

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI OUZOU



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master
en
Mathématiques
Option
Analyse Mathématique et Applications

Thème

**"Sur le théorème de Hausdroff-Young pour les fonctions
presque périodiques".**

Présenté par
Mlle. DJELOUACHI Sabrina

Dirigé par
M. MORSLI Mohamed

Devant le jury

M. MORSLI Mohamed	Professeur	U.M.M.T.O	Rapporteur
M^{me} BEDOUHENE Fazia	Professeur	U.M.M.T.O	Présidente
M^{me} SMAALI Manel	M.C.A	U.M.M.T.O	Examinatrice

Promotion : 2019/2020.

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur le Professeur MORSLI Mohamed qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodigué tout au long de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

Mes remerciements particuliers s'adressent aussi à tous mes enseignants pour leurs présence.

Je remercie ma famille et ma belle famille qui n'ont jamais cessé de m'encourager dans les moments difficiles.

Je remercie également mon mari pour sa patience et son encouragement durant mon travail. Je remercie également mes frères et mes soeurs et leurs enfants pour leurs soutien moral.

Enfin, j'adresse une pensée très particulière à mes amis, je remercie très chaleureusement ma collègue BELKADI Nabila pour ses conseils et son soutien.

Contents

Introduction	2
1 Espace de Banach, dualité	4
1.1 Norme	4
1.2 Espaces de Banach	6
1.3 Espaces de fonction continues	7
1.4 Applications lineaires continues	8
1.5 Dual topologique	8
1.6 Espaces réflexifs	8
1.7 Espace de Hilbert	9
1.8 Représentation de Riesz	12
2 Espace L^p	13
2.1 Quelques préliminaires sur les espaces L^p	13
2.2 Réflexivité de L^p	13
2.3 Le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$	15
2.4 Inégalité de Lyapunov	16
2.5 Opérateur de type(p,q)	17
2.6 Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin	18
2.7 Fonction périodique	18
2.8 Coefficients de Fourier	19
2.9 Inégalité de Young	20
2.10 Inégalité de Hausdorff-young	22
3 Eléments sur les fonctions presque périodiques	23
3.1 Généralités	23
3.2 Polynômes trigonométriques généralisés	24
3.2.1 Valeur moyenne des fonctions u.p.p.	24
3.2.2 Series de Fourier des fonctions u.p.p.	25
3.2.3 Polynômes d'approximation de Bochner-Féjèr	26
3.3 Espaces de fonctions presque periodiques généralisées	27
3.3.1 Espaces de Stepanoff de fonctions presque périodiques	27
3.3.2 Espace de Weyl de fonctions presque periodiques	28

CONTENTS

3.3.3	L'espace de Besicovitch de fonctions presque periodiques	28
3.3.4	Comparaison des espaces $S_l^p p.p.$, $W^p p.p$ et $B^p p.p.$	29
3.3.5	Propriété d'approximation dans $B^p p.p$	29
3.4	Dualité dans les espaces de Besicovitch	30
3.4.1	Propriétés de dualité	30
3.4.2	Inégalité de Hölder dans les espaces de Besicovitch	31
3.5	Préliminaires au théorème de Hausdorff-Young	32
3.5.1	Quelques propriétés des fonctions dans $B^q p.p.$	32
3.5.2	Résultats auxiliaires	33
3.6	Théorème de Hausdorff dans $B^p p.p$	36
3.6.1	Cas des polynômes trigonometriques généralisés	36
3.6.2	Approximation polynômiale dans $B^2 p.p$	37
3.6.3	Caractérisation de la norme $\ P\ _{B^q}$, lorsque $P \in \mathcal{P}$	38
3.6.4	Caractérisation de $\ f\ _{B^q}$, lorsque $f \in B^q p.p.$	40
3.6.5	Theorème de Hausdorff-Young dans $B^q p.p$	40

Introduction

Au cours des deux dernières décennies, la théorie de fonctions presque périodiques s'est développée dans plusieurs directions. Cet intérêt est motivé par ses nombreuses applications, notamment dans l'étude des systèmes et équations différentiels, les systèmes dynamiques et autres problèmes de la physique mathématique. Les ouvrages classiques de C. CORDUNEANU [13], M. FINK [2] et AMERIO et PROUSE [3], donnent une belle présentation des méthodes et des résultats classiques sur ce sujet.

Ces fonctions sont d'abord définies en termes de propriétés de translation, généralisation la périodicité usuelle. Elles possèdent en fait une autre caractérisation de nature topologique: Ce sont les limites (au sens de la norme de l'espace ambiant) de polynômes trigonométriques. Cette dernière caractérisation a donné lieu à différentes extensions.

Dans la monographie [4], une généralisation de la notion de presque périodicité est donnée dans le cadre des espaces L^p , obtenant ainsi, respectivement les classes de Stepanoff, Weyl et Besicovitch.

Dans le cadre de ce mémoire, il sera question des espaces de Besicovitch de fonctions presque périodiques.

Nous présentons certains éléments concernant l'analyse de Fourier dans cet espace. L'objectif étant la généralisation du théorème classique de Hausdorff-Young à la classe des fonctions presque périodiques au sens de Besicovitch. Pour cela, nous adoptons le plan suivant: Le mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit:

Le chapitre 1 est introductif et vise à présenter les différentes notions nécessaires pour la compréhension du mémoire: Espace de Banach, Espace de fonctions continues et Représentation de Riesz.

Le chapitre 2 à certains résultats dans les espaces $L^p(\mathbb{T})$: inégalité de Lyapunov, théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, puis nous attaquons les fonctions périodiques, l'inégalité de Young et l'inégalité de Hausdorff-Young.

Enfin, le chapitre 3 se propose de présenter une version du théorème de Hausdorff-Young, dans le cadre des espaces de Besicovitch des fonctions presque périodiques. Nous suivons pour cela les démarches et méthodes utilisées dans [1], que nous développons et dont nous précisons certains aspects.

Chapter 1

Espace de Banach, dualité

1.1 Norme

Définition 1.1. [14][15] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ noté $\|\cdot\|$, est appelée **norme** sur E si elle vérifie les conditions suivantes:

- a) $\|x\| \geq 0$, pour tout $x \in E$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Définition 1.2. Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme.

Exemples de normes dans \mathbb{K}^n où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} :

- 1) La norme $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^n |x_k|$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. est la norme produit formée à partir de la norme usuelle sur \mathbb{K} .
- 2) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, définie une norme sur \mathbb{K}^n .
- 3) Soit $p \in [1, +\infty[$. Dans l'espace vectoriel de dimension finie \mathbb{K}^n , on définit la norme $\|x\|_p$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p=2$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on reconnaît la norme euclidienne canonique dans \mathbb{R}^n . L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$, a pour nom "**l'inégalité de Minkowski**". Cette inégalité peut se déduire de **l'inégalité de Hölder**.

Proposition 1.1. Inégalité de Hölder:

Soient $p, q > 1$, des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Dans le cas $p=q=2$, on reconnaît l'inégalité de Schwarz.

preuve. Il s'agit d'une inégalité de convexité classique, qui utilise simplement la concavité du logarithme. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, pour tous réels $a, b > 0$, on a :

$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \leq \ln \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right).$$

En prenant l'exponentielle de cette inégalité, on obtient $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$. Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, appliquons l'inégalité précédente aux réels

$$a = \frac{|x_j|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p}, \quad b = \frac{|y_j|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} = \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

On obtient

$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

En sommant ces inégalités, pour j entre 1 et n , il vient

$$\frac{\sum_{j=1}^n |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

et l'inégalité de Hölder est obtenue.

Proposition 1.2. Inégalité de Minkowski Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. Alors,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

preuve. soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. On a

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des deux termes à droite de cette inégalité on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p-1},$$

de même,

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p-1}.$$

Par conséquent ,

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1},$$

et donc $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.3. (suite de Cauchy.) Une suite $(x_k)_k$, d'éléments d'un espace normé E est dite suite de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \forall k, l \geq N, \Rightarrow \|x_k - x_l\| \leq \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.4. Espace de Banach: Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

Rappel : Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de points de E . On appelle série de terme général x_n la suite définie par: $S_0 = x_0$, $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$, $n \geq 1$, et on la note $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$. On appelle x_n le n -ième terme et S_n la n -ième somme partielle de la série. La série est souvent appelée "série de terme général x_n " ou simplement $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$. On dit que la série converge vers S si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, dans E . S est alors appelé la somme de la série et on écrit $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. De plus, $R_n = S - S_n$, est appelé le reste d'ordre n de la série; c'est la somme de la série ayant comme k -ième terme x_{n+k} . Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

On dit que la série dans E de terme général x_n est normalement convergente si la série numérique (de réels positifs) $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$, est convergente.

Théorème 1.1.

1. Soit E un espace de Banach. Alors, toute série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, normalement convergente est convergente dans E .
2. Réciproquement, soit E un espace vectoriel normé dans lequel toute série normalement convergente est convergente. Alors, E est un espace de Banach.

preuve. Supposons que E est un espace de Banach et que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, est une série normalement convergente dans E . On a,

$$\|S_{n+k} - S_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i\| = \tilde{S}_{n+k} - \tilde{S}_n,$$

où $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$, et $\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^n \|x_i\|$, sont, respectivement, les sommes partielles des séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, et $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$. Par hypothèse, cette deuxième série est convergente. On en déduit

que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite de Cauchy. Par la complétude de E , on conclut que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est convergente. Réciproquement, supposons que toute série normalement convergente dans E est convergente. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de Cauchy dans E . Alors, pour chaque entier positif p , il existe un entier $n(p)$ tel que

$$\forall n_1, n_2 \geq n(p), \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \leq 2^{-p}.$$

Considérons la sous-suite extraite $y_p = x_{n(p)}$, et posons $u_p = y_{p+1} - y_p$. On a $\|u_p\| \leq 2^{-p}$, pour tout p , et la série de terme général u_p est donc normalement convergente. D'après l'hypothèse, $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$, est convergente. Puisque $y_p = y_0 + \sum_{k=0}^{p-1} u_k$, on conclut que la suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$, converge vers une limite $y \in E$. La fin de la démonstration est valable dans un espace métrique quelconque: si une suite de Cauchy possède une sous-suite convergente, elle est convergente. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n_1, n_2 \geq N, \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour $n \geq N$ et p assez grand, $\|x_n - y_p\| \leq \varepsilon$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient $\|x_n - y\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge vers $y \in E$.

1.3 Espaces de fonction continues

Soit E un espace métrique. On note $C_b^{\mathbb{K}}(E)$, l'espace vectoriel normé formé des fonctions continues et bornées de E dans \mathbb{K} . On définit sur cet espace vectoriel la norme uniforme, appelée encore norme de la convergence uniforme, par

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|, f \in C_b^{\mathbb{K}}(E).$$

Remarquons que si E est compact, alors toute fonction continue sur E est bornée. L'espace $C_b^{\mathbb{K}}(E)$, se confond alors avec l'espace $C^{\mathbb{K}}(E)$, de toutes les fonctions continues de E dans \mathbb{K} .

Proposition 1.3. [14][15]

L'espace $C_b^{\mathbb{K}}(E)$, muni de la norme uniforme est complet. En d'autres termes, ceci signifie que toute suite uniformément de Cauchy de fonctions bornées de E dans \mathbb{K} , est uniformément convergente.

