$$D^{(i-1)\sigma} y(t) = x_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.44)$$

on obtient les équations d'états suivantes :

$$D^\sigma x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (1.45)$$

$$D^\sigma x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \frac{1}{a_n} u(t) \quad (1.46)$$

où  $n$  est le nombre de variables d'état égale à

$$n = \frac{\sigma_n}{\sigma} \quad (1.47)$$

Dans ce cas, l'écriture de l'équation d'état (1.41) peut être simplifiée en utilisant l'opérateur de dérivation fractionnaire  $D^\sigma$  comme suit [30] :

$$D^\sigma x(t) = A x(t) + B u(t) \quad (1.48)$$

En complétant par l'équation de sortie (1.43), on obtient la forme d'état d'un système fractionnaire commensurable.

## 1.6.2 Représentation d'état d'un système fractionnaire non linéaire

La représentation d'état présentée dans la sous-section **1.6.1** représente mathématiquement la classe des systèmes d'ordre fractionnaire linéaire. Un système fractionnaire non linéaire non commensurable est représenté mathématiquement par la forme d'état suivante [30] :

$$x^{\tilde{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(x(t), u(t), t) \quad (1.49)$$

$$y(t) = \mathcal{H}(x(t), u(t), t) \quad (1.50)$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{H}$  sont des fonctions vectorielles, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(x(t), u(t), t) \\ \mathcal{F}_2(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1(x(t), u(t), t) \\ \mathcal{H}_2(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_r(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

où  $r$  représente le nombre de sorties du système.

Un système non linéaire commensurable est représenté, sous-forme d'état, comme suit

$$D^\sigma x(t) = \mathcal{F}(x(t), u(t), t) \quad (1.52)$$

$$y(t) = \mathcal{H}(x(t), u(t), t) \quad (1.53)$$

## 1.7 Conditions initiales

Pour compléter la représentation d'état, on doit préciser aussi le vecteur de conditions initiales  $x(t_0)$  du système. L'initialisation d'un système d'ordre fractionnaire constitue une autre difficulté et les résultats existant restent incomplets [91, 92]. Pour un système d'ordre fractionnaire, le nombre de conditions initiales dépend des ordres  $\sigma_i - \sigma_{i-1}$ . On désigne par  $m_i$  le petit nombre entier qui vérifie

$$m_i = \lceil \sigma_i - \sigma_{i-1} \rceil \quad (1.54)$$

Le nombre de conditions initiales  $n_{CI}$  (taille du vecteur d'état  $x(t)$ ) est

$$n_{CI} = \sum_{i=1}^n m_i \quad (1.55)$$

**Remarque 1.6.** *Pour l'étude des systèmes dynamiques et l'évaluation des performances d'une stratégie de commande, la simulation numérique joue un rôle très important. Cette dernière consiste à résoudre les équations différentielles régissant le fonctionnement du système. Une revue sur les différentes approches proposées pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire est présentée au Chapitre 4.*

## 1.8 Exemple de modélisation

Soit une plaque mince suspendue par un ressort et complètement immergée dans un fluide Newtonien<sup>1</sup> (Figure 1.5) [32, 33]. Ce fluide est de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\mu$ . L'étendu du fluide est supposé infini. On désigne respectivement par  $M_p$  et  $S_p$  la masse et surface de la plaque rigide. Le ressort, exerçant une force opposée, est de constante de raideur  $k_r$  et sa masse est supposée négligeable. La force  $f_p(t)$  appliquée (commande) sur la plaque provoque le déplacement verticale de cette dernière. Le déplacement d'un point de la

---

1. Pour un fluide Newtonien, la caractéristique contrainte de cisaillement-vitesse de déformation est linéaire dont la constante de proportionnalité est la viscosité du fluide.

plaque est noté par  $\tilde{y}(z, t)$ . La surface  $S_p$  est supposée suffisamment large ce qui provoque une contrainte de cisaillement  $\kappa(t, z)$  exprimée en fonction de la vitesse de déplacement de la plaque  $\partial\tilde{y}(z, t)/\partial t$  comme suit [32]

$$\kappa(z, t) = \sqrt{\mu\rho_0}D_t^{1,5}\tilde{y}(z, t) \quad (1.56)$$

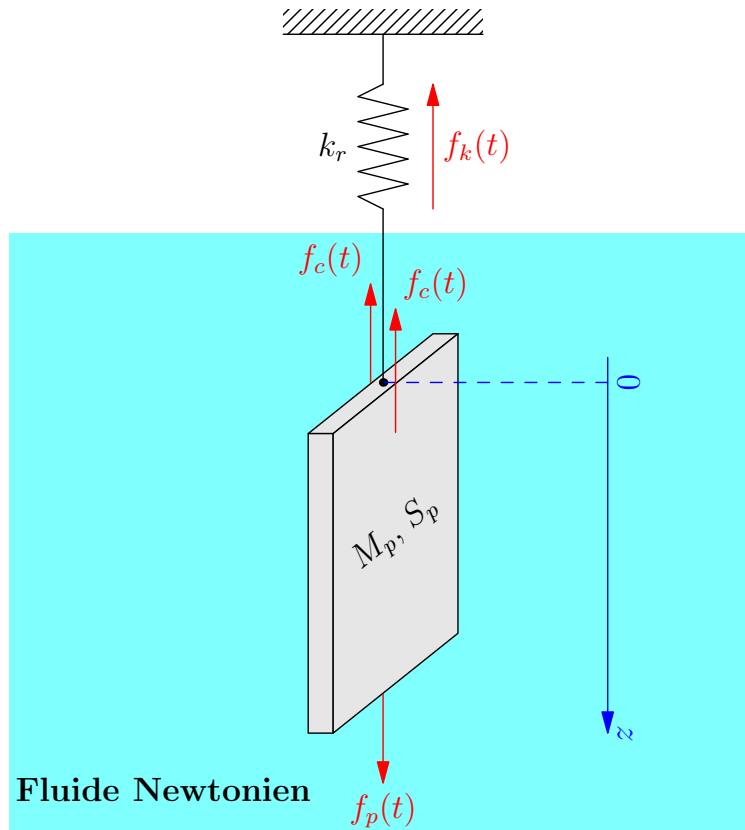


FIGURE 1.5: Plaque rigide immergée dans un fluide Newtonien.

On cherche à déterminer l'équation différentielle caractérisant l'évolution  $\tilde{y}(z, t)$  du point  $z = 0$  de la plaque. Pour cela, on utilise la loi de **Newton**. Ainsi, les différentes forces exercées sur la plaque sont représentées sur la Figure 1.5.

Notons que la contrainte de cisaillement provoque, dans les deux côtés de la plaque, des forces tangentielles à sa surface qui s'opposent au déplacement de la plaque. La force  $f_c(t)$  appliquée d'un côté est donnée comme suit :

$$f_c(t) = \kappa(z, t) S_p \quad (1.57)$$

Ainsi, l'écriture de la loi de **Newton** donne

$$f_p(t) - 2 f_c(t) - f_k(t) = M_p \frac{\partial^2 \tilde{y}(z, t)}{\partial t^2} \quad (1.58)$$

où  $f_k(t)$  est la force, opposée à  $f_p(t)$ , exercée par le ressort.

La substitution des différentes forces par leurs expression conduit à l'équation différentielle suivante :

$$f_p(t) - 2 S_p \kappa(z, t) - k_r \tilde{y}(z, t) = M_p \frac{\partial^2 \tilde{y}(z, t)}{\partial t^2} \quad (1.59)$$

En remplaçant  $k(z, t)$  par son expression donnée par **(1.56)**, il vient

$$f_p(t) - 2 S_p \sqrt{\mu \rho_0} D_t^{1,5} \tilde{y}(z, t) - k_r \tilde{y}(z, t) = M_p \frac{\partial^2 \tilde{y}(z, t)}{\partial t^2} \quad (1.60)$$

Désignons par  $y(t)$  le déplacement du point  $z = 0$  de la plaque, c'est-à-dire  $y(t) = \tilde{y}(0, t)$ .

En introduisant l'opérateur différentiel  ${}_0D_t^k$ , l'équation **(1.60)** prend la forme suivante

$$f_p(t) - 2 S_p \sqrt{\mu \rho_0} D_t^{1,5} y(t) - k_r y(t) = M_p {}_0D_t^2 y(t) \quad (1.61)$$

qu'on peut arranger, pour avoir la forme **(1.33)**, comme suit

$$M_p {}_0D_t^2 y(t) + 2 S_p \sqrt{\mu \rho_0} D_t^{1,5} y(t) + k_r {}_0D_t^0 y(t) = f_c(t) \quad (1.62)$$

Initialement, la plaque est supposée à l'équilibre, c'est-à-dire

$$y(0) = 0, \quad {}_0D_t^1 y(0) = 0 \quad (1.63)$$

Les ordres de l'équation **(1.62)**, appelée équation de **Bagley-Torvik** [27], sont  $\sigma_2 = 2$ ,

$\sigma_1 = 1,5$  et  $\sigma_0 = \beta_0 = 0$ , par conséquent le système est commensurable avec un ordre de base  $\sigma = 0,5$ . Ainsi, l'équation (1.62) peut être réécrite comme suit :

$$M_p {}_0D_t^{4 \times 0,5} y(t) + 2 S_p \sqrt{\mu \rho} {}_0D_t^{3 \times 0,5} y(t) + 0 {}_0D_t^{2 \times 0,5} y(t) + 0 {}_0D_t^{1 \times 0,5} y(t) + k_r {}_0D_t^0 y(t) = f_c(t) \quad (1.64)$$

En suivant le développement de la Sous-section 1.6.1, on obtient le modèle d'état suivant :

$$D^{0,5} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_r}{M_p} & 0 & 0 & -\frac{2 S_p \sqrt{\mu \rho}}{M_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_p} \end{bmatrix} f_c(t) \quad (1.65)$$

L'équation de sortie ( $y(t) = x_1(t)$ ) est définie comme suit :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

**Remarque 1.7.** *La représentation d'état obtenue est appelée forme commandable. D'autres formes existent par exemple les formes observable et modales peuvent être obtenues. Ces différentes formes sont amplement discutés dans [33].*

**Remarque 1.8.** *Le long de la thèse, on s'intéresse aux systèmes fractionnaires commensurables. Les différents développements théoriques donnés sont basés sur la définition de **Caputo**. Pour la simulation, la dérivée fractionnaire est approximée en utilisant la définition de **Grünwald-Letnikov**.*

## 1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des notions de base du calcul fractionnaire, utilisées le long de la thèse, et la représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire. Nous avons commencé par les définitions de la dérivée et de l'intégrale d'ordre entier. Puis pour introduire la dérivée et l'intégrale fractionnaire, nous avons débuté par la présentation de la fonction Gamma qui généralise la factorielle au cas non entier. Cette fonction est très utilisée en calcul fractionnaire en particulier dans la définition de la dérivée fractionnaire en généralisant la formule de **Cauchy**. Après, nous avons introduit les définitions les plus usuelles de la dérivée fractionnaire, en l'occurrence la dérivée de **Riemann-Liouville**, de **Caputo** et de **Grünwald-Letnikov**. La suite du chapitre est consacrée aux systèmes d'ordre fractionnaire. Ainsi, après avoir présenté la notion de l'opérateur non local qui modélise mathématiquement l'effet mémoire, nous avons axé l'exposé sur la représentation d'état des systèmes d'ordre fractionnaire. A la fin du chapitre, nous avons présenté et modélisé le déplacement d'une plaque rigide dans un fluide Newtonien. Nous avons montré que la dynamique du déplacement est régit par une équation différentielle ordinaire fractionnaire. Par la suite, nous avons mis l'équation différentielle obtenue sous forme d'état.

Les modèles d'ordre fractionnaire représente une alternative intéressante pour la modélisation des systèmes dynamiques. On distingue deux types de modèles commensurable et non commensurable. La tendance est souvent pour l'utilisation des modèles commensurable pour surmonter certaines difficultés d'ordre mathématique.

Les performances attendues d'une stratégie de commande dépendent principalement de la qualité du modèle utilisé lors de l'étape de synthèse. En commande optimale, par exemple, le modèle du système à commander constitue un élément clé dans la formulation du problème de commande et influe considérablement sur la solution finale. En général, quelque soit la qualité du modèle utilisé, la solution à obtenir (théorique) est toujours sous-optimale. Néanmoins, l'utilisation d'un modèle plus précis conduit à une solution très proche de la solution optimale (réelle). Cette constatation motive l'utilisation des modèles fractionnaires pour la synthèse

des commandes optimales vue leur capacité à modéliser certaines dynamiques complexes. Ceci constitue la problématique traitée dans cette thèse. Pour ce faire, on commence d'abord par une synthèse sur la théorie de commande optimale des systèmes dynamiques qui fera l'objet du chapitre suivant.

# Commande optimale des systèmes dynamiques

## 2.1 Introduction

Les mathématiques répertoriées sous le vocable de commande optimale interviennent dans la résolution des problèmes de commande des systèmes dynamiques exigeant l'optimisation d'un critère de performances, et le respect d'un certain nombre de contraintes physiques et de ressources imposées par le cahier des charges [5, 6, 19]. La commande optimale consiste à chercher la commande permettant de réaliser des trajectoires optimales, au sens du critère choisi minutieusement, pour transférer le système d'un état initial vers un état final tout en respectant les contraintes imposées [1, 2, 4, 7].

Les problèmes de commande optimale sont rencontrés dans plusieurs domaines : économique [16, 93], biologique [13, 15], génie chimique [9], thermique [14], mécanique [12], aéronautique [11], et même dans le domaine social [17].

Bien que le premier problème de commande optimale qui a donné naissance au calcul des variations, problème de la courbe brachystochrone posé par **Bernoulli** [18], remonte en 1696, la théorie de commande optimale a connu un essor au début de la deuxième guerre mondiale. Ce développement a été initié par l'introduction de deux principes importants : principe du minimum de **Pontryagin** [45] et principe de **Bellman** [46]. Ces deux principes ont permis de développer des conditions d'optimalité pour un problème de commande optimale quelconque,

et ont constitué une base théorique solide pour développer d'autres théories [58, 94].

Le développement de l'informatique a aussi contribué de manière importante dans le développement de la commande optimale [58]. En effet la disponibilité des calculateurs avec des vitesses de calcul vertigineuses et des capacités mémoires importantes a favorisé le développement de méthodes numériques pour la résolution des conditions d'optimalité ou directement le problème de commande optimale en le transformant en un problème d'optimisation statique [10, 57, 58, 94, 95].

Ce présent chapitre constitue une synthèse sur la théorie de la commande optimale. Pour présenter les différents concepts de la commande optimale, nous considérons le cas d'un système d'ordre entier. Bien que la plupart des concepts sont étendus au cas des systèmes d'ordre fractionnaire, certains concepts constituent des problèmes ouverts (voir la Section 5.3).

La première partie du chapitre a été réservée à la définition de la commande optimale et sa formulation mathématique en précisant les différentes parties (modèle, conditions terminales, contraintes et critère d'optimalité). La deuxième partie du chapitre aborde les différentes méthodes de résolution d'un problème de commande optimale (le calcul des variations, le principe du minimum et la programmation dynamiques). La dernière partie du chapitre présente une revue sur les différentes méthodes numériques utilisées lors de la résolution directe ou indirecte d'un problème de commande optimale.

## 2.2 Définition de la commande optimale

Un système dynamique est caractérisé par un ensemble d'entrées, appelées commandes, sur lesquelles on peut agir pour modifier son comportement. Lorsque ces commandes sont synthétisées de telle sorte à minimiser un certain critère de performance tout en respectant un ensemble de contraintes, liées généralement à des limitations physiques, ces commandes sont dites optimales [1, 2, 5, 6, 96].

Un problème de commande optimale consiste à trouver parmi les commandes admissibles

celle qui permet de réaliser les objectifs suivants :

- transférer l'état du système d'un état initial vers un état final,
- vérifier un certain nombre de contraintes imposées,
- d'optimiser un critère traduisant les performances désirées.

Par définition, la commande optimale est une branche des mathématiques appliquées qui regroupent un certain nombre de théories et de méthodes permettant de déterminer les trajectoires optimales des variables manipulées (commandes) satisfaisant les exigences du cahier des charges.

Ces théories ont pour objectif de préciser les conditions d'optimalité, c'est-à-dire les conditions qui doivent être vérifiées par une commande pour qu'elle soit une solution du problème de commande optimale [10, 19, 57, 94]. Quant aux méthodes, elles permettent de résoudre les conditions d'optimalité pour déterminer la loi de commande optimale, c'est-à-dire la solution du problème de commande optimale.

La première étape pour concevoir de lois de commande optimale est la formulation mathématique de ce dernier. Cette étape consiste à traduire les exigences du cahier des charges sous forme mathématique, c'est-à-dire modéliser (formuler mathématiquement) le problème de commande optimale.

## 2.3 Formulation mathématique d'un problème de commande optimale

La première étape, qui est importante, pour résoudre un problème de commande consiste à le mettre sur la forme mathématique. Cette étape s'appelle étape de modélisation. Elle consiste à préciser les éléments suivants [1, 5] :

1. *Modèle mathématique du système à commander* : c'est une représentation abstraite du système physique donnée sous forme d'un ensemble de relations mathématiques consistantes (non contradictoires et non triviales). En commande optimale, le comportement

dynamique du système est décrit par l'équation d'état.

2. *Conditions terminales* : Ces conditions regroupent les conditions initiale et finale. La condition initiale représente l'état du système à l'instant où on commence à agir sur le système. La condition finale représente l'état du système après l'application de la commande.
3. *Contraintes* : Elles caractérisent les limitations physiques (sur les commandes et les états du système) ou des ressources [5]. Par exemple, un véhicule ne peut pas dépasser la vitesse maximale ce qui représente une limitation physique. Aussi, le réservoir d'un véhicule peut contenir une quantité limitée du carburant ce qui représente une limitation des ressources.
4. *Critère d'optimalité* : Il traduit les objectifs à optimiser imposés par le cahier des charges. Le choix du critère d'optimalité est très important pour déterminer une loi de commande optimale adéquate [96].

Mathématiquement, un problème de commande optimale est formulée comme suit [1, 5, 10] :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (2.1)$$

$$\text{sujet à : } \dot{x}(t) = \mathcal{F}(x(t), u(t), t) \quad (2.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (2.4)$$

$$p(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} q(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad (2.6)$$

où  $t \in [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}^+$  est la variable temps,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système à l'instant  $t$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  est les commandes excitant le système à l'instant  $t$ .  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et

$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [t_0, t_f]$  sont des fonctions scalaires et  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$  et  $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_q}$  sont des fonctions vectorielles supposées continues et différentiables.  $t_0$  et  $t_f$  représentent respectivement les instants initial et final.  $x_0$  et  $x_f$  sont respectivement l'état initial et final.  $n$  est le nombre d'état,  $n_u$  est le nombre de commandes,  $n_p$  est le nombre de contraintes instantanées et  $n_q$  est le nombre de contraintes intégrales.

Dans un problème de commande, la variable manipulée  $u(t)$  doit appartenir à un ensemble de commandes admissibles, c'est-à-dire [96]

$$u(t) \in U_{ad} \quad (2.7)$$

où  $U_{ad}$  est le domaine des commandes admissibles. La condition (2.7) est définie par les relations de contraintes (2.5) et (2.6).

La durée totale du changement d'état  $\tau = t_f - t_0$  est appelée horizon de commande. Ce dernier peut être imposé ou non [1, 6]. En général, on distingue trois cas pour l'horizon de commande [96] : un horizon borné et imposé, un horizon borné non imposé (imposé par une autre condition intrinsèque au problème) et un horizon infini lorsque  $t_f$  tend vers  $+\infty$ .

Le critère d'optimalité (2.1) est composé de deux parties : la partie terminale définie par la fonction  $\phi$  et la partie intégrale définie par l'intégrale de la fonction  $\psi$  sur l'horizon de commande  $\tau$ . L'équation d'état (2.2) représente le modèle du système à commander. L'état initial (2.1) est toujours connu par contre l'état final (2.4) peut être imposé (connu) ou libre (inconnu). Dans le dernier cas, il est imposé par une condition supplémentaire liée au problème de commande [5, 96]. Les contraintes instantanées (2.5) et intégrales (2.6) expriment respectivement les limitations physiques et des ressources.

Pour réaliser le transfert de l'état du système, de l'état initial  $x_0$  vers l'état final  $x_f$ , on suppose l'existence d'une commande permettant de réaliser ce transfert tout en satisfaisant les objectifs fixés [1, 96]. Ainsi, l'hypothèse de commandabilité du système (2.2) est faite systématiquement le long de cette thèse.

Le choix du critère d'optimalité doit se faire avec soin et doit traduire convenablement les objectifs à optimiser à l'instant final  $t_f$  exprimés par la partie terminale, et sur l'horizon de commande  $\tau$  exprimés par la partie intégrale. Les principaux critères sont [1, 5, 96] :

- *Poursuite* : Le but est de minimiser l'écart observé entre la trajectoire désirée  $x^d(t)$  et l'état réel du système  $x(t)$ . Mathématiquement, cet objectif est exprimé comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) dt \quad \text{avec } Q = Q^T \geq 0 \quad (2.8)$$

où  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de pondération.

- *Régulation* : C'est un cas particulier de la poursuite qui correspond à  $x^d(t) = 0$ .
- *Energie minimale* : Le but est de minimiser l'effort de commande. Cet objectif est exprimé comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt \quad \text{avec } R = R^T > 0 \quad (2.9)$$

où  $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  est une matrice de pondération.

- *Commande en temps minimale* : Dans ce cas, le temps final n'est pas imposé et l'objectif consiste à minimiser le temps nécessaire pour réaliser le transfert de l'état du système. Dans ce cas, on a à minimiser le critère suivant :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (2.10)$$

- *Commande terminale* : il s'agit de minimiser à l'instant final  $t_f$  une certaine fonction des variables d'état. Dans ce cas, le critère ne comprend que la partie terminale, c'est-à-dire

$$J(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) \quad (2.11)$$

En particulier dans le cas d'un système linéaire, on considère généralement

$$\phi(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2} x^T(t_f) M x(t_f) \text{ avec } M = M^T \geq 0 \quad (2.12)$$

où  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de pondération.

Ces critères peuvent être combinés pour définir plusieurs objectifs, par exemple réaliser une poursuite de trajectoire désirée toute en minimisant l'énergie mise en oeuvre revient à choisir le critère suivant :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u^T(t) R u(t) dt \quad (2.13)$$

Notons que suivant la forme du critère à optimiser, on distingue trois types de problèmes de commande optimale [6] :

1. Problème de **Mayer** : Le critère comprend seulement la partie terminale,
2. Problème de **Lagrange** : Le critère comprend seulement la partie intégrale,
3. Problème de **Bolza** : Le critère comprend les deux parties (terminale et intégrale).

Une fois le problème de commande optimale est formulé, une analyse mathématique de ce dernier est primordiale pour s'assurer de l'existence de la solution en d'autres termes vérifier que le problème est bien posé. Cette hypothèse est faite systématiquement dans ce qui suit. Après, cette étape on passe à la résolution du problème de commande optimale formulé.

## 2.4 Conditions d'existence de commande optimale

En plus, de la condition de commandabilité du système, le problème de commande optimale (2.1)–(2.6) admet une solution, c'est-à-dire il existe une commande optimale  $u(t)$

sur l'horizon de commande  $\tau$  qui permet de transférer l'état du système de  $x_0$  à  $x_f$ , si les conditions suivantes sont vérifiées [19] :

- il existe un réel positif  $b$  tel que toute trajectoire associée à une commande  $u(t) \in U_{ad}$  est uniformément bornée par  $b$  sur l'horizon de commande  $t$ , i.e.

$$\exists b > 0 \mid \forall u(t) \in U_{ad} \text{ et } \forall t \in \tau \text{ on a } \|x(t)\| \leq b; \quad (2.14)$$

- pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathfrak{R}^n$ , l'ensemble des vecteurs de vitesse augmenté

$$\mathcal{V}(x(t), t) = \{(\psi(x(t), u(t), t), \mathcal{F}(x(t), u(t), t) \mid u(t) \in U_{ad}\} \quad (2.15)$$

est convexe.

## 2.5 Résolution d'un problème de commande optimale

Un problème de commande optimale est un problème d'optimisation dynamique [93, 97] dans lequel l'objectif est de minimiser un critère d'optimalité (2.1) par rapport à la variable (fonction) de commande  $u(t)$ . Dans ce cas, le critère à optimiser (2.1) représente une fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction de fonctions [3, 20]. Le calcul des variations est la branche des mathématiques dédiée à la résolution de ce type de problèmes. Cette théorie, développée par **Euler** et **Lagrange**, permet d'écrire les conditions nécessaires que doit satisfaire la solution du problème [12, 20]. Par conséquent, la résolution de ces conditions, appelées conditions d'optimalité, donne la solution du problème de commande optimale. Avant de donner les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale, nous commençons par la présentation de deux résultats importants concernant la minimisation d'une fonctionnelle exploités pour la résolution d'un problème de commande optimale.

### 2.5.1 Calcul de la variation d'une fonctionnelle

Soit la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\eta(t))$  supposée définie pour  $\eta(t)$  et  $\eta(t) + \delta\eta(t)$  ( $\delta\eta(t)$  est la variation de  $\eta(t)$ ). L'accroissement de  $\mathcal{J}(\eta(t))$ , noté  $\Delta\mathcal{J}(\eta(t), \delta\eta(t))$ , est défini comme suit [1, 6] :

$$\Delta\mathcal{J}(\eta(t), \delta\eta(t)) = \mathcal{J}(\eta(t) + \delta\eta(t)) - \mathcal{J}(\eta(t)) \quad (2.16)$$

L'accroissement  $\Delta\mathcal{J}(\eta(t), \delta\eta(t))$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta\mathcal{J}(\eta(t), \delta\eta(t)) = \delta\mathcal{J}(\eta(t), \delta\eta(t)) + \mathcal{G}(\eta(t), \delta\eta(t)) \|\delta\eta(t)\| \quad (2.17)$$

où  $\delta\mathcal{J}(\eta(t), \delta\eta(t))$  est linéaire en  $\delta\eta(t)$ . Ainsi, la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\eta(t))$  est dite différentiable en  $\eta(t)$  si [1]

$$\lim_{\|\delta\eta(t)\| \rightarrow 0} \mathcal{G}(\eta(t), \delta\eta(t)) = 0 \quad (2.18)$$

Dans ce cas, si  $\eta^*(t)$  est un optimum pour  $\mathcal{J}(\eta(t))$ , alors

$$\delta\mathcal{J}(\eta^*(t), \delta\eta(t)) = 0 \quad (2.19)$$

Ce résultat important de la théorie de calcul des variations permet de déterminer les conditions d'optimalité pour un problème de commande optimale.

### 2.5.2 Principe d'optimalité de Bellman

Le principe d'optimalité de **Bellman** s'énonce comme suit [6, 46, 96] :

*"Si  $x(t_1)$  ( $t_0 < t_1 < t_f$ ) est un point intermédiaire de la trajectoire optimale allant de l'état  $x(t_0)$  à l'état  $x(t_f)$ , alors la trajectoire allant de l'état  $x(t_1)$  à l'état  $x(t_f)$  constitue la trajectoire optimale reliant les états  $x(t_1)$  et  $x(t_f)$ .*

Ce principe, évident de point de vue intuitif, a été exploité pour la résolution d'un problème de commande optimale.

### 2.5.3 Conditions d'optimalité

Le calcul des variations (variation d'une fonctionnelle) a été exploité pour déterminer les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale : équation d'**Euler-Lagrange** et équations d'**Hamilton-Pontryagin** connu sous le nom du principe du minimum de **Pontryagin**. Le principe de **Bellman**, dans sa forme continue, a été exploité aussi dans ce sens pour développer l'équation de **Hamilton-Jacobi-Bellman** [1, 3]. Dans sa forme discrète, le principe conduit à l'équation fonctionnelle de **Bellman** [1, 3, 96]. Ces équations représentent les conditions d'optimalité. La résolution de ces équations avec des conditions aux limites associées permet de déterminer la commande optimale.

