MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT LMD

Filière : Mathématiques

Spécialité: Analyse mathématiques et applications

Présentée par :

CHEBAB Mesbah

Sujet :

Sur les solutions asymptotiques périodiques, presque périodiques de certaines équations différentielles à retard

Devant le jury d'examen composé de

Mme RAHMANI Leila	Professeure	UMMTO	Présidente
Mme BOULAHIA Fatiha	Professeure	U. A. Mira Bejaia	Rapportrice
Mme BEDOUHENE Fazia	Professeure	UMMTO	Examinatrice
Mr. BOUKOUCHA Rachid	MCA	U. A. Mira Bejaia	Examinateur
Mr. M'HAMDI Mohammed Salah	MCA	U. A. Mira Bejaia	Examinateur

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Avant tout, il apparaît opportun de rendre grâce à DIEU de m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer ce travail.

Ma profonde reconnaissance s'adresse à ma directrice de thèse Madame Boulahia-Talbi Fatiha, Professeur à l'université Abderrahmane Mira de Bejaia, pour son aide et ses conseils précieux qui n'ont pas cessé de prodiguer tout au long de ce travail. Qu'elle soit vivement remerciée.

Mes sincères remerciements sont aussi destinés au Professeur Rahmani Leila de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury : Professeur Bedouhène Fazia de l'université Mouloud Mmameri de Tizi-ouzou, Dr. Boukoucha Rachid et Dr. M'hamdi Mohammed Salah de l'université Abderrahmane Mira de Béjaia pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du laboratoire de Mathématiques Appliquées "LMA" de l'université de Béjaia, pour toutes les facilités offertes durant la rédaction de cette thèse.

J'aimerais exprimer toute ma gratitude envers ma famille pour son soutien et son aide.
Enfin, je remercie tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail. Que tous ceux qui ne se verront pas cités ici, trouve l'expression de ma reconnaissance.

Table des matières

Table des figures

Liste des contributions

Articles

1. **Mesbah CHEBAB, Fatiha BOULAHIA,** *Asymptotically periodic solutions for a differential system with mixed delays,* Mathematics in engineering, science and aerospace, vol 13 N0.1, **(2022).**

Communications

1. **M. CHEBAB, F. BOULAHIA.** *Les fonctions asymptotiquement $\omega-$périodique au sens de Stepanov.* **Communication aux Doctoriales Nationales en Mathématiques du** 28 **au** 31 **octobre** 2017 **à l'E.N.S Constantine**

2. **M. CHEBAB, F. BOULAHIA.** *Existence et unicité de solution asymptotiquement $\omega-$périodique pour un système différentiel de réseaux de neurones avec retards mixte.* **Communication à la Journée Nationale sur les Mathématiques Appliquées à SKIKDA au** 21 **Novembre** 2018.

3. **M. CHEBAB, F. BOULAHIA.** *Stabilité asymptotique d'une solution asymptotique périodique d'un système de réseau de neurones avec retards mixtes.* **Communication au congrès TAMTAM 2019. Tlemcen (ALGERIE)** 23 **au** 27 **février** 2019.

4. **M. CHEBAB, F. BOULAHIA.** *Stability of asymptotically w-periodic solution of recurrent neural networks with mixed delays under activation function Holder continuous.***Communication au Workshop on differential equations and dynamical systems Bejaia DEDS**19, $10-14$ **mars** 2019 **Bejaia. Algérie.**

5. **M. CHEBAB, F. BOULAHIA.** *Pseudo almost periodic solutions for the Nicholson Blowflies equation with Stepanov pseudo almost periodic coefficients.* **Communication à la conférence africaine sur les systèmes dynamiques et les équations différentielle ordinaire, Béjaia ACDSODE'**21, $20-23$ **mars** 2021. **Algérie.**

Notations

$\mathbb{X}$	Espace de Banach
$BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$C_u(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$AP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions asymptotiquement $\omega-$périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$PL_\omega(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions limite $\omega-$périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$SAP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions presque périodiques définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions ergodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace des fonctions pseudo-presque périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
$S^pAP(\mathbb{R})$	Espace des fonctions Stepanov presque périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
$S^pPAP(\mathbb{R})$	Espace des fonctions Stepanov presque périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans
$sign$	Désigne la fonction signe
V	Fonctionnelle de Lyapunov
$DV(.)$	La dérivée de la fonction $V(.)$
$D^+V(.)$	La dérivée supérieure de la fonction $V(.)$
$\\|.\\|_\infty$	La norme infinie
τ	Le retard
L^p	Espace de Lebesgue
$L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	Espace de toutes les fonctions locallement intégrables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$
f^b	Transformée de Bochner de f.

Introduction générale

Plusieurs types d'équations différentielles permettent de modéliser des phénomènes observés dans différents domaines comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie etc. Il s'agit entre autres des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, des équations différentielles à retard, ...

Les équations différentielles à retard appelées aussi "les équations à mémoires" ou "les équations héréditaires", notées en abrégé "EDR", occupent une place très importante dans la modélisation des phénomènes de la nature dont l'évolution (le futur) dépend non seulement de leurs états présents, mais aussi des états antérieurs (le passé). On rencontre de tels phénomènes par exemple dans les problèmes provenant du traitement de signal en électronique, les problèmes de réseaux de neurones en informatique théorique ou les problèmes de la dynamique de populations en biologie et en écologie.

Les phénomènes à retard s'observent également en physique et la plus part des ingénieurs étaient conscients du fait que des effets héréditaires sont observés dans les systèmes qu'ils étudient soit en physique ou en mécanique, mais par manque de théorie suffisantes pour discuter de tels modèles, le retard est en général ignoré (il est considéré comme petit et estimé sans effet qualificatif). D'ailleurs, Picard [47] lors de la conférence internationale des mathématiciens à Rome en 1908 a souligné l'importance de modéliser les systèmes physiques par des équations retardées. Il a fait la déclaration suivante :

"*Les équations différentielles de la mécanique classique sont telles qu'il en résulte que le mouvement est déterminé par la simple connaissance des positions et des vitesses, c'est-à-dire par l'état à un instant donné et à l'instant infiniment voisin. Les états antérieurs n'y intervenant pas, l'hérédité y est un vain mot. L'application de ces équations où le passé ne se distingue pas de l'avenir, où les mouvements sont de nature réversible, sont donc inapplicables aux êtres vivants.*" On comprend de cette déclaration que pour l'étude des populations vivantes il est nécessaire de tenir compte du retard. Dans ce sens, la première équation à retard a été introduite par V. Volterra en 1928 [90] dans son étude des modèles proies-prédateurs.

A partir des années quarante, plusieurs auteurs se sont intéressés à la théorie des équations à retard. Nous citons par exemple Bellman et Cooke [8], ils donnent les motivations pour étudier les systèmes à retard dans le contexte de la dynamique des populations et de la biologie mathématique en général. Nous pouvons cité aussi la monographie de J. Hale [47] qui constitue, à ce jour, un ouvrage de référence pour les chercheurs qui travaillent sur les équations différentielles à retard. La littérature concernant ces équations est abondante ; le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à la monographie de Hale [47] et les références qui y figurent.

Les retards apparaissent à cause du temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. La signification du retard est différente d'un modèle à un autre, il peut être par exemple le temps du contrôle pour les systèmes mécaniques, le temps de gestation en dynamique des populations, le temps nécessaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en biologie, la période d'incubation d'une maladie contagieuse en épidémiologie, ...

La nature du retard (discret, continu, dépendant de l'état, ...) rend la théorie difficile et fait appel à un arsenal mathématique très vaste. Il induit parfois à des oscillations indésirables et peut causer l'instabilité du système.

Les systèmes à retard périodiques sont largement étudiés et très importants dans de nombreux domaines scientifiques. Cependant, les phénomènes naturels exigent parfois des notions qui dépassent le concept de la périodicité. Ceci a conduit plusieurs mathématiciens à se pencher sur les diverses généralisations de la périodicité et leurs applications variées qui concernent notamment les équations différentielles ordinaires et celles aux dérivées partielles (voir par exemple [2, 18, 21, 58, 93].

Dans le cadre de ce travail, nous considérons quelques généralisations des fonctions périodiques et des fonctions Bohr presque périodiques à savoir : les fonctions pseudo presque périodiques "PAP", les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques "S^pPAP, les fonctions asymptotiquement ω-périodiques "AP_ω" et les fonctions $S-$asymptotiquement ω-périodiques "SAP_ω".

C. Zhang [95] a introduit la pseudo presque périodicité "PAP" au début des années quatre-vingt-dix comme extension de la presque périodicité de Bohr [12]. Plus précisément, une fonction pseudo presque périodique est une somme d'une fonction presque périodique et d'une fonction ergodique (une fonction continue bornée de moyenne nulle). Cette classe de fonctions a attiré de nombreux chercheurs, elle a été largement utilisée dans l'étude qualitative des solutions des équations différentielles ordinaires, des équations différentielles partielles et des équations différentielles abstraites.

En 1926, Stepanov [79] a introduit une nouvelle classe de fonctions presque périodiques dites "fonctions Stepanov presque périodiques". Les fonctions de cette classe ne sont pas nécessairement continues donc s'apprêtent mieux pour l'étude qualitative des équations différentielles. Elle a été développée grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens comme par exemples Amerio et Prouse [2], C. Corduneanu [18] et B. M. Levitan [58].

Depuis lors, un tel concept a été largement étudié et étendu dans diverses directions. On peut citer en premier lieu les travaux de T. Diagana [23, 22, 25]. Le même auteur a introduit en 2007 dans [22] les fonctions Stepanov pseudo-presque périodiques.

Le concept de l'asymptotique périodicité est une importante généralisation de la périodicité classique (voir [46]). Cette notion est plus appropriée que la périodicité pour expliquer les processus complexes. La littérature relative aux fonctions asymptotiquement $\omega-$périodiques reste limitée en raison de la nouveauté du concept. Les propriétés qualitatives de telles fonctions sont discutées dans [87]. Les articles [30, 46, 48, 91] traitent le problème d'existence de solutions d'équations différentielles asymptotiquement ω-périodiques, S-asymptotiquement $\omega-$périodiques, et asymptotiquement ω-périodiques de Stepanov.

Dans [87], Xie et Zhang ont introduit le concept de fonctions limites $\omega-$périodiques comme une généralisation des fonctions asymptotiquement $\omega-$périodiques, ils ont étudié leurs propriétés et ont obtenu des résultats sur l'existence et l'unicité de solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques pour une certaine classe d'équations différentielles.

Les fonctions $S-$asymptotiquement ω-périodiques sont introduites en 2008 par Henriquez, Pierre et Taboas [48] comme généralisation des fonctions asymptotiquement ω-périodiques, elles ont été développées grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens comme par exemple Blot, Cieutat et N'Guérékata [11], Nicola et Pierri [71].

Dans ([28, 29, 48]), des propriétés de ces fonctions sont présentées et des conditions d'existence et d'unicité de solution $S-$asymptotiquement ω-périodiques de certaines classes d'équations différentielles d'évolution sont données.
Les travaux présentés dans cette thèse concernent le problème d'existence de solutions asymptotiquement périodiques, $S-$asymptotiquement périodiques et pseudo presque périodiques de deux modèles d'équations différentielles à retard : le premier est un système qui se présente en théorie des réseaux de neurones, il s'ecrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \Big(c_{ij}(t) f_j(x_j(t)) + d_{ij}(t) g_j(x_j(t-\tau)) \Big) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) h_j(x_j(s)) ds + J_i(t), \quad 1 \leq i \leq n,\ t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

avec la condition initiale $x_i(t) = \phi_i(t)$, pour $t \in \left]-\infty, 0\right]$.
Les $\phi_i(.)$ sont des fonctions continues, les $a_i, i = \overline{1,n}$ sont des constantes strictement positives, et les fonctions $c_{ij}(.)$, $d_{ij}(.)$, $p_{ij}(.)$, $J_i(.)$, $f_j(.)$, $g_j(.)$, $h_j(.)$, $k_{ij}(.)$ sont des fonctions d'un certain type de periodicité qui sera préciser ultérieurement.

Notre objectif est de montrer l'existence de solutions qui conservent le même type de périodicité que celui des coefficients du système différentiel ainsi que leurs stabilité.

Le deuxième modèle étudié est l'équation différentielle fonctionnelle de Nicholson qui s'écrit

$$\begin{cases} x^{'}(t) = -\delta x(t) + p(t) x(t-\tau) e^{-a(t)x(t-\tau)} - H(t) x(t-\sigma) \ avec \ \delta > 0,\ t > 0 \\ \quad x_t = \varphi,\ t \in [-r, 0], \end{cases} \tag{2}$$

où

$$r = \max\{\tau, \sigma\},\ C_+ = C([-r, 0], \mathbb{R}^+)$$

et x_t la fonction définie par

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \ pour \ tout \ \theta \in [-r, 0].$$

Sous certaines hypothèses, nous montrons l'existence et l'unicité de solution pseudo-presque périodique de l'équation (2), quand certains coefficients sont Stepanov pseudo presque périodiques.

Cette thèse est composée de quatre chapitres, nous allons présenter ici le contenu de chacun d'eux.

Dans le premier chapitre, nous commençons par exposer les définitions et les propriétés des fonctions asymptotiquement périodiques, des fonctions limites $\omega-$périodiques et les fonctions pseudo-presque périodiques. Pour d'amples détails sur ces fonctions on renvoi le lecteur aux références suivantes [21, 22, 29, 30, 46, 88].

Par la suite, nous rappelons quelques résultats sur les équations différentielles à retard et les théorèmes du point fixe, de Banach et de Schauder, utilisés pour montrer l'existence de solutions des systèmes différentiels considérés dans les autres chapitres.

Dans le second chapitre, nous présentons un aperçu historique sur l'origine des réseaux de neurones artificiels. Puis nous nous intéressons au système (1) de réseaux de neurones avec retard mixtes.

Ces dernières années, l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions périodiques, anti périodiques, presque périodiques, pseudo-presque périodiques, pseudo-presque périodiques avec poids et asymptotiquement presque automorphes des systèmes de réseaux de neurones, lorsque les fonctions d'activation satisfassent la condition de Lipschitz, a suscité un intérêt remarquable on peut citer par exemple les travaux [1, 4, 13, 44, 86, 89] et les références qui y figurent. Notre travail a été motivé par les résultats d'Ammar [4], Dimbour [29], et Tatar [80, 81].

Ammar et al [4], ont montré en utilisant le théorème du point fixe de Banach, l'existence et l'unicité de solutions pseudo- périodiques du système (1) quand les fonctions d'activation sont pseudo presque périodiques et lipchitziennes. Un résultat de stabilité est aussi donné dans cet article.

Dans [80] et [81], Tatar a considéré un système de réseaux neurones impliquant des fonctions d'activation hölderiennes. Il a montré qu'il est globalement asymptotiquement stable stabilité et globalement exponentiellement stable.

En 2017, Dimbour et al. [29] ont donné des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques pour une équation d'évolution en utilisant le théorème du point fixe de Banach et les propriétés des fonctions limites $\omega-$périodiques.

Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de travaux sur l'existence de solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques des systèmes de réseaux de neurones.

Nous avons montré dans [14] l'existence de solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques du système (1) lorsque les fonctions d'activation sont supposées être hölderiennes. La démonstration est longue et s'appuie sur une version du théorème de Schauder et les propriétés des fonctions limites $\omega-$périodiques.

Dans le troisième chapitre, on s'est intéressé à l'existence et l'unicité de solutions $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique du même système considéré au chapitre 2. On a commencé par exposer brièvement quelques définitions et propriétés de ces fonctions. Par la suite un résultat d'existence et d'unicité de solution $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique du système (1) est établi quand les fonctions d'activation sont $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques et lipschitziennes.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons quelques propriétés des fonctions Stepanov pseudo-presque périodiques, ensuite nous nous intéressons à l'équation de Nicholson (2) introduite par Gurney, Blythe et Nisbet en 1980 [45]. Ce modèle décrit l'évolution de la population de mouches se nourrissant de la viande de moutons en Australie. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur l'étude du comportement asymptotique de cette équation voir par exemple [61] et [77].

Le premier travail concerne l'existence et l'unicité de solutions pseudo-presque périodique de l'équation (2) quand les coefficients sont Stepanov pseudo presque périodiques et le terme récolte est linéaire. Notre travail est motivé par les travaux de J. Andres et D. Pennequin [5], M. Baroun et al. [7], F. Chérif et al. [16], K. Ezzinbi et al. [37].

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous considérons l'équation (2) quand les coefficients sont Stepanov pseudo presque périodiques et le terme récolte est non linéaire.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est organisé comme suit : dans la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les fonctions de certains types de périodicité.
La section 2 rappelle quelques théorèmes du point fixe utilisés dans la démonstration de nos résultats.
Enfin, la dernière section a pour objet d'examiner et de présenter quelques résultats sur les équations différentielles à retard, une attention particulière est accordée aux équations différentielles fonctionnelles à retard, considérés dans les chapitres 2, 3, et 4 .
Pour les résultats contenus dans ce chapitre on renvoie le lecteur aux références [17, 29, 30, 48, 88, 87].

1.1 Fonctions asymptotiquement $\omega-$périodiques et les fonctions limites $\omega-$périodiques

Les fonctions asymptotiquement périodiques ont été introduites en 2006 par Hayin et al. [46]. Dans [87] et [88] R. Xie et C. Zhang ont définit une classe de fonctions appelées fonctions limites $\omega-$périodiques, ils ont établi un lien entre ces fonctions et les fonctions asymptotiquement $\omega-$périodiques. Ce dernier est exploité pour montrer l'existence de solution asymptotiquement $\omega-$périodiques pour une certaine classe d'équations d'évolution. Dimbour [29] a continué l'investigation des propriétés des fonctions limites $\omega-$périodiques (produit, composition,...), et il a obtenu un résultat sur l'existence et l'unicité de solution asymptotiquement $\omega-$périodique via les fonctions limites $\omega-$périodiques pour une équation différentielle avec arguments.

Nous noterons par $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ l'espace de Banach des fonctions bornées et continues de $\mathbb{R}^+$à valeurs dans un espace de Banach $(\mathbb{X},\|.\|)$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|f(t)\|.$$

Dans toute cette thèse, ω désignera un nombre réel strictement positif.
On note $P_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ et $C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ les espaces définis comme suit

$$P_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}):=\big\{f\in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}): f\ est\ \omega-\text{périodique}\big\}$$

$$C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) := \left\{ f \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) : \lim_{t\to\infty} \|f(t)\| = 0 \right\}.$$

Définition 1.1.1. [29, 48]
Une fonction $f \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ est dite

1. asymptotiquement $\omega-$periodique si f se décompose comme suit

$$f = g + h, \tag{1.1}$$

   où $g \in P_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ et $h \in C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$;

2. limite $\omega-$périodique si

$$\lim_{n\to+\infty} f(t+n\omega) = g(t)$$

   est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

On note par $AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ (respectivement $PL_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$), l'espace des fonctions asymptotiquement $w-$périodiques de $\mathbb{R}^+$à valeurs dans $\mathbb{X}$ (respectivement l'espace des fonctions limites $\omega-$périodiques).

Proposition 1.1.2. *[88]*

1. *Les espaces $AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ et $PL_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ munis de la norme $\|.\|_\infty$ sont des espaces de Banach.*
2. *Les fonctions asymptotiquement $\omega-$périodiques sont des fonctions uniformément continues celà est dû au fait que les fonctions périodiques et les fonctions dans l'espace $C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ sont uniformément continues.*
3. *La décomposition (1.1) est unique, puisque*

$$\lim_{t\to+\infty} (f(t+n\omega) - f(t)) = \lim_{t\to+\infty} (h(t+n\omega) - h(t)) = 0.$$

4. *On a $AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n) \subset PL_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$, l'exemple qui suit, donné dans [87], montre que la réciproque est fausse.*

   Considérons l'ensemble

$$K = \{(k_n)_n \subset]0,1[,\ k_n > k_{n+1},\ \lim_{n\to+\infty} k_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   Pour toute suite $(k_n)_n \subset K$, on définit la suite de fonction $f_{(k_n)}$ par

$$f_{(k_n)}(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 2n-1,\ \ n \in \mathbb{N} \\ 0 & si\ t \in \{0,2\} \cup \{2n-1-k_n\} \cup \{2n-1+k_n\} \\ linéaire & ailleurs. \end{cases}$$

   On pose

$$g(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 2n-1,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

   On voit que $\lim_{m\to\infty} f_{k_n}(t+2m) = g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall m \in \mathbb{N}$. On déduit que $f_{(k_n)}$ est limite $2-$périodique.

D'autre part, si on choisit deux suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ définies par

$$b_n = 2n-1, \text{ et } c_n = 2n-1-k_n$$

on aura $(b_n - c_n) = k_n$, ceci entraine que $\lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} k_n = 0$
Alors que $f_{(k_n)}(b_n) - f_{(k_n)}(c_n) = 1$.
D'où on déduit que $f_{(k_n)}$ est limite $2-$périodique mais elle n'est pas asymptotiquement 2-périodique.

On signale que l'exemple 9, tel qu'il est écrit dans [87] ne vérifie pas

$$f_{k_n}(b_n) - f_{k_n}(c_n) = 1.$$

Proposition 1.1.3. *[88]*
Soit $f \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ et $\omega > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$f \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.*
2. *$g(t) = \lim_{n\to+\infty} f(t+n\omega)$ uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*
3. *$g(t) = \lim_{n\to+\infty} f(t+n\omega)$ sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^+$.*
4. *$g(t) = \lim_{n\to+\infty} f(t+n\omega)$ bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $g(t) = \lim_{n\to+\infty} f(t+n\omega)$ uniformément sur $[0,\omega]$.*

Proposition 1.1.4. *[29]*
Soit f une fonction limite ω-periodique avec $g(t) = \lim_{n\to+\infty} f(t+n\omega)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors les assertions suivantes sont vérifiées :

1. *$g(t+\omega) = g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*
2. *g est bornée sur $\mathbb{R}^+$; de plus $||g||_\infty \leq ||f||_\infty$.*

Lemme 1.1.5. *[29]*
Si $f_1,\ f_2 \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, alors $f_1.f_2 \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.

Démonstration.
Soient $f_1,\ f_2 \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Les propositions 1.1.3 et 1.1.4, montrent l'existence de deux fonctions périodiques et bornées $g_1,\ g_2$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} f_1(t+n\omega) = g_1(t) \text{ uniformément pour tout } t \in \mathbb{R}^+$$

et

$$\lim_{n\to\infty} f_2(t+n\omega) = g_2(t), \quad \text{uniformément pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

Alors

$$\begin{aligned} |(f_1f_2)(t+n\omega) - (g_1g_2)(t)| &\leq |f_1(t+n\omega)f_2(t+n\omega) - f_1(t+n\omega)g_2(t)| \\ &+ |f_1(t+n\omega)g_2(t) - g_1(t)g_2(t)| \\ &\leq M_1|f_2(t+n\omega) - g_2(t)| + M_2|f_1(t+n\omega) - g_1(t)|. \end{aligned}$$

D'où $f_1.f_2 \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. □

Lemme 1.1.6. *[29]*
Si $f \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, alors $f(.-a) \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration.
Comme $f \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, alors on peut écrire

$$f = g + h,$$

où $g \in P_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ et $h \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.
Il est évident que les espaces $P_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ et $C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ sont invariants par translations.
Par conséquent,

$$f(.-a) \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}).$$

□

Lemme 1.1.7. *[29]*
Soit Φ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{X}$. Alors pour toute fonction $f \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ on a $\Phi \circ f \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.