Théorème 1.2. (Weierstrass)[14][15]

L'ensemble des fonctions polynômiales de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , est dense dans l'espace $C^{\mathbb{R}}([0, 1])$, muni de la norme uniforme.

1.4 Applications lineaires continues

Le théorème suivant à l'intérêt de ramener le problème de la continuité à des majorations sur les normes.

Théorème 1.3. [14][15]

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire f de E dans F est continue si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes:

- 1) f est continue en 0.
- 2) f est bornée sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$ de E .
- 3) il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.
- 4) f est lipschitzienne.

Si c'est le cas, le réel $\|f\| = \sup_{x \in \bar{B}(0,1)} \|f(x)\| = \inf\{c > 0, |f(x)| < c\|x\|\}$, s'appelle la norme de f .

1.5 Dual topologique

Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E sur le corps \mathbb{K} , est, par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E , c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans \mathbb{K} . On note cet ensemble E' . Ainsi, $E' = L(E, \mathbb{K})$ et, par ce qui précède, E' muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par:

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

est un espace de Banach puisque \mathbb{K} , est complet [14][15].

Théorème 1.4. L'espace dual X' d'un espace normé X est un espace de Banach.

1.6 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach, E' son dual muni de la norme duale et soit E'' son bidual, c'est-à-dire le dual de E' , muni de la norme

$$\|\psi\| = \sup_{f \in E'} |\psi(f)|.$$

(comme $(\psi, f) \rightarrow \psi(f)$. est linéaire, on écrira $\psi(f) = \langle \psi, f \rangle$.) On considère l'injection canonique

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E'' \\ x &\mapsto J_x. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_x : E' &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto J_x(f) = f(x). \end{aligned}$$

Proposition 1.4. *L'application J est une isométrie injective de E dans E'' .*

preuve. *Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie c'est à dire $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. En effet, en utilisant le théorème d'Hahn-Banach (pour tout $x \in E$, il existe $f_x \in E'$ tel que $|f_x(x)| = \|x\|$), Alors, on a,*

$$\|J_x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle J_x, f \rangle| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|.$$

Donc, J est une isométrie.

Définition 1.5. *On dit que E est réflexif si l'isométrie canonique J est surjective de E sur E'' . Ceci signifié que pour toute application linéaire continue $\psi : E' \rightarrow \mathbb{R}$, il existe $x \in E$, tel que $\psi = J_x$, c'est à dire*

$$\forall f \in E', \langle \psi, f \rangle = f(x).$$

A l'aide de J , on peut toujours identifier E à un sous-espace fermé de E'' .

Théorème 1.5. (Kakutani)[11][14][15]: *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'espace E est réflexif.*

(ii) *\bar{B}_E , la boule unité fermée de E , est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. (La topologie faible sur un espace de Banach E est la topologie la moins fine sur E rendant continue tout élément de E')*

Nous allons donner deux conséquences utiles du théorème de Kakutani.

corollaire 1.1. [11][14][15]

Si E est un espace de Banach réflexif et M un sous-espace vectoriel fermé de E . Alors M est réflexif.

corollaire 1.2. [11][14][15]

Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.

1.7 Espace de Hilbert

On considère H espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou \mathbb{C} .

Définition 1.6. *On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique, resp. hermitienne, qui est définie positive. On notera $\langle x, y \rangle$, le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$.*

Cela signifie que l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

vérifie :

- 1) pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$. est une forme linéaire;
- 2) pour tous $x, y \in H$, on a: $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$, si l'espace est réel
 $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$. si l'espace est complexe
- 3) pour tout $x \in H$, on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Définition 1.7. *Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.*

Proposition 1.5. (Inégalité de Cauchy Schwarz) *Soit H un espace préhilbertien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tous $x, y \in H$, on a*

$$|\langle x | y \rangle|^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle.$$

on a l'égalité si x et y sont liés.

corollaire 1.3. *Soit H un espace préhilbertien $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la relation $\|x\| = \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}}$, définit une norme sur H .*

preuve. *Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire.*

Dans la suite, H est un espace préhilbertien, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$ la norme associée. On peut remarquer que la donnée de la norme sur H permet de retrouver le produit scalaire, par exemple dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Re \langle x | y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) . \\ \Im \langle x | y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) . \end{aligned}$$

corollaire 1.4. *Soit H un espace préhilbertien. Pour chaque $y \in H$, la forme linéaire $\phi_y = \langle \cdot | y \rangle$, est continue et sa norme dans le dual topologique H' de H est égale à $\|y\|$.*

preuve. *on utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz*

$$\forall x \in H, |\phi_y(x)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Donc, $\phi_y \in H'$, et $\|\phi_y\| \leq \|y\|$. De plus, $\phi_y(y) = \|y\|^2$, et donc $\|\phi_y\| = \|y\|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \phi : H &\rightarrow H' \\ y &\mapsto \phi_y. \end{aligned}$$

est une isométrie linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Une conséquence immédiate mais utile de la définition de la norme d'un espace préhilbertien est l'identité du parallélogramme.

Proposition 1.6. : *Si x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien, alors*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 1.8. (Orthogonalité) *Deux éléments x et y d'un espace préhilbertien H sont dits orthogonaux si $\langle x | y \rangle = 0$, et on note $x \perp y$. L'orthogonal d'une partie A de H est l'ensemble noté A^\perp formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A , c'est-à-dire*

$$A^\perp = \{y, \forall x \in A, \langle x | y \rangle = 0\}.$$

La relation d'orthogonalité noté \perp est symétrique.

Définition 1.9. (Un espace de Hilbert) *est un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire. En particulier est un espace de Banach.*

Théorème 1.6. : *Soit H un espace de Hilbert. Alors, H est uniformément convexe (Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que $x, y \in B_E$, $\|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta_\epsilon$.) et donc réflexif.*

preuve. : *L'uniforme convexité s'obtient en utilisant l'identité de parallélogramme et la réflexivité est alors une conséquence du théorème de Milman-Pettis.*

Théorème 1.7. (Théorème de projection)[17] *Soit \mathbb{H} , un espace de Hilbert et soit F une partie convexe et fermée, non vide, de \mathbb{H} . Alors, pour tout $x \in \mathbb{H}$, il existe un unique $y \in F$, tel que:*

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, F).$$

On dit que $y = P_F(x)$, est la projection de x sur F . Il est caractérisé par la propriété:

$$y \in F \text{ et } \Re(x - y | z - y) \leq 0, \forall z \in F.$$

Proposition 1.7. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F . Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$, tel que $y \in F$, et $(x - y) \in F^\perp$.*

corollaire 1.5. *Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous espace vectoriel fermé, on a:*

$$H = F \oplus F^\perp,$$

et la projection sur F parallèlement à F^\perp associée est P_F . Elle est donc continue, de sorte que la somme directe est une somme directe topologique. On dit que P_F est la projection orthogonale sur F .

preuve. *Si $x \in H$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, et par la proposition 1.6 $P_F(x) \in F$, et $x - P_F(x) \in F^\perp$. D'autre part, si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$, et donc $x = 0$.*

1.8 Représentation de Riesz

Théorème 1.8. (Représentation de Riesz)[11][14][15]

Soit H un espace de Hilbert, pour toute $\phi \in H'$, il existe un unique $y \in H$, tel que :

$$\phi(x) = \langle x | y \rangle,$$

pour tout $x \in H$.

Une autre façon de voir le théorème est de dire que l'application J de H dans H' définie par: $y \mapsto \phi_y = J(y)$, est surjective elle est donc bijective, car c'est une isométrie (au sens des espaces métriques)

$$\|J(y) - J(y')\| = \|\phi_y - \phi_{y'}\| = \|y - y'\|.$$

preuve. L'application est une isométrie par le corollaire 1.4. Il reste à vérifier la surjectivité: Soit $\phi \in H'$, non nulle. On pose $F = \phi^{-1}(0) = \ker \phi$. Alors F est un sous espace vectoriel de H qui est fermé car ϕ est continue. Par le corollaire 1.5

$$H = (\ker \phi) \oplus (\ker \phi)^\perp.$$

Mais comme ϕ est une forme lineaire non nulle $\ker \phi$ est de codimension 1, donc $(\ker \phi)^\perp$, est de dim1. Soit $x \in (\ker \phi)'$, de norme 1 et posons $y = \overline{\phi(x)}x$, alors comme $y \in (\ker \phi)^\perp$, ϕ_y est nulle sur $\ker \phi$, mais d'autre part:

$$\phi_y(x) = \langle x | y \rangle = \phi(x)\langle x | x \rangle = \phi(x)\|x\|^2 = \phi(x).$$

ainsi l'on a bien $\phi = \phi_y$.

Remarque: Si l'on veut avoir $\phi(x) = \langle x | y \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{H}$, on doit l'avoir pour $x \in \ker \phi$; donc y doit être dans $(\ker \phi)^\perp$. Ainsi $y = \overline{cx}$, et l'égalité $\phi(x) = \langle x | y \rangle$, entrîne $\phi(x) = \overline{c}\langle x | x \rangle = \overline{c}\|x\|^2 = \overline{c}$. On a donc forcément $y = \overline{\phi(x)}x$.

Chapter 2

Espace L^p

2.1 Quelques préliminaires sur les espaces L^p

Soit (Ω, κ, μ) , un espace mesuré supposons que μ positive. On note $L^p(\mu)$ $1 \leq p < +\infty$, l'espace des fonctions f mesurables telles que:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Théorème 2.1. (Inégalité de Hölder)[7]

Soient p, q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (p et q sont appelés des exposants conjugués). Si $f \in L^p(\Omega)$, et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité se démontre de façon semblable à l'inégalité de Hölder dans \mathbb{K}^n vue dans le chapitre précédent.

Théorème 2.2. (Riesz-Fischer)[5][6][7]

Si $1 \leq p \leq +\infty$, alors l'espace $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est complet.

2.2 Réflexivité de L^p

Théorème 2.3. [11][14][15]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$, est un espace réflexif.

Pour la démonstration on utilisant pour le premier cas le (**Théorème Milman- Pettis**: Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif).

preuve. On considère deux cas.

Le premier cas:

1^{re} étape (**Inégalité de Clarkson**) Soit $2 \leq p < +\infty$. On a, pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p).$$

Il suffit de montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p).$$

On a, pour tous $\alpha, \beta \geq 0$,

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Pour l'obtenir, on se ramène au cas $\beta = 1$, et on note que la fonction $(x^2 + 1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$, est croissante sur $[0, \infty[$. Prenant $\alpha = \left| \frac{a+b}{2} \right|^p$, et $\beta = \left| \frac{a-b}{2} \right|^p$, il vient

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{2} |a|^p + |b|^p.$$

La dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $x \mapsto |x|^{\frac{p}{2}}$, car $p \geq 2$.

2^{me} étape L^p est uniformément convexe et donc réflexif pour $2 \leq p < +\infty$. En effet, soit $\epsilon > 0$, fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \|g\|_{L^p} \leq 1 \text{ et } \|f-g\|_{L^p} > \epsilon.$$

On en déduit de l'inégalité de Clarkson que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \text{ et donc } \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta.$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent, $L^p(\Omega)$, est uniformément convexe, et donc réflexif.