Dans la littérature, on distingue trois classes de méthodes (Calcul des variations, principe du minimum et programmation dynamique) permettant d'écrire les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale [57, 58]. Ces classes sont discutées dans ce qui suit.

Dans le but d'alléger la présentation, on s'intéresse dans ce qui suit à des problèmes de commande optimale posés avec des contraintes du type égalité (modèle et conditions terminales). Notons que la plupart des résultats présentés, dans cette sous-section, peuvent être étendus aisément au cas avec contraintes du type inégalités (contraintes instantanées et intégrales) en introduisant des fonctions d'écarts. Ainsi, les contraintes du type instantané (2.5) peut être transformée à une contrainte du type égalité comme suit [5] :

$$p(x(t), u(t), t) + v^T(t) v(t) = 0 \quad (2.20)$$

et les contraintes du type intégrale comme suit :

$$\int_{t_0}^{t_f} q(x(t), u(t), t) + w^T(t) w(t) dt = 0 \quad (2.21)$$

où  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$  et  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_q}$  (fonctions vectorielles).

## 1. Calcul des variations

Le calcul des variations est la branche mathématique qui s'occupe entre autres de la résolution des problèmes d'optimisation dynamique où la fonction à optimiser (fonction objectif) est une fonctionnelle [12, 20]. Cette théorie a été exploitée pour la résolution des problèmes de commande optimale. On distingue deux méthodes [6] : la méthode directe et la méthode des multiplicateurs de **Lagrange**.

La méthode **directe** s'applique lorsque l'expression de la loi de commande peut être explicitée, à partir du modèle du système, en fonction de l'état  $x(t)$ , de sa dérivée  $\dot{x}(t)$ , et éventuellement de la variable temps  $t$ . Dans ce cas, la résolution de l'équation (2.2) par rapport à la commande  $u(t)$  donne

$$u(t) = G(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (2.22)$$

En remplaçant la commande  $u(t)$  par son expression (2.22) dans le critère, il vient :

$$\hat{J}(x(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), G(x(t), \dot{x}(t), t), t) dt \quad (2.23)$$

$$= \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Psi(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.24)$$

Puis l'annulation de la première variation  $\delta \hat{J}$  conduit à la condition nécessaire d'optimalité suivante [1, 6]

$$\nabla_{x(t)} \Psi(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}(t)} \Psi(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad (2.25)$$

Cette équation est appelée équation d'**Euler-Lagrange**. Elle représente un système à  $n$  équations différentielles ordinaires du second ordre. Ainsi, la recherche de la solution  $x(t)$  minimisant le critère (2.24) revient à résoudre le problème aux limites défini par l'équation d'**Euler-Lagrange** (2.25) et les conditions terminales (2.3) et (2.4). Notons que la condition

initiale **(2.3)** est supposée toujours connue, par contre l'état final  $x(t_f)$  peut être libre. Dans ce cas, la deuxième condition aux limites est donnée comme suit **[1, 6]** :

$$\nabla_{\dot{x}(t)} \Psi(x(t), \dot{x}(t), t) \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (2.26)$$

Lorsque la commande  $u(t)$  ne peut pas être explicitée directement en fonction de  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  à partir du modèle du système **(2.2)**, on utilise la méthode des multiplicateurs de **Lagrange** **[6]**. Le principe de cette méthode consiste à insérer la contrainte modèle **(2.2)** et éventuellement les contraintes intégrales et instantanées après l'ajout des variables d'écart dans le critère **(2.1)**, puis d'annuler la première variation du critère résultant.

Considérons le cas d'un problème de commande optimale sans contraintes. L'insertion du modèle (contrainte instantanée du type égalité) dans le critère **(2.1)**, en introduisant le vecteur des multiplicateurs de **Lagrange**, donne

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) (\mathcal{F}(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)) dt \quad (2.27)$$

où  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des multiplicateurs de **Lagrange**. De même, l'annulation de la première variation du critère  $\delta J$  conduit aux conditions d'optimalité suivantes **[3, 6]** :

$$\nabla_{x(t)} \Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}(t)} \Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) = 0 \quad (2.28)$$

$$\nabla_{u(t)} \Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}(t)} \Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) = 0 \quad (2.29)$$

$$\nabla_{\lambda(t)} \Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\lambda}(t)} \Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) = 0 \quad (2.30)$$

où

$$\Phi(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), t) = \psi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) (\mathcal{F}(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)) \quad (2.31)$$

Pour résoudre cet ensemble d'équations différentielles ordinaires, comme les conditions terminales de  $\lambda(t)$  et  $u(t)$  ne sont pas spécifiées, alors on doit faire des opérations mathématiques pour le ramener à un autre ensemble d'équations différentielles ordinaires en fonction de l'état  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  [6]. Puis pour résoudre le nouveau système résultant, on considère les conditions aux limites (2.3) et (2.4) lorsque l'état final est imposé, ou la condition initiale (2.3) et la condition (2.26) lorsque l'état final est libre.

La résolution de la condition (nécessaire) d'optimalité donnée sous forme d'un ensemble d'équations d'**Euler-Lagrange** permet de déterminer les optimums de la fonctionnelle (critère d'optimalité). Par conséquent, il faut vérifier la nature de chaque solution (maximum ou minimum) pour déterminer la solution du problème. Pour ce faire, on doit étudier le signe de la deuxième variation  $\delta^2 J$ . Ce dernier est le même que celui de la seconde dérivée de la fonction  $\psi$  par rapport à  $\dot{x}(t)$  [6]. Ainsi, pour un minimum, on a

$$\nabla_{\dot{x}(t)}^2 \psi > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.32)$$

et pour un maximum

$$\nabla_{\dot{x}(t)}^2 \psi < 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (2.33)$$

Lorsque plusieurs solutions sont possibles, on doit remplacer chaque solution dans le critère (2.1) pour choisir la meilleure solution, c'est-à-dire qui assure l'optimum global.

Une fois la trajectoire optimale  $x^*(t)$  est obtenue, la loi de commande optimale peut être déduite, dans le cas de la méthode **directe**, en utilisant (2.22) comme suit

$$u(t) = G(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \quad (2.34)$$

En général, comme le modèle du système (2.2) est non linéaire, la résolution analytique de l'équation d'**Euler-Lagrange** est très difficile voire impossible. Dans ce cas, on doit appliquer des méthodes numériques pour résoudre le problème à deux valeurs limites obtenu (condition d'optimalité) [10, 57, 58, 94, 95]. Ce point est discuté à la Sous-section 4.4.2.

## 2. Principe du minimum

Le principe du minimum de **Pontryagin** constitue une généralisation des équations d'**Euler-Lagrange** du calcul des variations [45]. Le principe de la méthode consiste à insérer le modèle (2.2) dans le critère à optimiser (2.1) en utilisant les multiplicateurs de **Lagrange**  $\lambda(t)$  appelés variables adjointes. Dans ce cas, on obtient le nouveau critère à optimiser (2.27) qu'on peut écrire sous la forme suivante

$$J(u(t)) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^T(t)\dot{x}(t) dt \quad (2.35)$$

où la fonction d'**Hamilton**  $H$  (appelée aussi Hamiltonien) est définie comme suit

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \psi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) \mathcal{F}(x(t), u(t), t) \quad (2.36)$$

En annulant la première variation  $\delta J$ , on obtient les conditions d'optimalité suivantes [1, 3, 6]

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (2.37)$$

$$\dot{x}(t) - \nabla_{\lambda(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (2.38)$$

$$\dot{\lambda}(t) + \nabla_{x(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (2.39)$$

L'équation (2.37) permet de déterminer l'expression de la commande optimale en fonction de l'état  $x(t)$ , du vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$  et éventuellement du temps  $t$ , c'est-à-dire

$$u(t) = g(x(t), \lambda(t), t) \quad (2.40)$$

La résolution des équations (2.38) et (2.39), appelées équations d'**Hamilton-Pontryagin** [96], avec des conditions aux limites appropriées permet de déterminer les trajectoires optimales  $x^*(t)$  et  $\lambda^*(t)$ . Ainsi, la substitution de ces dernières dans l'expression de la loi de commande optimale

$$u^*(t) = g(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.41)$$

Notons que la détermination de la solution particulière des équations d'**Hamilton-Pontryagin** (2.38) et (2.39) nécessite  $2n$  conditions aux limites. Ainsi, aux conditions d'optimalité (2.38)–(2.39) s'ajoute la condition à l'instant final  $t_f$  suivante [1, 3, 6, 96] :

$$[\delta x(t_f)]^T [\nabla_{x(t_f)} \phi(x(t_f), t_f) - \lambda(t_f)] = 0 \quad (2.42)$$

Par conséquent, si l'état final est imposé, i.e.  $\delta x(t_f)$  non spécifié, les  $2n$  conditions aux limites sont données par les conditions terminales (2.3) et (2.4). Dans le cas d'un état final libre, les  $n$  premières conditions aux limites sont données par l'état initial (2.3) et les  $n$  autres conditions aux limites sont déduites de la condition (2.42) qui impose d'avoir à l'instant final  $t_f$

$$\lambda(t_f) = \nabla_{x(t_f)} \phi(x(t_f), t_f) \quad (2.43)$$

La résolution des équations d'**Hamilton-Pontryagin** permet de déterminer la commande optimale sans préciser sa nature. Ainsi, pour un problème de minimisation, on doit s'assurer que le Hessien de la fonction d'**Hamilton** est défini positif, c'est-à-dire

$$\nabla_{u(t)}^2 H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) > 0 \quad (2.44)$$

et pour un problème de maximisation, le Hessien doit être défini négatif

$$\nabla_{u(t)}^2 H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) < 0 \quad (2.45)$$

En utilisant le principe de Pontryagin, deux cas sont possibles en ce qui concerne la recherche de l'optimum [96] :

1. lorsque le domaine admissible  $U_{ad}$  contient plusieurs commandes optimales. Dans ce cas, on doit évaluer la valeur du critère d'optimalité pour chaque solution et de prendre celle correspondante au minimum global.
2. dans le cas contraire, on doit explorer la frontière du domaine admissible  $U_{ad}$  pour découvrir l'optimum. Un cas fréquemment rencontré en commande optimale, appelé problème d'arc singulier, c'est lorsque la fonction d'**Hamilton** (2.36) est linéaire par rapport à la commande  $u(t)$ .

Le principe du minimum reste la méthode la plus utilisée pour la détermination de la commande optimale. Néanmoins, son application est limitée aux systèmes pour lesquels la commande  $u(t)$  peut être explicitée en fonction du vecteur d'état  $x(t)$  et du vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$ , c'est-à-dire la résolution de l'équation (2.37) par rapport à la variable de commande  $u(t)$  est possible.

### 3. Programmation dynamique

La programmation dynamique basée sur le principe d'optimalité intuitif de **Bellman** [46] est utilisée pour la détermination de la commande optimale. Sous sa forme discrète, ce principe conduit à l'équation fonctionnelle de **Bellman**, appelée programmation dynamique, et sous sa forme continue conduit à l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**.

**Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :** Désignons par  $J^*(x(t_1), t_1)$  ( $t_0 < t_1 < t_f$ ) la valeur optimale du critère d'optimalité (2.1) pour transférer l'état du système de l'état  $x(t_1)$  à l'état final  $x(t_f)$ . Mathématiquement, on écrit [1]

$$J^*(x(t_1), t_1) = \min_{u(t_1)} \left[ \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_1}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \right] \quad (2.46)$$

En appliquant le principe de **Bellman**, on peut écrire pour le transfert de l'état initial  $x(t)$  ( $t < t_1$ ) à l'état final  $x(t_f)$

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(t)} \left[ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_1} \psi(x(t), u(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \right] \quad (2.47)$$

$$= \min_{u(t)} \left[ \int_t^{t_1} \psi(x(t), u(t), t) dt + J^*(x(t_1), t_1) \right] \quad (2.48)$$

En prenant  $t_1 = t + \Delta t$  et en faisant le développement de **Taylor** à l'ordre 2 du terme  $J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$  autour du point  $(x(t), t)$ , et en considérant  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient [**1, 3**]

$$-\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u(t)} [\psi(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) f(x(t), u(t), t)] \quad (2.49)$$

En introduisant la fonction d'**Hamilton** définie comme suit

$$H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t), u(t), t) = \psi(x(t), u(t), t) + \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.50)$$

L'équation (2.49) prend la forme suivante

$$-\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t), u(t), t) \quad (2.51)$$

Ainsi, la commande optimale est déterminée en résolvant, par rapport à  $u(t)$ , l'équation suivante

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t), u(t), t) = 0 \quad (2.52)$$

et en désignant par  $H^*$  l'optimum de  $H$ , c'est-à-dire

$$H^*(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t), t) = \min_{u(t)} H(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t), u(t), t) \quad (2.53)$$

l'équation (2.51) devient

$$-\frac{\partial J^*(x(t), t)}{\partial t} = H^*(x(t), \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t), t) \quad (2.54)$$

L'équation aux dérivées partielles (2.54) est appelée l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**. Pour résoudre cette dernière, on doit spécifier une condition aux limites. Les équations (2.36) et (2.50) sont équivalentes et représentent la fonction d'**Hamilton**. Ainsi, par identification, on déduit que [96]

$$\lambda^*(t) = \nabla_{x(t)} J^*(x(t), t) \quad (2.55)$$

Comme en d'autre part, d'après la condition d'optimalité (2.43),

$$\lambda(t_f) = \nabla_{x(t_f)} \psi(x(t_f), t_f) \quad (2.56)$$

il en résulte la condition aux limites, pour l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman** (2.54), suivante

$$J^*(x(t_f), t_f) = \psi(x(t_f), t_f) \quad (2.57)$$

La résolution de l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**, même pour des problèmes de commande optimales simples, est en général très difficile [96]. Ceci explique l'usage fréquent de l'équation fonctionnelle de **Bellman** pour la résolution d'un problème de commande optimale par programmation dynamique.

**Equation fonctionnelle de Bellman :** cette équation permet de déterminer la séquence de commande  $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_f - \Delta t)$  ( $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  et  $t_k = k \Delta t$  avec  $k \in \mathbb{N}$ ) permettant de transférer l'état du système de l'état initial (2.3) à l'état final (2.4). Dans cette formulation, un modèle discret obtenu par discrétisation du modèle continu (2.2), en utilisant par exemple la méthode d'**Euler** explicite, est utilisé. Dans ce cas, le modèle discret prend la forme suivante [1, 3, 96]

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t \mathcal{F}(x(k), u(k), k) \quad (2.58)$$

où  $k$  et  $\Delta t$  sont respectivement l'instant discret et la période d'échantillonnage. De même l'approximation de la partie intégrale du critère (2.1) par la méthode des trapèzes donne [1, 3, 96]

$$J(x(k), k) = \phi(x(N), N) + \Delta t \sum_{i=k}^{N-1} \psi(x(i), u(i), i) \quad (2.59)$$

avec  $N = t_f / \Delta t$ .

Désignons par  $J^*(x(k), k)$  la valeur optimale du critère  $J(x(k), k)$  correspondante au transfert du système d'un état quelconque  $x(k)$  vers l'état final  $x(N)$ . Dans ce cas, le principe de **Bellman** permet d'écrire [1, 3, 6, 96]

$$J^*(x(k), k) = \min_{u(k)} [\psi(x(k), u(k), k) + J^*(x(k+1), k+1)] \quad (2.60)$$

ou encore

$$J^*(x(k), k) = \min_{u(k)} [\psi(x(k), u(k), k) + J^*(x(k) + \Delta t \mathcal{F}(x(k), u(k), k), k+1)] \quad (2.61)$$

Cette équation récurrente, appelée équation fonctionnelle de **Bellman**, permet de déterminer la séquence des commandes  $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$  à condition de connaître

$J^*(x(N), N)$ . Comme dans le cas de l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**, on déduit que [1, 96]

$$J^*(x(N), N) = \phi(x(N), N) \quad (2.62)$$

Notons que pour certains problèmes de commande optimale particuliers, l'équation fonctionnelle de **Bellman** (2.61) permet de déterminer l'expression analytique de la commande optimale [96].

**Remarque 2.1.** *Un cas particulier de commande optimale est formulé comme suit :*

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} e^T(t_f) M e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t) dt$$

*Sujet à :*

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

où  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  sont respectivement la matrice d'état et la matrice de commande et l'erreur de poursuite  $\epsilon(t) = x^d(t) - x(t)$ .

Ce problème de commande optimale est appelé commande linéaire quadratique (le critère est quadratique et le système est linéaire) [2, 3, 6, 7, 96]. Les différentes méthodes de détermination de la commande optimale présentées conduisent à une loi de commande optimale sous forme d'état de la forme [1, 96]

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T(t) \lambda^*(t) \quad (2.63)$$

où

$$\lambda^*(t) = K(t) x(t) - V(t) \quad (2.64)$$

avec  $K(t)$  est solution de l'équation différentielle de **Ricatti** suivante [96]

$$\dot{K}(t) + K(t) A(t) + A^T(t) K(t) - K(t) B(t) R^{-1} B^T(t) K(t) + Q(t) = 0 \quad (2.65)$$

et  $V(t)$  est la solution de l'équation différentielle suivante [96]

$$\dot{V}(t) + (A^T(t) - K(t) B(t) R^{-1} B^T(t)) V(t) + Q x^d(t) = 0 \quad (2.66)$$

Ces deux équations différentielles doivent être accompagnées de conditions aux limites pour déterminer des solutions particulières. Ainsi, la condition (2.43) permet d'écrire

$$\lambda(t_f) = \nabla_{x(t_f)} \left( \frac{1}{2} e^T(t_f) M e(t_f) \right) \quad (2.67)$$

$$= M (x^d(t_f) - x(t_f)) \quad (2.68)$$

et par identification avec (2.64), on déduit

$$K(t_f) = -M \text{ et } V(t_f) = M x^d(t_f) \quad (2.69)$$

Notons que dans le cas d'une régulation ( $x^d(t) = 0$ ) avec horizon infini ( $t_f \rightarrow \infty$ ) d'un système invariant ( $A$  et  $B$  sont constantes), la loi de commande optimale est donnée comme suit [5, 96]

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T K x(t) \quad (2.70)$$

où  $K$  est la solution de l'équation algébrique de **Ricatti** suivante

$$K A + A^T K - K B R^{-1} B^T K + Q = 0 \quad (2.71)$$

*Dans le cas d'une commande linéaire quadratique, la commande optimale synthétisée (2.63) permet de réaliser un placement de pôles optimal en boucle fermée. La commande linéaire quadratique assure une robustesse maximale, c'est-à-dire elle autorise les plus grandes erreurs de modélisation sur le système à commander [5]. De plus, indépendamment du choix des matrices de pondération  $Q$ ,  $R$  et  $M$ , la commande linéaire quadratique garantit une marge de phase supérieure à  $60^\circ$  et une marge de gain supérieure à  $0,5$  [5].*

## 2.6 Méthodes de résolution des conditions d'optimalité

La détermination de la loi de commande revient, en général, à résoudre les conditions d'optimalité (équation d'**Euler-Lagrange**, équations d'**Hamilton-Pontryagin** ou l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**). Ces équations différentielles ne peuvent être résolues analytiquement que pour certains problèmes de commande optimale particuliers par exemple dans le cas d'une commande linéaire quadratique (voire la Remarque 2.1). Généralement, la solution analytique est possible lorsque ces équations sont linéaires ou peuvent être linéarisées, moyennant certaines transformations, si elles sont par exemple du type **Bernoulli** ou de **Ricatti**.

Comme la plupart des systèmes dynamiques rencontrés sont fortement non linéaires, par conséquent les conditions d'optimalité sont données sous forme d'équations différentielles de nature aussi non linéaire et souvent couplées. Dans ce cas, on doit faire appel, pour la résolution, à des méthodes numériques adéquates [4, 57, 58, 94, 95].

### 2.6.1 Méthodes numériques

On distingue deux classes de méthodes numériques utilisées pour la détermination d'une commande optimale [10, 19, 57, 58] : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

## Méthodes directes

Le principe des méthodes directes consiste à convertir le problème de commande optimale en un autre problème d'optimisation statique, c'est-à-dire en un problème de programmation non linéaire [95, 98]. Puis des méthodes d'optimisation déterministes, stochastiques et hybrides sont utilisées pour déterminer la solution du problème d'optimisation statique résultant [53]. Parmi les méthodes utilisées pour la conversion, on retrouve la méthode de discrétisation complète (états et commandes) [99, 100], la méthode de paramétrisation du vecteur de commande [8, 101–103] et la méthode de collocation sur des éléments finis appelée encore méthode de paramétrisation des vecteurs de commande et l'état [104]. Une brève description pour chaque méthode est donnée ci-après.

**Méthode de discrétisation complète :** Pour illustrer comment convertir un problème de commande optimale en un problème d'optimisation statique, on présente une version de la méthode de la discrétisation complète [3]. L'objectif est de déterminer la séquence de commande optimale  $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)$  à appliquer pour transférer le système de l'état initial  $x(t_0)$  à l'état final  $x(t_f)$ .

La première étape consiste à discrétiser le modèle (2.2) en considérant une période d'échantillonnage  $\Delta t$ . Par exemple l'utilisation de la méthode d'**Euler** explicite conduit au modèle discret (2.58).

La deuxième étape consiste à discrétiser le critère (2.1) par la méthodes des trapèzes [47, 48], ce qui donne dans le cas d'un état final  $x(t_f)$  libre

$$J(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_f)) = \phi(x(t_f), t_f) + \frac{\Delta t}{2} \left[ \psi(x(t_0), u(t_0), t_0) + \psi(x(t_f), u(t_f), t_f) \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^n \psi(x(t_k), u(t_k), t_k) \right] \quad (2.72)$$

$$(2.73)$$

Maintenant, le modèle discret (2.58) permet d'écrire

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) + \Delta t \mathcal{F}(x(t_0), u(t_0), t_0) \\ &= x_0 + \Delta t \mathcal{F}(x_0, u(t_0), t_0) = F_1(u(t_0)) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_1) + \Delta t \mathcal{F}(x(t_1), u(t_1), t_1) \\ &= x_0 + \Delta t \mathcal{F}(x_0, u(t_0), t_0) + \Delta t \mathcal{F}(x_0 + \Delta t \mathcal{F}(x_0, u(t_0), t_0), u(t_1), t_1) = F_2(u(t_0), u(t_1)) \end{aligned} \quad (2.75)$$

⋮

$$x(t_f) = F_{n+1}(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)) \quad (2.76)$$

En substituant les  $x(t_k)$  par leurs expressions dans le critère (2.72), on obtient une fonction à plusieurs variables qui représentent les commandes  $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)$ . La recherche de cette séquence de commande revient à résoudre le problème d'optimisation statique (ou de programmation non linéaire) suivant :

$$\min_{u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)} J(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)) \quad (2.77)$$

Ce problème d'optimisation dont les variables de décision sont  $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)$  peut être résolu en utilisant les méthodes d'optimisation statique (voir le Chapitre 3).

Notons que pour un état final imposé  $x(t_f) = x_f$  (dans ce cas la partie terminale  $\phi(x(t_f), t_f) = 0$ ), le problème d'optimisation statique à résoudre prend la forme suivante

$$\min_{u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)} J(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)) \quad (2.78)$$

Sujet à :

$$x(t_f) = F_{n+1}(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)) \quad (2.79)$$

On remarque la présence d'une contrainte du type égalité qui permet d'imposer l'état final  $x(t_f) = x_f$ . Pour la résolution de ce problème d'optimisation, on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de **Lagrange** ou la méthode de pénalisation [53, 97].

**Méthode de la paramétrisation du vecteur de commande :** Pour simplifier la présentation du principe de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, on considère le cas d'un système à une seule commande. La méthode consiste à approximer la commande par des fonctions de base  $\Theta_k(t)$  comme suit [8, 102, 103, 105–107]

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N_p} a_k \Theta_k(t) \quad (2.80)$$

Notons que toute approximation d'une fonction d'une seule variable peut s'écrire sous la forme (2.80). Les fonctions  $\Theta_k(t)$  peuvent être des polynômes, des fonctions trigonométriques, des séries de **Fourier** tronquées ou autres fonctions orthogonales [8]. La qualité de la solution, c'est-à-dire la valeur finale du critère de performances, est liée aux choix des fonctions  $\Theta_k(t)$ . Ces dernières peuvent conduire, selon la complexité du problème de commande optimale, à des solutions sous-optimales. Néanmoins, les fonctions polynomiales sont recommandées, car elles permettent de simplifier la résolution du problème de commande optimale. De plus, le théorème de **Weierstrass** [108] (voir le Théorème 5.2 du chapitre 5) stipule que si la fonction  $u(t)$ , définie sur un intervalle supposé borné et fermé (compact), est continue, alors la fonction  $u(t)$  peut être approximée, avec la précision souhaitée, par un polynôme.

Puis de substituer  $u(t)$  par son expression (2.80) dans le modèle (2.2). La résolution analytique des équations différentielles résultantes permet de déterminer l'expression du vecteur d'état  $x(t)$  en fonction de la variable temps  $t$  et les paramètres  $a_k$  comme suit

$$x(t) = \mathcal{K}(a_0, a_1, \dots, a_N, t) \quad (2.81)$$

Ensuite, en substituant  $u(t)$  et  $x(t)$  par leurs expressions respectives (2.80) et (2.81) dans

le critère (2.1) et en intégrant par rapport au temps, il résulte le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{a_0, a_1, \dots, a_N} J(a_0, a_1, \dots, a_N) \quad (2.82)$$

Notons que l'obtention de la solution (2.81) n'est pas toujours possible. Aussi l'intégration analytique du critère d'optimalité (2.1), après substitution de  $u(t)$  et  $x(t)$  par leurs expressions respectivement (2.80) et (2.81), n'est pas évidente. Dans ces cas, on peut procéder par discrétisation comme dans le cas de la méthode de discrétisation complète.

**Méthode de paramétrisation des vecteurs de commande et l'état :** Le principe de la méthode de paramétrisation des vecteurs de commande et l'état consiste à décomposer l'horizon de commande  $[t_0, t_f]$  en un ensemble de sous-domaines [109]. Ensuite, dans chaque sous-domaine, on approxime les variables de commande et d'état, comme dans la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, en utilisant comme fonctions de base des polynômes de **Lagrange** [99, 100]. Ensuite, en substituant les expressions des états et des commandes dans le modèle (2.2) et en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions de base, on obtient un système d'équations algébriques dont les inconnus sont les paramètres de la paramétrisation. Aussi, en substituant les expressions des états et des commandes dans le critère (2.1), on obtient une fonction dont les inconnus sont les paramètres de la paramétrisation. Cette dernière représente la fonction objectif à optimiser par rapport aux paramètres de la paramétrisation tout en respectant les contraintes du type égalité (système d'équations algébriques). En résumé, le problème revient à résoudre un problème d'optimisation statique en présence des contraintes du type égalité.

Une synthèse sur les différentes méthodes directes, proposées dans la littérature, est donnée dans [10, 19, 58, 94]. Une étude comparative des performances de certaines méthodes d'optimisation stochastiques est réalisée par [19, 94].

## Méthodes indirectes

Le principe des méthodes indirectes consiste à résoudre les conditions d'optimalité (équation d'**Euler-Lagrange**, équations d'**Hamilton-Pontryagin**, équation d'**Hamilton-Jacobi-Pontryagin**) numériquement. Ces conditions sont données sous forme d'un problème à deux valeurs limites. La méthode d'itération sur les conditions aux limites [3], la méthode du tir multiple [10,19,48] et la méthode de l'itération sur la variable de commande  $u(t)$  font partie des méthodes indirectes [3]. Dans ce qui suit, on donne une brève description pour chaque méthode.

**Méthode d'itération sur les conditions aux limites** [3] : Le principe de la méthode d'itération sur les conditions aux limites consiste à initialiser le vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$ , c'est-à-dire à choisir  $\lambda(t_0)$ , et d'intégrer les équations d'**Hamilton-Pontryagin** (2.38)–(2.39). Le vecteur de commande est déterminé à partir de la condition d'optimalité (2.37). Puis, les valeurs du vecteur des variables adjointes  $\lambda(t_f)$  sont comparées avec les valeurs imposées par la condition (2.56). Cette comparaison permet de déduire la nouvelle condition initiale du vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$ . Le processus est ainsi répété jusqu'à convergence.

