MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI- OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE

Présentée par :

Hocine KOURAT

sujet :

Contributions à l'étude de quelques propriétés géométriques des espaces du type Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques

Devant le jury d'examen composé de :

Mr. MORSLI Mohamed ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
Mme. BEDOUHENE Fazia ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
Mr. ACHOUR Dahmane ;	Professeur ;	U/Msila ;	Examinateur
Mr. BOUZAR Chikh ;	Professeur ;	U.S.T.O ;	Examinateur
Mr. MEZRAG Lahcen ;	Professeur ;	U/Msila ;	Examinateur
Mme. RAHMANI Leila ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Examinatrice

soutenue : le 03/05/2016

Remerciements

J'adresse ici tous mes remerciements au Professeur **Fazia Bedouhene**, ma directrice de thèse pour son aide précieuse durant la réalisation de ce travail. Je suis très reconnaissant pour son encadrement exceptionnel en toute circonstance et le soutien qu'elle m'a prodigué tout au long de cette thèse, tant par ses hautes compétences scientifiques que par ses qualités humaines.

C'est aussi un immense plaisir pour moi de voir réunis Mr. MORSLI Mohamed, Mr. BOUZAR Chikh, Mr. MEZRAG Lahcen , Mr. ACHOUR Dahmane et Mme. RAHMANI Leila au sein de mon jury de thèse. C'est un grand honneur qu'ils me font.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mr MORSLI Mohamed, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, qui ma fait l'honneur d'accepter de présider le jury de thèse.

Mes remerciements vont aussi à Mr. BOUZAR Chikh, Professeur à l'université d'Oran, Mr. le Professeur MEZRAG Lahcen, de l'université de Msila, Mr. le Professeur ACHOUR Dahmane, de l'université de Msila ainsi que Mme RAHMANI Leila, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou, pour avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Mes dernières pensées iront tout naturellement à mes amis, ils se reconnaîtront, et à ma famille pour les encouragements et le soutien moral qu'ils m'ont toujours prodiguées.

Je dédie cette thèse
à toute ma famille et à mes amis.

Table des matières

Table des figures

Notations

Notations :

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des réels ;
- $C^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$;
- $C_B(\mathbb{R},\mathbb{E})$: espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$
- $T(f,\varepsilon)$: l'ensemble des : ε-presque périodes de f ;
- $\{u.p.p.\}$: espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr ;
- $u.p.p.$: fonction uniformément presque périodique ;
- $H(f)$: l'ensemble des translatées de f ;
- $T_h f$: l'opérateur translation par h ($h \in \mathbb{R}$) ;
- $\mathscr{A}$: l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés ;
- $M(f)$: la valeur moyenne de f ;
- $a(f,\lambda)$: le coefficient de Fourier-Bohr d'indice λ de f ;
- $\sigma(f)$: le spectre de la fonction f ;
- $S(f)(t)$: la série de Fourier formelle associée à f ;
- $\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{E})$: l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$;
- $L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$: le sous espace des fonctions de $\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{E})$: localement p-integrables ;
- SC : stricte convexité ;
- UC : uniforme convexité ;
- LUC : locale uniforme convexité ;
- MLUC : “midpoint” locale uniforme convexité ;
- UCED (UCTD) : uniforme convexité dans toute direction ;
- $\pi(x \setminus C)$: meilleure approximation de x dans C ;
- $B^\varphi - p.p.$: espace Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques définie via les polynômes trigonométriques généralisés ;
- $S^\varphi_\ell - p.p.$: espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques

définie via les polynômes trigonométriques généralisés ;
- $W^{\varphi} - p.p.$: espace de Weyl-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques définies via les polynômes trigonométriques généralisés ;
- $S^{(d)}_{\ell,\varphi} - t.p.(\mathbb{R}, \mathscr{U})$: espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques définie via la définition de Bohr de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de métrique $(\mathscr{U}, d)$;
- $W^{(d)}_{\varphi} - t.p.(\mathbb{R}, \mathscr{U})$: espace de Weyl-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques définie via la définition de Bohr à valeurs dans un espace de métrique $(\mathscr{U}, d)$;
- $W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$: l'espace de Weyl de fonctions presque périodiques au sens de Danilov ;
- $\widetilde{W}^{0}_{\varphi}$: l'espace des fonctions absolument $\varphi-$integrables au sens de Weyl ;
- $f^{R}(x_0, .)$: la fonction tronquée de f dans un espace métrique $(\mathscr{U}, d)$ $(x_0 \in \mathscr{U})$;
- $P_R : f(.) \mapsto f^{R}(x_0, .)$: la projection radiale sur la boule de centre x_0 et de rayon R.

Introduction générale

Contexte général

L'essentiel du travail que nous présentons concerne différentes classes d'espaces fonctionnels de type Musielak-Orlicz, obtenues par extension des propriétés de presque périodicité de H.Bohr (propriété de translation et propriété d'approximation) : Espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz, Weyl-Musielak-Orlicz et Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Si φ est une fonction de Musielak-Orlicz, c'est à dire une fonction d'Orlicz à paramètre vérifiant :

1. La fonction φ est continue et définie sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$,
2. $\varphi(t,0) = 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$,
3. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t,u)$ est convexe par rapport à $u \in [0,+\infty[$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(t,u) = +\infty$.

Si $\mathscr{A}$ désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés, i.e.,

$$\mathscr{A} = \left\{ P_n(t) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j e^{i\lambda_j t}, \ a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

alors la fermeture de l'ensemble $\mathscr{A}$ relativement à chacune des semi-normes de type Musielak-Orlicz suivantes :

$$\|f\|_{S_l^\varphi} = \inf \left\{ k > 0, \ \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\}; \quad (1)$$

$$\|f\|_{W^\varphi} = \inf \left\{ k > 0, \ \lim_{\ell\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\}; \quad (2)$$

$$\|f\|_{B^\varphi} \quad = \quad \inf\left\{k>0,\ \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi\left(t,\frac{|f(t)|}{k}\right)d\mu\leq 1\right\}. \tag{3}$$

Les espaces obtenus sont appelés respectivement espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz ($S^\varphi - p.p.$), Weyl-Musielak-Orlicz ($W^\varphi - p.p.$) et Besicovitch-Musielak-Orlicz ($B^\varphi - p.p.$) de fonctions presque périodiques. Ces espaces sont initialement introduits dans [55].

Lorsque la fonction génératrice φ est la fonction puissance (i.e., $\varphi(t,u) = |u|^p$, $p \geq 1$), ces espaces sont respectivement appelés espaces de Stepanov ($S^p - p.p.$), Weyl ($W^p - p.p.$) et Besicovitch ($B^p - p.p.$) de fonctions presque périodiques. Dans ce cas, ces derniers espaces sont caractérisés en terme de propriétés de translation dite aussi de presque périodicité de Bohr [2, 10, 11, 28]. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to C$ est dite presque périodique au sens de Bohr (ou vérifie la propriété de presque périodicité de Bohr) si pour $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) = l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un nombre τ vérifiant

$$\|f(.+\tau)-f(.)\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t+\tau)-f(t)| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

L'extension au cadre abstrait et large des espaces d'Orlicz consiste a prendre en lieu et place de la norme infinie dans l'inégalité (4), les pseudo-normes du type Orlicz (1) et (2). Les espaces obtenus, notés $S^\varphi - t.p.$, et $W^\varphi - t.p.$ sont respectivement appelés espace de Stepanoff-Orlicz et Weyl-Orlicz de fonctions presque périodiques. La définition des espaces de Besicovitch-Orlicz via la propriété de translation est plus compliquée et nécessite d'autre arguments que nous présenterons plus loin (voir [2, 11, 30, 31]).

Il existe de nombreux travaux consacrés aux espaces $S^p - p.p.$, $W^p - p.p.$ et $B^p - p.p.$ et aux différents aspects de leurs structures (cf. [1, 2, 10, 20, 27, 31]). Leurs applications sont variées et concernent notamment les équations différentielles et aux dérivées partielles, l'analyse harmonique....

La première étude sur les espaces de Besicovitch-Orlicz de fonction presque périodiques est due a J. Albricht [1] qui considère certains aspects de la structure et de la topologie de ces espaces. Les travaux de Hillmann [30, 31] sur la structure et autres propriétés topologiques des espaces $S^\varphi - p.p.$, $W^\varphi - p.p.$ et $B^\varphi - p.p.$ (dans le cadre des espaces d'Orlicz) constituent une référence plus complète.

Les questions relatives à la structure géométrique des espaces de Banach jouent un rôle essentiel dans des domaines mathématiques très variés, notamment en théorie de l'approximation et optimisation. Différent auteurs se sont intéressés à ces questions (notamment la stricte et l'uniforme convexité relativement à la norme de Luxemburg).

La these de M.Morsli [43] est une synthèse des travaux sur les espaces du type Orlicz de fonction presque périodique. L'auteur initie aussi l'étude des questions de nature géométrique, notamment la caractérisation de l'uniforme convexité et la convexité stricte de l'espace $B^\varphi - p.p.$ par des conditions de régularité sur la fonction d'Orlicz φ. Les références [4], [15], [6] est un complement à ces travaux. Les auteurs ont étudié la géométrie des espaces $S^{\varphi} - p.p.$, $W^{\varphi} - p.p.$ et $B^{\varphi} - p.p.$ lorsqu'ils sont munis des normes de Luxemburg et d'Orlicz.

Cette thèse vise à compléter l'étude de la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques $B^{\varphi} - p.p.$ introduite initialement dans [55] et reprise dans [23].

Contribution et structure de la thèse

La thèse est composée de deux parties, une partie préliminaire et une partie contribution. La partie préliminaire comporte deux chapitres, le premier chapitre fournit un exposé des différentes notions de presque périodicité, nous faisons ensuite une présentation sommaire des espaces modulaires et les espaces de type Musielak-Orlicz. Le deuxième chapitre est destiné à fixer les notations et à définir les propriétés et les outils fondamentaux en géométrie des espaces de Banach. La deuxième partie est l'essentiel de notre travail. Elle est composée de deux chapitres.

Chapitre 3 : Notre contribution dans ce chapitre porte sur l'étude de nombreuses propriétés structurelles de la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques ($B^{\varphi} - p.p.$) introduite par Morsli et Smaali [46] via la propriété d'approximation par des polynômes trigonométriques généralisés.

D'un point de vue structurel, nous avons donné une caractérisation de la classe $B^{\varphi} - p.p.$ en termes de la Besicovitch-presque périodicité au sens de Danilov et d'une propriété d'uniforme integrabilité. Notre résultat généralise ainsi celui de Danilov lorsque φ est la fonction puissance. Nous avons également démontré un résultat d'approximation des fonctions de $B^{\varphi} - p.p.$ par des polynômes de Bochner-Fejèr. Ce résultat nécessite une hypothèse supplémentaire que nous avons introduite sur la fonction de Musielak-Orlicz φ, dite τ-bornitude [1]. Cette hypothèse s'avère indispensable pour l'invariance par translation des fonctions de $B^{\varphi} - p.p.$. Elle est également nécessaire pour assurer la B^{φ}-continuité [2] des fonctions de $B^{\varphi} - p.p.$.

D'un point de vue géométrique, nous avons étudié d'autres propriétés de convexité intermédiaires à la stricte convexité et l'uniforme convexité de l'espace $\widetilde{B}^{\varphi} - p.p.$ muni de la norme de Luxemburg, il s'agit de la locale uniforme convexité (LUC), la H-propriété, la midpoint locale uniforme convexité (MLUC) et l'uniforme convexité dans toute direction (UCED). On a démontré que toutes ces propriétés sont équivalentes à la stricte convexité de l'espace $\widetilde{B}^{\varphi} - p.p.$.

Comme application, nous avons abordé le problème d'existence de l'élément de meilleure approximation, nous avons déduit, grâce aux propriétés de convexité étudiées, une ver-

1. Se référer à la Définition 3.4.11
2. Se référer à la Définition 3.4.5

sion du théorème de Doob dans l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$. Cette étude a fait l'objet d'une publication dans la revue *Commentat Math. Univ. Carol* [8].

Chapitre 4 : Dans ce chapitre, nous avons abordé les notions de presque périodicité de Stepanoff-Musielak-Orlicz $S^{(d)}_{\ell,\varphi}-t.p.$ et Weyl-Musielak-Orlicz $W^{(d)}_{\varphi}-t.p.$, via les $\varepsilon-$presque périodes, pour des fonctions à valeurs dans un espace métrique $(\mathscr{U},d)$ (séparable). Différentes caractérisations et résultats d'approximation ont été obtenus :

1. En s'inspirant de [24, 31], nous avons montré que, moyennant la h^S-bornitude [3] et la condition-$\Delta_2^{W^1}$ de la fonction de Musielak-Orlicz φ, les fonctions de $W^{(d)}_{\varphi}-t.p.$ peuvent être approchées par leurs tronquées. Comme conséquence directe de ce résultat, nous avons obtenu une caractérisation de la classe $W^{(d)}_{\varphi}-t.p.$. Le résultat obtenu généralise celui de Danilov [24] lorsque $\varphi(t,x)=|x|^p$, $p\geq 1$.
2. Lorsque $\mathscr{U}$ est un espace normé, nous avons énoncé et démontré le théorème d'approximation des fonctions de $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ par des suites de polynômes de Bochner-Fejèr.
3. On a montré que les pseudo-modulaires de Besicovitch-Musielak-Orlicz $\rho_{B^{\varphi}}(f)$ et de Weyl-Musielak-Orlicz $\rho_{W^{\varphi}}(f)$ coïncident sur $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et que l'espace $B^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ est le complété de l'espace $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$. Ce résultat nous a permis de conclure que :
   - L'espace $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ hérite de toutes les propriétés géométriques de l'espace $B^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$.
   - Le dual de $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ est isométriquement isomorphe à l'espace dual de $B^{\Psi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$. Si de plus φ ainsi que sa fonction conjuguée Ψ vérifient la condition-$\Delta_2^{B^1}$, alors $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)^{*}\simeq B^{\psi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$.

La fin de ce manuscrit est consacrée à une conclusion générale et quelques perspectives des travaux présentés.

3. Se référer à la Définition 4.2.8

1

Première partie

Partie préliminaire

CHAPITRE 1

Généralités sur les fonctions presque périodiques et espaces de type Musielak Orlicz

Sommaire

1.1 Introduction

La notion de fonctions presque périodiques est issue, au début du vingtième siècle, des travaux de H. Bohr. Elle a été développée par d'autres notamment Bochner, vers 1933, qui a donné une autre version de la définition des fonctions presque périodiques équivalente à celle donnée par Bohr, mais plus maniable. Cette étude à été reprise par Stepanoff, Weyl et Besicovitch qui ont défini la notion de fonctions presque périodiques en moyenne L^p_{Loc}. L'extension au cadre abstrait et large des espaces d'Orlicz consiste à prendre en lieu et place de la fonction $|.|^p$ dans la définition de ces espaces, une fonction φ convexe. Les espaces obtenus, notés $S^\varphi - p.p.$, $W^\varphi - p.p.$ et $B^\varphi - p.p.$ sont respectivement appelés espace de Stepanoff-Orlicz, Weyl-Orlicz et Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. La première étude sur ces espaces (en particulier sur $B^\varphi - p.p.$) est due à J. Albricht [1] qui considère certains aspects de la structure et de la topologie de $B^\varphi - p.p.$. Les travaux de Hillmann [30, 31] sur la structure et autres propriétés topologiques de ces espaces constituent une référence plus complète. Ce chapitre est introductif. Il a pour objectif de présenter la notion de fonction presque-périodique (p.p.) au sens de Bohr dans le cadre des espaces L^p, la notion de presque périodicité définie dans les espaces de type de Lebesgue trouve aussi un sens dans les espaces du type Musielak-Orlicz, d'où l'intérêt d'introduire à la fin de ce chapitre la notion d'espaces modulaires et d'espaces du type Musielak-Orlicz. Dans ce qui suit, on note $C^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$.

1.2 Fonctions uniformément presque périodiques

Rappelons que les définitions de fonctions presque périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ (où $\mathbb{E}$ est un espace de Banach) font intervenir trois notions, une norme $\|.\|_{\mathbb{E}}$ étant choisie sur un espace de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$:

1. les presque-périodes : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\ell > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un $\tau \in [a, a+\ell]$ de sorte que $\|f(.+\tau) - f(.)\| \leq \varepsilon$,

2. la propriété de Bochner : de toute suite de translatées $(f(.+a_n))_n$, on peut extraire une sous-suite uniformément convergente pour la norme $\|.\|_{\mathbb{E}}$,
3. la propriété d'approximation : on peut trouver une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_n$ (i.e.$P_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} a_{k,n} \exp\left(i\lambda_{k,n}t\right)$) convergeant vers f pour la norme $\|.\|_{\mathbb{E}}$.

Ces notions étendent la périodicité. Dans la première situation, si f est périodique de période T, prenant $\ell > T$ on aura dans $[a, a+\ell]$ au moins un kT $(k \in \mathbb{Z})$ pour lequel la relation est vraie avec égalité à 0. Pour la seconde, on peut toujours réduire les a_n modulo T ce qui fera une suite bornée, puis raisonner par compacité. Enfin, la troisième est liée au théorème de Fejèr. On obtient différentes définitions qui peuvent être équivalentes ou non.
Introduisons tout d'abord les deux définitions préliminaires :

Définition 1.2.1. *Un ensemble $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre réel $\ell > 0$ (dit longueur d'inclusion), tel que, tout intervalle $[a, a+\ell]$ de longueur l de $\mathbb{R}$ contient un élément de $\mathbb{I}$.*

Définition 1.2.2. *Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Un nombre réel τ est une ε-presque période de f si on a*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon, \tag{1.1}$$

et l'on note $T(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon\}$ l'ensemble des ε-presque périodes de f.

Définition 1.2.3. *(voir par exemple [2], p. 3 ou [10], p. 2) (presque-périodes). Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$. On dit que f est uniformément presque-périodique (u.p.p) ou $f \in \{u.p.p.\}$ si, $\forall \varepsilon > 0$, la fonction f possède un ensemble de ε-presque-périodes relativement dense. i.e. $\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $\ell = \ell(\varepsilon) > 0$, tel que tout intervalle $[a, a+\ell]$ contienne un nombre $\tau = \tau(\varepsilon)$ satisfaisant (1.1).*

Toute fonction périodique continue est une fonction presque périodique au sens de Bohr. En effet si f est une fonction T-périodique, alors tous les nombres de la forme nT, $n = (\pm1, \pm2, \pm3, ...)$ sont aussi des périodes de f, et donc sont des presque périodes de f, pour tout $\varepsilon > 0$. Or l'ensemble $\{nT, n = \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ est relativement dense, ce qui implique que f est presque périodique au sens de Bohr. Par contre la réciproque est fausse. On cite comme contre exemple la fonction suivante :

$$f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t), (t \in \mathbb{R}).$$

Propriétés essentielles de fonctions u.p.p.

La proposition suivante expose certaines propriétés de fonctions presque-périodiques. Pour les démonstrations (et plus de détails), on renvoie aux livres (Besicovitch, 1932 [10]) et (Amerio, Prouse, 1971 [2]) :

Proposition 1.2.4.

1. *Toute fonction uniformément presque périodique est uniformément continue.*
2. *Toute fonction uniformément presque périodique est uniformément bornée.*
3. *Si une suite de fonctions uniformément presque périodique f_n est uniformément convergente dans $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est aussi u.p.p..*
4. *L'espace des fonctions uniformément presque périodiques $u.p.p$ muni de la norme de convergence uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup \|f(t)\|_{\mathbb{E}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un espace de Banach.

-On note $C_B(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$, ensemble que l'on munit de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ défnie par $\forall f \in C_B(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbb{E}}$.
- Pour une fonction $f \in C_B(\mathbb{R},\mathbb{E})$ et un réel $a \in \mathbb{R}$ on note $f(.+a)$ la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$ $f(.+a)(t) = f(t+a) = (T_a f)(t)$ et l'on note $H(f) = \{(T_a f)(.) = f(.+a), \ \ a \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des translatées de f. Si $f \in \{u.p.p.\}$ a-t-on la translatée dans $\{u.p.p.\}$? La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.2.5. *Si $f \in \{u.p.p.\}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $(T_a f) \in \{u.p.p.\}$.*

Si f est périodique, alors l'ensemble $H(f) = \{(T_a f)(.) = f(.+a), \ \ a \in \mathbb{R}\}$ est un compact de l'ensemble $C_B(\mathbb{R},\mathbb{E})$. En remplaçant la compacité de $H(f)$ par la compacité relative on obtient la définition de la presque périodicité donnée par S. Bochner.

Définition 1.2.6. *(normalité). On dit que $f \in C_B(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est presque périodique si et seulement si l'ensemble des translatées de f, $H(f)$ est une partie relativement compacte de*

$C_B(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, *c'est-à-dire si et seulement si pour toute suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels il existe une extraction* ϕ *telle que la suite de fonctions* $(f(.+a_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.7. *On rappelle que dans un espace complet une partie est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte. Ainsi* $f \in \{u.p.p.\}$ *si et seulement si l'ensemble des translatées est précompacte.*

Autres propriétés de fonctions u.p.p.

(voir par exemple Besicovitch, 1954 [11] et Corduneanu, 1989 [20])

Proposition 1.2.8.

1. *Si* f *et* g *sont deux fonctions uniformément presque périodiques, alors les fonctions* $f+g$ *et* fg *le sont aussi.*
2. *Si* f *est uniformément presque périodique et* $m = \inf_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| > 0$, *alors la fonction* $\frac{1}{f}$ *est aussi u.p.p..*
3. *Si* f *est une fonction presque périodique et* F *est continue sur* $\{f(t), t \in \mathbb{R}\}$ *alors la fonction composée* $F \circ f$ *est u.p.p.*

Remarque 1.2.9. *Tout polynôme trigonométrique*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k t)\,,\ \lambda_k \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{E},\ n \in \mathbb{N}$$

est une fonction uniformément presque périodique, en utilisant la Proposition 1.2.8 (3), *toute fonction f obtenue par la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques est* $u.p.p.$ *Ainsi on introduit une troisième définition dite d'approximation, pour les fonctions uniformément presque périodiques.*

Définition 1.2.10 (Approximation)**.** *L'espace des fonctions uniformément presque périodiques* $u.p.p.$ *est la fermeture dans* $(C_B(\mathbb{R}, \mathbb{E}))$ *de l'ensemble* $\mathscr{A}$ *des polynômes trigonométriques à valeurs dans* $\mathbb{E}$, *pour la topologie de convergence uniforme. i.e.* $f \in u.p.p.$ *si et* *seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_\varepsilon(t)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon.$$

Et on écrit

$$\{u.p.p\} = \overline{\mathscr{A}}^{\|.\|_\infty}.$$

De manière plus explicite

$$\{u.p.p\} = \{f \in C_B(\mathbb{R},\mathbb{E}),\ \exists\{P_n\}_n \subset \mathscr{A}, \lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0\}.$$

Remarque 1.2.11. *1. Toute fonction presque périodique au sens de Bochner est presque périodiques au sens de Bohr.*

2. Toute fonction presque périodique au sens de l'approximation polynômial est presque périodiques au sens de Bochner.

3. Toute fonction presque périodique au sens de Bohr est presque périodiques au sens de l'approximation polynômial.

Par analogie avec les fonctions périodiques on cherche à définir la moyenne d'une fonction presque périodique. Pour une fonction continue et périodique f de période T la moyenne de f correspond à la moyenne sur une période, elle vaut

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

1.2.1 Valeur moyenne d'une fonction $u.p.p.$

Pour une fonction $u.p.p.$ f on cherche a moyenner sur $\mathbb{R}$ donc on a envie de définir la moyenne de f comme la limite lorsque T tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt$. Bien que l'on ne soit pas assuré à priori de son existence. c'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 1.2.12. *Soit $f \in \{u.p.p.\}$. Alors, la limite suivante existe dans $\mathbb{E}$.*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt.$$

Définition 1.2.13. *Pour toute fonctions u.p.p.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$*. On définit la valeur moyenne supérieur* $\overline{M}(f)$ *et la valeur moyenne inférieure* $\underline{M}(f)$ *de* f *par :*

$$\overline{M}(f) = \overline{M_t}(f(t)) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt,$$

$$\underline{M}(f) = \underline{M_t}(f(t)) = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt.$$

Lorsque ces deux valeurs coïncident, on obtient la valeur moyenne de f*, notée* $M(f)$*.*

$$M(f) = M_t(f(t)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)dt.$$

Remarque 1.2.14. *Il est important de signaler les aspects suivants :*

1. *Soit* $f \in \{u.p.p.\}$, *et* $a \in \mathbb{R}$*. Alors,*

$$M_t(f(t+a)) = M_t(f(t))$$

2. *Lorsque f est continue et T-périodique, on a :*

$$M(f) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)dt.$$

3. *On notera souvent* $M_t(f(t))$ *pour signifier que la moyenne est calculée par rapport à la variable* t*.*

Exemple
La fonction $f(t) = \exp(i\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une fonction périodique continue, et a fortiori presque périodique, et donc sa valeur moyenne existe est finie.

$$M(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

1.2.2 Convergence uniforme et en moyenne

Définition 1.2.15. *On dit qu'une suite de fonctions u.p.p.* $\{f_n\}$ *converge en moyenne quadratique vers* f *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ M(\|f_n - f\|_{\mathbb{E}}^2) \leq \varepsilon.$$

Si une suite de fonctions est uniformément convergente, alors converge en moyenne quadratique.
La converge en moyenne quadratique n'implique pas en général la convergence uniforme.

Définition 1.2.16. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est uniformément équi-continue, si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon.$$

Définition 1.2.17. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est équi-presque périodique, si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $l > 0$, *tel que tout intervalle de longueur* ℓ *contient au moins un nombre* τ, *pour lequel*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathbb{E}} \leq \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille équi-continue, équi-presque périodique et converge en moyenne quadratique, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

1.2.3 Séries de Fourier-Bohr de fonctions presque périodiques

L'une des propriétés importantes de la théorie de fonctions presque périodiques est la décomposition en série de Fourier d'une fonction presque périodique. Cette théorie dit que les fonctions presque périodiques admettent des développements en séries de Fourier.
Soit $f \in \{u.p.p.\}$, alors la fonction $f(t)\exp(-i\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est *u.p.p*, comme produit de fonctions uniformément presque périodiques, sa valeur moyenne existe et finie, on la note par $a(f,\lambda)$, i.e.

$$a(f,\lambda) = M_t(f(t)\exp(-i\lambda t)).$$

Définition 1.2.18. *Pour* $f \in \{u.p.p.\}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on définit le coefficient de Fourier-Bohr* *d'indice λ de f par :*

$$a(f,\lambda) = M_t(f(t))\exp(-i\lambda t)).$$

Proposition 1.2.19. *([10], p. 18) Pour toute fonction u.p.p., il existe un ensemble au plus dénombrable de réels λ (appelé Bohr- Exposants ou des fréquences de Fourier) vérifiant $a(f,\lambda) \neq \emptyset$.*

Les nombres $a(f,\lambda)$ associés sont les coefficients Bohr-Fourier de la fonction f.

Définition 1.2.20. *Soit $f \in \{u.p.p.\}$, on définit le spectre de la fonction f comme l'ensemble*

$$\sigma(f) = \{\lambda_n \ : \ a(f,\lambda_n) \neq 0\}$$

qui est au plus dénombrable.

Soit $f \in \{u.p.p\}$, et soient $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N)$, N nombres arbitraires distincts, et $(b_1,b_2,...,b_N)$, N nombres complexes arbitraires, et soit $a(f,\lambda_n) = M(f(t)\exp(-i\lambda_n t))$. On utilisant les propriétés de la valeur moyenne on obtient

$$M(\|f(t)-\sum_{n=1}^{N} b_n \exp(i\lambda_n t)\|_{\mathbb{E}}^2 = M(\|f(t)\|^2) - \sum_{n=1}^{N} \|a(f,\lambda_n)\|_{\mathbb{E}}^2 + \sum_{n=1}^{N} \|b_n - a(f,\lambda_n)\|_{\mathbb{E}}^2.$$

Cette équation est appelée équation d'approximation en moyenne quadratique de f par des polynômes $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n \exp(i\lambda_n t.)$

Lorsque $b_n = a(f,\lambda_n)$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \|a(f,\lambda_n)\|_{\mathbb{E}}^2 \leq M(\|f(t)\|_{\mathbb{E}}^2).$$

Ceci étant vrai pour tout entier N, on déduit l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a(f,\lambda_n)\|_{\mathbb{E}}^2 \leq M(\|f(t)\|_{\mathbb{E}}^2).$$

Comme conséquence de cette inégalité, la série de Fourier formelle associée à f est donnée par

$$S(f)(t) = \sum_{n\geq 1} a(f,\lambda_n)\exp(i\lambda_n t).$$

Théorème 1.2.21. *(Unicité) Si deux fonctions presque périodiques ont la même série de Fourier-Bohr, alors elles sont identiques.*

Remarque 1.2.22. *Lorsque $\mathbb{E}$ est un espace de Hilbert, Les coefficients de Fourier-Bohr d'une fonction $u.p.p.$ f, vérifie l'égalité de Parseval ([61]) :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a(\lambda_n)\|^2 = M(\|f(t)\|^2).$$

Ce résultat, permet de montrer une propriété d'approximation des fonctions $u.p.p.$ par des polynômes trigonométriques particuliers, les polynômes de Bochner-Fejèr qui généralise l'approximation classique de Fejèr des fonctions périodique.