Le deuxième cas:

montrons que L^p est réflexif pour $1 < p \leq 2$. Pour $u \in L^p$ et $f \in L^q$ (p et q conjugué), on pose

$$(T_u(f)) = \int_{\Omega} u f.$$

Il est clair que T_u est une application linéaire sur L^q , qui est continue car d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$|(T_u)(f)| \leq \|u\|_p \|f\|_q.$$

Ainsi Tu est un élément de $(L^q)'$ et on a $\|Tu\|_{(L^q)'} \leq \|u\|_p$. D'autre part, posons

$$f_0(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p-2}u(x) & \text{si } u(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) = 0 \end{cases}.$$

On vérifie facilement que $f_0 \in L^q$, $\|f_0\|_q = \|u\|_p^{p-1}$ et $(Tu)(f_0) = \|u\|_p^p$. D'où

$$\|Tu\|_{(L^q)'} \geq \frac{|(Tu)(f_0)|}{\|f_0\|_q} = \|u\|_p.$$

Donc finalement on a $\|Tu\|_{(L^q)'} = \|u\|_p$. On en déduit que T est une isométrie de L^p sur un sous-espace fermé de $(L^q)'$. Or L^q est réflexif implique alors que $(L^q)'$ est réflexif et donc $T(L^p)$ est réflexif finalement, comme T est une isométrie, on en déduit que L^p est réflexif.

2.3 Le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$

Rappelons que le dual topologique d'un espace vectoriel normé E est l'espace des formes linéaires continues sur cet espace. En dimension infinie, une forme linéaire n'est pas automatiquement continue et il convient donc de distinguer dual topologique E' et dual algébrique E^* . En dimension infinie, on a donc $E' \subset E^*$, avec une inclusion stricte. Dans cette section, la mesure μ est supposée σ -finie. c'est à dire: il existe un recouvrement dénombrable de X par des sous-ensembles de mesure finie. C'est le cas de la mesure de Lebesgue sur un ouvert de \mathbb{R}^d .

Théorème 2.4. (Représentation de Riesz) [11][14][15]

Soit $1 < p, q < +\infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour toute forme linéaire continue $\phi \in (L^p)'(\Omega)$, il existe un unique $u \in L^q(\Omega)$, telle que

$$\langle \phi, f \rangle = \int u f, (f \in L^p).$$

Et, l'on a $\|u\|_{(L^q)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))'}$.

preuve. On définit l'opérateur $T : L^p \rightarrow (L^p)'$, par $\langle Tu, f \rangle = \int_{\Omega} u f$, $f \in L^p$. On vérifie que T est un opérateur linéaire et continue et que l'on a

$$\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{(L^q)}, u \in L^p.$$

Il reste à montrer que T est surjectif. Posons $E = T(L^p)$. Comme E est un sous-espace vectoriel fermé, il suffit de montrer qu'il est dense dans $(L^p)'$; Soit $h \in (L^p)''$, tel que $\langle h, Tu \rangle = 0$, pour tout $u \in L^p$. On doit montrer que $h = 0$. Comme L^p est réflexif, il existe $f \in L^p$, tel que $h = J(f)$, où $J : L^p \rightarrow (L^p)''$, est l'injection canonique. On obtient donc que

$$0 = \langle h, Tu \rangle = \langle J(f), Tu \rangle = \langle Tu, f \rangle = \int_{\Omega} u f.$$

pour tout $u \in L^q$. En choisissant $u = |f|^{p-2}f$, on obtient que $\|f\|_p = 0$, soit $f = 0$, i.e. $h = 0$.

Ce théorème est très important, il exprime que toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$, avec $1 < p < +\infty$, se représente à l'aide d'une fonction de $L^q(\Omega)$. L'application $\phi \mapsto u$, est une isométrie linéaire surjective qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^q . Ainsi si $1 < p < +\infty$, et si q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on fera systématiquement l'identification $(L^p)' = (L^q)$.

2.4 Inégalité de Lyapunov

Lemme 2.1. [11][14][15]

Soit (X, Ω, μ) , un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, et soit $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq +\infty$. Alors on a:

$$L^p(X) \subset L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X).$$

preuve. : Soit $f \in L^p(X)$, et posons $f_1 = f_{|f(x)| > 1}$, $f_2 = f_{|f(x)| \leq 1}$. alors $f = f_1 + f_2$, est de plus, on a:

$$\|f_1\|_{p_1}^{p_1} = \int_X |f_1|^{p_1} d\mu = \int_{|f| > 1} |f|^{p_1} d\mu \leq \int_{|f| > 1} |f|^p d\mu \leq \|f\|_p^p.$$

d'où $f_1 \in L^{p_1}(X)$ et $\|f_1\|_{p_1} \leq \|f\|_p^{\frac{p}{p_1}}$. Si $p_2 = +\infty$, alors il est clair que $|f_2| \leq 1$, presque partout est donc $f_2 \in L^\infty(X)$. Si $p_2 < +\infty$, alors on a:

$$\|f_2\|_{p_2}^{p_2} = \int_X |f_2|^{p_2} d\mu = \int_{|f| \leq 1} |f|^{p_2} d\mu \leq \int_{|f| \leq 1} |f|^p d\mu \leq \|f\|_p^p.$$

d'où $f_2 \in L^{p_2}$, et $\|f_2\|_{p_2} \leq \|f\|_p^{\frac{p}{p_2}}$. On a montré que si $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq +\infty$, alors L^p est contenu dans la somme $L^{p_0} + L^{p_1}$. Le lemme suivant donne un résultat inverse.

Lemme 2.2. [11][14][15]

soient $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$ et $0 < \theta < 1$, définissons p par $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$. alors:

$$L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X) \subset L^p(X).$$

et on a:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^\theta \|f\|_{p_1}^{1-\theta}, \quad \forall f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X).$$

preuve. si $p = +\infty$, alors nécessairement $p_0 = p_1 = +\infty$, et l'inégalité est évidente. Supposant $1 \leq p < +\infty$, et soit $f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$, on écrit:

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^{(1-\theta)p} |f|^{\theta p} d\mu.$$

si $p_0 = +\infty$, $\Rightarrow p_1 = (1 - \theta)p$, et donc:

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^{p_1} |f|^{\theta p} d\mu \leq \|f\|_\infty^{\theta p} \|f\|_{p_1}^{p_1}.$$

D'où:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^\theta \|f\|_{p_1}^{\frac{p_1}{p}} = \|f\|_{p_0}^\theta \|f\|_{p_1}^{1-\theta}.$$

Si $p_1 = +\infty$, on utilisant le même raisonnement.

Supposons maintenant que $1 \leq p_0, p_1 < +\infty$, et posons $\alpha = p_0(\theta p)$, et $\beta = \frac{p_1}{(1-\theta)p}$. On vérifie que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, et appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\|f\|_p^p \leq \left(\int_X |f|^{p_0} \right)^{\frac{\theta p}{p_0}} \left(\int_X |f|^{p_1} \right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_1}} = \|f\|_{p_0}^{\theta p} \|f\|_{p_1}^{(1-\theta)p}.$$

Lemme 2.3. [11][14][15]

Soient $1 \leq p_0, p_1 \leq +\infty$, et $0 < \theta < 1$, définissons p par:

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}.$$

Alors, l'espace $L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$, est dense dans $L^p(X)$.

2.5 Opérateur de type (p,q)

Définition 2.1. [11][14][15]

Soient (X, Ω, μ) et (Y, Ψ, ν) deux espaces mesurés et soit $p, q \in [1, +\infty]$: Si un opérateur linéaire $\Lambda : L^p(X) \rightarrow L^q(Y)$, est borné (c'est à dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que: $\|\Lambda f\|_{L^q} \leq c \|f\|_{L^p}$, pour toute fonction $f \in L^p(X)$), alors on dit que l'opérateur Λ est de type (p, q) et on note sa norme par

$$\|\Lambda\|_{p,q} = \sup_{f \neq 0, f \in L^p(X)} \frac{\|\Lambda f\|_q}{\|f\|_p}.$$

On suppose que l'opérateur Λ est défini sur l'ensemble

$$L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) = \{f + g : f \in L^{p_0}(X) \text{ et } g \in L^{p_1}(X)\}.$$

et est de type (p_0, q_0) , et (p_1, q_1) . Autrement dit, si on restreint Λ à $L^{p_0}(X)$ et $L^{p_1}(X)$, Alors: $\Lambda : L^{p_0}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y)$ et $\Lambda : L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_1}(Y)$, sont bien définies et bornés.

Le théorème suivant répond à la question: "si p est choisi entre p_0 et p_1 peut-on trouver q entre q_0 et q_1 tels que: $\Lambda : L^p(X) \rightarrow L^q(Y)$, est bien défini et borné?".

2.6 Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin

Théorème 2.5. [8][9]

(X, Ω, μ) et (Y, Ψ, ν) deux espaces mesurés et soient p_0, p_1, q_0 et $q_1 \in [1, +\infty]$, supposons que:

$$\Lambda : L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_0}(Y) + L^{q_1}(Y).$$

est une application linéaire de type (p_0, q_0) , et (p_1, q_1) . Soit $t \in [0, 1]$, et définissons:

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \text{ et } \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Alors $\Lambda : L^{p_t}(X) \rightarrow L^{q_t}(Y)$, est une application linéaire de type (p_t, q_t) , et on a

$$\|\Lambda\|_{(p_t, q_t)} \leq \|\Lambda\|_{(p_0, q_0)}^{1-t} \|\Lambda\|_{(p_1, q_1)}^t.$$

preuve. Le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin est une conséquence directe d'un résultat classique d'analyse complexe appelé: lemme des trois droites de Hadamard dont voici l'énoncé:

Lemme 2.4. (Lemme des trois droites de Hadamard) Pour toute fonction f analytique dans la bande ouverte $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$ et continue et bornée dans la bande fermée $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ tel que $\sup_{t \in \mathbb{R}} (|f(\theta + it)|) = M_\theta$ pour tout $\theta \in [0, 1]$. Alors on a: $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Dans cette section, nous allons donner un résultat concernant la transformée de Fourier des fonctions définies sur \mathbb{T} .

2.7 Fonction périodique

Définition 2.2. (Fonction périodique)

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, est dite périodique lorsqu'il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.

L'ensemble des périodes T de f noté $G = \{T > 0, f(x + T) = f(x), x \in \mathbb{R}\}$, est un sous groupe additif de \mathbb{R} . Si f est une fonction périodique continue et non constante, alors f admet un plus petite période $T > 0$.

Définition 2.3. [4][14][15]

Soit \mathcal{A} , une algèbre sur \mathbb{C} , muni de la norme $\|\cdot\|$. On dit que \mathcal{A} , est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- i) \mathcal{A} est un \mathbb{C} -espace de Banach.
- ii) pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

2.8 Coefficients de Fourier

Définition 2.4. Si $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$, désigne l'espace vectoriel des classes de fonction, Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, pour $n \in \mathbb{Z}$, le n -ième coefficient de Fourier de f est définie par:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Le spectre de f noté par $S_p(f)$ est défini par $S_p(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \hat{f}(n) \neq 0\}$. La suite $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, est appelée la transformé de Fourier de f . Comme $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$. On déduit que $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{Z})$, avec $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, par conséquent, la transformée de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

est une application linéaire continue. Comme $f = 1$, on a $\|\hat{f}\|_\infty = 1$, la norme de \mathcal{F} est 1.