**Méthode du tir multiple** [10,19] : Le principe de la méthode du tir multiple consiste à décomposer l'horizon de commande  $[t_0, t_f]$  en considérant des instants intermédiaires. L'objectif est d'appliquer la méthode d'itération sur les conditions aux limites sur une série de problèmes de commande optimale.

**Méthode d'itération sur le vecteur de commande** [3] : Le principe de la méthode d'itération sur le vecteur de commande consiste à choisir un estimé de départ pour le vecteur de commande  $u(t)$ . Puis, les équations d'état (2.38) et les équations adjointes (2.39) sont intégrées respectivement en avant et en arrière par rapport au temps. Ensuite, une méthode d'optimisation statique peut être utilisée pour estimer le nouveau vecteur de commande. Par

exemple l'application de la méthode du gradient [53, 110], dans le cas d'un problème de minimisation, donne

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) - \gamma \left. \frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial u(t)} \right|_{u(t)=u^k(t)} \quad (2.83)$$

où  $\gamma$  est le pas de descente.

## 2.6.2 Avantages et inconvénients des méthodes numériques

Les méthodes directes sont simples à mettre en œuvre et tire profit de la théorie d'optimisation statique très développée ces dernières années. Cette dernière offre une panoplie d'algorithmes d'optimisation (déterministes, stochastiques ou hybrides) permettant de localiser la solution en un nombre fini d'itérations [52, 53, 55, 56, 97, 111–113]. Les méthodes directes sont aussi insensibles au choix de l'estimé de départ de la solution et permettent de prendre en compte les différentes contraintes. Néanmoins, pour éviter de localiser un optimum local, les méthodes d'optimisation globale sont fortement recommandées [111, 113–115]. Le choix de la période d'échantillonnage influe sur la précision de la solution à obtenir. Ainsi, une période d'échantillonnage très petite permet d'améliorer davantage la précision mais augmente la dimension du vecteur de décision du problème d'optimisation à résoudre. Par conséquent, les méthodes directes peuvent devenir inefficaces puisque elles sont gourmandes en mémoire et la convergence peut être très lente [10, 19].

Les méthodes indirectes sont caractérisées par une précision numérique importante mais nécessite une connaissance a priori sur la forme de la trajectoire optimale [10, 57, 58, 94]. Ces méthodes sont appliquées pour la résolution des conditions nécessaires d'optimalité, par conséquent on est appelé à évaluer le critère d'optimalité pour toutes les solutions possibles pour déterminer la solution globale. La convergence de ces méthodes est fortement liée au choix de certaines conditions initiales. Par exemple, le choix de la condition initiale du vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$  dans le cas du principe de **Pontryagin** conditionne la convergence de la méthode de tir simple [19]. La prise en compte des contraintes est généralement très

difficile et complexifie davantage les conditions d'optimalité, par conséquent leur résolution par les méthodes directes.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue sur les différentes méthodes de résolution d'un problème de commande optimale. Ainsi, après avoir défini la commande optimale et sa formulation sur le plan mathématique (modélisation), nous avons axé la présentation sur les différentes méthodes utilisées pour la résolution d'un problème de commande optimale. Ces dernières permettent réellement d'écrire les conditions d'optimalité pour un problème de commande optimale.

En somme, les méthodes de résolution d'un problème de commande optimales sont développées en utilisant soit le calcul des variations ou le principe d'optimalité de **Bellman**. Le calcul des variations a été utilisé pour développer, premièrement, l'équation d'**Euler-Lagrange** qui sera généralisée, par la suite, par **Pontryagin** et son équipe pour développer un des principes les plus puissants en commande optimale, il s'agit du principe du minimum. Le principe de **Bellman** constitue aussi une contribution importante en commande optimale. La formulation continue de ce principe conduit à l'équation aux dérivées partielles appelée d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**. Néanmoins, cette formulation reste moins exploitée dû essentiellement à la difficulté de résolution de cette équation. Par contre la formulation discrète, du principe de **Bellman**, qui conduit à l'équation fonctionnelle constitue une approche alternative intéressante pour la résolution des problèmes de commande optimale. Cette équation de récurrence qui est très utilisée permet de résoudre les problèmes de commande optimales même les plus complexes.

En général, la résolution d'un problème de commande optimale revient à résoudre les conditions d'optimalité données sous forme d'équations différentielles souvent à deux valeurs limites. En pratique, la résolution analytique de ces conditions d'optimalité est très difficile

voire impossible en présence des non linéarités. Par conséquent, la recherche de la solution se fait généralement numériquement en utilisant des méthodes numériques adéquates. Dans ce cas, on parle de l'approche indirecte.

Une autre alternative pour la résolution d'un problème de commande optimale est l'approche directe. Cette dernière consiste à transformer le problème de commande optimale, par discrétisation complète, en un problème d'optimisation statique. Le but est d'appliquer les méthodes de la programmation non linéaire pour la recherche de la séquence de la commande optimale. Cette approche tire profit de la puissance des méthodes d'optimisation déterministes, stochastiques et hybrides dont l'efficacité n'est plus à démontrer.

L'approche proposée pour la détermination d'une commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire, dans cette thèse, fait partie des méthodes de l'approche indirecte. Par conséquent, localiser la meilleure solution (optimum globale) nécessite inévitablement l'utilisation d'une méthode d'optimisation globale. Dans cette optique, notre choix a porté sur la méthode déterministe d'Aliénor qui fera l'objet du prochain chapitre consacré à l'optimisation globale.

# Méthode d'optimisation globale d'Alienor

## 3.1 Introduction

L'optimisation est quasiment présente dans la quasi-totalité des domaines. En automatique, la plupart des problèmes peuvent être formulés sous forme de problème d'optimisation [55], par exemple la détermination des paramètres d'un correcteur, l'optimisation des consignes d'un asservissement, l'identification des paramètres d'un modèle mathématique, la détermination d'un modèle nominal pour un système incertain, la réduction d'un modèle, la commande prédictive et la commande optimale basée sur l'approche directe (présentée au chapitre 2).

La formulation mathématique d'un problème d'optimisation consiste à spécifier [52, 53] : les variables d'optimisation ou de décision, la fonction objectif à optimiser et l'ensemble des solutions admissibles définies par un ensemble de contraintes. Cette formulation consiste à traduire un problème pratique, ou les spécifications imposées, en une formulation mathématique pour pouvoir déterminer sa solution. Selon la nature des variables de décision, on distingue [97] : l'optimisation statique et l'optimisation dynamique (commande optimale présentée au Chapitre 2). Dans un problème d'optimisation statique, on cherche à optimiser une fonction de variables [52, 97, 113]. Par contre dans un problème d'optimisation dynamique, appelée aussi commande optimale, l'objectif est d'optimiser une fonctionnelle [1, 3],

c'est-à-dire une fonction de fonction (Chapitre 2). Ce chapitre est consacré à l'optimisation statique. Rappelons que les méthodes d'optimisation statique sont utilisées lors de la résolution d'un problème de commande optimale par les méthodes directes exposées au Chapitre 2 (conversion du problème de commande optimale en un problème d'optimisation statique).

Après un travail de modélisation d'un problème d'optimisation, souvent très difficile, vient l'étape de résolution. Le degré de difficulté d'un problème d'optimisation statique est généralement lié à la nature de la fonction objectif et à celle des contraintes [97], c'est-à-dire aux propriétés mathématiques de ces dernières (convexité, différentiabilité, linéarité, ...). La résolution analytique d'un problème d'optimisation statique dans la plupart des situations est délicate voire impossible. Par conséquent, des méthodes numériques (algorithmes) doivent être appliquées pour chercher les solutions, c'est-à-dire les optima [52, 54, 112]. Ces derniers peuvent être classés en deux types : optima locaux et optima globaux. La recherche de la meilleure solution consiste à localiser ces optima globaux. Ainsi, des méthodes spéciales, appelées méthodes globales, doivent être appliquées [111, 113, 115]. On distingue, en général, deux classes de méthodes d'optimisation globales [53, 111, 112] : déterministes et stochastiques. Les méthodes déterministes permettent de déterminer l'optimum global avec la précision souhaitée contrairement aux méthodes stochastiques qui convergent vers le voisinage de l'optimum global. Les méthodes stochastiques utilisent la notion du hasard (choix aléatoire de certains paramètres) qui constitue un des inconvénients de ces méthodes.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur l'optimisation statique dans l'espace euclidienne. Le chapitre commence par la présentation générale d'un problème d'optimisation et d'un certain nombre de définitions utiles. Puis, le chapitre introduit les conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation statique suivi d'une synthèse sur les différentes classes de méthodes d'optimisation statique. La fin du chapitre présente la méthode d'optimisation globale d'Alienor utilisée dans le cadre de cette thèse. Le principe de cette méthode consiste à utiliser une transformation réductrice pour transformer un problème d'optimisation à plusieurs variables de décision en un autre problème à une seule variable de décision. L'efficacité

de cette méthode, dans la localisation d'un optimum global, est illustrée par un exemple d'application sur une fonction objectif test.

## 3.2 Problème d'optimisation

Après la modélisation mathématique d'un problème d'optimisation, ce dernier met en évidence une fonction objectif à optimiser (critère) et un ensemble de contraintes. Les inconnus dans un problème d'optimisation sont appelés variables d'optimisation ou de décision. Les contraintes définissent le domaine admissible, c'est-à-dire l'ensemble des solutions réalisables. Un problème d'optimisation se présente sous la forme suivante [97, 111, 112]

$$\underset{\theta}{\text{opt}} \mathcal{P}(\theta) \tag{3.1}$$

$$\text{sujet à :} \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R}_i(\theta) = 0; \quad i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}} \tag{3.3}$$

$$\mathcal{S}_j(\theta) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_{\mathcal{S}} \tag{3.4}$$

où  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_{\mathcal{P}}})^T \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  est le vecteur de variables d'optimisation avec  $n_{\mathcal{P}}$  est le nombre des variables d'optimisation.  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{S}_j$  sont respectivement les contraintes du type égalité et du type inégalité.  $n_{\mathcal{R}}$  et  $n_{\mathcal{S}}$  sont respectivement le nombre de contraintes égalités et inégalités.  $\mathcal{P}$  représente la fonction objectif supposée continue et différentielle. Les contraintes (3.3) et (3.4) signifient que le vecteur  $\theta$  appartient à un domaine compact  $\mathcal{D}$ , appelée domaine admissible, c'est-à-dire  $\theta \in \mathcal{D}$ .

Le but de l'optimisation est de chercher parmi les solutions acceptables (admissibles ou réalisables), un  $\theta^*$  tel que, dans le cas de minimisation,

$$\mathcal{P}(\theta^*) \leq \mathcal{P}(\theta), \quad \forall \theta \in \mathcal{D} \tag{3.5}$$

dans ce cas  $\theta^*$  est un optimum global (voir la définition **3.4**).

Pour rechercher le maximum de  $\mathcal{P}(\theta)$ , il suffit de chercher le minimum de  $-\mathcal{P}(\theta)$ , c'est-à-dire un  $\hat{\theta}$  tel que

$$-\mathcal{P}(\hat{\theta}) \geq -\mathcal{P}(\theta), \quad \forall \theta \in \mathcal{D} \quad (3.6)$$

Néanmoins, cette transformation doit se faire avec précaution car si certaines propriétés mathématiques de la fonction  $\mathcal{P}$  restent invariantes par cette transformation, d'autres propriétés peuvent être carrément perdues en appliquant cette transformation [97]. Pour simplifier la présentation, dans ce qui suit, on considère seulement le cas de minimisation.

Un des aspects important en optimisation est l'aspect d'existence et d'unicité de la solution. En général, on essaie de mettre, lorsque c'est possible, le problème d'optimisation sous une forme où il y a une seule solution en utilisant certains résultats de topologie et d'analyse fonctionnelle [108]. Ceci permet de faciliter la recherche de la solution. La condition d'existence d'une solution pour un problème d'optimisation (minimisation) est donnée par le Théorème **3.1**.

**Théorème 3.1** ( [97]). *Soit  $\mathcal{D}$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  et  $\mathcal{P} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $\mathcal{P}$  est bornée inférieurement sur  $\mathcal{D}$  et il existe une solution au problème de la minimisation de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire : il y a au moins un minimum  $\hat{\theta} \in \mathcal{D}$  tel que*

$$\mathcal{P}(\hat{\theta}) = \inf_{\theta \in \mathcal{D}} \mathcal{P}(\theta) \quad (3.7)$$

avec  $\mathcal{P}(\hat{\theta})$  est la borne inférieure.

Le Théorème **3.1** donne le résultat concernant l'existence de la solution. L'unicité de la solution peut être démontrée en se basant sur l'étude de certaines propriétés de la fonction objectif, par exemple sa stricte convexité.

**Définition 3.1** ( [52]). *Une fonction  $\mathcal{P}$  est strictement convexe si elle satisfait la condition suivante*

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D} \text{ et } 0 < \xi < 1, \mathcal{P}(\xi \theta_1 + (1 - \xi) \theta_2) < \xi \mathcal{P}(\theta_1) + (1 - \xi) \mathcal{P}(\theta_2) \quad (3.8)$$

**Définition 3.2** ([52]). *Une fonction  $\mathcal{P}$  est convexe si elle satisfait la condition suivante*

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{D} \text{ et } 0 < \xi < 1, \mathcal{P}(\xi \theta_1 + (1 - \xi) \theta_2) \leq \xi \mathcal{P}(\theta_1) + (1 - \xi) \mathcal{P}(\theta_2) \quad (3.9)$$

Pour avoir les définitions d'une fonction strictement concave et d'une fonction concave, il suffit de changer le sens des inégalités dans les définitions (3.1) et (3.2). Cette notion de concavité est très utile dans les problèmes de maximisation.

**Remarque 3.1.** *Une fonction  $\mathcal{P}(\theta)$  peut être ni convexe ni concave.*

En optimisation, on distingue deux types d'optima [112, 116] : local et global. Dans le cas d'un minimum, ces derniers sont définis comme suit :

**Définition 3.3** ([52]). *La solution  $\hat{\theta}$  est un minimum local (relatif) de  $\mathcal{P}$  s'il existe un voisinage de  $\hat{\theta}$ , noté  $\mathbb{V}(\hat{\theta})$ , tel que*

$$\mathcal{P}(\hat{\theta}) \leq \mathcal{P}(\theta), \forall \theta \in \mathcal{D} \cap \mathbb{V}(\hat{\theta}) \quad (3.10)$$

**Définition 3.4** ([52]). *La solution  $\hat{\theta}$  est un minimum global (absolu) si*

$$\mathcal{P}(\hat{\theta}) \leq \mathcal{P}(\theta), \forall \theta \in \mathcal{D} \quad (3.11)$$

Pour définir les maxima local et global, il suffit de changer le sens des inégalités dans (3.10) et (3.11). On parle aussi d'un optimum strict lorsque l'inégalité (3.10) est satisfaite pour tout  $\theta$  différent de l'optimum local  $\hat{\theta}$  ou de l'optimum global  $\theta^*$ .

Ainsi, pour un problème d'optimisation, le but recherché est de localiser l'optimum global. Dans ce cas, il s'agit de l'optimisation globale [111–113, 116]. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'optimisation globale sans contraintes, c'est-à-dire le domaine admissible  $\mathcal{D}$  coïncide avec  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  ( $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$ ).

### 3.3 Conditions d'optimalité

Pour un problème d'optimisation, on doit chercher toutes les solutions possibles. Alors, il est intéressant d'avoir la possibilité de décider si un point quelconque  $\theta \in \mathcal{D}$  est une solution pour ce problème, c'est-à-dire c'est un optimum. De plus, on doit préciser sa nature (minimum ou maximum). Pour ce faire, on doit vérifier certaines conditions appelées d'optimalité. On distingue les conditions nécessaires et les conditions suffisantes qui caractérisent un optimum. Ainsi, pour le cas d'un minimum les conditions nécessaires et les conditions suffisantes sont données respectivement par les Théorème (3.2) et (3.3)

**Théorème 3.2** ([52]). *Soit  $\hat{\theta}$  un minimum local d'une fonction  $\mathcal{P}(\theta)$ . Si  $\mathcal{P}$  est différentiable dans un voisinage ouvert  $\mathbb{V}$  de  $\hat{\theta}$ , alors,*

$$\nabla_{\theta}\mathcal{P}(\hat{\theta}) = 0 \tag{3.12}$$

*Si, de plus,  $\mathcal{P}$  est deux fois différentiable sur  $\mathbb{V}$ , alors la matrice hessienne*

$$\nabla_{\theta}^2\mathcal{P}(\hat{\theta}) \tag{3.13}$$

*est semi-définie positive.*

Les conditions (3.12) et (3.13) sont appelées respectivement la condition nécessaire du premier ordre (basée sur le gradient) et la condition nécessaire du deuxième ordre (basée sur la matrice hessienne). Il est important de signaler que la condition (3.12) joue un rôle du premier plan dans la plupart des méthodes d'optimisation [53].

Les points vérifiant la condition du premier ordre (3.12) sont appelés points critiques ou stationnaires. Ces points peuvent être des minima, des maxima, des points selle ou des points singuliers (des points pour lesquels on ne peut pas préciser la nature). C'est la condition (3.12) qui permet de préciser la nature du chaque point critique en analysant les valeurs propres de la matrice hessienne.

**Théorème 3.3** ([52]). *Soit  $\mathcal{P}$  une fonction deux fois différentiable dans un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  et soit  $\hat{\theta} \in \mathcal{D}$  qui vérifie les deux conditions suivantes*

$$\nabla_{\theta} \mathcal{P}(\hat{\theta}) = 0 \tag{3.14}$$

et

$$\nabla_{\theta}^2 \mathcal{P}(\hat{\theta}) > 0 \tag{3.15}$$

*est définie positive, alors  $\hat{\theta}$  est un minimum local de  $\mathcal{P}$ .*

Pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point  $\hat{\theta}$  soit un maximum, il suffit de remplacer, dans les deux théorèmes, le mot positive par négative. Par conséquent, on constate que la condition nécessaire (3.12) est la même pour un minimum et un maximum. Par contre, c'est la condition du deuxième ordre (3.13) qui permet de préciser la nature de l'optimum, c'est-à-dire du point critique.

Les théorèmes (3.2) et (3.3) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir les minima locaux et globaux sans les distinguer. Par conséquent, il est intéressant de filtrer les minima globaux parmi les points critiques trouvés. Ceci n'est possible que pour certaines classes de problème d'optimisation particuliers, appelés problèmes d'optimisation structurés [52, 97], par exemple les problèmes d'optimisation quadratique, d'optimisation linéaire et d'optimisation convexe. Le Théorème 3.4 précise les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité globale dans le cas d'un minimum.

**Théorème 3.4** ([52]). *Soit une fonction continue  $\mathcal{P} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $\hat{\theta} \in \mathcal{D}$  un minimum local de  $\mathcal{P}$ . Si  $\mathcal{P}$  est une fonction convexe, alors  $\hat{\theta}$  est un minimum global de  $\mathcal{P}$ . Si de plus  $\mathcal{P}$  est strictement convexe,  $\hat{\theta}$  est l'unique minimum globale de  $\mathcal{P}$ .*

De même pour un problème de maximisation, l'optimalité globale est liée à la concavité de la fonction objectif  $\mathcal{P}$ . Ainsi, si  $\mathcal{P}$  est concave, le point  $\hat{\theta}$  est un maximum global. Si de plus,  $\mathcal{P}$  est strictement concave,  $\hat{\theta}$  est l'unique maximum global.

Le Théorème **3.4** précise que la condition nécessaire et suffisante d’optimalité globale est la convexité de la fonction objectif  $\mathcal{P}$ . La convexité est une propriété cruciale en optimisation [97]. Lorsque cette dernière n’est pas convexe, il est généralement délicat de localiser un optimum global [82, 114]. Le problème de détermination d’un optimum global devient très difficile lorsque la fonction objectif  $\mathcal{P}$  est ni convexe ni concave.

Une autre méthode pour localiser un optimum global parmi les optima possibles consiste à évaluer la fonction objectif  $\mathcal{P}$  pour chaque optimum trouvé. Dans ce cas, l’optimum global est celui qui optimise la fonction objectif  $\mathcal{P}$ . Cette méthode est intéressante lorsque on dispose de tous les points critiques du problème d’optimisation. Mais, en optimisation, mis à part quelques problèmes d’optimisation, souvent académiques, le grand travail et le plus dur est de trouver d’abord ces points critiques. Ces derniers peuvent être obtenus aisément lorsque la résolution analytique de la condition du premier ordre (3.12) est possible. Dans le cas contraire, le cas le plus fréquent, il faut développer des méthodes permettant de localiser tous les points critiques du problème d’optimisation et l’idéal est de localiser directement l’optimum global parmi ces points. C’est l’objectif des méthodes (algorithmes) d’optimisation.

### 3.4 Méthodes d’optimisation

Localiser les points critiques revient à résoudre le système d’équations algébriques non linéaires (3.14). La possibilité d’une résolution analytique dépend en particulier de la nature de la fonction objectif  $\mathcal{P}$  qui caractérise la complexité des équations à résoudre. Ainsi, une fonction objectif  $\mathcal{P}$  fortement non linéaire conduit forcément à un système d’équations algébriques (3.14) très difficile voire impossible à résoudre analytiquement. Dans ce cas, des méthodes numériques doivent être utilisées pour déterminer tous les points critiques de la fonction  $\mathcal{P}$  mais de trouver les points les plus intéressants pour le problème d’optimisation (par exemple l’optimum global). Les différents algorithmes développés dans cette optique font partie de ce qui est appelé communément optimisation numérique [52–54].

En général, les différentes méthodes d'optimisation numériques développées dans la littérature peuvent être classifiées en deux classes [54, 111, 112, 117] : méthodes déterministes et méthodes stochastiques.

Les méthodes déterministes cherchent les optima d'un problème d'optimisation à l'aide des algorithmes déterministes ne faisant pas intervenir le hasard [52, 53, 116]. Ces méthodes utilisent le gradient et la matrice hessienne dans leurs algorithmes, et nécessitent souvent un estimé de départ (initialisation) pour la solution du problème. Pour cette classe, on distingue aussi deux types de méthodes [116] : locales et globales. Les méthodes locales convergent vers un optimum local, par contre les méthodes d'optimisation globale permettent de trouver les optima globaux.

Ces méthodes sont faciles et simples à programmer et convergent rapidement avec précision vers la solution. Néanmoins, et particulièrement, dans le cas des méthodes locales, la solution trouvée dépend de l'estimé de départ choisi pour la solution. Aussi, la convergence des méthodes impose à la fonction objectif  $\mathcal{P}$  de vérifier certaines hypothèses d'applicabilité, souvent fortes, par exemple la différentiabilité qui est très difficile à garantir dans les problèmes concrets. Au plus, l'estimation du temps de convergence (calcul d'un optimum) n'est souvent pas possible. Parmi les méthodes déterministes locales, on peut citer la méthode du gradient, la méthode du gradient conjugué et la méthode de **Newton** et ses différentes variantes [52, 53]. Pour les méthodes d'optimisation globale déterministes, on peut mentionner la méthode des intervalles [115] et la méthode d'Aliénor et ses différentes variantes [81, 117, 118].

Les méthodes stochastiques font intervenir le hasard et l'ensemble du domaine admissible  $\mathcal{D}$  est exploré de manière aléatoire pour localiser l'optimum [53, 55, 112]. Ces méthodes présentent l'avantage de convergence vers le voisinage d'un optimum global sans l'atteindre avec la précision souhaitée. Cette dernière peut être améliorée au prix d'un temps de calcul important difficile à estimer. Leur inconvénient est liée aux choix aléatoire de certains paramètres de l'algorithme qui conditionne la qualité de la solution à obtenir [111, 112]. Ces méthodes

présentent l'avantage de ne pas exiger des hypothèses sur la fonction objectif  $\mathcal{P}$  par exemple la différentiabilité. Comme exemples de méthodes d'optimisation stochastiques, on peut citer le recuit simulé [117], les algorithmes génétiques [55] et les méthodes d'optimisation par essais particuliers [56].

Une troisième classe de méthodes d'optimisation, appelées méthodes hybrides, tire profit des avantages des méthodes déterministe et stochastiques. Comme l'objectif est de localiser l'optimum global, leur principe consiste à démarrer par une méthode stochastique pour converger vers un point au voisinage de l'optimum global. Puis pour améliorer davantage la précision, on passe le relais à une méthode déterministe dont l'estimé de départ de la solution est le point trouvé par la méthode stochastique. Par exemple, lorsque la fonction objectif  $\mathcal{P}$  est deux fois différentiable, on peut commencer la recherche de l'optimum global en utilisant les algorithmes génétiques, et après la convergence, on continue la recherche avec la méthode de **Newton** en considérant comme estimé de départ le point trouvé par les algorithmes génétiques. L'inconvénient de cette classe est le temps de calcul qui peut être important.

Les références [54, 58, 111, 112] présentent des synthèses sur les différentes méthodes d'optimisation développées dans la littérature.

Dans ce qui suit la présentation est axée sur la méthode d'optimisation globale d'Aliénor [81, 82] utilisée dans le cadre de cette thèse. Cette méthode permet de convertir le problème d'optimisation à  $n_{\mathcal{P}}$  variables d'optimisation en un autre problème à une seule variable de décision dont la solution est facile à obtenir.

### 3.5 Optimisation globale par la méthode d'Aliénor

En 1970, lors d'un de ses séminaires, **Cherruault** a proposé une idée de transformer une fonction à plusieurs variables en une autre fonction d'une seule variable qui préserve les optima de la fonction originale. L'objectif est de simplifier la recherche des optima d'une fonction à plusieurs variables et la localisation d'un optimum globale. Cette idée a été, par la suite,

développée, par ces chercheurs pour proposer un ensemble de transformations [118–120]. La première transformation proposée consiste à relier deux à deux les variables de la fonction à plusieurs variables en utilisant la spirale d’**Archimède** [82]. Cette transformation ayant une structure d’arbre permet de diviser, à chaque étape, le nombre de variables par deux a été appelée par ses auteurs la méthode d’Alienor [82, 114, 116]. Cette méthode permet en réalité d’approcher l’espace  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  par une courbe. Après plusieurs travaux sur la méthode, les auteurs ont conclu que le problème de la réduction d’une fonction à plusieurs variables à une fonction d’une seule variable revient à chercher une courbe (fonction d’une seule variable) qui remplit l’espace  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  [119].

Cette conclusion a permis d’introduire la notion de  $\alpha$ -densité [114, 119]. Ainsi, lorsque tout point de l’espace  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$  peut être approché à  $\alpha$  près par au moins un point du sous-espace  $S$  de  $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{P}}}$ , on dit que  $S$  est  $\alpha$ -dense. Cette notion de  $\alpha$ -densité a été exploitée pour développer d’autres transformations réductrices plus performantes que celle basée sur la spirale d’**Archimède** [114].

L’idée de la méthode d’Alienor consiste à utiliser des transformations réductrices  $\mathbb{F}_i$  (fonctions de classe  $C^\infty$ ) de la forme [114, 117]

$$\theta_i = \mathbb{F}_i(w), \quad i = 1, \dots, n_{\mathcal{P}} \quad (3.16)$$

pour réduire la fonction à plusieurs variables

$$\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (3.17)$$

à une fonction d’une seule variable  $w \in \mathbb{R}$  ( $w$  est la nouvelle variable d’optimisation)

$$\mathcal{P}(\mathbb{F}_1(w), \mathbb{F}_2(w), \dots, \mathbb{F}_n(w)) = \mathcal{G}(w) \quad (3.18)$$

De point de vue optimisation, pour approximer les optima globaux de la fonction  $\mathcal{P}(\theta)$  par ceux de la fonction  $\mathcal{G}(w)$ , la transformation réductrice doit posséder la propriété de

densification ou de remplissage de l'espace.