Démonstration.
Il est evident que $\Phi \circ f \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Notons que la fonction Φ est uniformément continue alors il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \varepsilon \ pourtout \ x, y \in \mathbb{X} \ avec \ ||x - y|| < \delta.$$

En utilisant la proposition 1.1.3, on a pour $\delta > 0$, il existe un rang $N(\delta)$ tel que pour $n \geq N(\delta)$ on a

$$\|f(t + n\omega) - g(t)\| < \delta, \ pour \ tout \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Ceci entraine que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\Phi(f(t + n\omega)) - \Phi(g(t))| < \varepsilon,$$

on en déduit que $\Phi \circ f \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. □

1.2 Fonctions presque périodiques

Les fonctions presque périodiques ont été initiées par le mathématicien danois Harald Bohr en 1923 [12], elles généralisent les fonctions périodiques continues. Il existe plusieurs ouvrages qui présentent ces fonctions et leurs applications aux équations différentielles d'une manière très détaillées. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [2, 17, 93, 39].

Définition 1.2.1. [12, 39]
Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{X}, \|.\|)$ est dite Bohr presque périodique (ou simplement presque périodique) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $l(\varepsilon) > 0$, tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre τ vérifiant

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| \leq \varepsilon \ pour \ tout \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

$AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ désignera l'espace de ces fonctions.
Cette définition généralise d'une manière naturelle la périodicité. D'ailleurs on appelle les nombres τ vérifiant (1.2) les $\varepsilon-$presque périodes de f.

Exemple 1.2.1.

- *Toute fonction $T-$périodique et continue est une fonction presque périodique. Ceci découle du fait que l'ensemble des périodes de f, $\{nT; n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense*[1] *dans $\mathbb{R}$.*
- *La somme de deux fonctions périodiques continues dont le rapport des périodes est irrationnel est presque périodique. Exemples les fonctions*

$$x \mapsto \sin x + \sin\sqrt{2}x, \quad x \mapsto \cos x + \cos\sqrt{2}x.$$

Définition 1.2.2. [39]
$AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est la fermeture de l'espace des polynômes trigonométriques généralisés, $Trig(\mathbb{R},\mathbb{X})$, pour la topologie de la convergence uniforme. Autrement dit, $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in Trig(\mathbb{R},\mathbb{X})$ tel que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t) - P_\varepsilon(t)\| < \varepsilon,$$

où

$$Trig(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \{P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t},\ avec\ a_k \in \mathbb{X}\ \ et\ \ \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Dans [18], Bochner a défini les fonctions presque périodiques comme suit :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est presque périodique si elle est continue et de toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels on peut extraire une sous-suite $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(t+h'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit, l'ensemble des translatés $\{f(.+t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est relativement compact dans $BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

On résume dans la proposition qui suit quelques propriétés des fonctions presque périodiques.

Proposition 1.2.3. *[2, 21]*

1. *$AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme et il est invariant par translation.*
2. *Une fonction presque périodique est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si f est une fonction presque périodique et g une fonction uniformément continue alors $(g \circ f)$ est une fonction presque périodique.*
4. *La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions presque périodiques est presque périodique.*
5. *Imf est relativement compact dans $\mathbb{X}$.*

1. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est relativement dense, s'il existe un nombre positif $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un élément de A

Fonction presque périodique à paramètre

Définition 1.2.4. [93]
Une fonction $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ est dite presque périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact K de $\mathbb{X}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe $\tau \in [\alpha, \alpha + l]$ tels que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Big(\sup_{x \in K} \| f(t+\tau, x) - f(t, x) \| \Big) \leq \varepsilon.$$

L'ensemble de ces fonctions est noté $AP_U(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Le théorème qui suit est un théorème de superposition dans l'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, il est indispensable pour l'étude de la presque périodicité des solutions des équations différentielles.

Théorème 1.2.5. *[21]*
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ une fonction continue, telle que pour tout $x \in \mathbb{X}$ la fonction $f(., x)$ est presque périodique uniformément en $t \in \mathbb{R}$.
Supposons que f est lipschtizienne en $x \in \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire il existe $L > 0$ tel que

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|, \ \forall x, \ y \in \mathbb{X}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est presque périodique, alors la fonction $f(., g(.))$ est aussi presque périodique.

1.3 Fonctions pseudo-presque périodiques

Ce concept est une généralisation de la presque périodicité, il a été introduit par Zhang [95] en 1994. Une fonction pseudo-presque périodique est la somme d'une fonction presque périodique et d'un terme ergodique.

L'espace des fonctions ergodiques $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est défini comme suit

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) := \left\{ f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \quad \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \| f(t) \| \, dt = 0 \right\}.$$

Remarque 1.3.1. [60, 95]

1. $(\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach .

2. Il y a une équivalence entre l'ergodicité de la fonction f et l'ergodicité des ensembles suivants
$$E_\varepsilon = \{ t \in \mathbb{R} \ ; \ \| f(t) \| \geq \varepsilon \}, \ \varepsilon > 0.$$

Plus précisement, on a

— $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est ergodique si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble
$$E_\varepsilon = \{ t \in \mathbb{R}, \ \| f(t) \| \geq \varepsilon \}$$
est un ensemble ergodique dans $\mathbb{R}$.

— Rappelons qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit ergodique si

$$\overline{\mu}(E) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\mu(E\cap[-T,T]) = 0$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. [95]
Une fonction $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est pseudo-presque périodique ($f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$) si

$$f = g + h \tag{1.3}$$

où $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $h \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. g et h sont appelées la composante presque périodique et la composante ergodique respectivement de la fonction f.

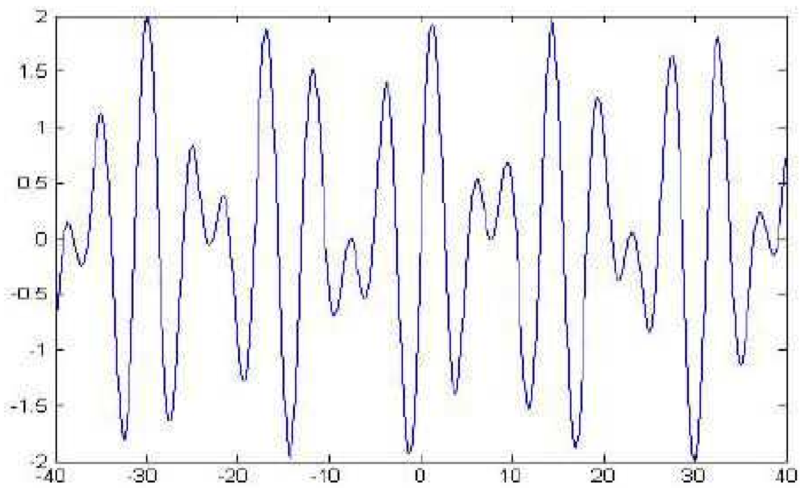

FIGURE 1.1 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t) + \frac{1}{1+t^2}$

Proposition 1.3.2.

1. *La décomposition (1.3) est unique (voir[21]).*
2. *Si $(g_n)_n \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ converge uniformément vers g alors $g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ (voir [26].)*
3. *Si $f,\ g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors $f \times g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (voir [4].)*

Définition 1.3.3. [93]
Une fonction $f \in BC(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ est dite pseudo presque périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact K de $\mathbb{X}$ si f se décompose comme suit

$$f = f_1 + f_2,$$

où f_1 est presque périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact K de $\mathbb{X}$ et $f_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

On note par $PAP_U(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions pseudo presque périodiques en t uniformément par rapport à x sur tout compact de $\mathbb{X}$.

On énonce maintenant un théorème de superposition pour les fonctions pseudo presque périodiques

Théorème 1.3.4. *[3]*

Soit une fonction f de $\mathbb{R} \times \mathbb{X}$ vers $\mathbb{X}$ pseudo presque périodique en t uniformément par rapport à x sur tout compact de $\mathbb{X}$ telle que f vérifie la condition de Lipschitz :

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, \ y \in \mathbb{X}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

alors si $h \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ on a $f(.,h(.)) \in PAP((\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Un théorème du point fixe est un résultat qui affirme que sous certaines conditions une fonction f possède au moins un point fixe. La notion du point fixe est très importante dans beaucoup de domaines de mathématiques, ceci vient du fait que de nombreuses questions peuvent se ramener aux problèmes d'existence de points fixes.
Dans cette section, on rappelle deux théorèmes très importants de la théorie du point fixe à savoir : le théorème de Banach et le théorème de Schauder.
Théorème du point fixe de Banach : il est établi en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Il affirme qu'une contraction sur un espace de Banach dans lui même possède un unique point fixe. Une application $T : (\mathbb{X}, \|.\|) \longrightarrow (\mathbb{X}, \|.\|)$ est une contraction s'il existe $0 < k < 1$ tel que $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$.
Ce théorème, en plus de fournir l'existence et l'unicité du point fixe, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite d'itérées.
Théorème du point fixe de Schauder : ce théorème est élaboré en 1930, il prolonge le résultat du théorème Brouwer valable en dimension finie, il assure l'existence de points fixes mais il n'assure pas l'unicité. Plus précisemment,

si D est un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $\mathbb{X}$. $F : D \to D$ une application continue et compacte. Alors F admet au moins un point fixe dans D.

1.5 Quelques critères de compacité

La notion de compacité, qui évoque une idée de petitesse, est une abstraction de la propriété de Heine-Borel[2] vérifiée pour les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Ainsi plusieurs propriétés des segments de la droite réelle se généralisent aux espaces compacts ce qui confère à ses derniers un rôle priviligé dans divers domaines des mathématiques. Ils sont notamment utilisés pour prouver l'existence de points fixes pour des applications continues. Dans un espace topologique la définition de la compacité repose sur les notions de recouvrements et sous-recouvrements.
Pour un espace métrique on peut aussi définir la compacité par les suites extraites.

2. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné

Définition 1.5.1. [19]

Un sous-ensemble F d'un espace de Banach $\mathbb{X}$ est compact si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à F. On dit que F est relativement compact si la fermeture de F est compacte.

Avant d'énoncer les critères de compacité d'Ascoli-Arzela et celui de Corduneanu, nous jugeons nécessaire de rappeler la définition de l'équicontinuité, l'uniforme bornitude et l'équiconvergence.

Ensembles équicontinus

On dira qu'un ensemble de fonctions est équicontinu si on peut contrôler les variations de ces fonctions autour d'un point donné indépendament de la fonction considérée. La définition est donnée d'une manière précise dans ce qui suit

Définition 1.5.2.

Soit $(\mathbb{X}, ||.||_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, ||.||_{\mathbb{Y}})$ deux espaces de Banach et $\mathcal{F}$ une partie de $C(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ (espace de fonctions continues).

On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en $x_0 \in \mathbb{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ ||x - x_0||_{\mathbb{X}} < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)||_{\mathbb{Y}} < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ est équicontinue sur $\mathbb{X}$ si elle est équicontinue en tout point de $\mathbb{X}$.

Dans le cas où $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|,$$

les définitions de l'équicontunité, l'uniforme bornitude et l'équiconvergence s'écrivent comme suit

Définition 1.5.3.

L'ensemble $\mathcal{F} = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est

1. équicontinu si

$$\forall\varepsilon > 0\,, \delta > 0,\ \textit{tel que}\ t_1,\ t_2 \in [a, b]\ \textit{et}\ |t_1 - t_2| < \delta \implies |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

2. uniformément borné sur $[a, b]$ s'il existe un constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|f_n\|_\infty \leq M.$$

Rappelons maintenenat le théorème d'Ascoli-Arzela, un outil classique pour montrer la compacité relative d'une partie de l'espace de fonctions continues sur un compact.

Théorème 1.5.4. *[35]*

Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est relativement compacte si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue.

Dans le cas où les fonctions sont définies sur des intervalles non bornés (non compacts), c'est le critère de compacité de Cordunenau qui permet de caractériser les parties relativement compactes.

L'énoncé du critère de compacité de Corduneanu nécessite de rappeler la définition de l'equiconvergence.

Soit

$$\mathcal{C}_l = \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}]),\ \underset{t\longrightarrow+\infty}{lim} u(t)\ existe\}$$

Définition 1.5.5. [19]
La famille $A \subset \mathcal{C}_l$ est dite équi-convergente si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T = T(\varepsilon) > 0,\ \forall t > T,\ \ |u(t) - \lim_{t \longrightarrow +\infty} u(t)| < \varepsilon,\ \forall u \in A.$$

Critère de compacité de Corduneanu

Lemme 1.5.6. *[17]*
On dit qu'un ensemble $D \subset \mathcal{C}_l$ est relativement compact si les conditions suivantes sont vérifiées

1. *L'ensemble D est borné c'est-à-dire il existe une constante $K > 0$ tel que*

$$\|f(x)\| \leq K \ \ \textit{pour tout}\, x \in [0, +\infty[\ \ \textit{et} \ \ \textit{tout}\ f \in D$$

2. *L'ensemble D est équicontinu (équicontinu sur tout intervalle compact de $[0, +\infty[$)*
3. *L'ensemble D est équiconvergent*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T(\varepsilon) > 0;\ \|y(t) - \lim_{t \longrightarrow +\infty} y(t)\| \leq \varepsilon,\ \forall t > T(\varepsilon), \forall y \in D$$

1.6 Equations différentielles à retard "EDR"

Une équation différentielle à retard "EDR" est une équation différentielle qui tient compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur. Ces équations sont largement étudiées ces dernières décennies, ceci est dû à leurs importance pour la modélisation des phénomènes d'hérédité, dont l'évolution dépend aussi du passé. Ce type de problèmes est rencontrés en physique, chimie, biologie, écologie, économie etc.

Pour certains problèmes, par souci de simplification, le retard est souvent ignoré. Mais les études ont prouvé que dans de nombreux cas les modèles avec retards sont plus réalistes et fournissent des résultats plus précis.
L'apparition des équations différentielles à retard remonte au 18^{me} siècle quand Bernoulli, en faisant des expériences sur la corde vibrante a trouvé, en partant d'une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, l'équation à retard $y^{'}(t) = y(t-1)$ qui est malheureusement considérée fausse et aucune attention ne lui a été accordée. L'étude de ces équations n'est reprise qu'au début du vingtième siècle avec les travaux pionnier de Polossuchin en 1910 [73], et Schmidt en 1911 [78].

En 1928, Volterra [90], a découvert le modèle de proie-prédateur décrit par l'équation

$$y^{'}(t) = \int_{t-r}^{t} a(t-s) y(s) ds$$

avec $r > 0$ un retard constant.
Les années suivantes ont donné naissance à un grand nombre de modèles d'équations différentielles à retard, on peut citer le modèle de Hutchinson (ou l'équation logistique) [53], qui s'écrit sous la forme

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\Big(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\Big),$$

où $r > 0$, est le taux de croissance intrinsèque de la population, c'est-à-dire le taux de croissance d'une population en l'absence de tout obstacle.

$K > 0$ représente la population maximale, au dessus de ce nombre la population ne peut pas continuer à se multiplier.

Dans [45], W. S. C Gurney, S. P. Blithe, et R. M. Nisbet ont proposé en 1980 l'équation dite de Nicholson qui décrit l'évolution d'une population de mouches dévoreuses de la viande de moutons en Autsralie, elle s'écrit

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + px(t-\tau)e^{-\lambda x(t-\tau)},$$

où $x(.)$, p, et τ représentent respectivement l'effectif de la population à l'instant t, le maximum de la croissance quotidienne d'oeufs par individu, et la durée de la phase de maturation. Le nombre a représente le taux de mortalité par individu et $\frac{1}{\lambda}$ le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

Différence entre une équation différentielle ordiniaire et équation différentielle à retard

L'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} x^{'}(t) = kx(t), \ t > 0 \\ x_0 = x(0) \end{cases} \tag{1.4}$$

admet une solution de la forme $x(t) = x_0 e^{kt}$. La connaissance de l'état présent $x(0) = x_0$ permet de prédire le futur à tout temps t, le passé n'est pas impliqué dans la solution.

Dans la cas d'une équation différentielle à retard

$$\begin{cases} x^{'}(t) = kx(t-\tau), \ t > 0 \\ x(t) = x_0(t), \ pour \ -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

contrairement à l'équation (1.4), la condition initiale est une fonction définie sur un intervalle borné. Cette condition initiale $x_0(.)$ joue un rôle important si nous souhaitons connaître la solution pour les temps courts.

En intégrant (1.5) sur l'intervalle $0 \leq t \leq \tau$, dans cette condition, $x(t-\tau)$ dans le membre de droite de (1.5) est égale à $x_0(t)$, ceci conduit à la solution

$$x(t) = x(0) + k\int_0^t x_0(s)ds \quad (0 \leq t < \tau).$$

La présence du retard dans les équations différentielles pourrait avoir un impact sur le comportement de la solution, ça diffère d'une équation à une autre selon le type du retard donné, son ajout joue un rôle primordial dans la stabilisation d'un modèle, et donne une visibilité sur la phase de modélisation. Néanmoins, l'investigation des équations avec retard exige et nécessite le développement d'autres outils d'analyse fonctionnelle pour faire face aux problèmes liés à l'aspect qualitatif des solutions. La difficulté majeure dans étude théorique de ces équations apparait dans la structure générale des solutions respectant certains hypothèses.

Les équations différentielle à retard peuvent être classées selon le type de retard. Dans ce qui suit, on cite quelques une de ces classes (voir[8]).

Equations différentielles à retard constants

Les équations différentielles à retard constant s'écrivent sous la forme suivante

$$x' = f(t, x(t-\tau))$$

où f est une fonction continue donnée, et τ une constante positive.

Dans l'exemple qui suit, on exposera la méthode des étapes pour la résolution d'une équation à retard.

Exemple 1.6.1. *Considérons l'équation*

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t-\tau) & \text{pour } t \in [0, 2\tau], \\ x(t) = \varphi(t) = 1 & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

On cherche à résoudre cette équation, en utilisant la méthode des étapes.

1. ***Première étape :*** *dans l'intervalle* $[-\tau, 0]$ *on a*

$$x(t) = 1.$$

2. ***Deuxième étape :*** *intégration sur* $[0, \tau]$.
En intégrant les deux membres de l'équation entre 0 *et* t*, il vient que*

$$x(t) = \alpha \int_0^t x(t-\tau) ds + x(0). \tag{1.7}$$

Comme $0 \leq s < \tau$*, alors* $-\tau \leq s - \tau < 0$*. Sachant que* $x(t) = 1$ *pour* $t \in [-\tau, 0[$*, alors*

$$x(s-\tau) = 1. \tag{1.8}$$

En injectant (1.8) dans (1.7), on obtient : pour $s \in [0, \tau]$

$$x(t) = \alpha t + 1 \text{ sur } [0, \tau].$$

3. ***Troisième étape :*** *intégration sur* $[\tau, 2\tau]$.
En intégrant les deux membres de l'équation entre τ *et* t *il vient*

$$x(t) = \alpha \int_\tau^t x(t-\tau) ds + x(\tau). \tag{1.9}$$

Comme $\tau \leq s < 2\tau$*, alors* $0 \leq s - \tau < \tau$*. Sachant que* $x(t) = \alpha t + 1$ *pour* $t \in [0, \tau[$*, il s'ensuit que*

$$x(s-\tau) = \alpha(s-\tau) + 1. \tag{1.10}$$

En remplaçant (1.10) dans (1.9), on aura pour pour tout $s \in [\tau, 2\tau]$

$$x(t) = \alpha^2 \frac{t^2}{2} + (\alpha - \alpha^2\tau)t - \alpha^2 \frac{\tau^2}{2} + \alpha^2\tau^2 - \alpha\tau.$$

Finalement, la solution de l'équation (1.6), est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} \alpha t + 1 & \text{sur } [0, \tau], \\ \alpha^2 \frac{t^2}{2} + (\alpha - \alpha^2\tau)t - \alpha^2 \frac{\tau^2}{2} + \alpha^2\tau^2 - \alpha\tau & \text{sur } [\tau, 2\tau]. \end{cases}$$

Equations différentielles à retard variable
Il s'agit du type d'équations dont le retard est variable temporellement. Elles s'écrivent sous la forme
$$x^{'} = f(t, x(t-\tau(t)), \text{ ou } x^{'} = f(t, x(t - x(\tau(t))).$$
Comme cette classification, en un certain sens, apparait insuffisante, il a fallu imposer des hypothèses resctricives sur le retard , comme par exemple le fait que le retard $\tau(t)$ doit être majoré
$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_{\max},$$
ceci a donné naissance aux équations différentielle dites "Equations diffétentielles à retard variable majoré". Ce type d'équations est largement étudié dans la littérature, la connaissance de la valeur maximale du retard permet de compenser les effets d'instabilité qui peuvent intervenir.

Equations différentielles à retard distribué continu fini

Ce type d'équations trouve son application dans la dynamique des réseaux de neurones et des modèles en écologie, elles s'écrivent sous la forme
$$x^{'}(t) = -ax(t) - b\int_{-r}^{0} k(s)x(t+s)ds.$$
Par contre les équation diffétentielles à retard distribué continu infini sont sous la forme
$$x^{'}(t) = -ax(t-\tau) + \int_{-\infty}^{t} k(t-s)x(s)ds,$$
où le retard noyau $k(.)$ est continu et le retard τ est une constante positive.

Equations diffétentielles neutres
Une équation différentielle de type neutre s'écrit sous la forme
$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = f(t, x_t),$$
où D et f sont sont deux fonctions données définies et continues sur Ω, un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Equations différentielles fonctionnelles à retard
Pour $r > 0$ fixé, on note $C^+ := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. C^+ muni de la norme de la convergence uniforme
$$||\varphi|| = \sup_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|_{\mathbb{R}^n}$$
est un espace de Banach. On appelle équation différentielle fonctionnelle à retard toute équation de la forme
$$x^{'}(t) = f(t, x_t),$$
où $f\ : \mathbb{R} \times C_u :\longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée et $x_t \in C_u$ est définie par
$$x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \forall\theta \in [-r, 0].$$

Définition 1.6.1. [47]
Si Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R} \times C_u$, $f : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, l'équation

$$x^{'}(t) = f(t, x_t) \tag{1.11}$$

où

$$x_t(s) = x(t+s), \ \forall s \in [-\tau, 0]$$

est une équation différentielle fonctionnelle à retard sur Ω. Le nombre $r > 0$ s'appelle le retard.

Lemme 1.6.2. *[47]*
Etant donnés une fonction $\psi \in \ C^{+}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t, \psi)$ une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (1.11) à travers (t_0, ψ) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$\begin{cases} x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(u, x_u) du \quad \textit{pour } t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \psi \end{cases} \tag{1.12}$$

Théorème 1.6.3. *[47]*
Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et $f(t;\psi)$ est lipschitzienne par rapport à ψ sur tout sous ensemble compact K de Ω, c'est-à-dire il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $(t, \psi_i) \in K$, $i = 1, 2$, on a

$$|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)| \leq k|\psi_1 - \psi_2|. \tag{1.13}$$

Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution unique de l'équation (1.11) passant par (t_0, ψ).

Chapitre 2

Solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques d'un système intégro-différentiel avec retard mixtes et à coefficients asymptotiquement $\omega-$périodiques

Dans ce chapitre, nous avons montré, sous certains conditions, l'existence de solutions asymptotiquement ω-périodiques pour un système d'équations différentielles avec retard mixtes qui se présente dans la théorie des réseaux neuronaux (NNs). Pour ce faire, on a utilisé les propriétés des fonctions limites ω-périodiques et le théorème du point fixe de Schauder. Les coefficients du système (y compris les fonctions d'activation) sont supposés être asymptotiquement $\omega-$périodiques et hölderienne. La plupart des auteurs qui se sont intéressé à l'existence et l'unicité de solutions périodiques, presque périodiques, pseudo presque périodiques, pseudo presque périodiques avec poids, ont considéré des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz.

Avant d'exposer les résultats obtenus nous jugeons nécessaires de donner quelques rappels sur les réseaux de neurones.

2.1 Aperçu historique

Le contenu de cette section est tiré de [9, 49, 68, 82]

2.1.1 Le neurone biologique

C'est au début du vingtième siècle que ces fameuses cellules ont été reconnues être à l'origine des processus de traitement, de décision et de contrôle chez n'importe quelle espèce animale. Suite à plusieurs observations, des chercheurs ont pu conclure que ces cellules sont capables d'échanger des informations par le biais des quatres structures suivantes :

1 **Les dendrites**, sur lesquelles les autres cellules entrent en contact synaptique, c'est par les dendrites que se fait la reception des signaux.

2 **Le corps de la cellule**, c'est l'unité de traitement.