1.2.4 Polynôme d'approximation de Bochner-Fejèr

Cette question a été étudier très en détaille dans [6], Dans cette section nous décrivons brièvement la construction du polynôme de Bochner-Fejèr associé à une fonction $u.p.p.$ et on donnera la propriété d'approximation d'une fonction $u.p.p.$ par des polynômes de Bochner-Fejèr telle qu'elle est présentée dans [6].
Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ un ensemble dénombrable de nombres réels. On dit que les α_i, $i = 1, 2, ...$ sont linéairement indépendants si, pour tout entier $p \geq 1$, les seuls rationnels $r_1, r_2, ..., r_p$ vérifiant l'équation :

$$r_1\alpha_{n_1} + r_2\alpha_{n_2} + ... + r_p\alpha_{n_p} = 0$$

sont $r_1 = r_2 = ... = r_p = 0$.
Soit maintenant f une fonction u.p.p. à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{E}$. On note $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}$ l'ensemble des exposants de Fourier de f. On définit la notion de base des exposants de f de la manière suivante :
L'ensemble de nombres réels linéairement indépendants $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ est une base des exposants de f si, pour tout entier $m \geq 1$,

$$\lambda_m = r_{n_1}^{(m)}\alpha_{n_1} + r_{n_2}^{(m)}\alpha_{n_2} + ... + r_{n_m}^{(m)}\alpha_{n_m},$$

où les coefficients $r_{n_i}^{(m)}$, $i = 1...m$, sont des nombres rationnels. En d'autres termes, chaque exposant de Fourier-Bohr de f s'exprime (de manière unique) sous forme d'une combinaison linéaire finie des nombres α_i, $i \geq 1$, à coefficients rationnels.
Le noyau de Bochner-Fejèr est défini par un produit fini de noyaux de Fejèr :
$K_{\binom{n_1, n_2, ..., n_p}{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p}}(t) = K_{n_1}(\alpha_1 t)K_{n_2}(\alpha_2 t)...K_{n_p}(\alpha_p t)$

$$= \sum_{|\nu i|<n_i, i=1\ldots p} \left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\left(1-\frac{|\nu_2|}{n_2}\right)\ldots\left(1-\frac{|\nu_p|}{n_p}\right)\exp\left(-i\left(\nu_1\alpha_1+\nu_2\alpha_2+\ldots+\nu_p\alpha_p\right)t\right),$$

où p est un entier positif.
Ce noyau possède les mêmes propriétés que celui de Fejèr, c'est-à-dire :

— $K_{\binom{n_1,n_2,\ldots,n_p}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}} \geq 0$.

— $M\left(K_{\binom{n_1,n_2,\ldots,n_p}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}}\right) = 1$.

On appelle alors polynôme de Bochner-Fejèr, l'expression :

$$\sigma_{\binom{n_1,n_2,\ldots,n_p}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}}(x) = M_t\left\{f(x+t)\,K_{\binom{n_1,n_2,\ldots,n_p}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}}(t)\right\},$$

s'exprimant aussi par la somme :

$$\sum_{|\nu i|<n_i, i=1\ldots p} \left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\ldots\left(1-\frac{|\nu_p|}{n_p}\right) a\left(\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_p\alpha_p\right)\exp\left(i\left(\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_p\alpha_p\right)t\right).$$

Dans cette dernière expression, seuls les vecteurs $a(\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_n\alpha_n)$ associés à des combinaisons figurant dans l'ensemble des exposants de Fourier-Bohr de f sont non nuls, et dans ce cas on écrit :

$$\nu_1\alpha_1+\ldots+\nu_p\alpha_p = \lambda_n.$$

L'expression du polynôme de Bochner-Fejèr devient alors [2] :

$$\sigma_{\binom{n_1,n_2,\ldots,n_p}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}}(x) = \sum_{|\nu i|<n_i, i=1\ldots p} \left(1-\frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\ldots\left(1-\frac{|\nu_p|}{n_p}\right) a(\lambda_n)\exp(i\lambda_n x).$$

Si on pose $B = \binom{n_1,n_2,\ldots,n_p}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p}$, le polynôme σ_B s'écrit alors :

$$\sigma_B(x) = \sum_{n\geq 1} d_n^{(B)} A_n \exp(i\lambda_n x),$$

où $A_n = a(f,\lambda_n)$ est le coefficient de Fourier-Bohr de f et les $d_n^{(B)}, n \geq 1$, sont des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$, non nuls pour seulement un nombre fini de valeurs de n.
Soit maintenant f une fonction u.p.p. à valeur dans un espace de Hilbert $\mathbb{E}$ et sa série de Fourier formelle $S(f)(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} A_n \exp(i\lambda_n x)$. On associe à cette série la famille des

polynômes de Bochner-Fejèr $(\sigma^f_{B_n})_{n\geq 1}$ [4].
La suite de Bochner-Fejèr $\{\sigma_{B_n}\}_{n\geq 1}$, notée par la suite $\left\{\sigma^f_n\right\}_{n\geq 1}$, est donc convergente en moyenne quadratique vers f, on déduit qu'elle converge aussi uniformément vers f.

Proposition 1.2.23. *[6] Soient $f, g \in \{u.p.p\}$. Alors, il existe deux suites de polynômes de Bochner-Fejèr $\left\{\sigma^f_n\right\}_{n\geq 1}$ et $\left\{\sigma^g_n\right\}_{n\geq 1}$ de f et g respectivement vérifiant :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f-\sigma^f_n\right\|_\infty = 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left\|g-\sigma^g_n\right\|_\infty = 0 \textit{ et telles que } \sigma^f_n+\sigma^g_n=\sigma^{f+g}_n,\ \forall n\geq 1.$$

Théorème 1.2.24. *[11] Soit*

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a(f,\lambda_n)\exp(i\lambda_n t).$$

Une fonction u.p.p.. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier positif N et un nombre réel positif $0<\delta<\pi$ tel que toute solution τ du système d'inequations de Diophantines

$$|\lambda_n\tau|<\delta\,(mod\ 2\pi),\qquad (n=1,2,\ldots,N)$$

est un $\varepsilon-$presque période de f.

Introduisons maintenant les différentes généralisations de fonctions presque périodiques, la première généralisation est due à Stepanoff, définissant les espaces $S^p-p.p.$, $W^p-p.p.$, $B^p-p.p.$ (resp. l'espace de Stepanoff, weyl et Besicovitch de fonctions presque périodiques).

1.3 Fonction presque périodiques au sens de Stepanoff

Soit $\mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace normé $\mathbb{E}$ et μ la mesure de Lebesgue. On note $L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ le sous espace des fonctions de $M(\mathbb{R},\mathbb{E})$ localement p-integrables :

4. La notation σ_{B_n} signifie que pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on a un ensemble de multi-indices de la forme $B_n=\binom{n_1(n),n_2(n),\ldots,n_p(n)}{\alpha_1(n),\alpha_2(n),\ldots,\alpha_p(n)}$.

$$L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E}) = \left\{ f \in \mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{E}),\ \forall K \subset \mathbb{R}, \text{compact}, \int\limits_K \|f(t)\|^p \, d\mu < +\infty \right\}.$$

On se donne une fonction localement p-integrable. On définit aussi les normes de Stepanoff :

$$\|f\|_{S^p_\ell} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\ell} \int\limits_x^{x+\ell} \|f(t)\|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}}$$

induite par la distance

$$D_{S^p_\ell}(f,g) = \|f-g\|_{S^p_l} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\ell} \int\limits_x^{x+l} \|f(t)-g(t)\|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.3.1. *On rappelle que l'on peut se limiter à $\ell = 1$, les normes obtenues étant équivalentes entre elles. On peut travailler donc avec $\|.\|_{S^p} = \|.\|_{S^p_1}$ pour $l = 1$.*

Définition 1.3.2. *(([2], p. 76-77),([10], p. 77), ([19], p. 156))(presque-périodes). Une fonction $f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite presque périodique au sens de Stepanoff ($S^p_\ell - t.p.$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$S^p_\ell T(f,\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R},\ \|T_\tau f - f\|_{S^p_\ell} \leq \varepsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Le nombre réel $\tau \in S^p_\ell T(f,\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R},\ \|T_\tau f - f\|_{S^p_\ell} \leq \varepsilon\}$ est appelé un $\varepsilon-$Stepanoff presque période de f.

Théorème 1.3.3. *([29], p. 189) Toute fonction presque périodique au sens de Stepanoff est*

1. *$S^p_\ell-$bornée,*
2. *$S^p_\ell-$uniformément continue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ tels que } \text{ si } |a| < \delta, \text{ alors } D_{S^p_\ell}(T_a f, f) < \varepsilon.$$

Définition 1.3.4. *([29], p. 189)($S^p_\ell-$normalité). Une fonction $f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite $S^p_\ell-$normale si, la famille de fonctions $\{f(t+a)\}$ (a est un nombre réel arbitraire) est $S^p_\ell-$précompact, i.e. si pour toute suite $f(t+a_1),\ f(t+a_2),\ f(t+a_3),...,$ nous pouvons trouver une suite S^p_ℓ-convergente.*

On définit l'espace de Banach BS^p_ℓ

$$BS^p_\ell = \{f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E}),\ \ \|f\|_{S^p_\ell} < +\infty\}.$$

Définition 1.3.5. *(Approximation). L'espace de fonctions presque périodiques $S^p_\ell - p.p.$ est la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques dans BS^p_ℓ par rapport à la norme $\|.\|_{S^p_\ell}$. i.e. $f \in S^p_\ell - p.p.$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tel que*

$$D_{S^p_\ell}(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Théorème 1.3.6. *Les trois les définitions 1.3.2, 1.3.4 et 1.3.5 sont équivalentes.*

Théorème 1.3.7. *L'espace $(S^p_\ell - p.p., \|.\|_{S^p_\ell})$ est complet.*

1.4 Fonction presque périodiques au sens de Weyl

Bien que les trois définitions du l'espace $\{u.p.p.\}$ et $S^p_\ell - p.p.$ sont liées à la même norme (respectivement, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_{S^p_\ell}$), les définitions classiques des espaces de Weyl sont en utilisant deux normes différentes : $\|.\|_{S^p_\ell}$ et la norme Weyl.

$$\|f\|_{W^p} = \limsup_{l\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \|f(t)\|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{l\to\infty} \|f\|_{S^p_\ell}$$

induite par la distance

$$D_{W^p}(f,g) = \lim_{\ell\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \|f(t)-g(t)(t)\|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{\ell\to\infty} D_{S^p_\ell}(f,g).$$

Il peut être facilement démontré que ces limites existent toujours (voir par exemple ([39], p. 221-222 [10], p. 77).

Définition 1.4.1. *[38](presque-périodes). Une fonction $f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite presque périodique au sens de Weyl ($W^p - t.p.$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $l = l(\varepsilon)$ tel que l'ensemble*

$$S^p_\ell T(f,\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R}, \ \ \|T_\tau f - f\|_{S^p_\ell} \leq \varepsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.2. *([29], p. 189)(W^p-normalité). Une fonction $f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite W^p-normale si, la famille de fonctions $\{f(t+a)\}$ (a est un nombre réel arbitraire) est W^p-precompact.*

De manière analogue aux espaces Stepanoff, nous introduisons l'espace BW^p

$$BW^p = \left\{f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R},\mathbb{E}), \ \ \|f\|_{W^p} < +\infty\right\}.$$

Définition 1.4.3. *([10], p. 74-75)(Approximation). On note par $W^p - p.p.$ l'espace de Weyl de fonctions presque périodiques obtenu comme fermeture l'ensemble $\mathscr{A}$ des polynômes trigonométriques dans l'espace BW^p par rapport a la norme $\|.\|_{W^p}$. i.e. $f \in W^p - p.p.$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tel que*

$$D_{W^p}(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Comme dans le cas de Stepanoff, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.4.4. *Les définitions 1.4.1 et 1.4.3 sont équivalentes.*

Théorème 1.4.5. *L'espace $(W^p - p.p., \|.\|_{W^p})$ n'est pas complet.*

1.5 Fonction presque périodiques au sens de Besicovitch

Contrairement aux espaces $S^p_\ell - t.p.$ et $W^p - t.p.$ la caractérisation des fonctions de l'espace $B^p - t.p.$ en termes de propriété de presque périodicité est plus compliquée, elle fait appel à la notion de suite équirépartie :

Définition 1.5.1. *Une suite de nombres réels $\{\tau_i\}_{i\in Z}$ est équirépartie s'il existe un nombre réel $\ell > 0$ tel que $\nu^0(\ell) < 2\mu^0(\ell)$,*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{où} & \nu^0(\ell) & = & \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} card\{[x, x+\ell] \cap \{\tau_i\}\}_{i\in\mathbb{Z}}, \\ \textit{et} & \mu^0(\ell) & = & \min\limits_{x\in\mathbb{R}} card\{[x, x+\ell] \cap \{\tau_i\}\}_{i\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

Autrement dit : $\nu^0(\ell)$ (respectivement $\mu^0(\ell)$) est le nombre maximum éventuellement infini (respectivement le minimum) d'éléments de la suite $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ qu'on peut trouver dans un intervalle de longueur ℓ.

Définition 1.5.2. *(presque-périodes). On dit qu'une fonction est presque périodique au sens de Besicovitch ($f \in B^p - t.p.$) si et seulement si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une suite $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels équirépartie dans $\mathbb{R}$, telle que :*

— $\overline{M}\{\|f_{\tau_i} - f\|^p\} < \varepsilon^p, \ \forall i \in \mathbb{Z}.$

— $\overline{M}_x\overline{M}_i\left\{\frac{1}{c}\int\limits_x^{x+c} \|f(x+\tau_i) - f(x)\|^p \, d\mu\right\} \leq \varepsilon^p, \ \forall i \in \mathbb{Z}, \ \forall c > 0.$

Les nombres réels τ_i sont appelés presque période de f associés à ε.

On définit l'espace de Marcinkiewicz [53] $\mathscr{M}^p(\mathbb{R})$ par

$$\mathscr{M}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ \ \|f\|_{B^p} = \limsup_{T\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} \ \ \forall p \geq 1.$$

Considérons la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_{B^p} = 0, \ \ f,g \in \mathscr{M}^p$$

et l'espace quotient

$$M^p(\mathbb{R}) = \mathscr{M}^p / K_p,$$

où $K_p = \{f \in \mathscr{M}^p \text{ telle que } \|f\|_{B^p} = 0\}$.

Définition 1.5.3. *([14], p. 36)(Approximation). On note par $B^p - p.p.$ l'espace de Besicovitch obtenu comme fermeture dans M^p de l'ensemble $\mathscr{A}$ des polynômes trigonométriques. En d'autres termes, un élément de $B^p - p.p.$ peut être représenté par une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbb{P}_\varepsilon \in \mathscr{A}$ tels que*

$$\limsup_{T \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|f(t) - \mathbb{P}_\varepsilon\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Théorème 1.5.4. *([10], [9]) Les espaces $B^p - p.p.$ et $B^p - t.p.$ sont équivalents.*

Définition 1.5.5. *([29], p. 189)(B^p-normalité). Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite B^p-normale si, pour toute suite a_i de nombres réels, correspond une sous suite a_{n_i} telle que la suite de fonctions $(f(t + a_{n_i}))$ est B^p-convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|f(t + h_n) - f(t + h_m)\|^p dt = 0.$$

1.6 Propriétés d'approximation de fonctions presque périodiques généralisées

Comme dans le cas des fonctions u.p.p., les différents types de fonctions presque périodiques généralisées peuvent être approximeés par des polynômes de Bochner-Fejèr au sens des normes correspondantes. De manière plus précise, si on désigne par $G^p - p.p$ l'un des trois espaces $S^p_\ell - p.p$, $W^p - p.p$ et $B^p - p.p$, alors, toute fonction $f \in G^p - p.p$ possède la propriété suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme de Bochner-Fejèr P_ε, vérifiant :

1. $\|f - P_\varepsilon\|_{G^p} \leq \varepsilon$,
2. $\|P_\varepsilon\|_{G^p} \leq \|f\|_{G^p}$.

Notons que la propriété (2) reste valable pour n'importe quel polynôme de Bochner-Fejèr de f [2].

La théorie des espaces modulaires englobe une vaste classe d'espaces fonctionnelles parmi lesquels, les espaces du type Musielak-Orlicz. (Stepanoff-Musielak-Orlicz, Weyl-Musielak-Orlicz et Besicovitch-Musielak-Orlicz). Nous donnons ici les éléments fondamentaux qui seront utilisés par la suite.

1.7 Espaces modulaires

Nous commençons cette section par exposer brièvement la théorie des espaces modulaires. Notre référence est [48] et [50].

Définition 1.7.1. *Soit X un espace linéaire réel ou complexe. On appelle pseudomodulaire (resp. modulaire), toute fonctionnelle ρ définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*

1. $\rho(0) = 0$ *(resp.* $\rho(x) = 0$ *ssi* $x = 0$*),*
2. $\rho(-x) = \rho(x)$*, si X est réel et* $\rho(x\exp(i\theta)) = \rho(x)$*,* $\theta \in \mathbb{R}$*, si X est complexe,*
3. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$*, si* $\alpha, \beta \geq 0$*,* $\alpha + \beta = 1$*.*

   Si on remplace 3 par :
4. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$ *pour* $\alpha, \beta \geq 0$*,* $\alpha^s + \beta^s = 1$*,* $s \in]0,1]$*, alors la pseudomodulaire ρ est dite s-convexe (convexe pour $s = 1$).*

Si de plus, la fonctionnelle ρ vérifie la propriété suivante : $\rho(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$ implique $x = 0$, alors elle est dite semi modulaire.
Le couple (X, ρ) est appelé espace pseudomodulaire (resp. modulaire).

Définition 1.7.2. *Si ρ est une pseudomodulaire (resp. modulaire) sur X, alors*

$$X_\rho = \{x \in X, \lim_{\alpha \to 0} \rho(\alpha x) = 0\}$$

est appelé espace pseudomodulaire (resp. espace modulaire).

A la pseudomodulaire ρ, on associe les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} X_\rho^* &= \{x \in X,\ \rho(\alpha x) < +\infty, \text{ pour un } \alpha > 0\}, \\ \overline{X}_\rho &= \{x \in X,\ \rho(x) < +\infty\}, \end{aligned}$$

où X_ρ et X_ρ^* sont des sous espaces linéaires de X, et $\overline{X}_\rho$ est un sous ensemble convexe de X. D'autre part, les inclusions suivantes ont toujours lieu :

$$\overline{X}_\rho \subset X_\rho^* \subset X \quad , \quad X\rho \subset X_\rho^* \subset X.$$

L'égalité $X_\rho = X_\rho^*$ a lieu si ρ est une pseudomodulaire convexe.

1.7.1 Propriétés essentielles de la modulaire

Nous aurons besoin de plusieurs propriétés sur les espaces modulaires. Leur démonstration est empruntée de référence à [48].

1. $\rho(\alpha x) \leq \rho(x), \quad$ pour $\ |\alpha| \leq 1$.
2. $\rho\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i)$ pour $\alpha_i \geq 0, \ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
3. Si ρ est s-convexe, $0 < s \leq 1$, alors $\rho\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^s \rho(x_i)$ pour $\alpha_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^s = 1$.

On définie sur l'espace pseudomodulaire (resp. modulaire) (X, ρ) la fonctionnelle suivante :

$$|x|_\rho = \inf\left\{u > 0, \ \rho\left(\frac{x}{u}\right) \leq u\right\}.$$

Cette fonctionnelle est une $F-$pseudonorme (resp. $F-$norme) sur X_ρ. On rappelle qu'une $F-$pseudonorme (resp. $F-$norme) est une fonctionnelle satisfaisante aux axiomes suivants :

1. $|x|_F = 0$ si $x = 0$ (resp. $|x|_F = 0$ ssi $x = 0$),
2. $|x|_F = |-x|_F$, si X est réel et $|x|_F = |x\exp(i\theta)|_F$, si X est comlexe,
3. $|x+y|_F \leq |x|_F + |y|_F$,
4. Si$\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$, et si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est une suite dans X_F telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - x|_F = 0$ pour un certain $x \in X$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n x_n - \alpha x|_F = 0.$$

Lorsque la pseudomodulaire (resp. la modulaire) est convexe, on définit sur X_ρ une seconde pseudonorme(norme) :

$$\|x\|_\rho^s = \inf\{u > 0, \ \rho\left(\frac{x}{u^{\frac{1}{s}}}\right) \leq 1\}.$$

Notons que $\|x\|_\rho = \|x\|_\rho^1$, pour $s = 1$. En plus des axiomes de la F-pseudonorme, cette pseudonorme vérifie la propriété d'homogénéité

$$\|\lambda x\|_\rho = |\lambda| \,.\, \|x\|_\rho \,.$$

1.7.2 La convergence dans les espaces pseudomodulaires

1. Une suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset (X,\rho)$ est dite convergente au sens de la pseudo-modulaire (modulaire) ρ ou $\rho - convergente$ vers $x \in X$ et on écrit $x_n \xrightarrow{\rho} x$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho\left(k\left(x_n - x\right)\right) = 0$ pour un certain $k > 0$.
2. Une suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset (X,\rho)$ est dite convergente au sens de la norme si $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(k(x_n - x)) = 0$, $\forall k > 0$.
3. On dit que la suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset (X,\rho)$ de Cauchy au sens de la modulaire ρ ou $\rho-$Cauchy lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que les inégalités : $n \geq n_0,\ m \geq n_0$ entraînent $\rho\left(x_n - x_m\right) \leq \varepsilon$.
4. L'espace (X,ρ) est dit pseudo-modulaire (modulaire) fortement complet ou $\rho-$fortement complet lorsqu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour toute suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ $\rho-$Cauchy, il existe $x \in (X,\rho)$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho\left(\alpha\left(x_n - x\right)\right) = 0$.

1.7.3 Propriétés élémentaires de convergence modulaire

1. Si $x_n \xrightarrow{\rho} x$ et $y_n \xrightarrow{\rho} y$, alors $x_n + y_n \xrightarrow{\rho} x + y$.
2. Si $x_n \xrightarrow{\rho} x$ et λ une constante, alors $\lambda x_n \xrightarrow{\rho} \lambda x$.

Remarque 1.7.3. *La $\rho-$convergence est en général une propriété moins forte que la convergence en norme (la $\|x\|_\rho - convergence$.*

Théorème 1.7.4. *[48] Soit ρ est une pseudo-modulaire sur X. Si $x \in X_\rho$ et $(x_n)_{n\geq 1} \subset X_\rho$, nous avons alors l'équivalence*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_\rho = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \rho(k(x_n - x)) = 0, \forall k > 0.$$

Théorème 1.7.5. *[48] Si ρ est une pseudomodulaire convexe sur X, alors*

$$\|x\|_\rho > 1 \Longrightarrow \rho\left(x\right) \geq \|x\|_\rho \,.$$

1.7.4 Notions topologiques dans les espaces modulaires

Une topologie sur X_ρ peut être introduite de la manière suivante : Les ensembles $V_\varepsilon = \left\{x \in X_\rho,\ \rho\,(kx) < \varepsilon\right\}$, où $k > 0$, forment une base de voisinage de zero. Cette topologie et en fait est équivalente à celle induite par la F-norme $|.|_\rho$ en considérant les ensembles $B\,(x_0, \varepsilon) = \left\{x \in X_\rho,\ |x_n - x_0|_\rho < \varepsilon\right\}$ pour $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X_\rho$ comme ouverts élémentaires.
Soit maintenant ρ une pseudo-modulaire sur X et A une partie de X_ρ.

— A est dite $\rho-$fermé si $\forall x_n \in$ et $x_n \xrightarrow{\rho} x$ alors $x \in A$.
— A est dit relativement compact si pour toute suite $x_n \in A$, on peut extraire une sous suite $\rho-$convergente vers $x \in X_\rho$.
— A est dit compact si pour toute suite $x_n \in A$, on peut extraire une sous suite $\rho-$convergente vers $x \in A$.
— La fermeture de A notée $\overline{A}^\rho$ est le plus petit ensemble fermé contient A.
— Si $\overline{A}^\rho = X$, alors A est dit ρ dense dans X_ρ.

Théorème 1.7.6. *[48] Soit ρ est une pseudomodulaire sur X et $A \subset X_\rho$. Alors on a :*

1. *A est $\rho-$fermé si et seulement si $\overline{A}^\rho = A$.*

2. *Si A est $\rho-$fermé, alors il est fermé par rapport à la pseudonorme $\|x\|_\rho$.*

3. *$A \subset \overline{A}^{\|x\|_\rho} \subset \overline{A}^\rho$.*

1.7.5 Exemples d'espace modulaire

1. L'exemple le plus simple d'espaces modulaires est l'espace normé $(X, \|.\|)$.

2. Les espaces classiques de Lebesgue $L^p(G)$, $p \geq 1$, G intervalle de $\mathbb{R}$. La modulaire convexe n'est rien d'autre que

$$\rho(f) = \int_G |f|^p \, d\mu,$$

la norme $\|.\|_\varphi$ coïncide avec la norme usuelle de $L^p(G)$ $\|.\|_{L^p}$, $p \geq 1$

$$\|f\|_{L^P} = \left(\int_G |x|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \inf\left\{k > 0,\ \int_G \left|\frac{x}{k}\right|^p d\mu \leq 1\right\} = \|f\|_\rho .$$

3. Les espaces $S_\ell^p - p.p.$, $W^p - p.p.$ et $B^p - p.p.$ munis des fonctionnelles convexes

$$\begin{aligned}
\rho_{S_\ell^p}(f) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \|f(t)\|^p \, d\mu, \\
\rho_{W^p}(f) &= \lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \|f(t)\|^p \, d\mu, \\
\rho_{B^p}(f) &= \limsup_{T\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|f(t)\|^p d\mu.
\end{aligned}$$

Sont des espaces (pseudo)modulaires et les (pseudo)normes correspondantes coïcident avec les (pseudo)normes : $\|.\|_{S_\ell^p}$, $\|.\|_{W^p}$ et $\|.\|_{B^p}$ respectivement.

4. D'autres exemples d'espaces modulaires (espaces du type Musielak-Orlicz) seront présentés dans la section suivante :

1.8 Espaces de Musielak-Orlicz

Soit G un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note par $\mathscr{M}(G)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$mesurables définies de G à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.8.1 Fonctions de Musielak-Orlicz

Les espaces de Musielak-Orlicz sont construits à partir d'une fonction génératrice φ, soumise à des condition appropriées :

Définition 1.8.1. *On appelle fonction de Musielak-Orlicz, une fonction continue φ définie sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$ satisfaisant aux axiomes suivants :*

1. $\varphi(t,0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t,u)$ *est convexe par rapport à* $u \in [0,+\infty[$ *et* $\lim_{u\to\infty} \varphi(t,u) = +\infty$, *c'est à dire* φ *est une fonction de Young par rapport à la variable* u.

   Si de plus φ vérifie les conditions suivantes :

$$\lim_{u\to 0} \frac{\varphi(t,u)}{u} = 0 \textit{ et } \lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(t,u)}{u} = +\infty,$$

alors elle est dite $N-$fonction.

Cette fonctionnelle peut être mise sous la forme

$$\varphi(t,u) = \int_0^{|u|} p(t,\tau)\, d\tau,$$

où p est la dérivée à droite de φ, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.8.2 (Exemples de fonctions de Musielak-Orlicz)**.** *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont des fonctions de Musielak-Orlicz :*

1. $\varphi(t,u) = f(t).|u|$ *avec f une fonction continue sur $\mathbb{R}$,*
2. $\varphi(t,u) = |u|^{p(t)}$, $1 < p(t) < +\infty$,
3. $\varphi(t,u) = |\Psi(u)|^{p(t)}$*, où p est une fonction continue, croissante, définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $[1,+\infty[$ et Ψ est une fonction de Young sans paramètre.*

1.8.2 La condition$-\triangle_2$

Une fonction de Musielak-Orlicz sera dite vérifier la condition$-\triangle_2$ lorsqu'il existe une constante $k \geq 1$ et une fonction h mesurable, positive telles que $\varphi(t,2u) \leq k\varphi(t,u)$ presque pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u \geq h(t)$.

Définition 1.8.3. *Si pour tout $u > 0$ et $A \in \Sigma$, avec $\mu(A) < \infty$, on a $\int_A \varphi(t,u)\, d\mu < \infty$, alors la fonction φ est dite localement integrable.*

Soit maintenant φ une fonction de Musielak-Orlicz. On définit sur $M(G)$ une fonctionnelle ρ_φ de la manière suivante :

$$\rho_\varphi(f) = \int_G \varphi(t, |f(t)|)\, d\mu.$$

Cette fonctionnelle est une modulaire sur $M(G)$ dite modulaire de Musielak-Orlicz. On appellera espace de Musielak-Orlicz, l'espace modulaire $L^\varphi(G)$ donné par :

$$L^\varphi(G) = \left\{ f \in \mathscr{M}(G),\ \lim_{\lambda \to 0} \rho_\varphi(\lambda f) = 0 \right\}.$$

Cet espace peut être caractérisé d'une autre manière

$$L^{\varphi}(G) = \left\{ f \in \mathscr{M}(G),\ \rho_{\varphi}(\lambda f) < +\infty, \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$

A la modulaire ρ_{φ}, on associe les ensembles suivant :

$$\begin{array}{rcl} \overline{L}^{\varphi}(G) & = & \left\{ f \in \mathscr{M}(G),\ \rho_{\varphi}(f) < +\infty \right\}, \\ E^{\varphi}(G) & = & \left\{ f \in \mathscr{M}(G),\ \rho_{\varphi}(\lambda f) < +\infty,\ \forall \lambda > 0 \right\}. \end{array}$$

Il est clair que nous avons les inclusions suivantes :

$$E^{\varphi}(G) \subset \overline{L}^{\varphi}(G) \subset L^{\varphi}(G).$$

On peut munir $L^{\varphi}(G)$ de la norme $\|.\|_{\varphi}$ dite de Luxemburg :

$$\|f\|_{\varphi} = \inf\left\{ k > 0,\ \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1 \right\}.$$

Théorème 1.8.4. *[54] Si φ une fonction de Musielak-Orlicz, localement integrable, alors les assertions suivantes sont équivalents*

1. $\overline{L}^{\varphi}(G) = L^{\varphi}(G)$.

2. $E^{\varphi}(G) = L^{\varphi}(G)$.

3. *φ vérifie la condition$-\triangle_2$.*

4. *La convergence modulaire est équivalente à la convergence au sens de la norme.*

1.9 Exemples d'espaces de type Musielak-Orlicz

Soit φ une fonction de Musielak-Orlicz. On définit sur $L^{\varphi}_{loc}(\mathbb{R})$ le sous espace de fonctions $\varphi-$localement intégrales, i.e. le sous espace des fonctions Lebesgue mesurables dans $\mathbb{R}$ telles que pour chaque compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $\lambda_K > 0$ pour lequel $\int_K \varphi(t, \lambda_K |f(t)|)dt < +\infty$.