**Définition 3.5** ([114]). *Un sous-espace  $\mathbb{V}$  de  $\mathbb{R}^{n\mathcal{P}}$  est  $\alpha$ -dense ( $\alpha > 0$ ) dans  $\mathbb{R}^{n\mathcal{P}}$  si pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^{n\mathcal{P}}$  il existe  $\theta' \in \mathbb{V}$  tel que la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^{n\mathcal{P}}$ , notée  $d$ , est inférieure à  $\alpha$ , c'est-à-dire  $d(\theta, \theta') < \alpha$ .*

### 3.5.1 Transformations réductrices

Dans cette sous-section, on présente quelques transformations réductrices.

#### Spirale d'Archimède

La spirale d'Archimède est la première transformation proposée pour développer la méthode d'Alienor [82]. Deux variables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  peuvent être exprimées en coordonnées polaires  $(\bar{r}, \omega)$  comme suit [82, 114, 116, 117] :

$$\theta_1 = \bar{r} \cos(\omega), \quad \theta_2 = \bar{r} \sin(\omega) \quad (3.19)$$

avec  $\bar{r}$  et  $\omega$  sont respectivement le rayon et l'angle de la spirale d'**Archimède**.

En utilisant la spirale d'**Archimède**, on peut relier les variables  $\bar{r}$  et  $\omega$  comme suit :

$$\bar{r} = a \omega \quad (3.20)$$

où  $a$  est un paramètre positif qui influe sur la qualité de la densification.

En substituant  $\bar{r}$  par son expression (3.20) dans (3.19), on obtient

$$\theta_1 = a \omega \cos(\omega), \quad \theta_2 = a \omega \sin(\omega) \quad (3.21)$$

On remarque que les deux variables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont exprimées en fonction de la seule nouvelle variable  $\omega$ .

Dans le cas de trois variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , on commence à relier, par la spirale d'Archimède d'angle  $\omega_1$ , les deux variables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  comme précédemment, ce qui donne

$$\theta_1 = a \omega_1 \cos(\omega_1), \quad \theta_2 = a \omega_1 \sin(\omega_1) \quad (3.22)$$

Puis, on relie, de la même façon, la nouvelle variable  $\omega_1$  et la troisième variable  $\theta_3$  en utilisant une spirale d'**Archimède** d'angle  $w$  ce qui donne

$$\omega_1 = a \omega \cos(\omega) \quad (3.23)$$

$$\theta_3 = a \omega \sin(\omega) \quad (3.24)$$

En substituant  $\omega_1$  par son expression (3.23) dans (3.22), il vient

$$\theta_1 = a^2 \omega \cos(\omega) \cos(a \omega \cos(\omega)) \quad (3.25)$$

$$\theta_2 = a^2 \omega \cos(\omega) \sin(a \omega \cos(\omega)) \quad (3.26)$$

$$\theta_3 = a \omega \cos(\omega) \quad (3.27)$$

Ainsi, en utilisant la spirale d'**Archimède**, on peut transformer une fonction à trois variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  en une fonction à une seule variable  $\omega$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \mathcal{P}\left(a^2 \omega \cos(\omega) \cos(a \omega \cos(\omega)), a^2 \omega \cos(\omega) \sin(a \omega \cos(\omega)), a \omega \cos(\omega)\right) \\ &= \mathcal{G}(\omega) \end{aligned} \quad (3.28)$$

De manière générale, une fonction  $\mathcal{P}$  à  $n_{\mathcal{P}}$  variables  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_{\mathcal{P}}})$  peut être ramenée à une fonction  $\mathcal{G}$  à une seule variable  $\omega$  en utilisant la spirale d'**Archimède** qui est  $\alpha$ -dense

avec  $\alpha = \sqrt{n_{\mathcal{P}}}\pi a$  [114]. La qualité de l'approximation obtenue par cette transformation est quantifiée par le Théorème 3.5.

**Théorème 3.5** ([114]). *Les optima globaux de la fonction à plusieurs variables  $\mathcal{P}(\theta)$  peuvent être approximés par les optima globaux de la fonction à une seule variable  $\mathcal{G}(\omega)$ . L'approximation sera d'autant meilleure que  $\alpha$  sera choisi petit.*

D'après le Théorème 3.5, la spirale d'**Archimède** assure une très bonne densification lorsque  $a$  tend vers 0. Néanmoins, la fonction  $\mathcal{G}(\omega)$  peut posséder des optima parasites, c'est-à-dire qui ne sont pas des approximations des optima de la fonction originale  $\mathcal{P}(\theta)$  [116]. Cela est dû à la nature des fonctions oscillantes (cosinus et sinus) utilisées dans la définition de la transformation réductrice. De plus, l'obtention de la fonction  $\mathcal{G}(\theta)$  nécessite de relier les différentes variables deux à deux, par conséquent le temps de calcul pour localiser l'optimum global peut être important [114].

Ces deux inconvénients de la spirale d'**Archimède**, ont motivé un nombre de chercheurs à développer d'autres transformation réductrices plus simples et régulières (de classe  $C^\infty$ ). La tendance pour développer des transformations réductrices permettant d'avoir  $\mathcal{G}(\omega)$  en une seule étape tout en réduisant le temps nécessaire pour atteindre l'optimum global.

### Transformation de Mora and Cherruault

En considérant que le domaine admissible  $\mathcal{D}$  peut être normalisé pour devenir  $[-1, 1]^{n_{\mathcal{P}}}$ . La transformation réductrice de **Mora and Cherruault** est définie comme suit [119] :

$$\theta_i = a \omega \sin(\rho_i \omega), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

Dans cette transformation réductrice  $a$  est une constante positive. Les  $\rho_i$  sont des paramètres à choisir pour assurer une  $\alpha$ -densité désirée. Le choix de ces derniers est précisé par le Théorème 3.6.

**Théorème 3.6** ([114]). *Pour que la transformation réductrice définie par  $\theta_i = a \omega \sin(\rho_i \omega)$  ( $i = 1, \dots, n_{\mathcal{P}}$ ) soit  $\alpha$ -dense dans  $[-1, 1]^{n_{\mathcal{P}}}$ , il suffit de choisir une suite  $\rho_1, \dots, \rho_{n_{\mathcal{P}}}$  très lentement croissante avec un dernier terme  $\rho_{n_{\mathcal{P}}}$  vérifiant*

$$\frac{\rho_{n_{\mathcal{P}}-1}}{\rho_{n_{\mathcal{P}}}} \leq \frac{\alpha}{\pi \sqrt{n_{\mathcal{P}}}} \quad (3.30)$$

Notons que le choix de la suite  $\rho_1, \dots, \rho_{n_{\mathcal{P}}}$  lentement croissante est très important en pratique. Comme ce choix peut influencer le résultat final, les  $\rho_i$  sont choisis en respectant :

$$\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} < 1 \quad (3.31)$$

### Transformation de Cherruault

Cette transformation exige aussi de normaliser le domaine admissible  $\mathcal{D}$ . Elle est définie comme suit [81] :

$$\theta_i = \cos(\rho_i \omega), \quad i = 1, \dots, n_{\mathcal{P}} \quad (3.32)$$

La  $\alpha$ -densité assurée par cette transformation réductrice et le choix des paramètres  $\rho_i$  sont précisés par le Théorème 3.7.

**Théorème 3.7** ([114]).  *$\rho_{i+1}$  étant légèrement supérieur à  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, n_{\mathcal{P}} - 2$ ) de façon à ce que deux optima successifs des  $\rho_i$  restent tous dans un intervalle fixe de longueur  $k \pi / \rho_{n_{\mathcal{P}}}$  ( $k$  indépendant de  $n_{\mathcal{P}}$ ), la transformation réductrice  $\theta_i = \cos(\rho_i \omega)$  est  $\alpha$ -dense pourvu que*

$$\frac{\pi^2}{\rho_{n_{\mathcal{P}}}^2} \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{P}}-1} \alpha_i^2 \leq \alpha^2 \quad (3.33)$$

*En particulier, la  $\alpha$ -densité est obtenue pour*

$$\rho_{n_{\mathcal{P}}} = \frac{\pi \sqrt{n_{\mathcal{P}} - 1} \rho_{n_{\mathcal{P}}-1}}{\alpha} \quad (3.34)$$

Les paramètres  $\rho_1, \dots, \rho_{n_{\mathcal{P}}-1}$  doivent être très proches les uns des autres et doivent former une suite lentement croissante. Par exemple, en choisissant un  $\bar{\epsilon}$  positif et très petit, cette suite peut être construite comme suit

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \bar{\epsilon} \quad (3.35)$$

### Transformation de Konfé

Cette transformation exige aussi la normalisation du domaine admissible  $\mathcal{D}$ . Elle est définie comme suit [120] :

$$\theta_i = \cos(\Psi_i \omega + \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.36)$$

Le choix des paramètres  $\Psi_i$  et  $\Phi_i$  est dicté par le Théorème 3.8 qui estime aussi la qualité de la densification.

**Théorème 3.8** ([114]). *La transformation  $\theta_i = \cos(\Psi_i \omega + \Phi_i), i = 1, \dots, n$  :*

- avec des  $\Psi_i$  croissants et,
- des  $\Phi_i$  croissants et proches les uns des autres,

*est  $\alpha$ -dense et son coefficient de densification vaut :*

$$\alpha = \frac{2 \bar{k} \sqrt{n_{\mathcal{P}} - 1} \Psi_{n_{\mathcal{P}}-1}}{\Psi_{n_{\mathcal{P}}}} \quad (3.37)$$

La constante  $\bar{k}$  est le majorant de  $\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$  avec  $-1 < \xi < 1$ .

**Remarque 3.2.** *Les transformations de **Mora and Cherruault** (3.29), de **Cherruault** (3.32) et de **Konfé** (3.36) permettent d'obtenir la fonction  $\mathcal{G}(\omega)$  en une seule étape. Cette caractéristique permet de réduire davantage le temps de calcul de l'optimum.*

### 3.5.2 Rapidité et précision de la méthode d'Alienor

L'obtention de l'optimum global est généralement très difficile lorsque la fonction objectif  $\mathcal{P}$  ne possède pas certaines propriétés mathématique, par exemple la convexité. L'utilisation de la méthode d'Alienor basée sur les transformations réductrices permet de réduire le nombre de variables de décision à une seule variable. Mais, il est toujours intéressant d'estimer le temps de calcul nécessaire pour localiser l'optimum global par cette méthode et la précision de la solution obtenue.

#### Temps de calcul

Une fois la méthode est appliquée, on obtient la fonction  $\mathcal{G}(\omega)$  et le problème revient à chercher l'optimum global  $\omega^*$  de cette dernière sur l'intervalle  $[0, \omega_{\max}]$ . Puis en utilisant la transformation réductrice, on déduit l'optimum global de  $\theta^*$ . Pour déterminer  $\omega^*$ , on propose d'utiliser la méthode des évaluations simultanées [110]. Le principe de cette méthode consiste à discrétiser l'intervalle  $[0, \omega_{\max}]$  en utilisant un pas  $\Delta\omega$ , puis de construire l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{G}(i \Delta\omega), i = 0, \dots, \mathcal{N}\} \quad (3.38)$$

avec  $\mathcal{N} = \omega_{\max}/\Delta\omega$ .

L'optimum global est le point  $\omega^* = i^* \Delta\omega$  réalisant l'optimum global de  $\mathcal{M}$ . Dans ce cas, le temps de calcul de l'optimum global est donnée par la formule suivante [114]

$$t_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{\Delta\omega} t_m \quad (3.39)$$

où  $t_m$  est le temps moyen de calcul de  $\mathcal{G}(\omega)$  pour un  $\omega$  donné qu'on peut estimer statistiquement.

## Précision de la solution

Pour déterminer l'optimum global, en appliquant la méthode d'Alienor, avec une précision souhaitée  $\varepsilon$ , le problème revient à choisir le coefficient de densification  $\alpha$  et le pas de discrétisation  $\Delta\omega$ . En considérant que la fonction à une seule variable  $\mathcal{G}(\omega)$  et la transformation réductrice utilisée sont des fonctions Lipschitziennes respectivement de constantes  $l_1$  et  $l_2$ , les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\Delta\omega$  assurant une précision  $\varepsilon$  sont déterminées par les formules suivantes [81] :

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{l_1} \quad (3.40)$$

$$\Delta\omega = \frac{\varepsilon}{l_1 l_2} \quad (3.41)$$

## 3.6 Exemple illustratif

Pour illustrer la méthode d'Alienor, on considère le problème d'optimisation sans contrainte suivant [113] :

$$\min_{\theta_1, \theta_2} \mathcal{P}(\theta_1, \theta_2) = 4\theta_1^2 - 2,1\theta_1^4 + \frac{1}{3}\theta_1^6 + \theta_1\theta_2 - 4\theta_2^2 + 4\theta_2^4 \quad (3.42)$$

avec  $\mathcal{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

La fonction  $\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)$  représente un exemple de fonction test pour laquelle il est très difficile de localiser son minimum global. Le graphe de  $\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)$  est donné par la Figure 3.1.

Pour appliquer la méthode d'Alienor, on propose d'utiliser la transformation réductrice de **Konfé** (3.36). Les variables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont définies comme suit :

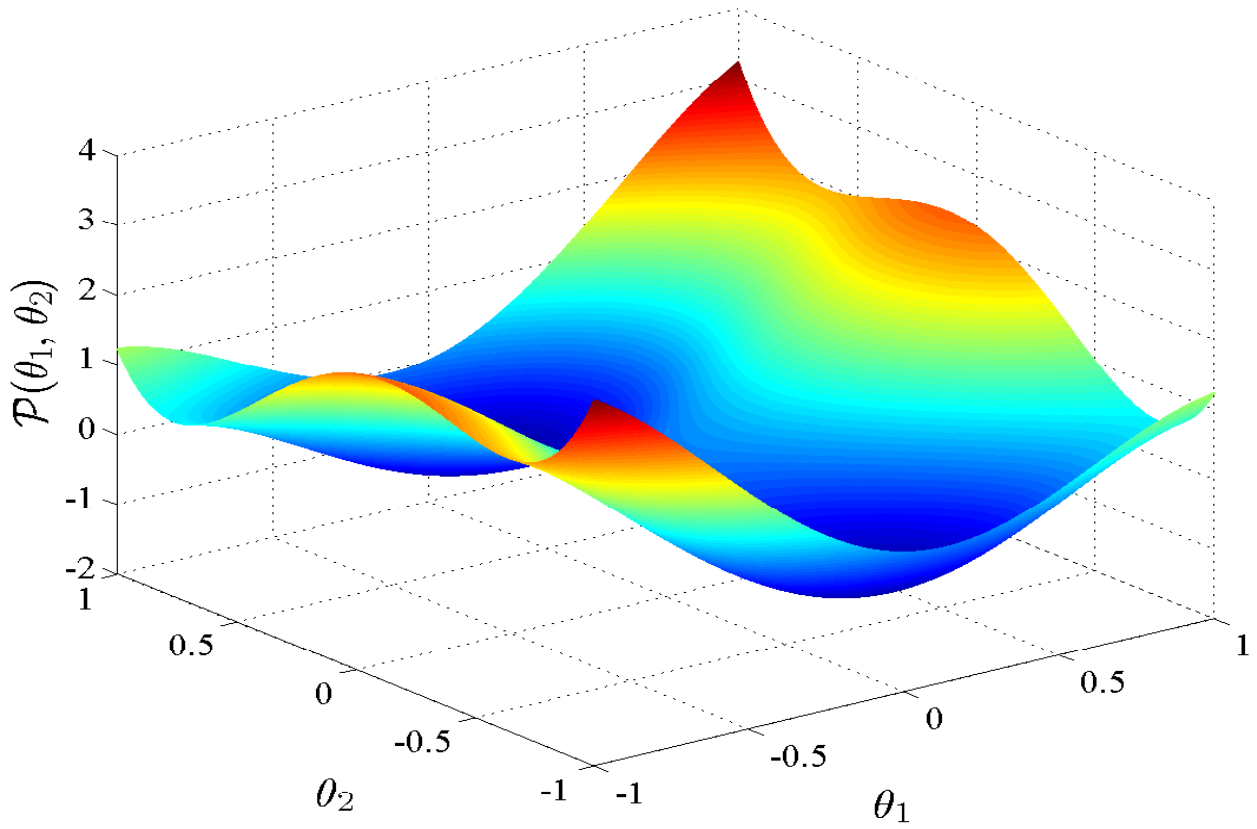


FIGURE 3.1: Graphe de la fonction  $\mathcal{P}(\theta_1, \theta_2)$  du problème d'optimisation (3.42).

$$\theta_1 = \cos(1000\omega + 1) \quad (3.43)$$

$$\theta_2 = \cos(1001\omega + 1, 0005) \quad (3.44)$$

Le nouveau problème d'optimisation à une seule variable  $\omega$  à résoudre est :

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \mathcal{G}(\omega) = & 4 \cos^2(1000\omega + 1) - 2,1 \cos^4(1000\omega + 1) + \frac{1}{3} \cos^6(1000\omega + 1) \\ & + \cos^2(1000\omega + 1) \cos^2(1001\omega + 1, 0005) - 4 \cos^2(1001\omega + 1, 0005) \\ & + 4 \cos^4(1001\omega + 1, 0005) \end{aligned} \quad (3.45)$$

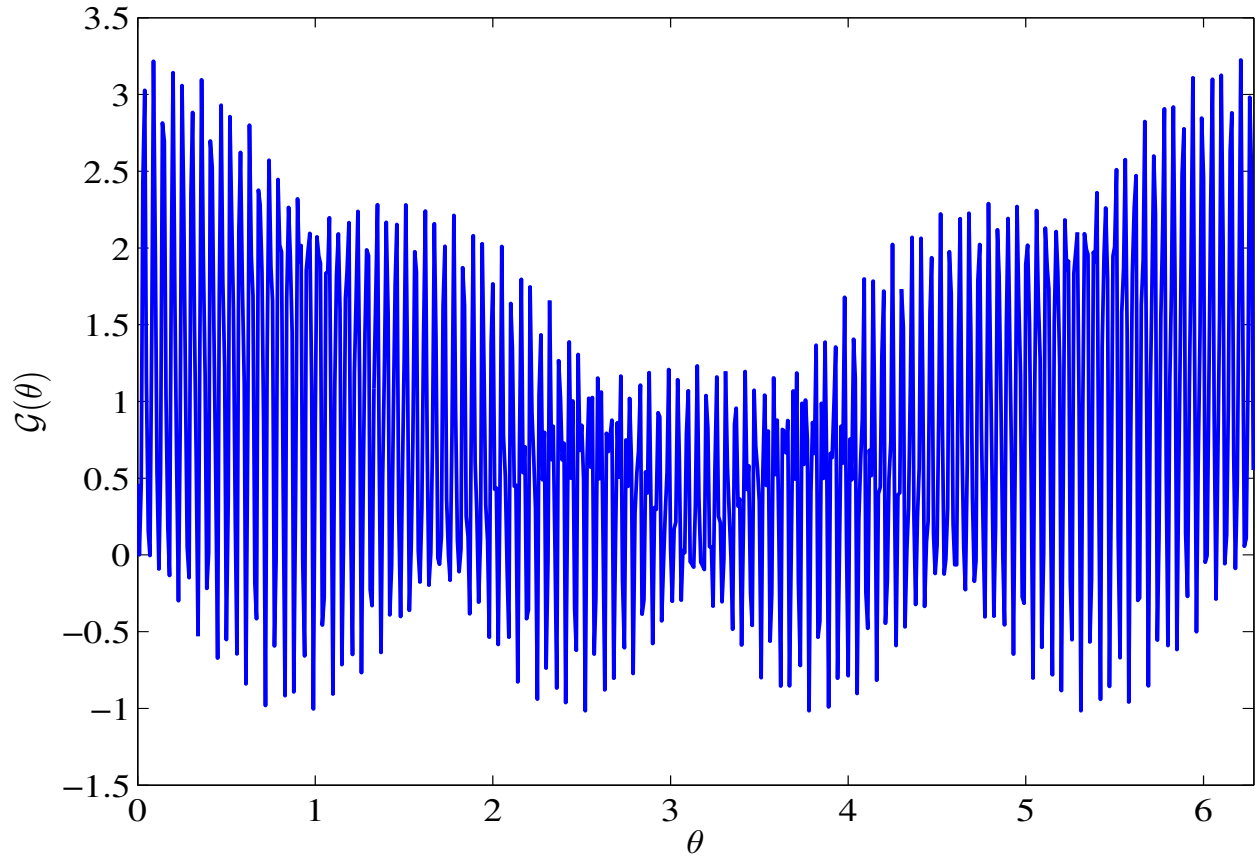


FIGURE 3.2: Graphe de la fonction  $\mathcal{G}(\theta)$  du problème d'optimisation (3.45).

Le graphe de la fonction  $\mathcal{G}(\omega)$  est donné par la Figure 3.2. On remarque que la fonction  $\mathcal{G}(\omega)$  est très oscillante.

Ainsi, pour appliquer la méthode des évaluations simultanées [110], on considère le pas de discrétisation  $\Delta\omega = 10^{-5}$  et  $\omega_{\max} = 2\pi$ . La solution obtenue est

$$\omega^* = 3,8428 \tag{3.46}$$

et les transformation réductrices (3.43)–(3.44) conduisent à la solution, du problème original, suivant

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= \cos(1000 \omega^* + 1) \\ &= 0,091261\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\theta_2^* &= \cos(1001 \omega^* + 1,0005) \\ &= -0,71255\end{aligned}\tag{3.48}$$

et  $\mathcal{P}(\theta_1^*, \theta_2^*) = -1,0316$  qui est la même solution donnée dans [113].

### 3.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l’optimisation des fonctions mathématiques (optimisation statique). Nous avons débuté le chapitre par la formulation générale d’un problème d’optimisation statique. Puis, nous avons rappelé certaines définitions et résultats concernant l’existence et les conditions d’optimalité. Par la suite, nous avons présenté les différentes classes des méthodes d’optimisation en l’occurrence les méthodes déterministes, stochastiques et hybrides. La fin du chapitre introduit une méthode d’optimisation globale déterministe appelé méthode d’Alienor. Le principe de cette dernière consiste à utiliser des transformations réductrices pour convertir un problème d’optimisation à plusieurs variables en un autre équivalent mais avec une seule variable de décision. Cette méthode permet de simplifier davantage la recherche de la solution et de localiser l’optimum global. Pour montrer l’efficacité de la méthode, nous avons présenté un exemple d’application en considérant une fonction test tirée de la littérature.

La méthode d’Alienor, qui est purement déterministe, présente un certain nombre d’avantages remarquables par rapport aux autres méthodes d’optimisation. Comparée aux méthodes stochastiques basées sur des choix aléatoires des paramètres, qui peuvent avoir une influence considérable sur la solution finale, le choix des paramètres de la méthode d’Alienor (des

transformations réductrices) est dicté par des théorèmes. Sur le plan précision de la solution, les méthodes stochastiques conduisent généralement au voisinage de l'optimum global. Par conséquent, ces méthodes doivent être épaulées par des méthodes déterministes pour améliorer la précision de la solution. Dans ce cas, on parle de méthodes hybrides. Dans le cas de la méthode d'Alienor, la précision de la méthode d'Alienor peut être facilement contrôlée par le choix du coefficient de la densification  $\alpha$ .

Par rapport aux autres méthodes d'optimisation globale déterministe, la méthode d'Alienor présente l'avantage de ramener le problème d'optimisation à plusieurs variables en un autre à une seule variable. Ce qui simplifie la recherche et la localisation de l'optimum global. De plus, si la fonction objectif et les transformations réductrices sont lipschitziennes, le temps de calcul pour localiser l'optimum global, avec la précision souhaitée, peut être aisément estimé.

La méthode d'Alienor peut être utilisée pour résoudre un problème de commande optimale en utilisant la méthode de discrétisation complète (approche directe de résolution d'un problème de commande optimale) ou la méthode de la paramétrisation du vecteur de commande présentées au Chapitre 2. Dans cette thèse, nous allons étendre l'application de la méthode de la paramétrisation du vecteur de commande aux systèmes fractionnaires. L'objectif est de ramener le problème de commande optimale à un problème d'optimisation statique qu'on propose de résoudre avec la méthode d'Alienor. Pour obtenir le problème d'optimisation statique, une approche basée sur la méthode de l'itération variationnelle est proposée au Chapitre 4). Dans le chapitre suivant, nous allons présenter la méthode de l'itération variationnelle utilisée pour résoudre de manière itérative des équations différentielles. Cette méthode permet d'avoir une solution analytique approximée d'une équation différentielle en quelques itérations.

# Méthode de l'itération variationnelle

## 4.1 Introduction

La modélisation des systèmes dynamiques basée sur les lois physiques conduit souvent à des équations différentielles [1, 26, 32]. Ces dernières peuvent être aux dérivées ordinaires, partielles ou intégrales. Chaque type d'équation peut être aussi d'ordre entier ou fractionnaire. Ces équations expriment les relations existantes entre les différentes variables caractéristiques du système (commandes, états et sorties).

Ces dernières années, les équations différentielles ordinaires fractionnaires ont démontré leur capacité dans la description, avec précision, des comportements dynamiques des systèmes à paramètres localisés complexes [25, 26, 29, 31, 32, 34, 35, 86]. Ces modèles (équations) sont caractérisés par des opérateurs mathématiques non locaux, c'est-à-dire l'évolution de l'état actuel du système dépend de ces évolutions passées. Cette caractéristique remarquable a marqué le succès des modèles fractionnaires puisque elle traduit fidèlement la réalité physique des phénomènes.

En automatique, le modèle mathématique joue un rôle du premier plan. Il est utilisé pour l'analyse des propriétés fondamentales du système modélisé (commandabilité, observabilité et stabilité) et pour la conception de stratégies de commande. Le succès de ces deux étapes dépend essentiellement de la qualité du modèle utilisé. En général, la règle retenue est de

considérer un modèle pas très compliqué et pas trop simplifié. Ainsi, les modèles fractionnaires sont parmi les modèles qui répondent amplement à cette règle. Ceci justifie leur utilisation très répandue en automatique [24, 26, 30].

L'étude du comportement dynamique d'un système physique ou l'évaluation des performances d'une stratégie de commande passe nécessairement par une étape de simulation en utilisant un ordinateur. La simulation consiste à résoudre les équations du modèle pour déterminer et analyser les évolutions des différentes variables caractéristiques du système.

La résolution des équations différentielles fractionnaires a connu, ces dernières années, un essor spectaculaire propulsé par le développement du calcul fractionnaire et la disponibilité des ordinateurs avec des vitesses de traitement et des capacités de stockage (mémoires) importantes.

Ce chapitre introduit une méthode, très récente, de résolution des équations différentielles ordinaires appelée méthode de l'itération variationnelle [69, 78–80, 121, 122]. Cette méthode permet de résoudre tout type d'équations différentielles sans discrétisation ni linéarisation [83, 121, 123]. Sans perte de généralités et dans le but de simplifier la présentation, on considère le cas de la résolution d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire. Néanmoins, tous les résultats présentés se généralisent aisément aux systèmes d'équations différentielles ordinaires fractionnaires.

Le chapitre commence par l'introduction du type de l'équation considérée. Puis, il enchaîne par la condition d'existence de la solution. La suite du chapitre présente, de manière générale, les principes des différentes classes de méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires fractionnaires développées dans la littérature. La dernière partie du chapitre est consacrée au principe et la convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire. La fin du chapitre illustre l'application de la méthode de l'itération variationnelle pour la résolution des équations différentielles ordinaires fractionnaires en considérant deux exemples. Le premier exemple admet une solution exacte existe ce qui permet de démontrer la convergence de la méthode de l'itération variationnelle.

## 4.2 Equations différentielles ordinaires fractionnaires

Une équation différentielle ordinaire fractionnaire est une équation impliquant une fonction inconnue et ces dérivées (fractionnaires et entières) [32, 37]. Dans ce qui suit, on s'intéresse à une classe particulière des équations différentielles ordinaires fractionnaires appelée problème à valeurs initiales. Cette classe est utilisée pour la modélisation des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire [25, 38]. Un problème à valeurs initiales est donnée comme suit [22] :

$${}_0D_t^\sigma Y(t) = \mathbb{G}(Y(t), t), \quad m-1 < \sigma < m \in \mathbb{Z}^+ \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales

$${}_0D_t^{(k)} Y(0) = Y_0^k, \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (4.2)$$

où  $Y(t)$  est la fonction inconnue (solution de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire) appelée variable dépendante et  $t \in \mathbb{R}$  représente la variable indépendante.  $\mathbb{G}$  est une fonction non linéaire. Le mot ordinaire signifie que la fonction inconnue  $Y(t)$  dépend de la seule variable  $t$ .