3 **L'axone**, ou passent les messages accumulés dans le corps de la cellule, l'envoi de l'information se fait par l'axone.

4 **Les synapses**, par lesquelles la cellule communique avec d'autres cellules, ce sont des points de connexion par ou passent les signaux de la cellule.

Le fonctionnement d'un neurone biologique dépend de l'état d'excitaion des neurones qui sont connectés à ses dendrites et des types de synapses impliquées.

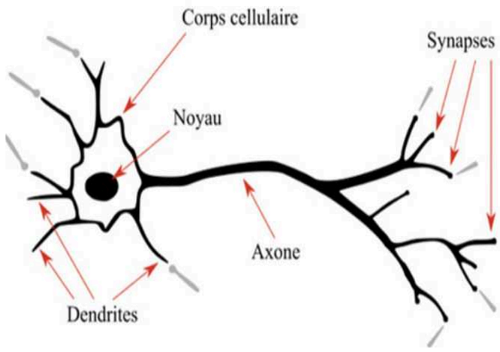

FIGURE 2.1 – Neurone Biologique

Les neuro-sciences s'accordent à dire que l'excitation du neurone est déclenchée dès que la quantité d'information apportée par ses dendrites dépasse des seuils critiques. C'est de cette confirmation que le concept du neurone formel est né.
Le fonctionnement du neurone biologique a permet de dégager ce qui suit :

1. Une fonctions d'agrégation $\mathcal{A}$ qui caractérise l'environnement amont du neurone (appelé "état"), en utilisant les informations reçues par ses dendrites.
2. Un processus de décision Φ, également appelé fonction d'activation, provoque le passage à l'état excité du neurone et donc sa transmission à son environnement aval.

2.1.2 Modélisation mathématique d'un neurone biologique

Le premier modèle mathématique d'un neurone biologique fu décrit en 1952, par Hodgkin-Huxley [49], qui modélise les réponses éléctriques d'un neurone, basé sur la loi de Kirchoff, les canaux ioniques comportant comme un circuit éléctrique. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire qui s'écrit

$$C_m \frac{dV_m}{dt} + I_{ion} = I_{ext}$$

C_m : la capacité membranaire
V_m : le voltage membranaire

I_{ion} : le courant ionique

I_{ext} : le courant extérieur éventuellement appliqué

Le rapprochement des caractéristiques éléctriques des cellules excitables conduit au système de Hodgkin-Huxley.

2.1.3 Le neurone artificiel

L'idée du neurone artificiel est inspirée des connaissances neurobiologiques, l'objectif était de reproduire artificiellement les comportements intelligents observés chez les animaux en général.

Du point de vue mathématique, chaque neurone peut être considéré comme la composition $(\Phi \circ \mathcal{A})$ des fonctions Φ et $\mathcal{A}$.

La première fonction a une action paramétrique sur n variables d'entrées $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n$, dont les valeurs symbolisent l'activité respective des dendrites. Le résultat x de cette fonction est passé à la seconde, qui évalue le taux d'activité qui doit être envoyé sur l'axone du neurone. Dans ce sens la fonction composée $\Phi \circ \mathcal{A}$ est appelée neurone artificiel.

Définition 2.1.1. [9]
Un neurone artificiel (*voir la figure* 2.2) est la composition de deux fonctions définies sur deux algèbres quelconques $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$:

$$\mathcal{A}\ :\ \mathbb{E}_1^n \longrightarrow \mathbb{E}_2\ \ et\ \ \Phi\ :\ \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_1$$

Cette approche, pour décrire un neurone, basée sur le comportement du cerveau humain a connu un essor important durant le début du vingtième siècle.

En 1943 W. MC. Cullock et W. Pitts [9] ont pu modéliser un neurone formel en analogie avec un neurone biologique, un neurone au comportement binaire, qui peut réaliser des opérations logiques, arithmétiques, et symboliques. Ce neurone reste aujourd'hui un élément de base des réseaux de neurones artificiels. Dans leur modèle qu'on notera (M.P) Mcullock et Pitts considèrent une somme pondérée $\mathcal{A}$ prenant chacun de ses arguments dans $\mathbb{E}_1 = \{0,1\}$ et à valeurs dans $\mathbb{E}_2 = \mathbb{R}$. Les n poids synaptiques du vecteur $w = (w_1\ w_2 ...\ w_n)$ sont les coefficients de pondérations appliqués aux entrées.

Φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$, qui vaut 1 si et seulement si la valeur d'agrégation dépasse une valeur seuille fixée par un paramètre w_0.

$$\begin{aligned} \Phi \circ \mathcal{A} :\ \{0;1\}^n &\longrightarrow \{0;1\} \\ (e_1, e_2, ..., e_n) &\longmapsto H(w_0 + (w_1 e_1 + w_2 e_2 + ... + w_n e_n)) \end{aligned}$$

où H est la fonction de Heavside définie par

$$H(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les variations possibles de ce modèle découlent du choix du nombre d'entrées, de la valeur des poids ou de la fonction d'agrégation.

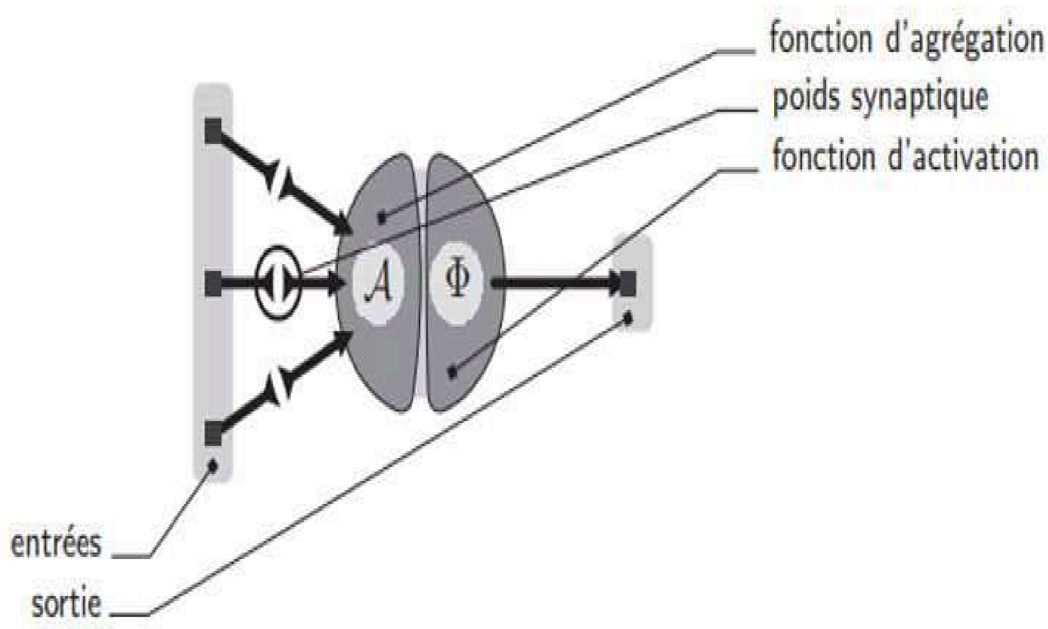

Figure 2.2 – Neurone artificiel

Il était alors question de savoir comment calculer les coefficients synaptiques en fonction des données disponibles sur un problème.

En 1949, D. Hebb a décrit dans son ouvrage, "The organization of Behavior" une règle qui porte son nom, qui permet de modifier la valeur des coefficients synaptiques en fonction de l'activité des éléments qu'ils relient.

En 1958, F. Rosenblatt propose le modèle du Perceptron, qui est une première tentative de neurone orienté vers le traitement automatique de l'information.

Parallèlement à ces travaux, B. Widrow propose le modèle d'ADALINE, qui se caractérise par une fonction d'agrégation qui contrairement au neurone du modèle (MP), elle est paramétrée par des poids synaptiques indépendants, qui a recours à une entrée auxiliaire e_0 bloquée à 1 pour inclure le problème de réglage du seuil à celui de la détermination des poids synaptiques.
En 1986, J. Hopfield [50] a fournit un éclairage original, par l'étude d'un réseau complétement rebouclé, il a établit ainsi une relation avec la théorie physique des verres de spin. Il a considéré un réseau de neurones comme un système dynamique donné par

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(u_j) - \frac{u_i}{R_i} + I_i(t) \quad i = 1, ...n$$

C_i : capacité ou le taux de réinitialisation du neurone i ;
T_{ij} : poids de la connexion du neurone i au neurone j ;
R_i : la résistance du neurone i
I_i : entrées externes au neurone i ;

u_i : l'état du système ;
$f_j(.)$: fonction d'activation.

En 1989, l'auteur de [68], a donné un résultat important sur l'étude qualitative du modèle de Hopfield, en exminant sa stabilité à l'aide de la méthode de Lyapunov. Ceci a donné naissance à plusieurs modèles on cite par exemple celui de Cohen-Grossberg [40] et B.A.M (Bidirectional Access Memory)[82]..

2.2 Présentation du problème étudié

Les réseaux de neurones récurrents sont des réseaux dans lesquels il y'a un retour de l'information, ils sont composées d'une succession de couches dont chacune prend ses entrées sur les sorties précédentes. Le processus dynamique de l'évolution des neurones de ce réseau, génère la sortie de n'importe quel neurone x_i est renvoyée comme entrée à tous les neurones x_j, à chaque synapse est associé un poids synaptique, de sorte que les sorties sont multipliés par ce poids, puis additionnés par les neuronnes de niveau i. Ce qui revient à multiplier le vecteur d'entrée par une matrice de connexion (transformation). Pour obtenir le modèle final qui décrit ce processus nous déterminons une fonction d'activation (seuil) qui permet de déterminer l'état interne du neurone en fonction de son entrée totale.
Ce processus à n neurones est régi par le système integro-différentiel suivant

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \Big(c_{ij}(t) f_j(x_j(t)) + d_{ij}(t) g_j(x_j(t-\tau)) \Big) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) h_j(x_j(s)) ds + J_i(t), \quad 1 \leq i \leq n, \ t > 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec la condition initiale $x_i(t) = \phi_i(t)$, pour $t \in \left]-\infty, 0\right]$, où $\phi_i(.)$ une fonction continue.
$n \geq 2$ désigne le nombre de neurones, $x_i(t)$ est l'état du i-ème neurone à l'instant t. a_i décrit le taux de réinitialisation du i-ème neurone, τ une constante qui décrit le retard, $k_{ij}(.)$ est un retard noyau et les fonctions $t \mapsto c_{ij}(t)$ et $t \mapsto d_{ij}(t)$ et $t \mapsto p_{ij}(t)$, sont les poids de connexions entre le neurone j et le neurone i à l'instant t respectivement.

Les fonctions $f_j(.),\ g_j(.),\ et\ h_j(.)$ sont les fonctions d'activation du système définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $J_i(.)$ est l'entrée extérieure du neurone i à l'instant t.

Pour démontrer l'existence de solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques, on aura besoin des hypothèses suivantes sur les coefficients du système (2.1).

(H1) Les coefficients $a_i, i = \overline{1, n}$ sont des constantes strictement positives.

(H2) Pour $j = 1, 2, \ldots, n$, les fonctions f_j, g_j and $h_j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, sont asymptotiquement ω-périodiques, et hölderienne, c'est-à-dire ils existent des constantes L_j^f, L_j^g and L_j^h tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq L_j^f |x-y|^{\alpha_j}, \quad |g_j(x) - g_j(y)| \leq L_j^g |x-y|^{\alpha_j},$$

$$|h_j(x) - h_j(y)| \leq L_j^h |x-y|^{\alpha_j} \text{ avec } 0 < \alpha_j < 1.$$

De plus, on pose $f_j(0) = g_j(0) = h_j(0) = 0$.

(H3) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, le noyau retardé $k_{i,j} : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est asymptotiquement ω-périodique et il existe deux constantes positives k_{ij}^+ et σ, tels que

$$\sigma \leq k_{ij}^+ L_j^h, \; k_{ij}(s) \leq k_{ij}^+ e^{-\sigma s}.$$

(H4) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, les fonctions $c_{ij}(.)$, $d_{ij}(.)$, $p_{ij}(.)$ $J_i(.)$ sont asymptotiquement w-périodiques. On pose :

$$c_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |c_{ij}(t)|; \; d_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |d_{ij}(t)|; \; p_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |p_{ij}(t)|; J_i^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |J_i(t)|.$$

2.3 Existence de solutions asymptotiquement $\omega-$périodiques

Les lemmes suivants sont indispensables pour prouver notre résultat principal

Lemme 2.3.1.
*Supposons que les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont vérifiées, et pour tout $1 \leq j \leq n$, $x_j(.) \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction*

$$\varphi_i : t \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) h_j(x_j(s)) ds$$

appartient à $AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Démonstration.

Première étape : nous allons prouver que $\varphi_i \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction φ_i satisfait :

$$\begin{aligned} |\varphi_i(t)| &\leq \|h_j\|_\infty \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) ds = \|h_j\|_\infty \int_0^{+\infty} k_{ij}(s) ds \\ &\leq \|h_j\|_\infty k_{ij}^+ \int_0^{+\infty} e^{-\sigma s} ds \leq \|h_j\|_\infty k_{ij}^+ \left[\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma s} \right]_0^{+\infty} = \frac{k_{i,j}^+}{\sigma} \|h_j\|_\infty. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la fonction φ_i est bornée.

Maintenant, on va prouver la continuité de la fonction φ_i.

Soit $(b_n)_n$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$. La continuité de la fonction $x_j(.)$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a

$$|x_j(s + b_n) - x_j(s)| \leq \left(\frac{\varepsilon \sigma}{L_j^h k_{ij}^+} \right)^{\frac{1}{\alpha_j}}. \tag{2.2}$$

En utilisant **(H1)**, on sait qu'il existe $L_j^h > 0$ et $0 < \alpha_j < 1$ tels que

$$|\varphi_i(t + b_n) - \varphi_i(t)| \leq L_j^h \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(ts) |x_j(s + b_n) - x_j(s)|^{\alpha_j} ds.$$

Par **(H2)** et l'inégalité (2.2) on obtient,

$$\begin{aligned}|\varphi_i(t+b_n)-\varphi_i(t)| &\le L_j^h\left(\frac{\varepsilon\sigma}{L_j^h k_{ij}^+}\right)\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(ts)|ds \\ &\le \left(\frac{\varepsilon\sigma}{k_{ij}^+}\right)k_{ij}^+\int_0^{+\infty} e^{-\sigma s}ds=\varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui implique que φ_i est continue. D'où $\varphi_i \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

Deuxième étape : Les arguments utilisés dans cette étape sont inspirés de ceux utilisés dans [29]. Grâce à la condition**(H1)**, le lemme 1.1.7 et la proposition 1.1.3, nous avons $h_j\circ x_j \in AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, ce qui implique que $h_j\circ x_j \in PL_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ ceci signifie que

$$\psi_j(s)=\lim_{n\to\infty} h_j(x_j(s+n\omega))$$

est bien définie pour chaque $s\in\mathbb{R}^+$.

De plus en utilisant la proposition 1.1.4 il existe une constante positive M, telle que

$$||\psi_j||_\infty \le ||h_j||_\infty \le M.$$

Pour montrer que $\varphi_i \in AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, nous devons montrer que $(\varphi_i(t+n\omega))_n$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (voir la proposition 1.1.3).

Par définition

$$\varphi_i(t+n\omega)=\int_{-\infty}^{t+n\omega} k_{ij}(t+n\omega-s)h_j(x_j(s))ds, \quad \text{pour } 1\le j\le n.$$

Nous pouvons écrire

$$\varphi_i(t+n\omega)=\int_{-\infty}^{0} k_{ij}(t+n\omega-s)h_j(x_j(s))ds+\int_0^{t+n\omega} k_{ij}(t+nw-s)h_j(x_j(s))ds.$$

On peut mettre $\xi=s-n\omega$, puis on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_i(t+n\omega)=\int_{-\infty}^{-n\omega} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(n\omega+\xi))d\ xi+\int_{-n\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(n\omega+\xi))d\xi \\ +\int_0^t k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(n\omega+\xi))d\xi.\end{aligned}$$

Nous posons

$$\varphi_i(t+n\omega)=I_1(\xi,n)+I_2(\xi,n)+I_3(\xi,n).$$

De même on écrit

$$|I_1(\xi,n)|\le\int_{-\infty}^{-n\omega} k_{ij}(t-\xi)|h_j(x_j(n\omega+\xi))|d\xi \le \int_{-\infty}^{-n\omega} k_{ij}^+ e^{-\sigma(t-\xi)}d\xi \le k_{ij}^+ e^{-\sigma(t+n\omega)}.$$

On peut donc choisir N_1 tel que $k_{ij}^+ M e^{-\sigma(t+n\omega)} \le \varepsilon$ lorsque $n\ge N_1$. Celà signifie que

$$|I_1(\xi,n)|\le\varepsilon \text{ uniformément pour } \xi\in\mathbb{R}.$$

Ensuite, nous allons prouver que $I_2(\xi,n)$ converge uniformément vers une fonction $d(.)$. Pour celà , nous allons vérifier le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$.

On a pour $p \geq n \geq N_1$ et $n, N_1 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
I_2(\xi,n+p) - I_2(\xi,n) &= \int_{-(n+p)\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j((n+p)\omega\xi))d\xi \\
&- \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(n\omega+\xi))d\xi \\
&= \int_{-(n+p)\omega}^{-n\omega} k_{i,j}(t-\xi)h_j(x_j((n+p)\omega+\xi))d\xi \\
&+ \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j((n+p)\omega+\xi))d\xi \\
&- \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(\xi+n\omega))d\xi \\
&= \int_{-(n+p)\omega}^{-n\omega} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(\xi+(n+p)\omega))d\xi \\
&+ \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)(h_j(\xi+(n+p)\omega) - h_j(x_j(\xi+n\omega))d\xi \\
&= I_4(\xi,n) + I_5(\xi,n).
\end{aligned}$$

On estime le terme $I_4(\xi,n)$

$$|I_4(\xi,n)| \leq \int_{-(n+p)\omega}^{-n\omega} k_{ij}^{+}Me^{-\sigma(t-\xi)}d\xi \leq \frac{k_{ij}^{+}M}{\sigma}(e^{-\sigma(n\omega)} - e^{-\sigma(n+p)\omega}) = \frac{k_{ij}^{+}M}{\sigma}e^{-\sigma(n\omega)}(1-e^{-\sigma p\omega}) \underset{n\ \to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Ce qui signifie que nous pouvons trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|I_4(\xi,n)| \leq \varepsilon\ pour\ n \geq N_3 = max\{N_2, N_1\}.$$

Maintenant, pour $n \geq N_3$, nous avons

$$\begin{aligned}
|I_5(\xi,n)| &= |\int_{-n\omega}^{0} k_{ij}(t-\xi)h_j(x_j(\xi+(n+p)\omega)) - h_j(x_j(\xi+n\omega))d\xi| \\
&\leq \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+(n+p)\omega)) - h_j(x_j(\xi+n\omega))|d\xi \\
&\leq \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+(n+p)\omega)) - \psi_j(\xi)|d\xi \\
&+ \int_{-n\omega}^{0} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega) - \psi_j(\xi)|d\xi.
\end{aligned}$$

Par $(\mathbf{H}_1)$ et la remarque 1.1.2, on sait que $h_j(.) \in AP_w(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \subset PL_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, celà signifie que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega)) - \psi_j(\xi)| = 0.$$

De plus, nous avons $e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega)) - \psi_j(\xi)| \leq 2k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}$.

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n\omega}^{0} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega)-\psi_j(\xi)|d\xi = 0.$$

De même, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n\omega}^{0} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+(n+p)\omega)-\psi_j(\xi)|d\xi = 0.$$

On peut donc choisir $n \geq N_4 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ tel que

$$|I_5(\xi, n)| \leq \varepsilon \quad \text{uniformément pour } \xi \in \mathbb{R} \text{ quand } n \geq N_4.$$

On en déduit que

$$|I_2(\xi,n+p)-I_2(\xi,n)|| \leq |I_3(\xi,n)|+|I_4(\xi,n)|+|I_5(\xi,n)| \leq 2\varepsilon\, quand\, n \geq N_5 = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}.$$

Donc $I_2(\xi, n)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, on peut noter

$$\lim_{n\to\infty} I_2(\xi, n) = d(t) \;\; \text{uniformément pour } t \in \mathbb{R}^{+}.$$

Considérons maintenant le terme I_3. On voit que par **(H3)**, l'intégrale

$$\int_0^t k_{ij}(t-\xi)\psi_j(x_j(\zeta))d\zeta \;\; \text{est bien-défini.}$$

De même pour $m\omega \leq t \leq (m+1)\omega$, $m \in \mathbb{N}^{*}$, on pose

$$\begin{aligned}
|I_3(\xi,n) - \int_0^t k_{ij}(t-\xi)\psi_j(\xi)d\xi| \;\; &\leq \;\; \int_0^t k_{ij}(t-\xi)|h_j(x_j(\xi+n\omega)) - \psi_j(\xi)|d\xi \\
&\leq \;\; \int_0^{m\omega} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+nw)) - \psi_j(\xi)|d\xi \\
&+ \;\; \int_{m\omega}^{t} k_{ij}^{+}e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega)) - \psi_j(\xi)|d\xi \\
&\leq \;\; k_{ij}^{+}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{k\omega}^{(k+1)\omega} e^{-\sigma(t-\ xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega)) - \psi_j(\xi)|d\xi \\
&+ \;\; k_{ij}^{+}\int_{m\omega}^{t} e^{-\sigma(t-\xi)}|h_j(x_j(\xi+n\omega)) - \psi_j(\xi)|d\xi.
\end{aligned}$$

Comme $h_j(.)$ est ω-limite périodique, alors nous obtenons

$$
\begin{aligned}
|I_3(\xi,n) - \int_0^t k_{ij}(t-\xi)\psi_j(\xi)d\xi| &\leq k_{ij}^+ \sum_{k=0}^{m-1}\int_{k\omega}^{(k+1)w} e^{-\sigma(t-\xi)}d\xi\varepsilon + k_{ij}^+\int_{m\omega}^t e^{-\sigma(t-\xi)}\varepsilon d\xi \; pour\; n \geq N_6\\
&\leq \frac{k_{ij}^+}{\sigma}\sum_{k=0}^{m-1}(e^{-\sigma(t-(k+1)\omega)} - e^{-\sigma(t-k\omega)})\varepsilon + \frac{k_{ij}^+}{\sigma}(1-e^{-\sigma(t-mw)})\varepsilon\\
&\leq \varepsilon\frac{k_{ij}^+}{\sigma}e^{-\sigma t}\Big(\sum_{k=0}^{m-1}e^{\sigma(k+1)\omega} - \sum_{k=0}^{m-1}e^{\sigma k\omega}\Big) + \frac{k_{ij}^+}{\sigma}\varepsilon\\
&\leq \varepsilon\frac{k_{ij}^+}{\sigma}\Big(\frac{e^{\sigma\omega}(1-e^{\sigma m\omega})}{1-e^{\sigma w}} - \frac{1-e^{\sigma m\omega}}{1-e^{\sigma\omega}}\Big) + \frac{k_{ij}^+}{\sigma}\varepsilon\\
&\leq \varepsilon\frac{k_{ij}^+}{\sigma}\frac{(1-e^{\sigma\omega})(1-e^{\sigma m\omega})}{1-e^{\sigma\omega}} + \frac{k_{ij}^+}{\sigma}\varepsilon\\
&\leq \varepsilon', \text{uniformément pour } n \geq N_6.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\lim_{n\to\infty} I_3(\xi,n) = \int_0^t k_{ij}(t-\xi)\psi_j(\xi)d\xi \;\text{ uniformément pour } t \in \mathbb{R}^+.
$$

Par conséquent

$$
\lim_{n\to\infty}\varphi_i(t+n\omega) = d(t) + \int_0^t k_{ij}(t-\xi)\psi_j(\xi)d\xi \;\text{ uniformément pour } t \in \mathbb{R}^+.
$$

Celà signifie que, par la Proposition1.1.3, φ_i est asymptotiquement $\omega-$périodique sur $\mathbb{R}^+$. Ceci complète la preuve du lemme. □

Lemme 2.3.2.
*Supposons que les hypothèses **(H1)**à **(H3)** sont vérifiées, définissons l'opérateur non linéaire* Γ *comme suit , pour chaque* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$,

$$
(\Gamma^i\varphi)(t) = (\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1}F_1(s)ds \ldots \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n}F_n(s)ds),
$$

où

$$
\begin{aligned}
F_i(s) &= \sum_{j=1}^n\Big(c_{ij}(s)f_j(\varphi_j(s)) + d_{ij}(s)g_j(x_j(s-\tau))\Big)\\
&+ \sum_{j=1}^n p_{ij}(s)\int_{-\infty}^s k_{ij}(sm)h_j(\varphi_j(m))dm + J_i(s).
\end{aligned}
$$

Alors Γ^i *envoie* $AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ *dans lui-même.*

Démonstration.
Notons que par le lemme1.1.3, le lemme1.1.6 et leLemme1.1.7, la fonction F_i est

asymptotiquement ω-périodique pour tout $1 \leq i \leq n$.
Pour tout $1 \leq i \leq n$ posons

$$(\Gamma^i \varphi)(t + n\omega) = \int_{-\infty}^{t+n\omega} e^{-(t+n\omega-s)} F_i(s)ds.$$

Alors par la proposiiton 1.1.2, $(\Gamma^i \varphi)(.)$ est asymptotiquement ω-périodique.