Soient les fonctionnelles dites (pseudo)modulaires,

$$\begin{aligned}
\rho_{S_\ell^\varphi}(f) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi(t,|f(t)|)\,d\mu, \\
\rho_{W^\varphi}(f) &= \lim_{\ell\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi(t,|f(t)|)\,d\mu, \\
\rho_{B^\varphi}(f) &= \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t,|f(t)|)\,d\mu,
\end{aligned}$$

auxquelles on associe les espaces (pseudo)modulaires

$$\begin{aligned}
S_\ell^\varphi(\mathbb{R}) &= \{f \in L_{loc}^\varphi(\mathbb{R}) : \lim_{\alpha \to 0} \rho_{S_\ell^\varphi}(\alpha f) = 0\}, \\
W^\varphi(\mathbb{R}) &= \{f \in L_{loc}^\varphi(\mathbb{R}) : \lim_{\alpha \to 0} \rho_{W^\varphi}(\alpha f) = 0\}, \\
B^\varphi(\mathbb{R}) &= \{f \in L_{loc}^\varphi(\mathbb{R}) : \lim_{\alpha \to 0} \rho_{B^\varphi}(\alpha f) = 0\},
\end{aligned}$$

appelées respectivement espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz, Weyl-Musielak-Orlicz et Besicovitch-Musielak-Orlicz.
Si G désigne l'un de ces trois espaces. On peut munir G de la norme $\|.\|_G$ dite de Luxemburg :

$$\|f\|_G = \inf\left\{k > 0,\ \rho_{G^\varphi}\left(\frac{f}{k}\right) \le 1\right\}.$$

CHAPITRE

2

Géométrie des espaces de Banach

Sommaire

2.1 Introduction

Ce chapitre est destiné à fixer quelques notations et les outils fondamentaux en géométrie des espaces de Banach. On parlera essentiellement de la stricte convexité, de l'uniforme convexité et de quelques propriétés intermédiaires à ces deux notions : la H-propriété, la "midpoint" convexité locale, l'uniforme convexité dans toute direction, la locale uniforme convexité. Ce chapitre est achevé par la présentation d'un exemple d'application de la géométrie des espaces de Banach. Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{E}$ désigne un espace de Banach dont la norme sera notée $\|.\|$. L'ensemble $B_{\mathbb{E}}(x,r) = \{y \in \mathbb{E}, \|x-y\| < r\}$ est la boule ouverte centrée en $x \in \mathbb{E}$ de rayon $r > 0$. Dans le cas où $r = 1$, on notera simplement $B(\mathbb{E})$ la boule unité. La sphère unité, i.e les éléments de norme 1, sera quant à elle notée $S(\mathbb{E})$.
Pour la présentation de ce chapitre, on s'est largement inspiré de [42] et [57].

2.2 Notions de convexité

2.2.1 Espace strictement convexe

La classe des espaces strictement convexes est définie comme suit :

Définition 2.2.1 (J. A. Clarkson, 1936). $\mathbb{E}$ *est dit strictement convexe (SC) si*

$$\forall x, y \in S(\mathbb{E}), \ x \neq y, \ \forall t \in]0,1[, \ \|tx + (1-t)y\| < 1.$$

La stricte convexité est une propriété géométrique locale de la boule unité, signifiant qu'aucun segment $[a,b]$, $a \neq b$, ne peut être contenu dans la sphère. Autrement dit un espace normé $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est dit strictement convexe, lorsque

Théorème 2.2.2 (N. I. Akhiezer et M. G. Krein, 1938). $\mathbb{E}$ *est SC ssi*

$$\forall x, y \in S(\mathbb{E}), \ \|x - y\| > 0 \Rightarrow \|x + y\| < 2.$$

Nous avons d'autres caractérisations de la stricte convexité.

Définition 2.2.3. *Une norme $x \mapsto \|x\|$ sur un espace de Banach est dite strictement convexe si pour tout $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x + y\| = 2$, on a nécessairement $x = y$.*

Théorème 2.2.4. $\mathbb{E}$ *est dit strictement convexe si sa norme est strictement convexe.*

Définition 2.2.5. *Soit C un sous espace convexe de l'espace $\mathbb{E}$. le point z de C est dit point extremal pour C si pour tout $z = tx + (1-t)y$, pour un $t \in [0,1]$ et certains x, y dans C on a : $x = y$.*

Théorème 2.2.6. $\mathbb{E}$ *est strictement convexe si et seulement si chaque point z avec $\|z\| = 1$ de la boule unité fermée de $\mathbb{E}$ est un point extremal.*

Démonstration : Supposons $\mathbb{E}$ est strictement convexe. Montrons que chaque point z, $\|z\| = 1$ est un point extremal de la boule unité fermée de $\mathbb{E}$. Si l'assertion est fausse, alors il existe z_0, $\|z_0\| = 1$, qui n'est pas un point extremal de la boule unité fermée de $\mathbb{E}$, et ainsi

$$z_0 = tx_0 + (1-t)y_0$$

où $t \in [0,1]$ et x_0, y_0, dans la boule unité fermée de $\mathbb{E}$.
On a $\|x_0 + y_0\| = 2$. En effet, dans le cas contraire nous obtenons $\|x_0 + y_0\| < 2$ et

$$\begin{aligned}
1 = \|z_0\| &= \|tx_0 + (1-t)y_0\| \\
&= \|t[tx_0 + (1-t)y_0] + (1-t)[tx_0 + (1-t)y_0]\| \\
&= \|t^2 x_0 + t(1-t)(x_0 + y_0) + (1-t)^2 y_0\| \\
&< t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Contradiction. Ce qui donne $\|x_0 + y_0\| = 2$. Ceci implique que $x_0 = y_0$
Inversement, supposons que $\|z\| = 1$ est un point extremal de la boule unité fermée de

$\mathbb{E}$. Nous montrons que cela implique la stricte convexité de $\mathbb{E}$. Soient x et y dans $\mathbb{E}$ tels que
$\|x\| = \|y\| = 1$,
$\|x+y\| = 2$.
Le point $z = \frac{1}{2}(x+y)$ a la propriété $\|z\| = 1$. Comme z est un point extremal et donc $x = y$. D'où la stricte convexité de $\mathbb{E}$. $\square$

2.2.2 Espace uniformément convexe

La classe des espaces uniformément convexes a été introduite par J. A, Clarkson (1936). L'uniforme convexité est une propriété géométrique de la norme. Elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente. Par exemple les espaces ℓ_p^n, pour $1 < p < \infty$, sont uniformément convexes, alors que ℓ_1^n et ℓ_∞^n ne le sont pas. Or tous ces espaces sont isomorphes en tant qu'espaces de même dimension finie.

Définition 2.2.7. *$\mathbb{E}$ est dit uniformément convexe (UC) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\|x\| = \|y\| = 1$ vérifiant $\|x-y\| \geq \varepsilon$, on a :*

$$\|x+y\| \leq 2[1-\delta(\varepsilon)].$$

Nous donnons maintenant des formulations équivalentes de cette notion qui peuvent s'avérer utiles.

Théorème 2.2.8. *[57] $\mathbb{E}$ est dit uniformément convexe si et seulement si pour toutes suites (x_n), (y_n) dans $\mathbb{E}$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $\|x_n\| \to 1$,
2. $\|y_n\| \to 1$,
3. $\lim \|x_n + y_n\| = 2$.

on a :

$$\lim(x_n - y_n) = 0.$$

Il est évident que ceci est équivalent à la formulation suivante :

Théorème 2.2.9. *$\mathbb{E}$ est dit uniformément convexe si et seulement si pour toutes suites (x_n), (y_n) dans $\mathbb{E}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$,
2. $\lim \|x_n + y_n\| = 2$.

on a :

$$\lim(x_n - y_n) = 0.$$

Démonstration :

1. **Conditions suffisantes :** Supposons que les suites x_n et y_n ont les propriétés (1) et (2) et la suite $(x_n - y_n)$ ne converge pas vers 0. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite d'entiers n_k telle que
$$\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \geq \varepsilon_0.$$
Comme $\mathbb{E}$ est supposé uniformément convexe, donc il existe $\delta(\varepsilon_0) > 0$ tel que
$$\|x_{n_k} + y_{n_k}\| \leq 2[1 - \delta(\varepsilon_0)]$$
ceci contredit la propriété (2).
2. **Conditions nécessaires :** Supposons que $\mathbb{E}$ satisfait aux conditions de théorème et $\mathbb{E}$ n'est pas uniformément convexe. Alors il existe $\varepsilon > 0$, et pour tout $\delta = \frac{1}{n}$ il existe deux suites x_n et y_n telles que
   a- $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$,
   b- $2 = \|x\| + \|y\| \geq \|x_n + y_n\| \geq 2[1 - \frac{1}{n}] \Rightarrow \lim \|x_n + y_n\| = 2$,
   c- $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$.
   Le point **c** contredit l'hypothèse.

□

À partir de la définition d'un espace uniformément convexe, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2.10. *Un espace de Banach uniformément convexe est strictement convexe.*

Théorème 2.2.11 (W. L. Bynum, 1971)**.** *Soit φ une fonction strictement convexe, strictement croissante et continue sur $[0,2]$.*
$\mathbb{E}$ est dit uniformément convexe si et seulement si pour toutes fonction φ comme ci-dessus avec $\varphi(1) = 1$, pour tout $t \in [0,1]$,
$$a(t) = \inf\{\varphi(\|x+ty\|) + \varphi(\|x-ty\|) - 2 : \|x\| = \|y\| = 1\}$$
est strictement positive.

Le théorème suivant donne une propriété importante des convexes fermés dans un espace uniformément convexe.

Théorème 2.2.12. *[57] Soit $\mathbb{E}$ un espace uniformément convexe et C un ensemble fermé, borné et convexe de $\mathbb{E}$. Alors C a un élément unique u_0 tel que*
$$\|u_0\| = \inf\{\|u\| : u \in C\}.$$

Un résultat fondamental dû à Milman-Pettis affirme que tout espace de Banach uniformément convexe est reflexif. Ce résultat est souvent utile pour établir la réflexivité dans les espaces de Banach.

Théorème 2.2.13 (Milman-Pettis)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe est reflexif.*

Définition 2.2.14 (J. A. Clarkson, 1936). *Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $0 < \varepsilon \leq 2$, le module de convexité de $\mathbb{E}$, noté $\delta_{\mathbb{E}}$, est défini par*

$$\delta_{\mathbb{E}}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|, \quad x, y \in S(\mathbb{E}), \quad \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

$\mathbb{E}$ est uniformément convexe si $\delta_{\mathbb{E}}(\varepsilon) > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0,2]$.

2.2.3 Certaines généralisations de l'uniforme convexité

La généralisation des espaces uniformément convexes peut être considérée comme l'étude des propriétés intermédiaires à la stricte convexité et l'uniforme convexité. Dans ce qui suit nous donnons certaines de ces généralisation comme par exemple, l'uniforme convexité locale, l'uniforme convexité dans toute direction , la" midpoint" locale uniforme convexité , ces propriétés s'avèrent aussi importante dans les applications.

1. **La locale uniforme convexité**

   Définition 2.2.15 (A.R. Lovaglia, 1955). *$\mathbb{E}$ est dit localement uniformément convexe (LUC) si pour un $\varepsilon > 0$ donné et $x \in \mathbb{E}$, $\|x\| = 1$, il existe $\delta(x,\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{E}$, $\|y\| = 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$, on a alors l'inégalité suivante :*

   $$\|x-y\| \leq 2[1-\delta(x,\varepsilon)].$$

   Définition 2.2.16 (A. R. Lovaglia, 1955). *Soit une fonction $\delta_{\mathbb{E}} :]0,2] \times S(\mathbb{E}) \to [0,1]$ définie par*

   $$\delta_{\mathbb{E}}(\varepsilon, x) = \inf\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\| : y \in S(\mathbb{E}), \ \ \|x-y\| \geq \varepsilon\right\},$$

   $\delta_{\mathbb{E}}$: module de convexité locale de $\mathbb{E}$.
   $\mathbb{E}$ est dit localement uniformément convexe si

   $$\delta_{\mathbb{E}}(\varepsilon, x) > 0, \quad \forall \varepsilon \in]0,2], \ \forall x \in S(\mathbb{E}).$$

   Nous avons aussi la caractérisation séquentielle de la *LUC*.

   Théorème 2.2.17. *[42] $\mathbb{E}$ est localement uniformément convexe si et seulement si pour chaque $x \in S(\mathbb{E})$ et chaque suite $y_n \in S(\mathbb{E})$ (ou $B(\mathbb{E})$) tels que $\frac{1}{2}(\|x+y_n\|) \to 1$, on a*

   $$\|y_n - x\| \to 0.$$

2. **La "midpoint" uniforme convexité locale**

   Définition 2.2.18 (K. W. Aderson, 1960). *$\mathbb{E}$ est dit "midpoint" localement uniformément convexe ($MLUC$) si pour tout x dans $\mathbb{E}$ et x_n, y_n deux suites de $\mathbb{E}$ telles que*

   $$\|x\| = 1, \quad \lim \|x_n\| = \lim \|y_n\| = 1, \ \ et \ \ \lim \|2x - (x_n + y_n)\| = 0,$$

   alors

   $$\lim \|x_n - y_n\| = 0.$$

Théorème 2.2.19 (R. E. Megginson,1984). *[42]. $\mathbb{E}$ est "midpoint" localement uniformément convexe si et seulement si toute boule fermée B dans $\mathbb{E}$ est un ensemble de Chebyshev approximativement compact, i.e. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\exists! y \in B$ tel que $d(x,B) = d(x,y)$.*

3. **L'uniforme convexité dans toute direction**

Définition 2.2.20 (A. L. Galkavi, 1962). *Un espace de Banach $\mathbb{E}$ est dit uniformément convexe dans toute direction $(UCED)$ si pour tout $z \neq 0$ dans $\mathbb{E}$ et x_n, y_n deux suites de $\mathbb{E}$ telles que*

$$\lim \|x_n\| = \lim \|y_n\| = 1 \quad \lim \|x_n + y_n\| = 2 \quad x_n - y_n = a_n z,$$

alors

$$\lim a_n = 0.$$

Définition 2.2.21 (A. L. Galkavi, 1962). *Soit une fonction $\delta_{\mathbb{E}} :]0,2] \times (\mathbb{E} \setminus \{0\}) \to [0,1]$ définie par :*

$$\delta_{\mathbb{E}}(\varepsilon, \to z) = \inf\left\{1\text{-}\left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\| : x,y \in S(\mathbb{E}), \|x-y\| \geq \varepsilon,\ x-y = \alpha z\right\},$$

$\delta_{\mathbb{E}}$ *: module de convexité directionnelle de $\mathbb{E}$.*

$\mathbb{E}$ *est dit uniformément convexe dans toute direction si*

$$\delta_{\mathbb{E}}(\varepsilon, \to z) > 0, \quad \forall \varepsilon \in]0,2],\ \forall z \in S_{\mathbb{E}}.$$

L'uniforme convexité dans toute direction est aussi caractérisée comme suit

$$\forall x_n,\ z \in \mathbb{E}, \|x_n\| \to 1,\ \|x_n + z\| \to 1 \text{ et } \|2x_n + z\| \to 2 \text{ implique } z = 0.$$

4. **La $k-$convexité**

Définition 2.2.22 (K. Fan & I. Glicksberg, 1958). *Soit $k \geq 2$ un entier. L'espace $\mathbb{E}$ est dit $k-$convexe (kC) si toute suite (x_n) dans $\mathbb{E}$ vérifiant*

$$\lim_{n_1, n_2, \ldots, n_k \to \infty} \left\| k^{-1} \sum_{j=1}^{k} x_{n_j} \right\| = 1$$

est de Cauchy.

5. **La $H-$propriété**

Définition 2.2.23. *Si $x_n \rightharpoonup x$ ($\rightharpoonup$ désigne la convergence pour la topologie faible $\sigma(\mathbb{E}, \mathbb{E}^*)$) et $\|x_n\| \to \|x\| = 1$ implique $x_n \to x$ en norme alors on dit que x est un $H-$point de $B(\mathbb{E})$. Si tout point $x \in S(\mathbb{E})$ est un $H-$point de $B(\mathbb{E})$ on dit que $\mathbb{E}$ possède la $H-$propriété ou la propriété de Radon-Riesz ou bien Kadec klee.*

6. **La $k-$ uniforme convexité**

Définition 2.2.24 (I. Glicksberg et al., 1958). *$\mathbb{E}$ est dit k-uniformément convexe (k-UC) si pour toute suite x_n dans $\mathbb{E}$ avec $\|x_n\| = 1$ et*
$\lim\limits_{n_i \to \infty} \frac{1}{k}(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}) = 1$, *alors*

$$\lim(x_n - x_m) = 0.$$

k est un entier ≥ 2.

Proposition 2.2.25. *[42] Tout espace de Banach $\mathbb{E}$ localement uniformément convexe, possède la H-propriété*

Démonstration : Supposons $\mathbb{E}$ est LUC et pour toute suite x_n dans $\mathbb{E}$ et $x \in \mathbb{E}$ tels que $\|x_n\| \to \|x\| = 1$ et $x_n \rightharpoonup x$
On a : $x_n \rightharpoonup x$, donc pour toute $F \in \mathbb{E}^*$, on a $F(x_n)$ converge vers $F(x)$ de la linéarité de F on peut écrire

$$F(\frac{1}{2}(x_n + x)) = \frac{1}{2}F(x_n) + \frac{1}{2}F(x) \to F(x).$$

Donc,

$$\frac{1}{2}(x_n + x) \rightharpoonup x.$$

On utilise la semi-continuité inférieure faible de la norme. Il vient que

$$\|x\| \leq \liminf \|\frac{1}{2}(x_n + x)\| \leq \liminf(\frac{1}{2}\|x_n\| + \frac{1}{2}\|x\|) = \|x\|.$$

Donc,

$$\|\frac{1}{2}(x_n + x)\| \to 1,$$

comme $\mathbb{E}$ est LUC de la caractérisation séquentielle de la LUC on a $\|x_n - x\| \to 0$, et donc $\mathbb{E}$ possède la $H-$propriété. □

Proposition 2.2.26. *[42]*
— *Tout espace uniformément convexe est localement uniformément convexe.*
— *Tout espace localement uniformément convexe est strictement convexe.*

Le lien entre les différentes propriétés de convexité d'un espace de Banach est donnée par la Figure 2.1.

2.3 Exemple d'application de la géométrie des espaces de Banach

Dans cette section, nous présentons un exemple d'application de la géométrie des espaces de Banach dans le problème de recherche de la meilleure approximation :
Meilleure approximation. Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach, C un sous-ensemble de $\mathbb{E}$ et x un élément dans $\mathbb{E}$. Si il existe y dans C tel que

$$\|x - y\| = \inf \|x - c\| : c \in C.$$

Alors y est appelé une meilleure approximation de x dans C, noté par $y \in \pi(x \setminus C)$. La correspondance multivoque $P_C : x \to \pi(x \setminus C)$ est appelée une projection métrique. En particulier, si P_C est univoque, il est alors appelée meilleur approximation, notée $\pi(. \setminus C)$.

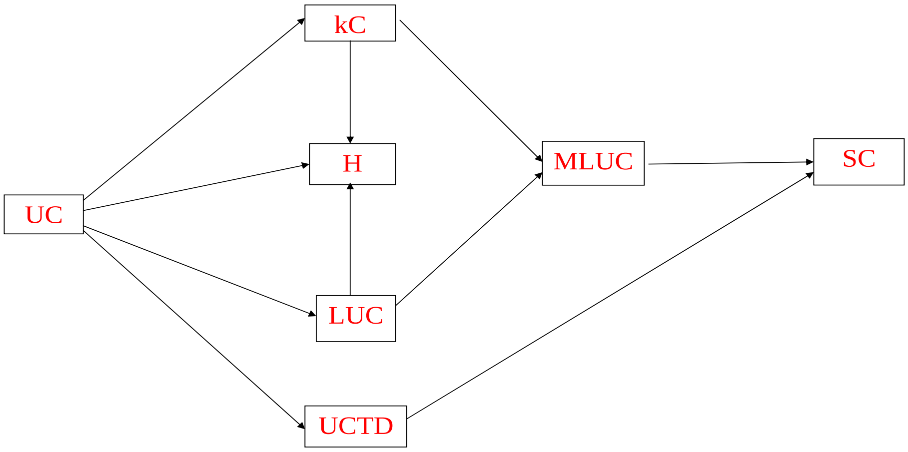

FIGURE 2.1 – Le lien entre les propriétés de convexité.

1. Si C n'est pas faiblement compact, on peut avoir $\pi(x \setminus C) = \emptyset$ pour un $x \in \mathbb{E} \setminus C$.
2. Si C est faiblement compact, alors $\pi(x \setminus C) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.
3. Si $\mathbb{E}$ est un espace de Banach reflexif et C est convexe fermé alors $\pi(x \setminus C) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.
4. Si $\mathbb{E}$ est un espace de Banach reflexif et strictement convexe et C est convexe fermé alors $\pi(x \setminus C) \neq \emptyset$ est réduit à un seul élément.

Théorème 2.3.1 (Théorème de Doob, [17]). *Soit* (Ω, Σ, P) *un espace probabilisé,* (Σ_n) *une suite de* $\sigma-$*algèbre dans* Σ*,*

$$\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \ldots \subset \Sigma_\infty = \overline{\bigcup_n \Sigma_n}$$

ou

$$\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \subset \ldots \supset \Sigma_\infty = \bigcap \Sigma_n.$$

Alors, pour chaque variable aléatoire β *dans* $L^2(\Omega)$*,*

$$\|E(\beta \setminus \Sigma_n) - E(\beta \setminus \Sigma_\infty)\|_{L^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Où $E(\beta \setminus \Sigma_n)$ est l'espérance conditionnelle de β sachant Σ_n.
En outre, il est bien connu que $E(\beta \setminus \Sigma_n) = \pi(\beta \setminus C_n)$, où $C_n = \{x \in L^2(\Omega)$: x est $\Sigma_n -$ *mesurable*$\}$, et $C_\infty = \bigcup_n C_n$ lorsque $C_1 \subset C_2 \ldots$ tandis que $C_\infty = \bigcap_n C_n$ quand $C_1 \supset C_2 \ldots$
Le théorème suivant est une généralisation du théorème Doob.

Théorème 2.3.2. *Soit $\mathbb{E}$ un espace reflexif strictement convexe possède la H-propriété. Alors pour tout ensemble convexe fermé $C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_\infty = \overline{\bigcup_n C_n}$ ou $C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_\infty = \bigcap C_n$ dans $\mathbb{E}$ et toute $x \in \mathbb{E}$, on a :*

$$\|\pi(x \setminus C_n) - \pi(x \setminus C_\infty)\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Démonstration : 1. Si $C_1 \subset C_2 \subset ... \subset C_\infty$, on a

$$\|x - \pi(x \setminus C_1)\| \geq \|x - \pi(x \setminus C_2)\| \geq ... \geq \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|,$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \|x - \pi(x \setminus C_n)\| \geq \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|.$$

Comme $\pi(x \setminus C_\infty) \in C_\infty$, on peut trouver une suite u_n dans C_n telle que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \pi(x \setminus C_\infty),$$

ce qui implique que $\|x - \pi(x \setminus C_n)\| \leq \|x - u_n\|$. Par passage à la limite, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x - \pi(x \setminus C_n)\| \leq \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|$. Ce qui signifie

$$\lim_{n \to +\infty} \|x - \pi(x \setminus C_n)\| = \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|.$$

$\mathbb{E}$ est reflexif. De plus la suite $\{\pi(x \setminus C_n)\}$ est bornée. En effet,

$$\|\pi(x \setminus C_n\| \leq \|x - \pi(x \setminus C_n)\| + \|x\| \leq \|x - \pi(x \setminus C_1)\| + \|x\|.$$

Donc, il existe un sous-suite $\{\pi(x \setminus C_{n_k}\}$ de la suite $\{\pi(x \setminus C_n\}$ faiblement convergente vers u $(\pi(x \setminus C_{n_k}) \rightharpoonup u)$.
Comme C_∞ est convexe fermé, il est faiblement fermé, on déduit $u \in C_\infty$.
Par conséquent,

$$\|x - u\| \leq \lim_k \|x - \pi(x \setminus C_{n_k})\| \leq \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|.$$

En utilisant la strictement convexe de $\mathbb{E}$, on obtient $\pi(x \setminus C_\infty) = u$. Finalement, comme $\mathbb{E}$ vérifie la $H-$propriété, on déduit $\pi(x \setminus C_{n_k}) \to \pi(x \setminus C_\infty)$.

2. Maintenant, nous supposons $C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_\infty$.
la suite $\{\pi(x \setminus C_n)\}$ est bornée. Alors, il existe une sous-suite $\{\pi(x \setminus C_{n_k}\}$ de la suite $\{\pi(x \setminus C_n\}$ faiblement convergente vers $v \in C_\infty$, par la stricte convexité de $\mathbb{E}$ et $\|x - v\| \leq \lim\limits_k \|x - \pi(x \setminus C_{n_k})\| \leq \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|$, on déduit $\pi(x \setminus C_\infty) = v$. Si $\lim\limits_k \|x - \pi(x \setminus C_{n_k})\| \leq \|x - \pi(x \setminus C_\infty)\|$. Par la $H-$propriété de $\mathbb{E}$ on obtient

$$\pi(x \setminus C_{n_k}) \to \pi(x \setminus C_\infty).$$

□

Deuxième partie

Partie contribution

CHAPITRE 3

Propriétés structurelles de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques

Sommaire

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de compléter l'étude de la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques $B^\varphi - p.p.$ introduite initialement dans [55] et reprise dans [23]. Rappelons que l'étude faite dans [55] porte sur la caractérisation de la stricte convexité et de l'uniforme convexité de l'espace $B^\varphi - p.p.$ muni de la norme de Luxemburg. La définition de la presque périodicité considérée est celle obtenue via l'approximation par des polynômes trigonométriques généralisés au sens d'une norme de type Luxemburg $\|.\|_{B^\varphi}$, dite norme de Besicovitch-Musielak-Orlicz. Dans [23], les auteurs se sont intéressés à l'étude de deux propriétés topologiques (réflexivité et dualité) et d'une propriété géométrique (stricte convexité) de l'espace $B^{\varphi}-p.p.$ muni d'une norme du type Orlicz. Notre démarche dans ce chapitre consiste à :

1. établir une caractérisation de la classe $B^{\varphi}-p.p.$ du même type que celle obtenue par Danilov dans [25].
2. établir un résultat d'approximation des fonctions de $B^{\varphi}-p.p.$ par des suites de polynômes de Bochner-Fejèr. Ce dernier résultat nécessite une hypothèse supplémentaire sur la la fonction de Musielak φ dite la τ-bornitude.
3. étudier d'autres propriétés de convexité de l'espace $B^{\varphi}-p.p.$ muni de la norme de Luxemburg, intermédiaires à la stricte convexité et l'uniforme convexité. Nous avons démontré que la locale uniforme convexité (LUC), l'uniforme convexité dans toute direction (UCED) et la H-propriété sont toutes équivalentes à la stricte convexité dans $B^{\varphi}-p.p.$, muni de la norme de Luxemburg. Ce résultat généralise celui obtenu dans le cadre des espace de Besicovitch-Orlicz [7, Theorem 1].

3.2 Présentation de l'espace Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques $B^{\varphi}-p.p.$

3.2.1 Définitions et notations

Nous considérons une classe restreinte de fonctions de Musielak-Orlicz
Soit donc $\varphi : \mathbb{R}\times[0,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ une fonction continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ vérifiant :

1. $\forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t,u)=0, \quad \text{ssi} \quad u=0,$
2. $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t,u)$ est une fonction convexe par rapport à $u\in[0,+\infty[$,
3. $\forall u\in[0,+\infty[,\ \varphi(t,u)$ est une fonction périodique par rapport à $t\in\mathbb{R}$, la période τ est fixée indépendante de $u\in[0,+\infty[$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\tau=1$.
4. Pour tout $\alpha>0$, $\phi(\alpha)=\inf_{t\in\mathbb{R}}\{\varphi(t,\alpha)\}$ est strictement positive.

On note par $L^{\varphi}_{loc}(\mathbb{R})$ le sous espace de fonctions $\varphi-$localement intégrales, i.e. le sous espace des fonctions Lebesgue mesurables dans $\mathbb{R}$ ($\mathscr{M}(\mathbb{R})$) telles que pour chaque compact $K\subset\mathbb{R}$, il existe $\lambda_K>0$ pour lequel $\int_K\varphi(t,\lambda_K|f(t)|)dt<+\infty$.
la fonctionelle

$$\begin{aligned}\rho_{B^{\varphi}} : L^{\varphi}_{loc}(\mathbb{R}) &\longrightarrow [0,+\infty]\\ f &\longrightarrow \rho_{B^{\varphi}}(f)=\limsup_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,|f(t)|)dt,\end{aligned} \tag{3.1}$$

est une pseudomodulaire convexe [48].
On définit l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz associé à cette pseudomodulaire par

$$\begin{aligned}B^{\varphi}(\mathbb{R}) &= \{f\in L^{\varphi}_{loc}(\mathbb{R}) : \lim_{\alpha\to 0}\rho_{B^{\varphi}}(\alpha f)=0\},\\ &= \{f\in L^{\varphi}_{loc}(\mathbb{R}) : \rho_{B^{\varphi}}(\alpha f)<0,\ \text{ pour un certain } \alpha>0\}.\end{aligned}$$

L'espace $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ est muni naturellement de la (pseudo)norme de Luxemburg

$$\|f\|_{B^{\varphi}}=\inf\{k>0:\rho_{B^{\varphi}}(\frac{f}{k})\leq 1\},\qquad f\in B^{\varphi}(\mathbb{R}).$$

Sous la norme de Luxemburg, $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.
Notons par $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés , i.e.,

$$\mathscr{A}=\Big\{P_n(t)=\sum_{j=1}^{j=n}a_je^{i\lambda_jt},\ a_j\in\mathbb{C},\lambda_j\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

En considérant la fermeture de l'ensemble $\mathscr{A}$ relativement à la pseudonorme $\|.\|_{B^{\varphi}}$, on obtient une nouvelle classe de fonctions presque périodiques appelée espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques notée $B^{\varphi}-p.p.$,

$$\begin{aligned}B^{\varphi}-p.p. &= \{f\in B^{\varphi}(\mathbb{R}):\exists f_n\in\mathscr{A},\forall k>0,\lim_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(k(f_n-f))=0\}\\ &= \{f\in B^{\varphi}(\mathbb{R}):\exists f_n\in\mathscr{A},\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_{B^{\varphi}}=0\}.\end{aligned}$$

La fermeture de l'ensemble $\mathscr{A}$ relativement à la pseudomodulaire $\rho_{B^{\varphi}}(.)$ permet de définir une classe plus large de fonctions presque périodiques appelée espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques notée $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$

$$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.=\{f\in B^{\varphi}(\mathbb{R}):\exists f_n\in\mathscr{A},\exists k_0>0,\lim_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(k_0(f_n-f))=0\},$$

on a clairement les inclusions suivantes :

$$B^{\varphi}-p.p.\subseteq\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.\subseteq B^{\varphi}(\mathbb{R}).$$

Si $\varphi(t,.)=|.|$, on note respectivement les espaces par $B^1(\mathbb{R})$ et $B^1-p.p.$. La notation ρ_1 correspond à la pseudomodulaire associée. Si en plus la fonction de Musielak-Orlicz satisfait à la condition : pour chaque $c>0$ il existe un $u_0>0$ pour lequel $\frac{\varphi(t,u)}{u}\geq c$ pour $u\geq u_0$ et $t\in\mathbb{R}$ [48] on obtient les inclusions : $B^{\varphi}-p.p.\subseteq B^1-p.p.$
Un résultat fondamental concernant les fonctions $B^{\varphi}-p.p.$ est le fait que, si $f\in B^{\varphi}-p.p.$ alors $\varphi(.,|f(.)|)\in B^1-p.p.$ [47]. Cette propriété garantit l'existence de la limite (3.1).