Résoudre une équation différentielle ordinaire fractionnaire revient à chercher la variable  $Y(t)$  qui vérifient simultanément (4.1) et les conditions initiales (4.2).

## 4.3 Existence de la solution d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire

Avant de procéder à la résolution d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire, il est indispensable de vérifier que cette dernière admet une solution, c'est-à-dire l'existence de la solution. Cette question est amplement abordée dans la littérature [124–126, 126–128] et l'étude de l'existence se fait généralement par cas. On s'intéresse dans ce qui suit à la

condition d'existence d'une solution unique pour le problème à valeurs initiales (4.1)–(4.2). Pour ce dernier, les Théorèmes 4.1 et 4.2 précisent respectivement les hypothèses requises pour assurer l'existence et l'unicité de la solution.

**Théorème 4.1** ([22]). *On suppose que la fonction  $\mathbb{G}(Y(t), t) : \mathbb{D} = [Y_0^0 - \zeta, Y_0^0 + \zeta] \times [t_0, \mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathcal{T}$  et  $\zeta > 0$ ) est continue, et soit  $t_f = \min\{\mathcal{T}, (\zeta \Gamma(1 + \sigma) \|\mathbb{G}\|_\infty)^{-\sigma}\}$ . Dans ce cas, le problème à valeurs initiales (4.1)–(4.2) admet une solution  $Y(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Théorème 4.2** ([22]). *On suppose que la fonction  $\mathbb{G}(Y(t), t) : \mathbb{D} = [Y_0^0 - \zeta, Y_0^0 + \zeta] \times [t_0, \mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathcal{T}$  et  $\zeta > 0$ ) est bornée et lipschitzienne par rapport à la variable  $Y(t)$ , c'est-à-dire il existe une constante positive  $l > 0$  (appelée constante de **Lipschitz**) telle que*

$$|\mathcal{G}(Y_1, t) - \mathcal{G}(Y_2, t)| \leq l |Y_1 - Y_2|, \forall Y_1, Y_2 \text{ et } t \in [t_0, t_f]. \quad (4.3)$$

*Dans ce cas, le problème à valeurs initiales (4.1)–(4.2) admet au moins une solution  $Y(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ .*

## 4.4 Méthodes de résolution d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire

En général, on peut distinguer les trois classes de méthodes de résolution d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire suivantes [22].

1. Méthodes analytiques ;
2. Méthodes numériques ;
3. Méthodes approximatives.

### 4.4.1 Méthodes analytiques

La résolution analytique d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire peut être obtenue pour quelques types d'équations particulières, par exemple les équations différentielles

ordinaires fractionnaires linéaires à coefficients constants. Parmi les méthodes de résolution analytique, on peut citer les transformées de **Laplace**, de **Mellin** et de **Fourier** [32, 129]. La résolution analytique des équations non linéaires est généralement très difficile voire impossible.

Signalons aussi que la fonction de **Mittag-Leffler** [32, 33] joue un rôle important dans la résolution analytique des équations différentielles ordinaires fractionnaires linéaires. Cette fonction permet de généraliser la notion de la matrice de transition utilisée pour la résolution de l'équation d'état d'un système linéaire d'ordre entier. La fonction de **Mittag-Leffler** à deux paramètres  $c_1$  et  $c_2$  est définie comme suit [32, 33] :

$$E_{c_1, c_2}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma(c_1 k + c_2)} \quad (4.4)$$

où  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(c_1) > 0$ ,  $\Re(c_2) > 0$ , et  $Z \in \mathfrak{R}$ .

Lorsque  $c_2 = 1$ , la fonction est dite à un seul paramètre et elle est notée  $E_{c_1}(z)$ . On constate que  $E_{c_1}(z) = E_{c_1, 1}(z)$ . Aussi la fonction de **Mittag-Leffler**  $E_1(z)$  est une extension de la fonction exponentielle  $e^z$  puisque

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (4.5)$$

Par exemple, pour le système d'ordre fractionnaire commensurable autonome suivant :

$${}_0D_t^\sigma Y(t) = \mathcal{A}Y(t) \quad (4.6)$$

$$Y(0) = Y_0 \quad (4.7)$$

on démontre que la solution  $Y(t)$  est donnée comme suit [33] :

$$Y(t) = E_\sigma(\mathcal{A}t^\sigma) Y(0). \quad (4.8)$$

D'autres exemples sur la résolution des équations différentielles ordinaires fractionnaires en exploitant la fonction de **Mittag-Leffler** sont donnés dans [32].

#### 4.4.2 Méthodes numériques

Lorsque la résolution analytique d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire ou d'un système d'équations n'est pas possible, on utilise des méthodes numériques [32, 73, 128, 130–133]. Le principe d'une méthode numérique consiste à déterminer la solution  $Y(t)$  aux instants  $t_k = t_0 + kh$  ( $h$  est le pas de discrétisation et  $k \in \mathbb{N}$ ) de manière itérative. Le développement de **Taylor** et l'interpolation polynomiale (particulièrement de **Lagrange**) sont deux outils mathématiques largement utilisés, généralement, pour développer des méthodes numériques (formules itératives) [47, 48].

Il existe plusieurs méthodes pour discrétiser le problème à valeurs limites (4.1)–(4.2). Les différentes méthodes proposées dans la littérature sont développées en exploitant les deux approches suivantes [134] :

- discrétisation de la dérivée fractionnaire pour avoir directement la formule itérative (schéma numérique) [135, 136],
- conversion de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire (4.1) en une équation intégrale fractionnaire et approximation numérique du terme intégrale résultant pour avoir la formule itérative [132].

La première approche, consiste à utiliser des quadratures notée  ${}_0\Delta_h^\sigma Y(t_n)$ , appelées aussi formules d'intégration numériques, pour approximer le terme intégrale dans l'équation (4.1). Ainsi, on obtient la formule itérative suivante [22, 32] :

$${}_0\Delta_h^\sigma Y(t_n) = \mathbb{G}(Y(t_n), t_n) \quad (4.9)$$

Par exemple, l'approximation de la dérivée fractionnaire  ${}_0\Delta_h^\sigma Y(t)$  par la formule de **Grünwald-Letnikov** (1.25) conduit à la formule itérative [22]

$$\frac{1}{h^\sigma} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{\sigma}{k-j} \left[ Y(t_j) - \sum_{i=0}^m \frac{Y_0^i}{i!} t_j^i \right] = \mathbb{G}(T(t_k), t_k), \quad k = 0, \dots, \frac{t_f}{h} \quad (4.10)$$

Pour illustrer la deuxième approche, on considère la définition de **Riemann-Liouville** pour la dérivée fractionnaire donnée comme suit [24, 30, 32]

$${}_0D_t^\sigma Y(t) = \frac{1}{\Gamma(-\sigma)} \int_0^t \frac{Y(s)}{(t-s)^{1+\sigma}} ds \quad (4.11)$$

Le principe de la deuxième consiste, en premier, à appliquer l'opérateur intégrale fractionnaire  ${}_0D_t^{-\sigma} \equiv I^\sigma$  pour l'équation (4.1), ce qui donne [73]

$${}_0D_t^{-\sigma} ({}_0D_t^\sigma Y(t)) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{Y_0^i}{i!} t^i + {}_0D_t^{-\sigma} (\mathbb{G}(Y(t), t)) \quad (4.12)$$

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{Y_0^i}{i!} t^i + I^\sigma (\mathbb{G}(Y(t), t)) \quad (4.13)$$

$$Y(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{Y_0^i}{i!} t^i + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t \frac{\mathbb{G}(Y(s), s)}{(t-s)^{1-\sigma}} ds \quad (4.14)$$

La deuxième étape consiste à utiliser des quadratures pour approximer numériquement le terme intégrale de l'équation (4.14). Ainsi, plusieurs quadratures peuvent être appliquées par exemple la méthode d'**Euler** et la méthode d'**Adams** [47, 48]. Cette dernière conduit, par exemple, à la formule suivante [22]

$$Y(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{Y_0^j}{j!} t_{k+1}^j + \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} \mathbb{G}(t_j, Y(t_j)) \quad (4.15)$$

où

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\sigma}{\Gamma(2+\sigma)} = \begin{cases} k^{1+\sigma} - (k-\sigma)(k+1)^\sigma, & j=0, \\ (k-j+2)^{1+\sigma} - 2(k-j+1)^{1+\sigma} + (k-j)^{1+\sigma}, & 1 \leq j \leq k, \\ 1, & j=k+1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Pour le cas d'une équation différentielle ordinaire fractionnaire non linéaire, la plupart des méthodes sont implicites [134], c'est-à-dire l'obtention de la solution  $Y(t_k)$ , à l'itération  $k$ , nécessite la résolution, souvent numériquement, d'une ou d'un systèmes d'équations algébriques non linéaires en utilisant par exemple la méthode de **Newton** [47, 48]. Par conséquent, ces méthodes nécessitent des efforts et un temps de calcul importants.

Les méthodes numériques conduisent généralement à une solution approchée, c'est-à-dire entachée d'erreur. Cette erreur doit être faible pour garantir la convergence de la solution numérique vers la solution réelle [133, 137]. Ainsi, la convergence de la méthode numérique est très importante. Il est toujours indispensable d'étudier et de montrer par un raisonnement mathématique les conditions de convergence de la méthode numérique [47]. Un autre facteur important, surtout pour des applications en temps réel, c'est la vitesse de convergence. Lorsque cette vitesse est élevée, la convergence de la méthode est rapide et le temps de calcul pour déterminer la solution est moindre.

Pour éviter l'amplification des erreurs, la méthode numérique doit être stable [133, 137, 137]. On parle de la stabilité numérique qu'il faut distinguer de la stabilité des solutions. La stabilité de la solution  $Y(t)$  signifie que cette dernière tend vers sa valeur stationnaire lorsque  $t$  tend vers l'infini. Par exemple un schéma numérique explicite est conditionnellement stable (par le choix, par exemple, du pas de discrétisation  $h$ ), par contre un schéma implicite est toujours stable mais nécessite la résolution d'un système d'équations algébriques à chaque itération. Ainsi, un choix inadéquat de la méthode numérique ou au niveau de sa paramétrisation peut conduire à une solution instable alors que réellement elle est stable ou vice-versa.

La résolution numérique des équations différentielles ordinaires constitue un axe de recherche très actif. Les efforts sont axés sur le développement de méthodes numériques stables et faciles à implémenter sur un ordinateur [138]. Un état de l'art, plus récent, sur le sujet est donné dans [22] avec des exemples d'application.

### 4.4.3 Méthodes approximatives

Trouver la solution exacte d'une équation différentielle analytiquement n'est pas toujours possible. Les méthodes numériques permettent d'avoir des solutions approchées mais leurs principaux inconvénients sont la discrétisation du temps et l'effort de calcul qui est généralement important pour garantir une certaine précision. En utilisant les méthodes numériques, la solution est disponible seulement aux points de discrétisation ce qui nécessite une approche d'interpolation pour déterminer les valeurs de la solution entre deux instants. Généralement, pour assurer une bonne précision, le nombre de points de discrétisation doit être important.

Les méthodes approximatives permettent de résoudre des équations différentielles sans linéarisation ni discrétisation du temps. Elles conduisent à une solution analytique qui approxime la solution exacte (réelle). Cette solution est obtenue en utilisant une formule itérative à partir d'une solution initiale à choisir. Ces méthodes peuvent être appliquées pour n'importe quel type d'équation (ordinaire, partielle ou intégrale). A chaque itération  $k$ , on obtient une solution approximée  $Y^{(k)}(t)$  de la solution réelle (exacte)  $Y(t)$ .

Parmi les méthodes approximatives célèbres, on peut citer

- Méthode de l'itération variationnelle [69, 78–80, 80],
- Méthode de décomposition d'Adomian [68, 74, 117],
- Méthode de la perturbation homotopique [71, 139].

Une synthèse sur les différentes méthodes approximatives proposées dans la littérature peut être trouvée dans [69, 70]. Dans la section suivante, on présente la méthode de l'itération

variationnelle utilisée dans le cadre de cette thèse.

## 4.5 Méthode de l'itération variationnelle fractionnaire

La méthode de l'itération variationnelle fractionnaire permet de résoudre différents types d'équations différentielles (ordinaire, partielles et intégrales) d'ordre entier ou fractionnaire sans linéarisation et discrétisation [83, 121–123, 130, 131, 140]. La solution  $Y(t)$  est obtenue en utilisant une formule itérative à partir d'une estimation initiale de la solution  $Y^{(0)}(t)$ . Les bases théoriques de cette méthode sont données dans [78].

### 4.5.1 Principe de la méthode

Pour résoudre l'équation différentielle ordinaire fractionnaire (4.1), en utilisant la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire, on doit l'écrire sous la forme suivante

$${}_0D_t^\sigma Y(t) + \mathcal{L}Y(t) + \mathcal{N}Y(t) = \mathcal{Z}(t) \quad (4.17)$$

où  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  sont respectivement des opérateurs linéaire et non linéaire.  $\mathcal{Z}(t)$  est la partie non homogène de l'équation.

La solution  $Y(t)$  est déterminée en utilisant la forme itérative (appelée fonctionnelle correctrice) suivante [69]

$$Y^{(k+1)}(t) = Y^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \left( {}_0D_t^\sigma Y^{(k)}(s) + \mathcal{L}Y^{(k)}(s) + \mathcal{N}Y^{(k)}(s) - \mathcal{Z}(s) \right) ds \quad (4.18)$$

où  $\lambda(t)$  est le multiplicateur de **Lagrange** identifié en utilisant la théorie du calcul des variations [20, 78]. L'identification exacte de ce multiplicateur de **Lagrange** permet d'avoir la solution  $Y(t)$  en quelques itérations.

Pour identifier le multiplicateur de **Lagrange**, on calcul la variation suivante

$$\delta Y^{(k+1)}(t) = \delta Y^{(k)}(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left( {}_0D_t^\sigma Y^{(k)}(s) + \mathcal{L}Y^{(k)}(s) + \mathcal{N}\tilde{Y}^{(k)}(s) - \mathcal{Z}(s) \right) ds \quad (4.19)$$

$$= \delta Y^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \left( \delta {}_0D_t^\sigma Y^{(k)}(s) + \delta \mathcal{L}Y^{(k)}(s) + \delta \mathcal{N}\tilde{Y}^{(k)}(s) - \delta \mathcal{Z}(s) \right) ds \quad (4.20)$$

Comme à chaque itération, la partie homogène  $\mathcal{Z}(t)$  reste constante, alors  $\delta \mathcal{Z}(t) = 0$ . Pour faciliter l'identification du multiplicateur de **Lagrange**, la variation de la partie non linéaire  $\mathcal{N}\tilde{Y}^{(k)}(t)$ , appelée variation restreinte [78], est prise égale à zéro, i.e.  $\delta \mathcal{N}\tilde{Y}^{(k)}(t) = 0$ . Ainsi, l'identification du multiplicateur de **Lagrange**, revient à déterminer  $\lambda(s)$  qui vérifient

$$\delta Y^{(k+1)}(t) = 0 \quad (4.21)$$

c'est-à-dire

$$\delta Y^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \left( \delta {}_0D_t^\sigma Y^{(k)}(s) + \delta \mathcal{L}Y^{(k)}(s) \right) ds = 0 \quad (4.22)$$

Dans ce cas, l'identification de  $\lambda(s)$  n'est pas exacte, c'est-à-dire l'obtention d'une solution approximée précise peut nécessiter plus d'itérations. Notons que l'identification du multiplicateur de **Lagrange**, revient en réalité à résoudre analytiquement une équation différentielle fractionnaire non linéaire. C'est pour cette raison, qu'on considère des variations restreintes, pour avoir une équation différentielle linéaire, et de prendre  $\sigma = 1$  pour avoir une équation différentielle ordinaire facile à résoudre. Dans ce cas, on se contente d'une approximation du multiplicateur de **Lagrange**. Plusieurs approches ont été proposées pour le calcul du multiplicateur de **Lagrange** [69]. Le Théorème 4.3 donne l'expression générale du multiplicateur de **Lagrange**  $\lambda(s)$  dans le cas de l'équation différentielle ordinaire (4.1).

**Théorème 4.3** ( [76]). *Pour l'équation différentielle ordinaire (4.1), le multiplicateur de Lagrange  $\lambda(s)$  est*

$$\lambda(s) = \frac{(-1)^{\lceil \sigma \rceil} (s-t)^{\lceil \sigma \rceil - 1}}{(\lceil \sigma \rceil - 1)!} \quad (4.23)$$

**Remarque 4.1.** *On remarque que pour  $0 < \sigma \leq 1$ , le Théorème 4.3 donne  $\lambda(s) = -1$ . Ce résultat peut être obtenu en prenant directement  $\sigma = 1$  dans (4.22) et en cherchant le multiplicateur de **Lagrange**  $\lambda(s)$  qui vérifie*

$$\delta Y^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \left( \frac{dY^{(k)}(s)}{ds} + \delta \mathcal{L}Y^{(k)}(s) \right) ds = 0 \quad (4.24)$$

## 4.5.2 Convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire

Comme toute méthode itérative, la convergence de la méthode de l'itération variationnelle, vers la solution réelle, doit être garantie. L'étude de la convergence de la méthode d'itération variationnelle est largement investie dans la littérature [79, 141–143] pour différents types d'équations différentielles (ordinaires, partielles et intégrales d'ordre entier ou fractionnaire). L'objectif consiste à préciser quelles sont les conditions ou les hypothèses nécessaires pour que la solution obtenue par la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire converge vers la solution réelle de l'équation différentielle.

Pour les équations différentielles ordinaires fractionnaires, plusieurs résultats concernant la convergence de la méthode existent dans la littérature. Dans cette section, on présente le résultat concernant le cas de l'équation (4.1) lorsque  $0 < \sigma \leq 1$  (cas considéré dans le cadre de cette thèse). Ce résultat est donné par le Théorème 4.4.

**Théorème 4.4** ([75]). *Soit  $Y(t)$  la solution exacte de l'équation (4.1) et  $Y^{(k)}(t)$  la solution approximée obtenue par la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire à l'itération  $k$ . Si la fonction  $\mathbb{G}$  est lipschitzienne de constante  $l$  tel que*

$$l < \Gamma(\sigma), \quad 0 < \sigma \leq 1 \quad (4.25)$$

alors la suite des solutions approximées  $Y^{(1)}(t), Y^{(2)}(t), \dots, Y^{(k)}(t), \dots$  converge vers la solution exacte  $Y(t)$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

Théoriquement, la solution exacte est obtenue pour  $k \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire

$$Y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} Y^{(k)}(t) \quad (4.26)$$

Pratiquement, il est impossible de calculer cette limite, alors on cherche la solution  $Y^{(N_e)}(t)$  (obtenue à l'itération  $N_e$ ) qui permet d'assurer une certaine tolérance  $\varepsilon$ , c'est-à-dire

$$\|Y^{(N_e)}(t) - Y^{(N_e-1)}(t)\|_{L^2([0, t])} = \int_0^t \left( Y^{(N_e)}(s) - Y^{(N_e-1)}(s) \right)^2 ds \leq \varepsilon \quad (4.27)$$

où  $L^2([0, t])$  est l'espace des fonctions de carré sommable muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^2([0, t])}$  [108].

Dans ce cas, on obtient une solution approximée, c'est-à-dire

$$Y(t) \approx Y^{(N_e)}(t) \quad (4.28)$$

**Remarque 4.2.** L'utilisation de la formule itérative (4.18) nécessite le calcul, à chaque itération, d'une intégrale. Cette intégrale est souvent peut être difficile à évaluer analytiquement même pour des équations différentielles ordinaires fractionnaires simples. Ainsi, des méthodes d'intégration numériques (quadratures des trapèzes, de **Simpson** ou de **Gauss-Legendre**) doivent être utilisées pour évaluer cette intégrale [47, 48]. Notons aussi que l'intégrande dans (4.18) fait intervenir la dérivée fractionnaire de  $Y^{(k)}(t)$ . Cette dernière peut être évaluée numériquement, comme expliqué à la Section 4.4.2, en utilisant par exemple la formule de **Grünwald-Letnikoff** (1.25).

**Remarque 4.3.** Le nombre des itérations  $N_e$  à effectuer dépend aussi de l'intervalle du temps  $[0, t]$  sur lequel on cherche la solution. Par exemple si pour l'intervalle  $[0, t_1]$ , le nombre d'itérations à effectuer est  $N_1$ , pour garantir une tolérance  $\varepsilon$ , alors pour un autre intervalle  $[0, t_2]$  avec  $t_2 > t_1$ , le nombre d'itérations à effectuer, pour garantir la même tolérance  $\varepsilon$ , doit être supérieur à  $N_1$ .

### 4.5.3 Exemples illustratifs

Dans cette section, la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire est appliquée pour résoudre numériquement deux équations différentielles ordinaires fractionnaires. On considère les deux cas : existence et l'inexistence de la solution exacte.

#### Cas de l'existence d'une solution exacte

Soit l'équation différentielle ordinaire fractionnaire suivante [22]

$${}_0D_t^{0,5}Y(t) + Y^2(t) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(5,5)}t^{4,5} - \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(4,5)}t^{3,5} + \frac{2\Gamma(4)}{\Gamma(3,5)}t^{2,5} + (t^5 - 3t^4 + 2t^3)^2 \quad (4.29)$$

$$Y(0) = 0 \quad (4.30)$$

Cette équation admet la solution exacte suivante [22]

$$Y(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3 \quad (4.31)$$

La formule itérative de la méthode de l'itération variationnelle est

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda(s) \left( {}_0D_t^{0,5}Y^{(k)}(s) + [Y^{(k)}(s)]^2 - \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(5,5)}s^{4,5} + \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(4,5)}s^{3,5} - \frac{2\Gamma(4)}{\Gamma(3,5)}s^{2,5} - (s^5 - 3s^4 + 2s^3)^2 \right) ds \quad (4.32)$$

Comme  $\sigma = 1/2$ , d'après le Théorème 4.3,  $\lambda(s) = -1$ . La formule itérative prend la forme suivante

$$Y^{(k+1)}(t) = Y^{(k)}(t) - \int_0^t \left( {}_0D_t^{0,5}Y^{(k)}(s) + [Y^{(k)}(s)]^2 - \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(5,5)}s^{4,5} + \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(4,5)}s^{3,5} - \frac{2\Gamma(4)}{\Gamma(3,5)}s^{2,5} - (s^5 - 3s^4 + 2s^3)^2 \right) ds \quad (4.33)$$

Pour déterminer la solution  $Y(t)$ , la dérivée fractionnaire  ${}_0D_t^{0,5}Y^{(k)}(s)$  et l'intégrale sont évaluées numériquement en utilisant respectivement la formule de **Grünwald-Letnikov** (1.25) et la méthode des trapèzes [47, 48]. Les résultats obtenus sont donnés par la Figure 4.1. On constate que l'augmentation du nombre d'itérations entraîne la convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire vers la solution exacte, c'est-à-dire à chaque itération la précision est améliorée. Cette constatation est confirmée par les résultats du Tableau 4.1 qui donne la valeur de l'erreur  $\mathcal{E}_k$  définie comme suit

$$\mathcal{E}_k = \|Y(t) - Y^{(k)}(t)\|_{L^2([0,1])} \quad (4.34)$$

$$= \int_0^1 \left( y(s) - Y^{(k)}(s) \right)^2 ds \quad (4.35)$$

Les résultats du Tableau 4.1 montrent que la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire converge rapidement vers la solution exacte  $Y(t)$ . Par exemple, une tolérance de  $\varepsilon = 10^{-4}$  est atteinte après 5 itérations.

$k$	$\mathcal{E}_k$	$k$	$\mathcal{E}_k$	$k$	$\mathcal{E}_k$
1	$1,4379 \times 10^{-3}$	6	$3,0541 \times 10^{-5}$	11	$3,0646 \times 10^{-6}$
2	$7,6897 \times 10^{-4}$	7	$1,0106 \times 10^{-5}$	12	$2,1779 \times 10^{-6}$
3	$4,8849 \times 10^{-4}$	8	$5,5629 \times 10^{-6}$	13	$1,4988 \times 10^{-6}$
4	$2,4335 \times 10^{-4}$	9	$4,6976 \times 10^{-6}$	14	$1,0486 \times 10^{-6}$
5	$9,4839 \times 10^{-5}$	10	$3,9904 \times 10^{-6}$	15	$7,8084 \times 10^{-7}$

TABLE 4.1: Itérations de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire pour l'équation (4.29).

## Cas de l'inexistence d'une solution exacte

Soit l'équation différentielle ordinaire fractionnaire suivante

$${}_0D_t^{0,7}Y(t) - \sin(Y(t)) = e^{-t} \quad (4.36)$$

$$Y(0) = 0 \quad (4.37)$$

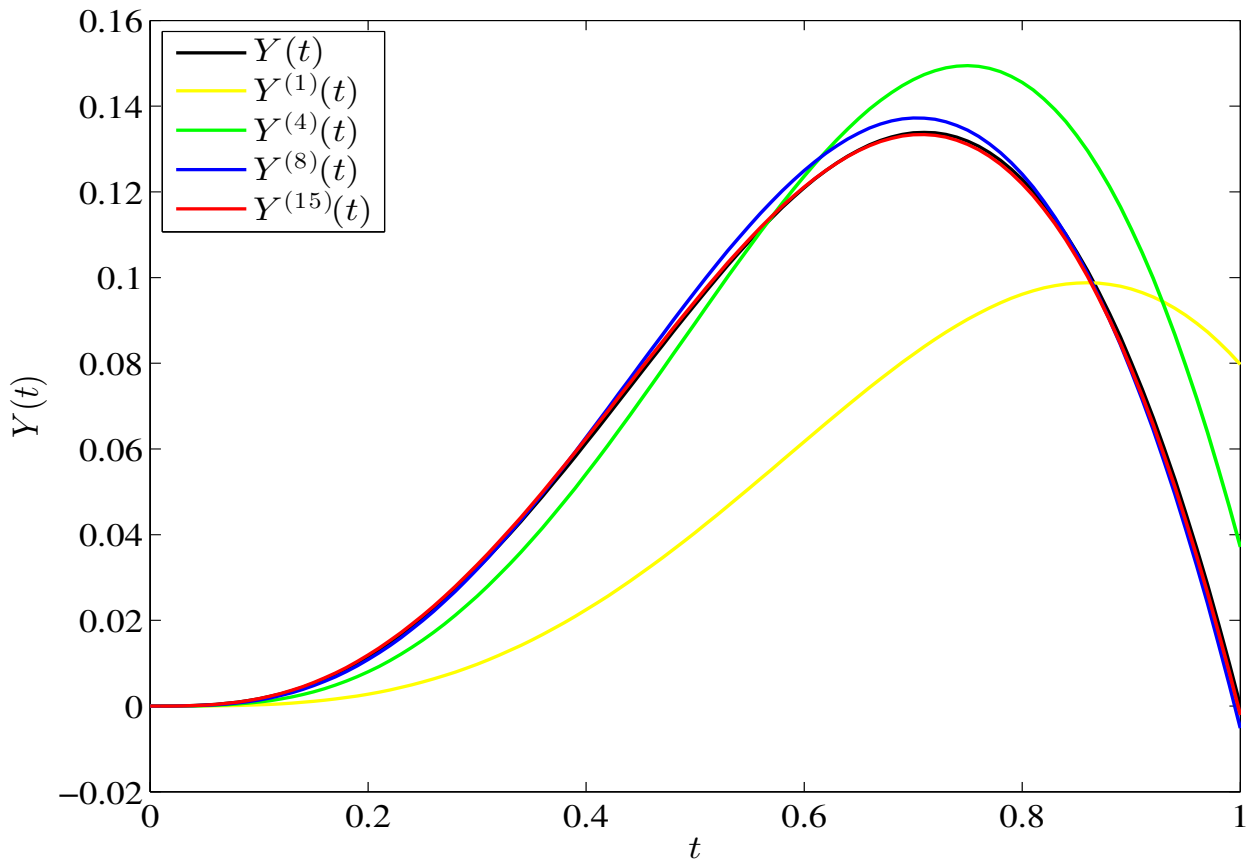


FIGURE 4.1: Solution exacte  $Y(t)$  et solutions approximées  $Y^{(k)}(t)$  de l'équation (4.29) obtenues par la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire pour  $k = 1$ ,  $k = 4$ ,  $k = 8$  et  $k = 15$ .