Le lemme suivant va nous permettre de préciser l'image de \mathcal{F} .

Lemme 2.5. Riemann-Lebesgue:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et soient $f \in L^1([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

preuve. En utilisant la décomposition $f = f_1 + if_2$, où f_1, f_2 sont réelles, il suffit de prouver le lemme avec f réelle.

De plus, comme $e^{i\lambda t} = \cos(\lambda t) + i \sin(\lambda t)$, avec f réel, il suffit de prouver que: si $(\lambda_n)_n$, est une suite de réels non nuls tels que $|\lambda_n| \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{|\lambda_n| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda_n t} dt = 0.$$

corollaire 2.1. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$, et ainsi

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{T})) \subset C_0(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{C} \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| = 0\}.$$

Remarque:

tout ce qui précède et tout ce qui suit reste valable pour les fonctions \mathbb{T} -périodiques ($T > 0$), en remplaçant les coefficients de Fourier par la formule: $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{\frac{2i\pi nt}{T}} dt$.

Convolution sur \mathbb{T} : Soient f et g dans $L^1(\mathbb{T})$, en général on ne peut pas conclure que

$fg \in L^1(\mathbb{T})$. En effet, Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = g(t)$, avec $f(1) = g(1) = 0$, on remarque que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{t} dt = \infty.$$

mais $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Cependant, par le théorème de Fubini:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau)g(t-\tau)|d\tau \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t-\tau)|dt \right) d\tau = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

par conséquent $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(t-\tau)|d\tau < +\infty$, pour presque tout t ce qui implique que l'on peut bien définir: $f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$, pour presque tout t et de plus $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, (appelé le produit de convolution de f et g) avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Théorème 2.6. Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

preuve. Fixons $n \in \mathbb{Z}$, on a:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (f * g)(t) dt. \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) g(\tau) e^{-in(t-\tau)} e^{-in\tau} d\tau dt. \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)} dt \right) d\tau. \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) d\tau. \\ &= \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{aligned}$$

(Voir [4][14][15])

2.9 Inégalité de Young

Théorème 2.7. Soit $f \in L^r(\mathbb{T})$, $g \in L^s(\mathbb{T})$, où $1 \leq r, s \leq \infty$ et $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 1$. Soit p défini par: $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - 1$. Alors, $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_r \|g\|_s$.

preuve. Si $p = \infty$, (si $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.) alors $f * g$ est défini partout sur \mathbb{T} et l'inégalité de Young se réduit à l'inégalité de Hölder. Supposons maintenant que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1$. Nous allons utiliser une forme généralisée de l'inégalité de Hölder, soient $1 < p_1, \dots, p_n < \infty$ tels que $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$, et soient f_1, \dots, f_n , des fonctions mesurables d'un espace mesuré (X, Ω, μ) , Alors on a:

$$\int_X |f_1 \dots f_n| d\mu \leq \left(\int_X |f_1|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\int_X |f_n|^{p_n} d\mu \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Cette inégalité s'obtient par induction, à l'aide de l'inégalité de Hölder classique. Soient r' et s' les exposants conjugués de r et s respectivement, i.e.

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \text{ et } \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \text{ Par définition de } p, \text{ on obtient alors:}$$

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Fixons $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. En vue d'appliquer l'inégalité de Hölder généralisée, on va écrire l'intégrant $|f(\theta)g(\theta-t)|$ comme le produit de trois fonctions appartenant respectivement à $L^{r'}(\mathbb{T})$, $L^{s'}(\mathbb{T})$, et $L^p(\mathbb{T})$. Plus précisément on a

$$|f(\theta)g(\theta-t)| = |g(\theta-t)|^{1-\frac{s}{p}} \times |f(\theta)|^{1-\frac{r}{p}} \times |f(\theta)|^{\frac{r}{p}} |g(\theta-t)|^{\frac{s}{p}}.$$

D'après l'inégalité de Hölder généralisée, on en déduit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})g(e^{i(\theta-t)})| d\theta &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i(\theta-t)})|^{r'(1-\frac{s}{p})} d\theta \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^{s'(1-\frac{r}{p})} d\theta \right)^{\frac{1}{s'}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^r |g(e^{i(\theta-t)})|^s d\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Comme $r'(1-\frac{s}{p}) = s$ et $s'(1-\frac{r}{p}) = r$, on obtient

$$|(f \star g)(e^{it})| \leq \|g\|_s^{\frac{s}{p}} \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^r |g(e^{i(\theta-t)})|^s d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

pour presque tout $e^{it} \in \mathbb{T}$. Finalement, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient:

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f \star g)(e^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|g\|_s^{\frac{s}{p}} \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^r |g(e^{i(\theta-t)})|^s d\theta dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|g\|_s^{\frac{s}{p}} \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \|g\|_s^{\frac{s}{p}} \|f\|_r^{\frac{r}{p}} \\ &= \|f\|_r \|g\|_s. \end{aligned}$$

Voici deux cas particuliers très utiliser de l'inégalité de Young:

corollaire 2.2. [4][14] Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, avec $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$, alors

$$f * g \in L^p(\mathbb{T}) \text{ et } \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

corollaire 2.3. [4][14]

Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^q(\mathbb{T})$, où q est l'exposant conjugué de p . Alors $f * g \in C(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$,

preuve. prouvons la continuité de $f * g$, notons que l'inégalité de Hölder garantit que $(f * g)(t)$, est bien défini pour tout $e^{it} \in \mathbb{T}$. Supposons p est fini (où q) alors $C(\mathbb{T})$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$. Ainsi pour $\epsilon > 0$, il existe $\varphi \in C(\mathbb{T})$. tel que $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$. On en déduit:

$$\begin{aligned} |(f * g)(t) - (f * g)(s)| &\leq |((f - \varphi) * g)(t)| + |((f - \varphi) * g)(s)| + |(\varphi * g)(e^{it}) - (\varphi * g)(s)|. \\ &\leq 2\|f - \varphi\|_p \|g\|_q + \omega_\varphi(|t - s|) \|g\|_q. \end{aligned}$$

où $\omega_\varphi(\delta) = \sup_{|t-s| \leq \delta} |\varphi(t) - \varphi(s)|$, est le module de continuité de φ , comme φ est uniformément continue sur \mathbb{T} ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\varphi(\delta) = 0.$$

par conséquent, si $(t - s)$ est assez petit, nous avons

$$|(f * g)(t) - (f * g)(s)| \leq 3\epsilon \|g\|_q.$$

2.10 Inégalité de Hausdorff-young

C'est un résultat concernant la transformée de Fourier ([4][14]) des fonctions définies sur \mathbb{T}

Théorème 2.8. (De Hausdorff-Young)

Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq 2$, alors \hat{f} la transformée de Fourier de f , appartient à $L^q(\mathbb{Z})$ où q est l'exposant conjugué de p . De plus, on a: $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$.

preuve. Rappelons que, pour toute fonction f intégrable sur \mathbb{T} , on définit $\hat{f}(n)$ par:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, (n \in \mathbb{Z}).$$

On a donc facilement: $|\hat{f}(n)| \leq \int_0^{2\pi} |f(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_1$. Maintenant si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a avec l'égalité de Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Ainsi l'opérateur $T : f \mapsto \left(\hat{f}(n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}$, est un opérateur de type $(1, \infty)$ et de type $(2, 2)$.

Ainsi le théorème de Riesz-Thorin implique que T est de type (r, s) où r, s sont tels que: $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}$ et $\frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}$ et $\theta \in [0, 1]$. Ceci donne: $r = \frac{1}{1-\frac{\theta}{2}}$ et $s = \frac{1}{1-\frac{\theta}{r}}$. Or quand $\theta \in [0, 1]$ et $r \in [1, 2]$, de plus, s est l'exposant conjugué de r . Ceci implique donc que tout $p \in [1, 2]$, l'opérateur T est de type (p, q) . De plus, le théorème de Riesz-Thorin dit aussi que:

$$\|T\|_{(p,q)} \leq \|T\|_{(1,\infty)}^{1-\theta} \cdot \|T\|_{(2,2)}^\theta.$$

Comme $\|T\|_{(1,\infty)} \leq 1$ et $\|T\|_{(2,2)} \leq 1$, on obtient que $\|T\|_{(p,q)} \leq 1$. Ainsi, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$, on a $\hat{f} \in L^q(\mathbb{T})$, et $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$.

Chapter 3

Eléments sur les fonctions presque périodiques

La théorie des fonctions presque périodiques a été développée par H.Bohr et A.S.Besicovitch au début des années 30. Ce dernier lui consacra une monographie qui constitue le premier ouvrage de référence sur ce sujet. Les fonctions presque périodiques sont d'abord définies en termes de propriétés de translation (ou presque périodicité), elles possèdent en fait une autre caractérisation de nature topologique. Cette dernière est le point de départ de différentes généralisations.

3.1 Généralités

[4][13][14] Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, est une fonction périodique de période élémentaire T , les nombres nt , $n \in \mathbb{Z}$, tel que $f(t + nT) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, constituent les périodes de f . Dans tout intervalle $[\alpha, \alpha + T]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, il y-a un point d'abscisse multiple de T , c.à.d. une période nT . C'est cette propriété qui est utilisée pour étendre la classe des fonctions périodiques à celle plus large des fonctions presque périodiques.

Un sous ensemble $\varphi \subset \mathbb{R}$, est dit relativement dense, s'il existe un nombre $l > 0$, tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un élément de φ . Pour $\epsilon > 0$, donné, on appelle ϵ -nombre de translation de f , tout nombre $\tau \in \mathbb{R}$, pour lequel on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \epsilon.$$

On note $T(f, \epsilon)$, l'ensemble des ϵ -nombres de translation de f .

Définition 3.1. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, est dite presque périodique lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $T(f, \epsilon)$, est relativement dense dans \mathbb{R} .

Nous considérons ici les fonctions presque périodiques continue, ces fonctions sont dites

CHAPTER 3. ELÉMENTS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

uniformément presque périodiques. L'ensemble ainsi obtenu est noté u.p.p. qui possède des propriétés algébriques et topologiques remarquables, on citera ici les plus importantes:

- 1) u.p.p a une structure d'algèbre (pour les opérations addition et multiplication).
- 2) u.p.p est fermé pour la norme de la convergence uniforme.
- 3) si $f \in u.p.p$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est uniformément continue, alors la composée $F \circ f \in u.p.p$.
- 4) si $f \in u.p.p$ elle est uniformément bornée sur \mathbb{R} .

3.2 Polynômes trigonométriques généralisés

La définition naturelle initiale des fonctions u.p.p. basée sur la notion de périodicité s'avère peu pratique pour l'étude de certaines questions. Il existe une autre caractérisation de ces fonctions basées sur les polynômes trigonométriques:

une combinaison linéaire finie de fonctions trigonométriques e^{irt} , $r \in \mathbb{R}$, est appelée polynôme trigonométrique généralisé. On notera qu'un tel polynôme n'est pas nécessairement périodique. On note A l'ensemble de ces polynômes.