Définition 3.2.1. *[47] On dit que φ vérifie la condition-$\Delta_2^{B^1}$ ($\varphi\in\Delta_2^{B^1}$) s'il existe $k>1$ et une fonction non négative mesurable h telle que $\rho_{B^1}(h)<+\infty$ et $\varphi(t,2u)\leq k\varphi(t,u)+h(t)$ pour tout $u\geq 0$ et $\mu-p.p.\ t\in[0,1]$.*

On dit que φ vérifie la condition-$\nabla_2^{B^1}$ ($\varphi\in\nabla_2^{B^1}$) si sa fonction complémentaire ψ donnée par la formule

$$\psi(t,u)=\sup_{v\geq 0}\{uv-\varphi(t,v)\},\quad \text{pour } t\in\mathbb{R}\ \text{ et } u\geq 0$$

vérifie la condition $\Delta_2^{B^1}$.

Remarque 3.2.2. *Citons le fait important suivant [47] : φ satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$ si et seulement si φ satisfait la condition $\Delta_2^{L^1}$, c'est-à dire il existe $k>0$ et un fonction positive h avec $\int_0^1 h(t)dt<+\infty$ telle que*

$$\varphi(t,2u)\leq k\varphi(t,u)+h(t),\ \mu-p.p\ \ t\in[0,1]\ et\ u\geq 0.$$

Remarque 3.2.3. 1. *En vertu de l'hypothèse $\Phi(\alpha)=\inf_{t\in\mathbb{R}}\{\varphi(t,\alpha)\}$, on déduit l'injection continue suivante*

$$B^{\varphi}-p.p.\hookrightarrow B^{\Phi}-p.p. \tag{3.2}$$

puisque Φ est une fonction convexe qui ne s'annule qu'en 0. On obtient en conséquence l'injection suivante

$$B^{\varphi}-p.p.\hookrightarrow B^{1}-p.p.. \tag{3.3}$$

2. *Notons que sans l'hypothèse de périodicité de la fonction de Musielak-Orlicz φ, l'injection (3.3) a lieu aussi moyennant la condition suivante donnée par Musielak (voir [50], page 91) : pour tout $C>0$ il existe une constance $u_0>0$ telle que $\frac{\varphi(t,u)}{u}\geq C$ pour $u\geq u_0$ et $t\in\mathbb{R}$, cette dernière peut se réécrire comme suit :*

$$\lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in\mathbb{R}}\frac{\varphi(t,u)}{u}=+\infty.$$

3. *Observons aussi le fait important suivant :la fonctionelle $f\mapsto\|f\|_{B^{\varphi}}$ n'est pas une norme sur $B^{\varphi}-p.p.$. (c'est une semi-norme). En effet, pour toute fonction $f\in B^{\varphi}-p.p.$ et toute fonction $g\in L^{\varphi}(\mathbb{R})$, on a*

$$\|f\|_{B^{\varphi}}=\|f+g\|_{B^{\varphi}}$$

puisque $\|g\|_{B^{\varphi}}=0$. En particulier, on a $L^{\varphi}(\mathbb{R})\subset B^{\varphi}-p.p.$.

La relation (3.3) permet d'associer à toute fonction $f\in B^{\varphi}-p.p.$ une série de Bohr-Fourier formelle :
Pour tout $f\in B^1p.p.$, on appelle transformée de Bohr de f
l'application

$$\lambda\to a(\lambda,f)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)e^{-i\lambda t}dt=\lim_{n\to+\infty}a(\lambda,P_n),$$

où P_n est une suite de polynôme de trigonométrique approximante de f. On appelle spectre de $f\in B^1p.p.$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$\sigma(f)=\{\lambda\in\mathbb{R}:a(\lambda,f)\neq 0\}.$$

Pour tout $f\in B^1-p.p.$, les propriétés suivantes sont vérifiées
- $\sigma(f)\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}\sigma(P_n)$,
- $\lim_{|\lambda|\to+\infty}a(\lambda,f)=0$,

— $\sigma(f)$ est une partie au plus dénombrable,
— $\sigma(f)=\phi \Longleftrightarrow a(\lambda,f)=0 \Longleftrightarrow f=0.$

Les éléments de $\sigma(f)$ sont dits exposants de Fourier de f. La série de Bohr-Fourier associée à $f\in B^1-p.p.$ est définie de la façon suivante :

$$f(x)\sim \sum_{\lambda\in\sigma(f)} a(\lambda,f)e^{i\lambda x}.$$

Les questions concernant la convergence de la série de Bohr-Fourier ne sont pas considérées dans le cadre de cette thèse.

3.3 Caractérisation des fonctions de $B^{\varphi}-p.p.$

Danilov [25] a considéré la classe $B^p-p.p.$ $(p\geq 1)$ dans le contexte des fonctions à valeurs dans un espace métrique (E,d) (séparable). Celles-ci ont été définies comme fermeture de l'ensemble des fonctions $S^p-p.p.$ au sens de la métrique de $B^p-p.p.$
En utilisant le théorème de Fréchet (voir par exemple [41]), l'espace métrique $(\mathbb{E},d)$ (séparable) peut isométriquement s'injecter dans un certain espace de Banach (séparable). Grâce à ce théorème, on peut, sans perte de généralité, supposer que $(\mathbb{E},\|.\|)$ est un espace Banach. Rappelons le résultat bien connu que lorsque $p=1$, la presque périodicité via l'approximation soit par des fonctions Stepanoff presque périodique, ou via des fonctions Bohr presque périodique ou même via des polynômes trigonométriques (au sens de la semi-norme de Besicovitch) sont toutes identiques.
On note par $\mathbb{E}'$ l'espace normé $\mathbb{E}$ lorsqu'il est muni de la métrique tronquée $\|.\|'=\min(1,\|.\|)$ et par $M_p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions localement $p-$intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}$. Pour une partie mesurable $A\subset\mathbb{R}$, soit

$$\overline{\mu}_B(A)=\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\mu(A\cap[-T,+T]). \tag{3.4}$$

la "sous-mesure" associée à l'ensemble A. Il est démontré dans [43] que $\overline{\mu}_B$ n'est pas une mesure car ne jouit pas de la propriété de la $\sigma-$additivité, ni de la propriété d'extraction. Nous disposons du contre exemple suivant :

Contre exemple 3.3.1. *Considérons les deux suites de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 1},\{g_n\}_{n\geq 1}$ de $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ définies par*

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \chi_{[-n,n]}(t), \\ g_n(t) &= n\chi_{[-n,n]}(t), \end{aligned}$$

étant donné $\overline{\mu}_B$ s'annule sur les ensembles de mesure finie par rapport à la mesure de Lebesgue μ. Nous avons

$$f_n \xrightarrow{\overline{\mu}} f \equiv 0 \text{ dans } B^{\varphi}(\mathbb{R}),$$

$$g_n \xrightarrow{\overline{\mu}} g \quad \equiv \quad 0 \;\; dans \; B^{\varphi}(\mathbb{R}),$$

du fait que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier n,

$$\overline{\mu}_B\{t \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = \overline{\mu}_B\left\{t \in \mathbb{R}, \chi_{[-n,n]} > \varepsilon\right\} = \overline{\mu}_B\{[-n,n]\} = 0.$$

Néomoins, aucune sous suite ne converge $\overline{\mu}_B.p.p.$ vers $f \equiv 0$. Plus précisément, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, nous avons $f_{\varphi(n)}$ converge vers 1, $\overline{\mu}_B.p.p$ sur $\mathbb{R}$ et $g_{\varphi(n)} \to \infty$, $\overline{\mu}_B.p.p.$.

Toutefois, nous disposons de la propiété de la croissance au sens de l'inclusion et de sous additivité pour les réunions finies. Pour plus de détails sur les propriétés de $\overline{\mu}_B$, nous renvoyons le lecteur à [55]. Un résultat important donné dans [25] porte sur la caractérisation de cette classe de fonctions ($B^p - p.p.$). En effet, soit $M_p^0(\mathbb{R},\mathbb{E})$ la partie de $M_p(\mathbb{R},\mathbb{E})$ des fonctions absolument $p-$intégrables au sens de $\overline{\mu}_B$, plus précisément : pour $f \in M_p(\mathbb{R},\mathbb{E})$, $p \geq 1$, on définit la quantité

$$\beta_p(f) = \lim_{\delta \to +0} \left(\sup_{\substack{A \subset \mathbb{R}, \\ \overline{\mu}_B(A) \leq \delta}} \overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \|f(t)\chi_A(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où $\chi_A(.)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Soit

$$M_p^0(\mathbb{R},\mathbb{E}) = \left\{f \in M_p(\mathbb{R},\mathbb{E}) : \beta_p(f) = 0\right\}.$$

On définit aussi la classe $B - p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$ des fonctions Besicovitch presque périodiques au sens de Danilov :

Définition 3.3.2. *Une fonction $f \in \mathscr{M}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite Besicovitch presque périodique au sens de Danilov (et on écrit $f \in B - p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ Stepanoff presque périodique telle que*

$$\overline{\lim_{T \to +\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \min\left(\|f(t) - f_\varepsilon(t)\|, 1\right) dt \leq \varepsilon.$$

Il s'agit bien de la presque périodicité au sens de Besicovitch lorsque la métrique de l'espace d'arrivée est tronquée par 1. Danilov a démontré que la classe $B - p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$ n'est autre que la fermeture de l'ensemble $u.p.p$ au sens de la topologie de la convergence en $\overline{\mu}_B$. Plus exactement :

Lemme 3.3.3. *$f \in B - p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$ si et seulement si pour tous $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe une fonction $f_{\varepsilon,\eta} \in \mathscr{A}$ telle que*

$$\overline{\mu}_B\left\{t \in \mathbb{R} : \left\|f(t) - f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\| > \varepsilon\right\} < \eta. \tag{3.5}$$

Ce lemme est donné sans démonstration dans [25]. On se propose de le démontrer ci-après.

Démonstration : Soient $\varepsilon>0$ et $\eta>0$. Soit aussi $f\in B-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$. Par définition, il existe une fonction $f_{\varepsilon,\eta}\in\mathscr{A}$ telle que

$$\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\min\left(\left\|f(t)-f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\|,1\right)dt\leq\varepsilon\eta.$$

On a alors d'une part

$$\overline{\mu}_B\left\{t\in\mathbb{R}:\left\|f(t)-f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\|>\varepsilon\right\}=\overline{\mu}_B\left\{t\in\mathbb{R}:\min\left(\left\|f(t)-f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\|,1\right)>\varepsilon\right\}$$

et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Markov, on obtient l'estimation suivante

$$\overline{\mu}_B\left\{t\in\mathbb{R}:\min\left(\left\|f(t)-f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\|,1\right)>\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon}\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\min\left(\left\|f(t)-f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\|,1\right)dt$$

d'où

$$\overline{\mu}_B\left\{t\in\mathbb{R}:\left\|f(t)-f_{\varepsilon,\eta}(t)\right\|>\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\eta=\eta.$$

Inversement, soit $\varepsilon>0$, f et f_ε sont tels que

$$\overline{\mu}_B\left\{t\in\mathbb{R}:\|f(t)-f_\varepsilon(t)\|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $Q_\varepsilon=\{t\in\mathbb{R}:\|f(t)-f_\varepsilon(t)\|>\varepsilon\}$. Notons par Q_ε^c le complémentaire de Q_ε. On a alors

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\min\left(\|f(t)-f_\varepsilon(t)\|,1\right)dt\\ \leq\;&\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{[-T,+T]\cap Q_\varepsilon}\min\left(\|f(t)-f_\varepsilon(t)\|,1\right)dt+\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{[-T,+T]\cap Q_\varepsilon^c}\min\left(\|f(t)-f_\varepsilon(t)\|,1\right)dt\\ \leq\;&\overline{\mu}_B(Q_\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

La démontration est ainsi achevée. □

Cette dernière propriété des fonctions de $B-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$ est à la base de la caractérisation suivante :

$$B^p-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})=B-p.p.\left(\mathbb{R},\mathbb{E}'\right)\cap M_p^0(\mathbb{R},\mathbb{E}).$$

Notons que les arguments utilisés par Danilov reposent aussi sur l'utilisation de l'approximation des fonctions $B^p-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})$ par leurs tronquées.
Dans ce qui suit, nous allons généraliser ce résultat au cadre des espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques introduits initialement dans [47] via l'approximation par des polynômes trigonométriques généralisés. Nous allons voir que cette généralisation ne requiert aucune condition supplémentaire sur la fonction de

Musielak-Orlicz. Commençons par introduire la classe $M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ des fonctions des fonctions absolument $\varphi-$intégrables au sens de $\overline{\mu}_B$: pour $f\in B^{\varphi}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, on définit la quantité

$$\beta_{\varphi}(f)=\lim_{\delta\to+0}\inf\left\{k>0,\ \sup_{\substack{A\subset\mathbb{R},\\ \overline{\mu}_B(A)\leq\delta}}\ \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{\|f(t)\chi_A(t)\|}{k}\right)\leq 1\right\}.$$

En utilisant les arguments utilisés par Hillmann, on peut facilement démontrer la reformulation suivante de $\beta_{\varphi}(f)$:

$$\beta_{\varphi}(f)=\lim_{\delta\to+0}\sup_{\substack{A\subset\mathbb{R},\\ \overline{\mu}_B(A)\leq\delta}}\inf\left\{k>0,\ \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{\|f(t)\chi_A(t)\|}{k}\right)\leq 1\right\}=\lim_{\delta\to+0}\sup_{\substack{A\subset\mathbb{R},\\ \overline{\mu}_B(A)\leq\delta}}\|f\chi_A\|_{B^{\varphi}}.$$

L'inégalité $\beta_{\varphi}(f)\leq\|f\|_{B^{\varphi}}$ est clairement satisfaite. On pose

$$M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})=\left\{f\in B^{\varphi}(\mathbb{R},\mathbb{E}):\beta_{\varphi}(f)=0\right\}.$$

La relation $\beta_p(f)=0$ signifie aussi que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout ensemble $A\subset\mathbb{R}$ vérifiant $\overline{\mu}_B(A)\leq\delta$, on a $\|f\chi_A\|_{B^{\varphi}}\leq\varepsilon$. Il est facile de voir que $L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{E})\subset M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Les fonctions de $B^{\varphi}-p.p.$ vérifient cette propriété au sens de la modulaire $\rho_{B^{\varphi}}$. En effet, rappelons le résultat donné dans [47, Preuve de la Proposition 1].

Proposition 3.3.4. *Soit $f\in B^{\varphi}-p.p.$ et $(f_n)_n\subset\mathscr{A}$ la suite approximante associée à f, alors $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, l'implication suivante est vérifiée*

$$\forall Q\subset\mathbb{R},\ \overline{\mu}_B(Q)\leq\delta\Longrightarrow\max\left(\rho_{B^{\varphi}}(f\chi_Q),\rho_{B^{\varphi}}(f_n\chi_Q)\right)\leq\varepsilon.$$

Comme conséquence directe de cette proposition, nous avons :

Corollaire 3.3.5. *Soit $f\in B^{\varphi}-p.p.$ et $(f_n)_n\subset\mathscr{A}$ la suite approximante associée à f, alors $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, l'implication suivante est vérifiée*

$$\forall Q\subset\mathbb{R},\ \overline{\mu}_B(Q)\leq\delta\Longrightarrow\max\left(\|f\chi_Q\|_{B^{\varphi}},\|f_n\chi_Q\|_{B^{\varphi}}\right)\leq\varepsilon.$$

Démonstration : Soit $\varepsilon>0$, par la Proposition 3.3.4, il existe $\delta>0$ et n_0 tel que : $\forall n\geq n_0$, $\forall Q\subset\mathbb{R},\overline{\mu}_B(Q)<\delta\Rightarrow\max\left(\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f}{\varepsilon}\chi_Q\right),\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f_n}{\varepsilon}\chi_Q\right)\right)\leq 1$, donc $\max\left(\|f\chi_Q\|_{B^{\varphi}},\|f_n\chi_Q\|_{B^{\varphi}}\right)\leq\varepsilon$. □

Grâce à ce corollaire nous pouvons affirmer l'inclusion suivante :

$$B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})\subset M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E}).$$

D'autre part, on a

$$B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})\subset B^{1}-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})\subset B-p.p.\left(\mathbb{R},\mathbb{E}'\right)$$

d'où l'inclusion

$$B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})\subset M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})\cap B-p.p.\left(\mathbb{R},\mathbb{E}'\right).$$

Inversement, soit $f\in M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})\cap B-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')$. Soit t_0 est tel que $\sup_{t\in[0,1]}\varphi(t,u)=\varphi(t_0,u)$, pour tout $u>0$. Pour $\varepsilon>0$ donné, soit $f_{\varepsilon}\in\mathscr{A}$ tel que

$$\overline{\mu}_B(Q_{\varepsilon})=\overline{\mu}_B\left\{t\in\mathbb{R}:u\|f(t)-f_{\varepsilon}(t)\|>\frac{\varepsilon}{2}\varphi^{-1}(t_0,1)\right\}<\delta$$

où $\delta>0$ est le réel donné par le fait que $f\in M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})$. On a alors d'une part

$$\max(\|f\chi_{Q_{\varepsilon}}\|_{B^{\varphi}},\|f_{\varepsilon}\chi_{Q_{\varepsilon}}\|_{B^{\varphi}})\leq\frac{\varepsilon}{4}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\rho_{B^{\varphi}}\left(u(f-f_{\varepsilon})\chi_{Q_{\varepsilon}^{c}}\right) &= \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,u\|f(t)-f_{\varepsilon}(t)\|)\chi_{Q_{\varepsilon}^{c}}(t)dt\\
&\leq \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{\varepsilon}{2}\varphi^{-1}(t_0,1)\right)\chi_{Q_{\varepsilon}^{c}}(t)dt\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\overline{\mu}_B(Q_{\varepsilon}^{c})\leq\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

u étant quelconque d'où l'en déduit que

$$\left\|(f-f_{\varepsilon})\chi_{Q_{\varepsilon}^{c}}\right\|_{B^{\varphi}}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

En utilisant les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|f-f_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}} &\leq \|(f-f_{\varepsilon})\chi_{Q_{\varepsilon}}\|_{B^{\varphi}}+\left\|(f-f_{\varepsilon})\chi_{Q_{\varepsilon}^{c}}\right\|_{B^{\varphi}}\\
&\leq \|f\chi_{Q_{\varepsilon}}\|_{B^{\varphi}}+\|f_{\varepsilon}\chi_{Q_{\varepsilon}}\|_{B^{\varphi}}+\left\|(f-f_{\varepsilon})\chi_{Q_{\varepsilon}^{c}}\right\|_{B^{\varphi}}
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\|f-f_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}}\leq\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

L'inclusion inverse $M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})\cap B-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E}')\subset B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})$ vient d'être démontrée. On vient donc de démontrer la caractérisation suivante :

Théorème 3.3.6. *Pour toute fonction de Musielak-Orlicz φ,*

$$B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathbb{E})=M_{\varphi}^{0}(\mathbb{R},\mathbb{E})\cap B-p.p.\left(\mathbb{R},\mathbb{E}'\right).$$

3.4 Approximation de Bochner-Fejèr dans $B^{\varphi} - p.p.$

Dans ce qui suit, nous décrivons brièvement la construction du polynôme de Bochner-Fejèr associé à une fonction $f \in B^q - p.p.$ $(q \geq 1)$ telle qu'elle présentée par G. Bruno et B. Grande [16]. Soit $f \in B^q - p.p$ avec $\sigma(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n, ...\}$. Alors il existe un polynôme trigonométrique P_ε tel que $\sigma(f) \cap \sigma(P_\varepsilon) \neq \emptyset$ et $\|P_\varepsilon - f\|_{B^q} < \varepsilon$. Rappelons le résultat suivant (voir par exemple Théorème 3, page 53 de [11] ou [16]), à tout $\varepsilon > 0$, correspond un entier positif N_ε et un nombre réel positif $\delta = \delta_\varepsilon < \pi$ tels que tout nombre réel $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant les N_ε inégalités Diophantines :

$$\left|\lambda_{j,\varepsilon}\tau\right| < \delta(mod 2\pi),\ j = 1, \ldots, N_\varepsilon,$$

est un $\varepsilon-$presque période de P_ε. au sens de Bohr. Ces dernières sont aussi équivalentes à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$\left|\lambda_{j,\varepsilon}\tau - 2k\pi\right| < \delta. \tag{3.6}$$

G. Bruno et B. Grande [16] ont notamment démontré que toute solution $\tau \in \mathbb{R}$ du système (3.6) est un $\varepsilon-$presque période de P_ε au sens de la (semi)-norme $\|.\|_{B^q}$.

Considérons le noyau de Fejèr d'ordre n défini comme suit :

$$F_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{nt}{2}\right)}{n\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si} \quad t \neq 2k\pi \\ n & \text{si} \quad t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Il est bien connu (voir par exemple [11]) que

$$F_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{-ikt}.$$

Ce noyau vérifie les propriétés importantes suivantes :

— $F_n(t) \geq 0,\ F_n(t) = F_n(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,$

— $\mathscr{M}(F_n) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F_n(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1,\ \forall n \geq 1.$

— $\forall \alpha \in]0, \pi],\ \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\pi} F_n(t)dt = 0.$

Toutes ces propriétés sont illustrées à travers la représentation graphique de la suite F_n :

Posons maintenant

$$\begin{aligned} F_{n,\varepsilon}(t) &= \prod_{j=1}^{N_\varepsilon} F_n(\lambda_{j,\varepsilon}t) = F_n(\lambda_{1,\varepsilon}t) \cdots F_n(\lambda_{N_\varepsilon,\varepsilon}t), \\ &= \sum_{k_1=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k_1|}{n}\right)\left(1 - \frac{|k_2|}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{|k_{N_\varepsilon}|}{n}\right) \times \end{aligned} \tag{3.7}$$

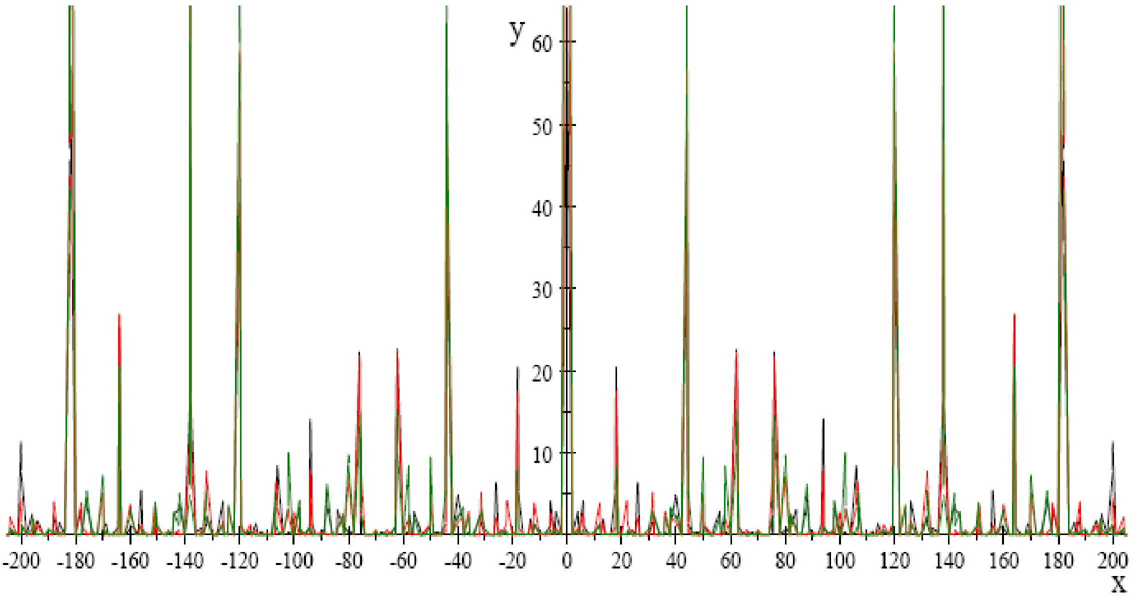

FIGURE 3.1 – Graphe du noyau de Fejèr d'ordre n, $F_n(t)$.

$$\exp\left(-i\left(\lambda_{1,\varepsilon}k_1+\lambda_{2,\varepsilon}k_2+\ldots+\lambda_{N_\varepsilon,\varepsilon}k_{N_\varepsilon}\right)t\right).$$

Les fonctions $F_{n,\varepsilon}(t)$ sont appelées "noyau composite Bochner-Fejèr". Notons que les coefficients de la somme (**??**) sont tous positifs et ne dépassent pas 1, $\mathscr{M}(F_{n,\varepsilon})\geq 1$, et les nombres $\lambda_{1,\varepsilon},\ \lambda_{2,\varepsilon},\ \ldots\lambda_{N_\varepsilon,\varepsilon}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}$ au sens suivant :
Soit $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots\}$ une famille dénombrable de nombres réels. On dit que les α_i, $i=1,2,\ldots$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}$ si, pour tout entier $p\geq 1$, les seuls rationnels $r_1,r_2,\ldots,r_p$ vérifiant l'équation :

$$r_1\alpha_{n_1}+r_2\alpha_{n_2}+\ldots+r_p\alpha_{n_p}=0$$

sont $r_1=r_2=\ldots.=r_p=0$.
Définissons ainsi

$$K_{n,\varepsilon}(t)=\frac{F_{n,\varepsilon}(t)}{\mathscr{M}(F_{n,\varepsilon})}.$$

La suite $\{K_{n,\varepsilon}(t)\}_n$ satisfait les propriétés suivantes :

i. $K_{n,\varepsilon}(t)\geq 0,\forall t\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},K_{n,\varepsilon}(t)=K_{n,\varepsilon}(-t)$,

ii. $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}K_{n,\varepsilon}(t)dt=1,\ \forall n\in\mathbb{N}$,

iii. Si $\Omega_\varepsilon=\left\{t\in\mathbb{R},\ \text{tel que. : }\left|\lambda_j t\right|\geq\delta(mod 2\pi),\ \text{pour au moins } j=1,\ldots,N_\varepsilon\right\}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{\Omega_\varepsilon}K_{n,\varepsilon}=0.$$

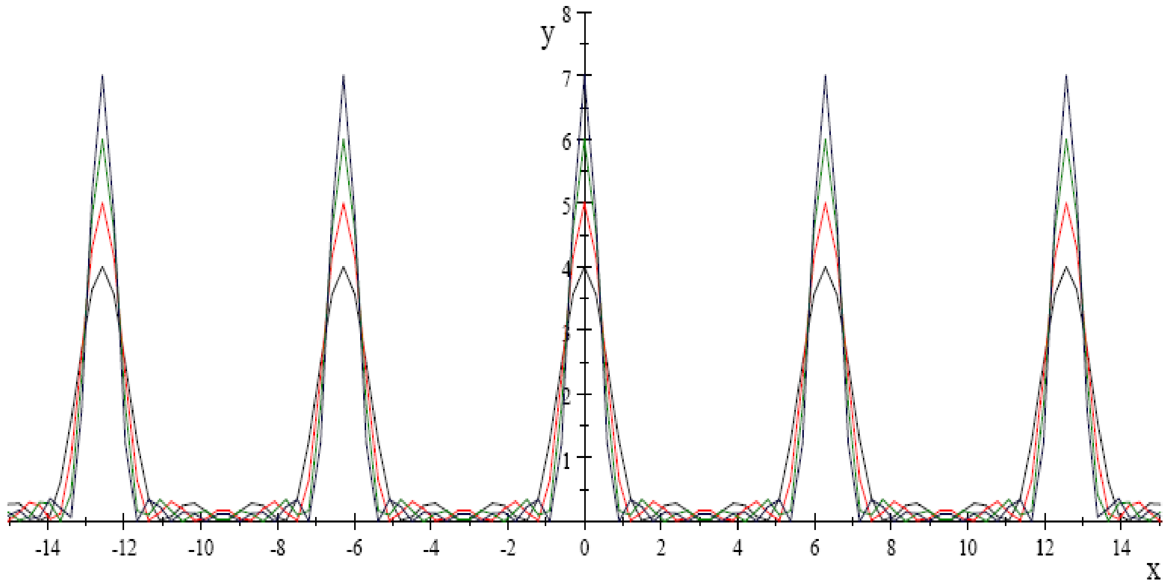

FIGURE 3.2 – Graphe du noyau de Bochner-Fejèr $K_{n,\varepsilon}(t)$ lorsque $n = 4,5$ et 6, et $\lambda_j \in \left\{1, \pi, \sqrt{2}\right\}$. .

Ci-après la représentation graphique de K_n lorsque $n = 4,5$ et 6, et $\lambda_j \in \left\{1, \pi, \sqrt{2}\right\}$.

Le polynôme de Bochner-Fejèr est ainsi donné par :

$$\begin{aligned} Q_{n,\varepsilon}(x) &= (K_{n,\varepsilon} * f)(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K_{n,\varepsilon}(t) f(x-t)dt \\ &= \sum_{\lambda\in\sigma(K_{n,\varepsilon})\cap\sigma(f)} a(\lambda, K_{n,\varepsilon})\, a(\lambda, f) \exp i\lambda x \end{aligned}$$

où $*$ désigne le produit de convolution en moyenne. Clairement, $Q_{n,\varepsilon}$ est un polynôme trigonométrique non nul, de plus $\sigma(Q_{n,\varepsilon}) \subset \sigma(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Il est démontré par G. Bruno et B. Grande [16] qu'il existe un nombre $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|Q_{n,\varepsilon} - f\|_{B^q} < C\varepsilon$$

pour tout $n < n_\varepsilon$, où C est une constante positive convenable.

Remarque 3.4.1. *Nous avons tenté de généraliser ce résultat aux cas des espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. A notre surprise, on s'est rendu compte que la définition de la presque périodicité de Bohr (via des $\varepsilon-$presque périodes) dans le cadre des espaces de Musielak-Orlicz requiert une propriété d'invariance par translation des espaces $B^{\varphi} - p.p.$, en d'autres termes, si $f \in B^{\varphi} - p.p.$, a-t-on la translatée f_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, dans $B^{\varphi} - p.p.$? La réponse est négative en général, il existe bien des espaces* *de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques $B^{\varphi}-p.p.$ qui ne sont pas stable par translation. C'est le cas par exemple des espaces de Lebesgue à exposants variables comme on le verra plus loin.*

Dans ce qui suit, on suppose toutes les fonctions sont à valeurs dans un espace normé $(E, \|.\|)$. La définition suivante est une adaptation de la définition 2.1 dans [16].