Pour cette équation, la formule itérative est donnée comme suit

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)}(t) - \int_0^t \left( {}_0D_t^{0,7} Y^{(k)}(s) - \sin(Y^{(k)}(s)) - e^{-s} \right) ds \quad (4.38)$$

On désire déterminer la solution approximée de cette équation différentielle ordinaire fractionnaire (4.36) avec une tolérance de  $\varepsilon = 10^{-5}$ , c'est-à-dire une solution vérifiant la condition suivante

$$\|Y^{(k+1)}(t) - Y^{(k)}(t)\|_{L^2([0,1])} \leq \varepsilon = 10^{-5} \quad (4.39)$$

$$\int_0^1 \left( Y^{(k+1)}(s) - Y^{(k)}(s) \right)^2 ds \leq \varepsilon = 10^{-5} \quad (4.40)$$

Dans le but de montrer la convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire, on résout la même équation en utilisant le solveur **fde12.m** [138] qui implémente la méthode d'**Adams-Bashforth-Moulton** (méthode du type prédiction-corrrection [137, 138]) développée par [73].

Les résultats obtenus, représentés sur la Figure 4.2, montrent clairement la convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire. Notons que la convergence est obtenue après 13 itérations.

**Remarque 4.4.** *Bien que la présentation de la méthode de l'itération variationnelle s'est limitée à la résolution d'une équation, l'application de cette méthodes pour des systèmes d'équations présentés à la Sous-section 1.6.1, reste très simple [131, 140].*

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une méthode de résolution des équations différentielles développée récemment. Cette méthode permet de déterminer la solution de manière itérative, en utilisant une fonctionnelle correctrice, à partir d'une solution initiale à choisir.

Ainsi, après avoir présenté le type d'équation différentielle ordinaire fractionnaire considéré dans le cadre de cette thèse, nous avons exposé les résultats importants concernant l'existence et l'unicité de la solution. La suite de l'exposé est consacré au principe et à la convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire. Pour montrer l'intérêt de cette dernière, deux exemples d'application ont été présentés. Pour démontrer la convergence de la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire, un exemple ayant une solution exacte a été considéré.

En somme, la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire présente un certain nombre d'avantages. Elle permet de déterminer la solution sans discrétisation et sans linéarisation de l'équation. Son implémentation sur un ordinateur est très simple et permet de déterminer soit une solution analytique (approximée) ou une solution numérique selon la complexité de l'équation à résoudre. De plus, la méthode permet de converger rapidement

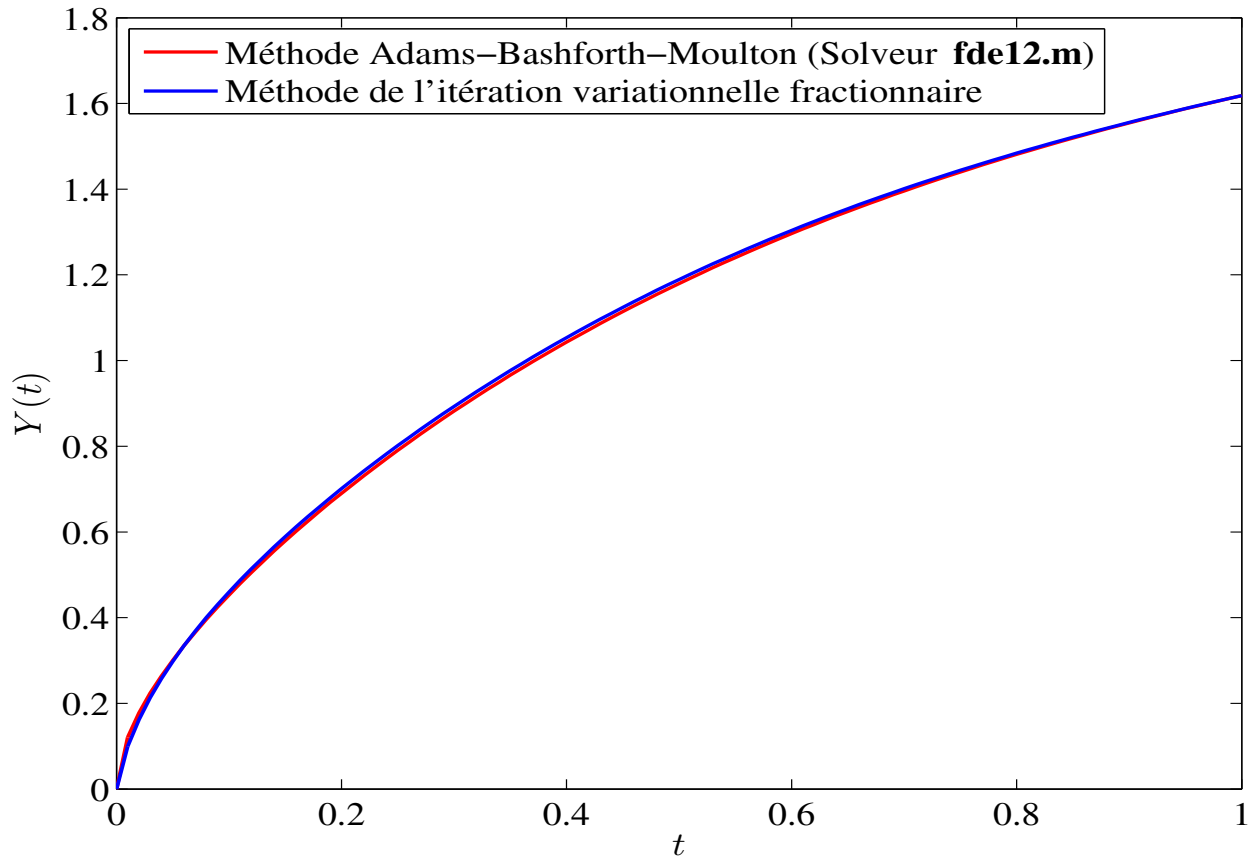


FIGURE 4.2: Solution de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire (4.36).

vers la solution en quelques itérations même si le multiplicateur de **Lagrange** est identifié de manière inexacte (en considérant des variations restreintes). Aussi, la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire ne souffre pas du problème d'instabilité numérique et sa paramétrisation est très simple. La qualité de la solution à obtenir peut être contrôlée en considérant une tolérance.

Comparée aux méthodes numériques, particulièrement les méthodes implicites les plus utilisées, vue leur stabilité numérique, la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire nécessite moins d'efforts de calcul. Par rapport aux méthodes numériques explicites, en plus de la rapidité de convergence, la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire échappe au processus de paramétrisation qui conditionne leur convergence.

Les avantages de la méthode expliquent l'usage répandu de la méthode et son exploitation dans plusieurs domaines. En automatique, la méthode de l'itération variationnelle est exploitée particulièrement pour la résolution des problèmes de commande optimale suivant l'approche indirecte. L'idée consiste à résoudre les conditions d'optimalité (équation d'**Euler-Lagrange**, équation d'**Hamilton-Pontryagin** ou équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**) en utilisant la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire.

Dans le chapitre suivant, la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire sera exploitée pour déterminer une commande optimale pour un système d'ordre fractionnaire basée sur l'approche directe. Ainsi, en combinant la méthode de la paramétrisation du vecteur de commande et la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire, on ramène le problème de commande optimale à un problème d'optimisation statique qu'on propose de résoudre, par la suite, par la méthode d'Alienor présentée au Chapitre **3** pour déterminer l'optimum global.



# Commande d'un système d'ordre fractionnaire par paramétrisation de la commande

## 5.1 Introduction

Avec le développement du calcul variationnel et de l'optimisation, la théorie de commande optimale, faisant partie de l'automatique moderne, a connu un essor spectaculaire [10, 94]. Plusieurs développements, sur le plan théorique, ont été réalisés dans le cas des systèmes d'ordre entier avec de nombreuses applications dans différents domaines [9, 13, 15, 17]. Ces dernières années, des études ont montré que l'utilisation de la dérivée fractionnaire dans un modèle mathématique permet de caractériser avec précision l'évolution dynamique des systèmes [21, 25, 31, 32]. Ces modèles fractionnaires présentent une capacité de prédiction remarquable. Cette caractéristique peut être expliquée par le fait qu'une dérivée fractionnaire régit fidèlement un phénomène physique appelé effet mémoire [24, 30]. Physiquement, l'effet mémoire signifie que l'évolution instantanée d'un système dynamique dépend de son évolution passée antérieure.

Un modèle mathématique est généralement entaché d'erreur, par conséquent son utilisation dans une formulation d'un problème de commande optimale conduit souvent à une solution dite sous-optimale [144]. La qualité de la solution finale d'un problème de com-

mande optimale dépend essentiellement de celle du modèle utilisée lors de sa formulation. Ainsi, l'utilisation d'un modèle précis, c'est-à-dire qui décrit convenablement la dynamique du système, permet d'améliorer davantage la qualité de la solution finale. Ainsi, l'utilisation des modèles fractionnaires constitue une alternative intéressante et prometteuse pour achever des solutions très proches des solutions réelles. Néanmoins, l'utilisation d'un modèle fractionnaire engendre des difficultés sur le plan mathématique vue sa nature. La manipulation des modèles mathématiques nécessite la maîtrise de certaines théories de calcul fractionnaire qui relève de l'analyse fonctionnelle [23, 37, 108]. En commande optimale, le calcul des variations et les méthodes numériques jouent des rôles importants. Le calcul des variations est un ensemble de théories utilisées pour déterminer les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale [1, 6, 19]. En présence des non linéarités, soit dans le modèle soit dans le critère, la résolution analytique est souvent très délicate même pour des problèmes répertoriés comme des problèmes simples. Dans ce cas, des méthodes numériques doivent être utilisées [10, 19, 94, 95, 95].

L'utilisation des modèles fractionnaires en commande optimale a motivé l'émergence de nouvelles théories et de méthodes de résolution. Ainsi, trois grandes familles de méthodes de résolution se dessinent. La première famille consiste à réduire le problème de commande optimale fractionnaire en son équivalent entier par l'approximation de la dérivée fractionnaire [41, 43, 44]. Les méthodes de la deuxième famille ont pour objectif de transformer le problème de commande optimale fractionnaire en un problème d'optimisation statique [22, 32, 49–51]. Les méthodes de la troisième famille sont des extensions des méthodes indirectes développées au cas entier en se basant sur la théorie du calcul variationnel fractionnaire. L'équation d'**Euler-Lagrange** et le principe du minimum de **Pontryagin** sont les deux méthodes célèbres étendues avec succès et les plus abordées dans la littérature [38, 51, 59–67].

Dans ce chapitre, nous allons étendre l'application de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande pour résoudre un problème de commande optimale fractionnaire. Cette

méthode, qui fait partie de la deuxième famille, a pour principe d'approximer la commande par une combinaison linéaire, à coefficients constants, d'un ensemble de fonctions orthogonales formant une base d'un espace de fonctions. Les coefficients de l'approximation représentent les variables d'optimisation à déterminer pour définir la loi de commande. Pour transformer le problème de commande optimale fractionnaire en un problème d'optimisation statique, on propose d'utiliser la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire (Chapitre 4). Dans le but de simplifier la résolution du problème d'optimisation résultant et de localiser une solution globale, on propose d'utiliser la méthode d'Alienor (Chapitre 3).

Le chapitre débute par la formulation de la classe de problèmes de commande optimale considérés suivie de l'étude de l'existence de la solution. Puis, le chapitre enchaîne par un état de l'art sur la commande optimale fractionnaire. La suite du chapitre expose l'approche proposée pour étendre l'application de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande au cas fractionnaire. L'efficacité de l'approche proposée est illustrée par deux exemples tests tirés de la littérature. Les résultats obtenus par l'approche proposée sont comparés aux solutions analytiques.

## 5.2 Commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on présente la classe de problèmes de commande optimale fractionnaire considérée dans cette thèse. On précise aussi les hypothèses requises pour assurer l'existence d'une solution pour cette classe de problèmes de commande optimale. Pour ce faire, on commence d'abord par définir certaines notions de l'analyse fonctionnel.

**Définition 5.1** ([108]). *Soit  $1 \leq \nu < +\infty$ . On dénote par  $L^\nu(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  l'ensemble des fonctions mesurables  $y(t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  vérifiant*

$$\int_{\mathcal{X}} |y(t)|^\nu dt < +\infty \tag{5.1}$$

**Définition 5.2** ([108]). Une fonction mesurable  $y(t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est dite essentiellement bornée s'il existe une constante  $b > 0$  telle que  $|y(t)| \leq b$ . L'ensemble (espace) des fonctions essentiellement bornées est notée  $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ .

### 5.2.1 Formulation du problème de commande optimale

Pour un système d'ordre fractionnaire non linéaire, il est souvent très difficile d'établir les conditions d'existence d'une solution. Par conséquent, la plupart des contributions se sont focalisées sur les systèmes linéaires. Dans le présent chapitre, nous considérons le problème de commande optimale, sans contraintes, d'un système d'ordre fractionnaire commensurable linéaire mono-entrée formulé comme suit

$$\underset{u(t)}{\text{opt}} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \psi(x(t), u(t), t) dt \quad (5.2)$$

sujet à :

$${}_0D_t^\sigma x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \vartheta(t), \quad 0 < \sigma < 1 \quad (5.3)$$

et les conditions terminales suivantes

$$x(t_0) = x_0 \quad (5.4)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (5.5)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $u(t) \in U_{ad} \subset \mathbb{R}$  est la commande,  $t_f$  est l'instant final,  $t \in \tau = [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}^+$  est le temps,  $\tau$  est l'horizon de commande,  $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \tau \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A(t) : \tau \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B(t) : \tau \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des matrices,  $\vartheta(t) \in L^\nu(\tau, \mathbb{R}^n)$  est le vecteur de grandeurs perturbatrices,  $x(t_0)$  est le vecteur de conditions initiales et  $x(t_f)$  est l'état final qui peut être fixe ou libre tout dépend du cahier des charges.  $\sigma$  est l'ordre fractionnaire.  $n$  est

la dimension du vecteur d'état  $x(t)$ .  $t_0$  et  $t_f$  sont respectivement les instants initial et final.

L'objectif est de déterminer une commande optimale, notée  $u^*(t)$ , qui permet de transférer l'état du système  $x(t)$  de l'état initial (5.4) vers l'état final (5.5) tout en minimisant le critère de performances (5.2). La commande optimale  $u^*(t)$  est supposée appartenir à l'ensemble de commande optimale  $U_{ad}$  identifié à  $L^1(\tau, \mathbb{R})$  (voir la Définition 5.1).

Une fois le problème de commande optimale est formulé, avant de procéder à la résolution, il est impératif de procéder à une étude mathématique pour s'assurer de l'existence de la solution. L'étude de l'existence de la solution est généralement basée sur des notions poussées de l'analyse fonctionnel [108]. Dans la section suivante, on s'intéresse au problème de l'existence de la solution du problème de commande optimale formulé (5.2)–(5.5).

## 5.2.2 Existence de la solution

L'étude de l'existence de la solution pour la classe de problèmes de commande optimale (5.2)–(5.5) a été investie par [145]. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la solution sont précisées par le Théorème 5.1.

**Théorème 5.1** ([145]). *Considérons que :*

1.  $U_{ad}$  est un ensemble convexe et fermé;
2.  $\psi$  est une fonction mesurable sur  $\tau$ ,  $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall u(t) \in U_{ad}$ ;
3.  $\psi$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$ ,  $\forall t \in \tau$ ,
4.  $\psi$  est convexe sur  $U_{ad}$ ,  $\forall t \in \tau$  et  $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$ ;
5.  $A(t)$  et  $B(t)$  sont essentiellement bornées (voir la Définition 5.2) sur  $\tau$  et  $\vartheta(t) \in L^\nu(\tau, \mathbb{R}^n)$ ;
6. il existe une fonction sommable  $\Lambda(t) : \tau \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  et une constante strictement positive  $b$  qui vérifient la condition suivante

$$\psi(x(t), u(t), t) \geq -\Lambda(t) - b|x(t)|, \forall t \in \tau \text{ et } \forall x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall u(t) \in U_{ad} \quad (5.6)$$

alors le problème de commande optimale fractionnaire (5.2)–(5.5) admet une solution optimale, i.e.  $(u^*(t), x^*(t))$  dans l'ensemble  $\mathcal{X} \times U_{ad}$ .

Dans le Théorème 5.1,  $x^*(t)$  désigne la trajectoire optimale et l'ensemble  $\mathcal{X}$  est défini comme suit [145]

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbb{S}(t) : \tau \rightarrow \mathbb{R}^n; \exists U(t) \in L^\nu(\tau, \mathbb{R}^n) \text{ tel que } \mathbb{S}(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_{t_0}^{t_f} \frac{U(s)}{(t-s)^{1-\sigma}} ds \right\} \quad (5.7)$$

Une fois l'étude de l'existence de la solution est faite, on passe à la détermination de la solution en utilisant des méthodes dédiées. Un état de l'art sur les différentes méthodes de résolution d'un problème de commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire est présenté dans la section suivante.

### 5.3 Etat de l'art de la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire

La commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire reste un domaine de recherche fertile et multidisciplinaire. En somme, l'analyse des différentes contributions sur la commande optimale fractionnaire révèle que trois classes de méthodes de résolution peuvent être distinguées :

1. la première classe regroupe les méthodes basées sur l'approximation de la dérivée fractionnaire [41, 43, 44]. L'objectif consiste à déterminer l'équivalent entier du système d'ordre fractionnaire pour tirer profit des méthodes de commande optimale des systèmes d'ordre entier. Différentes approximations de la dérivée fractionnaire ont été exploitées, par exemple l'approximation d'Oustaloup [41, 43], l'approximation rationnelle basée sur la matrice de Hankel [39]. Dans [40, 44] de nouvelles approximations ont été développées et appliquées dans le cadre de la commande optimale.

Dans ce cas, deux classes de méthodes peuvent être appliquées : méthodes directes et indirectes (voir la Section **2.6.1**).

2. Le principe des méthodes de la deuxième classe consiste à convertir directement le problème de commande optimale en un problème d'optimisation statique (leur principe est similaire aux méthodes directes du cas entier présentées à la **2.6.1**). Cette conversion est réalisée soit :
  - par approximation numériques de la dérivée fractionnaire [**22, 32**] ou ;
  - par paramétrisation de la dérivée fractionnaire en utilisant comme fonction de base des polynômes de **Legendre** [**49**] ou de **Chebyshev** [**50, 51**].
3. La troisième classe regroupe les méthodes qui sont réellement des généralisations de celles développées pour le cas entier présentées à la Section **2.6**. Cette généralisation est rendue possible et simple avec le développement d'une nouvelle branche de mathématiques, plus précisément de l'analyse fonctionnelle, appelée calcul des variations fractionnaires [**23, 42, 59, 60**]. Cette théorie moderne a permis de généraliser principalement l'équation d'**Euler-Lagrange** [**38, 59–64**] et le principe du minimum (utilisation de l'**Hamiltonien**) [**51, 65–67**]. Ces deux célèbres méthodes, présentées dans le cas entier à la Section **2.5**, permettent de poser les conditions d'optimalité pour un problème de commande optimale. Ces conditions d'optimalité sont données sous forme d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires fractionnaires. Ainsi, leur résolution analytique est souvent très difficile voir impossible, par conséquent la résolution de ces conditions d'optimalité, c'est-à-dire des équation différentielles ordinaires fractionnaires, peut être accomplie en utilisant des méthodes numériques [**22**] ou des méthodes d'approximation des solutions [**68–71**]. Des méthodes numériques ont été appliquées pour résoudre l'équation d'**Euler-Lagrange** dans [**38, 61, 62**] et les équations d'**Hamilton-Pontryagin** dans [**51, 65–67**]. Dans [**64**], une méthode numérique, similaire à la méthode de tir simple [**10, 19**], a été proposée pour résoudre des conditions d'optimalité obtenues par le calcul des variations basée sur l'utilisation

des multiplicateurs de **Lagrange**. La méthode de l'itération variationnelle a été utilisée pour résoudre l'équation d'**Euler-Lagrange** dans [63]. Dans [72], une méthode d'approximation des solutions des équations d'**Hamilton-Pontryagin**, basée sur une paramétrisation de l'état et de la commande en utilisant des fonctions de Bessel, a été proposée. Un cas particulier de la commande optimale appelé commande linéaire quadratique, c'est-à-dire le modèle est linéaire et le critère est quadratique (voir la Remarque 2.1), a été résolu dans la littérature en utilisant la théorie du calcul des variations fractionnaires. Une solution analytique du problème de commande linéaire quadratique a été développée par [77, 146]. Pour le même problème de commande optimale, une solution basée sur la méthode de l'itération variationnelle a été proposée par [63] et une solution purement numérique est proposée par [147].

A la lumière de la recherche bibliographique effectuée sur la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- le développement du calcul variationnel fractionnaire [23] a favorisé l'émergence d'autres théories mathématiques ayant permis de généraliser plusieurs méthodes de commande optimale des systèmes d'ordre entier aux systèmes fractionnaires ;
- la plupart des méthodes proposées font appel aux méthodes numériques puisque la résolution analytique est impossible même pour les problèmes de commande optimale simples. Cette approche est la plus utilisée et la plupart des efforts se sont focalisés pour développer des approches simples et efficaces ;
- bien que plusieurs progrès ont été réalisés dans le cadre de la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire sur le plan théorique mais peu d'applications sur des systèmes physiques sont rapportées dans la littérature. On peut citer le cas du système d'isolement étudié par [61] et les systèmes géologiques réactifs [61, 90]. La quasi-totalité des contributions dans le domaine de commande optimale fractionnaire considèrent des exemples académiques ;

- pour les méthodes directes, qui consistent à convertir le problème de commande optimale en un problème d’optimisation statique, deux approches sont à distinguer : la conversion directe et indirecte. Dans la conversion directe le problème de commande optimale fractionnaire est converti en approximant la dérivée fractionnaire. Dans la conversion indirecte, le problème de commande optimal d’un système d’ordre fractionnaire est premièrement converti en un problème de commande optimale d’ordre entier, puis de convertir ce dernier en un problème d’optimisation statique ;
- pour la classe des méthodes directes, bien que la plupart des méthodes ont été étendues avec succès au cas fractionnaire, la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, dont l’efficacité n’est plus à démontrer dans le cas entier [102, 103, 106, 107, 109], n’a pas été exploitée dans le cas fractionnaire.

Dans la section suivante, une approche est proposée pour étendre l’application de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande [8, 102] au cas fractionnaire. Ainsi, on montre facilement qu’en utilisant la méthode de l’itération variationnelle fractionnaire (Chapitre 4), le problème de commande fractionnaire peut être facilement converti en problème d’optimisation statique. Puis pour simplifier et localiser la solution globale, on utilise la méthode d’optimisation globale d’Alienor (Chapitre 3).

## 5.4 Approche proposée

De point de vue mathématique, en définissant une base (complète) de fonctions orthogonales connues  $\Theta_k(t)$ , la commande  $u(t)$  (une fonction continue) peut être approximée, sur l’horizon de commande  $\tau$ , par des combinaisons linéaires, à coefficients constants  $a_k$ , des fonctions orthogonales  $\Theta_k(t)$ , c’est-à-dire [3, 102, 103, 105–107]

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N_p} a_k \Theta_k(t) \tag{5.8}$$

Le choix des fonctions orthogonales  $\Theta_k(t)$  a été discuté à la Sous-section **2.6.1**.

Ainsi, le problème de détermination de la commande optimale  $u^*(t)$  revient à déterminer l'ensemble des paramètres  $a_k$  ( $k = 0, \dots, N_p$ ) optimisant le critère de performances **(5.2)**. C'est le principe de la commande par paramétrisation du vecteur de commande. Cette approche a été utilisée avec succès dans le cas des systèmes dynamiques d'ordre entier [**103, 106, 109**]. A la lumière de l'état de l'art sur la commande optimale d'un système d'ordre fractionnaire, présenté à la Section **5.3**, il ressort que la commande par paramétrisation du vecteur de commande n'est pas exploitée dans le cas des systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans cette section, nous présentons une nouvelle approche pour la résolution du problème de commande optimale fractionnaire **(5.2)–(5.5)** basée sur l'approche par paramétrisation du vecteur de commande. L'idée principale de l'approche consiste à convertir le problème de commande optimale **(5.2)–(5.5)** en un problème d'optimisation statique en exploitant la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire présentée au Chapitre **4**. Cette idée constitue la contribution principale de la thèse. Puis pour simplifier la résolution du problème d'optimisation statique résultant et obtenir la solution globale, nous avons proposé d'utiliser la méthode d'Alienor présentée au Chapitre **3**.

Détaillons, maintenant, l'approche proposée pour convertir le problème de commande optimale fractionnaire **(5.2)–(5.5)** en un problème d'optimisation statique. En remplaçant la commande **(5.8)** dans le modèle fractionnaire **(5.3)**, on obtient

$${}_0D_t^\sigma x(t) = A(t)x(t) + B(t) \sum_{k=0}^{N_p} a_k \Theta_k(t) + \vartheta(t) \quad (5.9)$$

Comme les fonctions orthogonales  $\Theta_k(t)$  sont connues, l'équation différentielle ordinaire fractionnaire **(5.9)** peut être réécrite sous la forme suivante

$${}_0D_t^\sigma x(t) = \chi(a_0, \dots, a_{N_p}, x(t), t), \quad (5.10)$$

Puis en utilisant la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire, présentée au Chapitre 4, une solution approximée  $x^{(N_e)}(t) \approx x(t)$  de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire (5.10) peut être obtenue en utilisant la formule itérative suivante

$$x^{(i+1)}(t) = x^{(i)}(t) - \int_{t_0}^t \left[ {}_0D_t^\sigma x^{(i)}(s) - \chi(a_0, \dots, a_{N_p}, x^{(i)}(s), s) \right] ds \quad (5.11)$$

à partir de la solution initiale  $x^{(0)}(t) = x_0$ . Cette solution approximée est une fonction des coefficients inconnus  $a_k$  et de la variable  $t$  donnée comme suit

$$x^{(N_e)}(t) = \mathbb{E}(a_0, \dots, a_{N_p}, t) \quad (5.12)$$

Par la suite, la substitution de la solution approximée  $x^{(N_e)}(t)$  et la commande  $u(t)$  respectivement par leurs expressions (5.12) et (5.8) dans le critère à optimiser (5.2) donne

$$J^{(N_e)}(a_0, \dots, a_{N_p}) = \int_{t_0}^{t_f} \psi \left( x^{(N_e)}(t), \sum_{k=0}^{N_p} a_k \Theta_k(t), t \right) dt \quad (5.13)$$

Puis, en évaluant le terme intégrale du critère de performance (5.13), nous obtenons

$$J^{(N_e)}(a_0, \dots, a_{N_p}) = \mathcal{P}(a_0, \dots, a_{N_p}) \quad (5.14)$$

où  $\mathcal{P}$  est une fonction scalaire.

Par conséquent, pour déterminer les valeurs optimales des coefficients  $a_k$  ( $k = 0, \dots, N_p$ ), le problème revient à optimiser la fonction objectif (5.14). Deux cas sont à distinguer :

1. Etat final  $x(t_f)$  libre : dans ce cas, la détermination des coefficients  $a_k$  ( $k = 0, \dots, N_p$ ) revient à résoudre le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\underset{a_0, \dots, a_{N_p}}{\text{opt}} J^{(N_e)}(a_0, \dots, a_{N_p}) = \mathcal{P}(a_0, \dots, a_{N_p}) \quad (5.15)$$

- 2 Etat final fixe (imposé)  $x(t_f) = x_f$  : dans ce cas, on doit imposer, pour vérifier la

condition finale (5.5), la contrainte du type égalité suivante :

$$x(t_f) \approx x^{(N_e)}(t_f) = \mathbb{E}(a_0, \dots, a_{N_p}, t_f) = x_f, \quad (5.16)$$

Dans ce cas, le problème d'optimisation à résoudre est avec contraintes et il est formulé comme suit

$$\underset{a_0, \dots, a_{N_p}}{\text{opt}} \quad J^{(N_e)}(a_0, \dots, a_{N_p}) = \mathcal{P}(a_0, \dots, a_{N_p}) \quad (5.17)$$

sujet à :

$$\mathbb{E}(a_0, \dots, a_{N_p}, t_f) - x_f = 0 \quad (5.18)$$

Ce problème d'optimisation avec contraintes égalité peut être converti en un autre problème d'optimisation sans contraintes en utilisant la méthode de fonction de pénalisation [53] comme suit

$$\underset{a_0, \dots, a_{N_p}}{\text{opt}} \quad \hat{J}^{(N_e)}(a_0, \dots, a_{N_p}) = \mathcal{P}(a_0, \dots, a_{N_p}) + \Upsilon (\mathbb{E}(a_0, \dots, a_{N_p}, t_f) - x_f)^2 \quad (5.19)$$

où  $\Upsilon$  est le paramètre de pénalisation associé à la contrainte (5.18).

**Remarque 5.1.** Si le paramètre de pénalisation  $\Upsilon = 0$ , on obtient le problème d'optimisation sans contraintes (5.15) correspondant au cas d'un état final  $x(t_f)$  libre.

**Remarque 5.2.** Dans ce qui suit, pour simplifier la présentation, on considère le problème d'optimisation générale (5.19) correspondant pour  $\Upsilon \neq 0$ . Le même développement reste valable pour le problème d'optimisation sans contrainte (5.15), il suffit de prendre  $\Upsilon = 0$ .

Pour assurer de bonnes performances, on doit localiser la solution globale du problème d'optimisation statique obtenue. Pour ce faire, on propose d'utiliser la méthode d'Alienor

présentée au Chapitre 3. Ainsi, en utilisant les transformations réductrices

$$a_k = \mathbb{F}_k(w), \quad k = 0, \dots, N_p, \quad (5.20)$$

Le problème d'optimisation (5.19) prend la forme suivante

$$\underset{w}{\text{opt}} \hat{J}^{(N_e)}(h_0(w), \mathbb{F}_1(w), \dots, \mathbb{F}_{N_p}(w)) = \underset{w}{\text{opt}} \tilde{J}(w) \quad (5.21)$$

La résolution de ce problème d'optimisation permet de déterminer la solution globale  $w^*$  et en utilisant les transformations réductrices (5.20), on déduit les coefficients optimaux  $a_k^*$  comme suit

$$a_k^* = \mathbb{F}_k(w^*), \quad k = 0, \dots, N_p, \quad (5.22)$$

et en utilisant la relation (5.8), on obtient la commande optimale  $u^*(t)$  comme suit

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{N_p} a_k^* \Theta_k(t) \quad (5.23)$$

Les différentes étapes de l'approche proposée sont résumés par l'algorithme suivant :

- Etape 1.** Etant donné  $N_p$ , définir les  $N_p$  fonctions orthogonales  $\Theta_k(t)$  ( $k = 1, \dots, N_p$ ), fixer la tolérance  $\varepsilon$  et la valeur de  $\Upsilon$  ( $\Upsilon = 0$  pour un état final libre et  $\Upsilon \neq 0$  pour un état final fixe);
- Etape 2.** Définir la commande  $u(t)$  en fonction des fonctions orthogonales (équation (5.8)) et remplacer son expression dans le modèle (5.3).
- Etape 3.** Poser  $i = 0$ ,  $x^{(0)}(t) = x_0$  et calculer  $x^{(i+1)}(t)$  en utilisant la formule itérative (5.11);
- Etape 4.** Remplacer la commande  $u(t)$  par son expression (5.8) et  $x(t)$  par son approximation  $x^{(i+1)}(t)$ , obtenue à l'étape 3, dans le critère à optimiser (5.2);
- Etape 5.** Résoudre le problème d'optimisation statique (5.19), obtenue à l'étape 4, par la méthode d'Alienor et déduire les coefficients optimaux de la commande  $a_k^*$  en utilisant les transformations réductrices (5.20).
- Etape 6.** Evaluer la valeur du critère (5.21);
- Etape 7.** Si  $|J^{(i)} - J^{(i-1)}| \geq \varepsilon$ , poser  $i = i + 1$  et aller à l'étape 3; sinon aller à l'étape 8;
- Etape 8.** Déterminer la commande optimale  $u^*(t)$  en remplaçant les coefficients  $a_k$  par les valeurs optimales  $a_k^*$ .

**Remarque 5.3.** Dans la première étape de l'algorithme proposé, on doit choisir la valeur de  $N_p$ , c'est-à-dire le nombre de fonctions orthogonales à utiliser. Pour déterminer la valeur optimale, notée  $N_p^*$ , on propose de dérouler l'algorithme en considérant plusieurs valeurs pour  $N_p$ . Puis, on prend comme valeur optimale  $N_p^*$ , celle qui optimise le critère de performance (voir les exemples d'application de la Section 5.5).

## 5.5 Exemples d'application

Dans cette section, l'approche proposée est appliquée pour résoudre deux problèmes de commande optimale fractionnaire. Pour montrer la justesse de l'approche proposée, on compare la solution obtenue par cette dernière avec la solution exacte. Pour chaque problème, on considère deux ordres fractionnaires et une tolérance  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Pour les deux exemples, la paramétrisation de la commande  $u(t)$  est réalisée en utilisant des fonctions de base polynomiales, c'est-à-dire

$$\Theta_k(t) = t^k, \quad k = 0, \dots, N_p \quad (5.24)$$

par conséquent,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{N_p} a_k t^k, \quad k = 0, \dots, N_p \quad (5.25)$$

Le choix des fonctions de base polynomiales de la forme (5.24) est dictée par le théorème d'approximation de **Weierstrass** [108].

**Théorème 5.2** ( [108]). *Soit  $[t_0, t_f] \in \mathbb{R}$  un ensemble borné et fermé et  $u(t)$  une fonction continue (commande) définie sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ . Pour chaque  $\bar{\varepsilon} > 0$ , il existe un polynôme  $P(t)$  tel que*

$$\|u(t) - P(t)\|_\infty \leq \bar{\varepsilon} \quad (5.26)$$

Ainsi, comme l'horizon de commande  $\tau$  est compact, c'est-à-dire borné et fermée, et la commande  $u(t)$  est une fonction continue sur  $t \in [t_0, t_f]$ , alors  $u(t)$  peut être approximée avec précision, par un polynôme de la forme (5.25). Ainsi, en considérant des fonctions de bases polynomiales et en suivant la procédure de la remarque 5.3, on obtient une solution optimale.

Comme l'état finale est fixe, le problème de commande optimal fractionnaire est trans-

formée en un problème d'optimisation statique sans contrainte (5.19) comme expliquée à la Section 5.4. La solution du problème d'optimisation statique résultant est obtenue par la méthode d'Alienor en utilisant la transformation réductrice de Konfé (3.36), c'est-à-dire

$$a_k = \cos(\Psi_k \omega + \Phi_k), \quad k = 1, \dots, N_p \quad (5.27)$$

Les  $\Psi_k$  et  $\Phi_k$  ( $k = 0, \dots, N_p$ ) sont choisies d'après le Théorème 3.8.

L'implémentation de l'algorithme proposée nécessite l'utilisation du calcul symbolique pour déterminer le problème d'optimisation statique (5.21) à une seule variable de décision  $w$ . Ce dernier est résolu par la méthode des évaluations simultanées [110] pour déterminer l'optimum global  $w^*$ . Les coefficients optimaux  $a_k^*$  de la commande (5.25) sont obtenues en utilisant la transformation réductrice (5.27) en prenant  $w = w^*$ .

La dérivée fractionnaire dans (5.11) est évalué en utilisant la formule de **Grünwald-Letnikoff** (1.25). Le terme intégrale de la formule itérative (5.11) et du critère (5.13) sont évalués en utilisant la méthode des trapèzes [47].

**Exemple 1.** Soit le problème de commande optimale fractionnaire suivant [44, 51]

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 [t u(t) - (2 + \sigma) x(t)]^2 dt \quad (5.28)$$

$$\text{sujet à : } \dot{x}(t) + {}_0D_t^\sigma x(t) = u(t) + t^2 \quad (5.29)$$

$$x(0) = 0 \quad (5.30)$$

$$x(1) = \frac{2}{\Gamma(3 + \sigma)} \quad (5.31)$$

La solution exacte de ce problème est

$$x_{\text{exact}}(t) = \frac{2 t^{2+\sigma}}{\Gamma(3 + \sigma)}, \quad u_{\text{exacte}}(t) = \frac{2 t^{1+\sigma}}{\Gamma(2 + \sigma)} \quad (5.32)$$

Pour cette exemple, l'identification du multiplicateur de **Lagrange** donne  $\lambda(t) = -1/2$  . La solution approximée de l'équation d'état (5.29), après substitution de la commande  $u(t)$  par son expression (5.25), est obtenue par la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire comme suit

$$x^{(i+1)}(t) = x^{(i)}(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \dot{x}^{(i)}(s) + {}_0D_t^\sigma x^{(i)}(s) - \sum_{k=0}^{N_p} a_k s^k - s^2 \right] ds \quad (5.33)$$

Les résultats obtenus pour  $\sigma = 0,5$  sont résumés dans le Tableau 5.1. On remarque que la solution optimale correspond pour  $N_p^* = 4$  et la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire converge après 3 itérations. La valeur optimale du critère est  $J^* = 4,6545 \times 10^{-4}$ . L'expression de la commande optimale est

$$u^*(t) = 0,097293 + 0,13418t + 0,93972t^2 + 0,85336t^3 - 0,4329t^4 \quad (5.34)$$

Pour  $\sigma = 0,8$ , l'application de l'approche proposée conduit au résultat suivant ( $N_p^* = 4$ ) :

$$u^*(t) = -0,0163 + 0,0190t + 0,9928t^2 + 0,7091t^3 - 0,4938t^4 \quad (5.35)$$

avec une valeur optimale du critère  $J^* = 8,3615 \times 10^{-5}$ .

Les trajectoires optimales  $x^*(t)$  et  $u^*(t)$  obtenues par l'approche proposée sont comparées avec les trajectoires exactes (5.32) dans les Figures 5.1 et 5.2 respectivement pour  $\sigma = 0,5$  et  $\sigma = 0,8$ . Les résultats obtenus montrent clairement que la solution obtenue, par l'approche proposée, est très proche de la solution exacte.

**Exemple 2.** Soit le problème de commande optimale fractionnaire formulé comme suit [51]

		$i$					
		1	2	3	4	5	
$N$	1	$J$	$9,4847 \times 10^{-3}$	$3,6359 \times 10^{-2}$	$4,2047 \times 10^{-2}$	$4,2864 \times 10^{-2}$	$4,2821 \times 10^{-2}$
		$\Delta J$	—	$2,6874 \times 10^{-2}$	$5,6880 \times 10^{-3}$	$8,1700 \times 10^{-4}$	$4,3000 \times 10^{-5}$
	2	$J$	$1,5382 \times 10^{-4}$	$1,7579 \times 10^{-3}$	$3,3759 \times 10^{-3}$	$3,7296 \times 10^{-3}$	$3,7223 \times 10^{-3}$
		$\Delta J$	—	$1,6041 \times 10^{-3}$	$1,6180 \times 10^{-3}$	$3,5370 \times 10^{-4}$	$7,3000 \times 10^{-6}$
	3	$J$	$2,0395 \times 10^{-4}$	$5,7171 \times 10^{-4}$	$7,2856 \times 10^{-4}$	$1,0305 \times 10^{-3}$	$1,0085 \times 10^{-3}$
		$\Delta J$	—	$3,6776 \times 10^{-4}$	$1,5685 \times 10^{-4}$	$3,0194 \times 10^{-4}$	$1,2790 \times 10^{-5}$
	4	$J$	$5,8330 \times 10^{-5}$	$4,1273 \times 10^{-4}$	$4,6545 \times 10^{-4}$	—	—
		$\Delta J$	—	$3,5440 \times 10^{-4}$	$5,2720 \times 10^{-5}$	—	—
	5	$J$	$1,7480 \times 10^{-4}$	$3,0154 \times 10^{-4}$	$8,5190 \times 10^{-4}$	$5,4963 \times 10^{-4}$	$5,6956 \times 10^{-4}$
		$\Delta J$	—	$1,2674 \times 10^{-4}$	$5,5036 \times 10^{-4}$	$3,0227 \times 10^{-4}$	$1,9930 \times 10^{-5}$

TABLE 5.1: Itérations de l'algorithme proposé pour l'exemple 1 pour  $\sigma = 0,5$ .

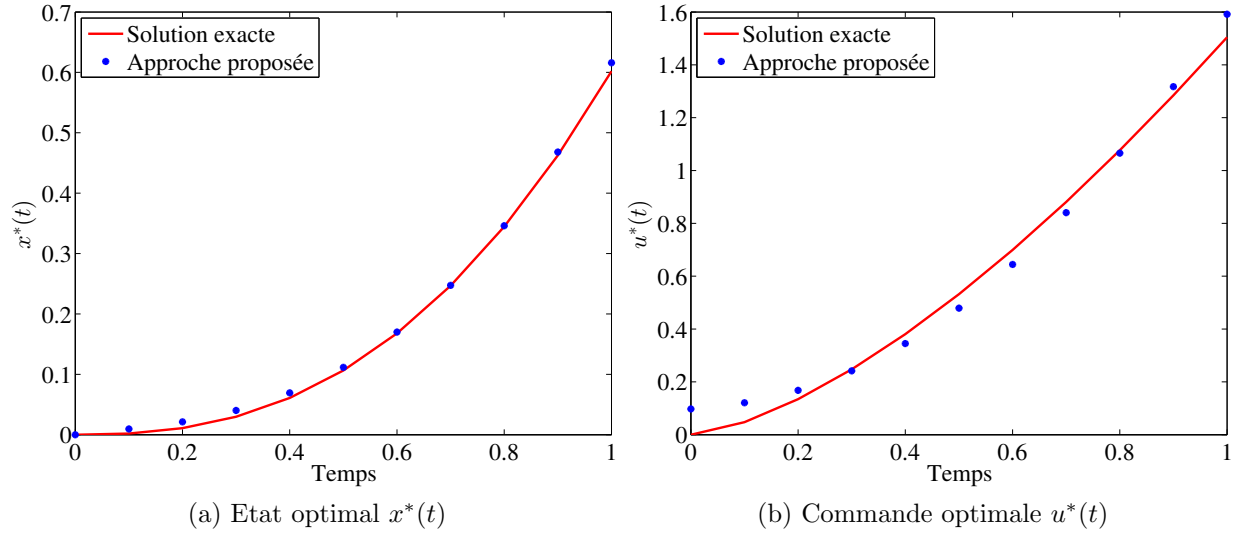


FIGURE 5.1: Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 1 pour  $\sigma = 0,5$ .

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 [u(t) - x(t)]^2 dt \quad (5.36)$$

$$\text{sujet à : } \dot{x}(t) + {}_0D_t^\sigma x(t) = u(t) - x(t) + \frac{6t^{2+\sigma}}{\Gamma(3+\sigma)} + t^3 \quad (5.37)$$

$$x(0) = 0 \quad (5.38)$$

$$x(1) = \frac{6}{\Gamma(4+\sigma)} \quad (5.39)$$

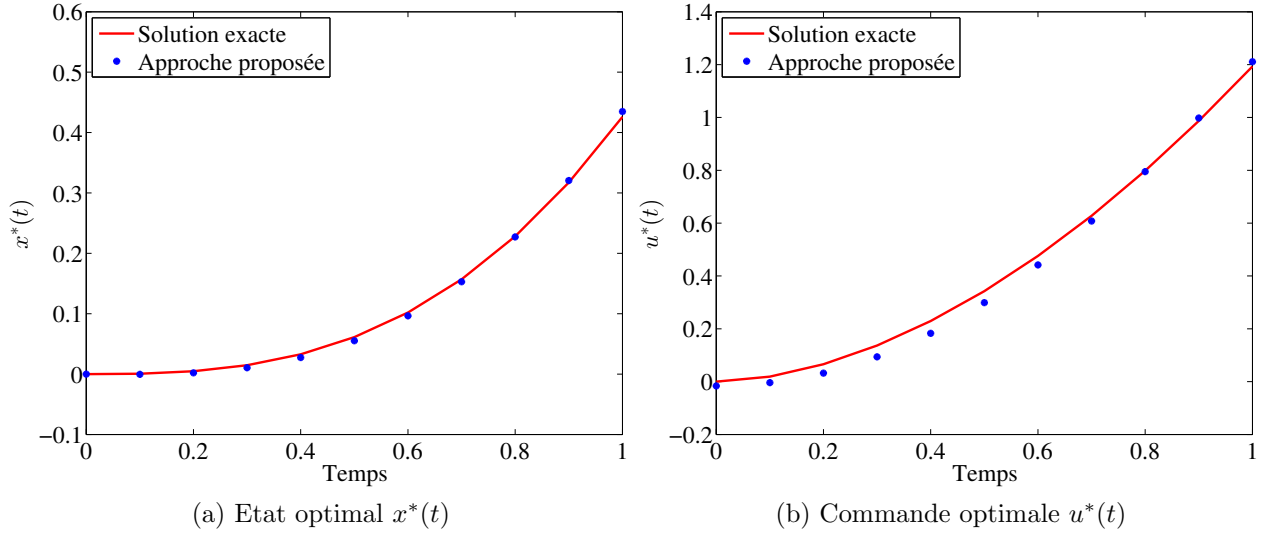


FIGURE 5.2: Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 1 pour  $\sigma = 0,8$ .

La solution exact du problème est

$$x_{\text{exact}}(t) = \frac{6 t^{3+\sigma}}{\Gamma(4 + \sigma)}, \quad u_{\text{exacte}}(t) = \frac{6 t^{3+\sigma}}{\Gamma(4 + \sigma)} \quad (5.40)$$

L'identification du multiplicateur de **Lagrange** donne  $\lambda(t) = -1/2$ . La solution approximée de l'équation différentielle ordinaire fractionnaire obtenue en substituant la commande  $u(t)$  par son expression (5.25) dans l'équation d'état (5.37) est donnée par la formule itérative suivante :

$$x^{(i+1)}(t) = x^{(i)}(t) - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \dot{x}^{(i)}(s) + {}_0D_t^\sigma x^{(i)}(s) - \sum_{k=0}^{N_p} a_k s^k + x^{(i)}(s) - \frac{6 s^{2+\sigma}}{\Gamma(3 + \sigma)} - s^3 \right] ds \quad (5.41)$$

Le Tableau 5.2 résume les résultats des itérations obtenus pour  $\sigma = 0,5$ . On constate que la valeur optimale du critère  $J^* = 1.4773 \times 10^{-4}$  et correspond pour  $N_p^* = 3$ . On remarque aussi que la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire converge après 4 itérations seulement. L'expression de la commande optimale obtenue est

$$u^*(t) = -0,01482 + 0,13493t - 0,49952t^2 + 0,89107t^3 \quad (5.42)$$

Pour  $\sigma = 0,6$ , l'algorithme proposé conduit à la commande optimale suivante ( $N_p^* = 3$ )

$$u^*(t) = -0,0117 + 0,1239t - 0,4921t^2 + 0,84t^3 \quad (5.43)$$

avec une valeur optimale du critère  $J^* = 6,7722 \times 10^{-5}$ .

		<i>i</i>				
		1	2	3	4	
<i>N</i>	1	<i>J</i>	$8,3735 \times 10^{-3}$	$4,7063 \times 10^{-3}$	$4,8562 \times 10^{-3}$	$4,7738 \times 10^{-3}$
		$\Delta J$	–	$8,0410 \times 10^{-3}$	$1,1508 \times 10^{-4}$	$2,5800 \times 10^{-6}$
	2	<i>J</i>	$5,2100 \times 10^{-3}$	$3,3250 \times 10^{-4}$	$4,4758 \times 10^{-4}$	$4,4500 \times 10^{-4}$
		$\Delta J$	–	$4,8775 \times 10^{-3}$	$1,1508 \times 10^{-4}$	$2,5800 \times 10^{-6}$
	3	<i>J</i>	$4,9469 \times 10^{-3}$	$1,6046 \times 10^{-5}$	$1,3620 \times 10^{-4}$	$1,4773 \times 10^{-4}$
		$\Delta J$	–	$4,9309 \times 10^{-3}$	$1,2015 \times 10^{-4}$	$1,1530 \times 10^{-5}$
	4	<i>J</i>	$5,0105 \times 10^{-3}$	$6,1376 \times 10^{-5}$	$1,8033 \times 10^{-4}$	$2,0048 \times 10^{-4}$
		$\Delta J$	–	$4,9491 \times 10^{-3}$	$1,1895 \times 10^{-4}$	$2,0150 \times 10^{-5}$
	5	<i>J</i>	$3,0445 \times 10^{-2}$	$1,8556 \times 10^{-2}$	$1,7340 \times 10^{-2}$	$1,7303 \times 10^{-2}$
		$\Delta J$	–	$1,1889 \times 10^{-2}$	$1,2160 \times 10^{-3}$	$3,7000 \times 10^{-5}$

TABLE 5.2: Itérations de l'algorithme proposé pour l'exemple 2 avec  $\sigma = 0,5$ .

Les trajectoires optimales obtenues et exactes (5.40) sont représentées sur les Figures 5.3 et 5.4 respectivement pour  $\sigma = 0,5$  et  $\sigma = 0,6$ . Les résultats de ces figures confirment la justesse de l'approche proposée puisque la solution approximée obtenue est très proche de la solution exacte.

Pour une comparaison quantitative des solutions obtenues et exactes, on propose de comparer les erreurs maximales commises sur l'état  $E_x$  et la commande  $E_u$  définies respectivement comme suit

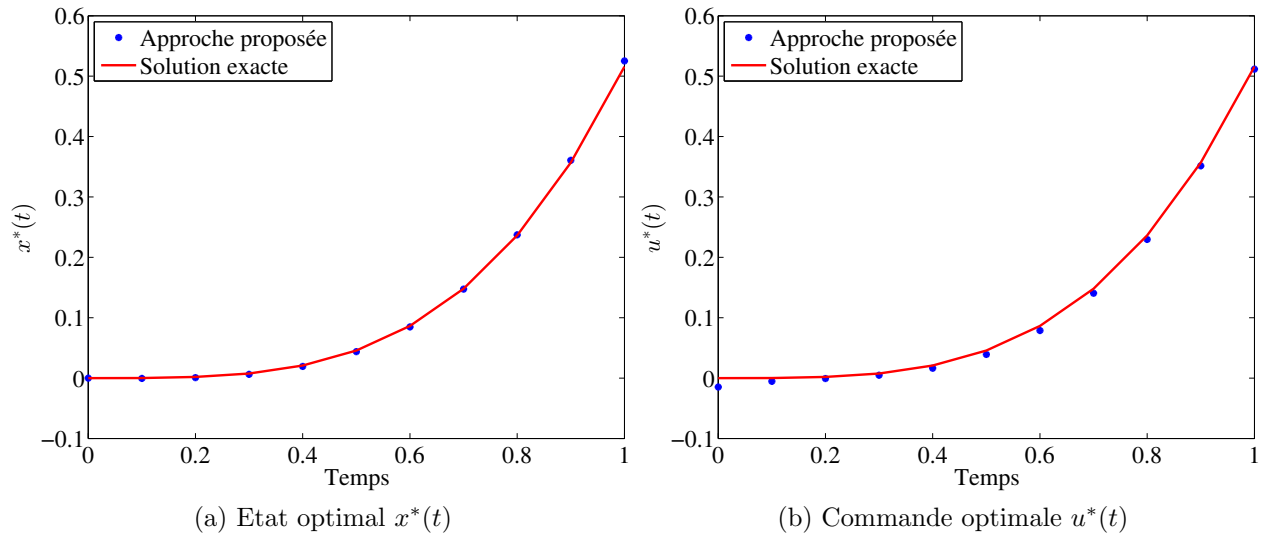


FIGURE 5.3: Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 2 pour  $\sigma = 0,5$ .

$$E_x = \max_t |x_{\text{exact}}(t) - x^*(t)| \quad (5.44)$$

$$E_u = \max_t |u_{\text{exact}}(t) - u^*(t)| \quad (5.45)$$

Les résultats de comparaison pour  $\sigma = 0,5$  sont résumés dans le Tableau 5.3. On constate que les erreurs commises sont faibles. De même pour les autres  $\sigma$  considérés, les erreurs sont de même grandeur que celles données dans le Tableau 5.3.

	Exemple 1	Exemple 2
$E_x$	$8.0346 \times 10^{-3}$	$8.8091 \times 10^{-3}$
$E_u$	$7.9863 \times 10^{-2}$	$1.4820 \times 10^{-2}$

TABLE 5.3: Erreur maximale commise avec l'approche proposée.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche a été proposée pour étendre l'application de la méthode de paramétrisation du vecteur de commande au cas d'un système d'ordre fractionnaire. L'idée

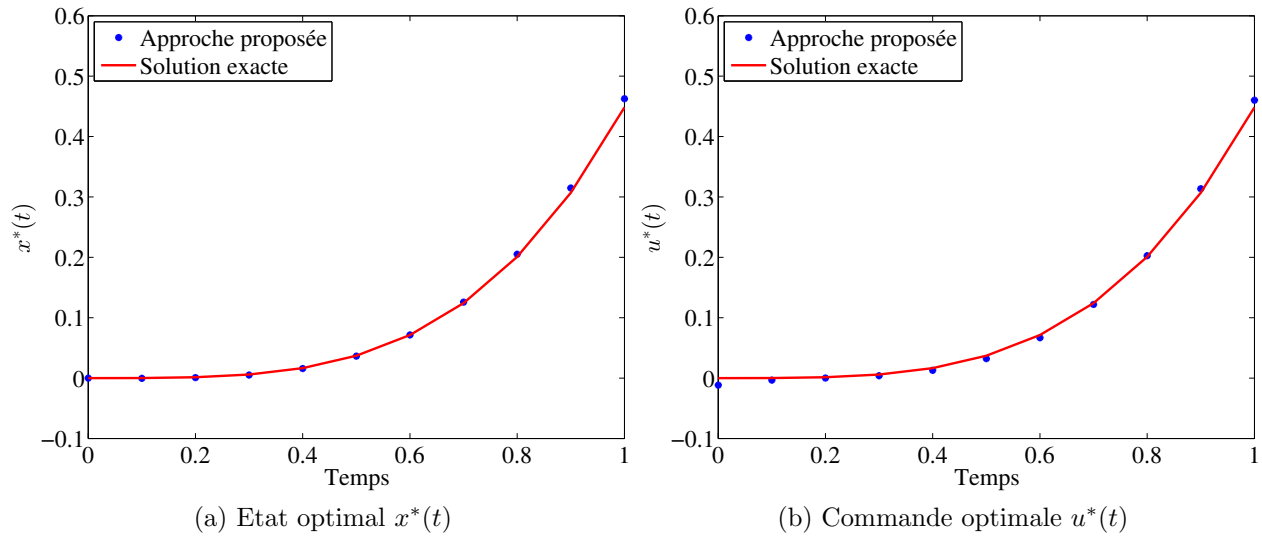


FIGURE 5.4: Trajectoires optimales approximées et exactes de l'exemple 2 pour  $\sigma = 0,6$ .

consiste à utiliser la méthode de l'itération variationnelle fractionnaire pour convertir le problème de commande optimale fractionnaire en un problème d'optimisation statique. Puis pour simplifier la résolution du problème d'optimisation résultant, on a proposé d'utiliser la méthode d'optimisation globale d'Alienor. Cette dernière permet de réduire à nouveau le problème d'optimisation à plusieurs variables en un autre à une seule variable.