On sait déjà que la fermeture pour la norme uniforme de l'ensemble A est constitué de fonctions presque périodiques. En fait, on a l'identification suivante: $u.p.p. = \overline{A}^{\|\cdot\|_\infty}$. ([1][12]) En d'autres termes u.p.p. est exactement la fermeture de A pour la norme uniforme.

3.2.1 Valeur moyenne des fonctions u.p.p.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction. Les deux limites:

$\overline{M}(f) = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$, et $\underline{M}(f) = \underline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$, sont respectivement la valeur moyenne supérieure et inférieure de f . Lorsque ces deux limites sont égales, on obtient la valeur moyenne de f , noté $M(f)$. Lorsque f est une fonction périodique de période élémentaire τ , la valeur moyenne $M(f)$ existe et de plus, on a:

$$M(f) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

Ce résultat se généralise au cas des fonctions u.p.p. ([3] ch 2, § 2, p 21). De manière précise, pour toute fonction u.p.p. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, la limite suivante,

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt.$$

existe et est finie.

3.2.2 Series de Fourier des fonctions u.p.p.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction u.p.p. il vient que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t)e^{-i\lambda t}$, est aussi u.p.p. On peut alors poser $a(\lambda) = M(f(x)e^{-i\lambda x})$.

Le nombre $a(\lambda) \in \mathbb{C}$, est appelé coefficient de Fourier de la fonction f . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, des nombres réels quelconques et b_1, b_2, \dots, b_N , des éléments de \mathbb{C} .

Des calculs standards montrent que l'on a:

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_{n=1}^N b_n e^{i\lambda_n x} \right|^2 \right\} = M \{ |f(x)|^2 \} - \sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 + \sum_{n=1}^N |b_n - a(\lambda_n)|^2.$$

De cette égalité il résulte que la meilleure approximation de f par un polynôme trigonométrique du type $\sum_{n=1}^N b_n e^{i\lambda_n x}$, s'obtient lorsqu'on prend $b_n = a(\lambda_n)$.

De plus, pour un tel choix, on aura $\sum_{n=1}^N |a(\lambda_n)|^2 \leq M(|f|^2)$. Cette inégalité restant vraie pour tout entier N , on en déduit l'inégalité dite de Bessel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(\lambda_n)|^2 \leq M(|f|^2).$$

Considérons maintenant l'ensemble suivant: $C_n = \{ \lambda \in \mathbb{R}, |a(\lambda)| > \frac{1}{n} \}$, $n \geq 1$. On a clairement $\{ \lambda \in \mathbb{R}, |a(\lambda)| > 0 \} = \cup_{n>0} C_n$, et de plus, grâce à l'inégalité de Bessel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_n est fini.

On peut donc affirmer que l'ensemble $\{ \lambda \in \mathbb{R}, |a(\lambda)| > 0 \}$, est de cardinal au plus dénombrable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \dots$, ces valeurs.

A toute fonction u.p.p. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on peut associer la série de Fourier formelle

$$S(f)(x) = \sum_{n>0} a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x}.$$

Les questions concernant la convergence de cette série (convergence en moyenne, convergence presque partout, convergence en mesure, ...) sont très difficiles et pour beaucoup restent encore posées. Nous savons toutefois que l'on a:

$$M \left\{ \left| f(x) - \sum_{n=1}^N a(\lambda_n) e^{i\lambda_n x} \right|^2 \right\} \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty.$$

et par suite que l'on a en faite l'égalité dite de Parseval:

$$\sum_{n>0} |a(\lambda_n)|^2 = M(|f|^2).$$

Cette égalité est l'étape fondamentale qui permet de montrer le résultat d'approximation

des fonctions u.p.p. par les polynômes de Bochner-Féjèr (voir paragraphe suivant). De même, il sera à la base des résultats d'interpolation, en particulier dans la généralisation du théorème de Hausdorff-Young.

3.2.3 Polynômes d'approximation de Bochner-Féjèr

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction u.p.p. On note $\Omega = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \dots\}$, l'ensemble dénombrable des exposants de Fourier de f . Il existe une suite dénombrable de nombres réels $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$, linéairement indépendant par rapport aux nombres rationnels et pour laquelle ([4]) ([13]):

$$\lambda_j = \gamma_1^j \beta_1 + \gamma_2^j \beta_2 + \dots + \gamma_n^j \beta_n; j = 1, 2, \dots$$

Les nombres γ_k^j sont des rationnels qu'on peut supposer entiers dans notre cas. L'ensemble $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots\}$, forme dans un certain sens une base du système Ω . Soient m_1, m_2, \dots, m_n , des nombres entiers. On note $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$. A chaque couple (m, β) , on associe le noyau dit de Bochner-Féjèr, défini par:

$$\begin{aligned} K_{m,\beta}(t) &= K_{m_1,\beta_1}(t) \cdot K_{m_2,\beta_2}(t) \dots K_{m_n,\beta_n}(t). \\ &= \sum_{|\gamma_j| < m_j} \left(1 - \frac{|\gamma_1|}{m_1}\right) \left(1 - \frac{|\gamma_2|}{m_2}\right) \dots \left(1 - \frac{|\gamma_n|}{m_n}\right) \cdot e^{-i(\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \dots + \gamma_n\beta_n)t}. \end{aligned}$$

où

$$K_{m_j,\beta_j}(t) = \sum_{|\gamma| < m_j} \left(1 - \frac{|\gamma|}{m_j}\right) e^{-i\gamma\beta_j t} = \frac{1}{m_j} \left[\frac{\sin m_j \cdot \beta_j \left(\frac{t}{2}\right)}{\sin \beta_j \left(\frac{t}{2}\right)} \right]^2.$$

est le noyau de Féjèr habituel.

Le noyau $K_{m,\beta}(t)$; satisfait aux propriétés suivantes:

$$K_{m,\beta}(t) \geq 0 \text{ et } M_t\{K_{m,\beta}(t)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T K_{m,\beta}(t) dt = 1.$$

Le polynôme de Bochner-Féjèr associé à la fonction f s'écrira:

$$\delta_{(m,\beta)}(s) = M_t\{f(s+t) \cdot K_{(m,\beta)}(t)\} = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(s+t) \cdot K_{m,\beta}(t) dt,$$

ou bien de maniere plus explicite:

$$\begin{aligned} \delta_{(m,\beta)}(s) &= \sum_{|\gamma_j| < m_j} \left(1 - \frac{|\gamma_1|}{m_1}\right) \left(1 - \frac{|\gamma_2|}{m_2}\right) \dots \left(1 - \frac{|\gamma_n|}{m_n}\right) \cdot \\ &\quad a(f, \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \dots + \gamma_n\beta_n) \cdot e^{i(\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \dots + \gamma_n\beta_n) \cdot s}. \end{aligned}$$

Ces polynômes constituent une approximation uniforme de la fonction f . De manière précise, nous avons ([4])([13]):

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction u.p.p. Alors: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P_ϵ du type Bochner-Féjèr, tel que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_\epsilon(x)| \leq \epsilon.$$

La démonstration de ce résultat est longue et complexe, elle répond pour l'essentiel sur l'égalité de Parseval.

3.3 Espaces de fonctions presque periodiques généralisées

La classe des fonctions u.p.p. peut être considérée sous deux points de vue: D'une part, c'est la classe des fonctions continues possédant une propriété structurale qui est la generalisation de la periodicit , d'autre part, c'est la classe des fonctions limites de suites uniformement convergentes de polynômes trigonométriques généralisés. La generalisation de la notion presque périodicité s'est faite dans ces deux directions:

i) une generalisation structurale qui se base sur la presque périodicité usuelle, dans chacun des espaces de Stepanoff, Weyl et Besicovitch.

ii) une seconde approche consiste à définir les fonctions presque periodiques comme limites de polynômes trigonométriques generalisés, au sens de la norme de chacun des espaces considérés.

Les deux approches sont comparables et s'averent sous certaines conditions identiques.

3.3.1 Espaces de Stepanoff de fonctions presque périodiques

La notion A désignera toujours l'espace lineaire des polynômes trigonométriques generalisés. Pour $p \geq 1$, et $l > 0$, on définit l'espace de Stepanoff par:

$$S_l^p = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{mesurable}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p dt < +\infty\}.$$

S_l^p , est muni de sa norme naturelle:

$$\|f\|_{S_l^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

S_l^p , est alors un espace de Banach. Nous avons de plus $S_l^p = S_1^p$, $\forall p \geq 1$.

L'espace de Stepanoff de fonctions presque périodiques est par définition la fermeture dans

S_l^p de l'ensemble A (qui est linéaire) des polynômes trigonométriques généralisés:

$$S_l^p.p.p = \overline{A}^{\|\cdot\|_{S_l^p}}.$$

L'espace $S_l^p.p.p$ est un espace de Banach (comme sous espace fermé d'un espace de Banach.) Les éléments de $S_l^p.p.p$ sont aussi caractérisés en terme de propriétés de presque périodicité ([4]):

On dit qu'une fonction $f \in S_l^p.p.p$ vérifie la propriété S_l^p -translation si, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $S_l^p T(\epsilon, f) = \{\tau \in \mathbb{R}, \|f_\tau - f\|_{S_l^p} < \epsilon\}$, est relativement dense dans \mathbb{R} . On note $S_l^p p.t.$ l'ensemble de telles fonctions. On montre qu'il y a identification entre ces deux espaces, précisément:

$$S_l^p p.t = S_l^p p.p.$$

3.3.2 Espace de Weyl de fonctions presque periodiques

Pour $p \geq 1$, on définit l'espace de Weyl par:

$$W^p = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurable, } \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \|f\|_{S_l^p} < +\infty \right\}.$$

La norme naturelle sur W^p est:

$$\|f\|_{W^p} = \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \|f\|_{S_l^p}.$$

W^p est un espace normé non complet.

L'espace de Weyl de fonctions presque periodiques est défini par:

$$W^p p.p = \overline{A}^{\|\cdot\|_{W^p}}.$$

Les fonctions de $W^p p.p$ sont aussi caractérisées en termes de propriétés de translations, de manière précise: Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, est dite satisfaire la propriété de translation de type W^p lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $l(\epsilon) > 0$, tel que l'ensemble $S_{l(\epsilon)}^p T(\epsilon, f)$, est relativement dense dans \mathbb{R} . Nous avons l'identification:

$$W^p p.p = W^p p.t.$$

voir ([5])([6]).

3.3.3 L'espace de Besicovitch de fonctions presque periodiques

On appelle espace de Besicovitch, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, (mesurables), pour lesquelles:

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt < +\infty.$$

Pour $p \geq 1$, on note B^p cet espace muni de sa (pseudo)-norme naturelle

$$\|f\|_{B^p} = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace de Besicovitch est un espace de Banach.