Définition 3.4.2. *Pour chaque $f \in B^{\varphi}-p.p.$ et pour chaque suite $(P_n)_n \subset \mathscr{A}$ convergente vers f, on définit la translatée de f_h, d'amplitude h, de la façon suivante*

$$T_h f(x) = f(x+h) = \lim_{n\to\infty} P_n(x+h).$$

On définit aussi l'accroissement de f correspondant à h par

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x+h) - P_n(x).$$

Notons que $T_h f$ et $\Delta_h f$ sont bien définis puisque les limite précédentes ne dépendent pas de la suite P_n qui représente $f \in B^{\varphi}-p.p.$.

Définition 3.4.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Un nombre $\tau \in \mathbb{R}$ est dite ε-presque période de $f \in B^{\varphi}-p.p$ au sens de $B^{\varphi}-p.p.$ si l'inégalité suivante*

$$\|\Delta_\tau f\|_{B^{\varphi}} = \inf\left\{k > 0, \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{\Delta_\tau f}{k}\right) \le 1\right\} \le \varepsilon$$

est vérifiée. Dans la section suivante, en s'inspirant des travaux [49], [36], [3], on donnera une condition suffisante (et nécessaire) sur φ, dite "$\tau-$bornitude" garantissant l'approximation des fonctions de $B^{\varphi}-p.p.$ par des suites de polynômes de Bochner-Fejèr. On répondra au passage à la question d'invariance par translation des espaces $B^{\varphi}-p.p.$, on montrera en particulier deux estimations importantes, à savoir

$$\begin{aligned} \|T_h f\|_{B^{\varphi}} &\le C_1 \|f\|_{B^{\varphi}}, \\ \left\|Q^f_{n,\varepsilon}\right\|_{B^{\varphi}} &\le C_2 \|f\|_{B^{\varphi}}, \end{aligned}$$

pour certaines constantes convenables dépendantes uniquement de φ.

3.4.1 La $\tau^{L^1}-$bornitude de la fonction de Musielak-Orlicz

Définition 3.4.4 ([50, définition 7.11 (page 37)]). *Une fonction périodique de Musielak-Orlicz φ est dite $\tau-$bornée (au sens de Musielak) s'il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que*

$$\varphi(t-v, u) \le k_1 \varphi(t, k_2 u) + H(t, v) \tag{3.8}$$

où la fonction $H : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est (mesurable) et 1-périodique par rapport à la première variable et tel que $h(v) = \int_{[0,1]} H(t,s)dt$ est bien définie et que $h_0 = \sup_{v\in\mathbb{R}} h(v) < +\infty$ et $h(v) \to 0$, lorsque $v \to 0^+$ et 1^-.

Illustrons d'abord le rôle et l'intérêt de cette condition dans les espaces $L^{\varphi}(\Omega)$ et $B^{\varphi}-p.p.$.
L'inégalité (3.8) pour une fonction φ de Musielak-Orlicz a été introduite par A. Kaminska [36] et par A. Kaminska et R. Płuciennik [35] comme condition nécessaire et suffisante pour que $\|f(.+h)-f(.)\|_{\varphi} \to 0$, lorsque $h \to 0$ pour $f \in L^{\varphi}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$. On exposera dans ce qui suit le résultat de A. Kaminska [36]. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, alors $A \pm h$ désigne l'ensemble $\{t \pm h : t \in A\}$.
L'opérateur translation $T_h f : \Omega \to E$ est défini comme suit

$$(T_h f)(t) = \begin{cases} f(t+h) & \text{si } t \in \Omega \cap (\Omega - h) \\ 0 & \text{ailleurs dans } \Omega, \end{cases}$$

pour toute fonction $f : \Omega \to E$ mesurable (i.e. $f \in \mathscr{M}(\Omega, E)$) et $h \in \mathbb{R}$.
Observons le fait important suivant :

$$\rho_{\varphi}(T_h f) = \int_{\Omega \cap (\Omega - h)} \varphi(t, \|f(t+h)\|)\, dt = \int_{\Omega \cap (\Omega + h)} \varphi(t-h, \|f(t)\|)\, dt = \rho_{\varphi_h}(f)$$

à partir duquel on déduit que :

1. pour tout $h \in \mathbb{R}$, ρ_{φ_h} est une modulaire convexe sur $\mathscr{M}(\Omega, \mathbb{E})$,
2. pour tout $f \in L^{\varphi}(\Omega)$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, $T_h f \in L^{\varphi_h}(\Omega \cap (\Omega + h))$,
3. $\|f\|_{\varphi_h} = \|T_h f\|_{\varphi}$, où $\|.\|_{\varphi_h}$ désigne la norme de Luxemburg générée par ρ_{φ_h},
4. La propriété la plus remarquable ici est le fait que les espaces de Musielak-Orlicz ne sont pas forcement invariants par translations, puisque si $f \in L^{\varphi}(\Omega)$, alors ces translatées $T_h f$ sont dans $L^{\varphi_h}(\Omega)$ mais pas forcément dans $L^{\varphi}(\Omega)$. [36] Bien entendu, ce problème se pose aussi dans tous les espaces du type Musielak-Orlicz, en particulier dans les sous espaces de fonctions presque périodique au sens de Bohr, où les fonctions translatées jouent un rôle primordiale.

Soit $\delta \geq 0$. A partir de la famille des modulaires $\left\{\rho_{\varphi_h}\right\}_{|h| \leq \delta}$, on définit une nouvelle modulaire convexe en posant

$$\rho_{\delta}(f) = \sup_{|h| \leq \delta} \rho_{\varphi_h}(f).$$

Comme $\rho_0(f) = \rho_{\varphi_0}(f) = \rho_{\varphi}(f)$, on a $\rho_{\varphi}(f) \leq \rho_{\delta}(f)$. L'espace modulaire associé à ρ_{δ} sera noté par $L_{\delta}(\Omega)$ et la norme de Luxemburg correspondante par $\|.\|_{\delta}$. On a donc

$$L_{\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^{\varphi}(\Omega),$$

de plus

$$\|f\|_{\delta} = \sup_{|h| \leq \delta} \|f\|_{\varphi_h} = \sup_{|h| \leq \delta} \|T_h f\|_{\varphi}$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{M}(\Omega, \mathbb{E})$. La notion de la $\tau-$bornitude est étroitement liée à la continuité en $\varphi-$moyenne.

Définition 3.4.5. *Une fonction $f \in L^{\varphi}(\Omega)$ est dite continue en $\varphi-$moyenne si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|T_h f - f\|_{\varphi} < \varepsilon \quad \text{pour } |h| < \delta.$$

Si φ est une fonction d'Orlicz, alors toutes les fonctions de l'espace d'Orcliz $L^{\varphi}(\Omega)$ sont continues en $\varphi-$moyenne (voir [56]).
Le théorème suivant dû à Kaminska donne une condition nécessaire et suffisante pour que les fonction de l'espace de Musielak-Orlicz $L^{\varphi}(\Omega)$ soient continues en $\varphi-$moyenne.

Théorème 3.4.6. *[36] Si $\mathbb{E}$ est séparable, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute fonction $f \in E^{\varphi}(\Omega)$ est continue en $\varphi-$moyenne.*
2. *La fonction de Musielak-Orlicz φ est $\tau^{L^1(\Omega)}-$bornée, i.e., ils existent des constantes δ et $c > 0$ et une famille de fonctions mesurables $g_h : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que l'inégalité*

$$\varphi(t-h,u) \leq \varphi(t,cu) + g_h(t), \tag{3.9}$$

est vérifiée pour tous $u \geq 0$, $t \in \Omega \cap (\Omega + h)$ pp, $h \in \mathbb{R}$ et

$$\sup_{|h|\leq\delta} \int_{\Omega} g_h(t)dt < +\infty.$$

3. *Ils existent des constantes $M, \delta > 0$ telles que pour tout $f \in M(\Omega, X)$,*

$$\|f\|_{\varphi} \leq \sup_{|h|\leq\delta} \|T_h f\|_{\varphi} \leq M\|f\|_{\varphi},$$

c'est à dire

$$L^{\varphi}(\Omega) = L_{\delta}(\Omega).$$

Exemple 3.4.7. *[36].*

1. *Dans 2.1.1 de [32] la famille $\aleph$ de fonctions $k : T \to [0, +\infty[$ telle que $k \in \aleph$ si et seulement si*

$$k(t_1 + t_2) \leq (1 + c_1|t_1|^{c_2})k(t_2)$$

est satisfaite pour tout t_1, $t_2 \in T$, où c_1, c_2 sont des constantes dépendantes de k. Les fonctions de $\aleph$ sont continues et la fonction

$$P_k(t) = \sup_{t_1} \frac{k(t_1 + t)}{k(t_1)}$$

appartient aussi à $\aleph$. Par conséquent, nous avons

$$k(t_1 + t_2) \leq P_k(t_1)k(t_2) \quad \text{pour tout } t_1, t_2 \in T \text{ et } P_k(0) = 1 \leq P_k(t)) \text{ Pour tout } t \in T.$$

Maintenant, il est facile de voir que la fonction

$$\phi(x,t) = \varphi(x)k(t),$$

où $\varphi : X \to [0,+\infty[$ est une N-fonction sans paramètre, $k \in \mathbb{N}$ satisfait la condition 2 du théorème 3.4.6 avec la fonction g_h est identiquement nulle.

2. *Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ donnée par*

$$\phi(x,t) = \varphi(x)^{p(t)},$$

où $\varphi : X \to [0,+\infty[$ est une N-fonction sans paramètre satisfait la condition Δ_2 et $p(t)$ est une fonction mesurable avec la propriété : $p(t) \geq 1$ pout tout $t \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{A}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$ tel que $p(t)$ est strictement monotone sur $\mathbb{A}$. Cette fonction ϕ ne vérifie pas la la condition 2 du théorème 3.4.6, en effet

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \varphi(x)^{p(t-h)-\varphi(nx)^{p(t)}} \right\} \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)^{p(t)} \left\{ \varphi(x)^{p(t-h)-p(t)} - I_n^{p(t)} \right\} = +\infty,$$

pour tout $t \in \mathbb{A} \bigcap \mathbb{A} + h$, $n \in \mathbb{N}$ et $h < 0$ si $p(t)$ est croissante et $h > 0$ si $p(t)$ est décroissante sur $\mathbb{A}$, où I_n est un nombre positif tel que $\varphi(nx) \leq I_n \varphi(x)$ pour x suffisamment grand dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.4.8. *Lorsque $\Omega = [0,1]$ (ou $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$) et la fonction de Musielak-Orlicz φ ainsi que la famille g_h donnée dans (3.9) sont 1−périodiques alors leur prolongements périodiques, notées respectivement $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{g}_h$, sont telles que :*

$$\widetilde{\varphi}(t-h,u) \leq \widetilde{\varphi}(cu,t) + \widetilde{g}_h(t), \tag{3.10}$$

est vérifiée pour tous $u \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ p.p., $h \in \mathbb{R}$ et

$$\sup_{|h|\leq\delta} \int_{[0,1]} \widetilde{g}_h(t)dt < +\infty.$$

Inversement, toute fonction de Musielak-Orlicz 1−périodique et $\tau^{L^1(\mathbb{R})}$−bornée, sa restriction à tout intervalle de longueur 1 reste $\tau^{L^1([0,1])}$−bornée. On conclut alors le théorème suivant :

Théorème 3.4.9. *Une fonction $f \in B^{\varphi} - p.p.$ est B^{φ}−continue, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|T_h f - f\|_{B^{\varphi}} < \varepsilon \quad \text{pour } |h| < \delta$$

si et seulement si φ est $\tau^{L^1([0,1])}$−bornée.

Démonstration : $\Longleftarrow$) La nécessité de la condition de $\tau^{L^1([0,1])}$−bornitude découle de l'injection isométrique $E^{\varphi}([0,1]) \hookrightarrow B^{\varphi} - p.p.$ (voir [47]), du Théorème 3.4.6 et de la Remarque 3.4.8.
$\Longrightarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, $f \in B^{\varphi} - p.p.$, il existe alors $P_{\varepsilon} \in \mathscr{A}$ tel que $\|f - P_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}} < \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, 2cd\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Les réels positifs c et d seront précisés plus loin. On sait que les polynômes trigonométriques sont uniformément continus, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $k > 0$ et pour tout pour $|h| < \delta$,

$$\|T_h P_{\varepsilon} - P_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \frac{1}{k} \varphi^{-1}\left(t_0, \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

où t_0 est tel que $\sup_{t\in[0,1]}\varphi(t,u)=\varphi(t_0,u)$, puisque φ est continue, et φ^{-1} est la fonction réciproque par rapport à la deuxième variable de φ (qui existe puisque φ est une fonction d'Orlicz par rapport à u pour chaque $t\in[0,1]$. D'où,

$$\begin{aligned}
\rho_{B^{\varphi}}\left(k\left(T_hP_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\right)\right) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,k\left\|P_{\varepsilon}(t+h)-P_{\varepsilon}(t)\right\|\right)dt\\
&\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,k\left\|T_hP_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\right\|_{\infty}\right)dt\\
&= \int_{0}^{1}\varphi\left(t,k\left\|T_hP_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\right\|_{\infty}\right)dt\\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\varphi\left(t,k\left\|T_hP_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\right\|_{\infty}\right)\\
&\leq \varphi\left(t_0,\varphi^{-1}\left(t_0,\frac{\varepsilon}{3}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Soit $\delta'>0$ le réel donné par la condition 3.10. Posons $d=\sup_{|h|\leq\delta'}\int_{[0,1]}\widetilde{g}_h(t)dt$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $d>1$.

$$\begin{aligned}
\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2dk}\left(T_hf-T_hP_{\varepsilon}\right)\right) &\leq \frac{1}{2d}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{1}{k}\left\|f(t+h)-P_{\varepsilon}(t+h)\right\|\right)dt\\
&= \frac{1}{2d}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t-h,\frac{1}{k}\left\|f(t)-P_{\varepsilon}(t)\right\|\right)dt\\
&\leq \frac{1}{2d}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{c}{k}\left\|f(t)-P_{\varepsilon}(t)\right\|\right)dt\\
&\quad+\frac{1}{2d}\int_{[0,1]}\widetilde{g}_h(t)dt.\\
&\leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{c}{k}(f-P_{\varepsilon})\right)+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d'où l'en déduit l'implication

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{c}{k}(f-P_{\varepsilon})\right)\leq 1\Longrightarrow\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2dk}\left(T_hf-T_hP_{\varepsilon}\right)\right)\leq 1$$

cette dernière signifie aussi

$$\left\|T_hf-T_hP_{\varepsilon}\right\|_{B^{\varphi}}\leq 2cd\left\|f-P_{\varepsilon}\right\|_{B^{\varphi}}$$

d'où l'en déduit que pour tout $|h|\leq\delta'$, on a $\left\|T_hf-T_hP_{\varepsilon}\right\|_{B^{\varphi}}\leq\frac{\varepsilon}{3}$.

Finalement, en choisissant $\eta=\min(\delta,\delta')$, on aura pour $|h|\leq\eta$

$$\begin{aligned}\|T_hf-f\|_{B^{\varphi}} &\leq \|T_hf-T_hP_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}}+\|T_hP_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}}+\|P_{\varepsilon}-f\|_{B^{\varphi}}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.4.10. *Toutes les fonctions de l'espace de **Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques** $B^{\varphi}-p.p.$ sont $B^{\varphi}-$continues.*

Démonstration : C'est immédiat puisque toutes les fonctions d'Orlicz sont $\tau^{L^1([0,1])}-$bornées. Si de plus $\varphi\in\Delta_2$, les fonctions de l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ sont aussi $B^{\varphi}-$continues. □

Dans ce qui suit, on adaptera la définition 3.4.4 au cas des espaces $B^{\varphi}-p.p.$.

Définition 3.4.11. *Une fonction périodique de Musielak-Orlicz φ est dite $h^{B^1}-$bornée s'il existe deux constantes $k_1,k_2>0$ telles que*

$$\varphi(t-v,u)\leq k_1\varphi(t,k_2u)+H(t,v) \tag{3.11}$$

où la fonction $H:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ est (mesurable) par rapport à la première variable et tel que $\sup_{v\in\mathbb{R}}h(v)=\sup_{v\in\mathbb{R}}\overline{\lim}_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{[-T,T]}H(t,v)dt=h_0<+\infty$.
Notons que dans cette définition, on a relaxé la condition de périodicité de H par rapport la première variable et on a aussi éliminé la condition $h(v)\to 0$, lorsque $v\to 0^+$ et 1^-.

Proposition 3.4.12. *(Inégalité auxiliaire dans $B^{\varphi}-p.p.$) Soit $f\in B^{\varphi}-p.p.$. Supposons que φ est $h^{B^1}-$bornée. Alors il existe une constante $C>0$ qui ne dépend que de φ telle que*

$$\left\|Q^f_{\varepsilon,n}\right\|_{B^{\varphi}}\leq C\|f\|_{B^{\varphi}}$$

pour toute suite de Bochner-Fejèr associée à f.

Démonstration : Nous avons par définition $Q^f_{\varepsilon,n}(t)=(f*K_{\varepsilon,n})(t)=\mathscr{M}_x(f(x+t)K_{\varepsilon,n}(x))$. Nous avons pour tout réel $k>0$

$$\begin{aligned}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{k}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{1}{k}\left\|\mathscr{M}_x(f(x+t)K_{\varepsilon,n}(x))\right\|\right)dt\\ &\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\mathscr{M}_x\left(\frac{1}{k}\|f(x+t)\|K_{\varepsilon,n}(x)\right)\right)dt\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Jensen à φ l'intérieur de $\int_{-T}^{+T}$, et le fait $\mathscr{M}_x(K_{\varepsilon,n}(x))=1$, on aura

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\mathscr{M}_x\left(\frac{1}{k}\|f(x+t)\|K_{\varepsilon,n}(x)\right)\right)dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\mathscr{M}_x\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dt\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\underline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Fatou, on aura

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\underline{\lim}_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)dx\right\}dt\\
&\leq \overline{\lim}_{T\to\infty}\underline{\lim}_{X\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2X}\int_{-T}^{+T}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt
\end{aligned}$$

à cette étape, on utilisera le théorème de Fubini après avoir fait le changement de variable suivant : $x=u$ et $x+t=v$, on aura donc

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_{T\to\infty}\underline{\lim}_{X\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{1}{2X}\int_{-T}^{+T}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt\\
&\leq \underline{\lim}_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}K_{\varepsilon,n}(u)\left(\overline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left\{\varphi\left(v-u,\frac{1}{k}\|f(v)\|\right)\right\}dv\right)du\\
&\leq \underline{\lim}_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}K_{\varepsilon,n}(u)\left(\overline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left\{k_1\varphi\left(v,\frac{k_2}{k}\|f(v)\|\right)\right\}dv+\overline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}H(v,u)dv\right)du\\
&\leq \overline{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left\{k_1\varphi\left(v,\frac{k_2}{k}\|f(v)\|\right)\right\}dv+\underline{\lim}_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}K_{\varepsilon,n}(u)\,h(u)du\\
&\leq k_1\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+h_0.
\end{aligned}$$

Si $h_0\leq 1$ et $k_1\leq 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2k}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right)\leq\frac{k_1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{h_0}{2}\leq\frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit que si $\left\{k>0,\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)\leq 1\right\}\subset\left\{k>0,\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2k}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right)\leq 1\right\}$ et donc

$$\left\|Q^f_{\varepsilon,n}\right\|_{B^{\varphi}}\leq 2k_2\|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Si $h_0 < 1$ et $k_1 > 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kk_1}\left(Q^{f}_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) + \frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit que si $\left\{k > 0, \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) \leq 1\right\} \subset \left\{k > 0, \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kk_1}\left(Q^{f}_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq 1\right\}$ et donc

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{B^{\varphi}} \leq 2k_2k_1 \|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Si $h_0 > 1$ et $k_1 < 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}\left(T_{\tau} f\right)\right) \leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) + \frac{1}{2}$$

d'où,

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{B^{\varphi}} \leq 2h_0k_2 \|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Finalement, si $h_0 > 1$ et $k_1 > 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}\left(Q^{f}_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) + \frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit que si $\left\{k > 0, \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) \leq 1\right\} \subset \left\{k > 0, \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}\left(Q^{f}_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq 1\right\}$ et donc

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{B^{\varphi}} \leq 2h_0k_1k_2 \|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Il suffit alors de poser $C = \max\Big(2k_2, 2k_1k_2, 2h_0k_2, 2h_0k_1k_2\Big)$, on obtient

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{B^{\varphi}} \leq C \|f\|_{B^{\varphi}}$$

□

Théorème 3.4.13. *Supposons que φ est h^{B^1}−bornée. A toute fonction $f \in B^{\varphi} - p.p.$ correspond un suite approximante de Bochner-Fejèr au sens de la norme $\|.\|_{B^{\varphi}}$.*

Démonstration : Soit P_{ε} un polynôme trigonométrique (ou même une fonction Bohr presque périodique) tel que

$$\|f - P_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}} \leq \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$$

où la constante C sera précisée ultérieurement. Soit $Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}$ le polynôme de Bochner-Fejèr associé à P_{ε}, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|P_{\varepsilon} - Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$

On exploitera l'inégalité triangulaire suivante

$$\begin{aligned}
\left\| f - Q^{f}_{\varepsilon,n} \right\|_{B^{\varphi}} &\leq \| f - P_{\varepsilon} \|_{B^{\varphi}} + \left\| P_{\varepsilon} - Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n} \right\|_{B^{\varphi}} + \left\| Q^{f}_{\varepsilon,n} - Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n} \right\|_{B^{\varphi}} \\
&\leq \| f - P_{\varepsilon} \|_{B^{\varphi}} + \left\| P_{\varepsilon} - Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n} \right\|_{\infty} + \left\| Q^{f-P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n} \right\|_{B^{\varphi}} \\
&\leq \| f - P_{\varepsilon} \|_{B^{\varphi}} + \left\| P_{\varepsilon} - Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n} \right\|_{\infty} + C \| f - P_{\varepsilon} \|_{B^{\varphi}}
\end{aligned}$$

d'où l'en déduit que $\left\| f - Q^{f}_{\varepsilon,n} \right\|_{B^{\varphi}} \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.
Dans les estimations précédentes, on a utilisé le fait que l'opérateur de Bochner-Fejèr est un opérateur linéaire, cette propriété est largement utilisée dans la littérature sans démonstration. Une démonstration détaillée de cette propriété se trouve dans la référence [4] □

Proposition 3.4.14. *Soit $f \in B^{\varphi}-p.p.$ telle que*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a(\lambda_n, f) \exp(i\lambda_n x).$$

Supposons que φ est $h^{B^1}-$bornée. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif N_{ε} et un nombre réel positif $\delta < \pi$ tels que tout nombre réel $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant les N_{ε} inequations Diophantines :

$$|\lambda_n \tau| < \delta \,(mod 2\pi), \qquad (n = 1, 2, \ldots, N_{\varepsilon})$$

est un $\varepsilon-$presque période de f au sens de $B^{\varphi}-p.p.$.

Pour la preuve de cette proposition, on a besoin de démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.4.15. *Soit $f \in B^{\varphi}-p.p.$. Supposons que φ est $h^{B^1}-$bornée. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de φ telle que*

$$\| T_{\tau} f \|_{B^{\varphi}} \leq C \| f \|_{B^{\varphi}}. \tag{3.12}$$

Démonstration : Soit $f \in B^{\varphi}-p.p.$. Nous avons pour tout réel $k > 0$

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{k}(T_{\tau} f)\right) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(t, \frac{1}{k} \| f(t+\tau) \|\right) dt.$$

On utilisera la $h^{B^1}-$bornitude de φ et le changement de variable suivant : $t + \tau = u$, on aura

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi\left(t, \frac{1}{k} \| f(t+\tau) \|\right) dt \\
\leq\; &\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} k_1 \varphi\left(u, \frac{k_2}{k} \| f(u) \|\right) du + \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} H(u,\tau) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= k_1\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2}{k}f\right)+\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}H(u,\tau)du \\ &\leq k_1\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2}{k}f\right)+h_0 \end{aligned}$$

Si $h_0 \leq 1$ et $k_1 \leq 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2k}(T_\tau f)\right)\leq \frac{k_1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{h_0}{2}\leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\|T_\tau f\|_{B^{\varphi}} \leq 2k_2\|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Si $h_0 < 1$ et $k_1 > 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kk_1}(T_\tau f)\right)\leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\|T_\tau f\|_{B^{\varphi}} \leq 2k_2k_1\|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Si $h_0 > 1$ et $k_1 > 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}(T_\tau f)\right)\leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\|T_\tau f\|_{B^{\varphi}} \leq 2h_0k_1k_2\|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Finalement, si $h_0 > 1$ et $k_1 < 1$, on aura

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}(T_\tau f)\right)\leq \frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{k_2 f}{k}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où,

$$\|T_\tau f\|_{B^{\varphi}} \leq 2h_0k_2\|f\|_{B^{\varphi}}.$$

Il suffit alors de poser $C=\max\Big(2k_2, 2k_1k_2, 2h_0k_2, 2h_0k_1k_2\Big)$, on obtient

$$\|T_\tau f\|_{B^{\varphi}} \leq C\|f\|_{B^{\varphi}}. \tag{3.13}$$

Preuve de la Proposition 3.4.14 Soit $\varepsilon > 0$, $f \in B^{\varphi}-p.p.$, il existe donc un polynôme trigonométrique P_ε tel que

$$\|f-P_\varepsilon\|_{B^{\varphi}} < \frac{\varepsilon}{2(C+1)},$$

où C est une constante positive qui sera précisée par la suite.

On pose

$$P_{\varepsilon}(x)=\sum_{n=1}^{N_{\varepsilon}} B_n \exp(i\lambda_n t),$$

et

$$d=\sum_{n=1}^{N_{\varepsilon}} \|B_n\|.$$

Soit un réel positif $\delta_1<\frac{\varphi^{-1}\left(t_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2d}$.
On définit un nombre réel $0<\delta<\pi$ par l'équation suivante

$$|\exp(i\delta)-1|=\delta_1.$$

Soit maintenant τ la solution des inequations

$$|\exp(i\lambda_n\tau)-1|<\delta_1. \quad (n=1,2,...,N_{\varepsilon})$$

Il est clair que l'inequation $|\lambda_n\tau|<\delta\,(mod 2\pi)$ est équivalente à l'inequation

$$|\exp(i\lambda_n\tau)-1|<|\exp(i\delta)-1|=\delta_1$$

On a :

$$\begin{aligned}
\rho_{B^{\varphi}}\Big(T_{\tau}P_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\Big) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\Big(t,\|P_{\varepsilon}(t+\tau)-P_{\varepsilon}(t)\|\Big)dt\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\left\|\sum_{n=1}^{N} B_n\exp(i\lambda_n t)(\exp(i\lambda_n\tau)-1)\right\|\right)dt\\
&\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\sum_{n=1}^{N}\|B_n\|\,|\exp(i\lambda_n\tau)-1|\right)dt\\
&\leq \int_0^1\varphi\Big(t,d\delta_1\Big)dt\\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\varphi\Big(t,d\delta_1\Big)\\
&\leq \varphi\left(t_0,\varphi^{-1}\left(t_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

D'où l'en déduit que

$$\|T_{\tau}P_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

On utilisera l'inégalité triangulaire, on aura

$$\|T_{\tau}f-f\|_{B^{\varphi}} \leq \|T_{\tau}f-T_{\tau}P_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}}+\|T_{\tau}P_{\varepsilon}-P_{\varepsilon}\|_{B^{\varphi}}+\|P_{\varepsilon}-f\|_{B^{\varphi}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (C+1)\|P_{\varepsilon}-f\|_{B^{\varphi}}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leq \frac{(C+1)\varepsilon}{2(C+1)}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3.5 Outils de convergence dans $B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R})$

Pour la suite de ce chapitre, on se placera dans le cas $\mathbb{E}=\mathbb{R}$.
Trois concepts de convergence peuvent-être définis dans l'espace $B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R})$.

- — La convergence en norme de Luxemburg.
- — La convergence modulaire.
- — La convergence au sens de la sous mesure $\overline{\mu}_B$ définie par la formule (3.4). Pour rappel, cette dernière se traduit comme suit :

Définition 3.5.1. *[43] Une suite $\{f_n\}\subset B^{\varphi}(\mathbb{R})$ est dite $\overline{\mu}_B-$ convergente vers $f\in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ lorsque, pour tout $\alpha>0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\mu}_B\Big\{x\in\mathbb{R}:|f_n(x)-f(x)|>\alpha\Big\}=0.$$

Remarque 3.5.2.

- — *La fonction d'ensemble $\overline{\mu}_B$ est nulle sur les ensembles de mesure finie par rapport à la mesure de Lebesgue μ.*
- — *Si $\{f_n\}_{n\geq1}$ et $\{g_n\}_{n\geq1}$ sont deux suites de fonctions mesurables, $\overline{\mu}_B-$convergentes vers f et g respectivement, alors pour tout nombres réels α et β la suite $\{\alpha f_n+\beta g_n\}$ est aussi $\overline{\mu}_B-$ convergente vers $\alpha f+\beta g$.*

Nous donnons ici quelques résultats techniques qui constituent les outils de travail dans cet espace.

Lemme 3.5.3 ([47], [46]).

(i) *Soit $\{f_n\}_{n\geq1}\subset B^{\varphi}(\mathbb{R})$ une suite de fonctions convergente au sens de la modulaire vers $f\in B^{\varphi}(\mathbb{R})$. Alors, $\{f_n\}_{n\geq1}$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers f.*

(ii) *Soit $\{f_n\}_{n\geq1}\subset B^{1}(\mathbb{R})$ une suite de fonctions $\overline{\mu}_B-$convergente vers $f\in B^{1}(\mathbb{R})$.* Supposons qu'il existe une fonction $g\in B^1-p.p.(\mathbb{R})$ *telle que* $\max(|f_n|,|f|)\leq g$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\rho_1(f_n)=\rho_1(f).$$

Lemme 3.5.4 ([47], [46]). *Soit $f\in B^{\varphi}-p.p.$. Alors*

1. *$\|f\|_{B^{\varphi}}\leq1$ si et seulement si $\rho_{B^{\varphi}}(f)\leq1$,*
2. *$\|f\|_{B^{\varphi}}=1$ si et seulement si $\rho_{B^{\varphi}}(f)=1$.*

Lemme 3.5.5. *[47] Soit $\varphi(t,u)$ strictement convexe par rapport à $u \geq 0$ et $\{f_n\},\{g_n\}$ deux suites de fonctions dans $B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R})$ telles que, pour un certain $r>0$, on a*

$$\rho_{B^{\varphi}}(f_n) \leq r, \quad \rho_{B^{\varphi}}(g_n) \leq r \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{1}{2}(f_n+g_n)\right) = r.$$

Alors, la suite $\{f_n-g_n\}_n$ est $\overline{\mu}_B$–convergente vers zéro.