On décompose la dernière expression, puis on obtient

$$(\Gamma^i \varphi)(t + n\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(t+n\omega-s)a_i} F_i(s)ds + \int_{0}^{t+n\omega} e^{-(t+n\omega-s)a_i} F_i(s)ds.$$

On pose $\zeta = s - n\omega$, il vient

$$(\Gamma^i \varphi)(t + n\omega) = \int_{-\infty}^{n\omega} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta + \int_{-n\omega}^{t} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta.$$

Ensuite on peut écrire

$$\begin{aligned}(\Gamma^i \varphi)(t + n\omega) &= \int_{-\infty}^{-n\omega} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta + \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta \\ &+ \int_{0}^{t} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta = J_1(\zeta, n) + J_2(\zeta, n) + J_3(\zeta, n).\end{aligned}$$

Considérons maintenant le terme $J_1(\zeta, n)$

$$|J_1(\zeta, n)| \leq \int_{-\infty}^{-n\omega} e^{-a_i(t-\zeta)} |F_i(\zeta + n\omega)| d\zeta \leq \frac{M}{a_i} e^{-a_i(t+n\omega)}.$$

On en déduit qu'on peut choisir N_7 tel que $|J_1(\zeta, n)| \leq \varepsilon$ uniformément pour $n \geq N_7$.

Nous allons prouver que $J_2(\tau, n)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}J_2(\zeta, n + p) - J_2(\zeta, n) &= \int_{-(n+p)\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + (n + p)\omega)d\zeta \\ &- \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta \\ &= \int_{-(n+p)\omega}^{-nw} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + (n + p)\omega)d\zeta \\ &+ \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + (n + p)\omega)d\zeta \\ &- \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} F_i(\zeta + n\omega)d\zeta \\ &= J_4(\zeta, n) + J_5(\zeta, n).\end{aligned}$$

Ensuite on suppose qu'il existe une fonction périodique $K_i(.)$ telle que pour $i = 1, .., n$,

$$K_i(\zeta) = \lim_{n\to\infty} F_i(\zeta + n\omega) \text{ uniformément pour } \zeta \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |J_5(\zeta, n)| &\leq \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + (n+p)\omega) - K_i(\zeta) + K_i(\zeta) - F_i(\zeta + n\omega)| d\zeta \\ &\leq \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + (n+p)\omega) - K_i(\zeta)| d\zeta + \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + n\omega) - K_i(\zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

On sait que $F_i(. + (n+p)\omega)$ et $K(.)$ sont bornés, comme il est mentionné dans (2.3) on en déduit par le théorème de la convergence dominé de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n\omega}^{0} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + (n+p)w) - K_i(\zeta)| = 0.$$

De même, on obtient finalement

$$|J_5(\zeta, n)| \leq \varepsilon \text{ uniformément pour } n \geq N_9 = \max\{N_7, N_8\}.$$

Il s'ensuit

$$|J_2(\zeta, n+p) - J_2(\zeta, n) -| \leq |J_4(\zeta, n)| + |J_5(\zeta, n)| = 2\varepsilon, \text{ uniformément pour } n \geq \max\{N_5, N_6, N_7\}.$$

Par conséquent, on en déduit que $J_2(\zeta, n)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, celà implique qu'il existe une fonction intégrable $G_i(.)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} J_2(\zeta, n) = G_i(\zeta) \text{ uniformément pour } \zeta \in \mathbb{R}^+.$$

Maintenant, nous passons à l'estimation de $J_3(\zeta, n)$. On suppose que l'intégrale $\int_0^t e^{-(t-\zeta)a_i} \phi_i(\zeta) d\zeta$ est bien définie, on pose $l\omega \leq \zeta \leq l(\omega + 1)$ tel que

$$\begin{aligned} |J_3(\zeta, n) - \int_0^t e^{-(t-\zeta)a_i} \phi_i(\zeta) d\zeta| &\leq \int_0^t e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + n\omega) - \phi_i(\zeta)| d\zeta \\ &\leq \int_0^{l\omega} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + n\omega) - \phi_i(\zeta)| d\zeta \\ &+ \int_{lw}^{t} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + n\omega) - \phi_i(\zeta)| d\zeta \\ &\leq \sum_{l=0}^{r} \int_{k\omega}^{(k+1)w} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + n\omega) - \phi_i(\zeta)| d\zeta \\ &+ \int_{l\omega}^{t} e^{-(t-\zeta)a_i} |F_i(\zeta + n\omega) - \phi_i(\zeta)| d\zeta. \end{aligned}$$

Comme $F_i(.)$ est ω-limite périodique, il vient

$$\begin{aligned} |J_3(\zeta,n)-\int_0^t e^{-(t-\zeta)a_i}\phi_i(\zeta)d\zeta| &\leq \sum_{k=0}^{l-1}\int_{k\omega}^{(k+1)\omega} e^{-(t-\zeta)a_i}\varepsilon d\zeta+\int_{lw}^{t} e^{-(t-\zeta)a_i}\varepsilon d\zeta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{a_i}\sum_{k=0}^{l-1}(e^{-(t-(k+1)\omega)a_i}-e^{-(t-\omega)a_i})+\frac{\varepsilon}{a_i}(1-e^{-(t-k\omega)a_i})\leq\varepsilon \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} J_3(\zeta,n)=\int_0^t e^{-(t-\zeta)a_i}\phi_i(\zeta)d\zeta \text{ uniformément pour } n\geq N_{10}=\max\{N_8,N_9\}. \tag{2.4}$$

Par conséquent, par (2.3) et (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(\Gamma^i\varphi)(t+n\omega)(\zeta,n) &= \lim_{n\to\infty} J_2(\zeta,n)+\lim_{n\to\infty} J_3(\zeta,n) \\ &= G_i(\zeta)+\int_0^{+\infty} e^{-(t-\zeta)a_i}\phi_i(\zeta)d\zeta \text{ uniformément pour } \zeta\in\mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

On en déduit par la proposition (1.1.3) que $(\Gamma\varphi)\in AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$.
Maintenant, nous allons énoncer notre résultat principal.

Théorème 2.3.3.
Supposons que $(\boldsymbol{H}_1)$-$(\boldsymbol{H}_4)$ *sont réunies, avec*

$$\min_{1\leq i\leq n} a_i>\sum_{j=1}^{n}\alpha_j M_{ij}^+,\ \forall i=1,2,...,n. \tag{2.5}$$

où

$$M_{ij}^+=c_{ij}^+L_j^f+L_j^g d_{ij}^+ +\frac{L_j^h k_{ij}^+ p_{ij}^+}{\sigma}.$$

Alors le système intégro-différentiel (2.1) admet une solution asymptotiquement $\omega-$périodique dans la région

$$\mathbb{B}=\big\{\varphi\in AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)\ :\|\varphi-\varphi_0\|_\infty\leq R\big\},$$

avec $\beta=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\frac{J_i^+}{a_i}\right)$,

$$\varphi_0(t)=\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1}J_1(s)ds\\ \vdots\\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n}J_n(s)ds\end{pmatrix},$$

et

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta\alpha_j+1-\alpha_j)M_{ij}^+\leq R\left(\frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq n} a_i}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j M_{ij}^+\right). \tag{2.6}$$

Démonstration.
Par définition $\mathbb{B}$ est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe dans l'espace de Banach $AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$.

Premièrement, nous avons $\|\varphi_0\|_\infty \leq \beta$, car pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|\varphi_0(t)| = \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(|\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} J_i(s)ds|\Big) \leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\frac{J_i^+}{a_i}\Big) = \beta.$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathbb{B}$, nous obtenons

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + \|\varphi_0\|_\infty \leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + \beta \leq R + \beta. \tag{2.7}$$

L'opérateur Γ défini dans le Lemme 2.3.2 envoie $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.
En effet, pour tout $\varphi \in \mathbb{B}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}|(\Gamma^i\varphi)(t) - \varphi_0(t)| &\leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}\sum_{j=1}^{n}[|c_{ij}(s)f_j(\varphi_j(s))| + |d_{ij}(s)g_j(\varphi_j(s-\tau))|]\Big)\\ &+ \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(s)|\int_{-\infty}^{s} k_{ij}(s-m)|h_j(\varphi_j(m))|dmds\Big).\end{aligned}$$

En utilisant **(H1)**, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}|(\Gamma^i\varphi)(t) - \varphi_0(t)| &\leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}\sum_{j=1}^{n}\Big[|c_{ij}(s)|L_j^f|\varphi_j(s)|^{\alpha_j} + |d_{ij}(s)|L_j^g|\varphi_j(s-\tau)|^{\alpha_j}\\ &+ |p_{ij}(s)|\frac{L_j^h k_{ij}^+|\varphi_j(m)|^{\alpha_j}}{\sigma}\Big]ds\Big).\end{aligned}$$

Pour un j fixe et tout $s \in \mathbb{R}^+$, nous avons

$$|\varphi_j(s)| \leq \underset{1\leq j\leq n}{max}|\varphi_j(s)| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}^+}\max_{1\leq j\leq n}|\varphi_j(s)| = \|\varphi\|_\infty.$$

Puisque la fonction puissance est croissante, nous obtenons $|\varphi_j(s)|^{\alpha_j} \leq \|\varphi\|_\infty^{\alpha_j}$.
Alors pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$ nous avons $\forall i = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned}|(\Gamma^i\varphi)(t) - \varphi_0(t)| &\leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}\sum_{j=1}^{n}\|\varphi\|_\infty^{\alpha_j}\Big[c_{ij}^+L_j^f + d_{ij}^+L_j^g + p_{ij}^+\frac{L_j^h k_{ij}^+}{\sigma}\Big]ds\Big)\\ &\leq \max_{1\leq i\leq n}\{\frac{1}{a_i}\}\max_{1\leq i\leq n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi\|_\infty^{\alpha_j}\Big[c_{ij}^+L_j^f + d_{ij}^+L_j^g + p_{ij}^+\frac{L_j^h k_{ij}^+}{\sigma}\Big]\Big)\\ &\leq \frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq n} a_i}\sum_{j=1}^{n}\|\varphi\|_\infty^{\alpha_j}\max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+.\end{aligned}$$

Posons $\theta = \frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq n} a_i}$. En appliquant l'inégalité de Bernoulli suivante

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y, \quad \text{où } x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{2.8}$$

on obtient que pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
|(\Gamma^i\varphi)(t) - \varphi_0(t)| &\leq \theta \sum_{j=1}^{n} \|\varphi\|_\infty^{\alpha_j} \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \\
&\leq \theta\Big((R+\beta)\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ + \sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)\max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+\Big) \\
&\leq \theta R \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ + \theta\beta \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ + \theta \sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)\max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \\
&\leq \theta R \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ + \theta \sum_{j=1}^{n} \left(\beta\alpha_j + (1-\alpha_j)\right) \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \\
&\leq \theta R \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ + \theta R(\frac{1}{\theta} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+) \\
&\leq \theta R \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ + R - \theta R \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $\|(\Gamma^i\varphi) - \varphi_0\|_\infty \leq R$. On en déduit donc que $\Gamma^i(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$.

Montrons que l'opérateur $\Gamma^i : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ satisfait les hypothèses du théorème fixe de Schauder (voir [19, page131]). Ce théorème affirme que si un opérateur Γ^i est continu et compact sur un sous ensemble $\mathbb{B}$ fermé, convexe et borné d'un espace de Banach donné alors Γ^i possède au moins un point fixe sur $\mathbb{B}$.

Puisque nous avons déjà montré que $\Gamma^i(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$, nous devons montrer que Γ est continu et compact.

Etape 1 : Nous allons prouver la continuité de l'opérateur Γ sur $\mathbb{B}$.

Nous supposons que la suite $(\varphi_n)_n \subset \mathbb{B}$ converge vers $\varphi_* \in \mathbb{B}$. C'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_* \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi_n - \varphi_*\|_\infty \leq \Big(\frac{\varepsilon}{\theta \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+}\Big)^{\frac{1}{\alpha_j}}, \quad \text{pour } n \geq N_*. \tag{2.9}$$

On obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
|\Gamma^i(\varphi_n)(t) - \Gamma^i(\varphi_*)(t)| \leq & \max_{1\leq i\leq n} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \Big[\sum_{j=1}^{n} \Big(|c_{ij}(s)| |f_j(\varphi_n(s)) - f_j(\varphi_*(s))| \\
& + |d_{ij}(s)| |g_j(\varphi_n(s)) - g_j(\varphi_*(s))| \Big) \\
& + \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(s)| \int_{-\infty}^{s} k_{ij}(t-l) |h_j(\varphi_n(l)) - h_j(\varphi_*(l))| dl \Big] ds \\
& \leq \max_{1\leq i\leq n} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \Big[\sum_{j=1}^{n} \Big(c_{ij}^+ L_j^f + d_{ij}^+ L_j^g \Big) |\varphi_n(s) - \varphi_*(s)|^{\alpha_j} \\
& + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^+ \int_{-\infty}^{s} k_{ij}(t-l) L_j^h |\varphi_n(l)) - \varphi_*(l)|^{\alpha_j} dl \Big] ds \\
& \leq \theta \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \|\varphi_n - \varphi_*\|_\infty^{\alpha_j}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (2.9) on obtient

$$\|\Gamma^i(\varphi_n) - \Gamma^i(\varphi_*)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Donc Γ est continu sur $\mathbb{B}$.
Etape 2 : Nous allons montrer que $\Gamma^i(\mathbb{B})$ est relativement compact dans $AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$. Commencons par montrer que $\Gamma(\mathbb{B})$ est uniformément borné par rapport à la norme de la convergence uniforme. Pour tout $\varphi \in \mathbb{B}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ nous avons

$$\begin{aligned}
|\Gamma^i(\varphi)(t)| \leq & \max_{1\leq i\leq n} \Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \sum_{j=1}^{n} \Big(|c_{ij}(s) f_j(\varphi_j(s))| + |d_{ij}(s) g_j(\varphi_j(s-\tau))| \Big) ds \Big) \\
& + \max_{1\leq i\leq n} \Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i} \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(s) \int_{-\infty}^{s} k_{ij}(s-m) h_j(\varphi_j(m)) dm + J_i(s)| ds \Big) \\
& \leq \theta \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} \left(M_{ij}^+ \|\varphi\|_\infty^{\alpha_j} + J_i^+ \right).
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Bernoulli (2.8) et l'inégalité (2.6) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Gamma^i(\varphi)\|_\infty \leq & \theta \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \alpha_j \|\varphi\|_\infty + \theta \sum_{j=1}^{n} \left(\max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ (1-\alpha_j) + J_i^+ \right) \\
& \leq \theta \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ \alpha_j (R+\beta) + \theta \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leq i\leq n} M_{ij}^+ (1-\alpha_j) + J_i^+ < \infty. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Afin de prouver que les fonctions appartenant à $\Gamma^i(\mathbb{B})$ sont équicontinues sur chaque intervalle compact de $\mathbb{R}^+$ il suffit de montrer que les fonctions $\Gamma(\varphi)$ sont $k-$lipschitziennes pour tout $\varphi \in \mathbb{B}$.

Soit $\varphi \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dt}(\Gamma^i\varphi)(t)| &= \max_{1\le i\le n}\Big|\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}F_i(s)ds\Big| \\ &= \max_{1\le i\le n}\Big|\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-s)a_i}F_i(s)ds\Big| \\ &= \max_{1\le i\le n}\Big|-a_i\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}F_i(s)ds\Big|. \end{aligned}$$

Par l'inégalité (2.10), nous obtenons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$|\frac{d}{dt}(\Gamma^i\varphi)(t)| \le \sum_{j=1}^{n}\max_{1\le i\le n} M_{ij}^+\alpha_j(R+\beta) + \sum_{j=1}^{n}\max_{1\le i\le n} M_{ij}^+(1-\alpha_j) + J_i^+ = c < +\infty.$$

Donc la famille $\Gamma^i(\mathbb{B})$ est équicontinue.
Montrons maintenant que $\Gamma^i(\mathbb{B})$ est équiconvergent. Soit $\varphi \in \mathbb{B}$, puis par Lemme2.3.2 nous avons $\Gamma(\varphi) \in AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$. En utilisant le corollaire (3.1) dans [48], nous obtenons, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty}|\Gamma^i(\varphi)(t) - \Gamma^i(\varphi)(t+n\omega)| = 0.$$

D'où

$$\lim_{t\to\infty}|\Gamma^i(\varphi)(t) - \Gamma^i(\varphi)(\infty)| = 0.$$

Par conséquent, par le critère de compacité de Corduneanu, nous déduisons que $\Gamma^i(\mathbb{B})$ est relativement compact. D'après le théorème du point fixe de Schauder, Γ^i possède au moins un point fixe dans la région $\mathbb{B}$.

□

2.4 Stabilité

L'utilisation des fonctions de Lyapunov présente généralement un outil efficace pour étudier la stabilité des solutions particulièrement dans le cas non linéaire.

Rappellons qu'une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une fonction de Lyapunov si

$V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \ \forall x \neq 0,$

$\dot{V}(x) < 0, \ \forall x \neq 0$ et $\dot{V}(x) = 0$ pour $x = 0$

Avant d'énoncer les deux résultats obtenus sur la stabilité du système (2.1), nous commençons par rappeler la définition de la stabilité asymptotique globale et de la stabilité exponentielle globale.

Définition 2.4.1. [80, 81, 92]
Soit $x^*(.) = (x_1^*(.), x_2^*(.), ..., x_n^*(.))$ une solution asymptotiquement $w-$ périodique du système (2.1). $x^*(.)$ est dite

(i) globalement asymptotiquement stable si toute autre solution $x(.) = (x_1(.), x_2(.), ..., x_n(.))$ du système (2.1) vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^*(t)| = 0.$$

(ii) globalement exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives M et λ, et toute autre solution $x(.) = (x_1(.), x_2(.), ..., x_n(.))$ du système (2.1) vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^*(t)| \leq M e^{-\lambda t}$$

Dans Tatar [81], ces définitions sont sont exprimées par le fait que le système est globalement asymptotiquement stable (resp. le système est globalement exponentiellement stable.)

2.4.1 Stabilité asymptotique globale

Théorème 2.4.2.
Sous les conditions du Théorème 2.3.3, toute solution asymptotiquement $\omega-$périodique du système (2.1) est globalement asymptotiquement stable.

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème rappelons le résultat de Barbalat [6].

Lemme 2.4.3. *Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, intégrable et uniformément continue sur $[0, +\infty[$ alors*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

Démonstration. Du Théorème 2.4.2
D'après le Théorème 2.3.3, le système (2.1) possède au moins une solution $x_i^*(.)$ asymptotiquement $\omega-$périodique dans la région $\mathbb{B}$. Soit $x_i(.)$ une autre solution arbitraire du système (2.1), alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(x_i(t) - x_i^*(t)\Big) &= -a_i(x_i(t) - x_i^*(t)) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)\Big(f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*(t))\Big) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(t)\Big(g_j(x_i(t-\tau)) - g_j(x_i^*)(t-\tau))\Big) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\Big(\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_i(s))ds - \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_i^*(s))ds\Big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Choisissons une fonctionnelle de Lyapunov V qui dépend du retard et adéquate au système (2.1)

$$\begin{aligned} V: \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow AP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \\ t &\longrightarrow V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i(t)-x_i^*(t)|,\\
V_2(t) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t} d_{ij}^{+}L_j^{g}\alpha_j|x_i(s)-x_i^*(s)|ds+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{t+\alpha_j-1}^{t} M_{ij}^{+}sds\\
V_3(t) &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{+\infty}k_{ij}(s)\int_{t-s}^{t}p_{ij}^{+}L_j^{h}\Big)|x_i(u)-x_i^*(u)|duds
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée à droite au sens de Dini de V_1,

$$\begin{aligned}
D^{+}V_1(t) &\leq \sum_{i=1}^{n}-a_i|x_i(t)-x_i^*(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)||f_j(x_j(t))-f_j(x_j^*(t))|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}(t)||g_j(x_j(t-\tau))-g_j(x_j^*(t-\tau))|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(t)|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)|h_j(x_j(s))-h_j(x_j^*(s))|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}-a_i|x_i(t)-x_i^*(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)||f_j(x_j(t))-f_j(x_j^*(t))|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}(t)||g_j(x_j(t-\tau))-g_j(x_j^*(t-\tau))|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(t)|\int_{0}^{\infty}k_{ij}(s)|h_j(x_j(t-s))-h_j(x_j^*(t-s))|ds
\end{aligned}$$

Le fait que les fonctions $f_j, g_j,\ et\ h_j$ sont hölderienne on aura

$$\begin{aligned}
D^{+}V_1(t) &\leq \sum_{i=1}^{n}-a_i|x_i(t)-x_i^*(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)|L_j^{f}|x_j(t)-x_j^*(t)|^{\alpha_j}\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}(t)|L_j^{g}|x_j(t-\tau)-x_j^*(t-\tau)|^{\alpha_j}\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(t)|\int_{0}^{\infty}k_{ij}(s)|L_j^{h}|x_j(t-s)-x_j^*(t-s)|^{\alpha_j}ds
\end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant l'inégalitè de Bernoulli avec $0<\alpha_j<1$ on aura

$$|x_i(t)-x_i^*(t)|^{\alpha_j}\leq \alpha_j|x_i(t)-x_i^*(t)|+1-\alpha_j. \tag{2.13}$$

En injectant (2.13) dans (2.12), il vient que

$$\begin{aligned}
D^+V_1(t) &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(-a_i + c_{ij}^+ L_j^f \alpha_j\Big)|x_i(t) - x_i^*(t)| \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^+ L_j^g \alpha_j |x_i(t-\tau) - x_i^*(t-\tau)| \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^{+\infty} k_{ij}(s) p_{ij}^+ L_j^h \alpha_j |x_i(t-s) - x_i^*(t-s)|ds\Big) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_j)(c_{ij}^+ L_j^f + d_{ij}^+ L_j^g + \frac{p_{ij}^+ k_{ij}^+ L_j^h}{\sigma}).
\end{aligned}$$

De façon similaire on obtient

$$\begin{aligned}
D^+V_2(t) &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^+ L_j^g |x_i(t) - x_i^*(t)| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^+ L_j^g |x_i(t-\tau) - x_i^*(t-\tau)| \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^+ t - M_{ij}^+(t + \alpha_j - 1),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D^+V_3(t) &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^+ L_j^h \int_0^{+\infty} k_{ij}(s)ds |x_i(t) - x_i^*(t)| \\
&- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^+ L_j^h \int_0^{+\infty} k_{ij}(s)|x_i(t-s) - x_i^*(t-s)|ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}^+ k_{ij}^+ L_j^h}{\sigma} |x_i(t) - x_i^*(t)| \\
&- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^+ L_j^h \int_0^{+\infty} k_{ij}(s)|x_i(t-s) - x_i^*(t-s)|ds.
\end{aligned}$$

En sommant les inégalités précédentes, on aura

$$\begin{aligned}
D^+V(t) &\leq D^+V_1(t) + D^+V_2(t) + D^+V_3(t) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(-a_i + M_{ij}^+ \alpha_j\Big)|x_i(t) - x_i^*(t)|.
\end{aligned}$$

Par (2.5), on en déduit que $D^+V(t) \leq 0$.