L'espace de Besicovitch de fonctions presque periodiques est défini par:

$$B^p p.p = \overline{A}^{\|\cdot\|_{B^p}}.$$

On note $B^p p.t$ l'ensemble des fonctions pour lesquelles on a:

i) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille $(\tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, equi-repartie dans \mathbb{R} .

ii) $\|f_{\tau_i} - f\|_{B^p} < \epsilon \forall i \in \mathbb{Z}$.

iii) $\overline{M}_x \overline{M}_i \left[\frac{1}{c} \int_x^{x+c} |f_{\tau_i}(t) - f(t)|^p dt \right] < \epsilon, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall c > 0$.

Nous avons alors l'identification $B^p p.t = B^p p.p$.

3.3.4 Comparaison des espaces $S_l^p p.p$, $W^p p.p$ et $B^p p.p$.

Il n'est pas difficile d'établir les inégalités suivantes sur les normes des espaces introduits précédemment:

$$\|\cdot\|_{B^p} \leq \|\cdot\|_{W^p} \leq \|\cdot\|_{S_l^p}, \forall p \geq 1.$$

Ces inégalités entraînent les inclusions suivantes:

$$S_l^p \subseteq W^p \subset B^p.$$

Les memes inclusions sont vraies pour leurs sous espaces respectifs de fonctions presque periodiques:

$$\overline{A}^{\|\cdot\|_{\infty}} = \{u.p.p\} \subseteq S_l^p p.p \subseteq W^p p.p \subseteq B^p p.p.$$

3.3.5 Propriété d'approximation dans $B^p p.p$

Soit $f \in B^p p.p$, avec $p \geq 1$, et P un polynôme de Bochner-Féjèr associé à f .

Si K est le noyau correspondant, on peut écrire:

$$P(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t)K(t)dt.$$

Cette limite existe du fait que le produit $f.K$ est une fonction de $B^1 p.p$. ([11]). Nous avons la propriété d'approximation suivante ([12])([13]):

i) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme de Bochner-Féjèr P_ϵ , pour lequel on a:

$$\|f - P_\epsilon\|_{B^p} \leq \epsilon.$$

ii) $\|P_\epsilon\|_{B^p} \leq \|f\|_{B^p}$.

3.4 Dualité dans les espaces de Besicovitch

Soient $1 \leq p < q < +\infty$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, mesurable. On pose $r = \frac{q}{p}$ et $g = f^p$. Alors, grâce à l'inégalité de Jensen, on peut écrire: $\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(x)| dx\right)^r \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(x)|^r dx$, c.à.d.

$$\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^q dx.$$

ou bien

$$\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En passant à la limite supérieure sur T , nous obtenons:

$$\|f\|_{B^p} \leq \|f\|_{B^q}.$$

Cette inégalité entre les normes entraîne l'inclusion entre les espaces:

$$B^q \subset B^p.$$

Nous avons la même inclusion pour les espaces correspondant de fonctions presque périodiques:

$$B^q p.p. \subset B^p p.p.$$

On note

$$B^\infty p.p. = \bigcap_{p \geq 1} B^p p.p. = \lim_{\|\cdot\|_{B^p} \rightarrow +\infty} B^p p.p.$$

$B^\infty p.p.$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{B^\infty} = \lim_{\|\cdot\|_{B^p} \rightarrow +\infty} B^p$. et nous avons:

$$B^\infty p.p. \subset B^q p.p. \subset B^p p.p. \subset B^1 p.p. \quad \forall 1 \leq p < q < +\infty.$$

3.4.1 Propriétés de dualité

i) Soit $f \in B^p p.p.$ et $g \in B^q p.p.$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q < +\infty$. Alors: $f.g \in B^1 p.p.$ et la limite $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x)g(x)dx$ existe.

ii) Soit $F \in [B^p p.p.]^*$, alors il existe $g \in B^q p.p.$ (g unique!) tel que: $\forall f \in B^p p.p.$, on a $F(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x)f(x)dx$. de plus nous avons $\|F\| = \|g\|_{B^q}$.

Cette dernière propriété signifie que le dual $(B^p p.p)^*$ s'identifie topologiquement et algébriquement à $B^q p.p$. En d'autres termes:

La transformation

$$T : B^q p.p \rightarrow (B^p p.p)^* \\ g \mapsto T(g).$$

définie par $T(g)(f) = M(f.g)$, est isomorphisme isométrique.

Notons que les propriétés i) et ii) sont valables dans les espaces de Besicovitch (voir ([6]) ([7])).

3.4.2 Inégalité de Hölder dans les espaces de Besicovitch

Soit $f \in B^p$ et $g \in B^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p, q < +\infty$. nous savons déjà que $f.g \in B^1$. Nous avons de plus l'inégalité suivante dite de Hölder:

$$M(f.g) \leq \|f\|_{B^p} \cdot \|g\|_{B^q}.$$

preuve. On peut supposer $f \geq 0$ et $g \geq 0$, on écrit alors:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x)g(x)dx = \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [g(x)]^q dx \right) \cdot \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) (g(x))^{1-q} \cdot \frac{(g(x))^q}{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (g(x))^q dx} dx \right) dx \dots (\star).$$

En utilisant l'inégalité de Jensen pour les intégrales avec poids (Si φ est une fonction convexe et $\int_{\Omega} P(x) \cdot \varphi(f(x)) dx = 1, P(x) \geq 0$, alors $\varphi(\int_{\Omega} P(x) \cdot f(x) dx) \leq \int_{\Omega} P(x) \cdot \varphi(f(x)) dx$), nous aurons:

$$\begin{aligned} * &\leq \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [g(x)]^q dx \right) \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(x)]^p [g(x)]^{p(1-q)} \cdot \frac{(g(x))^q}{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (g(x))^q dx} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [g(x)]^q dx \right) \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(x)]^p \cdot \frac{1}{\|g\|_{B^q}^q} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(nous avons utilisé l'égalité $p(1-q) + q = 0$) Ensuite par simple passage à la limite quand $T \rightarrow +\infty$, nous aurons:

$$M(f.g) \leq (\|g\|_{B^q})^q \cdot (\|g\|_{B^q})^{-\frac{p}{q}} \cdot (\|f\|_{B^p}) \leq (\|g\|_{B^q})^{q(1-\frac{1}{p})} \cdot (\|f\|_{B^p}) \leq \|g\|_{B^q} \cdot \|f\|_{B^p}.$$

Ce qui est l'inégalité cherchée.

En prenant $p = q = 2$, nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.5 Préliminaires au théorème de Hausdorff-Young

Dans le cas classique des fonctions périodiques, le théorème de Hausdorff-Young est une extension des résultats classiques suivants:

-Le théorème de Riesz-Fisher lorsque $p \geq 2$.

-L'égalité de Parseval lorsque $p \in]1, 2]$.

De manière précise, il stipule:

i) Si $f \in L^q([0, 2\pi])$, $q \in]1, 2]$ et $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$, alors:

$(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^{q'})^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$, où $q' = \frac{q}{q-1}$, est l'exposant conjugué de q c'est à dire $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

En adoptant le langage des normes nous écrivons: $\|(C_n)\|_{l^{q'}} \leq \|f\|_{L^q}$.

ii) Si $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, est une suite telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^q < +\infty$, (c.à.d $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^q$), alors il existe une fonction $f \in L^{q'}([0, 2\pi])$, ayant la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, comme coefficients de Fourier, vérifiant: $\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \leq (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^q)^{\frac{1}{q}}$, ou bien $\|f\|_{L^{q'}} \leq \|(C_n)\|_{l^q}$.

Nous présentons ici la démarche et les étapes permettant la généralisation de ces résultats aux espaces $B^q p.p.$

3.5.1 Quelques propriétés des fonctions dans $B^q p.p.$

Soit $f \in B^q p.p.$, alors:

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, la limite $a(\lambda, f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)e^{-i\lambda t} dt$, existe.

L'application $\lambda \rightarrow a(\lambda, f)$, est appelée transformation de Bohr.

2) Si $(P_n)_{n \geq 1}$, est une suite de polynômes trigonométriques généralisés qui convergent vers f dans $B^q p.p.$ on a: $\|f\|_{B^q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_{B^q}$,

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(\lambda, P_n) = a(\lambda, f)$, uniformément par rapport à $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) Soit $g \in B^{q'} p.p.$, avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Si $(P_n)_{n \geq 1}$, et $(Q_n)_{n \geq 1}$, sont des polynômes trigonométriques généralisés tels que $\|P_n - f\|_{B^q} \rightarrow 0$, et $\|Q_n - g\|_{B^{q'}} \rightarrow 0$, alors $M(f.g)$ est bien défini et de plus:

i) $M(f.g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M(P_n.Q_n)$.

ii) $|M(f.g)| \leq \|f\|_{B^q} \cdot \|g\|_{B^{q'}}$.

On note $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}, a(\lambda, f) \neq 0\}$, le spectre de f .

Du fait que $a(\lambda, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a(\lambda, P_n)$, on peut écrire:

$$\sigma(f) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} \sigma(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \sigma(P_n).$$

On en déduit que $\sigma(f)$ est au plus dénombrable.

La série formelle $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a(\lambda_j, f)e^{i\lambda_j x}$, est appelé série de Fourier de f .

De manière claire, si P est un polynôme trigonométrique, cette série coïncide avec P .

3.5.2 Résultats auxiliaires

Considérons la bande Σ du plan complexe définie par:

$$\Sigma = \{z = \mu + i\nu, 0 \leq \mu \leq 1\}.$$

Lemme 3.1. *On fixe $z \in \mathbb{C}$ et $t \in]0, 1[$ et soit P un polynôme trigonométrique. Alors, la fonction $\varphi(x) = |P(x)|^{\frac{(1+z)}{(1+t)}}$, est u.p.p.*

preuve. *On remarque que réel $\left(\frac{1+z}{1+t}\right) = \frac{1+\mu}{1+t} \geq \frac{1}{2}, \forall z \in \Sigma$ et $t \in]0, 1[$.*

D'autre part, la fonction $\xi \rightarrow g(\xi) = |\xi|^{\frac{(1+z)}{(1+t)}}$. Ensuite, remarquons que $\varphi(x) = g(P(x))$. En définitive puisque $P \in$ u.p.p. et g continue, il vient que la composée $\varphi = g \circ P$, est aussi u.p.p.

On peut donc considérer la fonction suivante:

$$\phi(z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^{2T} |P(x)|^{\frac{(1+z)}{(1+t)}} e^{-i\lambda x} dz.$$

On sait déjà que cette dernière limite existe. Moyennant des estimations et autres calculs laborieux, on montre que l'on a: $\int_{\gamma} \phi(z) dz = 0$, sur toute courbe γ régulière, simple et fermée de Σ . On en déduit que $\phi(z)$ est holomorphe sur Σ .

Soit maintenant P un polynôme trigonométrique (généralisé). On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, son spectre et on pose:

$$Q(x) = \sum_{l=1}^r d_l e^{i\lambda_l x}, d_l \in \mathbb{C}, \forall l = 1, \dots, r.$$

$$Q_z(x) = \sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{(1+z)}{(1+t)}} \cdot (\text{sign} d_l) e^{i\lambda_l x}.$$

Le polynôme Q est choisi de telle manière que $\sigma(Q) = \sigma(P)$.