Proposition 3.5.6 ([47], [46]). *Notons toujours par $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables dans $\mathbb{R}$, et $L^{\varphi}([0,1])$ l'espace usuel de Musielak-Orlicz*

$$L^{\varphi}([0,1]) = \{f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}) : \exists \lambda > 0, \int_0^1 \varphi(t, \lambda \ \ vert f(t)|)dt < +\infty\}.$$

Soit $f \in L^{\varphi}([0,1])$. Alors,

1. *Si $\widetilde{f}$ est l'extension périodique de f à $\mathbb{R}$ (avec une période $\tau = 1$), on a $\widetilde{f} \in \widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$*
2. *L'injection $i : (L^{\varphi}([0,1]), \|.\|_{L^{\varphi}}) \hookrightarrow (\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R}), \|.\|_{\varphi})$, $i(f) = \widetilde{f}$ est une isométrie.*

Lemme 3.5.7. *Soit $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{\mu}_B\{t \in \mathbb{R}, \ |f(t)| \geq n\} = 0$.*

Démonstration : f est dans $B^{\varphi}(\mathbb{R})$, alors il existe $\alpha>0$ tel que $\rho_{B^{\varphi}}(\alpha f) < \infty$. Pour tout entier naturel N, soit f_N la troncature de f i.e.,

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & \text{if } \ |f(t)| \leq N, \\ N & \text{if } \ |f(t)| \geq N. \end{cases}$$

Posons $E_N = \{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq N\}$, tenant compte de la convexité de φ, on a pour chaque $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \rho_{B^{\varphi}}(\alpha f) & \geq & \rho_{B^{\varphi}}(\alpha f_N) \\ & \geq & \rho_{B^{\varphi}}(\alpha f_N \chi_{E_N}) \\ & = & \rho_{B^{\varphi}}(\alpha N \chi_{E_N}) \\ & \geq & \phi(\alpha N)\overline{\mu}(E_N). \end{array}$$

En faisons tendre N vers l'infini, on aura :

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\mu}_B(E_N) = 0.$$

□

Lemme 3.5.8. *Soit $f \in B^{\varphi}-p.p.$. Alors, on a l'équivalence suivante*

$$\rho_{B^{\varphi}}(f) = 0 \ ssi \ f = 0 \quad \overline{\mu}_B \ p.p.$$

Démonstration : L'affirmation $\rho_{B^{\varphi}}(f) = 0$ implique $f = 0 \ \ \overline{\mu}_B \ p.p.$ est une conséquence directe de (i) du Lemme 3.5.3.

Montrons maintenant que si $\rho_{B^{\varphi}}(f) > 0$, alors, il existe deux nombres réels $\alpha, \theta > 0$ tels que

$$\overline{\mu}_B \{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq \alpha\} > \theta.$$

Supposons le contraire, i.e. pour tout $n \geq 1$

$$\overline{\mu}_B \{G_n\} \leq \frac{1}{n}$$

avec $G_n = \left\{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq \frac{1}{n}\right\}$. En utilisant (Lemma 4, [47]), on obtient :

$$\lim_{n \to \infty} \rho_{B^{\varphi}}(f \chi_{G_n}) = 0.$$

D'une autre part,

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(f \chi_{G_n^c}\right) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi\left(t, \frac{1}{n}\right) \overline{\mu}\left(G_n^c\right) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi\left(t, \frac{1}{n}\right), \tag{3.14}$$

en faisons tendre N vers l'infini dans (3.14), nous obtiendrons :

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_{B^{\varphi}}\left(f \chi_{G_n^c}\right) = 0.$$

Nous avons, pour tout $n \geq 1$

$$\rho_{B^{\varphi}}(f) \leq \rho_{B^{\varphi}}(f \chi_{G_n}) + \rho_{B^{\varphi}}\left(f \chi_{G_n^c}\right). \tag{3.15}$$

Par conséquent, pour n suffisamment grand, le dernier terme de l'inégalité (3.15) peut être rendu plus petit que tout $\varepsilon > 0$. Donc, $\rho_{W^{\phi}}(f) = 0$ qui est une contradiction. $\square$

Lemme 3.5.9. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions dans $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ telles que f_n est $\overline{\mu}_B-$convergente vers $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$. Alors, la suite $(\varphi(., |f_n(.)|))_n$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers $\varphi(., |f(.)|)$ dans $B^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration : La continuité de φ est suffisante pour montrer le résultat souhaité. La méthode développée ici est inspirée de la preuve de la proposition 1 dans [47]. Par le Lemme 3.5.7, pour tout $\theta \in]0, 1[$ il existe un $M > 0$ tel que

$$\overline{\mu}_B \{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq M\} < \theta.$$

Soit maitenant $\varepsilon > 0$, on considère l'ensemble

$$G_n = \{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq M\} \cup \{t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}.$$

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, elle est aussi uniformément continue sur $[0, 1] \times [0, M + \varepsilon]$. En outre, en utilisant la périodicité de $\varphi(t, u)$ par rapport à $t \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que φ est uniformément continue sur $\mathbb{R} \times [0, M + \varepsilon]$.
Alors, il existe $\eta > 0$ tel que l'implication suivante :

$$|\varphi(t, |f_n(t)|) - \varphi(t, |f(t)|)| > \varepsilon \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| > \eta, \forall t \in G_n^c$$

soit vérifiée.
D'une autre part, comme $\{f_n\}$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers f, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{\mu}_B\{t\in G_n^c,|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|>\varepsilon\}=0 \tag{3.16}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu}_B\{t\in\mathbb{R},|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|\geq\varepsilon\}\\
\leq\;&\overline{\mu}_B\{t\in G_n,|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|\geq\varepsilon\}\\
&+\overline{\mu}_B\{t\in G_n^c,|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|\geq\varepsilon\}\\
\leq\;&\overline{\mu}_B(G_n)+\overline{\mu}_B\{t\in G_n^c,|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|\geq\varepsilon\}\\
\leq\;&\overline{\mu}_B\{t\in\mathbb{R},|f(t)|\geq M\}+\overline{\mu}_B\{t\in\mathbb{R},|f_n(t)-f(t)|\geq\varepsilon\}\\
&+\overline{\mu}_B\{t\in G_n^c,|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|\geq\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant le relation (3.16) on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{\mu}_B\{t\in\mathbb{R},|\varphi(t,|f_n(t)|)-\varphi(t,|f(t)|)|\geq\varepsilon\}\leq\theta.$$

Comme θ est choisit arbitrairement dans $]0,1[$, nous pouvons affirmer que : $\{\varphi(.,|f_n|)\}_n$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers $\varphi(.,|f|)$. □

Corollaire 3.5.10. *Soit $\{f_n\}_{n\geq1}$ une suite de fonctions dans $B^{\varphi}(\mathbb{R})$, $\overline{\mu}_B-$convergente vers une fonction $f\in B^{\varphi}-p.p.$. On suppose qu'il existe $g\in B^{\varphi}-p.p.$ telle que :* $\max(|f_n(t)|,|f(t)|)\leq g(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{B^{\varphi}}(f_n)=\rho_{B^{\varphi}}(f).$$

Démonstration : Tout d'abord, on remarque que dans la preuve de (ii) de Lemme 3.5.3 (voir Lemma 4 de [47] et Lemma 2.6. du [46]), on peut supposer $\{f_n\}_{n\geq1}$ et f dans $B^1(\mathbb{R})$ au lieu de $B^1-p.p.$.
Maintenant, nous montrons le corollaire. Soit $\{f_n\}_{n\geq1}$ une suite de fonctions dans $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ $\overline{\mu}_B-$convergente vers $f\in B^{\varphi}(\mathbb{R})$. Alors, par le Lemme 3.5.9, il vient que, $\varphi(.,f_n(.))$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers $\varphi(.,f(.))\in B^1(\mathbb{R})$ et satisfait

$$\max(\varphi(.,|f_n(.)|),\varphi(.,|f(.)|))\leq\varphi(.,|g(.)|)\in B^1-p.p..$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 3.5.3, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\rho_1(\varphi(.,|f_n(.)|))=\rho_1(\varphi(.,|f(.)|)).$$

Ce qui signifie que

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{B^{\varphi}}(f_n)=\rho_{B^{\varphi}}(f),$$

ce qui termine la preuve du corollaire.

□

Nous donnons maintenant une version adaptée du lemme de Fatou dans $B^{\varphi}-p.p.$

Lemme 3.5.11. *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $B^{\varphi}(\mathbb{R})$, $\overline{\mu}_B-$convergente vers $f\in B^{\varphi}-p.p.$. Alors*

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(f_n)\geq\rho_{B^{\varphi}}(f).$$

Démonstration : Considérons la suite suivante

$$g_n(t)=f(t)\chi_{E_n}(t)+f_n(t)\chi_{E_n^c}(t),\ \ t\in\mathbb{R}$$

avec $E_n=\{t\in\mathbb{R},|f_n(t)|>|f(t)|\}$ et E_n^c sont complémentaire. Il est clair que pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n appartient à $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ et satisfait

$$|g_n(t)-f(t)|=\begin{cases}0 & \text{if}\quad |f_n(t)|>|f(t)|,\\ |f_n(t)-f(t)| & \text{if}\quad |f_n(t)|\leq|f(t)|.\end{cases}$$

Il s'ensuit que $|g_n(t)-f(t)|\leq|f_n(t)-f(t)|$ et par conséquent, la suite $\{g_n\}_n$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers f.
Maintenant, comme $|g_n(t)|\leq|f(t)|$ et $f\in B^{\varphi}-p.p.$, en utilisant le Corollaire 3.5.10, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(g_n)=\rho_{B^{\varphi}}(f).$$

Donc,

$$\rho_{B^{\varphi}}(f)=\lim_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(g_n)\leq\underline{\lim}_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(f_n).$$

□

Lemme 3.5.12. *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $B^{\varphi}-p.p$. Supposons que $\{f_n\}$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers $f\in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}(f_n)=\rho_{B^{\varphi}}(f)$. Alors,*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f_n-f}{2}\right)=0.$$

Si de plus φ satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$ alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n-f\|_{B^{\varphi}}=0$.

Démonstration : Par le Lemme 3.5.9, nous avons $\left\{\varphi\left(.,\frac{|f_n-f|}{2}\right)\right\}_n$ $\overline{\mu}_B-$convergente vers 0, et donc, la suite $g_n=\frac{\varphi(.,|f_n|)+\varphi(.,|f|)}{2}-\varphi\left(.,\frac{|f_n-f|}{2}\right)$ est aussi $\overline{\mu}_B-$convergente vers $g=\varphi(.,|f|)$. Alors, grâce au Lemme 3.5.11, on obtient

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\rho_1(g_n)\geq\rho_1(g).$$

En vertu de l'existence de la limite de l'expression $\rho_1(.)$, on obtient

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi}(f) &= \rho_1(g)\\ &\leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\rho_1\left(\frac{\varphi(|f_n|)+\varphi(|f|)}{2}-\varphi\left(\frac{|f_n-f|}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \varliminf_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}(f_n)+\frac{1}{2}\rho_{B^{\varphi}}(f)-\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f_n-f}{2}\right)\right\} \\ &\leq \rho_{B^{\varphi}}(f)-\varlimsup_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f_n-f}{2}\right). \end{aligned}$$

Finallement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f_n-f}{2}\right)=0.$ □

3.6 Propriétés géométriques locales de $B^{\varphi}-p.p.$ muni de la norme de Luxemburg

Dans cette section nous allons étudier certaines questions de nature géométrique de l'espace $B^{\varphi}-p.p.$ muni de la norme de Luxemburg. Plus précisement, les propritétés géométriques dites locales et intermédiaires à la stricte et l'uniforme convexité. Pour rappel, la stricte et l'uniforme convexité de la classe de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques ont été étudiées dans ([46], [47]) lorsque l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est muni de la norme de Luxemburg et dans et [23] lorsque ce même espace est muni de la norme d'Orlicz. Les auteurs ont obtenu les théorèmes suivant :

Théorème 3.6.1 ([46]). *L'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ muni de la norme de Luxemburg est uniformément convexe si et seulement si φ est uniformément convexe et satisfait la condition$\Delta_2^{B^1}$.*

Théorème 3.6.2 ([47]). *L'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ muni de la norme de Luxemburg est strictement convexe si et seulement si φ est strictement convexe et satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$.*

Théorème 3.6.3 ([23]). *L'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ muni de la norme d'Orlicz est strictement convexe si et seulement si φ est strictement convexe.*

Dans ce qui suit, nous montrerons que toutes ces propriétés géométriques intermédiaires (la locale uniforme convexité (LUC), l'uniforme convexité dans toute direction (UCED) et la H-propriété) sont équivalentes à la stricte convexité lorsque l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est muni de la norme de Luxemburg. Ce résultat généralise celui obtenu dans [7] dans le cas de l'espace de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques (cas sans paramètre) qui, pour rappel, est consigné dans le théorème suivant :

Théorème 3.6.4 ([7]). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est localement uniformément convexe (LUC),*
2. *$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ possède la $H-$propriété,*
3. *$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est strictement convexe (SC),*
4. *φ est strictement convexe et φ satisfait la condition Δ_2.*

Notre premier résultat (généralisant le Théorème 3.6.4) s'énonce comme suit :

Théorème 3.6.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est LUC,*

2. *$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ possède la $H-$propriété,*

3. *φ est strictement convexe et φ satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$.*

Démonstration : Nous allons montrer les implications suivantes : $(3) \implies (1) \implies (2) \implies (3)$.
l'implication $(1) \implies (2)$ a lieu dans le cadre général des espaces de Banach.
Pour prouver $(3) \implies (1)$, prenons f_n, f dans $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ telles que

$$\|f_n\|_{B^{\varphi}} = \|f\|_{B^{\varphi}} = 1 \text{ et } \left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Rappelons que si φ satisfait la condition$\Delta_2^{B^1}$, nous avons $B^{\varphi}-p.p. = \widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ et d'après le Lemme 3.5.4, on a $\rho_{B^{\varphi}}(f_n) = \rho_{B^{\varphi}}(f) = 1$. Suivant des arguments analogues à ceux de [58, Lemma 2.], on obtient

$$\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{2}\right) \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

si et seulement si

$$\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

En effet, supposons que l'assertion est fausse. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$: $\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{2}\right) \leq 1-\varepsilon$ ou bien $\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{2}\right) \geq 1+\varepsilon$. Dans les deux cas, nous allons obtenir une contradiction. Dans le premier cas, à l'aide de la condition $\Delta_2^{B^1}$, on obtient $\sup\limits_n \rho_{B^{\varphi}}(f+f_n) < \infty$, et par conséquent

$$\begin{aligned}
1 &= \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right) \\
&= \rho_{B^{\varphi}}\left(\left(\frac{2}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}-1\right)(f+f_n) + \left(2-\frac{2}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)\left(\frac{f+f_n}{2}\right)\right) \\
&\leq \left(\frac{2}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}-1\right)\rho_{B^{\varphi}}(f+f_n) + \left(2-\frac{2}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{2}\right) \\
&\leq \left(\frac{2}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}-1\right)\sup_n \rho_{B^{\varphi}}(f+f_n) + \left(2-\frac{2}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)(1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

Faisons tendre $n \to +\infty$, on obtient $1 \leq 1-\varepsilon$. Contradiction.
Si $\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{2}\right) \geq 1+\varepsilon$, la condition-$\Delta_2^{B^1}$ pour φ implique que

$\sup_n \rho_{B^{\varphi}}\left(2\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)<\infty$, alors

$$\begin{aligned}
1+\varepsilon &\leq \rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{2}\right)\\
&= \rho_{B^{\varphi}}\Big[\left(2-\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}}\right)\left(\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)\\
&+ \left(\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}}-1\right)\left(2\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)\Big]\\
&\leq \left(2-\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}}\right)\rho_{B^{\varphi}}\left(\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)\\
&+ \left(\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}}-1\right)\rho_{B^{\varphi}}\left(2\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right)\\
&\leq \left(2-\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}}\right)+\left(\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_{B^{\varphi}}-1\right)\sup_n \rho_{B^{\varphi}}\left(2\frac{f+f_n}{\|f+f_n\|_{B^{\varphi}}}\right).
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, nous avons $1+\varepsilon\leq 1$. Contradiction. Ceci termine la preuve de l'assertion précédente.

Par conséquent, compte tenu du Lemme 3.5.5, il en résulte que la suite $\{f_n\}_n$ est $\overline{\mu}_B-$convergente vers f. Ensuite, en utilisant le Lemme 3.5.12 et la condition-$\Delta_2^{B^1}$ pour φ, nous concluons que

$$\|f_n-f\|_{B^{\varphi}}\to 0 \text{ lorsque } n\to+\infty.$$

$(2)\Rightarrow(3)$. Supposons que $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ possède la $H-$propriété. D'après la Proposition 3.5.6 et les mêmes techniques que dans [7] (voir la preuve de Théorème 1.) nous allons montrer que l'espace Musielak-Orlicz $L^{\varphi}([0,1])$ possède la $H-$propriété. Nous répétons cette justification pour la clareté de la preuve. En effet, soit $\{f_n\}$ une suite dans $L^{\varphi}([0,1])$ telle que :

— $\{f_n\}$ converge faiblement vers f dans $L^{\varphi}([0,1])$,

— $\|f_n\|_{\varphi}\longrightarrow\|f\|_{\varphi}$ (ici, la notation $\|.\|_{\varphi}$ est utilisée pour désigner la norme de Luxemburg associé à l'space Musielak-Orlicz $L^{\varphi}([0,1])$).

Ensuite, pour chaque G dans l'espace dual $\left(\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.\right)^*$, nous avons $G\circ i\in(L^{\varphi}([0,1]))^*$. En outre, comme f_n converge faiblement vers f dans $L^{\varphi}([0,1])$, $(f_n\rightharpoonup f)$ on obtient

$$G\circ i(f_n)\longrightarrow G\circ i(f)$$

ou d'une manière équivalente $G\left(\widetilde{f_n}\right)\longrightarrow G\left(\widetilde{f}\right)$. Ainsi $\widetilde{f_n}\rightharpoonup\widetilde{f}$ dans $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$.

Il est clair que $\left\|\widetilde{f_n}\right\|_{B^{\varphi}}\longrightarrow\left\|\widetilde{f}\right\|_{B^{\varphi}}$ et comme $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ possède la H-propriété, on peut écrire $\left\|\widetilde{f_n}-\widetilde{f}\right\|_{B^{\varphi}}\longrightarrow 0$ et finalement $\|f_n-f\|_{\varphi}\longrightarrow 0$. Cela signifie que l'espace Musielak-Orlicz $L^{\varphi}([0,1])$ possède la H-propriété.

Il résulte de [21] que φ est strictement convexe et satisfait la condition $\Delta_2^{L^1}$, ce qui termine la preuve du théorème, puisque φ satisfait la condition-$\Delta_2^{B^1}$. □

Vue que l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est un espace pseudo-normé, l'étude de l'uniforme convexité dans toute direction de cet espace requiert une reformulation dans la définition de cette propriété géométrique. La propriété de l' UCED peut être reformulée sous la forme suivante :

Définition 3.6.6. *L'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est dit UCED si pour tout $g \in \widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$, et pour toute suite (f_n) dans $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$, les conditions $\|f_n\|_{B^{\varphi}} \to 1$, $\|f_n+g\|_{B^{\varphi}} \to 1$ et $\|2f_n+g\|_{B^{\varphi}} \to 2$ impliquent $\|g\|_{B^{\varphi}} = 0$.*

Remarquons que cette définition est équivalente à celle de la propriété de l'UCED dans un espace normé.

Théorème 3.6.7. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est UCED,*
2. *φ est strictement convexe et φ satisfait la condition-$\Delta_2^{B^1}$.*

Démonstration : $(2) \Rightarrow (1)$. Soit $\|f_n\|_{B^{\varphi}} \to 1$, $\|f_n+g\|_{B^{\varphi}} \to 1$ et $\|2f_n+g\|_{B^{\varphi}} \to 2$. Supposons que φ est strictement convexe et φ satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$. Alors, nous avons aussi $\rho_{B^{\varphi}}(f_n) \to 1$, $\rho_{B^{\varphi}}(f_n+g) \to 1$ et $\rho_{B^{\varphi}}\left(\dfrac{2f_n+g}{2}\right) \to 1$. Maintenant, en utilisant le Lemme 3.5.5 pour la suite $(f_n)_n$ et $(f_n+g)_n$, nous avons $g=0 \ \overline{\mu}\ p.p.$ et compte tenu du Lemme 3.5.8 on déduit que $\rho_{B^{\varphi}}(g)=0$ et en utilisant à nouveau la condition $\Delta_2^{B^1}$ il s'ensuit que $\|g\|_{B^{\varphi}}=0$. $(1) \Rightarrow (2)$. En utilisant la Proposition 3.5.6, et comme l'*UCED* de $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ implique l'*UCED* de $L^{\varphi}([0,1])$, nous obtenons la nécessité de la stricte convexité de φ et la condition-$\Delta_2^{L^1}$ (voir [37]) et donc la nécessité de la condition $\Delta_2^{B^1}$. □

Corollaire 3.6.8. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\tilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est LUC,*
2. *$\tilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est MLUC,*
3. *$\tilde{B}^{\varphi}-p.p.$ possède la $H-$propriété,*
4. *$\tilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est UCED,*
5. *$\tilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est SC,*
6. *φ est strictement convexe et φ satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$.*

Remarque 3.6.9. *La généralisation de ces résultats aux cas des fonctions Lebesgue mesurables dans un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{E}$ est immédiate. En ce qui concerne la dimension infinie, les choses sont compliquées, et la question demeure ouverte.*

Maintenant, nous appliquons les résultats précédents pour donner une application dans le problème de recherche de la meilleure approximation.
Soit $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$ un espace de Banach , C un sous ensemble de $\mathbb{E}$ et $x \in \mathbb{E}$. On définit la projection P_C par

$$P_C : x \to d(x,C) = \inf\{\|x-y\|_{\mathbb{E}}, y \in C\}.$$

Dans [22], les auteurs montrent que, sous les conditions supplémentaires sur φ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(t,u)}{u} = +\infty, \quad \lim_{u \to 0} \frac{\varphi(t,u)}{u} = 0, \tag{3.17}$$

l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ est réflexif si et seulement si $\varphi \in \Delta_2^{B^1} \cap \nabla_2^{B^1}$.
Comme l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques est réflexif et strictement convexe est LUC, et possède la $H-$propriété, nous obtenons le corollaire suivant qui est une généralisation de théorème de Doob :

Corollaire 3.6.10. *Supposons que φ est strictement convexe, $\varphi \in \Delta_2^{B^1} \cap \nabla_2^{B^1}$ et φ satisfait les conditions* (3.17)*, alors pour tout ensemble convexe fermé $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_\infty = \overline{\cap_n C_n}$ ou $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_\infty = \overline{\bigcup_n C_n}$ dans $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$ et tout $x \in \widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$,*

$$\|P_{C_n}(x) - P_{C_\infty}(x)\| \to 0, \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

CHAPITRE 4

Espace de Stepanoff-Musielak-Orlicz et de Weyl-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques

Sommaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons, via la définition de Bohr, les notions de presque périodicité de Stepanoff-Musielak-Orlicz et de Weyl-Musielak-Orlicz pour des fonctions à valeurs dans un espace de métrique $(\mathscr{U}, d)$. Des propriétés structurelles des classes obtenues $S_{\ell,\varphi}^{(d)} - t.p.$ et $W_\varphi^{(d)} - t.p.$ seront énoncées et démontrées. On établira en particulier la caractérisation de Danilov des fonctions $W_\varphi^{(d)} - t.p.$. On présentera un résultat d'approximation de la classe de fonctions de Weyl-Musielak-Orlicz presque périodiques $W^\varphi - p.p.$. définies via les polynômes trigonométriques généralisés. Ce chapitre s'achève par certaines remarques concernant le lien entre les deux espaces $B^\varphi - p.p.$ et $W^\varphi - p.p.$.

4.2 Presque périodicité au sens de Weyl dans les espaces de Musielak-Orlicz

Soit $(\mathscr{U}, d)$ un espace métrique complet. On note par $B_r(x)$ la boule fermée de centre $x \in \mathscr{U}$ et de rayon $r \geq 0$.

Définition 4.2.1 (Danilov [24]). *1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$ est dite élémentaire s'il existe une suite de points $x_j \in \mathscr{U}$ et une famille de parties $T_j \subset \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}$, mesurables (au sens de Lebesgue) et disjointes telles que $\mu\left(\mathbb{R} \backslash \cup_j T_j\right) = 0$ et $f(t) = x_j$ pour tout $t \in T_j$. Une telle fonction est notée par*

$$f(.) = \sum_j x_j \chi_{T_j}(.).$$

Notons bien que dans l'espace métrique $\mathscr{U}$ les notations utilisées sont formellement incorrectes, mais elles sont sensées puisqu'il aucune opération linéaire ne sera utilisée dans cet espace.

Définition 4.2.2. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$ est dite mesurable si à tout $\varepsilon > 0$ correspond une fonction élémentaire $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$ telle que*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} d\left(f(t), f_\varepsilon(t)\right) \leq \varepsilon.$$

La classe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathscr{U}$ mesurables sera notée par $\mathscr{M}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$.

Soit $x_0 \in \mathscr{U}$ un point fixé et φ une fonction de Musielak-Orlicz. Introduisons la classe suivante du type modulaire :

$$S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R}, \mathscr{U}) = \left\{ f \in \mathscr{M}(\mathbb{R}, \mathscr{U}), \exists \lambda > 0,\ \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\Big(t, \lambda d\left(f(t), x_0\right)\Big) dt < +\infty \right\}$$

correspondante à la fonctionnelle suivante :

$$D^{(d)}_{S^\varphi_\ell}(f,g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\Big(t, d\left(f(t), g(t)\right)\Big) dt, \quad \ell > 0, \quad f, g \in \mathscr{M}(\mathbb{R}, \mathscr{U}). \tag{4.1}$$

Il est facile de vérifier que pour tout $L \geq \ell$,

$$\frac{1}{L} D^{(d)}_{S^\varphi_\ell}(f,g) \leq D^{(d)}_{S^\varphi_L}(f,g) \leq \left(1 + \frac{\ell}{L}\right) D^{(d)}_{S^\varphi_\ell}(f,g). \tag{4.2}$$

de plus, la limite suivante existe

$$D^{(d)}_{W^\varphi}(f,g) = \lim_{\ell \to \infty} D^{(d)}_{S^\varphi_\ell}(f,g) = \inf_{\ell > 0} D^{(d)}_{S^\varphi_\ell}(f,g), \quad f, g \in S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R}, \mathscr{U}). \tag{4.3}$$

Remarque 4.2.3. *1. L'espace $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ est bien défini et ne dépend pas du choix de x_0.*

2. *A cause de la convexité de φ, les quantités $D^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g)$ et $D^{(d)}_{W^{\varphi}}(f,g)$ ne définissent pas forcément des métriques sur $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ (l'inégalité triangulaire n'étant toujours pas satisfaite).*

A la fonctionnelle $D^{(d)}_{W^{\varphi}}(.,.)$, on associe l'espace de type modulaire suivant :

$$W^{(d)}_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U}) = \left\{ f \in \mathscr{M}(\mathbb{R},\mathscr{U}), \exists \lambda > 0,\ \lim_{\ell\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \varphi\Big(t, \lambda d\,(f(t),x_0)\Big)dt < +\infty \right\}.$$

Nous avons alors :

Proposition 4.2.4. *Les deux espaces $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et $W^{(d)}_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ sont "algébriquement" identiques.*

Démonstration : Il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\lim_{\ell\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \varphi\Big(t, \lambda d\,(f(t),x_0)\Big)dt < +\infty \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \varphi\Big(t, \lambda d\,(f(t),x_0)\Big)dt < +\infty.$$

L'implication ($\Leftarrow$) est une conséquence immédiate de l'inégalité $D^{(d)}_{W^{\varphi}}(f,g) \le D^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g)$, $\forall \ell > 0$. L'implication inverse provient de la définition $D^{(d)}_{W^{\varphi}}(f,g) = \lim_{\ell\to\infty} D^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g)$, qui montre que si

$$\lim_{\ell\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \varphi\Big(t, \lambda d\,(f(t),x_0)\Big)dt < +\infty$$

alors il existe L (suffisamment grand) tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{L}\int_x^{x+L} \varphi\Big(t, \lambda d\,(f(t),x_0)\Big)dt < +\infty$$

et donc pour tout $L > 0$, grâce aux inégalités (4.2). □

Remarque 4.2.5. *Nous soulignons que l'analogue n'est pas valable pour les classes de fonctions presque périodiques que nous allons définir plus loin, en fait, l'ensemble $S^{(d)}_{\varphi} - t.p.$ est un sous-ensemble de $W^{(d)}_{\varphi} - t.p.$.*

Aux fonctionnelles $D^{(d)}_{W^{\varphi}}(.,.)$ et $D^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(.,.)$, on associe les quantités suivantes

$$\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g) = \inf\left\{ k > 0, \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \frac{1}{k} d\,(f(t),g(t))\right) dt \le 1 \right\}, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \omega^{(d)}_{W^{\varphi}}(f,g) &= \inf\left\{ k > 0, \lim_{\ell\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \frac{1}{k} d\,(f(t),g(t))\right) dt \le 1 \right\} \qquad (4.5)\\ &= \lim_{\ell\to\infty} \omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g). \end{aligned}$$

Proposition 4.2.6. *$\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(.,.)$ (resp. $\omega^{(d)}_{W^{\varphi}}(.,.)$) confère à l'espace $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ une structure métrique (resp. semi-métrique).*

Démonstration : On se limitera à l'inégalité triangulaire pour $\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(.,.)$. Observons d'abord que comme dans le cas des espaces modulaires (voir par exemple [3]), $\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g)$ est bien définie sur $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$, i.e. $\left\{k>0, \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\left(t,\frac{1}{k}d\left(f(t),x_0\right)\right)dt\leq 1\right\}\neq\emptyset$ et que cet ensemble coïncide avec la demi-droite réelle. Ce fait est une conséquence de la propriété suivante des fonctions de $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$

$$f\in S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U}) \Leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\Big(t,\alpha d\left(f(t),x_0\right)\Big)dt=0.$$

Soit $f,g,\,h\in S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$. Prenons $\varepsilon>0$ un réel quelconque. Posons $u=d^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g)+\varepsilon$ et $v=d^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(g,h)+\varepsilon$. Alors,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\left(t,\frac{1}{u}d\left(f(t),g(t)\right)\right)dt\leq 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\left(t,\frac{1}{v}d\left(g(t),h(t)\right)\right)dt\leq 1.$$

En utilisant l'inégalité

$$\frac{d\left(f(.),h(.)\right)}{u+v}\leq\frac{u}{u+v}\frac{d\left(f(.),g(.)\right)}{u}+\frac{v}{u+v}\frac{d\left(g(.),h(.)\right)}{v}$$

on obtient, grâce à la convexité de φ par rapport à sa deuxième composante, l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\left(t,\frac{d\left(f(t),h(t)\right)}{u+v}\right)dt\\
\leq\ &\frac{u}{u+v}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\left(t,\frac{d\left(f(t),g(t)\right)}{u}\right)dt+\frac{v}{u+v}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\left(t,\frac{d\left(f(t),h(t)\right)}{v}\right)dt\\
\leq\ &\frac{u}{u+v}+\frac{v}{u+v}=1.
\end{aligned}$$

D'où l'en déduit que

$$\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,h)\leq u+v=\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(f,g)+\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(g,h)+2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on obtient l'inégalité triangulaire pour $\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}$. □

Remarque 4.2.7. *1. Même si les espaces $S^{(d)}_{\varphi,\ell}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et $W^{(d)}_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ sont algébriquement identiques, les deux métriques $\omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}(.,.)$ et $\omega^{(d)}_{W^{\varphi}}(.,.)$) générent deux topologies complètement différentes.*

2. *On peut définir de façon analogue les espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz* $B_{\varphi}^{(d)}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ *pour des fonctions* $f:\mathbb{R}\to\mathscr{U}$ *mesurables, en remplaçant la métrique du Stepanoff-Musielak-Orlicz* (4.4) *par la semi-métrique*

$$\begin{aligned}\omega_{B^{\varphi}}^{(d)}(f,g) &= \inf\left\{k>0, \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{1}{k}d(f(t),g(t))\right)dt\leq 1\right\}\\ &= \overline{\lim_{T\to\infty}}\inf\left\{k>0,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{1}{k}d(f(t),g(t))\right)dt\leq 1\right\}.\end{aligned}$$

(La deuxième reformulation $\omega_{B^{\varphi}}^{(d)}(f,g)$ *s'obtient avec les mêmes arguments que ceux utilisés par Hillmann [31]).*

Introduisons à présent le concept de presque périodicité au sens de la métrique $\omega_{S_{\ell}^{\varphi}}^{(d)}$ (resp. semi-métrique $\omega_{W^{\varphi}}^{(d)}$) pour des fonctions $f\in S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R},\mathscr{U})$. Pour ce faire, on a besoin d'introduire une hypothèse supplémentaire sur la fonction de Musielak-Orlicz du type h^S-bornitude.

Définition 4.2.8. *Une fonction périodique de Musielak-Orlicz* φ *est dite* h^S-*bornée s'il existe deux constantes* $k_1,k_2>0$ *telles que*

$$\varphi(t-v,u)\leq k_1\varphi(t,k_2u)+H(t,v) \tag{4.6}$$

où la fonction $H:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ *est (mesurable) par rapport à la première variable et tel que*

$$\sup_{v\in\mathbb{R}}h(v)=\sup_{v\in\mathbb{R}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{[x,x+\ell]}H(t,v)dt=h_0<+\infty. \tag{4.7}$$

Remarque 4.2.9. *On peut définir de la même façon le concept de* h^W-*bornitude, en remplaçant la condition* (4.7) *par la suivante*

$$\sup_{v\in\mathbb{R}}h(v)=\sup_{v\in\mathbb{R}}\lim_{\ell\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{[x,x+\ell]}H(t,v)dt=h_0<+\infty. \tag{4.8}$$

Compte tenu de la Proposition 4.2.4, on déduit que la propriété de h^W-*bornitude est équivalente à la* h^S-*bornitude.*

Remarque 4.2.10. *Comme on l'a vu dans le cas des fonctions de Besicovitch-Musielak-Orlicz presque périodiques, la condition de* h^S-*bornitude sur* φ *garantira l'invariance par translation des espaces* $S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R},\mathscr{U})$. *On aura en particulier*

$$f\in S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R},\mathscr{U}) \text{ si et seulement si } f_{\tau}\in S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R},\mathscr{U}),\ \forall\tau\in\mathbb{R}.$$

Définition 4.2.11. *Une fonction* $f\in S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ *est dite Stepanoff-Musielak-Orlicz presque* *périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(f,\varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R}, \omega_{S_\ell^\varphi}^{(d)}(f_\tau, f) \leq \varepsilon \right\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
Les éléments $\tau \in S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(f,\varepsilon)$ sont appelés $\left(\varepsilon, \omega_{S_\ell^\varphi}^{(d)}\right)$ −presque période associés à $f \in S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$.
L'ensemble de telles fonctions sera noté par $S_{\ell,\varphi}^{(d)} - t.p.$.

Définition 4.2.12. *Une fonction $f \in S_{\varphi,\ell}^{(d)}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ est dite Weyl-Musielak-Orlicz presque périodique si à tout $\varepsilon > 0$, correspond un nombre réel $\ell = \ell(\varepsilon, f) > 0$ tel que l'ensemble $S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(f,\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de telles fonctions sera noté par $W_\varphi^{(d)} - t.p.$ Lorsque $\varphi(t,x) = |x|$, la classe correspondante, $W^1(\mathbb{R}, \mathscr{U})$, est celle étudiée par Danilov [24].*
Nous avons alors les injections continues suivantes

$$\{u.p.p\} \hookrightarrow S_{\ell,\varphi}^{(d)} - t.p. \hookrightarrow W_\varphi^{(d)} - t.p. \hookrightarrow W^1(\mathbb{R}, \mathscr{U}). \tag{4.9}$$

Ainsi, la différence entre les classes $S_{\ell,\varphi}^{(d)} - t.p.$ et $W_\varphi^{(d)} - t.p.$ est que dans cette dernière classe, le nombre ℓ varie en fonction de ε. Il est facile de voir que si $\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ell(\varepsilon) < +\infty$, alors $S_{\ell,\varphi}^{(d)} - t.p. = W_\varphi^{(d)} - t.p.$.
Notons que la dernière injection dans (4.9) est due à l'hypothèse que $\Phi(\alpha) = \inf_{t\in\mathbb{R}}\{\varphi(t,\alpha)\}$ est une fonction d'Orlicz et que $W_\varphi^{(d)} - t.p. \hookrightarrow W^\Phi - t.p.(\mathbb{R}, \mathscr{U}) \hookrightarrow W^1(\mathbb{R}, \mathscr{U})$.

Presque périodicité au sens de Weyl via les polynômes trigonométriques

Dans cette partie, on suppose que $\mathscr{U}$ est un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|$. Par analogie à l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz des fonctions presque périodiques introduit dans [47], on définit les espaces de Stepanoff-Musielak-Orlicz (Weyl-Musielak-Orlicz) de fonctions presque périodiques via l'approximation par des polynômes trigonométriques, noté respectivement $S_\ell^\varphi - p.p.(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ et $W^\varphi - p.p.(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ comme fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés $\mathscr{A}$ au sens de la norme (resp. semi-norme) du type Luxemburg

$$\begin{aligned} \|f\|_{S_\ell^\varphi} &= \omega_{S_\ell^\varphi}^{(d)}(f,0) = \inf\left\{ k > 0, \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \frac{1}{k}\|f(t)\|\right) dt \leq 1 \right\}, \\ \|f\|_{W^\varphi} &= \lim_{\ell\to\infty} \|f\|_{S_\ell^\varphi}. \end{aligned}$$

Plus précisément,

$$S_\ell^\varphi - p.p.(\mathbb{R}, \mathscr{U}) = \left\{ f \in S_\ell^\varphi(\mathbb{R}, \mathscr{U}) : \exists f_n \in \mathscr{A}, \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{S_\ell^\varphi} = 0 \right\},$$

$$W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big) \quad = \quad \left\{f\in W^{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U}):\exists f_n\in\mathscr{A},\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_{W^{\varphi}}=0\right\}.$$

Lorsque φ est une fonction d'Orlicz (ne dépendant pas du paramètre t), les inclusions suivantes :

$$S_{\ell}^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})\subset S_{\ell,\varphi}^{(d)}-t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U}) \text{ et } W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)\subset W_{\varphi}^{(d)}-t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U}) \qquad (4.10)$$

sont vérifiées, l'égalité de ces espaces est atteinte lorsque φ vérifie la condition Δ_2 (voir [31]).

Dans le cas d'une fonction de Musielak-Orlicz φ, les inclusions (4.10) ont lieu si φ est h^S-bornée. La preuve est basée sur l'inégalité suivante

$$\|f_\tau\|_{G^{\varphi}}\le C_1\|f\|_{G^{\varphi}},$$

qui se démontre de la même manière que l'inégalité (3.12).

Remarque 4.2.13. *1. Par des arguments similaires au cas où φ est sans paramètre [31], les espaces $S_{\ell,\varphi}^{(d)}-t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et $S_{\ell}^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ sont complets.*

2. *Il est aussi démontré dans [31] que les deux espaces de Weyl-Orlicz de fonctions presque périodiques $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et $W^{\varphi}-t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ ne sont pas complets. La démonstration repose sur la construction d'une suite $F_n(.)$ de $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ qui est $W^{\varphi}-$Cauchy mais pas W-convergente. Une telle suite est donnée par :*
Soit (m_n) une suite de nombres réels définie par $m_n=\phi\big((n+c)^2\big)$, où $c\ge 1$ est tel que $\phi(c)\ge 2$. Si h_n, $f_n(.)$ et $F_n(.)$ sont définies par

$$h_n=\prod_{i\le n}m_i, \qquad (4.11)$$

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \left(\nu h_n-\frac{1}{2}\right)\le x\le\left(\nu h_n+\frac{1}{2}\right),\ \nu\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases} \qquad (4.12)$$

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x). \qquad (4.13)$$

On peut affirmer de même que les espaces $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ et $W_{\varphi}^{(d)}-t.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ ne sont pas complets. En effet, grâce à l'injection continue (4.9), la suite F_n n'est pas W^{φ}-convergente (puisque elle n'est pas W-convergente). D'autre part, en posant

$$m_n=[\varphi\big(t_0,(n+c)^2\big)]+1\ ^5$$

où t_0 est tel que $\sup_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t,\alpha)=\varphi(t_0,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, alors avec ce choix de m_n la suite F_n est périodique de période entière h_n. Dans ce cas, h_n est aussi une périodique de φ. Il est facile d'établir que la suite F_n est W^{φ}-Cauchy.

3. *La non complétude de $W_{\varphi}^{(d)}-t.p.$ provient du fait que $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ est fermé*

5. La notation $[x]$ désigne la partie entière de x

dans $W_{\varphi}^{(d)} - t.p.$.

4.2.1 Quelques propriétés de l'espace de Weyl-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques

Cette partie est dédiée à une caractérisation de la classe $W_{\varphi}^{(d)} - t.p.$ introduite précédemment. Plus précisément, nous allons généraliser la caractérisation donnée par Danilov [24] lorsque $\varphi(t,x) = |x|^p$, $p \geq 1$. Introduisons à cet effet quelques notations et définitions. Munissons $\mathscr{U}$ de la métrique tronquée

$$d^{'}(f,g) = \min(1, d(f,g)).$$

Définition 4.2.14. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to (\mathscr{U}, d)$ *est dite Weyl-presque périodique au sens de Danilov si* $f \in W^1(\mathbb{R}, (\mathscr{U}, d^{'}))$.

On posera dans ce qui suit $W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R}, \mathscr{U}) = W^1(\mathbb{R}, (\mathscr{U}, d^{'}))$.
Les inclusions (4.9) se prolongent comme suit :

$$W_{\varphi}^{(d)} - t.p. \subset W^1(\mathbb{R}, \mathscr{U}) \subset W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R}, \mathscr{U}) \tag{4.14}$$

Pour f, $g \in W_{\varphi}^{(d)}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$, on définit la quantité

$$J_{\varphi}(f,g) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{l_0 \to +\infty} \sup_{l \geq l_0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf \Big\{ k > 0 : \sup_{\substack{T \subset [x, x+l] \\ \mu(T) \leq \delta l}} \frac{1}{l} \int_T \varphi\Big(t, \frac{d(f(t), g(t))}{k}\Big) dt \leq 1 \Big\}.$$

Il est facile de voir que

$$J_{\varphi}(f,g) \leq \lim_{\ell_0 \to +\infty} \sup_{\ell \geq \ell_0} \omega_{S_{\ell}^{\varphi}}^{(d)}(f,g) = \omega_{W^{\varphi}}^{(d)}(f,g).$$

On définit aussi la partie $\widetilde{W}_{\varphi}^{0}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ de $W_{\varphi}^{(d)}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ des fonctions absolument $\varphi-$integrables au sens de Weyl par

$$\widetilde{W}_{\varphi}^{0}(\mathbb{R}, \mathscr{U}) = \{ f \in W_{\varphi}^{(d)}(\mathbb{R}, \mathscr{U}), J_{\varphi}(f(.), x_0(.)) = 0 \},$$

avec $x_0(t) \equiv x_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.2.15. — *Notons que la quantité* J_{φ} *définie une semi-métrique sur* $W_{\varphi}^{(d)}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$, *de plus, l'espace* $\widetilde{W}_{\varphi}^{0}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ *ne dépend pas du choix de* $x_0 \in \mathscr{U}$.

— *La* h^S*-bornitude de* φ *entraîne que* $f_{\tau} \in \widetilde{W}_{\varphi}^{0}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ *pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$.

Pour une partie mesurable A de $\mathbb{R}$. On définit la fonction d'ensemble $\overline{\mu}_W$

$$\overline{\mu}_W(A) = \lim_{\ell\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\chi_A(t)\,dt \tag{4.15}$$

où μ désigne ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et et χ_A la fonction caractéristique de $A\in\Sigma(\mathbb{R})$. La limite ci-dessus existe [4], de plus, il est facile de montrer que $\overline{\mu}_W$ vérifie les mêmes propriétés que $\overline{\mu}_B$ introduite au chapitre quatre.

Le lemme suivant dû à Danilov caractérise des fonctions Weyl-presque périodiques au sens de Danilov en terme de presque périodicité au sens de la sous mesure $\overline{\mu}_W$. Notons que ce lemme est aussi présenté dans [24] sans démonstration.

Lemme 4.2.16. *Une fonction $f\in W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$ et $\delta>0$, l'inégalité*

$$\overline{\mu}_W\Big\{t\in\mathbb{R},\, d(f(t),f(t+\tau))\geq\delta\Big\}<\varepsilon$$

a lieu pour un ensemble de nombres $\tau\in\mathbb{R}$ relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soient $\varepsilon>0$, $\delta>0$ et $f\in W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})$. Alors, $\exists\ell_\varepsilon>0$, $\exists L_\varepsilon>0$, $\forall a\in\mathbb{R}$ et $\forall\tau\in[a,a+L_\varepsilon]$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_x^{x+\ell_\varepsilon}d'\Big(f(t+\tau),f(t)\Big)dt<\delta\varepsilon. \tag{4.16}$$

D'une part, on a

$$\overline{\mu}_W\Big\{t\in\mathbb{R},\ d\Big(f(t),f(t+\tau)\Big)\geq\delta\Big\}=\overline{\mu}_W\Big\{t\in\mathbb{R},\ d'\Big(f(t),f(t+\tau)\Big)\geq\delta\Big\}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Markov et la relation (4.16), on a $\forall\tau\in[a,a+L_\varepsilon]$,

$$\overline{\mu}_W\Big\{t\in\mathbb{R},\ d\Big(f(t),f(t+\tau)\Big)\geq\delta\Big\}\leq\frac{1}{\delta}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_x^{x+\ell_\varepsilon}d'\Big(f(t+\tau),f(t)\Big)dt<\frac{1}{\delta}\varepsilon\delta=\varepsilon.$$

Inversement, soit τ un ε-presque période associé à la presque périodicité de f au sens de $\overline{\mu}_W$. Posons $A_\delta=\Big\{t\in\mathbb{R},\ d\Big(f(t),f(t+\tau)\Big)\geq\delta\Big\}$ et notons par A_δ^c le complémentaire de A_δ dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_x^{x+\ell_\varepsilon}d'\Big(f(t+\tau),f(t)\Big)dt &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_{A_\delta\cap[x,x+\ell]}d'\Big(f(t+\tau),f(t)\Big)dt\\ &+\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_{A_\delta^c\cap[x,x+\ell]}d\Big(f(t+\tau),f(t)\Big)dt\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_{A_\delta\cap[x,x+\ell]}dt+\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell_\varepsilon}\int_{A_\delta^c\cap[x,x+\ell]}\delta dt\end{aligned}$$

$$= \quad \overline{\mu}_W(A_\delta) + \delta \overline{\mu}_W(A_\delta^c) \leq \varepsilon + \delta.$$

□

Introduisons à présent la notion de fonction tronquée dans un espace métrique (voir [24]). On verra que, moyennant certaines conditions sur la fonction φ, toute fonction $f \in W_\varphi^{(d)} - t.p.$ peut être “approchée” par sa fonction tronquée.

Définition 4.2.17. *Pour une fonction f dans $M(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ et un nombre réel $R > 0$ on définit la fonction tronquée de f comme suit :*

$$\mathbb{R} \ni t \to \quad f^{(R)}(x_0, t) \quad = \quad \begin{cases} f(t) & si\ d(f(t), x_0) \leq R, \\ x_0 & si\ d(f(t), x_0) > R. \end{cases}$$

L'application $P_R : f(.) \mapsto f^R(x_0, .)$ est dite projection radiale sur la boule de centre x_0 et de rayon R.

Le lemme suivant est une généralisation du Lemme 1.4 de [31].

Lemme 4.2.18. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction localement φ-integrable. Soient $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, et $L > 0$ donnés tels que $a + \tau \in [0, L]$, $\ell > 0$ arbitraire. Supposons que φ est h^S-bornée. Alors, il existe une constante $K > 0$ dépendante uniquement de φ telle que*

$$N_{\varphi_{a,\ell}}(g_\tau) \leq K \frac{L+\ell}{\ell} N_{\varphi_{0,L+\ell}}(g) \tag{4.17}$$

où $N_{\varphi_{a,\ell}}(.)$ est la fonctionnelle donnée dans [31], qui pour rappel est définie comme suit

$$N_{\varphi_{a,\ell}}(g) \quad = \quad \inf\left\{ k > 0,\ \frac{1}{\ell} \int_a^{a+\ell} \varphi(t, \frac{1}{k} g(t)) dt \leq 1 \right\}, pour\ g \in L^\varphi_{loc}.$$

Démonstration : En utilisant la h^S-bornitude et le changement de variable $t = u - \tau$, on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell} \int_a^{a+\ell} \varphi\Big(t, g(t+\tau)\Big) dt \quad &= \quad \frac{1}{\ell} \int_{a+\tau}^{a+\tau+\ell} \varphi\Big(u - \tau, g(u)\Big) du \\
&\leq \quad \frac{\ell+L}{\ell} \frac{1}{\ell+L} \int_0^{\ell+L} k_1 \varphi\Big(u, k_2 g(u)\Big) du \\
&+ \quad \frac{\ell+L}{\ell} \frac{1}{\ell+L} \int_0^{\ell+L} H(u, \tau) du \\
&\leq \quad \frac{\ell+L}{\ell} \frac{1}{\ell+L} k_1 \int_0^{\ell+L} \varphi\Big(u, k_2 g(u)\Big) du \\
&+ \quad \frac{\ell+L}{\ell} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \frac{1}{\ell+L} \int_0^{\ell+L} H(u, \tau) du \\
&\leq \quad \frac{\ell+L}{\ell} \frac{1}{\ell+L} k_1 \int_0^{\ell+L} \varphi\Big(u, k_2 g(u)\Big) du + \frac{\ell+L}{\ell} \sup_{\tau \in \mathbb{R}} h(\tau)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\ell+L}{\ell}\frac{1}{\ell+L}k_1\int_0^{\ell+L}\varphi\Big(u,k_2g(u)\Big)du+\frac{\ell+L}{\ell}h_0.$$

Nous devons considérer les quatre cas suivants

1. Si $h_0 \geq 1$ et $k_1 \geq 1$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2kk_1(\frac{\ell+L}{\ell})h_0}\Big)dt &\leq \frac{\ell}{2k_1(\ell+L)h_0}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{k}\Big)dt\\ &\leq \frac{1}{2h_0}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)dt+\frac{1}{2k_1}\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)dt+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

   donc

$$\left\{k>0,\ \frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)du\leq 1\right\}\subset\left\{k>0,\ \frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2kk_1(\frac{\ell+L}{\ell})h_0}\Big)dt\leq 1\right\},$$

   d'où l'en déduit

$$N_{\varphi_{a,\ell}}(g_\tau)\leq 2h_0k_1k_2\frac{L+\ell}{\ell}N_{\varphi_{0,L+\ell}}(g). \tag{4.18}$$

2. Si $h_0 < 1$ et $k_1 > 1$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2kk_1(\frac{\ell+L}{\ell})}\Big)dt &\leq \frac{\ell}{2k_1(\ell+L)}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{k}\Big)dt\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)du+\frac{h_0}{2k_1}\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)du+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

   donc

$$\left\{k>0,\ \frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)du\leq 1\right\}\subset\left\{k>0,\ \frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2kk_1(\frac{\ell+L}{\ell})}\Big)dt\leq 1\right\},$$

   d'où l'en déduit

$$N_{\varphi_{a,\ell}}(g_\tau)\leq 2k_1k_2\frac{L+\ell}{\ell}N_{\varphi_{0,L+\ell}}(g). \tag{4.19}$$

3. Si $h_0 < 1$ et $k_1 < 1$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2k(\frac{\ell+L}{\ell})}\Big)dt &\leq \frac{\ell}{2(\ell+L)}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{k}\Big)dt\\ &\leq \frac{k_1}{2}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2g(u)}{k}\Big)du+\frac{h_0}{2}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2 g(u)}{k}\Big)du+\frac{1}{2},$$

donc

$$\left\{k>0,\ \frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2 g(u)}{k}\Big)du\leq 1\right\}\subset\left\{k>0,\ \frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2k(\frac{\ell+L}{\ell})}\Big)dt\leq 1\right\},$$

d'où l'en déduit

$$N_{\varphi_{a,\ell}}(g_\tau)\leq 2k_2\frac{L+\ell}{\ell}N_{\varphi_{0,L+\ell}}(g). \tag{4.20}$$

Finalement,

4. si $h_0>1$ et $k_1<1$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2kh_0(\frac{\ell+L}{\ell})}\Big)dt &\leq \frac{\ell}{2h_0(\ell+L)}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{k}\Big)dt\\ &\leq \frac{k_1}{2h_0}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2 g(u)}{k}\Big)du+\frac{1}{2}\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2 g(u)}{k}\Big)du+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

donc

$$\left\{k>0,\ \frac{1}{L+\ell}\int_0^{L+\ell}\varphi\Big(u,\frac{k_2 g(u)}{k}\Big)du\leq 1\right\}\subset\left\{k>0,\ \frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varphi\Big(t,\frac{g(t+\tau)}{2kh_0(\frac{\ell+L}{\ell})}\Big)dt\leq 1\right\},$$

d'où l'en déduit

$$N_{\varphi_{a,\ell}}(g_\tau)\leq 2h_0k_2\frac{L+\ell}{\ell}N_{\varphi_{0,L+\ell}}(g). \tag{4.21}$$

Pour conclure, il suffit alors de choisir $K=\max(2h_0k_1k_2,2k_1k_2,2k_2,2h_0k_2)$. □

Remarque 4.2.19. *Comme conséquence immédiate du Lemme 4.2.18, on obtient l'estimation suivante*

$$N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f_\tau,f_\tau^{(R)})\right)\leq K\frac{L+\ell}{\ell}N_{\varphi_{0,L+\ell}}\left(d(f,f^{(R)})\right) \tag{4.22}$$

pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathscr{U}$ localement φ-integrable.

Le résultat d'approximation des fonctions de $W_\varphi^{(d)}-t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ par leurs tronquées nécessite l'introduction d'une condition du type Δ_2 sur φ.

Définition 4.2.20. *On dit que φ vérifie la condition-$\Delta_2^{W^1}$ ($\varphi\in\Delta_2^{W^1}$) s'il existe $k>1$ et une fonction non négative mesurable h telle que $\rho_{W^1}(h)<+\infty$ et $\varphi(t,2u)\leq k\varphi(t,u)+h(t)$ pour tout $u\geq 0$ et $\mu-p.p.$ $t\in[0,1]$.*

On dit que φ vérifie la condition-$\nabla_2^{W^1}$ ($\varphi\in\nabla_2^{W^1}$) si sa fonction complémentaire ψ donnée par la formule

$$\psi(t,u) = \sup_{v\geq 0}\{uv - \varphi(t,v)\}, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } u \geq 0$$

vérifie la condition $\Delta_2^{W^1}$.

Remarque 4.2.21. — *On peut définir de manière similaire la condition $\Delta_2^{S^1}$ en remplaçant $\rho_{W^1}(h) < +\infty$ par $\rho_{S^1}(h) < +\infty$.*

— *Compte tenu de [47], de la Remarque 3.2.2 et de la périodicité de φ par rapport au paramètre t, on a les équivalences suivantes :*

$$\varphi \in \Delta_2^{W^1} \iff \varphi \in \Delta_2^{B^1} \iff \varphi \in \Delta_2^{L^1} \iff \varphi \in \Delta_2^{S^1}. \tag{4.23}$$

A présent, nous sommes en mesure de démontrer le résultat d'approximation suivant. Notons qu'à ce niveau, on supposera grâce au théorème de Fréchet que $\mathscr{U}$ est un espace de Banach. Soit d la métrique induite par la norme de $\mathscr{U}$.

Proposition 4.2.22. *Si $f \in W_\varphi^{(d)} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ alors $f^{(R)} \in W_\varphi^{(d)} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$. Si de plus, φ est h^S−bornée et vérifie la condition $\Delta_2^{W^1}$, alors*

$$\omega_{W^\varphi}^{(d)}\left(f(.), f^{(R)}(x_0,.)\right) \to 0 \text{ lorsque } R \to +\infty. \tag{4.24}$$

Démonstration : On reprendra les idées de Hillmann [31]. Soit $f \in W_\varphi^{(d)} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$, et $\varepsilon > 0$. Alors, l'estimation suivante ([25])

$$d\left(f^{(R)}(x_0,t), f^{(R)}(x_0,z)\right) \leq 2d\left(f(t), f(z)\right) \tag{4.25}$$

valable pour tous $z,t \in \mathbb{R}$, montre que $f^{(R)} \in W_\varphi^{(d)} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$. En effet, par définition il existe $L > 0$ tel que $S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(f,\varepsilon)$ est r.d.. Alors, en utilisant l'inégalité (4.25), on conclut que

$$S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(f,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(f^{(R)},\varepsilon).$$

Donc $S_{\varphi,\ell}^{(\rho)}T(f^{(R)},\varepsilon)$ est r.d..

Montrons maintenant l'approximation (4.24). Soient $\ell > 0$, $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et L la longueur d'inclusion associée à ε. Choisissons τ tel que $\tau \in S_{\varphi,\ell}^{(d)}T(\frac{\varepsilon}{3},f)\bigcap[a,a+L]$.

Par le choix de τ et l'inégalité (4.25), on aura,

$$N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f,f^{(R)})\right) \leq N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f,f_\tau)\right) + N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f_\tau,f_\tau^{(R)})\right) + N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f_\tau^{(R)},f^{(R)})\right).$$

Grâce au lemme 4.2.18, nous pouvons affirmer l'inégalité suivante

$$N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f,f^{(R)})\right) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + K\frac{L+\ell}{\ell}N_{\varphi_{0,L+\ell}}\left(d(f,f^{(R)})\right).$$

Mais,

$$N_{\varphi_{0,L+\ell}}\left(d(f,f^{(R)})\right) < \frac{\ell}{K(L+\ell)}\frac{\varepsilon}{3},$$

pour R suffisamment grand et φ satisfait la condition $\Delta_2^{W^1}$. Comme le choix de R ne dépend pas de a, on conclut que

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} N_{\varphi_{a,\ell}}\left(d(f,f^{(R)})\right) = \omega^{(d)}_{S^{\varphi}_{\ell}}\left(f,f^{(R)}\right) < \varepsilon$$

et donc,

$$\omega^{(d)}_{W^{\varphi}}\left(f,f^{(R)}\right) < \varepsilon.$$

□

Remarque 4.2.23. *Dans le cas d'un espace métrique, on ne sait pas démontrer si l'inégalité 4.25 est vraie ou fausse. Ce qui revient a démontrer, en d'autres termes que l'opérateur projection radiale est* $2-$*Lipshitzienne ou plus généralement* $k-$*Lipshitzienne.*

Le Théorème de caractérisation des fonctions de $W^{(d)}_{\varphi} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ s'énonce comme suit :

Théorème 4.2.24. *Pour toute fonction de Musielak-Orlicz* φ*,* h^S-*bornée et vérifie la condition* $\Delta_2^{W^1}$*, on a*

$$W^{(d)}_{\varphi} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U}) = W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})\bigcap \widetilde{W}^0_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U}).$$

Démonstration : On a vu que $W^{(d)}_{\varphi} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U}) \subseteq W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})$. D'autre part, par la Proposition 4.2.22

$$\begin{aligned} J_{\varphi}\Big(f(.),x_0(.)\Big) &\leq J_{\varphi}\Big(f(.),f^{(R)}(x_0,.)\Big) + J_{\varphi}\Big(f^{(R)}(x_0,.),x_0(.)\Big) \\ &= J_{\varphi}(f(.),f^{(R)}(x_0,.)) \leq \omega^{(d)}_{W^{\varphi}}(f,f^{(R)}) \to 0 \text{ lorsque } R\to+\infty. \end{aligned}$$

Donc $W^{(d)}_{\varphi} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U}) \subseteq \widetilde{W}^0_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U})$, par conséquent,

$$W^{(d)}_{\varphi} - t.p.(\mathbb{R},\mathscr{U}) \subseteq W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})\bigcap \widetilde{W}^0_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U}).$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $f \in W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})\bigcap \widetilde{W}^0_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et $t_0 \in [0,1]$ tel que $\sup_{t\in[0,1]}\varphi(t,u) = \varphi(t_0,u)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta > 0$ (dépendant uniquement de ε) tel que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $\ell>0$ (suffisamment grand)

$$\frac{1}{\ell}\int_{A\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),x_0\right)\Big)dt\leq\varepsilon,\ \frac{1}{\ell}\int_{A\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f_\tau(t),x_0\right)\Big)dt\leq\varepsilon \tag{4.26}$$

pour tout ensemble A tel que $\overline{\mu}_W(A)\leq\delta$.
Par la presque périodicité de f au sens de Danilov et le Lemme 4.2.16, soit $\tau\in\mathbb{R}$ un δ-presque période au sens de Danilov associé à f, c'est à dire τ est tel que

$$\overline{\mu}_W\left(A_\varepsilon\right)\leq\delta$$

où

$$A_\varepsilon=\Big\{t\in\mathbb{R}:d(f(t),f_\tau(t))>\frac{1}{3}\varepsilon\varphi^{-1}\left(t_0,1\right)\Big\}.$$

D'où l'en déduit alors

$$\frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),x_0\right)\Big)dt\leq\frac{1}{3}\varepsilon,\ \frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f_\tau(t),x_0\right)\Big)dt\leq\frac{1}{3}\varepsilon \tag{4.27}$$

d'autre part, on a pour tout $\ell>0$ (suffisamment grand)

$$\frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon^c\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),f_\tau(t)\right)\Big)dt\leq\frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon^c\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,\frac{1}{3}\varepsilon\varphi^{-1}\left(t_0,1\right)\Big)dt\leq\frac{1}{3}\varepsilon\overline{\mu}_W\left(A_\varepsilon^c\right)\leq\frac{1}{3}\varepsilon. \tag{4.28}$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\Big(t,d\left(f(t),f_\tau(t)\right)\Big)dt &\leq \frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),f_\tau\right)\Big)dt\\ &+ \frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon^c\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),f_\tau(t)\right)\Big)dt\\ &\leq \frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),x_0\right)\Big)dt\\ &+ \frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f_\tau(t),x_0\right)\Big)dt\\ &+ \frac{1}{\ell}\int_{A_\varepsilon^c\cap[x,x+\ell]}\varphi\Big(t,d\left(f(t),f_\tau(t)\right)\Big)dt,\end{aligned}$$

on déduit, grâce aux estimations (4.27) et (4.28), que :

$$\frac{1}{\ell}\int_x^{x+\ell}\varphi\Big(t,d\left(f(t),f_\tau(t)\right)\Big)dt<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 4.2.24. □

Lorsque $\mathscr{U}$ est un espace de Banach, nous obtenons la caractérisation suivante des fonctions $W^\varphi-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$, sans aucune condition supplémentaire sur φ.

Théorème 4.2.25. *Pour toute fonction de Musielak-Orlicz φ,*

$$W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})=W_{\mathscr{D}}(\mathbb{R},\mathscr{U})\bigcap\widetilde{W}^{0}_{\varphi}(\mathbb{R},\mathscr{U}).$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du Théorème 3.3.6. Notons que cette caractérisation reste aussi vraie dans le cas de $S^{\varphi}_{\ell}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$.

4.3 Approximation de Bochner-Fejèr dans $S^{\varphi}_{\ell}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$ et $W^{\varphi}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$

Dans le reste de ce chapitre, on supposera que $(\mathscr{U},\|.\|)$ est un espace de Banach. Le résultat d'approximation des fonctions de $S^{\varphi}_{\ell}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$ et $W^{\varphi}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$ par des suites de polynômes de Bochner-Fejèr repose sur l'estimation suivante

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{G^{\varphi}}\leq C_{2}\left\|f\right\|_{G^{\varphi}}$$

où G^{φ} désigne S^{φ}_{ℓ} ou W^{φ}.

Lemme 4.3.1 (L'inégalité auxiliaire dans $S^{\varphi}_{\ell}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$ et $W^{\varphi}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$)**.** *Soit $f\in S^{\varphi}_{\ell}-p.p.\left(\mathbb{R},\mathscr{U}\right)$ et $Q^{f}_{\varepsilon,n}$ une suite de Bochner-Fejèr associée à f. Supposons que φ est $h^{S}-$bornée. Alors il existe une constante $C>0$, qui depend que de φ telle que pour tout $\ell>0$*

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}}\leq C\left\|f\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}}$$

et donc

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{W^{\varphi}}\leq C\left\|f\right\|_{W^{\varphi}}.$$

Démonstration : Soit x un nombre réel arbitraire fixe, $a>0$. Nous avons par définition $Q^{f}_{\varepsilon,n}(t)=(f*K_{\varepsilon,n})(t)=\mathscr{M}_{x}\left(f\left(x+t\right)K_{\varepsilon,n}\left(x\right)\right)$. Nous avons pour tout réel $k>0$

$$\begin{aligned}\rho_{S^{\varphi}_{\ell}}\left(\frac{1}{k}\left(Q^{f}_{\varepsilon,n}\right)\right) &= \sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a}^{a+\ell}\varphi\left(t,\frac{1}{k}\left\|\mathscr{M}_{x}\left(f\left(x+t\right)K_{\varepsilon,n}\left(x\right)\right)\right\|\right)dt\\ &\leq \sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a}^{a+\ell}\varphi\left(t,\mathscr{M}_{x}\left(\frac{1}{k}\left\|f\left(x+t\right)\right\|K_{\varepsilon,n}\left(x\right)\right)\right)dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient les inégalités suivantes :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a}^{a+\ell}\varphi\left(t,\mathscr{M}_{x}\left(\frac{1}{k}\left\|f\left(x+t\right)\right\|K_{\varepsilon,n}\left(x\right)\right)\right)dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\mathscr{M}_x\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dt\\
&= \sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varliminf_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Fatou, il vient que

$$\begin{aligned}
&\sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\varliminf_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt\\
&\leq \varliminf_{X\to\infty}\sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_a^{a+\ell}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt.
\end{aligned}$$

On utilisera le théorème de Fubini, la h^S-bornitude de φ et le changement de variable suivant : $x=u$ et $x+t=v$, on aura donc

$$\begin{aligned}
&\sup_{a\in\mathbb{R}}\varliminf_{X\to\infty}\frac{1}{\ell}\frac{1}{2X}\int_a^{a+\ell}\int_{-X}^{+X}\left\{K_{\varepsilon,n}(x)\,\varphi\left(t,\frac{1}{k}\|f(x+t)\|\right)\right\}dxdt\\
&\leq \varliminf_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}K_{\varepsilon,n}(u)\left(\sup_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a+u}^{a+u+l}\left\{\varphi\left(v-u,\frac{1}{k}\|f(v)\|\right)\right\}dv\right)du\\
&\leq \varliminf_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}K_{\varepsilon,n}(u)\left(\sup_{a'\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a'}^{a'+\ell}\left\{k_1\varphi\left(v,\frac{k_2}{k}\|f(v)\|\right)\right\}dv+\sup_{a'\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a'}^{a'+\ell}H(v,u)dv\right)du\\
&\leq \sup_{a'\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{a'}^{a'+\ell}\left\{k_1\varphi\left(v,\frac{k_2}{k}\|f(v)\|\right)\right\}dv+\varliminf_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}K_{\varepsilon,n}(u)\,h(u)du\\
&\leq k_1\rho_{S_\ell^\varphi}\left(\frac{k_2f}{k}\right)+h_0.
\end{aligned}$$

Nous devons considérer les cas suivants.
Si $h_0\leq 1$ et $k_1\leq 1$,
alors,

$$\rho_{S_\ell^\varphi}\left(\frac{1}{2k}\left(Q_{\varepsilon,n}^f\right)\right)\leq\frac{k_1}{2}\rho_{S_\ell^\varphi}\left(\frac{k_2f}{k}\right)+\frac{h_0}{2}\leq\frac{1}{2}\rho_{S_\ell^\varphi}\left(\frac{k_2f}{k}\right)+\frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\left\{k>0,\rho_{S_\ell^\varphi}\left(\frac{k_2f}{k}\right)\leq 1\right\}\subset\left\{k>0,\rho_{S_\ell^\varphi}\left(\frac{1}{2k}\left(Q_{\varepsilon,n}^f\right)\right)\leq 1\right\}$$

ce qui entraîne

$$\left\| Q^f_{\varepsilon,n} \right\|_{S^\varphi_\ell} \leq 2k_2 \|f\|_{S^\varphi_\ell}.$$

Si $h_0 < 1$ et $k_1 > 1$,
alors,

$$\rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{1}{2kk_1}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) + \frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\left\{k > 0, \rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) \leq 1\right\} \subset \left\{k > 0, \rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{1}{2kk_1}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq 1\right\}$$

ce qui entraîne

$$\left\| Q^f_{\varepsilon,n} \right\|_{S^\varphi_\ell} \leq 2k_2 k_1 \|f\|_{S^\varphi_\ell}.$$

Si $h_0 > 1$ et $k_1 > 1$, on aura

$$\rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) + \frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\left\{k > 0, \rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) \leq 1\right\} \subset \left\{k > 0, \rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{1}{2kh_0k_1}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq 1\right\}$$

ce qui entraîne

$$\left\| Q^f_{\varepsilon,n} \right\|_{S^\varphi_\ell} \leq 2h_0 k_1 k_2 \|f\|_{S^\varphi_\ell}.$$

Finalement, si $h_0 > 1$ et $k_1 < 1$, on aura

$$\rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{1}{2kh_0}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) + \frac{1}{2}$$

d'où l'en déduit

$$\left\{k > 0, \rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{k_2 f}{k}\right) \leq 1\right\} \subset \left\{k > 0, \rho_{S^\varphi_\ell}\left(\frac{1}{2kh_0}\left(Q^f_{\varepsilon,n}\right)\right) \leq 1\right\}$$

ce qui entraîne

$$\left\| Q^f_{\varepsilon,n} \right\|_{S^\varphi_\ell} \leq 2k_2 h_0 \|f\|_{S^\varphi_\ell}.$$

□

Il suffit alors de poser $C = \max\Big(2k_2, 2k_1k_2, 2h_0k_2, 2h_0k_1k_2\Big)$, on obtient ainsi

$$\left\| Q^f_{\varepsilon,n} \right\|_{S^\varphi_\ell} \leq C \|f\|_{S^\varphi_\ell}. \tag{4.29}$$

La constante C étant indépendante de ℓ, d'où par passage à la limite dans (4.29)

$$\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{W^{\varphi}}\leq C\left\|f\right\|_{W^{\varphi}}. \tag{4.30}$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 4.3.2. *Supposons que φ est $h^{S}-$bornée. A toute fonction $f\in S^{\varphi}_{\ell}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ (resp. $f\in W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$) correspond une suite approximante de Bochner-Fejèr au sens de la norme $\|.\|_{S^{\varphi}_{\ell}}$. (resp. $\|.\|_{W^{\varphi}}$.)*

Démonstration : Soit P_{ε} un polynôme trigonométrique (ou même une fonction $u.p.p$) tel que

$$\|f-P_{\varepsilon}\|_{S^{\varphi}_{\ell}}\leq\frac{\varepsilon}{2(C+1)}$$

où C est une constante. Soit $Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}$ le polynôme de Bochner-Fejèr associé à P_{ε}, on sait qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\left\|P_{\varepsilon}-Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{\infty}\leq\frac{\varepsilon}{2},\quad\forall n\geq n_0.$$

En utilisant le Lemme 4.3.1 et la linéarité de l'opérateur de Bochner-Fejèr on obtient

$$\begin{aligned}\left\|f-Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}} &\leq \|f-P_{\varepsilon}\|_{S^{\varphi}_{\ell}}+\left\|P_{\varepsilon}-Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}}+\left\|Q^{f}_{\varepsilon,n}-Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}}\\ &\leq \|f-P_{\varepsilon}\|_{S^{\varphi}_{\ell}}+\left\|P_{\varepsilon}-Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{\infty}+\left\|Q^{f-P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}}\\ &\leq \left\|P_{\varepsilon}-Q^{P_{\varepsilon}}_{\varepsilon,n}\right\|_{\infty}+(C+1)\|f-P_{\varepsilon}\|_{S^{\varphi}_{\ell}}\end{aligned}$$

d'où l'en déduit que

$$\left\|f-Q^{f}_{\varepsilon,n}\right\|_{S^{\varphi}_{\ell}}\leq\varepsilon,\quad\forall n\geq n_0.$$

□

4.4 Lien entre les deux espaces $B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ et $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$

Nous avons vu que $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})\hookrightarrow B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$. Rappelons aussi que $B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ est un espace de Banach et que $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ n'est pas complet.
Dans ce qui suit, en se basant sur le fait que les pseudo-modulaires $\rho_{B^{\varphi}}$ et $\rho_{W^{\varphi}}$ coïcident sur $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ (voir proposition ci-après), nous montrerons que l'espace $B^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$ n'est autre que le complété de l'espace $W^{\varphi}-p.p.(\mathbb{R},\mathscr{U})$. Ce résultat est établi dans [6] dans le cas sans paramètre. La preuve est basée entre autre sur l'utilisation des polynômes de Bochner Fejèr et l'inégalité auxiliaire $\rho_{B^{\varphi}}(\sigma^{f}_{n})\leq\rho_{B^{\varphi}}(f)$). Cette inégalité ne s'étend pas au cas des espaces du type Musielak-Orlicz, toutefois grâce au

lemme 3 de [22], nous pouvons généraliser ce résultat au cas où φ dépend d'un paramètre.

Lemme 4.4.1. *Soit $f_n \subset W^{\varphi} - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big))$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{W^{\varphi}} = 0$ avec, $f \in W^{\varphi} - p.p.$. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{W^{\varphi}}(f_n) = \rho_{W^{\varphi}}(f).$$

La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemma 3 dans [22] dans le cas de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Lemme 4.4.2. *Soit $f \in W^{\varphi}(\mathbb{R}, \mathscr{U})$, alors la limite*

$$\lim_{\ell\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right) d\mu \tag{4.31}$$

existe. En outre, si f est une fonction presque périodique de Bohr, nous avons :

$$\lim_{\ell\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right) d\mu = \lim_{\ell\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right) d\mu = M\left(\varphi\left(., \|f\|\right)\right). \tag{4.32}$$

Démonstration : La preuve de (4.31) est analogue à celle du lemme 3 dans [5]. Montrons maintenant (4.32). Pour une fonction donnée f, on note f_x la fonction $f(x+.)$. Nous savons que $M\left(\varphi\left(., \|f\|\right)\right) = M\left(\varphi\left(., \|f_x\|\right)\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(t, \|f(t)\|) \in \{u.p.p\}$, comme conséquence directe des propriétés de φ et du fait que $f \in \{u.p.p\}$ [20]. Il est prouvé dans ([11], page 14, (3)) que

$$M\left(\varphi\left(., \|f\|\right)\right) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right) dt + \theta\left(\varepsilon + \frac{2Al_{\varepsilon}}{\ell}\right) \tag{4.33}$$

est vrai pour tout $\ell > 0$, $\varepsilon > 0$. Le second terme de la partie droite de 4.33 est l'erreur de représentation de $M\left(\varphi\left(., \|f\|\right)\right)$ par l'intégrale $\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right) d\mu$ et dépend de ε, A, l_{ε} et ℓ, dont ε, ℓ sont indépendants de f et φ, et $A = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right)$, l_{ε} est la longueur d'inclusion de $\varphi(., \|f\|)$ associé à ε et θ est un nombre réel en fonction de f, φ et ℓ et satisfaisant $|\theta| \leq 1$. Comme pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on a f_x appartient à $\{u.p.p\}$, nous obtenons comme dans (4.33) ce qui suit

$$M\left(\varphi\left(., \|f_x\|\right)\right) = \frac{1}{\ell} \int_x^{x+\ell} \varphi\left(t, \|f(t)\|\right) dt + \theta(x, \ell)\left(\varepsilon + \frac{2Al_{\varepsilon}}{\ell}\right)$$

où $|\theta(x,\ell)| \leq 1$. Ainsi, pour chaque $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell}\int_{x}^{x+\ell}\varphi(t,\|f(t)\|)\,dt &= M(\varphi(.,\|f_x\|)) - \theta(x,\ell)\left(\varepsilon + \frac{2Al_{\varepsilon}}{\ell}\right)\\ &\leq M(\varphi(.,\|f\|)) + \left(\varepsilon + \frac{2Al_{\varepsilon}}{\ell}\right)\end{aligned}$$

par conséquent

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{x}^{x+\ell}\varphi(t,\|f(t)\|)\,dt \leq M(\varphi(.,\|f\|)) + \left(\varepsilon + \frac{2Al_{\varepsilon}}{\ell}\right).$$

En faisant tendre ℓ vers l'infini on obtient

$$\lim_{\ell\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{x}^{x+\ell}\varphi(t,\|f(t)\|)\,dt \leq M(\varphi(.,\|f\|)) + \varepsilon$$

comme ε est arbitraire, il s'en suit que

$$\lim_{\ell\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\ell}\int_{x}^{x+\ell}\varphi(t,\|f(t)\|)\,dt \leq M(\varphi(.,\|f\|)).$$

L'inégalité inverse est vraie. Enfin, nous avons l'égalité recherché. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la propositions suivante :

Proposition 4.4.3. *Pour toute fonction f dans $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ on a,*

$$\rho_{B^{\varphi}}(f) = \rho_{W^{\varphi}}(f).$$

Démonstration : Nous avons d'après le Lemme 4.4.2

$$\rho_{B^{\varphi}}(f) = \rho_{W^{\varphi}}(f), \quad \forall f \in \{u.p.p\},$$

en particulier pour tout polynôme trigonométrique généralisé.
Soit $f \in W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big))$ et (σ_n^f) une suite de polynômes de Bochner Fejèr associée, d'après le Lemme 4.4.1

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{W^{\varphi}}(\sigma_n^f) = \rho_{W^{\varphi}}(f).$$

D'une autre part, $f \in B^{\varphi}-p.p.$ $(W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big) \subset B^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big))$, grâce au lemme 3 de [22]

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{B^{\varphi}}(\sigma_n^f) = \rho_{B^{\varphi}}(f).$$

En tenant compte du fait que $\rho_{B^\varphi}(f) = \rho_{W^\varphi}(f)$, $\forall f \in \mathscr{A}$, en déduit que

$$\rho_{B^\varphi}(f) = \rho_{W^\varphi}(f), \quad \forall f \in W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)).$$

$\square$

Le théorème suivant concerne la caractérisation du complété de l'espace de Weyl-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Théorème 4.4.4. *L'espace $B^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ est le complété de l'espace $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ au sens de la modulaire ρ_{B^φ} et des normes correspondantes.*

Démonstration : L'espace $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ n'est pas complet au sense de la modulaire ρ_{W^φ} et $\rho_{B^\varphi}-$dense dans $B^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$. D'après la Proposition 4.4.3, on déduit que $B^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ est le complété de $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$. $\square$

Remarque 4.4.5. *Grâce à la Proposition 4.4.3, on peut conclure que :*

1. *L'espace $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ hérite toutes les propriétés géométriques de l'espace $B^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$.*
2. *Rappelons le résultat général d'analyse fonctionnelle : si A est un sous espace dense dans un espace vectoriel normé E, alors $A^* \simeq E^*$. Comme conséquence directe, nous pouvons affirmer que les deux espaces duals $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)^*$ et $B^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)^*$ sont isométriquement isomorphes, en particulier, si $\varphi \in \Delta_2^{B^1} \bigcap \nabla_2^{B^1}$, alors $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)^* \simeq B^\psi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$, puisqu'en vertu de [22], nous avons $B^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)^* \simeq B^\psi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$.*
3. *L'espace $W^\varphi - p.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ n'est jamais reflexif.*

Conclusion générale et quelques perspectives de recherche

Notre contribution a porté sur l'étude de quelques propriétés structurelles et géométriques des espaces du type Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Des résultats fondamentaux portant sur plusieurs aspect sont énoncés :

— Une caractérisation de la classe $B^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathbb{E}\big)$ et $W_{\varphi}^{(d)}-t.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$, ($\mathscr{U}$ est un espace de Banach).

— Le résultat d'approximation des fonctions de $B^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$, $W^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$ et $S_{\ell}^{\varphi}-p.p.\big(\mathbb{R},\mathscr{U}\big)$, par des polynômes de Bochner Fejèr, ($\mathscr{U}$ est un espace de Banach).

— L'étude des propriétés de convexité intermédiaires à la stricte convexité et l'uniforme convexité de la classe $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$. Tous ces résultats considèrent le cas ou cet espace est muni de sa norme de Luxemburg.

— Le problème d'existence de l'élément de meilleure approximation dans l'espace $\widetilde{B}^{\varphi}-p.p.$.

— La comparaison entre le deux espaces $B^{\varphi}-p.p.$ et $W^{\varphi}-p.p.$.

De nombreuses questions de nature géométrique et même topologique restent encore posées dans ces espaces et de manière plus générale dans les espaces de type Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.
Comme perspectives de recherche, nous envisageons développer les points suivants :

1. Établir le lien entre les classes de fonctions presque périodiques du type Musielak-Orlicz (via les trois critères : critère de Bohr, critère de Bochner et critère d'approximation).

2. Etude de la structure géométrique des espaces du type Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques lorsque que celles-ci sont à valeurs dans un espace de Banach (de dimension infinie).

3. Une question importante en théorie des équations différentielles abstraites consiste à étudier l'opérateur de Nemytskii $\mathscr{N}_f$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ étant un espace de Banach) défini par $\mathscr{N}_f(u) := [f(t, u(t))]$. En particulier, sous quelles conditions, l'opérateur $\mathscr{N}_f$ envoie $S^{\varphi} - t.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ dans $S^{\varphi} - t.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ (resp. $W^{\varphi} - t.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$ dans $W^{\varphi} - t.p.\big(\mathbb{R}, \mathscr{U}\big)$).

Nous souhaitons enfin que notre modeste contribution puisse susciter un intérêt et donner lieu à d'autres études dans ce domaine où, de nombreuses questions fondamentales restent encore posées.

Bibliographie

Bibliographie

[1] Albrycht J., *The Theory of Marcinkiewicz Orlicz Spaces.* Dissertationes Math. No. **27** (1962).

[2] Amerio L. et Prouse G., *Almost Periodic Functions and Functional Equations,* Van Nostrand Reinhold, New-York, (1971).

[3] Bardaro C ., Musielak J., Vinti G., *Nonlinear Integral Operators and Applications,* Walter de Gruyter, Berlin-New-York, 2003.

[4] Bedouhene. F., *Caractérisation des propriétés de convexité et d'approximation dans les espaces de type Orlicz de fonctions presque périodiques* Thèse de Magister, UMMTO, 1999.

[5] Bedouhene. F., Morsli M., *On the strict convexity of the Weyl-Orlicz space of almost periodic functions,* Comment. Math. vol. XL (2000), 33-48.

[6] Bedouhene F., *Structure généralerale et métrique des espaces de type Orlicz de fonctions presque périodiques,* Thèse de doctorat, Université Tizi-Ouzou, 2004.

[7] Bedouhene F., Morsli M. and Smaali M., *On some equivalent geometric properties in the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions with Luxemburg norm,* Comment. Math. Univ. Carolin. Volume : 51, Issue : 1 (2010), 25-35.

[8] Bedouhene F., Daoui A., Kourat H., *On some convexity in the Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions with Luxemberg norm,* Comment. Math. Univ. Carol. 53 (2012), 535-547.

[9] Besicovitch A. S., Bohr H., *Almost periodicity and general trigonometric series,* Acta Mathematica, 57 (1931), 203-292.

[10] Besicovitch A. S., *Almost Periodic Functions,* Cambridge University Press, London, (1932).

[11] Besicovitch A.S., *Almost Periodic Functions,* Dover Publications, Inc. New-York (1954).

[12] Bochner S., *Über gewisse Differential- und allgemeinere Gleichungen, deren Lösungen fastperiodisch sind. I. Teil. Der Existenzsatz,* Math. Ann. 102, (1929,) 489-504.

[13] Bohr H., *Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. I. Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen,* Acta math., v. 45, pp. 29-127, 1924.

[14] Bohr. H., Fœlneroe E. *On some types of Functional Spaces,* Acta Math., 76 (1945), 31-155.

[15] Boulahia F., *Étude des propriétés de convexité dans les espaces de type Orlicz,* Thèse de doctorat,2006.

[16] Bruno G. and Grande R., *A compactness criterion in $B^q_{a.p}$ spaces,* Rend. Accad. Naz. Sci. XL Men. Mat. Appl. 20 (1986), 95-121.

[17] Chen, S., *Geometry of Orlicz spaces,* Dissertationes Math. No 356 (1996).

[18] Clarkson J. A. *Uniformly convex space,* Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

[19] Corduneanu C., *Almost Periodic Functions,* Interscience, New-York (1968).

[20] Corduneanu C., Gheorghiu N., Barbu V., *Almost periodic function,* Chelsea Publishing Company (1989).

[21] CuiY.T. and Tao Z., *Kadec-Klee property in Musielak-Orlicz spaces equipped with the Luxemburg norm,* Sci. Math. 1,3 (1998) 339-345.

[22] Daoui A., Morsli M., Smaali M., *Duality properties and Riesz representation theorem in the Besicovitch Musielak-Orlicz space of almost periodic functions,* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. 53 (2012), issue 2, pp. 237-251.

[23] Daoui A., *Sur de nouvelles classes de fonctions presque périodiques,* Thèse de Doctorat, Université Tizi-Ouzou, 2015.

[24] Danilov L.I., *On Weyl almost periodic selections of multivalued maps,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 316, (2006), 110.127.

[25] Danilov L.I., *On Besicovitch almost periodic selections of multivalued maps,* Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki 1 (2008), 97-120.

[26] Doss. R., *On Riemann integrability and almost periodic functions,* Compositio Mathematica 12 (1956), 271-283.

[27] Fink A.M., *Almost periodic differential equations,* Springer Verlag (1974).

[28] Fœlner E., *On the structure of generalized almost periodic functions,* Danske Vid. Selsk. Math. Phys., Medd., 21 n.11 (1945)

[29] Guter. R. S., Kudryavtsev. L. D., Levitan. B. M., *Elements of the Theory of Functions,* Pergamon Press, Oxford, 1966.

[30] Hillmann T.R., *Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions,* Ph.D. Dissertation, University of California, (1977).

[31] Hillmann T.R., *Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions*, Real and Stochastic Analysis, Wiley, (1986), 119-167.

[32] Hŏrmander L., *Linear differential operators with partial derivatives.* Moskva 1965 (in Russian, translated from English).

[33] Hudzik H., *Strict convexity of Musielak- Orlicz spaces with Luxemburg 's Norm,* Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 39, No 5-6 (1981), 235-247.

[34] Hudzik H., Kaminska A., *On uniformly convexifiable and B-convex Musielak-Orlicz spaces,* Comment. Math. 25 (1987), 59-75.

[35] Kaminska A., Płuciennik R., *Some theorems on compactness in generalized Orlicz spaces with application of the Δ_∞-condition,* Funct. Approx. Comment. Math. 10 (1980), 135-146.

[36] Kaminska A., *On some compactness criterion for Orlicz subspace $E_\Phi(\Omega)$,* Comment. Math. Prace Mat. 22 (1981), 245–255.

[37] Kaminska, A., *On some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo 2 (1984), 63-72.

[38] Kovanko. A. S., *Sur la compacité des systèmes de fonctions presque périodiques généeralisées de H. Weyl,* C.R. (Doklady) Ac. Sc. URSS 43 n. 7 (1944), 275-276.

[39] Levitan. B. M., *Almost-Periodic Functions,* Moscow 1953. (Russian)

[40] Luxemburg W.A.J., *Banach Function Spaces,* Ph.D. Dissertation, Delft, (1955).

[41] Lyusternik L.A., Sobolev V.I., *A short course in functional analysis,* Vysshaya Shkola, Moscow 1982. (Russian)

[42] Megginson R.E., *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag New York, Inc., No 183 (1998).

[43] Morsli M., *Espace de Besicovitch Orlicz de fonctions presque périodique. Structure générale et géométrie,* Thèse de Doctorat, Université Tizi-Ouzou, 1996.

[44] Morsli M. and Bedouhene F., *On the strict convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions,* Revista Matematica Complutense 16, Num.2 (2003), 399-415.

[45] Morsli M. and Bedouhene F., *On the uniform convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions with Orlicz norm,* Colloquium Mathematicum, Vol. 102, No 1 (2005), 97-111.

[46] Morsli M., Smaali M., *Characterization of the uniform convexity of the Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions* Commentationes Mathematicae, Prace matematyczne, XLVI (2), (2006), 215-231.

[47] Morsli M., Smaali M., *Characterization of the strict convexity of the Besicovitch Musielak-Orlicz space of almost periodic functions,* Comment. Math. Univ. Carolin. 48,3 (2007), 443-458.

[48] Musielak J., Orlicz W., *Orlicz spaces and modular spaces,* Lecture Notes in Math. No.1034 Springer-Verlag, New-York (1983).

[49] Musielak J., *Approximation by nonlinear singular integral operators in generalized Orlicz spaces,* Comment. Math. Prace Mat. 31 (1991), 79-88.

[50] Musielak J., Orlicz W., *On modular spaces,* Studia Math. 18,2 (2003), 49-65.

[51] Orlicz W., *Über eine gewisse Klasse Von Ramen Von Typus B,* Bull. Acta. Pol. Sc. et Lettres, Serie A, (1936), 207-220.

[52] Orlicz W., *Some classes of modular spaces,* Studia Math. 26 (1966), 165-192.

[53] Pankov A. A., *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1990).

[54] Rao M.M., Ren Z.D., *Theory of Orlicz spaces,* Marcel Dekker, Inc. New-York, (1991).

[55] Smaali M., *Étude et application de quelques propri étés géométriques dans les espaces de Calderon Lozanovskii,* Thèse de Doctorat, Université Tizi-Ouzou, 2010.

[56] Svatopluk Fucik, A. Kufner, Oldrich John, *Function Spaces,* (Mechanics : Analysis), Publisher, Springer, 1977.

[57] Vasile I., Istrâţescu, *Strict convexity and complex strict convexity teory and applications* macel dekker, inc. /New-York.basel. ISBN : 0-8247-1796-1

[58] Wang, T., Teng, Y., *Complex locally uniform rotundity of Musielak-Orlicz spaces*, Science in China, 43,2 (2000) 113-121.

[59] Weyl H., *Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen,* Mathematische Annalen 97.1 (1927) : 338-356.

[60] Zaanen, A. C., *Some remarks about the definition of an Orlicz space,* Measure Theory Oberwolfach 1981. Springer Berlin Heidelberg (1982). 263-268.

[61] Zaidman S., *Almost periodic functions in abstract spaces,* Pitman Advanced Publ. Progam. (1985).

[62] Zizler V., *On some rotundity and smoothnes properties of Banach spaces.* Dissert. Math. (Rozsprawy) 87 (1971), 5-33.