Il s'ensuit, en intégrant l'inégalité précédente entre 0 et t que

$$V(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_i - M_{ij}^+ \alpha_j\Big) \int_0^t |x_i(s) - x_i^*(s)|ds < V(0) < +\infty$$

C'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n}\big(x_i(.) - x_i^*(.)\big) \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Par conséquent, on en déduit par (2.11) la bornitude de $\frac{d}{dt}|x_i(t) - x_i^*(t)|$ ceci implique que V est uniformément continue. Grâce au lemme de Barbalat [6, 43] nous obtenons

$$|x_i(t) - x_i^*(t)| \longrightarrow 0 \ quand\ t \to \infty\ \forall i = 1, ...n.$$

On en déduit que toute solution asymptotiquement $\omega-$périodique du système (2.1) est globalement asymptotiquement stable.

□

2.4.2 Stabilité exponentielle globale

Théorème 2.4.4.
Supposons que les conditions $(\boldsymbol{H}_1) - (\boldsymbol{H}_4)$ sont vérifiées et

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_i - \beta + \frac{e^{\beta\sigma}}{\tau}\frac{p_j}{\lambda_i}L_j^g d_{ij}^+ - L_j^h p_{ij}^+ \int_0^{+\infty} k_{ij}(s)e^{\beta s}ds\Big) > 0 \quad avec \quad \beta > 0 \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i^{\frac{-q_j}{p_j}}}{q_j}\Big(L_j^f c_{ij}^+ + L_j^g d_{ij}^+ + \frac{p_{ij}^+ L_j^h k_{ij}^+}{\sigma}\Big) > 0, \quad avec \quad \lambda_i, p_j \ et \ q_j > 0 \qquad (2.15)$$

Alors toute solution asymptotiquement $\omega-$périodique du système (2.1) est globalement exponentiellement stable.

Démonstration.

Définissons la fonctionnelle de Lyapunov V^* comme suit

$$V^*(t) = V_1^*(t) + V_2^*(t) + V_3^*(t),$$

où

$$V_1^*(t) = e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(t) - x_i^*(t)| \ avec\ \beta > 0$$

$$V_2^*(t) = e^{\beta\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}\int_{t-\tau}^{t} L_j^g d_{ij}^+ e^{\beta s}|x_i(s) - x_i^*(s)|ds$$

$$V_3^*(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}\int_0^{+\infty} k_{ij}(s)\int_{t-s}^{t} L_j^h p_{ij}^+ e^{\beta(u+s)}|x_i(u) - x_i^*(u)|duds.$$

Calculons la dérivée à droite $D^+V(t)$ au sens de Dini de V

$$\begin{aligned}
D^+V_1^*(t) &= \beta e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)-x_i^*(t)| + e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}\frac{d|x_i(t)-x_i^*(t)|}{dt}\\
&\leq \beta e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)-x_i^*(t)| + e^{\beta t}\Big[\sum_{i=1}^{n}-a_i|x_i(t)-x_i^*(t)|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)||f_j(x_j(t))-f_j(x_j^*(t))|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}(t)||g_j(x_j(t-\tau))-g_j(x_i^*(t-\tau))|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(t)|\Big|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)|h_j(x_j(s))ds-\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)h_j(x_i^*(s))ds\Big|\Big].
\end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse **(H2)** on peut écrire :

$$\begin{aligned}
D^+V_1^*(t) &\leq e^{\beta t}\Big[\sum_{i=1}^{n}-(a_i-\beta)|x_i(t)-x_i^*(t)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_j^f|c_{ij}(t)|x_i(t)-x_i^*(t)|^{\alpha_j}\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}(t)|L_j^g|x_i(t-\tau)-x_i^*(t-\tau)|^{\alpha_j}\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(t)|L_j^h\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(t-s)|x_i(s)-x_i^*(s)|^{\alpha_j}ds\Big].
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young suivante

$$|x_i(t)-x_i^*(t)| \leq \frac{\lambda_i}{p_j}|x_i(t)-x_i^*(t)|^{p_j} + \frac{\lambda_i^{-q_j}}{q_j}.$$

Il s'ensuit que

$$|x_i(t)-x_i^*(t)|^{\alpha_j} \leq \frac{\lambda_i}{p_j}|x_i(t)-x_i^*(t)| + \frac{\lambda_i^{\frac{-q_j}{p_j}}}{q_j} \ avec\ p_j=\frac{1}{\alpha_j}\ et\ q_j=\frac{1}{1-\alpha_j}. \qquad (2.16)$$

En injectant (2.16) dans l'inégalité précédente on trouve

$$\begin{aligned}
D^+V_1^*(t) &\leq e^{\beta t}\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-a_i+\beta+\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^f c_{ij}^+) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}\Big(L_j^g d_{ij}^+|x_i(t-\tau)-x_i^*(t-\tau)|\\
&+ p_{ij}^+L_j^h\int_{0}^{+\infty}k_{ij}(s)|x_i(t-s)-x_i^*(t-s)|ds\Big)\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i^{\frac{-q_j}{p_j}}}{q_j}(L_j^f c_{ij}^+ + L_j^g d_{ij}^+ + \frac{p_{ij}^+L_j^h k_{ij}^+}{\sigma})\Big].
\end{aligned}$$

De la même façon la dérivée de Dini de $V_2^*(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
D^+V_2^*(t) &\leq e^{\beta\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^g d_{ij}^+\Big[e^{\beta t}|x_i(t)-x_i^*(t)|-e^{\beta(t-\tau)}|x_i(t-\tau)-x_i^*(t-\tau)|\Big]\\
&\leq e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^g d_{ij}^+\Big[e^{\beta\tau}|x_i(t)-x_i^*(t)|-|x_i(t-\tau)-x_i^*(t-\tau)|\Big]\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)[e^{\beta(t+s)}|x_i(t)-x_i^*(t)|-e^{\beta t}|x_i(t-s)-x_i^*(t-s)|]ds\\
&\leq e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)e^{\beta s}|x_i(t)-x_i^*(t)|ds\\
&- e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)|x_i(t-s)-x_i^*(t-s)|ds.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
D^+V_3^*(t) &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)[e^{\beta(t+s)}|x_i(t)-x_i^*(t)|-e^{\beta t}|x_i(t-s)-x_i^*(t-s)|]ds\\
&\leq e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)e^{\beta s}|x_i(t)-x_i^*(t)|\\
&- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)e^{\beta t}|x_i(t-s)-x_i^*(t-s)|ds.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
D^+V^*(t) &\leq D^+V_1^*(t)+D^+V_2^*(t)+D^+V_3^*(t)\\
&\leq -e^{\beta t}\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_i-\beta+e^{\beta(t+\tau)}\frac{\lambda_i}{p_j}L_j^g d_{ij}^+\\
&+ L_j^h p_{ij}^+\int_0^{+\infty}k_{ij}(s)e^{\beta s}\Big)|x_i(t)-x_i^*(t)|\\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_i^{\frac{-q_j}{p_j}}}{q_j}(L_j^f c_{ij}^+ + L_j^g d_{ij}^+ + \frac{p_{ij}L_j^h k_{ij}^+}{\sigma})\Big].
\end{aligned}$$

Grâce aux conditions (2.14) et (2.15), on peut écrire :

$$D^+V^*(t) \leq -e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[M_i(\beta)|x_i(t)-x_i^*(t)|+\frac{\lambda_i^{\frac{-q_j}{p_j}}}{q_j}(L_j^f c_{ij}^+ + L_j^g d_{ij}^+ + \frac{p_{ij}^+L_j^h k_{ij}^+}{\sigma})\Big] \leq 0.$$

Alors
$$V(t)^* \leq V^*(0).$$
Donc
$$\begin{aligned} V^*(0) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i(0) - x_i^*(0)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_i}{p_j} \int_{-\tau}^{0} d_{ij}^{+} L_j^g e^{\beta s} |x_i(s) - x_i^*(s)| ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_i}{p_j} \int_{0}^{+\infty} k_{ij}(s) \int_{-s}^{0} L_j^h p_{ij}^{+} e^{\beta u} |x_i(u) - x_i^*(u)| ds \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Big[1 + \frac{\lambda_i}{p_j \beta}(1 - e^{-\beta\tau}) d_{ij} L_j^g + \frac{\lambda_i}{p_j \beta} L_j^h p_{ij}^{+} \int_{0}^{+\infty} k_{ij}(s)(1 - e^{-\beta s}) ds \Big]. \end{aligned}$$

Autrement dit
$$V^*(t) \geq V_1^*(t) = e^{\beta t} \sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^*(t)|.$$
On sait que $K > 0$, ceci entraine que :
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - x_i^*(t)| \leq K e^{-\beta t}.$$
D'où on en déduit par le théorème (2.4.1) que toute solution asymptotiquement $\omega-$périodique du système (2.1) est globalement exponentiellement stable. □

Chapitre 3

Les solutions $S-$asymptotiquement ω-périodiques d'un système de réseaux de neurones à retard

Les fonctions $S-$asymptotiquement ω-périodiques ont été introduites en 2008 par Henriquez, Pierre et Tàboas [48] comme généralisation des fonctions asymptotiquement w-périodiques. Ce concept a suscité un interêt particulier pour plusieurs auteurs comme par exemple Cuevas [20], Andrade [?], Dos-sontos [34].

3.1 Fonctions $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques

Définition 3.1.1. [48, Définition 3.1]

Une fonction $f \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ est dite **S-asymptotiquement ω-périodique** s'il existe $\omega > 0$ tel que :

$$\lim_{t\to\infty} (f(t+\omega) - f(t)) = 0.$$

ω est appelé l'asymptotique périodicité de f.

Dans ce qui suit la notation $SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ représente l'espace des fonctions $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques.

Exemple 3.1.1. *[71, Exemple 2.2]*

Les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(\ln(t+1)), \end{array}$$

sont $S-$asymptotiquement ω-périodique.

Remarque 3.1.1. [48]

Il est évident que $AP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) \subset SAP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Mais l'autre inclusion n'a pas lieu comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.2. *[48, Exemple 3.1]*

Soit l'espace $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \ \ et \ \ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ *muni de la norme* $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ *et soit*

$$\begin{aligned} f : [0,+\infty[\ &\rightarrow \ c_0 \\ t \ &\rightarrow \ f(t) = (\frac{2nt}{t^2+n^2})_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

La fonction f est bornée, uniformément continue et $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique pour tout $\omega > 0$.
En effet, il est immédiat que $\|f(t)\| = \|(\frac{2nt}{t^2+n^2})_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\frac{2nt}{t^2+n^2}| \leq 1$ *pour tout* $t \geq 0$.
Montrons que f est uniformément continue, pour $t, s \in [0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \|f(t+s) - f(t)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2n(t+s)}{(t+s)^2+n^2} - \frac{2nt}{n^2+t^2} \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2ns|n^2-t^2-ts|}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)}. \end{aligned}$$

Posons

$$f_n(t,s) = \frac{2ns|n^2-t^2-ts|}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)}.$$

- *Si* $n > \sqrt{t^2+st}$ *alors*

$$f_n(t,s) = \frac{2ns|n^2-t^2-ts|}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \leq \frac{2n^3s}{n^2.n^2} = \frac{2s}{n} \leq 2s.$$

- *Si* $n \leq \sqrt{t^2+st}$ *alors*

$$\begin{aligned} f_n(t,s) &= \frac{2ns(t^2+ts-n^2)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \frac{2ns(t^2+st)}{[(t^2+st)+st+s^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \frac{2ns(t^2+st)}{(t^2+st)(n^2+t^2)} \\ &\leq \frac{2ns}{n^2} = 2s. \end{aligned}$$

Dans les deux cas $f_n \leq 2s$ et ceci est vrai pour tout $n \geq 1$. D'où : $\sup\limits_{n\geq 1} f_n \leq 2s$.
Ce qui montre que f est uniformément continue.
Montrons que f est $S-$asymptotiquement ω-périodique pour $\omega > 0$ et $t \geq 1$, nous avons.

$$\begin{aligned}
\|f(t+\omega) - f(t)\| &= \left\| \left(\frac{2n(t+\omega)}{(t+\omega)^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} - \left(\frac{2nt}{t^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2n(t+\omega)}{(t+\omega)^2+n^2} - \frac{2nt}{t^2+n^2} \right| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n|\omega n^2 - \omega^2 t - \omega t^2|}{[(t+\omega)^2+n^2](n^2+t^2)} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^3\omega + 2nt\omega^2 + 2n\omega t^2}{n^4+t^4} \\
&\leq \frac{3\omega}{t} + \frac{3\omega^2}{t^2}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que f est $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques pour chaque $\omega > 0$.
Montrons que f n'est pas asymptotiquement ω-périodique.
On raisonne par l'absurde.
Supposons que, f est asymptotiquement $\omega-$périodique. Alors il existe $g \in P_\omega(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et une fonction $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, tel que $f = g + \varphi$.
Par définition $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors chaque f_n ; $n \in \mathbb{N}$ est asymptotiquement $\omega-$périodique et

$$f_n(t+k\omega) = g_n(t) + \varphi_n(t+k\omega),\ \forall k,n \in \mathbb{N} \text{ et } t > 0.$$

On sait que

$$\lim_{k\to+\infty} f_n(t+k\omega) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2n(t+kw)}{(t+kw)^2+n^2} = 0,$$

donc $g_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.
Par conséquent, la fonction $g \equiv 0$ et $f \equiv \varphi$ ce qui est absurde puisque $\|f(n)\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cela prouve que f n'est pas asymptotiquement $\omega-$périodique.

L'exemple précédent, donné dans l'article de Henriquez [48], contredit l'équivalence entre ces deux espaces mentionnée dans le lemme 2.1 de l'article de Haiyin [46].

Proposition 3.1.2. *[48, 96]*
Soit $f, g \in SAP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors les assertions suivantes sont vérifiées

1. *$(SAP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach [48].*
2. *$SAP_\omega(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est invariant par translation [96].*
3. *Soit $f \in SAP_\omega(\mathbb{X},\mathbb{X})$ et $\Phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ un opérateur uniformément continue sur les sous-ensembles bornés de $\mathbb{X}$. Alors la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{X}$ définie par*

$$F(t) = \Phi \circ f(t)$$

est $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique [48].

Lemme 3.1.3. *[96]*
Soient $f, g \in SAP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $f.g \in SAP_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.2 Présentation du modèle étudié

On reprend le modèle de réseaux de neurones récurrent étudié dans le chapitre précédent donné par

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij}(t) f_j(x_j(t)) + d_{ij}(t) g_j(x_j(t-\tau))\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t) \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) h_j(x_j(s)) ds + J_i(t), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

et $x_i(t) = \phi_i(t)$, pour $t \in]-\infty, 0]$. $\phi_i(.)$ une fonction continue.

Pour étudier l'existence et l'unicité de solution $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique du (3.1), nous avons poser les hypothèses suivantes

(H5) Les coefficients $a_i, i = \overline{1, n}$ sont des constantes strictement positives, et pour $j = \overline{1, n}$, f_j, g_j et $h_j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, sont des fonctions $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques et lipschitziennes de constantes de Lipschitz L_j^f, L_j^g, L_j^h respectivement.

(H6) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, le noyau $k_{i,j} : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est continu et dominé par une fonction exponentielle, c-à-d il existe deux constantes positives k_{ij}^+ et σ tel que
$$|k_{ij}(s)| \leq k_{ij}^+ e^{-\sigma s}$$

(H7) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$ les fonctions : $t \longrightarrow c_{ij}(t)$, $t \longrightarrow d_{ij}(t)$ $t \longrightarrow p_{ij}(t)$ $t \longrightarrow J_i(t)$ sont $S-$asymptotiquement $\omega-$ périodiques sur $\mathbb{R}^+$.

On pose
$$c_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |c_{ij}(t)|; \; d_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |d_{ij}(t)|;$$
$$p_{ij}^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |p_{ij}(t)|; \; J_i^+ = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |J_i(t)|.$$

3.3 Existence et unicité de solutions $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques

Théorème 3.3.1.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$. Alors pour toute fonction $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ la composition $f \circ \phi \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Il est clair que $f \circ \phi \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$. $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que

$$|\phi(t+\omega) - \phi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L^f}, \qquad \forall t > T_\varepsilon,$$

où L^f est la constante de Lipschitz de f.

$$|f(\phi(t+\omega)) - f(\phi(t))| \leq L^f |\phi(t+\omega) - \phi(t)| < \varepsilon, \;\; \forall t > T_\varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{t \to +\infty} (f(\phi(t+\omega)) - f(\phi(t))) = 0.$$

On conclut que $f \circ \phi \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. □

Lemme 3.3.2. *Supposons que les hypothèses* ***(H5)*** *et* ***(H6)*** *sont vérifiées, et pour tout $1 \leq j \leq n$, $x_j(.) \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction*

$$\varphi_i : t \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s) h_j(x_j(s)) ds$$

appartient à $SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Démonstration.
Nous allons démontrer en premier lieu que la fonction φ_i est bornée continue, ensuite nous montrons qu'elle est $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique.
Etape 1 :

1. φ_i est bornée car on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

$$|\varphi_i(t)| \leq \frac{k_{ij}^+}{\sigma} \|h_j\|_\infty$$

2. φ_i est continue. En effet, soit une suite $(b_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$. Par hypothèse $x_j(.) \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ donc elle est continue alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a

$$|x_j(s+b_n) - x_j(s)| \leq \frac{\varepsilon \sigma}{L_j^h k_{ij}^+}.$$

Il s'ensuit, en utilisant **(H5)** et **(H6)**

$$\begin{aligned} |\varphi_i(t+b_n) - \varphi_i(t)| &= |\int_{-\infty}^{t+b_n} k_{ij}(t+b_n-s)|h_j(x_j(s))ds \\ &- \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_j(s))|ds \end{aligned}$$

On pose $u = s - b_n$, il vient

$$\begin{array}{rcl}|\varphi_i(t+b_n)-\varphi_i(t)| & \leq & |\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_j(s+b_n))ds - \int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)h_j(x_j(s))ds| \\ & \leq & \displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)|h_j(x_j(s+b_n)) - h_j(x_j(s))|ds \\ & \leq & L_j^h \displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)|x_j(s+b_n) - x_j(s)|ds \\ & \leq & L_j^h \varepsilon\sigma \displaystyle\int_{0}^{+\infty} k_{ij}^+ e^{-\sigma s} ds \\ & \leq & \varepsilon\end{array}$$

D'où φ_i est continue .

Etape 2 :

Montrons que

$$\lim_{t\to+\infty} (\varphi_i(t+\omega)) - \varphi_i(t))) = 0.$$

On a

$$\begin{array}{rcl}|\varphi_i(t+\omega)-\varphi_i(t)| & \leq & \displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)|h_j(x_j(\omega+s)) - h_j(x_j(s))|ds \\ & \leq & L_j^h k_{ij}^+ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma(t-s)}|x_j(\omega+s)) - x_j(s))|ds.\end{array}$$

Comme $x_j(.) \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, on pose pour $\varepsilon > 0$, $\exists T_\varepsilon > 0$ tel que

$$|x_j(t+\omega) - x_j(t)| < \frac{\varepsilon\sigma}{L_j^h k_{ij}^+}, \qquad \forall t > T_\varepsilon.$$

Ceci entraine

$$\begin{array}{rcl}|\varphi_i(t+\omega)-\varphi_i(t)| & \leq & L_j^h k_{ij}^+ \Big[\displaystyle\int_{-\infty}^{T_\varepsilon} e^{-\sigma(t-s)}|x_j(\omega+s)) - x_j(s))|ds \\ & + & \varepsilon \displaystyle\int_{T_\varepsilon}^{t} e^{-\sigma(t-s)} ds.\Big] \\ & \leq & \dfrac{1}{\sigma}\left(2\|h_j\|_\infty L_j^h k_{ij}^+ + \varepsilon\right) e^{-\sigma(t-T_\varepsilon)} + \varepsilon.\end{array}$$

Comme ε est arbitraire on aura

$$\lim_{t\to+\infty} (\varphi_i(t+\omega)) - \varphi_i(t))) = 0.$$

D'où $\varphi_i \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. $\square$

Lemme 3.3.3.

*On suppose que **(H5)** – **(H7)** sont satisfaites, on définit l'opérateur* Γ *comme suit :*
pour toute fonction $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \; SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$,

$$(\Gamma^i\varphi)(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_1} F_1(s)ds \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)a_n} F_n(s)ds \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} F_i(s) \;\; &= \;\; \sum_{j=1}^n \Big(c_{ij}(s) f_j(\varphi_j(s)) + d_{ij}(s) g_j(\varphi_j(s-\tau)) \Big) \\ &+ \;\; \sum_{j=1}^n p_{ij}(s) \int_{-\infty}^s k_{ij}(s-m) h_j(\varphi_j(m))dm + J_i(s). \end{aligned}$$

Alors Γ^i *envoie* $SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ *dans lui même.*

Démonstration.

Par la proposition 3.1.2, le lemme 3.1.3, et le théorème 3.3.1, la fonction F_i est $S-$asymptotiquement ω-periodique. Il reste à montrer que

$$\Gamma^i\varphi \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$$

On pose pour tout $1 \leq i \leq n$.

$$(\Gamma^i\varphi)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-a_i(t-s)} F_i(s)ds.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |(\Gamma^i\varphi)(t+\omega) - (\Gamma^i\varphi)(t)| \;\; &= \;\; | \int_{-\infty}^{t+\omega} e^{-a_i(t-s)} F_i(s)ds \\ &- \int_{-\infty}^t e^{-a_i(t-s)} F_i(s))ds| \\ &\leq \int_{-\infty}^t e^{-a_i(t-s)} |F_i(\omega+s)) - F_i(s))|ds \end{aligned}$$

Comme $F_i(.) \in SAP_\omega(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que

$$|F_i(t+\omega) - F_i(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t > T_\varepsilon.$$

De même

$$\begin{aligned}
|(\Gamma^i\varphi)(t+\omega)-(\Gamma^i\varphi)(t)| &= \int_{-\infty}^{T_\varepsilon} e^{-a_i(t-s)}|F_i(\omega+s))-F_i(s))|ds \\
&+ \varepsilon\int_{T_\varepsilon}^{t} e^{-a_i(t-s)}ds.\Big] \\
&\leq \int_{-\infty}^{T_\varepsilon} e^{-a_i(t-s)}ds\Big(c_{ij}^+L_j^f+d_{ij}^+L_j^g+\frac{L_j^hk_{ij}^+}{\sigma}\Big)\varepsilon+\frac{\varepsilon}{a_i}\left(1-e^{-a_i(t-T_\varepsilon)}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{e^{a_i(t-T_\varepsilon)}}+\frac{\varepsilon}{a_i}.
\end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, alors on obtient le résultat voulu.

$\square$

Théorème 3.3.4.
On suppose que $(\boldsymbol{H}_1)$-$(\boldsymbol{H}_3)$ *sont satisfaites et*

$$R=\max_{1\leq i\leq n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij}^+L_j^f+L_j^gd_{ij}^++\frac{L_j^hk_{ij}^+p_{ij}^+}{\sigma}\right)}{a_i}\right)<1 \tag{3.2}$$

Alors le système différentiel (3.1) possède une solution $S-$*asymptotiquement* $\omega-$*périodique unique dans la region*

$$\mathbb{B}=\left\{\varphi\in SAP_\omega(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)\ :\|\varphi-\varphi_0\|_\infty\leq\frac{R\beta}{1-R}\right\},$$

où

$$\varphi_0(t)=\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)a_1}J_1(s)ds\\ \vdots\\ \int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)a_n}J_n(s)ds,\end{pmatrix}$$

avec $\beta=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\frac{J_i^+}{a_i}\right)$.

Démonstration.
On a $\|\varphi_0\|_\infty\leq\beta$ car pour tout $t\in\mathbb{R}^+$

$$|\varphi_0(t)|=\max_{1\leq i\leq n}\Big|\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)a_i}J_i(s)ds\Big|\leq\max_{1\leq i\leq n}\left(\frac{J_i^+}{a_i}\right)=\beta.$$

Il s'ensuit que

$$\|\varphi\|_\infty\leq\|\varphi-\varphi_0\|_\infty+\beta\leq\frac{R\beta}{1-R}+\beta=\frac{\beta}{1-R}. \tag{3.3}$$

Ensuite on démontre que l'opérateur Γ envoie $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$, on écrit

$$\begin{aligned}
|(\Gamma^i\varphi)(t)-\varphi_0(t)| &\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big(\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)a_i}\sum_{j=1}^{n}[|c_{ij}(s)f_j(\varphi_j(s))|+|d_{ij}(s)g_j(\varphi_j(s-\tau))|ds]\Big) \\
&+ \max_{1\leq i\leq n}\Big(\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)a_i}\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(s)|\int_{-\infty}^{t}k_{ij}(s-m)|h_j(\varphi_j(m))|dmds\Big).
\end{aligned}$$

En utilisant (**H5**). Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il vient

$$\begin{aligned}
|(\Gamma^i\varphi)(t) - \varphi_0(t)| &\leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}[\sum_{j=1}^{n}\Big(|c_{ij}(s)|L_j^f|\varphi_j(s)| \\
&+ |d_{ij}(s)|L_j^g|\varphi_j(s-\tau)| + |p_{ij}(s)|\frac{L_j^h k_{ij}^+|\varphi_j(m)|}{\sigma}\Big)\Big]ds\Big) \\
&\leq \underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}ds\Big)\underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi\|_\infty\Big[c_{ij}^+L_j^f + d_{ij}^+L_j^g + p_{ij}^+\frac{L_j^h k_{ij}^+}{\sigma}\Big]\Big) \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\{\frac{1}{a_i}\}\underset{1\leq i\leq n}{max}\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi\|_\infty\Big[c_{ij}^+L_j^f + d_{ij}^+L_j^g + p_{ij}^+\frac{L_j^h k_{ij}^+}{\sigma}\Big]\Big) \leq \frac{R\beta}{1-R}
\end{aligned}$$

Par conséquent $\Gamma^i(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$.

Il reste à démontrer que opérateur Γ^i est une contraction, afin d'appliquer le théorème du point fixe de Banach.
En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}
|\Gamma^i(\varphi)(t) - \Gamma^i(\psi)(t)| &\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-a_i(t-s)}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(|c_{ij}(s)\|f_j(\varphi(s)) - f_j(\psi(s))| \\
&+ |d_{ij}(s)\|g_j(\varphi(s)) - g_j(\psi(s))| \\
&+ \sum_{j=1}^{n}|p_{ij}(s)|\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-l)|h_j(\varphi(l)) - h_j(\psi(l))|dl\Big]ds\Big) \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)a_i}\Big[\sum_{j=1}^{n}\Big(c_{ij}^+L_j^f + d_{ij}^+L_j^g\Big)|\varphi(s) - \psi(s)| \\
&+ \sum_{j=1}^{n}p_{ij}^+\int_{-\infty}^{s} k_{ij}(t-l)L_j^h|\varphi(l)) - \psi(l)|dl\Big]ds\Big) \leq R\|\varphi - \psi\|_\infty
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (3.2), on en déduit que Γ^i est une contraction.

Par le Théorème du point fixe de Banach on aura l'existence et l'unicité de la solution $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique de (3.1) sur la région $\mathbb{B}$.

$\square$

Chapitre 4

Solution pseudo presque périodique d'une équation de Nicholson à coefficients Stepanov pseudo presque périodiques avec un terme récolte

Dans ce chapitre nous étudions l'existence et l'unicité de solution pseudo presque périodique d'une équation de Nicholson avec un terme récolte (le cas linéaire et le cas non linéaire sont étudiés). On peut trouver quelques résultats récents sur l'existence et l'unicité des solutions de cette équation dans [10, 15, 36, 62, 64]. Nous présentons dans la première partie de ce chapitre l'équation de Nicholson et les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques. Dans la seconde partie, nous commençons par l'étude de l'équation de Nicholson avec un terme récolte linéaire. Par la suite on s'intéresse au cas où le terme récolte est non linéaire.

4.1 Aperçu historique et présentation de l'équation de Nicholson

L'étude de l'évolution d'une population au cours du temps a intéressé beaucoup de mathématiciens au début du vingtème siècle. Ces derniers ont eu recours à une description mathématique pour représenter le mieux possible cette évolution. Les premiers modèles dans ce sens sont ceux de Malthus, Verhulst, Lotka-Volterra, ils sont gouvernés par des équations différentielles ordinaires, à retard constants, distribué, ou fonctionnelle...etc.

En pratique, il est difficile de quantifier des données experimentales pour prédire l'évolution du nombre d'individus d'une population donnée au cours d'un temps long. Prenons par exemple le cas de la population des mouches dévoreuses de viandes des moutons en Australie l'entomologiste Nicholson [70], sur une période deux années a observé une population de mouches dévoreuses de viande (Lucila cuprina), pour comprendre le cycle de développement de cette dernière.

L'équation logistique à retard [10] a été utilisé pour expliquer les résultats de l'expérience de Nicholson, mais cette équation n'a pas donné une bonne estimation du retard. Alors, Gurney et al[45] en 1980, motivé par cette expérience, ont proposé un modèle mathématique décrivant la dynamique de cette population de mouche au cours du temps, il s'écrit comme suit

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + px(t-\tau)e^{-\lambda x(t-\tau)} \tag{4.1}$$

$x(.)$: représente la taille de la population à l'instant t,
p : est le maximum de la croissance quotidienne d'oeufs par individu,
τ : la durée de la phase de maturation,
a : taux de mortalité par individu par jour,
$\frac{1}{\lambda}$: nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter.

Par la suite, plusieurs auteurs ont affirmé la présence des fluctuations ou des oscillations périodiques des solutions (voir [61, 62, 77]), mais ils n'expliquent pas la nature oscillatoire de l'évolution de la population. Ceci a amené Berezansky [10] a généralisé ce modèle. En ajoutant un terme constant H appelé récolte ou taux de prélèvement à la population effective, qui permet une description plus précise de la dynamique de cette population, et change le comportment qualitatif de la solution même lorsque les coefficients sont périodiques. Ce modèle est décrit par l'équation différentielle à retard suivante

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + px(t-\tau)e^{-\lambda x(t-\tau)} - Hx(t-\sigma) \tag{4.2}$$

Cette modification a ouvert tout un champ d'investigations sur l'effect du terme récolte sur l'aspect qualitatif de la solution. Récemment, F. Long [64] a généralisé le modèle (4.2), en considérant des coefficients presque périodiques, un terme récolte linéaire et un retard variable. Il a montré l'existence de solutions positives presque périodiques dans un convexe compact.
Par la suite, Duan et al [36] ont montré en utilisant le théorème du point fixe de Banach, que dans le cas où les coefficients sont pseudo-presque périodiques, et sous les mêmes hypothèses que celles données dans [64], le modèle de Nicholson admet une unique solution pseudo presque périodique. En 2015, F. Chérif [15] a étudié l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque périodiques lorsque on a plusieurs types de retards et les coefficients sont pseudo-presque périodiques.
Motivé par les résultats obtenus dans les précédents travaux et le résultat d'Andres et Pennequin [5], on s'intéresse dans ce chapitre à la question sur d'existence et l'unicité de solutions pseudo presque périodique de l'équation de Nicholson quand les coefficients sont Stepanov pseudo presque périodiques.

4.1.1 Fonctions Stepanov presque périodiques

En remplaçant la norme uniforme par une norme de type L^p dans la définition des fonctions Bohr presque périodique, Stepanov [79] a définit en 1926 les fonctions Stepanov presque périodiques. Par la suite elles ont été caractérisées en utilisant la transformée de Bochner (voir par exemple [2]). Grâce à cette caractérisation ces fonctions sont appliquées aux équations différentielles (*voir*[21, 33, 59]).

Pour $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout intervalle $[a,b]$ on a $\int_a^b |f(t)|^p dt < +\infty$.

Définition 4.1.1.
Une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}), 1 \leq p < +\infty$ est dite presque périodique au sens de Stepanov ($f \in S^pAP(\mathbb{R})$), si l'ensemble

$$S^pT\,(f,\varepsilon) := \{\tau \in \mathbb{R},\ \ \|f_\tau - f\|_{S^p} < \varepsilon\}\,,\ \textit{est relativement dense dans } \mathbb{R} \quad (4.3)$$

f_τ est la translatée de f et

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\int_t^{t+1} |f(s)|^p\, ds\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $S^pAP(\mathbb{R}),\ 1 \leq p < +\infty$ muni de la norme $\|.\|_{S^p}$ est un espace de Banach.

Proposition 4.1.2.
1. *$AP(\mathbb{R}) \subset S^pAP(\mathbb{R})$.*
2. *Si $f \in S^pAP(\mathbb{R})$ alors $\|f\|_{S^p} < \infty$ (i.e, f est S^p-bornée)*

Démonstration.
1. Par hypothèse f est continue alors $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$.
   Soit $\tau \in E(f,\varepsilon)$, alors
   $$|f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon,\ \ \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$
   En intégrant (4.4) on aura $\forall x \in \mathbb{R}$
   $$\Big(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$
   Donc $\tau \in S^pE(f,\varepsilon)$. Ceci implique que $S^pE(f,\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est S^p-presque périodique.
   Notons que l'inclusion inverse a lieu si f et uniformément continue. Autrement dit,
   $$AP(\mathbb{R}) = S^pAP(\mathbb{R}) \cap C_u(\mathbb{R}),$$
   où $C_u(\mathbb{R})$ désigne l'espace les fonctions uniformément continues.
2. f est S^ppresque périodique. Alors $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\ell > 0$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha+\ell]$ contient un nombre τ vérifiant
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p\, dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$
   On prend $\tau \in [-x, -x+l] \cap S^pE\,(f,\varepsilon)$, alors $0 \leq x+\tau \leq \ell$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$\begin{aligned}\Big(\int_x^{x+1} |f(t)|^p\, dt\Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(\int_x^{x+1} |f(t) - f(t+\tau) + f(t+\tau)|\, dt\Big)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\leq \Big(\int_x^{x+1} |f(t) - f(t+\tau)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_x^{x+1} |f(t+\tau)|^p\, dt\Big)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\leq \varepsilon + \Big(\int_x^{x+1} |f(t+\tau)|^p\, dt\Big)^{\frac{1}{p}} dt\end{aligned}$$

En posant le changement de variable $u = t + \tau$ on aura pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Big(\int_x^{x+1} |f(t+\tau)|^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(\int_{x+\tau}^{x+\tau+1} |f(u)|^p \, du\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\int_0^{l+1} |f(u)|^p \, du\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$.

Ainsi on $\|f\|_{S^p} < \infty$. C'est à dire f est S^p- bornée.

$\square$

Définition 4.1.3. [2](**Transformée de Bochner**)
Soit $p \in [1, +\infty[$, la transformée de Bochner f^b d'une fonction mesurable f est la fonction

$$f^b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{[0,1]},\, t \mapsto f^b(t)$$

$\mathbb{R}^{[0,1]}$ désigne l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $f^b(t) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ est telle que $f^b(t)(s) = f(s+t)$, $\forall s \in [0,1]$.

Notons que si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, nous avons

$$(f+g)^b = f^b + g^b, \;\; (\lambda f)^b = \lambda f^b, \;\; (f_\tau)^b = (f^b)_\tau \;\; et \;\; (f.g)^b = f^b g^b.$$

Définition 4.1.4. [2]
Soit $p \in [1, +\infty[$, on note $BS^p(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions Stepanov bornées. Plus précisememnt

$$BS^p(\mathbb{R}) = \left\{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})\,, \text{tel que } \|f\|_{S^p} < +\infty\right\}.$$

La bornitude de f au sens de Stepanov est équivalente à la bornitude de sa transformée de Bochner et on a

$$\|f\|_{S^p} = \left\|f^b\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^p([0,1];\mathbb{R}))} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(\int_t^{t+1} |f(s)|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.5}$$

Grace à l'égalité (4.5) la presque périodicité de Setepanov peut se définir comme suit

Définition 4.1.5.
$f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ est dite Stepanov presque périodique si et seulement si sa transformée de Bochner f^b est presque périodique au sens de Bohr. Autrement dit,

$$f \in S^pAP(\mathbb{R}) \;\; si \;\; et \;\; seulement \;\; si \;\; f^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1])).$$

Exemple 4.1.1. *[5, 59]*

1. *Soit $f \in AP(\mathbb{R})$. Alors la fonction*

$$sign(f(t)) = \begin{cases} 1 & si \;\; f(x) > 0, \\ 0 & si \;\; f(x) = 1, \\ -1 & si \;\; f(x) < 0 \end{cases}$$

est $S^1AP(\mathbb{R})$.

2. *La fonction*

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pour } t \neq 0, \\ k & \text{pour } t = k\pi, \end{cases}$$

est $S^pAP(\mathbb{R})$

3. *Soit* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, *avec* $\frac{1}{\alpha\beta}$ *irrationel, les deux fonctions* $f,\ g$ *définies par*

$$f(t) = \sin\Big(\frac{1}{2+\cos(\alpha t)+\cos(\beta t)}\Big) \quad et \quad g(t) = \cos\Big(\frac{1}{2+\cos(\alpha t)+\cos(\beta t)}\Big)$$

sont Stepanov presque périodiques.

Définition 4.1.6. [21]

On dit qu'une fonction paramétrique $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est Stepanov presque périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(.,x)$ est Stepanov presque périodique uniformément pour $x \in K$ (K compact de $\mathbb{R}$), on dira que f est S^p-presque périodique uniformément par rapport à la variable $x \in K$. On écrit $f \in S^pAP_K(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques

La notion de la Stepanov pseudo presque périodicité a été introduite par T. Diagana [26] comme généralisation de la pseudo presque périodicité de Zhang [95].

Définition 4.1.7. [21]

Une fonction $f \in BS^p(\mathbb{R})$ est dite pseudo-presque périodique au sens de Stepanov $f \in S^pPAP(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$f = g + \varphi \quad avec \quad g^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1])) \quad et \quad \varphi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1])).$$

On a jugé utile de rappeler que

$$g^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1])) \Leftrightarrow g \in S^pAP(\mathbb{R}) \tag{4.6}$$

$$\varphi^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p[0,1]) \Leftrightarrow \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\|\varphi(t)\|_{L^p([0,1])}dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Big(\int_0^1\|\varphi(t+s)\|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}dt = 0$$

La proposition qui suit résume quelques propriétés des fonctions S^pAP et S^pPAP qui sont utilisées dans les démonstrations de nos résultats.

Proposition 4.1.8. *[21, 76]*

1. *Si* $\varphi \in AP(\mathbb{R})$ *et* $g \in S^pAP(\mathbb{R})$, *alors* $\varphi\times\psi \in S^pAP(\mathbb{R})$.
2. *Si* $f \in PAP(\mathbb{R})$ *alors* $f \in S^pPAP(\mathbb{R})$.
3. *Si* $\varphi \in S^pPAP(\mathbb{R})$ *alors* $\varphi(.-h) \in S^pPAP(\mathbb{R})$.
4. *Si* $\varphi,\psi \in S^pPAP(\mathbb{R})$, *alors* $\varphi\times\psi \in S^pPAP(\mathbb{R})$.

Démonstration.
item 1, 2 et 3 sont démontrés dans [21, 76].

On va démontrer seulement item 4. Notons qu'il est démontré par F.Chérif et al. [16] dans le cas des fonctions à valeurs de quaternion.

Par définition, on peut écrire

$\varphi^b = \varphi_1^b + \varphi_2^b \, et \, \psi^b = \psi_1^b + \psi_2^b, \;\; avec \;\; \varphi_1^b, \psi_1^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1])) \;\; et \;\; \varphi_2^b, \psi_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1]))$

et on a

$$\varphi^b \times \psi^b = \varphi_1^b\psi_1^b + \varphi_1^b\psi_2^b + \varphi_2^b\psi_1^b + \varphi_2^b\psi_2^b.$$

Posons

$$G_1^b = \varphi_1^b\psi_1^b \;\; et \;\; G_2^b = \varphi_1^b\psi_2^b + \varphi_2^b\psi_1^b + \varphi_2^b\psi_2^b.$$

Il est bien connu que le produit de deux fonctions presque périodiques est presque périodique, voir par exemple [2], d'où $G_1^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1]))$.

Montrons que $G_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1], \mathbb{R}))$. En utilisant l'inégalité de Minkowski, on a pour $T > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} ||G_2^b(t)||_{L^p([0,1],\mathbb{R})} dt &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |G_2(t+s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |(\varphi_1(t+s)\psi_2(t+s) \\
&+ \varphi_2(t+s)\psi_1(t+s) + \varphi_2(t+s)\psi_2(t+s)|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |\varphi_1(t+s)\psi_2(t+s)|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} dt \\
&+ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |\varphi_2(t+s)\psi_1(t+s) \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} dt \\
&+ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |\varphi_2(t+s)\psi_2(t+s)|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} \, dt \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \sup_{-T\leq t\leq T} \sup_{0\leq s\leq 1} |\varphi_1(t+s)| \Big(\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 \psi_2(t+s)|^p ds\Big) dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \sup_{-T\leq t\leq T} \sup_{0\leq s\leq 1} |\psi_1(t+s)| \Big(\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |\varphi_2(t+s)|^p ds\Big) dt\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \sup_{-T\leq t\leq T} \sup_{0\leq s\leq 1} |\varphi_2(t+s)| \Big(\int_{-T}^{T} \Big(\int_0^1 |\psi_2(t+s)|^p ds\Big) dt\Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_2^b, \psi_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p(([0,1]))$, il en découle que $G_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, L^p([0,1]))$.

Par conséquent $\varphi\psi \in S^pPAP(\mathbb{R})$. □

Fonction paramétrique Stepanov pseudo presque périodique

Définition 4.1.9. [21]
Une fonction

$$\begin{aligned} F: \; \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,u) &\longmapsto f(t,u) \end{aligned}$$

avec $F(.,u) \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $u \in \mathbb{R}$ est dite pseudo presque périodique au sens de Stepanov en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $u \in \mathbb{R}$ si $t \longmapsto f(t,u)$ est pseudo presque périodique au sens de Stepanov pour tout $u \in \mathbb{R}$

4.2 Résultats d'existence et unicité de solution pseudo presque périodique

4.2.1 Cas où le terme récolte est linéaire

Dans cette section nous montrons l'existence et l'unicité de solution pseudo presque périodique de l'équation de Nicholson, avec un terme récolte linéaire, donnée par

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta x(t) + p(t)x(t-\tau)e^{-a(t)x(t-\tau)} - H(t)x(t-\sigma) \ avec\ \delta > 0,\ t > 0 \\ x_t = \varphi,\ t \in [-r, 0], avec\ r = \max\{\tau,\ \sigma\},\ \tau,\ \sigma > 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\varphi \in C_+ = C([-r,0], \mathbb{R}^+),\ \varphi(0) > 0, \quad et\ \ x_t(\theta) = x(t+\theta)\ \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

Nous allons étudier (4.7) sous les hypothèses suivantes :

(A1) $a(.)$ une fonction pseudo presque périodique de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et

$$a^+ = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} a(t)\ et\ a^- = \inf_{t\in\mathbb{R}^+} a(t)$$

(A2) $p(.) \in S^pPAP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $H(.) \in S^pPAP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < +\infty$, avec

$$p^- = \inf_{t\in\mathbb{R}^+} p(t),$$

(A3) Il existent deux constantes positives $R_1,\ R_2$ telles que

$$\begin{cases} R_2 \geq \max\Big(\frac{1}{a^+}, \frac{1}{a^- e(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}\Big), & \text{si p>1} \\ \\ R_2 \geq \max\Big(\frac{1}{a^+}, \frac{e^\delta}{a^- e(1-e^{-\delta})}\|p\|_{S^1}\Big) & \text{si p=1,} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} R_1 \leq \frac{p^- R_2 e^{-a^+R_2}}{\delta} - \frac{R_2}{(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|H\|_{S^p} & \text{si p>1} \\ \\ R_1 \leq \frac{p^- R_2 e^{-a^+R_2}}{\delta} - \frac{e^\delta}{(1-e^{-\delta})}\|H\|_{S^1} & \text{si p=1,} \end{cases}$$

Afin de démontrer le théorème principal, on commence par démontrer le Lemme suivant

Lemme 4.2.1.
*Soit $\phi \in S^pPAP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Sous les hypothèses **(A1)** et **(A2)**, l'opérateur défini sur $\mathbb{R}^+$ par*

$$(\Gamma_\phi)(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)}F(s)ds,$$

est pseudo presque périodique, où $F(s) = p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - H(s)\phi(s-\sigma)$.

Démonstration.
Comme conséquence immédiate de la Proposition 4.1.8, la fonction F est Stepanov pseudo presque périodique. C'est-à-dire, on peut décomposer F comme suit

$$F = F_1 + F_2,$$

où $F_1^b \in AP(\mathbb{R}^+, (L^p([0,1], \mathbb{R}^+))$ et $F_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+, (L^p([0,1], \mathbb{R}^+))$. On écrit alors

$$\begin{aligned}(\Gamma\phi)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\ F_1(s)ds + \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\ F_2(s)ds \\ &= \varphi(t) + \psi(t).\end{aligned}$$

Première étape : Montrons que $\varphi(.)$ est presque périodique. On pose,

$$\varphi_n(t) = \int_{t-n}^{t-n+1} e^{-\delta(t-s)}\ F_1(s)ds = \int_{n-1}^{n} e^{-\delta s}\ F_1(t-s)ds.$$

Premièrement, nous démontrons que pour $n \geq 1$, $\varphi_n \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et $(t_m)_m$ une suite converge vers t_0. Alors

$$|\varphi_n(t_m) - \varphi_n(t_0)| \leq \int_{n-1}^{n} e^{-\delta s}\ |F_1(t_m - s) - F_1(t_0 - s)|ds.$$

Par hypothèse $\phi \in S^pPAP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ avec $1 \leq p < \infty$. On va distinguer deux cas

Premier cas : Pour $1 < p < \infty$ et $q = \frac{p}{p-1}$, on a par l'inégalité de Hölder on obtient

$$|\varphi_n(t_m) - \varphi_n(t_0)| \leq \Big(\int_{n-1}^{n} e^{-q\delta s}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{n-1}^{n} |F_1(t_m - s) - F_1(t_0 - s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}$$

En posant le changement de variable $u = t_0 - s$ on aura

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t_m) - \varphi_n(t_0)| &\leq \Big(\int_{n-1}^{n} e^{-q\delta s}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{n-1}^{n} |F_1(t_m - s) - F_1(t_0 - s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{t_0-n}^{t_0-n+1} |F_1(t_m - t_0 + s) - F_1(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Deuxième cas : $p = 1$, en faisant le même changement de variable que précédement on obtient

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t_m) - \varphi_n(t_0)| &\leq \Big(\sup_{n-1 \leq s \leq n} e^{-\delta s}\Big) \int_{t_0-n}^{t_0-n+1} |F_1(t_m - t_0 + s) - F_1(s)|ds \\ &\leq e^{-\delta(n-1)} \|F_{1(t_m - t_0)} - F_1\|_{L^1([t_0-n, t_0-n+1])}\end{aligned}$$

D'après la Definition 2.4.1 de [56], une fonction $f \in L^p([a,b]), 1 \leq p < \infty$ est continue en $p-$moyenne c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\Big(\int_a^b |f(t+h) - f(t)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \ pour\ tout\ h \in \mathbb{R}\ \ avec\ \ |h| < \delta.$$

Par l'équivalence (4.6) et la Définition 4.1.1 la fonction F_1 est continue en $p-$moyenne et comme $(t_m)_m$ converge vers t_0 il résulte que dans les deux cas

$$\lim_{m\to\infty} |\varphi_n(t_m) - \varphi_n(t_0)| = 0.$$

Comme t_0 est arbitraire, nous obtenons $\varphi_n \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Deuxiement vérifions que l'ensemble $T(\varphi_n, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}^+$. On va aussi traiter deux cas :

1. Si $1 < p < \infty$

   En utilisant l'inégalité de Hölder et le changement de variable $u = n-s$, nous avons pour chaque $\tau \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t+\tau) - \varphi_n(t)| &\leq \Big(\int_{n-1}^n e^{-q\delta s}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{n-1}^n |F_1(t+\tau-s) - F_1(t-s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\frac{e^{-\delta n}}{\delta q}(e^{\delta q} - 1)\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_0^1 |F_1(t+\tau-n+s) - F_1(t-n+s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

   Comme $F_1^b \in AP(\mathbb{R}^+, L^p([0,1], \mathbb{R}^+))$, $1 \leq p < \infty$ on choisit une presque période τ de F_1^b telle que

$$\int_0^1 |F_1(t+\tau-n+s) - F_1(t-n+s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}}} \tag{4.9}$$

   En injectant (4.9) dans (4.8) on obtient

$$|\varphi_n(t+\tau) - \varphi_n(t)| \leq \varepsilon.$$

   D'où

$$T\Big(F_1^b, \frac{\varepsilon}{\frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}}}\Big) \subset T(\varphi_n, \varepsilon),$$

   ce qui implique que $T(\varphi_n, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

2. Si $p = 1$, soit τ une $\frac{\varepsilon}{e^{-\delta(n-1)}}$ presque période F_1^b alors on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t+\tau) - \varphi_n(t)| &\leq \int_{n-1}^n e^{-\delta s}\, |F_1(t+\tau-s) - F_1(t-s)| ds \\ &\leq \Big(\sup_{n-1 \leq s \leq n} e^{-\delta s}\Big) \int_0^1 |F_1(t-n+\tau+s) - F_1(t-n+s)| ds \\ &\leq e^{-\delta(n-1)} \int_0^1 |F_1(t-n+\tau+s) - F_1(t-n+s)| ds \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui donne $\tau \in T(\varphi_n, \varepsilon)$.

Par conséquent, $T(\varphi_n, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Finalement, $\varphi_n(.)$ est presque périodique sur $\mathbb{R}^+$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $1 < p < \infty$ **et** $q = \frac{p}{p-1}$**.** En utilisant la proposition 4.1.8, et l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &\leq \frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{n-1}^{n} |F_1(s)|^p ds \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}} \|F_1\|_{S^p} < \infty. \end{aligned}$$

Pour $p = 1$**,** nous avons

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &\leq \int_{t-n}^{t-n+1} e^{-\delta(t-s)} \, |F^1(s)| ds \\ &\leq e^{-\delta(n-1)} \|F^1\|_{S^1} < \infty. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta n} = \dfrac{1}{1 - e^{-\delta}} < \infty$, on en déduit par le test de Weierstrass que la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

D'où par la Proposition 1.2.3, on en déduit que $\varphi(.) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(.) \in AP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Deuxième étape : Montrons que $\psi(.)$ est ergodique.
Pour $n \geq 1$, on pose

$$\psi_n(t) = \int_{t-n}^{t-n+1} e^{-\delta(t-s)} \, F_2(s) ds = \int_{n-1}^{n} e^{-\delta s} \, F_2(t-s) ds$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour φ_n, nous pouvons montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction ψ_n est continue et bornée. Pour montrer l'ergodicité de ψ_n, il nous reste à vérifier que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\psi_n(t)| dt = 0.$$

Si $1 < p < \infty$ et $q = \frac{p}{p-1}$, l'inégalité Hölder donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\psi_n(t)| dt &\leq \frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big(\int_{t-n}^{t-n+1} |F_2(s)|^p ds \Big)^{\frac{1}{p}} dt \\ &\leq \frac{e^{-\delta n}}{\sqrt[q]{\delta q}}(e^{\delta q} - 1)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|F_2^b(t-n)\|_{L^p([0,1])} dt. \end{aligned}$$

Si $p = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_n(t)|dt &\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\sup_{t-n\leq s\leq t-n+1} e^{-\delta(t-s)}\right)\int_{n-1}^{n}|F_2(s)|ds \\ &\leq e^{-\delta(n-1)}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|F_2^b(t-n)\|_{L^1([0,1])}dt.\end{aligned}$$

Par hypothèse on a $F_2^b \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+,(L^p([0,1],\mathbb{R}^+)))$, celà signifie que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|F_2^b(t)\|_{L^p([0,1])}dt = 0.$$

Alors par l'invariance par translation de l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^+,(L^p([0,1],\mathbb{R}^+))$, $(1 \leq p < \infty)$ il vient

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|F_2^b(t-n)\|_{L^p([0,1])}dt = 0,\ \forall n \geq 1. \tag{4.9}$$

Par conséquent, l'équation (4.9) implique que

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_n(t)|dt = 0. \tag{4.10}$$

Enfin, nous concluons que $\psi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

En utilisant le test de Weierstrass comme dans le cas de φ_n, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1}\psi_n(t)$ converge uniformément vers $\psi(t)$. Ainsi par la proposition 1.2.3 on a $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

Par conséquent, $\Gamma_\phi \in PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$. C'est à dire Γ envoie $S^pPAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ dans $PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

□

Théorème 4.2.2.
On suppose que les conditions ***(A1)***, ***(A2)*** *et* ***(A3)*** *sont vérifiées. Si de plus l'une des conditions suivantes est satisfaite*
(i) *Pour $1 < p < \infty$ nous avons*

$$r = \frac{1}{(1-e^{-\delta})}\left(\frac{e^q-1}{\delta q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{a^-e^2}\|p\|_{S^p} + \|H\|_{S^p}\right) < 1. \tag{4.11}$$

(ii) *Pour $p = 1$ et*

$$r = \left(\frac{e^{-\delta}}{a^-e^2(1-e^{-\delta})}\|p\|_{S^1} - \frac{e^{-\delta}}{1-e^{-\delta}}\|H\|_{S^1}\right) < 1. \tag{4.12}$$

Alors l'équation (4.7) admet une unique solution pseudo-presque périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \{x \in PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+),\ R_1 \leq x(t) \leq R_2\}.$$

Démonstration.

$\mathbb{B}$ est un sous-ensemble fermé convexe de $PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

Montrons que $\Gamma(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$ où Γ est l'opérateur défini dans le Lemme précédent.

La fonction $u \to ue^{-a^-u}$ est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{a^-}]$, il s'ensuit que $\sup\limits_{u\geq 0} ue^{-a^-u} = \frac{1}{a^-e}$. Par conséquent pour $\phi \in \mathbb{B}$ on a

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\phi)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - H(s)(\phi(s-\sigma))\Big]ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}p(s)\phi(s-\tau)e^{-a^-\phi(s-\tau)}ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a^-e}ds \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a^-e}ds.
\end{aligned}$$

Si $1 < p < \infty$, en appliquant l'inégalité de Hölder et la condition **(A3)** on obtient

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\phi)(t) &\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-q\delta(t-s)}ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} |p(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta k}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p} \\
&\leq \frac{1}{a^-e(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p} \leq R_2.
\end{aligned}$$

Si $p = 1$ on a

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\phi)(t) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a^-e}ds \\
&\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k\geq 1}\Big(\sup_{t-k\leq s\leq t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\Big)\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} |p(s)|ds\Big) \\
&\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k\geq 1} e^{-\delta(k-1)}\|p\|_{S^1} \\
&\leq \frac{e^{\delta}}{a^-e(1-e^{-\delta})}\|p\|_{S^1} \leq R_2.
\end{aligned}$$

Si $1 < p < \infty$, compte tenu du fait que la fonction $u \to ue^{-a^+u}$ est décroissante sur $[\frac{1}{a^+}, +\infty[$, nous avons

$$\min_{\frac{1}{a^+}\leq u\leq m} ue^{-a^+u} = me^{-a^+m}.$$

Ainsi en utilisant **(A3)**, l'inégalité Hölder et le fait que $\phi \in \mathbb{B}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\phi)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - H(s)(\phi(s-\sigma))\Big]ds \\
&\geq R_2 e^{-a^+R_2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}p(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}H(s)\phi(s-\sigma)ds \\
&\geq R_2 e^{-a^+R_2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}p(s)ds - R_2\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}H(s)ds \\
&\geq \frac{p^-R_2e^{-a^+R_2}}{\delta} - R_2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-\delta(t-s)}H(s)ds \\
&\geq \frac{p^-R_2e^{-a^+R_2}}{\delta} - \frac{R_2}{(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|H\|_{S^p} \\
&\geq R_1.
\end{aligned}$$

Si $p = 1$ on a

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\phi)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - H(s)(\phi(s-\sigma))\Big]ds \\
&\geq \frac{p^-R_2e^{-a^+R_2}}{\delta} - \frac{e^{\delta}}{(1-e^{-\delta})}\|H\|_{S^1}.
\end{aligned}$$

Celà implique, avec le Lemme 4.2.1 que l'opérateur Γ envoie $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.
Montrons maintenant que Γ est une application contractante sur $\mathbb{B}$.
Pour $\varphi,\ \psi \in \mathbb{B}$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|\Gamma_\phi(t) - \Gamma_\psi(t)| &= \Big|\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - H(s)\phi(s-\tau)\Big]ds \\
&- \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[p(s)\psi(s-\tau)e^{-a(s)\psi(s-\tau)} - H(s)\psi(s-\tau)\Big]ds\Big| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[\Big|\frac{p(s)}{a(s)}\Big(a(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - a(s)\psi(s-\tau)e^{-a(s)\psi(s-\tau)}\Big) \\
&- H(s)(\phi(s-\sigma) - \psi(s-\sigma)\Big|\Big]ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[\frac{p(s)}{a(s)}\Big|a(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - a(s)\psi(s-\tau)e^{-a(s)\psi(s-\tau)}\Big| \\
&+ |H(s)\Big(\phi(s-\sigma) - \psi(s-\sigma)\Big)|\Big]ds.
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction ue^{-u} et on utilisant le fait que $\sup\limits_{u\geq 1}|\frac{1-u}{e^u}| = \frac{1}{e^2}$, on obtient

$$\Big|a(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - a(s)\psi(s-\tau)e^{-a(s)\psi(s-\tau)}\Big| \leq \frac{1}{e^2}\Big|\phi(s-\tau) - \psi(s-\tau)\Big|.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}|\Gamma_\phi(t)-\Gamma_\psi(t)| &\leq \frac{1}{a^-e^2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}p(s)\Big|\phi(s-\tau)-\psi(s-\tau)\Big|ds\\ &+ \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}H(s)\Big|\phi(s-\sigma)-\psi(s-\sigma)\Big|ds.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, il s'ensuit que pour $p>1$

$$\begin{aligned}\|\Gamma_\phi(t)-\Gamma_\psi(t)\| &\leq \frac{1}{a^-e^2}\sum_{k\geq 1}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-q\delta(t-s)}ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|p(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}\|\phi-\psi\|_\infty\\ &+ \sum_{k\geq 1}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-q\delta(t-s)}ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|H(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}\|\phi-\psi\|_\infty\\ &\leq \frac{1}{a^-e^2}\sum_{k\geq 1}e^{-\delta k}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}\|\phi-\psi\|_\infty+\sum_{k\geq 1}e^{-\delta k}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|H\|_{S^p}\|\phi-\psi\|_\infty\\ &\leq \frac{1}{a^-e^2(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}\|\phi-\psi\|_\infty+\frac{1}{(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|H\|_{S^p}\|\phi-\psi\|_\infty\\ &\leq \frac{1}{(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{1}{a^-e^2}\|p\|_{S^p}+\|\|H\|_{S^p}\Big)\|\phi-\psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Pour $p=1$, on a

$$\begin{aligned}|\Gamma_\phi(t)-\Gamma_\psi(t)| &\leq \frac{1}{a^-e^2}\sum_{k\geq 1}\Big(\sup_{t-k\leq s\leq t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\Big)\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|p(s)|ds\Big)||\phi-\psi||_\infty\\ &- \sum_{k\geq 1}\Big(\sup_{t-k\leq s\leq t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\Big)\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|H(s)|ds\Big)||\phi-\psi||_\infty\\ &\leq \Big(\frac{1}{a^-e^2}\sum_{n\geq 1}e^{-\delta(n-1)}||p||_{S^1}-\sum_{n\geq 1}e^{-\delta(n-1)}|||H\|_{S^1}\Big)\|\phi-\psi\|_\infty\\ &\leq \Big(\frac{1}{a^-e^2}\frac{e^\delta}{1-e^{-\delta}}\|p\|_{S^1}+\frac{e^\delta}{1-e^{-\delta}}\|H\|_{S^1}\Big)\|\phi-\psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Sous les conditions (4.12) et (4.11), l'opérateur Γ est une contraction. D'après le Théorème du point fixe de Banach, Γ possède un point fixe unique dans $\mathbb{B}$ tel que $\Gamma\phi^*=\phi^*$, qui est l'unique pseudo solution presque périodique de l'équation (4.7) dans le region $\mathbb{B}$. $\square$

Exemple 4.2.1.
Considérons l'équation de Nicholson avec un terme récolte linéaire suivant :

$$x'(t)=-\delta x(t)+p(t)x(t-\tau)e^{-a(t)x(t-\tau)}-H(t)x(t-\sigma) \tag{4.13}$$

avec $\delta=2$, $\tau=1$, $\sigma=3$.

Par la proposition 4.1.8 on peut choisir

$$p(t)=2+0,5\cos^2(t)+\frac{1}{100}e^{-|t|},\quad H(t)=0,0002+0,0002\cos(\sqrt{2}t)+\frac{0,0005}{1+t^2}$$

et
$$a(t)=2+0,5\sin^2(t)+0,01e^{-t^2} \quad avec \quad a^-=2 \quad et \quad a^+=2,51.$$

Après calcul de la norme $\|.\|_{S^2}$ *des fonctions considérées on obtient*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2e(1-e^{-2})}\sqrt{\frac{e^4-1}{4}}\|2+0,5\cos^2(t)+\frac{1}{100}e^{-|t|}\|_{S^2}\\&=0,77\|2+0,5\cos^2(t)+\frac{1}{100}e^{-|t|}\|_{S^2}=1,895\end{aligned}$$

Donc on peut prendre $R_2=1,9$.
De même

$$\begin{aligned}1,89e^{-4,74}-\frac{1,89}{(1-e^{-2})}\sqrt{\frac{e^4-1}{4}}&||0,0002+0,0002\cos(\sqrt{2}t)+\frac{0,0005}{1+t^2}||_{S^2}\\&=0,016-8,198||0,0002+0,0002\cos(\sqrt{2}t)+\frac{0,0005}{1+t^2}||_{S^2}\\&=0,015-0,0059=0,009.\end{aligned}$$

Donc $R_1=0,009$.

On aura aussi

$$\begin{aligned}r&=\frac{1}{1-e^{-2}}\sqrt{\frac{e^2-1}{4}}\Big(\frac{1}{2e^2}||2+0,5\cos^2(t)+\frac{1}{100}e^{-|t|}||_{S^2}+||0,0002+0,0002\cos(\sqrt{2}t)+\frac{0,0005}{1+t^2}||_{S^2}\Big)\\&\leq\frac{1}{1-e^{-2}}\sqrt{\frac{e^2-1}{4}}\Big(\frac{1}{2e^2}||2+0,5\cos^2(t)+\frac{1}{100}e^{-|t|}||_{\infty}+||0,0002+0,0002\cos(\sqrt{2}t)+\frac{0,0005}{1+t^2}||_{\infty}\Big)\\&\approx 0,233<1.\end{aligned}$$

Ainsi toutes les conditions du Théorème 4.2.2 sont vérifiées, alors le système (4.13) possède une unique solution pseudo presque périodique sur la région $\mathbb{B}$ *donnée par*
$$\mathbb{B}=\{x\in PAP(\mathbb{R}^+\mathbb{R}^+),\ 0,009\leq x(t)\leq 1,90\}.$$

Nos résultats théoriques sont concrétisés par une simulation numériques données dans la figure 4.1

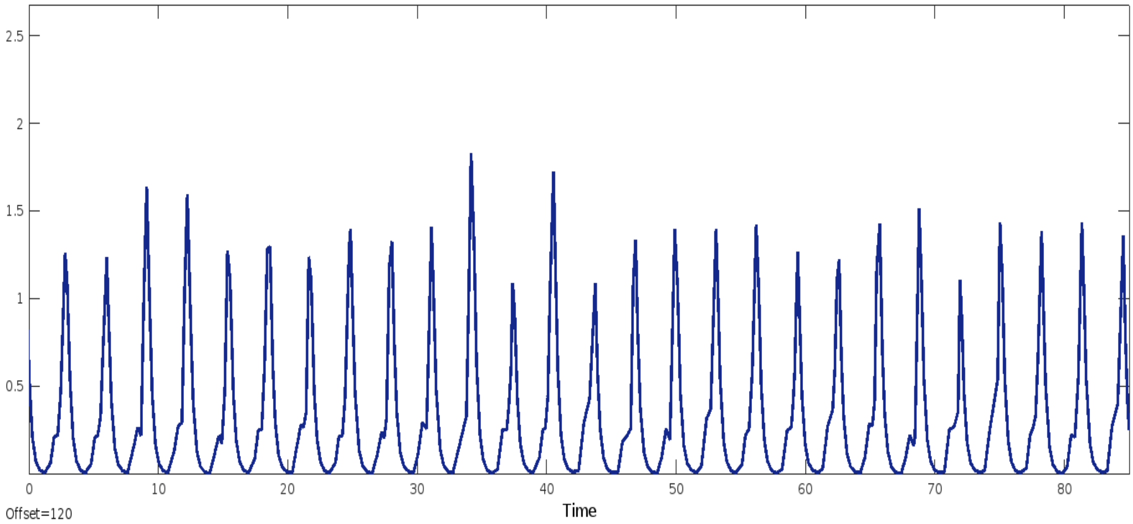

FIGURE 4.1 – Le comportement de la solution du modèle (4.7) pour $T = 85$

4.2.2 Cas où le terme récolte est non linéaire

Dans cette section, l'équation de Nicholson s'écrit comme suit

$$\begin{cases} x^{'}(t) = -\delta x(t) + p(t)x(t-\tau)e^{-a(t)x(t-\tau)} - H(t, x(t-\sigma)),\ t > 0,\ avec\ \delta, \tau, \sigma > 0 \\ \quad x_t = \varphi,\ t \in [-r, 0]\ avec\ r = \max\{\tau,\ \sigma\}, \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\varphi \in C_+ = C([-r, 0], \mathbb{R}^+),\ \varphi(0) > 0, \quad et\ \ x_t(\theta) = x(t+\theta)\ \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

avec $p(.) \in S^pPAP\,(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bornée, $p^- = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} |p(t)|$ et $H \in S^pPAP\,(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Définition 4.2.3. [21, 26]

Une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X},\ (t, u) \mapsto F\,(t, u)$ avec $F\,(., u) \in L^p\,(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ pour tout $u \in \mathbb{X}$, est dite Stepanov-pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $u \in \mathbb{X}$ si l'application $t \mapsto F\,(t, u)$ est Stepanov-pseudo presque périodique pour tout $u \in \mathbb{X}$.

Autrement dit, il existe deux fonctions $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ telles que F s'écrit

$$F = F_1 + F_2$$

avec $F_1^b \in (\mathbb{R} \times \mathbb{X}, L^p\,([0, 1]\,, \mathbb{X}))$ et $F_2^b \in \mathcal{E}\,(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, L^p\,([0, 1]\,, \mathbb{X}))$ où

$$\mathcal{E}\,(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X}) = \left\{ f \in BC\,(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})\,;\ \ \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{t}^{t+1} \|F_2\,(s, u)\|^p\, ds \right) dt = 0 \right\}.$$

L'espace des fonctions $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ S^p-pseudo presque périodiques est noté par S^pPAP.

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions pseudo presque périodiques du modèle (4.14) on aura besoin du théorème de superposition dans les espaces S^pPAP, ce dernier est donné par Diagana [26].

Théorème 4.2.4. *[26]*
Soit $f \in S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Supposons que $f(t,u)$ est lipschitzienne en $u \in \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ tel que

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \tag{4.15}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{X}$.
Si $x \in S^pPAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $f(., x(.)) \in S^pPAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Pour montrer l'existence de solutions pseudo presque périodiques du modèle (4.14), on suppose, en plus de l'hypothèse (**A1**) les hypothèses suivantes

(A4) $H(t,0) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+$, et il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|H(t,u) - H(t,v)| \leq L|u - v|, \tag{4.16}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $u, v \in \mathbb{R}^+$.
(A5) Il existent deux constantes positives $R_1, \ R_2$ telles que

$$\begin{cases} R_2 \geq \max\Big(\frac{1}{a^+}, \frac{1}{a^- e(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}\Big), & \text{si} \quad \text{p>1} \\ \\ R_2 \geq \max\Big(\frac{1}{a^+}, \frac{e^{\delta}}{a^- e(1-e^{-\delta})}\|p\|_{S^1}\Big) & \text{si} \quad \text{p=1}, \end{cases}$$

et

$$R_1 \leq \frac{1}{\delta}\Big(R_2 p^- e^{-a^+ R_2} - L\|\phi\|_\infty\Big).$$

Le Lemme suivant est indispensable pour la preuve du théorème d'existence de solution pseudo presque périodique de l'équation (4.14).
Lemme 4.2.5.
*Supposons que les hypothèses **(A1)**, et **(A4)** sont vérifiées. Si $\phi \in S^pPAP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ alors*

$$\Gamma_\phi : t \longmapsto \Gamma_\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} F(s) ds \in PAP(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+),$$

où $F(s) = p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - H(s, \phi(s-\sigma))$.

Démonstration.

Grâce aux propriétés des fonctions Stepanov pseudo presque et le théorème de superposition 4.2.4, la fonction F est Stepanov pseudo presque périodique. Ainsi la preuve de ce Lemme repose sur les mêmes arguments que ceux dans la démonstration du Lemme 4.2.1.

Enoncçons maintenent le résultat d'existence et d'unicité de solution pseudo presque périodique.

Théorème 4.2.6.
*On suppose que les hypothèses **(A1)**, **(A4)** et **(A5)** sont satisfaites. Si de plus l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1. *Pour $1 < p < \infty$ et q l'exposant conjugué de p nous avons*

$$\frac{e^{-2}}{a^-(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}+\frac{L}{\delta}<1. \tag{4.17}$$

2. *Pour $p=1$ nous avons*

$$\frac{e^{\delta-2}}{1-e^{-\delta}}\|p\|_{S^1}+\frac{L}{\delta}<1. \tag{4.18}$$

Alors l'équation (4.14) possède une unique solution pseudo presque périodique unique dans la région

$$\mathbb{B}=\{x\in PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}),\ R_1\leq x(t)\leq R_2\}.$$

Démonstration.

Par définition, $\mathbb{B}$ est un sous ensemble convexe et fermé de $PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

Montrons que l'opérateur Γ, envoie $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.

Soit $\phi\in\mathbb{B}$, par le lemme 4.2.5 $\Gamma_\phi\in PAP(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que

$$R_1\leq\Gamma_\phi(t)\leq R_2.$$

En utilisant le fait que $\sup\limits_{u\geq0} ue^{-u}=\frac{1}{e}$, on aura pour $\phi\in\mathbb{B}$ et $\forall t\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\phi(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\Big[p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)}-H(s,\phi(s-\sigma))\Big]ds\\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}p(s)\phi(s-\tau)e^{-a^-\phi(s-\tau)}ds\\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a^-e}ds\\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a^-e}ds.
\end{aligned}$$

Si $1<p<\infty$ et q l'exposant conjugué de p, en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma_\phi(t) &\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-q\delta(t-s)}ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|p(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\delta k}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}\\
&\leq \frac{1}{a^-e(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^{\delta q}-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p}\leq R_2.
\end{aligned}$$

Si $p=1$ on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_\phi(t) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a^-e}ds\\
&\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k\geq 1}\Big(\sup_{t-k\leq s\leq t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\Big)\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|p(s)|ds\Big)\\
&\leq \frac{1}{a^-e}\sum_{k\geq 1} e^{-\delta(k-1)}\|p\|_{S^1}\\
&\leq \frac{e^\delta}{a^-e(1-e^{-\delta})}\|p\|_{S^1}.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse **(A5)**, il vient que pour tout $1\leq p<\infty$

$$\Gamma_\phi(t)\leq R_2.$$

Pour la seconde inégalité, on a va utiliser le fait $\underset{1\leq u\leq m}{min}\ ue^{-a^+u}=me^{-a^+m}$.

Par les hypothèses **(A1)** et **(A4)** on a $\forall\phi\in\mathbb{B}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\phi(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}p(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)} - \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}H(s,\phi(s-\sigma))ds\\
&\geq \frac{R_2p^-}{\delta}e^{-a^+R_2}-\frac{L}{\delta}\|\phi\|_\infty\\
&= \frac{1}{\delta}\Big(R_2p^-e^{-a^+R_2}-L\|\phi\|_\infty\Big)\\
&\geq R_1.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse **(A5)**, on en déduit que

$$\Gamma_\phi(t)\geq R_1.$$

Ceci implique que Γ envoie $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.

Montrons maintenant que Γ est une contraction de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.

Soit $\phi,\psi\in\mathbb{B}$ alors $\forall t\in\mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}
|\Gamma_\phi(t)-\Gamma_\psi(t)| &= \Big|\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\frac{p(s)}{a(s)}\big(a(s)\phi(s-\tau)e^{-a(s)\phi(s-\tau)}-a(s)\psi(s-\tau)e^{-a(s)\psi(s-\tau)}\big)\\
&- \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}H(s,\phi(s-\sigma))-H(s,\psi(s-\sigma))ds\Big|.
\end{aligned}$$

Sachant $\sup\limits_{u\geq 1}|\frac{1-u}{e^u}|=\frac{1}{e^2}$, le théorème des accroissements finis donne

$$\begin{aligned}
|ue^{-u}-ve^{-v}| &= \Big|\frac{1-(u+\theta(v-u))}{e^{u+\theta(v-u)}}\Big||u-v|\\
&\leq \frac{1}{e^2}|u-v| \text{ où } u,v\in[1,+\infty[\ et\ 0<\theta<1.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}|\Gamma_\phi(t) - \Gamma_\psi(t)| &\leq \frac{1}{a^- e^2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}|p(s)|\|\phi-\psi|\|_\infty ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}|H(s,\phi(s-\sigma)) - H(s,\psi(s-\sigma))|ds.\end{aligned}$$

Pour $1 < p < \infty$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, l'inégalité de Hölder, l'hypothèse **(A5)** et le fait que $\|.\|_{S^p} \leq \|.\|_\infty$ donnent

$$\begin{aligned}|\Gamma_\phi(t) - \Gamma_\psi(t)| &\leq \frac{1}{a^- e^2}\sum_{k\geq 1}\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-\delta(t-s)}|p(s)|\|\phi-\psi\|_\infty ds \\ &+ L\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds\|\phi-\psi\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{a^- e^2}\sum_{k\geq 1}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1} e^{-q\delta(t-s)}ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|p(s)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\|\phi-\psi\|_\infty + \frac{L}{\delta}\|\phi-\psi\|_\infty\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|\Gamma_\phi - \Gamma_\psi\|_\infty &\leq \frac{1}{a^- e^2}\sum_{k\geq 1} e^{-\delta k}\Big(\frac{e^q - 1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}||p||_{S^p}\|\phi-\psi\|_\infty + \frac{L}{\delta}\|\phi-\psi\|_\infty \\ &\leq \Big(\frac{1}{a^- e^2(1-e^{-\delta})}\Big(\frac{e^q-1}{\delta q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|p\|_{S^p} + \frac{L}{\delta}\Big)\|\phi-\psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Pour $p = 1$ on a $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}|\Gamma_\phi(t) - \Gamma_\psi(t)| &\leq \frac{1}{e^2}\sum_{n\geq 1}\Big(\sup_{t-k\leq s\leq t-k+1} e^{-\delta(t-s)}\Big)\Big(\int_{t-k}^{t-k+1}|p(s)|ds\Big)\|\phi-\psi|\|_\infty + \frac{L}{\delta}\|\phi-\psi\|_\infty \\ &\leq \Big(\frac{1}{e^2}\sum_{n\geq 1} e^{-\delta(n-1)}\|p\|_{S^1} + \frac{L}{\delta}\|\phi-\psi\|_\infty \\ &\leq \Big(\frac{e^{\delta-2}}{1-e^{-\delta}}\|p\|_{S^1} + \frac{L}{\delta}\Big)\|\phi-\psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\|\Gamma_\phi - \Gamma_\psi|\|_\infty \leq \Big(\frac{e^{\delta-2}}{1-e^{-\delta}}\|p\|_{S^1} + \frac{L}{\delta}\Big)\|\phi-\psi\|_\infty.$$

Par les conditions (4.17), (4.18), Γ est une contraction sur $\mathbb{B}$ à valeurs dans $\mathbb{B}$. Par le Théorème du point fixe de Banach, on en déduit que Γ possède un unique point fixe dans $\mathbb{B}$. Ainsi l'équation (4.14) possède une unique solution pseudo périodique dans la région $\mathbb{B}$.

□

Conclusion et perspectives

Cette thèse a porté sur l'étude de l'existence de solutions pour deux type de problèmes modélisés par des équations différentielles à retard.

Le premier modèle est un système différentiel avec retards mixtes issu des réseaux de neurones. On a montré à l'aide du théorème du point fixe de Schauder l'existence de solutions asymptotiquement ω-périodiques de ce dernier quand les fonctions d'activation sont asymptotiquement $\omega-$périodiques et hölderiennes. Toujours sous la condition que les fonctions d'activation sont hôlderiennes, on a montré la stabilité asymptotique et exponentielle de ce système. Par la suite, on s'est intéressé à l'existence et l'unicité de solution $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques du même système avec des coefficients $S-$asymptotiquement $\omega-$périodiques et les fonctions d'activations sont supposées lipschitziennes.

Le second modèle est une équation de Nicholson à coefficients Stepanov pseudo presque périodiques avec un terme récolte. Nous avons étudié deux cas : le cas où le terme récolte est linéaire et le cas où il n'est pas linéaire. Grâce à un théorème de superposition et le théorème de point fixe de Banach on a obtenu dans les deux cas des résultats d'existence et d'unicité de solution pseudo presque périodique sous la condition de Lipschitz.

Le modeste travail réalisé dans cette thèse nous ouvre la voie vers d'autres pistes de recherche dans ce domaine où plusieurs questions demeurent encore posées. Comme suite à notre travail, on pourra s'intéresser :

1. La stabilité de la solution $S-$asymptotiquement $\omega-$périodique du modèle du réseau de neurones étudié.
2. Considérer d'autres modèles de réseaux de neurones avec d'autres type de périodicité ou de presque périodicité avec des fonctions d'activation non nécessairement lipschitziennes.
3. Considérer l'équation de Nicholson avec δ une fonction qui dépend de t et qui est d'un certain type de presque périodicité
4. Généraliser les résultats d'existence de solutions pseudo presque périodiques de l'équation de Nicholson au cas où les coefficients sont Stepanov pseudo presque périodiques avec poids.

Bibliographie

[1] A. M. Alimi, C. Aouiti, F. Chérif, F. Dridi, et M. S. M'hamdi, *Dynamics and oscillations of generalized high-order Hopfield neural networks with mixed delays*, Neurocomputing, **321**, 274-295, (2018). 10

[2] L. Amerio and G. Prouse, *Almost-periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1971). 8, 14, 15, 59, 61, 63

[3] B. Amir, L. Maniar, *Composition of pseudo-almost periodic functions and Cauchy problems with operator of non dense domain. Ann. Math. Blaise Pascal. 6(1), 1-11 (1999).* 18

[4] B. Ammar, F. Chérif, A. M Alimi, *Existence and uniqueness of pseudo almost-periodic solutions of recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays, IEEE Transactions on neural networks and learning systems, **23**, no.* 1, 109 – 118, (2011). 10, 17

[5] J. Andres, D. Pennequin. *On the nonexistence of purely Stepanov almost-periodic solutions of ordinary differential equations.* Proc. Am. Math. Soc. 140 (8), 2825-2834 (2012). 10, 59, 61

[6] I. Barbalat, *Systèmes d'equations differentielles d'oscillations nonlineaires.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 4, 267-270, (1959) . 42, 45

[7] M. Baroun, K. Ezzinbi, K. Khalil, L. Maniar, *Pseudo almost periodic solutions for some parabolic evolution equations with Stepanov-like pseudo almost periodic forcing terms*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 462, (1), 233-262, (2018). 10

[8] R. Bellman et Cooke, *Differential-Difference Equations,* Academic Press, (1963). 7, 21

[9] Y. Bénédic, *Approche analytique pour l'optimisation de réseaux de neurones artificiels,* thèse de Doctorat Université de Haute Alsace-Mulhouse, (2007). 25, 27

[10] L. Berezansky, E. Braverman, L. Idels, *Nicholson's blowflies differential equations revisited : main results and open problems*, Appl. Math. Modelling, 34, 1405-1417, (2010) . 58, 59

[11] J. Blot, P. Cieutat, and G. M. N'Guérékata *S-asymptotically w-periodic functions and Applications to evolution equations.* African Diaspora Journal of Mathematics, (2011). 9

[12] H. Bohr, *Zur theorie der fastperiodischen Funktionen I* ; II ; III, Acta Math. 45 (1924), 29(127), H6 (1925), 101-214, HT , 237-281, (1926). 8, 14

[13] H. Brahmi, B. Ammar A. M. Alimi, F. Chérif, F. Dridi, and A.Abraham, *Asymptotically almost automorphic solution of high order recurrent neural networks with mixed delays,* International Journal of Computer Science and Information Security, 07 , 14, (2016). 10

[14] M. Chebbab, and F. Boulahia, *Asymptotically periodic solutions for a differential system with mixed delays,* Mathematics in engineering, science and aerospace, vol 13 N0.1, (2022). 10

[15] F. Chérif, *Pseudo almost periodic solution of Nicholson's blowflies model with mixed delays*, Applied Mathematical Modelling (2015) ; 39. 58, 59

[16] F. Chérif, M. Abdelaziz, *Stepanov-Like Pseudo Almost Periodic Solution of Quaternion-Valued for Fuzzy Recurrent Neural Networks with Mixed Delays* Neural Processing Letters (51), pages 2211-2243(2020). 10, 62

[17] C. Corduneanu, *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Acedemic Press, NewYork (1973). 11, 14, 20

[18] C .Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, 2nd edn. Chelsea, New York, (1989). 8, 15

[19] J. Cronin, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, vol. 11, American Mathematical Soc, (1995). 19, 20, 39

[20] C. Cuevas, J. C. De souza, *$S-$asymptotically $\omega-$periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, applied Mathematics letters, 22, 865-870, (2009). 49

[21] T. Diagana, *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces*, Springer, New York, (2013). 8, 9, 15, 16, 17, 59, 62, 63, 73

[22] T. Diagana, *Stepanov-like pseudo-almost periodicity and its applications to some nonautonmous differential Equations*, Nonlinear Anal. 69(12), 4277-4285 (2008). 8, 9

[23] T. Diagana, *Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces,* Nova Science Publishers, New York, (2007). 8

[24] T. Diagana, *Pseudo almost periodic solutions to some differential equations, Nonlinear Anal*, 60(7) : 1277–1286, (2005).

[25] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic functions and applications, C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(10) : 643–646, (2006). 8

[26] T. Diagana, *Stepanov-like pseudo-almost periodicity and its applications to some nonautonomous differential equations, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 69(8) : 4277–4285, (2008).

[27] T. Diagana, K. Ezzinbi and M. Miraoui, *Pseudo-almost periodic and pseudo-almost automorphic solutions to some evolution equations involving theoretical measure theory,* CUBO A Mathematical Journal , 16 :2 , 1–31, (2014). 17, 62, 73, 74

[28] W. Dimbour and M. G. N'géuérekata, *$S-$asymptotically $\omega-$periodic solutions to some classes of partial evolution equations,* Applied Mathematics and Computation, Elsevier, vol. 218, no14 7622-7628, (2012).

[29] W. Dimbour and S. Mawaki, *Asymptotically ω-periodic solution for an evolution differential equation via ω-periodic limit functions*, International Journal of Pure and Applied Mathematics **113** , no. 1, 59–71, (2017). 9

[30] W. Dimbour and S. Mawaki, *Asymptotically ω-Periodic Functionsin the Stepanov Sense and Its Application for an Advanced Differential Equation with Piecewise Constant Argument in a Banach Space*, Mediterranean Journal of Mathematics , 15-25, (2018) . 9, 10, 11, 12, 13, 14, 31

[31] H. Ding, J. Liang, G. M. N'Guérékata and T. Xiao, *Mild pseudo almost periodic solutions of nonautonomous semilinear evolution equations, Math. Comput. Modelling*, 45(5-6) : 579–548, (2007). 8, 9, 11

[32] H. Ding, W. Long, and G. M. N'Guérékata. *Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with stepanov almost periodic coefficients, J. Comput. Anal. Appl.*, 13(2) : 231–242, (2011).

[33] H. Ding, W. Long and G. M. N'Guérékata. *Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with Stepanov almost periodic coefficients.* Journal of Computational Analysis and Applications, 13 : 231–243, (2011)

[34] J. P. C. Dos sontos, H. Henriquez, *Existence of $S-$asymptotically $\omega-$periodic solutions to abstract integro-differential equations,* Applied Mathematics and Computation 256, 109 – 118, (2015).

[35] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, I. General theory,* Intersci. Publ., New York-London 6 (1958). 59

[36] L. Duan and L. Huang, *Pseudo almost periodic dynamics of delay Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term*, Mathematical Methods in the Applied sciences-12 pages (April 2014). 49

[37] K. Ezzinbi, K. Khalili, and AAK. Dianda, *Stepanov ergodic perturbation for nonautonomous evolution equations in Banach space,* arXiv ; 19, (2020). 19

[38] Z. Fan, J. Liang, and T. J. Xiao, *On Stepanov-like (pseudo) almost automorphic functions*, Nonlinear Anal. (74), 2853-2861 (2011). 58, 59

[39] A. M. Fink ; *Almost Periodic Differential Equations,* Lectures Notes in Mathematics no377, Springer-Verlag, Berlin, (1974). 10

[40] S. Grossberg, *Nonlinear Neural Networks : Principles, Mechanisms, and Architectures.* IEEE Trans. Syst.Man Cybern. 13(4), 815 – 826 (1983).

[41] K. Gopalsamy, *Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterrac system,* J. Austral. Math. Soc. Ser. B 27, 66 – 72, (1985).

[42] K. Gopalsamy, *Global asymptotic stability in an almost periodic Lotka-Volterrac system,* J. Austral. Math. Soc. Ser. B 27, 346 – 360, (1986). 14, 15

[43] K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics,* In Kluwer Academic Publishers, Volume 74 (1992). 29

[44] Z. Gui, X. Ge, and X.S. Yang, *Periodic oscillation for a Hopfield neural networks with neutral delays.* ScienceDirect, Physics Letters A 364 (2007).

[45] W. Gurney, S. Blythe and R. Nisbet, *Nicholson's blowflies revisited.* Nature ; 287 : 17 − 21, (1980).

[46] G. Haiyin, W. Ke, W. Fengying, and D. Xiaohua, *Massera-type theorem and asymptotically periodic logistic equations*, Nonlinear analysis : real world applications , *no.* 5, 1268 − −1283, **7** (2006). 45

[47] J.K. Hale, *Theory of Functional Difféerential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1977). 10

[48] H. R. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *On* S-*asymptotically* ω-*periodic functions on Banach spaces and applications,* J. Math. Appl. Anal. **343** , 1119–1130, (2008). 10, 21, 59

[49] A. L. Hodgkin et A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve* , The Journal of Physiology, vol. 117, (no 4), , p. 500–544 (ISSN 0022-3751), (1952). 8, 9, 11, 51

[50] Hopfield, J.J., Tank, D.W. , *Neural computation of decisions in optimization problems.* Biological Cybernetics 52(3), 141–152 (1985). 7, 24

[51] H. Huang, J. Cao and J. Wang, *Global exponential stability and periodic solutions of recurrent neural networks with delays,* Physics Letters A, 298(5-6), 393-404, (2002). 8, 9, 11, 12, 41, 49, 50, 51

[52] Z. Huang, *Almost periodic solutions for fuzzy cellular neural networks with multi-proportional delays,* International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 8(4), 1323-1331, (2017).

[53] G. E. Hutchinson, *Circular casual systems in ecology,* Ann. New Work, Acad. Sci, 50, 221, (1948). 25, 26

[54] H. A. Jalab and R. W. Ibrahim, *Almost-periodic solution for BAM neural networks,* Surveys in Mathematics and its Applications, 4, 53-63, (2009). 28

[55] M. Kostić, *Almost Periodic and Almost Automorphic Solutions to Integro-Differential Equations,* W. de Gruyter, Berlin, (2019).

[56] A. Kufner, O. John, and S. Fucik, *Function spaces.* From the Czech., Monographs and Textsbooks on Mechanics of Solids and Fluids. Mechanics : Analysis. L eyden : Noordhoff International Publishing. Prague : Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences. XV, 454 p. Dfl. 120.00 (1977).

[57] J. Lasalle, S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method with applications.* New York : Academic Press (1961). 20

[58] B. M. Levitan, *Almost-Periodic Functions.* G.I.T.- T.L., (1959).

[59] B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost Periodic Functions and Differential Equations,* Cambridge Univ. Press, London, (1982).

[60] H. Li, F. Huang, J. Li, *Composition of pseudo almost periodic functions and semilinear differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. (255) 436-446, (2001). 66

[61] J.W. Li, C.X. Du, *Existence of positive periodic solutions for a generalized Nicholsons blowflies model*, J. Comput. Appl. Math. 221 (1) 226-233, (2008) .

[62] W.T. Li, Y.H. Fan, *Existence and global attractivity of positive periodic solutions for the impulsive delay Nicholsons blowflies model*, J. Comput. Appl. Math. 201 (1) 55-68, (2007). 8

[63] W. Long, H. Ding, *Composition Theorems of Stepanov Almost Periodic Functions and Stepanov-Like Pseudo-Almost Periodic Functions.* Advances in Difference Equations Volume ; 12 pages, (2011). 59, 61

[64] F. Long, *Positive almost periodic solution for a class of Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term,* Nonlinear Analysis : Real World Applications 13 686-693, (2012) 16

[65] Md. Maqbul , *Almost periodic solutions of neutral functional differential equations with Stepanov-almost periodic terms.* Electron. J. Differ. Equ. 2011(72), 1-9 (2011) . 10, 59

[66] M. Miraoui, D. Repovs, *Dynamics and oscillations of models for differential equations with delays,* boundary value problems, 54, (2020). 58, 59

[67] M. S. M'hamdi, *On the Weighted Pseudo Almost-Periodic Solutions of Static DMAM Neural Network,* Neural Processing Letters, 1-22, (2022).

[68] A.N. Michel, J.A. Farrell, W. Porod , *Qualitative analysis of neural networks.* IEEE Transactions on Circuits and Systems 36(2), 229–243 (1989). 58, 59

[69] Z. Hu, A. B. Mingarelli, *Bochner's theorem and Stepanov almost periodic functions,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **187** , 719–736, (2008).

[70] A.J. Nicholson, *An outline of the dynamics of animals populations, Australian*, J.Zool. 2.(1954).

[71] S. Nicola, M. Pierri, *A note on $S-$asymptotically $\omega-$periodic functions,* Nonlinear Anal., Real World Applications (2008).

[72] M. Pierri and V. Rolnik, *On pseudo $S-$asymptotically periodic functions.* Bulletin of the Australian Mathematical Society 87(2) , 238–254, (2013). 25, 29

[73] O. Polossuchin, *Aber eine Besondere Klasse von Differentialen Funktionalgleichungen,* Inaugural Dissertation, Zurich, (German), (1910).

[74] L. Radovà, *Theorems of Bohr-Neugebauer-type for almost-periodic differential equations,* Mathematica Slovaca, Vol. 54 , No. 2, 191–207 (2004). 58

[75] Y. Raffoul, *Analysis of periodic and asymptotically periodic solutions in nonlinear coupled Volterra integro-differential systems.* Turkish Journal of Mathematics 42 : 108- 120, (2018). 9, 49

[76] A S Rao, *On the Stepanov-almost periodic solution of a second-order operator differential equation,* Proc Edinb Math Soc 19(3) :261-263, (1975).

[77] S.H. Saker, B.G. Zhang, *Oscillation in a discrete partial delay Nicholsons blowflies model*, Math. Comput. Modelling 36 (9-10) 1021-1026, (2002). 20

[78] E. Schmidt, *Aber eine Klasse linearer funktionaler differentialgleichungen,* Math. Ann. 70 , 499-524, (German), (1911) .

[79] W. Stepanoff,*Über einige verallgemeinerungen der fast periodischen funktionen* Mathematische Annalen, 95(1) : 473–498, (1926).

[80] N. E Tatar, *Neural networks with delayed Hölder continuous activation functions*, Int. J. Artificial Intelligence Mechatronics **2** no. 6, 156–160, (2014). 62

[81] N. E Tatar,*Neural networks with delayed Hölder continuous activation functions*, Miskolc Mathematical Notes **19** , no. 1, 631–640, (2018). 10, 59

[82] C. Touzet . *les réseaux de neurones artificiels, introduction au connexionnisme*. Ec2, . 9, 13, (1992). 20

[83] Z. Xia , Pseudo asymptotically periodic solutions for Volterra integro-differential equations. Wiley Online Library, (2013). 8, 59

[84] Z. Xia, *Asymptotically periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations,* Advances in Difference Equations,(2014). 10, 41

[85] Z. Xia, *Pseudo asymptotically periodic solutions for Volterra integro-differential equations.* Mathematical methods in applied sciences (2013). 10, 41, 42

[86] H. Xiang, J.Cao, *Almost periodic solutions of recurrent neural networks with continuously distributed delays*, Nonlinear analysis, **71** , 6097-6108, (2006). 25, 29

[87] R. Xie, and C. Zhang, *Space of $w-$Periodic Limit Functions and Its Applications to an Abstract Cauchy Problem*, Journal of Function spaces (2015).

[88] R. Xie, and C. Zhang, *Criteria of asymptotic ω-periodicity and their applications in a class of fractional differential equations*, Advances in Difference Equations , no. 1, 68, (2015).

[89] C. Xu and Q. Zhang, *On anti-periodic solutions of a shunting inhibitory cellular neural networks with distributed delays.* Journal of Applied Mathematics and Computing, 1–13, (2015).

[90] V. Volterra, *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, J. de Mathématiques 7 , 249-298,(1928). 10

[91] F.Y. Wei, K. Wang, *Asymptotically periodic Logistic equation*, J. Biomath , **19** , no. 4, 399–405, (2005). 8, 11, 12, 13

[92] Z. Yang, *Global existence and exponential stability of periodic solutions for recurrent neural networks withfunctional delay*, Mathematical methods in the applied sciences **30** 1775-1790 (2007). 9, 11, 12, 13

[93] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, applied mathematical sciences 14, (1975). 10

[94] T. Yoshizawa, *Extreme Stability and Almost Periodic Solutions of Functional-Differential Equations*, (1964). 7, 20

[95] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations.*, J. Math. Anal. Appl. **181**, no. 1, 62-76 (1994).

[96] J-Y. Zhao, H. Ding, et G.M. Nguérékata,*$S-$asymptotically periodic solutions for anepidemic model with superlinear perturbation*, Advances in Difference Equations, 2016 :221, (2016).