Considérons la fonction holomorphe suivante:

$$\psi(z) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ |P(x)|^{\frac{(1+z)}{(1+t)}} \cdot \text{sign} P(x) Q_z(x) dz \right\}.$$

Alors, nous avons:

Lemme 3.2. *([10])([3]). Pour tout polynôme trigonométrique généralisé P ,*

i) $|\psi(i\nu)| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |p(x)|^{\frac{2}{(1+t)}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^r |d_j|^{\frac{2}{(1+t)}} \right)^{\frac{1}{2}}.$

ii) $|\psi(1 + i\nu)| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |p(x)|^{\frac{2}{(1+t)}} dx \right) \left(\sum_{j=1}^r |d_j|^{\frac{2}{(1+t)}} \right).$

CHAPTER 3. ELÉMENTS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

preuve. remarquons tout d'abord que l'on peut supposer $P \neq 0$.

Pour ne pas encombrer les écritures, nous écrirons \lim_T , nous aurons alors:

$$\begin{aligned} |\psi(i\nu)| &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ |P(x)|^{\frac{1+i\nu}{1+i}} \cdot \text{sign}P(x) \cdot Q_{i\nu}(x) \right\} dx. \\ &\leq \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ |P(x)|^{\frac{1}{1+i}} \cdot |\text{sign}P(x)| \cdot |Q_{i\nu}(x)| \right\} dx. \\ &\leq \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ |P(x)|^{\frac{1}{1+i}} |Q_{i\nu}(x)| \right\} dx. \end{aligned}$$

Ensuite, grace à l'inégalité de Hölder, nous obtenons,

$$|\psi(i\nu)| \leq \lim_T \left[\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)|^{\frac{2}{1+i}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |Q_{i\nu}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

D'où utilisant l'égalité de Parseval pour le second terme à droite,

$$|\psi(i\nu)| \leq \left(\lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)|^{\frac{2}{1+i}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{(1+i)}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On notera M_0 , le nombre de droite de cette inégalité.

ii)

$$\begin{aligned} |\psi(1+i\nu)| &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ |p(x)|^{\frac{2+i\nu}{1+i}} \cdot |\text{sign}P(x)| \cdot |Q_{1+i\nu}(x)| \right\} dx. \\ &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |p(x)|^{\frac{2}{1+i}} \cdot \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{(1+i)}} \right) dx. \\ &\leq \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{(1+i)}} \right) \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |p(x)|^{\frac{2}{(1+i)}} dx \right). \end{aligned}$$

On notera M_1 , le nombre de droite de cette inégalité. Comme la fonction $\psi(z)$ est holomorphe sur la bande Σ , on peut utiliser le théorème des lignes de Hadamard pour affirmer

CHAPTER 3. ELÉMENTS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

que l'on a: $|\psi(t)| \leq M_0^{1-t} \cdot M_1^t \forall t \in]0, 1[$, c.à.d.

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)| &\leq \left(\lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)|^{\frac{2}{1+t}} dx \right)^{\frac{(1-t)}{2}} \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{(1+t)}} \right)^{\frac{(1-t)}{2}} \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{(1+t)}} \right)^t \\
 &\left(\lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)|^{\frac{2}{(1+t)}} dx \right)^t \\
 &\leq \left(\lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)|^{\frac{2}{1+t}} dx \right)^{\frac{(1+t)}{2}} \cdot \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{(1+t)}} \right)^{\frac{(1-t)}{2}} \quad (\star).
 \end{aligned}$$

Mais, par définition de ψ , on a:

$$\psi(t) = \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)| \cdot \text{sign} P(x) \cdot Q_t(x) dx, \dots \star.$$

avec

$$Q_t(x) = \sum_{l=1}^r |d_l| \cdot \text{sign} d_l \cdot e^{i\lambda_l x}.$$

c.à.d.:

$$\begin{aligned}
 \psi(t) &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)| \cdot \text{sign} P(x) \cdot \sum_{l=1}^r |d_l| \cdot \text{sign} d_l \cdot e^{i\lambda_l x} dx. \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)| \cdot \sum_{l=1}^r |d_l| e^{i\lambda_l x} dx. \\
 &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x) \cdot Q(x) dx. \\
 &= \sum_{l=1}^r C_l d_l.
 \end{aligned}$$

En définitive, compte tenu de (\star) , on aura,

$$|\psi(t)| = \left| \sum_{l=1}^r C_l d_l \right| \leq \|P\|_{B^{\frac{2}{1+t}}} \cdot \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{1+t}} \right)^{\frac{1+t}{2}} \dots (\star\star).$$

Nous allons maintenant énoncer et démontrer le théorème de Hausdorff-Young en plusieurs étapes.

3.6 Théorème de Hausdorff dans $B^p p.p$

La généralisation du théorème classique de Hausdorff-Young aux fonctions de la classe $B^p a.p$ passe par plusieurs étapes que nous précisons dans cette section.

3.6.1 Cas des polynômes trigonometriques généralisés

Soit P un polynôme trigonométrique généralisé, $P(x) = \sum_{j=1}^r c_j e^{i\lambda_j x}$, $c_j \in \mathbb{C}$. Alors, $\forall q \in]1, 2]$, nous avons:

$$i) \left(\sum_{j=1}^r |c_j|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \|P\|_{B^q}.$$

$$ii) \|P\|_{B^{q'}} \leq \left(\sum_{j=1}^r |c_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad q', \text{ désigne l'exposant conjugué de } q, \quad q' = \frac{q}{q-1} \in [2, +\infty[$$

preuve. On pose $q = \frac{2}{1+t}$, comme $t \in]0, 1[$, on a $q \in]1, 2]$. Compte tenu de l'inégalité (\star), on peut écrire:

$$|\psi(t)| = \left| \sum_{l=1}^r C_l d_l \right| \leq \|P\|_{B^{\frac{2}{1+t}}} \cdot \left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{\frac{2}{1+t}} \right)^{\frac{(1+t)}{2}},$$

et donc,

$$\sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^r c_j d_j \right|, \sum_{l=1}^r |d_l|^q \leq 1 \right\} \leq \|P\|_{B^q}.$$

Or, nous avons aussi,

$$\left(\sum_{j=1}^r |c_j|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^r c_j d_j \right| \text{ ou } \sum_{l=1}^r |d_l|^q \leq 1 \right\}.$$

On en déduit alors;

$$\left(\sum_{j=1}^r |c_j|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \|P\|_{B^q}.$$

Ce qui est exactement l'affirmation i).

Pour montrer l'inégalité ii) nous avons besoin de la relation suivante exprimant la norme d'un polynôme:

$$\|P\|_{B^{q'}} = \sup_{\|Q\|_{B^q} \leq 1} \left| \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x) Q(x) dx \right|.$$

En effet; grâce à l'inégalité de Hölder, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x) Q(x) dx \right| &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(x)| \cdot |Q(x)| dx. \\ &\leq \|P\|_{B^{q'}} \cdot \|Q\|_{B^q}. \end{aligned}$$

et donc:

$$\sup_{\|Q\|_{B^q} \leq 1} \left| \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x)Q(x)dx \right| \leq \|P\|_{B^{q'}}.$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} g &= (\|P\|_{B^{q'}})^{1-q'} \cdot |P|^{(q'-1)} \cdot \text{sign}P. \\ &= \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P|^{q'} dx \right)^{\frac{-1}{q'}} \cdot |P|^{q'-1} \cdot \text{sign}P. \end{aligned}$$

On vérifie que $\|g\|_{B^q} = \left(\lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P|^{q'} dx \right)^{\frac{-1}{q'}} \cdot \left(\lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P|^{(q'-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = 1$.

D'autre part:

$$\left| \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x)g(x)dx \right| = \|P\|_{B^{q'}}.$$

On note maintenant $Q^* = \{Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^q} < 1\}$. La notation \mathcal{P} désignant l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés.

L'élément $g \in Q^*$ est celui qui réalise l'égalité demandée. On aura donc montré:

$\|P\|_{B^{q'}} = \sup_{\|Q\|_{B^q} \leq 1} \left| \lim_T \int_{-T}^T P(x).Q(x)dx \right|$. Maintenant, du fait que tout polynôme $Q \in Q^*$, vérifie l'inégalité i) déjà démontrée plus haut (c.à.d. $\left(\sum_{j=1}^r |c_j|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \|P\|_{B^{q'}}$), nous avons:

$$Q^* \subseteq Q' = \left\{ Q \in \mathcal{P}, \sum_{l=1}^r |d_l|^{q'} \leq 1 \right\}.$$

On en déduit alors:

$$\sup_{\|Q\|_{B^q} \leq 1} \left| \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x)Q(x)dx \right| = \sup_{\|Q\|_{B^q} \leq 1} \left| \sum_{j=1}^r c_j d_j \right| \leq \sup_{\left(\sum_{l=1}^r |d_l|^{q'} \right) \leq 1} \left| \sum_{j=1}^r c_j d_j \right|.$$

D'où, utilisant l'inégalité de Hölder pour les sommes discrètes:

$$\|P\|_{B^{q'}} = \sup_{\|Q\|_{B^q} \leq 1} \left| \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(x).Q(x)dx \right| \leq \left(\sum_{j=1}^r |c_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ce qui est exactement l'inégalité ii) cherchée.

3.6.2 Approximation polynômiale dans $B^2p.p$

Soit $f \in B^2p.p$ et $\sigma(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$, son spectre dénombrable.

On pose $\mathcal{P} = \{Q \in \mathcal{P}_r, \sigma(Q) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \Sigma\}$, avec Σ une famille finie quelconque

de nombres réels vérifiant $\sigma(f) \cap \Sigma = \emptyset$, Alors:

$$\min_{Q \in \mathcal{P}_r} \|f - Q\|_{B^2} = \|f\|_{B^2}^2 - \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2.$$

preuve. Soit $Q \in \mathcal{P}_r$, alors

$$Q(x) = \sum_{j=1}^r c_j e^{i\lambda_j x} + \sum_{l=1}^{\gamma} \beta_l e^{i\mu_l x}, \quad c_j, \beta_l \in \mathbb{C},$$

avec $\{\mu_1, \dots, \mu_\gamma\} \cap \sigma(f) = \emptyset$. On a donc aussi $M(f, \sum_{l=1}^{\gamma} \beta_l e^{i\mu_l x}) = 0$.

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \|f - Q\|_{B^2}^2 &= \|f\|_{B^2}^2 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{j=1}^r c_j f(x) e^{-i\lambda_j x} + \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{j=1}^r c_j f(x) e^{-i\lambda_j x} \\ &+ \sum_{j=1}^r |c_j|^2 + \sum_{l=1}^{\gamma} |\beta_l|^2. \\ &= \|f\|_{B^2}^2 - 2 \sum_{j=1}^r c_j a(\lambda_j, f) + \sum_{j=1}^r |c_j|^2 + \sum_{l=1}^{\gamma} |\beta_l|^2. \\ &= \left(\|f\|_{B^2}^2 - \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2 \right) + \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2 - 2 \sum_{j=1}^r c_j \cdot a(\lambda_j, f) + \sum_{j=1}^r |c_j|^2 \\ &+ \sum_{l=1}^{\gamma} |\beta_l|^2. \\ &= \|f\|_{B^2}^2 - \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2 + \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f) - c_j|^2 + \sum_{l=1}^{\gamma} |\beta_l|^2. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier $\|f - Q\|_{B^2}^2 \geq \|f\|_{B^2}^2 - \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2, \forall Q \in \mathcal{P}_r$.