La paramétrisation de la commande est réalisée en approximant son expression par une combinaison linéaires, à coefficients constants, de fonctions de base (orthogonales). Les coefficients qui sont inconnus représentent les paramètres de commande à déterminer par optimisation, c'est-à-dire les variables de décision ou d'optimisation.

Les différentes étapes de l'approche proposée sont sous forme d'un algorithme facile à implémenter. Cet algorithme a été appliquée pour résoudre deux problèmes de commande optimale fractionnaire tirés de la littérature. Les exemples considérés représentent des problèmes tests ayant des solutions exactes. Pour chaque exemple deux ordres fractionnaires ont été considérés. Les résultats obtenus démontrent la convergence de l'algorithme proposé. En effet, les solutions obtenues son très proches de la solution exacte puisque l'erreur entre les solutions obtenues et exactes est très faible. Cette erreur peut être contrôler par la tolérance choisie à l'initialisation.

Notons que l'initialisation de l'algorithme nécessite seulement le choix du type des fonctions de base à utiliser pour la paramétrisation de la commande. Le nombre de fonctions à considérer peut être déterminé en déroulant l'algorithme en considérant plusieurs valeurs pour ce nombre. Les fonctions polynomiales représentent un choix intéressant puisque n'importe quelle fonction mathématique continue peut être approximée avec la précision souhaitée par une fonction polynômiale. De plus la manipulation mathématique des fonctions polynomiales est aisée.



# Conclusion générale

L'étude réalisée dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes d'ordre fractionnaire. L'objectif consiste à contribuer dans l'extension des méthodes développées pour le cas entier au cas fractionnaire. Ainsi, après une synthèse sur les différentes approches proposées dans la littérature, nous avons constaté que la méthode de paramétrisation du vecteur de commande, dont l'efficacité dans le cas entier n'est plus à démontrer, n'a pas été investie par les chercheurs dans la littérature. Cette constatation nous a motivé pour l'inscrire comme une piste à explorer dont le but est de proposer une approche simple permettant d'étendre cette méthode au cas fractionnaire.

Ainsi, après avoir présenté les différentes notions du calcul fractionnaire utilisées le long de la thèse, nous avons présenté la théorie de commande optimale dans le cas entier ; tout en passant en revue les différentes approches proposées dans la littérature pour résoudre un problème de commande optimale dans le cas entier. La plupart de ces méthodes ont été étendues avec succès au cas fractionnaire. Par la suite, nous avons présenté deux outils mathématiques développés récemment que nous avons exploité pour étendre la méthode de paramétrisation du vecteur de commande au cas fractionnaire. Le premier outil s'agit de la méthode de l'itération variationnelle utilisée pour résoudre, de manière itérative, une équation différentielle de n'importe quel type même des coefficients inconnus. Cette méthode présente l'avantage de permettre de déterminer une solution analytique approximée en quelques itérations. Le deuxième outil, c'est la méthode d'optimisation globale d'Alienor. Cette dernière permet de

ramener un problème d'optimisation à plusieurs variables en un autre problème à une seule variable. Par conséquent, la localisation de l'optimum global se voit simplifiée. Par la suite, nous avons présenté de manière détaillée l'approche proposée pour étendre la méthode de paramétrisation du vecteur de commande dont la convergence est démontrée par deux exemples d'application tirés de la littérature.

Pour convertir le problème de commande optimale en un problème d'optimisation, nous avons proposé d'approximer la commande recherchée par une combinaison linéaire, à coefficients constants (inconnus à déterminer), d'un ensemble de fonctions de base et de remplacer son expression dans l'équation d'état. Puis de résoudre l'équation différentielle ordinaire fractionnaire résultante en utilisant la méthode de l'itération variationnelle. Cette dernière permet d'avoir une solution approximée en fonction des coefficients de paramétrisation et du temps. Ensuite, en remplaçant la commande et la solution approximée obtenue par leurs expressions dans le critère, on obtient un problème d'optimisation dont les variables de décision sont les coefficients de la paramétrisation. Pour déterminer la solution de ce problème d'optimisation, nous avons proposé de le simplifier en utilisant la méthode d'Alienor, basée sur des transformations réductrices, pour le ramener à un autre problème d'optimisation à une seule variable. Ce dernier est résolu par la méthode des évaluations simultanées. L'approche a été résumée sous forme d'un algorithme et illustrée par des deux exemples d'application qui démontrent sa convergence vers des solutions exactes.

L'approche proposée présente un certain nombre d'avantages :

- la précision de la solution peut être facilement contrôlée par une tolérance à fixer dès le départ ;
- la convergence des outils utilisés n'est pas conditionnée par des choix à effectuer sur la base d'hypothèses fortes comme dans le cas de l'utilisation des méthodes numériques ;
- la méthode de l'itération variationnelle utilisée permet d'avoir une solution approximée en quelques itérations ;
- la méthode d'Alienor permet de localiser l'optimum global ;

— l'implémentation de l'algorithme est simple.

L'étude réalisée dans le cadre de cette thèse ouvre la voie à utiliser les méthodes approximatives (méthode de décomposition d'**Adomian**, méthode de l'itération variationnelle, la méthode de la perturbation homotopique) pour la résolution des problèmes de commande optimale fractionnaire. Nous pouvons notamment proposer d'appliquer ces méthodes :

- pour la résolution directes des conditions d'optimalité (équation d'**Euler-Lagrange**, équations d'**Hamilton-Pontryagin** et l'équation d'**Hamilton-Jacobi-Bellman**) ;
- à la synthèse de lois de commande optimale en boucle fermée en utilisant la méthode de paramétrisation du vecteur de commande ;
- à étendre d'autres méthodes au cas fractionnaire, par exemple la méthode de paramétrisation de l'état et de la commande ;
- à résoudre des problèmes de commande optimale des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles fractionnaires.

Enfin, il est intéressant de penser à considérer des systèmes réels d'ordre fractionnaire comme des exemples d'application en plus des exemples académiques.



# Bibliographie

- [1] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory. An Introduction*. Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [2] F. L. Lewis. *Optimal Control*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [3] J.-P. Corriou. *Commande des Procédés*. Lavoisier, Paris, 2012.
- [4] P. Dyer and S. R. McReynolds. *The Computation and Theory of Optimal Control*. Academic Press, New York, 1970.
- [5] P. Borne and F. Rotella. Commande optimale. In *Traité Mesures et Contrôle (R 7427)*. Techniques de l'Ingénieur, Paris, 1996.
- [6] D. S. Naidu. *Optimal Control Systems*. CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [7] M. Athans and P. L. Falb. *Optimal Control : An Introduction to the Theory and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [8] R. F. Stengel. *Optimal Control and Estimation*. Dover Publications, New York, 1994.
- [9] S. R. Upreti. *Optimal Control for Chemical Engineers*. CRC Press, Boca Raton, 2013.
- [10] E. Trélat. Optimal control and applications to aerospace : some results and challenges. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(3) :713–758, 2012.
- [11] J. M. Longuski, J. J. Guzman, and J. E. Prussing. *Optimal Control with Aerospace Applications*. Springer-Verlag, New York, 2014.

- [12] L. P. Lebedev and M. J. Cloud. *The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics*. World Scientific Publishing, Singapore, 2013.
- [13] S. Anița, V. Arnăutu, and V. Capasso. *An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics. From Mathematical Models to Numerical Simulation with MATLAB*. Birkhäuser, New York, 2011.
- [14] E. Rapoport and Y. Pleshivtseva. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. CRC Press, Boca Raton, 2007.
- [15] S. Lenhart and J. T. Workman. *Optimal Control Applied to Biological Models*. CRC Press, Boca Raton, 2007.
- [16] S. P. Sethi and G. L. Thompson. *Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [17] D. Grass, J. P. Caulkins, G. Feichtinger, G. Tragler, and D. A. Behrens. *Optimal Control of Nonlinear Processes With Applications in Drugs, Corruption, and Terror*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [18] T. Singh. *Optimal Reference Shaping for Dynamical Systems. Theory and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 2010.
- [19] E. Trélat. *Contrôle Optimal : Théorie & Applications*. Vuibert, Paris, 2005.
- [20] B. Van Brunt. *The Calculus of Variations*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [21] R. L. Magin. *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House Publishers, Connecticut, 2006.
- [22] C. Li and F. Zeng. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. CRC Press, Boca Raton, 2015.
- [23] A. B. Malinowska, T. Odziejewicz, and D. F. M. Torres. *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations*. Springer, Heidelberg, 2015.

- [24] D. Valério and J. S. D. Costa. *An Introduction to Fractional Control*. The Institution of Engineering and Technology, London, 2013.
- [25] R. Toledo-Hernandez, V. Rico-Ramirez, G. A. Iglesias-Silva, and U. M. Diwekar. A fractional calculus approach to the dynamic optimization of biological reactive systems. part I : Fractional models for biological reactions. *Chemical Engineering Science*, 117 :217–228, 27 September 2014.
- [26] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, and I. Petráš. *Fractional Order Systems. Modeling and Control Applications*. World Scientific Publishing, Singapore, 2010.
- [27] R. L. Bagley and P. J. Torvik. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2) :294–298, 1984.
- [28] J. Lai, S. Mao, J. Qiu, H. Fan, Q. Zhang, Z. Hu, and J. Chen. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016(ID 9183296) :1–15, 2016.
- [29] P. J. Torvik and R. L. Bagley. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2) :294–298, 1984.
- [30] I. Pan and S. Das. *Intelligent Fractional Order Systems and Control. An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [31] J.-H. He. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167(1–2) :57–68, 1998.
- [32] I. Podlubny and K. V. Thimann. *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press, New York, 1999.
- [33] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu. *Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag, London, 2010.

- [34] R. Caponetto, G. Maione, and J. Sabatier. Fractional-order control : A new approach for industrial applications. *Control Engineering Practice*, 56 :157–158, November 2016.
- [35] A. Dzieliński, D. Sierociuk, and G. Sarwas. Some applications of fractional order calculus. *Bulletin of The Polish Academy of Sciences : Technical Sciences*, 58(4) :583–592, 2010.
- [36] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5(4) :367–386, 2002.
- [37] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [38] O. P. Agrawal. A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynamics*, 38(1) :323–337, 2004.
- [39] C. Tricaud and Y. Chen. Time-optimal control of systems with fractional dynamics. *International Journal of Differential Equations*, 2010(Article ID 461048) :1–16, 2010.
- [40] C. Tricaud and Y.-Q. Chen. Time-optimal control of fractional dynamic systems. In *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, P. R. China, December 16–18 2009.
- [41] C. Tricaud and Y. Q. Chen. *Optimal Mobile Sensing and Actuation Policies in Cyber-physical Systems*. Springer, London, 2012.
- [42] A. B. Malinowska. Fractional variational calculus for non-differentiable functions. In D. Baleanu, J. A. T. Machado, and A. C. J. Luo, editors, *Fractional Dynamics and Control*, chapter 8, pages 97–108. Springer-Verlag, New York, 2012.
- [43] C. Tricaud and Y. Chen. An approximate method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) :1644–1655, 2010.

- [44] S. Pooseh, R. Almeida, and D. F. M. Torres. Free time fractional optimal control problems. In *European Control Conference (ECC'13)*, pages 3985–3990, Zürich, Switzerland, July 17-19 2013.
- [45] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [46] R. E. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, New Jersey, 1957.
- [47] A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio. *Calcul Scientifique. Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave*. Springer-Verlag, Milan, 2010.
- [48] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [49] A. Lotfi, M. Dehghan, and S. A. Yousefi. A numerical technique for solving fractional optimal control problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(3) :1055–1067, 2011.
- [50] M. M. Khader and A. S. Hendy. An efficient numerical scheme for solving fractional optimal control problems. *International Journal of Nonlinear Science*, 14(3) :287–296, 2012.
- [51] N. H. Sweilam, T. M. Al-Ajami, and R. H. W. Hoppe. A numerical solution of some types of fractional optimal control problems. *The Scientific World Journal*, 2013(ID 306237) :1–9, 2013.
- [52] M. Bierlaire. *Introduction à l'optimisation différentiable*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 2013.
- [53] S. S. Rao. *Engineering Optimization : Theory and Practice*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2009.
- [54] M.-H. Lin, J.-F. Tsai, and C.-S. Yu. A review of deterministic optimization methods in engineering and management. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012(ID 756023) :1–15, 2012.

- [55] J.-M. Renders. *Algorithmes génétiques et réseaux de neurones : applications à la commande de processus*. Hermès, 1995.
- [56] M. Clerc. *L'optimisation par essais particuliers : versions paramétriques et adaptatives*. Hermès, Paris, 2005.
- [57] R. W. H. Sargent. Optimal control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124(1–2) :361–371, 2000.
- [58] J. T. Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(2) :193–207, 1998.
- [59] O. P. Agrawal. Fractional variational calculus and the transversality conditions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39(33) :10375–10384, 2006.
- [60] G. S. F. Frederico and D. F. M. Torres. Fractional optimal control in the sence of Caputo and the fractional Noether's theorem. *International Mathematical Forum*, 3(10) :479–493, 2008.
- [61] P. S. Harvey and H. P. Gavin. Approximate solutions to nonlinearly-constrained optimal control problems. In *American Control Conference*, pages 3122–3128, San Francisco, June 29–July 01 2011.
- [62] R. Almeida, A. B. Malinowska, and D. F. M. Torres. Fractional Euler-Lagrange differential equations via Caputo derivatives. In D. Baleanu, J. A. T. Machado, and A. C. J. Luo, editors, *Fractional Dynamics and Control*, chapter 9, pages 109–118. Springer-Verlag, New York, 2012.
- [63] A. Alizadeh and S. Effati. An iterative approach for solving fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, In Press, 2016.
- [64] R. K. Biswas and S. Sen. Free final time fractional optimal control problems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(2) :941–951, 2014.

- [65] O. P. Agrawal and D. Baleanu. A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration Control*, 13(9–10) :1269–1281, 2007.
- [66] O. P. Agrawal, O. Defterli, and D. Baleanu. Fractional optimal control problems with several state and control variables. *Journal of Vibration and Control*, 16(13) :1967–1976, 2010.
- [67] R. K. Biswas and S. Sen. Fractional optimal control problems : a pseudo-state-space approach. *Journal of Vibration and Control*, 17(7) :1034–1041, 2010.
- [68] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics : the decomposition method*. Springer, Dordrecht, 1994.
- [69] J.-H. He, G.-C. Wu, and F. Austin. The variational iteration method which should be followed. *Nonlinear Science Letters A- Mathematics, Physics and Mechanics*, 1(1) :1–30, 2010.
- [70] J. I. Ramos. On the variational iteration method and other iterative techniques for nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 199(1) :39–69, 2008.
- [71] J.-H. He. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178(3–4) :257–262, 1999.
- [72] E. Tohidi and H. S. Nik. A Bessel collocation method for solving fractional optimal control problems. *Applied Mathematical Modelling*, 39(2) :455–465, 2015.
- [73] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. Detailed error analysis for a fractional adams method. *Numerical Algorithms*, 36(1) :31–52, 2004.
- [74] V. Daftardar-Gejji and H. Jafari. Adomian decomposition : a tool for solving a system of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 301(2) :508–518, 2005.

- [75] N. N. Hasan and F. S. Fadhel. Variational iteration method for solving system of fractional order ordinary differential equations. *IOSR Journal of Mathematics*, 10(6) :48–54, 2014.
- [76] G.-C. Wu and D. Baleanu. New applications of the variational iteration method - from differential equations to  $q$ -fractional difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2013(21) :1–16, 2013.
- [77] Y. Li and Y. Q. Chen. Fractional order linear quadratic regulator. In *IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA '2008)*, pages 363–368, San Francisco, CA, USA, June 29- July 01 2008.
- [78] J. H. He. Variational iteration method - some recent results and new interpretations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) :3–17, 2007.
- [79] J.-H. He and X.-H Wu. Variational iteration method : New development and applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7–8) :881–894, 2007.
- [80] J. H. He. A variational iteration method - a kind of nonlinear analytical technique : Some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4) :699–708, 1999.
- [81] Y. Cherruault. A new reducing transformation for global optimization (with Alienor method). *Kybernetes*, 34(7–8) :1084–1089, 2005.
- [82] Y. Cherruault. New deterministic methods for global optimization and application to biomedicine. *International Journal of Bio-medical Computing*, 27(3–4) :215–229, 1991.
- [83] Y. Molliq, M. S. M. Noorani, and I. Hashim. Variational iteration method for fractional heat- and wave-like equations. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 10(3) :1854–1869, 2009.
- [84] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Dover Publications, New York, 2006.

- [85] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, New Jersey, 1993.
- [86] D Baleanu, J. A. T. Machado, and A. C. J. Luo. *Fractional Dynamics and Control*. Springer-Verlag, New York, 2012.
- [87] H. Matzinger. *Aide-mémoire d'analyse*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2000.
- [88] H. T. Davis. *The Theory of Linear Operators*. Principia Press, Bloomington, 1936.
- [89] I. N'Doye. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires*. Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré – Nancy 1 et de l'Université Hassan II Aïn Chock – Casablanca, Février 2011.
- [90] R. Toledo-Hernandez, V. Rico-Ramirez, G. A. Iglesias-Silva, and U. M. Diwekar. A fractional calculus approach to the dynamic optimization of biological reactive systems. part II : Numerical solution of fractional optimal control problems. *Chemical Engineering Science*, 117 :239–247, 27 September 2014.
- [91] J.-C. Trigeassou and N. Maamri. State space modeling of fractional differential equations and the initial condition problem. In *6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices(SSD'09)*, USA, 23–26 March 2009 2009.
- [92] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Initialization in fractional order systems. In *European Control Conference (ECC'01)*, Porto, Portugal, 4–7 September 2001 2001.
- [93] M. I. Kamien and N. L. Schwartz. *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [94] B. A. Conway. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 152(2) :271–306, 2012.
- [95] J. T. Betts. *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

- [96] P. Naslin. *Théorie de la Commande et Conduite Optimale*. Dunod, Paris, 1969.
- [97] J.-B. Hiriart-Urruty. *L'optimisation*. Presses Universitaires de France, Paris, 1996.
- [98] K. P. Badakhshan and A. V. Kamyad. Numerical solution of nonlinear optimal control problems using nonlinear programming. *Applied Mathematics and Computation*, 187(2) :1511–1519, 2007.
- [99] L. T. Biegler. Solution of dynamic optimization problems by successive quadratic programming and orthogonal collocation. *Computers and Chemical Engineering*, 8(3–4) :243–247, 1984.
- [100] T. H. Tsang, D. M. Himmelblau, and T. F. Edgar. Optimal control via collocation and non-linear programming. *International Journal of Control*, 21(5) :763–768, 1975.
- [101] R. G. Bruschi and R. H. Schappelle. Solution of highly constrained optimal control problems using nonlinear programming. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 11(2) :135–136, 1973.
- [102] C. J. Goh and K. L. Teo. Control parameterization : A unified approach to optimal control problems with general constraints. *Automatica*, 24(1) :3–18, 1988.
- [103] M. Schlegel, K. Stockmann, T. Binder, and W. Marquardt. Dynamic optimization using adaptive control vector parameterization. *Computers and Chemical Engineering*, 29(8) :1731–1751, 2005.
- [104] J. E. Cuthrell and L. T. Biegler. On the optimization of differential-algebraic process systems. *AIChE Journal*, 33(8) :1257–1270, 1987.
- [105] G. A. Hicks and W. H. Ray. Approximation methods for optimal control synthesis. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 49(4) :522–528, 1971.
- [106] S. A. Asgari and M. R. Pishvaie. Dynamic optimization in chemical processes using region reduction strategy and control vector parameterization with ant colony optimization algorithm. *Chemical Engineering Technology*, 31(4) :507–512, 2008.

- [107] C. M. Chilan and B. A. Conway. A reachable set analysis method for generating near-optimal trajectories of constrained multiphase systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 167(1) :161–194, 2015.
- [108] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [109] H. R. Sirisena and F. S. Chou. State parametrization approach to the solution of optimal control problems. *Optimal Control and Methods*, 2(3) :289–298, 1981.
- [110] M. Boumahrat and A. Gourdin. *Méthodes Numériques Appliquées*. Office des Publications Universitaires, Alger, 1983.
- [111] J. D. Pintér. Global optimization in practice : State of the art and perspectives. In D. Y. Gao and H. D. Sherali, editors, *Advances in Applied Mathematics and Global Optimization*, volume 17 of *Advances in Mechanics and Mathematics*, chapter 11, pages 377–404. Springer-Verlag, New York, 2009.
- [112] G. Berthiau and P. Siarry. État de l’art des méthodes d’optimisation globale. *RAIRO Operations Research*, 35(3) :329–365, 2001.
- [113] E. M. T. Hendrix and B. G.-Tóth. *Introduction to Nonlinear and Global Optimization*. Springer-Verlag, New-York, 2010.
- [114] Y. Cherruault and G. Mora. *Optimisation globale. Théorie des courbes  $\alpha$ -denses*. Economica, Paris, 2005.
- [115] E. Hansen and G. W. Walster. *Global Optimization Using Interval Analysis : Revised and Expanded*. CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [116] Y. Cherruault. *Optimisation. Méthodes Globales et Locales*. Presses Universitaires de France, Paris, 1999.
- [117] Y. Cherruault. *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant*. Presses Universitaires de France, Paris, 1998.

- [118] D. Lavigne and Y. Cherruault. Alienor-gabriel global optimization of a function of several variables. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(10) :125–134, 1991.
- [119] G. Mora and Y. Cherruault. Characterization and generation of  $\alpha$ -dense curves. *Computers and Mathematics with Applications*, 33(9) :83–91, 1997.
- [120] B. O. Konfé, Y. Cherruault, and T. Benneouala. A global optimization method for a large number of variables (variant of alienor method). *Kybernetes*, 34(7–8) :1070–1083, 2005.
- [121] J. Biazar and H. Ghazvini. He’s variational iteration method for solving linear and non-linear systems of ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 191(1) :287–297, 2007.
- [122] D. D. Ganji, M. Nourollahi, and E. Mohseni. Application of He’s methods to nonlinear chemistry problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7–8) :1122–1132, 2007.
- [123] G. Wu. A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(8) :2186–2190, 2011.
- [124] D. Delbosco and L. Rodino. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204(2) :609–625, 1996.
- [125] V. Daftardar-Gejji and A. Babakhani. Analysis of a system of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293(2) :511–522, 2004.
- [126] J. Deng and L. Ma. Existence and uniqueness of solutions of initial value problems for nonlinear fractional differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 23(6) :676–680, 2010.
- [127] F. Wang. Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional differential equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 39(1) :53–67, 2012.

- [128] K. Diethelm and N. J. Ford. Analysis of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265(2) :229–248, 2002.
- [129] S. Butera and M. D. Paola. Fractional differential equations solved by using Mellin transform. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(7) :2220–2227, 2014.
- [130] N. H. Sweilam, M. M. Khader, and R. F. Al-Bar. Numerical studies for a multi-order fractional differential equation. *Physics Letters A*, 371(1–2) :26–33, 2007.
- [131] V. Parthiban and K. Balachandran. Solutions of system of fractional partial differential equations. *Applications and Applied Mathematics : An International Journal*, 8(1) :289–304, 2013.
- [132] C. Li, A. Chen, and J. Ye. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation. *Journal of Computational Physics*, 230(9) :3352–3368, 2011.
- [133] K. Diethelm, J. M. Ford, N. J. Ford, and M. Weilbeer. Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(2) :482–503, 2006.
- [134] W. Cao, F. Zeng, Z. Zhang, and G. E. Karniadakis. Implicit-explicit difference schemes for nonlinear fractional differential equations with nonsmooth solutions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(5) :A3070–A3093, 2016.
- [135] G.-H. Gao, Z.-Z. Sun, and H.-W. Zhang. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications. *Journal of Computational Physics*, 259 :33–50, 15 February 2014.
- [136] D. Xue and L. Bai. Numerical algorithms for Caputo fractional-order differential equations. *International Journal of Control*, In Press, 2016.

- [137] R. Garrappa. On linear stability of predictor-corrector algorithms for fractional differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(10) :2281–2290, 2010.
- [138] R. Garrappa. Predictor-corrector PECE method for fractional differential equations (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32918>). *MATLAB Central File Exchange*, 2012 (consulté pour la dernière fois le 11 décembre 2016).
- [139] A. A. Hemeda. Modified homotopy perturbation method for solving fractional differential equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2014(ID 594245) :1–9, 2014.
- [140] S. Momani and Z. Odibat. Numerical approach to differential equations of fractional order. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) :96–110, 2007.
- [141] A. Ghorbani and J. Saberi-Nadjafi. Convergence of He’s variational iteration method for nonlinear oscillators. *Nonlinear Science Letters A- Mathematics, Physics and Mechanics*, 1(4) :379–384, 2010.
- [142] Z. M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(9–10) :1181–1192, 2010.
- [143] M. Tatari and M. Dehghan. On the convergence of He’s variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) :121–128, 2007.
- [144] E. Lavretsky and K. A. Wise. *Robust and Adaptive Control with Aerospace Applications*. Springer-Verlag, London, 2013.
- [145] R. Kamocki. On the existence of optimal solutions to fractional optimal control problems. *Applied Mathematics and Computation*, 235 :94–104, 25 May 2014.
- [146] S. Liang, S.-G. Wang, and Y. Wang. Representation and LQR of exact fractional order systems. In *53<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control Conference*, pages 6908–6913, Los Angeles, California, USA, December 15-17 2014.

- [147] O. P. Agrawal. A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems. *ASME Journal of Dynamical Systems and Measurement Control*, 130(1) :011010–1–011010–6, 2008.

**Résumé :** La méthode de paramétrisation du vecteur de commande est une technique de commande optimale très utilisée. Cette méthode permet de convertir un problème de commande optimale en un problème d'optimisation statique. Le principe de la méthode consiste à approximer la commande par une combinaison linéaire, à coefficients constants, de fonctions orthogonales. Le problème de détermination de la commande optimale revient à déterminer les valeurs optimales des coefficients de la paramétrisation qui optimisent le critère de performances. Dans cette thèse, une approche permettant d'étendre la méthode de la paramétrisation du vecteur de commande aux systèmes d'ordre fractionnaire est proposée. L'idée consiste à remplacer l'expression de la commande obtenue, après paramétrisation, dans l'équation d'état et d'utiliser la méthode de l'itération variationnelle pour la résolution de l'équation différentielle résultante. En remplaçant cette solution dans le critère, on obtient un problème d'optimisation statique. Pour résoudre le problème d'optimisation obtenu, on propose d'utiliser la méthode d'optimisation globale d'Aliénor. Cette dernière permet de simplifier le problème d'optimisation puisque'elle réduit le nombre de variables d'optimisation à une seule variable. Les différentes étapes de l'approche proposée sont résumées sous forme d'un algorithme et son efficacité est démontrée par deux exemples d'application.

**Mots clés :** Commande optimale, paramétrisation du vecteur de commande, système d'ordre fractionnaire, méthode de l'itération variationnelle, optimisation globale, méthode d'Aliénor.

---

**Abstract :** Control vector parameterization method is one of the most used optimal control technique. This method allows converting an optimal control problem to a static optimization problem. The principle of the method consists in approximating the control by a linear combination, with constant coefficients, of a set of orthogonal functions. Thus, the problem of the determination of the optimal control consists in determining the optimal values of the coefficients that optimize the performance index. In this thesis, an approach that allows extending the control vector parameterization methods to fractional systems is proposed. The idea is to use the variational iteration method to solve the resulting fractional ordinary differential equation obtained by substituting the parameterized control into the state equation. Then, the obtained approximate solution is substituted into the performance index to obtain the static optimization problem where the decision variables are the parameterization coefficients. To solve this optimization problem, it is proposed to use the Aliénor global optimization method. This optimization technique simplifies the optimization process since the number of decision variables is reduced to one variable. The different steps of the proposed approach are summarized by an algorithm and its effectiveness is shown by two application examples.

**Key words :** optimal control, control vector parametrization method, fractional order systems, fractional variational iteration method, global optimization, Aliénor method.