Il est clair que si $Q^* = \sum_{j=1}^r a(\lambda_j, f) e^{i\lambda_j x}$,

alors; $Q^* \in \mathcal{P}_r$ et, $\|f - Q^*\|_{B^2}^2 = \|f\|_{B^2}^2 - \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2$.

De cela, on déduit que l'on a $\min_{Q \in \mathcal{P}_r} \|f - Q\|_{B^2}^2 = \|f - Q^*\|_{B^2}^2 = \|f\|_{B^2}^2 - \sum_{j=1}^r |a(\lambda_j, f)|^2$.

3.6.3 Caractérisation de la norme $\|P\|_{B^q}$, lorsque $P \in \mathcal{P}$.

Soit $q \in]1, +\infty[$, et $P \in \mathcal{P}$. Alors:

$$\|P\|_{B^q} = \sup \{M(P.g), g \in u.p.p, \|g\|_{B^{q'}} \leq 1\}.$$

preuve. On peut supposer $P \neq 0$, c.à.d. aussi $\|P\|_{B^q} \neq 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on peut écrire:

$$|M(P.g)| \leq \|P\|_{B^q} \cdot \|g\|_{B^{q'}} \leq \|P\|_{B^q}, \quad \forall g \in u.p.p. \text{ avec } \|g\|_{B^{q'}} \leq 1.$$

CHAPTER 3. ELÉMENTS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

Considérons la fonction g définie par:

$$g^*(x) = \|P\|_{B^q}^{1-q} \cdot |P|^{q-1} \cdot \text{sign}P(x).$$

Alors, on sait déjà que l'on a $\|g^*\|_{B^{q'}} = 1$. D'autre part, on a aussi $|M(P.g^*)| = \|P\|_{B^q}$.

En conséquence, on a bien

$$\|P\|_{B^q} = \sup \{M(P.g), g \in u.p.p., \|g\|_{B^{q'}} \leq 1\}.$$

Nous allons maintenant montrer que l'on a en fait:

$$\forall q \in]1, +\infty[, \forall P \in \mathcal{P}, \|P\|_{B^q} = \sup \{M(P.Q), Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\}.$$

En effet; grâce à l'inégalité de Hölder, on peut écrire:

$$|M(P.Q)| \leq \|P\|_{B^q} \forall Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1.$$

Reprenons la fonction g^* définie précédemment. On peut l'écrire sous la forme: $g^*(x) = \|P\|_{B^q}^{1-q} \cdot |P(x)|^{q-1} \cdot \frac{P(x)}{|P(x)|}$, si $P(x) \neq 0$, sinon $g^*(x) = 0$. Alors, $g^*(x) = F(P(x))$, où F est la fonction définie par $F(x) = \|P\|_{B^q}^{1-q} \cdot X^{q-1} \cdot \frac{X}{|X|}$, si $X \neq 0$, et $F(0) = 0$. On vérifie sans peine que la fonction F est continue sur \mathbb{R} .

Par suite, la composée $g^*(x) = F(P(x))$, est u.p.p.

Comme $g^* \in u.p.p.$ et $u.p.p. \subset B_{q'}p.p.$, il existe une suite de polynômes trigonométriques généralisés $(Q_n)_{n \geq 1}$, vérifiant:

$$\|Q_n - g^*\|_{B^{q'}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Il vient en particulier que l'on a aussi:

$$\|Q_n\|_{B^{q'}} \rightarrow \|g^*\|_{B^{q'}} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit que l'on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| M \left(P \frac{Q_n}{\|Q_n\|_{B^{q'}}} \right) \right| = \|P\|_{B^q}.$$

Ensuite, du fait que $\left\| \frac{Q}{\|Q\|_{B^{q'}}} \right\|_{B^{q'}} = 1$, on aura le résultat cherché:

$$\|P\|_{B^q} = \sup \{M(PQ), Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\}.$$

3.6.4 Caractérisation de $\|f\|_{B^q}$, lorsque $f \in B^q p.p.$

Soit $q \in]1, +\infty[$, et $f \in B^q p.p.$ Alors:

$$\|f\|_{B^q} = \sup \{M(f.Q), Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\}.$$

En effet: Soit $P(n)_{n \geq 1}$, la suite des polynômes de Bochner-Féjér convergente vers f dans $B^q p.p.$ On pose:

$$I(f) = \sup \{|M(f.Q)|, Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\}.$$

Il est clair que l'on $I(f) \leq \|f\|_{B^q}$. D'autre part, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, n \geq n_0 \Rightarrow \|f - P_n\| \leq \epsilon$, et $\|f\|_{B^q} \leq \|P_n\|_{B^q} + \epsilon$.

Alors, utilisant le cas particulier précédent et l'inégalité de Hölder, on aura:

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^q} - \epsilon &\leq \|P_n\|_{B^q} = \sup \{|M(P_n Q)|, Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\} \\ &\leq \sup \{\|f - P_n\|_{B^q} \|Q\|_{B^{q'}}; Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\} + \\ &\sup \{|M(fQ)|, Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1\} \\ &\leq I(f) + \epsilon. \end{aligned}$$

En definitive, on aura obtenu,

$$I(f) \leq \|f\|_{B^q} \leq I(f) + 2\epsilon.$$

Du fait que $\epsilon > 0$, est quelconque, on déduit $I(f) = \|f\|_{B^q}$. Ce qui est le résultat cherché.

3.6.5 Théorème de Hausdorff-Young dans $B^q p.p.$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer le théorème Hausdorff-Young dans sa version generale c.à.d. dans $B^q p.p.$ Les résultats intermediaires precedents constituent les étapes clés, permettant ainsi de simplifier la demonstration de cette generalisation.

Théorème 3.1. (Hausdorff-Young) Soit $f \in B^q$, $\sigma(f) \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$, son spectre. On notera q' l'exposant conjugué de q , c.à.d. $q' = \frac{q}{q-1}$. Alors:

i) si $q \in]1, 2]$, nous avons: $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_{B^q}$.

ii) si $q \in [2, +\infty[$, nous avons: $\|f\|_{B^q} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

La serie dans le second membre de l'inégalité ii) pouvant être divergente, c.à.d. infinie.

preuve. On peut evidemment supposer $\|f\|_{B^q} \neq 0$, et donc aussi l'existence d'un indice k pour lequel $a(\lambda_k, f) \neq 0$.

i) Soit donc $q \in]1, 2]$. On note $(P_m)_{m \geq 1}$, une suite de polynômes trigonometriques generalisés (par exemple, les polynômes d'approximation de Bochner-Féjér), convergente vers f dans B^q . Du fait de l'inégalité 3.7.1.i) (inégalité de Hausdorff-Young pour les polynômes

CHAPTER 3. ELÉMENTS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

trigonométriques), on peut écrire: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists m_\epsilon/m > m_\epsilon \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n |a(\lambda_j, f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \|P_m\|_{B^q} + \epsilon \leq \|f\|_{B^q} + 2\epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$, est quelconque, on en déduit:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \|f\|_{B^q}.$$

Ce qui est l'inégalité cherché.

ii) Soit $q \in [2, +\infty[$. On pose:

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n a(\lambda_j, f) \cdot e^{i\lambda_j x},$$

Alors, du fait de l'injection continue $f \in B^q p.p \rightarrow B^2 p.p$, on a:

$$\|P_n - f\|_{B^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

D'autre, pour tout $Q \in \mathcal{P}$, avec $\sigma(f) \cap \sigma(Q) \neq \emptyset$ et compte tenu de l'inégalité de Hölder et 3.7.1.i), on peut écrire:

$$|M(P_n Q)| = \left| \sum_{j=1}^n a(\lambda_j, f) \cdot a(\lambda_j, Q) \right|. \quad (3.1)$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a(\lambda_j, Q)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.2)$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \|Q\|_{B^{q'}}. \quad (3.3)$$

En faisant un passage à la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, on aura:

$$|M(fQ)| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \|Q\|, \forall Q \in \mathcal{P} \text{ avec } \sigma(f) \cap \sigma(Q) \neq \emptyset.$$

En définitive, compte tenu de la caractérisation 3.6.4 de la norme d'un élément $f \in B^q p.p$,

CHAPTER 3. ELÉMENTS SUR LES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

nous obtenons,

$$\|f\|_{B^q} = \sup \{ |M(fQ)|, Q \in \mathcal{P}, \|Q\|_{B^{q'}} \leq 1 \} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j, f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Ce qui est exactement le résultat recherché.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à énoncer et démontrer le théorème de Hausdorff-Young pour les fonctions presque périodiques généralisés de Besicovitch. Nous avons plus précisément présenté et développé l'article de A.Avantaggiati, G.Brino, R.Iannaci "The Hausdorff-Young theorem for almost periodic functions and some applications" on passant par des résultats intermédiaires et des étapes clés pour le généraliser dans l'espace de Besicovitch.

Bibliographie

- [1] A.AVANTAGGIATI, G. BRUNO, R.IANNACCI: The Hausdorff-Young. Theorem for almost periodic functions and some applications. Non linear analysis. Theory, Methods and applications. Vol.23, N°1, pp61-87(1995)
- [2] A.M.Fink. Almost periodic functions invented for specific purposes. Siam Review, 14(4), 1972.
- [3] L. Amerio and G. Prouse. Almost-periodic functions and functional equations. (The University Series in Higher Mathematics.). 1971. Published: New York etc.: Van Nostrand Reinhold Company VIII, 184 p. (1971).
- [4] A.S.BESICOVITCH: Almost periodic functions, Cambridge University Press (1932).
- [5] R.IANNACCI: Besicovitch spaces of almost periodic valued function and reflexivity. Conf.Sem.Mat Univ.Bari, n 251, Laterza(1993).
- [6] R.IANNACCI: On reflexivity to the B^q_{ap} Spaces of almost periodic functions, Rend. Mat. (inpress)
- [7] A.C.ZAANEN: Linear analysis, North-Holland, Pub. Co-Amsterdam P.Noordhoff N.V.Groningen 1967
- [8] NORDENFORS, Oskar, The Riesz-Thorin Interpolation Theorem. 2018.
- [9] Richard S. Laugesen, Harmonic analysis lecture notes. Université de l'Illinois, 2009.
- [10] A.C.ZAANEN: Integration, North Holland. Pub, 1967 3VII.
- [11] B.Beauzamy: Introduction to Banach spaces and their geometry. North-Holland mathematics studies. Notas de Matematica N°86(1985).
- [12] A.M.Bersani: The Hausdorff-Young theorem for Besicovitch-spaces of vector-valued almost periodic functions. Rendiconti di Matematica, serie VII, Vol.15, pp5-24(1995)
- [13] C.Corduneau: Almost periodic functions, Interscience Pub, (1968)
- [14] Y.Katznelson: An introduction to Harmonic Analysis. Dover Publications, Inc. (1968)
- [15] A.Kolmogorov.S.Fomine: Elements de la theorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Editions Mir, Moscou (1977)
- [16] A.L.Kuz'mina: $L^p(AP)$ spaces and their Adjoint ones. Izvestiya VUZ.N°7.PP.11-18 (2008)
- [17] Daniel.Li Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés