MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : ANALYSE FONCTIONNELLE

Présentée par :

Yamina Yagoub-Zidi

Sujet :

Inconditionnalité et propriétés du point fixe dans les espaces de fonctions lisses

Devant le jury d'examen composé de :

M. Aidène Mohamed ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
M. Morsli Mohamed ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
M. Godefroy Gilles ;	Directeur de recherche au CNRS ;	UPMC Paris 6 ;	Rapporteur
M. Mezrag Lahcène ;	Professeur ;	Univ. M'sila ;	Examinateur
M. Kessi Arezki ;	Professeur ;	U.S.T.H.B ;	Examinateur
M. Bedouhene Fazia ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Examinateur

Soutenue le : 24/02/2014

Remerciements

Ma reconnaissance va tout d'abord à mon directeur de thèse Mohamed Morsli pour m'avoir encouragé à reprendre le travail de recherche après une longue absence. Je le remercie pour sa disponibilité, ses conseils, l'intérêt qu'il porte à mon travail et pour toute l'aide qu'il m'a apportée dans les démarches administratives pour permettre aussi bien mon détachement à Paris 6 que ma soutenance.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude et toute ma reconnaissance envers Gilles Godefroy, mon codirecteur de thèse à l'université de Paris 6, qui m'a guidée avec autant de disponibilité que d'attention et sans qui cette thèse et le travail qu'elle représente n'auraient pas vu le jour. Je le remercie de m'avoir accordé sa confiance, pour m'avoir offert l'opportunité de travailler avec lui au sein de l'équipe d'analyse de l'IMJ ; ce qui fut un immense plaisir et un grand honneur pour moi. Avec ses grandes qualités scientifiques et humanitaires, il m'a initiée au monde des espaces de Banach avec beaucoup de patience et a su m'encourager dans les périodes difficiles ; c'est très peu de dire que j'ai énormément appris à son contact. Je le remercie pour toute l'énergie et tout le temps qu'il m'a consacrés.

Je suis très honorée que Mohamed Aidene ait accepté de présider mon jury. Je le remercie de vouloir examiner mon travail.

Je remercie Lahcène Mezrag, Arezki Kessi et Fazia Bedouhene de l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner mon travail de thèse.

La majeure partie de cette thèse a été effectuée, durant mon détachement à l'université de Paris 6. Je remercie l'équipe d'analyse de l'IMJ pour son hospitalité et pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié. Je remercie particulièrement Yves Raynaud qui de plus s'est montré disponible pour répondre à mes interrogations sur les Orlicz.

Je n'oublie pas Mohand Arezki Boudiba, collègue de longue date, toujours désireux et respectueux des mathématiques. Je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance pour m'avoir intégrée dans son équipe de travail. Je le remercie ainsi que les membres de l'équipe en particulier mon amie Dehbia et Fetima pour l'intérêt particulier qu'ils portent à l'aboutissement de ma thèse.

Enfin, toute mon affection va à ma mère, mes enfants et mon époux. Je leur dédie cette thèse à laquelle ils ont participé plus qu'ils ne le pensent.

Table des matières

Introduction

Cette thèse qui s'inscrit dans la théorie isométrique des espaces de Banach concerne certaines propriétés linéaires et les propriétés du point fixe.

Définition. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, C un convexe fermé borné de X. On appellera contraction sur C toute application $T : C \mapsto C$ vérifiant

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in C$$

On dira que X a la propriété du point fixe (en abrégé X a fpp) si pour tout convexe fermé borné C de X, toute contraction T sur C admet un point fixe (c.à.d. $\exists x \in C \; t.q \; : T(x) = x$).
On dira que X a la propriété faible du point fixe (en abrégé X a $wfpp$) si pour tout convexe faiblement compact C de X, toute contraction T sur C admet un point fixe.
Il est clair que si X a fpp alors X a $wfpp$ et que fpp et $wfpp$ coïncident pour un espace de Banach réflexif.
Les questions suivantes ont donné lieu à plusieurs travaux depuis 1965 :
1. Si X est un espace de Banach réflexif, X a t-il fpp ?
2. Quelles sont les propriétés isométriques des espaces de Banach qui impliquent $wfpp$?
3. Un espace de Banach qui a fpp, est-il nécessairement réflexif ?
Les espaces non réflexifs $l^1(\mathbb{N})$ et $c_0(\mathbb{N})$ munis de leurs normes usuelles n'ont pas la fpp, (voir [27]). Ainsi tous les espaces de Banach contenant des copies isométriques de $l^1(\mathbb{N})$ ou de $c_0(\mathbb{N})$ n'ont pas fpp, en particulier les espaces classiques L^1, L^∞ et $\mathcal{C}([0,1])$ n'ont pas la fpp. Mais jusqu'à nos jours, on n'a pas trouvé d'espace de Banach réflexif sans fpp ; on n'a pas de réponse à la première question.
La troisième question a suscité une autre question (voir [20]) : Existe t-il des renormés de $l^1(\mathbb{N})$ ou de $c_0(\mathbb{N})$ qui ont fpp ? Plus récemment, P.K. Lin a montré dans [61] que $l^1(\mathbb{N})$ peut être renormé pour avoir fpp. Ceci répond par la négation à la troisième question.

Il est connu que l'espace L^1 n'a pas non plus $wfpp$ [4] mais que tous les sous-espaces réflexifs de L^1 (qui sont super-réflexifs) ont $wfpp$ [62]. Ce qui a relancé la question qui reste ouverte jusqu'à nos jours : Est-ce que tous les super-réflexifs ont $wfpp$? Pour certains super-réflexifs (ce qui rentre dans le cadre de la deuxième question) on dispose des réponses affirmatives, à savoir les espaces de Banach uniformément convexes ([8], [41]) , les espaces de Banach réflexifs ayant la structure normale [51] (voir aussi [27]) et les espaces de Banach qui sont uniformément non-carrés (nonsquare en anglais) [26] ; c'est le cas des espaces L^p ou l^p avec $p > 1$ et des espaces d'Orlicz réflexifs. On rappelle, aussi, que plus récemment il a été montré [21] que les espaces de Banach dont la boule unité du dual est préfaiblement séquentiellement compacte et qui possèdent la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme ($W^\star$-UKK) ont $wfpp$ ce qui implique par dualité (voir [23], proposition 36) que les espaces de Banach séparables dont la norme est asymptotiquement uniformément lisse ont $wfpp$. Maurey, dans [62], a utilisé les ultra-produits et des techniques probabilistes pour montrer que les sous-espaces réflexifs de L^1 ont $wfpp$ et a aussi montré que $c_0(\mathbb{N})$ a $wfpp$. Notons que ce dernier n'est pas réflexif mais possède une base 1-inconditionnelle.

Base inconditionnelle. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach. Une suite $\{e_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de X est dite base de Schauder si pour tout $x \in X$, il existe une suite de scalaires unique $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que : $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n \quad$ avec $\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\| = 0.$

Une base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de X est inconditionnelle si pour tout choix de signe $\theta = (\theta_n)_{n\geq 1} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ implique celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n$.

On pose

$$\lambda = \sup\{\| \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n\| \ ; \ \| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n\| = 1 \ , \theta_n = \pm 1; \}.$$

Si la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est inconditionnelle, la constante λ (qui est finie) est appelée constante d'inconditionnalité de la base et on dira que la base $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ est λ-inconditionnelle.
Pei-Kee Lin [59] et Khamsi [50] ont montré, en utilisant la technique des ultraproduits développée par Maurey dans [62], que les espaces de Banach qui sont à base λ-inconditionnelle avec λ suffisamment proche de 1 ont la $wfpp$. Au cours de cette thèse on observe comme conséquence de ce résultat que tout espace qui se plonge dans un espace de Banach à base 1-inconditionnelle avec une distorsion $1 + \epsilon$, pour tout ϵ, possède la $wfpp$. En s'appuyant sur des travaux récents de Cowell-Kalton et Godefroy([14],[32]) concernant les plongements de certains espaces de Banach dans un espace de Banach à base 1-inconditionnelle, on montre la $wfpp$ pour une importante classe d'espaces de fonctions lisses, en particulier

pour certains espaces de Müntz définis ci-dessous.
Espaces de Müntz ([43],[1]). Soient $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels telle que : $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ et $M_\Lambda = vect\{t^{\lambda_k};\ k \in \mathbb{N}\}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions t^{λ_k} définies sur l'intervalle $[0,1]$. On note M_Λ^E, la fermeture de M_Λ dans un espace de Banach E contenant M_Λ. Le théorème de Müntz classique, pour $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de sa norme naturelle, affirme que $M_\Lambda^E = E$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$.
Quand $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, les nouveaux espaces M_Λ^E obtenus sont appelés espaces de Müntz.
Si de plus la suite des $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ est formée d'entiers naturels alors, d'après le théorème de Clarkson-Erdös-Schwartz, $\forall f \in M_\Lambda^{\mathcal{C}([0,1])}$, f est analytique sur l'intervalle $[0,1[$.
Les théorèmes de Müntz et de Clarkson-Erdös-Schwartz se généralisent à un espace de Köthe E de fonctions sur $[0,1]$ faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation : pour chaque $\rho \in]0,1[$, l'opérateur de blow-up T_ρ défini par $T_\rho(f)(t) = f(\rho t)$ est tel que $T_\rho(E) \subset E$ et de plus $\limsup_{\rho\to 1} \|T_\rho\|_E < \infty$. C'est le cas pour $E = L^p([0,1]); 1 \leq p < \infty$ ou $E = L^\Phi([0,1])$, $\Phi \in \Delta_2$, voir ([58], p.120 et p.130).

La réflexivité n'étant, désormais, pas nécessaire pour la fpp, la recherche de classes plus larges d'espaces de Banach pour lesquels fpp implique la réflexivité se poursuit. Dans cette démarche on retrouve les concepts suivants.
Copie asymptotique de l^1. On dit qu'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ est asymptotiquement l^1, si on peut trouver une suite (ε_n) dans]0,1[qui décroît vers zéro et une suite (x_n) d'éléments de la sphère unité S_X de X tels que :

$$\sum_{n\geq 1}(1-\varepsilon_n)|\alpha_n| \leq \|\sum_{n\geq 1}\alpha_n x_n\| \leq \sum_{n\geq 1}|\alpha_n|, \text{ pour toute suite } (\alpha_n) \in l^1(\mathbb{N}).$$

Le concept de copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$ a été introduit par J. Hagler dans [44] et plus récemment il a été plus particulièrement utilisé et développé par Dowling, Lennard et Turett en théorie du point fixe. En effet Dowling et Lennard ont montré, dans [18], qu'un espace de Banach qui est asymptotiquement l^1 n'a pas la fpp.
Il s'ensuit que pour certains espaces de Banach classiques la fpp implique la réflexivité. C'est, notamment, le cas des sous-espaces de L^1 et de certains espaces d'Orlicz ([18] ,[19]).
Norme octaédrale. On dit que la norme $\|\ .\ \|$ sur un espace de Banach X est octaédrale (ou que l'espace $(X, \|\ .\ \|)$ est octaédral) si pour tout sous-espace F de dimension finie de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe y dans la sphère unité S_X de X tel que pour chaque $x \in F$, on a : $\|x + y\| \geq (1-\varepsilon)(1 + \|x\|)$.

On déduit du principe de la réflexivité locale qu'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ est octaédral dès qu'il vérifie la propriété : il existe $u \in X^{**}, u \neq 0$ tel que $\|u+x\| = \|u\|+\|x\|,\ \forall x \in X$.
Espace L-facteur et u-facteur. Un espace de Banach X est dit inconditionnellement complémenté dans son bidual s'il est l'image d'une projection P définie sur X^{**} telle que $\| I - 2P \| = 1$. On écrit, dans ce cas, $X^{**} = X \oplus_u X_s$ avec $X_s = KerP$ et on dira tout simplement que l'espace de Banach X est un u-facteur.
Si la projection P satisfait $\|x + z\| = \|x\| + \|z\|,\ \forall x \in X, \forall z \in KerP$ on dira que X est un L-facteur et on écrira $X^{**} = X \oplus_1 X_s,\ \ X_s = KerP$.
Il est clair que les espaces non réflexifs qui sont L-facteurs sont octaédraux et il est bien connu que la classe des espaces octaédraux est strictement plus large.
En s'appuyant sur un théorème profond dû a Maurey [63], nous montrons dans cette thèse que tout sous-espace non réflexif d'un espace de Banach séparable L-facteur est octaédral. La preuve du théorème de Maurey étant très complexe, il est naturel de chercher à montrer, en utilisant des arguments simples et autonomes, le même résultat pour les espaces u-facteurs ayant une certaine structure. Notons que le même résultat a été montré par G. Godefroy et D. Li dans [38] dans le cas où $X = L^1(\mu)$. Le cadre naturel de généralisation des résultats obtenus dans [38] est celui des lattices de Banach faiblement séquentiellement complets (en abrégé f.s.c.), sachant la représentation de ces derniers comme des espaces de Köthe de fonctions sur un espace de probabilité ([58], Théorème1.b.14).
Il est montré dans ([65], Corollaire 4) que chaque sous-espace non réflexif d'un espace L-facteur est asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$. En particulier les sous-espaces non réflexifs d'un espace L-facteur n'ont pas la fpp. On retrouve ce résultat en montrant, plus généralement, que tout espace octaédral est asymptotiquement l^1. On fournit, par la même occasion, l'existence d'une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$ qui n'est pas octaédrale ce qui répond par la négation à la question posée dans [65].
Les résultats signalés et d'autres sont répartis dans les chapitres 2, 3 et 4 de cette thèse, qui est composée de 4 chapitres, comme suit :

Dans le chapitre 1, sont regroupés les notations, les résultats élémentaires et les outils indispensables utilisés tout au long de ce mémoire. Nous y introduisons les espaces de Banach classiques et les espaces de Banach lattices , nous présentons les notions d'espace de Banach L-facteur, u-facteur et de norme octaédrale avec des exemples parfois détaillés et des justifications (qu'on ne trouve pas dans la littérature) pour certains résultats.

Le chapitre 2 est consacré aux propriétés isométriques des sous-espaces non réflexifs des espaces de Banach u-facteurs et L-facteurs avec un intérêt particulier pour les sous-

espaces des lattices de Banach faiblement séquentiellement complets qui représentent un cas important d'espaces u-facteurs. Avant d'énoncer notre premier résultat, dans ce chapitre, on rappelle que Maurey, dans [63] (Remarque 2.8.) affirme que :
si X est un espace de Banach séparable et T est un plongement isomorphique de $l^1(\mathbb{N})$ dans X, alors, il existe $x^{**} \in l^1(\mathbb{N})^{**}$ tel que $T^{**}x^{**} \neq 0$ et $\| T^{**}x^{**}+x \|=\| T^{**}x^{**}-x \|, \forall x \in X$.

Sachant que tout sous-espace non réflexif d'un espace de Banach u-facteur contient une copie isomorphique de $l^1(\mathbb{N})$, nous montrons, en utilisant le résultat de Maurey précédent et un lemme intermédiaire, la proposition suivante.

Proposition A
Soit X un espace de Banach séparable u-facteur de son bidual : $X^{**} = X \oplus_u X_s$.
Si Y est un sous-espace non réflexif de X alors $Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}$.

Maurey avait souligné, dans [63], la nécessité de la séparabilité de l'espace X de son théorème. En passant par la notion de sous-espace 1-normant, on montre la proposition suivante qui fournit un autre contre exemple :
Proposition B. *Il existe un espace de Banach X isomorphe à $l^1(\mathbb{N}) \oplus l^2(\Gamma)$ pour lequel il n'existe pas dans X^{**}, d'élément $x^{**} \neq 0$ tel que $\|x^{**} + x\| = \|x^{**} - x\|$, $\forall x \in X$.*

Par suite nous proposons une preuve simple et autonome du résultat de la Proposition **A** dans le cas (important) où X est un lattice de Banach faiblement séquentiellement complet. Nous commençons par montrer quelques lemmes et proposition en utilisant la représentation des lattices de Banach faiblement séquentiellement complets comme des espaces de Köthe de fonctions sur un espace de probabilité ([58], Théorème 1.b.14, Théorème 1.c.4) et des outils de la théorie de la mesure. Nous obtenons la proposition suivante qui représente le premier résultat essentiel de ce chapitre.

Proposition C. *Soit X un lattice de Banach f.s.c. : $X^{**} = X \oplus_u X_s$,*
Si Y est un sous espace non réfléxif de X, alors $Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}$.

Pour souligner l'importance de l'hypothèse sur l'inconditionnalité de la projection dans la proposition **A**, nous établissons la proposition suivante
proposition D. *Il existe un espace de Banach X tel que,*
1) X est un dual : $X^{**} = X \oplus X_s$ avec X_s w^*-fermé.
2) X contient un sous-espace Y non réflexif tel que $Y^{\perp\perp} \cap X_s = \{0\}$.
De la proposition **A**, on déduit le théorème suivant, qui représente le deuxième résultat

essentiel de ce chapitre :
Théorème A. *Soit X un espace de Banach séparable L-facteur : $X^{**} = X \oplus_1 X_s$.*
Si Y est un sous-espace non réflexif de X, alors Y est octaédral.

Le chapitre 3 peut être considéré comme une contribution dans le cadre de la deuxième question. Notre point de départ est le théorème de P. K. Lin suivant :
Théorème de P.K.Lin [59]. *Soit X un espace de Banach. Si X admet une base λ-inconditionnelle avec $\lambda < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$, alors X a la $wfpp$.*

Tout d'abord nous observons la propriété suivante :
Propriété A.
Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle $\{e_n\}_{n\geq 1}$. Si Y est un espace de Banach isomorphe à X alors Y admet une base inconditionnelle. Plus précisément, si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est une base λ-inconditionnelle de X et $T : X \to Y$ est un isomorphisme, alors la suite $\{T(e_n)\}_{n\geq 1}$ est une base λ'-inconditionnelle de Y avec $\lambda' \leq \lambda \|T\|.\|T^{-1}\|$.

Nous montrons, à l'aide de quelques techniques de renormage, la proposition suivante :
Proposition E. *Soient $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach.*
Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ε de Y tel que $d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$ alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace Y_ε de Y et il existe une norme $\|.\|_\varepsilon$ équivalente sur Y tels que X est isométrique à $(Y_\varepsilon, \|.\|_\varepsilon \mid Y_\varepsilon)$ et $\dfrac{1}{1+\varepsilon}\|y\|_Y \leq \|y\|_\varepsilon \leq \|y\|_Y \quad \forall y \in Y$

Nous constatons, par la propriété **A**, que si l'espace $(Y, \|.\|_Y)$ est à base 1-inconditionnelle alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace Y_ε à base $(1+\varepsilon)$-inconditionnelle qui contient une copie isométrique de X. En appliquant le théorème de P. K. Lin avec ε correctement choisi, nous obtenons le corollaire suivant :
corollaire A. *Soit un espace de Banach X. S'il existe un espace de Banach $(Y, \|.\|)$ ayant une base 1-inconditionnelle tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ε de $(Y, \|.\|)$ avec $d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$, alors X a la $wfpp$.*
Où $d_{BM}(X, Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|,\ T : X \to Y \text{ isomorphisme}\}$ est la distance de Banach-Mazur entre X et Y.

Les espaces qui vérifient l'hypothèse du corollaire A précédent, autrement dit les espaces de Banach qui se plongent dans un espace de Banach à base 1-inconditionnelle avec une distorsion $1+\epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$, sont caractérisés grâce aux travaux de Kalton et ses coauteurs, voir [14], [47], [36], [37]. Nous rappelons, dans ce chapitre 3, les deux principaux théorèmes utilisés par Godefroy dans [32] pour établir des conditions suffisantes conduisant à l'hypothèse du corollaire **A**. Pour la commodité du lecteur, nous reprenons les résultats suivants ainsi que leurs démonstrations.

Lemme Go.[32] *Soit X un sous espace fermé de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ tel que pour tout compact K de Ω, l'opérateur de restriction : $r_K : X \to \mathcal{C}(K)$ tel que $r_K(f) = f_{/K}$ est compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous espace X_ε de $c_0(\mathbb{N})$ tel que $d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.*

proposition Go. [32] *Soit Z un espace de Köthe réfléxif de fonctions définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P})$ localement compact. Soit X un sous-espace de Z tel que pour chaque compact K de Ω , l'opérateur de restriction à K, $r_K : X \to Z$ est compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach réfléxif Y avec une base 1-inconditionnelle et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.*

Il est clair, compte tenu du corollaire **A**, que les espaces X du Lemme **Go.** et de la proposition **Go.** ont la $wfpp$.

Dans [32] (Lemme 2.2), Godefroy a établi une condition suffisante pour la compacité des opérateurs r_K avec un argument de partition de l'unité. Nous montrons ici, en utilisant le théorème d'Ascoli, le lemme plus général, suivant.

Lemme A. *Soit Ω un espace localement compact métrisable. Si X est un sous-espace fermé de $(\mathcal{C}_b(\Omega), \|.\|_\infty)$ tel que $\forall f \in X$, $\forall x \in \Omega$, f est ponctuellement lipschitzienne en x :*
$\exists M \in \mathbb{R}$ (M dépend de f et de x) tel que $|f(x) - f(y)| \leq Md(x, y) \quad \forall y \in \Omega$,
alors, pour tout compact K de Ω , l'opérateur : $r_K : X \to \mathcal{C}(K)$ est compact.

Nous vérifions par un simple calcul que les fonctions continues sur $[0, 1]$ et dérivables sur $[0, 1[$ sont ponctuellement lipschitziennes sur tout compact $K \subseteq [0, 1]$ en chaque x de $[0, 1[$. Comme application du lemme **A**, de la proposition **Go.** du lemme **Go.** et du corollaire **A**, nous obtenons les propositions suivantes qui établissent la $wfpp$ pour certains sous-espaces formés des fonctions lisses des espaces Banach classiques de fonctions.

Proposition F. *Soit X un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0, 1])$ tel que $\forall f \in X$, f est dérivable en tout point x de $[0, 1[$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_\varepsilon$ sous-espace de $c_0(\mathbb{N})$ tel que : $d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1+\varepsilon$. En particulier X a $wfpp$.*

Proposition G. *Soit Z un espace de Köthe réflexif de fonctions réelles définies sur [0,1]. Si X est un sous-espace fermé de Z tel que $\forall f \in X$, f est dérivable en chaque point x de $[0, 1[$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach réflexif Y avec une base 1-inconditionnelle et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.*
En particulier, X a $wfpp$.

Comme cas particulier de la proposition **F**, nous énonçons le corollaire suivant.

Corollaire B. *Si* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ *est une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n=+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$*, alors l'espace de Müntz* $M_\Lambda^{\mathcal{C}([0,1])}$ *a* $wfpp$.

Nous finissons le chapitre 3 par la généralisation du résultat obtenu dans le corollaire **F** aux espaces de Müntz M_Λ^E où E est un espace de Köthe de fonctions sur $[0,1]$ faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation. Nous montrons, dans ce cas, que M_Λ^E est un dual d'un espace de Banach qui a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle. Ce qui implique, compte tenu des résultats dus à Godefroy-Kalton [34] et Cowell-Kalton [14], que M_Λ^E se plonge dans un espace à base 1-inconditionnelle avec une distorsion $1+\delta$; pour tout $\delta > 0$. Ce qui constitue notre résultat essentiel de ce chapitre représenté dans le théorème suivant.

Théorème B. *Soit* E *un espace de Köthe de fonctions sur* $[0,1]$ *faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation, soit* $\Lambda = (\lambda_k)$ *une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que* $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$.
Alors l'espace de Müntz M_Λ^E *a la propriété faible du point fixe.*

Le chapitre 4 est motivé par la recherche de nouveaux espaces pour lesquels la fpp implique la réflexivité en utilisant le concept de copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$. Après une courte synthèse des résultats donnant des exemples d'espaces de Banach qui sont asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$ et ceux dont la fpp a été caractérisée à l'aide de la réflexivité, nous montrons dans la section 4.3. notre premier résultat de ce chapitre qui est le suivant.

Théorème C. *Si un espace de Banach* X *est octaédral alors il contient une copie asymptotiquement isométrique de* $l^1(\mathbb{N})$.
En particulier, si X *est octaédral alors* X *n'a pas la* fpp.

Nous retrouvons, en corollaire, le résultat de [65] ; compte tenu du théorème **A.** Nous déduisons des Théorème **A**, **B** et **C**, la caractérisation de la fpp pour M_Λ^E du théorème **B** avec l'hypothèse supplémentaire E L-facteur et nous traitons le cas $E = L^1([0,1])$ en utilisant un résultat de Besbes, (voir [6], Th.5.1.). Nous obtenons le théorème suivant.

Théorème D. *Soit E un espace de Köthe de fonctions sur* $[0,1]$ *faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation, soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$. Alors*
1. Si E est L-facteur de son bidual, alors l'espace de Müntz M_Λ^E a la propriété du point fixe si et seulement s'il est réflexif.
2. Si $E = L^1([0,1])$, alors l'espace de Müntz M_Λ^E n'a pas la propriété du point fixe, mais chaque sous-ensemble convexe qui est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$ *a la propriété du point fixe.*

Nous finissons ce chapitre par le résultat qui répond négativement à la question posée dans [65]. Pour cela nous observons d'abord le résultat suivant :
Lemme B. *Soit $\|.\|$ une norme sur un espace de Banach X.*
Si $\|.\|$ est octaédrale alors $\|.\|$ est nulle part F-différentiable.

Nous montrons le théorème suivant.
Théorème D. *Il existe une norme équivalente $|||.|||$ sur $l^1(\mathbb{N})$ telle que $(l^1(\mathbb{N}), |||.|||)$ est une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ et $|||.|||$ admet un point de Fréchet-différentiabilité.*

Nous obtenons le corollaire suivant.
corollaire C. *Il existe une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ qui n'est pas octaédrale.*
En particulier, Il existe une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ qui n'est pas L-facteur de son bidual.

L'article [71] publié dans Mediterranean Journal of Mathematics contient les résultats des chapitres 2, 4 et de la dernière partie du chapitre 3.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'introduire, dans le cadre général des espaces de Banach, les notations, les notions et les outils que nous aurons à utiliser dans cette thèse.
Tous les espaces de Banach de cette thèse seront réels.

Soit X un espace de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, lorsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée (respectivement la sphère unité) de X sera notée B_X (respectivement S_X). Par sous-espace de X on entendra sous-espace fermé pour la norme. On dira sous-espace vectoriel quand il n'est pas nécessairement fermé.

1.1.1 Espaces de Banach classiques

Les espaces de suites :
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel de toutes les suites réelles.
Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $x = (x_n)_{n \in \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$ muni de la norme

$$\|x\| = \big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach qu'on désigne par $l^p(\mathbb{N})$ ou tout simplement par l^p.
Le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites bornées muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $l^\infty(\mathbb{N})$ ou tout simplement l^∞. On notera $c_0(\mathbb{N})$ ou tout simplement c_0 le sous-espace fermé de l^∞ des suites qui convergent vers *zéro*.

Les espaces de fonctions continues :
Soit K un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_K = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Les espaces de fonctions intégrables :
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction Σ -mesurable. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad si \;\; 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ a > 0; \mu \left(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-a, a]) \right) = 0 \right\} \qquad si \;\; p = +\infty.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Banach $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions Σ -mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$.
La notation $L^p([0,1])$ représente le cas particulier où $\Omega = [0,1]$, Σ est la tribu de Lebesgue et μ la mesure de Lebesgue λ.

1.1.2 Espaces d'Orlicz

Les espaces d'Orlicz séquentiels (respectivement de fonctions) constituent une généralisation des $l^p(\mathbb{N})$ (respectivement $L^p(\mu)$), la fonction puissance $t \mapsto t^p$ étant remplacée par une fonction convexe. La présentation ci-dessous repose sur [57] et [11]. Le lecteur peut également se référer à [53], [67].
Définition (Fonction d'Orlicz). On appelle fonction d'Orlicz une fonction $\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ continue, croissante, convexe avec $\Phi(0) = 0;\ \phi(t) > 0,\ \forall t > 0,$
$\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Phi(t)}{t} = 0$
A une telle fonction d'Orlicz Φ on associe une autre fonction d'Orlicz Ψ définie par
$\Psi(v) = \sup\{u|v| - \Phi(u),\ u \geq 0\}$ appelée conjuguée de Φ. Les fonctions Φ et Ψ sont dites fonctions d'Orlicz conjugées.
Condition Δ_2 : On dit que Φ vérifie la condition Δ_2 à l'infini (resp. en *zéro*) et on écrit $\Phi \in \Delta_2$ à l'infini (resp. $\Phi \in \Delta_2$ en *zéro*) s'il existe $k > 0, u_0 > 0$ tels que

$$\Phi(2u) \leq k\Phi(u),\ \forall u \geq u_0 \;\; (resp.\ \forall u \in [0, u_0]).$$

On écrit $\Phi \in \nabla_2$ à l'infini (resp. en zéro), si sa conjuguée Ψ vérifie la condition Δ_2 à l'infini (resp. en zéro).

On écrit $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ à l'infini (resp. en zéro) si Φ et sa conjuguée Ψ vérifient la condition Δ_2 à l'infini (resp. en zéro).

Les espace d'Orlicz séquentiels :

Pour une fonction d'Orlicz ϕ, on associe l'espace d'Orlicz de suites l^ϕ formé des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) < \infty$.

L'espace l^ϕ, muni de la norme de Luxemburg :

$$\|x\|_\phi = \inf\{\lambda > 0; \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) \leq 1\},$$

est un espace de Banach. On note h^ϕ l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$; h^ϕ est un sous-espace fermé de l^ϕ.

l'espace h^ϕ est séparable et l^ϕ est égal à h^ϕ si et seulement si $\phi \in \Delta_2$ en *zéro.*

Les espace d'Orlicz de fonctions :

On considère l'espace mesuré (Ω, Σ, μ) où μ est une mesure positive telle que $0 < \mu(\Omega) < \infty$.

Pour une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Σ-mesurable, on pose

$$\rho_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(|f(t)|)d\mu \ .$$

A toute fonction d'Orlicz Φ, on associe l'espace d'Orlicz de fonctions $L^\Phi = L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ constitué de toutes les (classes d'équivalence des) fonctions f Σ- mesurables telles que $\rho_\Phi(\lambda f) < \infty$, pour un certain $\lambda > 0$.

On note E^Φ le sous-espace vectoriel de L^Φ tel que $\rho_\Phi(\lambda f) < \infty$, $\forall \lambda > 0$.

Sur L^Φ sont, usuellement définies les deux normes équivalentes suivantes :

-La norme de Luxemburg, notée $\|.\|_\Phi$, définie par

$$\|f\|_\Phi = \inf\{k > 0; \rho_\Phi(\frac{f}{k}) \leq 1\}.$$

-La norme d'Orlicz, notée $\|.\|^o_\Phi$, définie par

$$\|f\|^o_\Phi = \sup\{\int_\Omega f.gd\mu, \ \rho_\Psi(g) \leq 1\}.$$

Muni de chacune de ces normes, L^Φ est un espace de Banach, E^Φ en est un sous-espace fermé séparable et on a : $E^\Phi = L^\Phi \Longleftrightarrow \Phi \in \Delta_2($ à l'infini).

1.1.3 Lattices de Banach - Espaces de Köthe

La présentation suivante repose sur l'ouvrage de J. Lindenstrauss et L.Tzafiri [58]. Le lecteur peut également se référer à [60] et à [3].

Un lattice de Banach X est un espace de Banach réel muni d'un ordre partiel $\leq$ vérifiant :

(i) $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$, $\forall x, y, z \in X$.

(ii) $\alpha x \geq 0$, pour tout $x \in X$, $x \geq 0$ et pour tout réel $\alpha \geq 0$.

(iii) $\forall x, y \in X$, $\sup\{x, y\}$ et $\inf\{x, y\}$ existent, on note $x \vee y = \sup\{x, y\}$ et $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

(iv) $\|x\| \leq \|y\|$ à chaque fois que $|x| \leq |y|$. Ce qui implique que $\|x\| = \|\ |x|\ \|$. La valeur absolue $|x|$ de x étant définie par $|x| = x \vee (-x)$.

Deux éléments x, y de X sont dits disjoints si $|x| \wedge |y| = 0$; on écrit, dans ce cas, $x \perp y$.
Les opérations lattices $(x, y) \longrightarrow x \vee y$ et $(x, y) \longrightarrow x \wedge y$, sont continues pour la norme.
Le sous-ensemble $C = \{x \in X,\ x \geq 0\}$ de X est un convexe fermé pour la norme, il est appelé cône positif de X. On a, $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in C$.
Pour un élément x d'un lattice de Banach X, on pose $x_+ = x \vee 0$ et $x_- = -(x \wedge 0)$.
On a, $x = x_+ - x_-$ (donc $X = C - C$) et $|x| = x_+ + x_-$.

Soit X, Z deux lattices de Banach, $T : X \longrightarrow Z$ un opérateur linéaire .
On dit que T est positif si $Tx \geq 0$ à chaque fois que $x \geq 0$. On dit que T est un isomorphisme d'ordre (ou un isomorphisme qui préserve l'ordre) si T est un isomorphisme tel que,

$$T(x \vee y) = Tx \vee Ty \quad et \quad T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad \forall x, y \in X.$$

Si de plus T est une isométrie, on dit que X et Z sont isométriques (en ordre).
Un sous-espace vectoriel Y de X est dit sous-lattice de X si $y_1 \vee y_2 \in Y$ quand $y_1, y_2 \in Y$.
Un sous-lattice Y de X est dit un ideal de X si $|x| \leq |y|$ et $y \in Y$ implique $x \in Y$.
Un idéal Y de X est dit bande si pour toute famille $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ d'éléments de Y telle que $\bigvee_{\alpha \in I} x_\alpha$ existe dans X, on a $\bigvee_{\alpha \in I} x_\alpha \in Y$.

Les sous-ensembles de X de la forme $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y\}$ et $]x, y[= \{z : x < z < y\}$ sont appelés intervalles. Une partie A de X est bornée en ordre s'il existe $x, y \in X$ tels que $A \subseteq [x, y]$.

Un lattice de Banach X est dit complet (respectivement σ-complet) pour l'ordre si toute partie (respectivement suite) bornée en ordre dans X admet une borne supérieure.
Les exemples concrets de lattices de Banach complets pour l'ordre sont les espaces $L_p(\mu)$

avec $1 \leq p \leq \infty$. D'un autre coté l'espace $\mathcal{C}(K)$ est un lattice de Banach qui n'est pas toujours σ-complet pour l'ordre selon le compact K.

Un lattice de Banach X est dit continu (respectivement σ-continu) en ordre si pour toute famille filtrante (respectivement suite) décroissante $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de X telle que $\bigwedge_{\alpha\in I} x_\alpha = 0$, on a $\lim_\alpha \|x_\alpha\| = 0$.

Tout lattice de Banach séparable qui est σ-complet en ordre est continu en ordre. Ceci est une conséquence du résultat (voir [58], Proposition 1.a.7) qui affirme qu'un lattice de Banach qui n'est pas σ-continu en ordre contient isomorphiquement l_∞.

Proposition. *([58], Proposition.1.a.8.) Soit X un lattice de Banach. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) X est σ-complet et σ-continu en ordre.

(2) Toute suite bornée en ordre et croissante dans X converge en norme.

(3) X est continu en ordre.

(4) X est complet et continu en ordre.

Espace de Köthe de fonctions. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré où μ est une mesure complète et σ-finie. Un espace de Banach X qui est constitué de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions réelles localement intégrables sur (Ω, Σ, μ) est dit espace de Köthe de fonctions s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) Si $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ $\mu.p.p.$ sur Ω, avec f mesurable et $g \in X$, alors $f \in X$ et $\|f\| \leq \|g\|$.

(ii) Pour chaque $A \in \Sigma$ avec $\mu(A) < \infty$, la fonction caractéristique χ_A de A est dans X.

Il est clair que tout espace de Köthe de fonctions est un lattice de Banach avec l'ordre évident ($f \geq 0$ si $f(\omega) \geq 0$ $\mu.p.p.$). Cet ordre est σ-complet.
Les espaces de Köthe de fonctions les plus usuelles sont les espaces L_p, $1 \leq p < \infty$ et les espaces d'Orlicz L^Φ sur un espace de probabilité.

Un élément $e \in X$ est dit unité faible si pour $x \in X$, $e \wedge x = 0$ implique $x = 0$.
Tout lattice de Banach séparable possède une unité faible.

Le théorème suivant montre que chaque lattice de Banach continu en ordre avec unité faible (en particulier chaque lattice de Banach séparable σ-complet en ordre) peut-être représenté comme un espace de Köthe de fonctions sur un espace de probabilité.

Théorème([58], Théorème 1.b.14). *Soit X un lattice de Banach continu en ordre avec unité faible. Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$, un idéal (non nécessairement fermé) $\widetilde{X}$ de $L^1(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ et une norme lattice $\|.\|_{\widetilde{X}}$ sur $\widetilde{X}$ tels que*

(a) *X est isométrique en ordre à $(\widetilde{X}, \|.\|_{\widetilde{X}})$.*

(b) *$\widetilde{X}$ est dense dans $L^1(\Omega, \Sigma, \mathcal{P}))$ et $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ est dense dans $\widetilde{X}$.*

(c) *Les deux inclusions $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mathcal{P}) \subseteq \widetilde{X} \subseteq L^1(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ sont continues. Plus précisément*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_{\widetilde{X}} \leq 2\|f\|_\infty, \ \forall f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mathcal{P}.$$

1.2 Dualité

Dans toute la suite X désigne un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|$.
On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup\limits_{x \in B_X} |f(x)|$.
Les éléments de X^* seront le plus souvent désignés par x^*.
Pour $x^* \in X^*$ et $x \in X$ on notera généralement $< x^*, x >$ au lieu de $x^*(x)$.

On désigne par X^{**} le bidual de X $(X^{**} = (X^*)^*)$.
Soit $x \in X$, l'application $x^* \rightarrow < x^*, x >$ de X^* dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur X^*, donc un élément de X^{**}.
L'injection canonique $J_X : X \rightarrow X^{**}$ qui à tout $x \in X$ associe $J_X(x)$ telle que

$$< J_X(x), x^* >=< x^*, x > , \quad \forall x^* \in X^*$$

est une isométrie linéaire qui, en général, n'est pas surjective.
A l'aide de J_X on peut toujours identifier X à un sous-espace de X^{**}.
On dit que X est réflexif si J_X est surjective : $J_X(X) = X^{**}$.
Lorsque X est réflexif on identifie X et X^{**}.

1.2.1 Topologies faible et préfaible

Sur l'espace de Banach X est définie, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ notée aussi w qui est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires sur X.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de X, et $x \in X$. On dit que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers x et on écrit $x = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si

$$< x^*, x >= \lim_{n\to\infty} < x^*, x_n >, \ \forall x^* \in X^*.$$

Il est clair que les ouverts (respectivement les fermés) pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sont des ouverts (respectivement des fermés) pour la topologie forte. Par le théorème de Hahn-Banach on a le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit C un convexe de X. Alors C est w-fermé si et seulement s'il est fortement fermé.*

Sur l'espace X^* outre la topologie de la norme $\|.\|_{X^*}$ et la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, est définie la topologie préfaible $\sigma(X^*, X)$ notée aussi w^* qui est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les applications $(J_X(x))_{x\in X}$ définies ci-dessus.
Soit $(x_n^*)_{n\geq 1}$ une suite de X^*, $x^* \in X^*$. On dit que $(x_n^*)_{n\geq 1}$ converge préfaiblement vers x^* dans X^* et on écrit $x^*= w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n^*$ si et seulement si

$$< x^*, x >= \lim_{n\to\infty} < x_n^*, x >, \ \forall x \in X.$$

Proposition 1.1. *Soit $(X^*, w^*)^*$=\{ $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$, φ linéaire et w^*-continue \}. On a*

$$(X^*, w^*)^* = X.$$

Démonstration. Il est clair que $X \subseteq (X^*, w^*)^*$. L'autre inclusion vient du fait que pour $\varphi \in (X^*, w^*)^*$, il existe $x \in X$ tel que $\varphi(f) =< f, x > \ \forall f \in X^*$, voir ([7], Prop. III.1.3). □

Les topologies faible et préfaible sont localement convexes mais ne sont pas métrisables si la dimension de X est infinie. Toutefois l'importance fondamentale de la topologie w^* se voit dans les théorèmes suivants, voir [54, 7] :

Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki
La boule unité B_{X^*} est préfaiblement compacte.
De plus X est séparable si et seulement si (B_{X^*}, w^*) est métrisable.

Théorème de Goldstine
La boule unité B_X de X est $\sigma(X^{**}, X^*)$-dense dans la boule unité $B_{X^{**}}$ de X^{**}.

Ce théorème qui résulte de la proposition 1.1 et du théorème de Hahn-Banach appliqué à $(X^{**}, w^*)^* = X^*$ implique en particulier que

$$\overline{X}^{\sigma(X^{**},X^*)} = X^{**}.$$

Théorème de Kakutani.
X est réflexif si et seulement si la boule unité B_X est w-compacte.

Corollaire. *Si X est réflexif alors tout convexe fermé et borné de X est w-compact.*

Théorème d'Eberlein-Šmulian. *Une partie K de X est faiblement relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*
Autrement dit, pour la topologie faible la compacité et la compacité séquentielle sont équivalentes.

Des théorèmes précédents on a la caractérisation séquentielle de la réflexivité suivante :

Théorème 1.2. *X est réflexif si et seulement si de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente .*

1.2.2 Orthogonalité

Soit Y un sous-espace de X. On définit l'orthogonal de Y dans X^* qu'on note $Y^\perp$ par

$$Y^\perp = \{x^* \in X^*, < x^*, x >= 0 \ \ \forall x \in Y \ \}.$$

On définit le biorthogonal de Y dans X^{**} qu'on note $Y^{\perp\perp}$ par

$$Y^{\perp\perp} = \{x^{**} \in X^{**}, < x^{**}, f >= 0 \ \forall f \in Y^\perp \ \}.$$

Pour un sous-espace Z de X^* on note $Z^\top$ l'orthogonal de Z dans X. c.à.d.

$$Z^\top = \{x \in X / < x, z >= 0, \ \forall z \in Z\}.$$

Il est clair que $Y^\perp$ (respectivement $Z^\top$) est un sous-espace de X^* (respectivement de X).

Faits. (voir [69], p.92
1. $Y^\perp$ est w^*-fermé dans X^*.
2. $(Y^\perp)^\top = Y$.

3. $(Z^{\top})^{\perp} = \overline{Z}^{w^*}$ dans X^*.

4. Z est un sous-espace w^*-fermé dans X^* si et seulement si, il existe un sous-espace Y de X tel que $Z = Y^{\perp}$.

5. $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}^{\sigma(X^{**},X^*)}$.

6. Relation avec les duaux de sous-espaces et d'espaces quotients :

$$(X/Y)^* \cong Y^{\perp} \quad et \quad Y^* \cong X^*/Y^{\perp}$$

où $\cong$ représente un isomorphisme isométrique.

Démonstration. 1 vient du fait que $Y^{\perp} = \bigcap_{x\in Y} Kerx$ et que $Kerx$ est $w^\star$-fermé dans $X^\star$, car chaque élément x de X identifié à son image $J_X(x)$ dans X^{**} est w^*-continue.
Pour les faits 2, 3 et 6, on trouve une preuve détaillée dans [69], p.96.
Le fait 4 est une conséquence de 3. En effet, il suffit de prendre $Y = Z^{\top}$.
Montrons le fait 5. On a $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$ donc $\overline{Y}^{\sigma(X^{**},X^*)} \subseteq Y^{\perp\perp}$ puisque ce dernier est $w^\star$-fermé dans X^{**}. Soit $x^{**} \in X^{**}$ tel que $x^{**} \notin \overline{Y}^{\sigma(X^{**},X^*)}$. Alors par Hahn-Banach appliqué à l'espace localement convexe (X^{**}, w^*) (voir [69], th. 3.5), il existe $x^* \in (X^{**}, w^*)^* = X^*$ tel que $< x^*, y >= 0,\ \forall y \in \overline{Y}^{\sigma(X^{**},X^*)}$ et $< x^{**}, x^* >\neq 0$, alors $x^* \in Y^{\perp}$ et $< x^{**}, x^* >\neq 0$ donc $x^{**} \notin Y^{\perp\perp}$. □

Des relations de 6, on déduit l'identification de Y^{**} au sous-espace $Y^{\perp\perp}$ dans X^{**}.

1.2.3 Opérateurs continus et transposés

Soit Y un autre espace de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ une application linéaire qu'on appellera souvent opérateur. Il est connu que (voir [7],[64]) :
T est continue (en normes) si et seulement si T est continue pour les topologies faibles.

Si l'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est continu, on appelle transposée ou adjoint de T l'unique application linéaire continue $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ telle que

$$< T^*(y^*),\ x >=< y^*\ ,\ T(x) >,\ \forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^*$$

La transposée de T^* soit $T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ s'appelle la bitransposée de T.
On peut facilement vérifier que T^* est w^*-continue. Il en est donc de même pour T^{**}.
En fait T^{**} est le prolongement w^*-continu de T.

Faits. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur continu. Alors (voir [69] ou [64]) :

1) $\|T\| = \|T^*\| = \|T^{**}\|$.

2) $ImT^\perp = KerT^*$ et $KerT = (ImT^*)^\top$

3) $\overline{ImT}^{\|\cdot\|_Y} = Y \Longleftrightarrow T^*$ est injectif. $\overline{ImT^*}^{w^*} = X^* \Longleftrightarrow T$ est injectif.

4) T est bijectif $\Longleftrightarrow T^*$ est bijectif et dans ce cas, on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

5) ImT est fermée dans $Y \Longleftrightarrow Im(T^*)$ est w^*-fermée dans $X^* \Longleftrightarrow Im(T^*)$ est fermé pour la norme dans X^*.

Comme conséquence de 5), on obtient :

6) Si ImT est fermée alors $Im(T^{**}) = (ImT)^{\perp\perp}$.

En effet, si $Im(T)$ est fermée alors d'après 5), ImT^{**} est w^*-fermée dans X^{**}. D'autre part 2 et le fait 3 dans 1.2.2 impliquent $(ImT)^{\perp\perp} = ((ImT^{**})^\top)^\perp = \overline{ImT^{**}}^{w^*}$.

1.3 Espaces de Banach faiblement séquentiellement complets

Définition 1.1. L'espace X est dit faiblement séquentiellement complet, en abrégé f.s.c., si toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui est faiblement Cauchy dans X converge faiblement dans X.
On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est dite faiblement Cauchy ou w-Cauchy dans X si la suite $(< x^*, x_n >)_{n\geq 1}$ converge pour tout $x^* \in E^*$.

Exemples - *Tout espace réflexif est trivialement f.s.c.*
- *L'espace $l^1(\mathbb{N})$ est f.s.c.*. En effet, dans $l^1(\mathbb{N})$ les parties faiblement compactes sont compactes pour la norme.
- *L'espace $c_0(\mathbb{N})$ n'est pas f.s.c.*. En effet la suite (s_n) t.q. $s_n = e_1 + e_2 + ... + e_n$ est w-Cauchy dans $c_0(\mathbb{N})$ mais ne converge pas faiblement dans $c_0(\mathbb{N})$.
- On verra dans la suite que $L^1(\mu)$ est f.s.c.

Fait. *Si X est f.s.c. alors tous les sous-espaces de X le sont.*
En effet, soit (y_n) une suite w-Cauchy dans Y donc (y_n) est w-Cauchy dans X qui est f.s.c. donc $\exists y \in X$ t.q. $y = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n \Leftrightarrow [< f, y >= \lim\limits_{n\to\infty} < f, y_n >,\ \forall f \in X^*]$.
Si $y \notin Y$ alors, par Hahn-Banach, $\exists f_0 \in X^*$ tel que $f_0/Y = 0$ et $< f_0, y >\neq 0$. Contradiction avec $< f_0, y >= \lim\limits_{n\to\infty} < f_0, y_n >= 0$.

Remarque 1.1. Du fait précédent, on déduit qu'un espace f.s.c. ne contient jamais $c_0(\mathbb{N})$. En particulier $\mathcal{C}([0,1])$ n'est pas f.s.c..

En effet, du fait de son universalité pour les espaces séparables (voir par exemple [54], P.51), $\mathcal{C}([0,1])$ contient $c_0(\mathbb{N})$.

Propriété 1.1. *Si X est faiblement séquentiellement complet alors tout sous-espace non réflexif Y de X contient une copie isomorphique de $l^1(\mathbb{N})$.*

Démonstration. Y est non réflexif donc, d'après le théorème 1.2., la boule unité B_Y contient une suite qui n'a pas de sous-suite w-convergente, puisque Y est f.s.c., cette sous-suite n'a pas de sous-suite w-Cauchy et par le théorème $l^1(\mathbb{N})$ de Rosenthal [68] (voir aussi [54], p. 291), Y contient isomorphiquement $l^1(\mathbb{N})$.

□

Remarque 1.2. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est faiblement de Cauchy dans X alors, considérée comme suite dans X^{**}, $(x_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente sur X^*. Soit x^{**} la limite simple de $(x_n)_{n\geq 1}$. On a $x^{**} = \sigma(X^{**}, X^*) - \lim x_n \in X^{**}$. Donc, si $x^{**} \in X$ alors $x^{**} = w - \lim x_n$ car $\sigma(X^{**}, X^*)$ restreinte à X coincide avec $\sigma(X, X^*) = w$.

$$Soit \;\; \mathfrak{B}_1 = \{u \in X^{**} \; t.q. \; \exists (x_n) \subset X, (x_n) \; w - Cauchy \; et \; u = \sigma(X^{**}, X^*) - \lim_{n\to\infty} x_n\}$$

Autrement dit $\mathfrak{B}_1$ est l'adhérence séquentielle de X dans (X^{**}, w^*).
Il est évident, compte tenu de la discussion précédente, que si $\mathfrak{B}_1 \subseteq X$ alors X faiblement séquentiellement complet.

Les espaces de Banach f.s.c. ont été largement étudiés par G. Godefroy notamment dans [28] où on trouve le résultat de la proposition suivante.

Proposition 1.2. *([28], Proposition 10). S'il existe une bijection isométrique S de X^{**} telle que $Ker(S - id_{X^{**}}) = X$ alors $X = \mathfrak{B}_1$ et X est faiblement séquentiellement complet.*

1.4 Projections et sous-espaces complémentés

1.4.1 Généralités

Un opérateur continu P de X dans X est une projection dans X si P vérifie : $P \circ P = P$. Si $P : X \longrightarrow X$ est une projection alors $I - P$ est aussi une projection dans X et on a : $KerP = Im(I - P)$ *et* $ImP = Ker(I - P)$, I étant l'opérateur identité.
Un sous-espace Y de X est dit complémenté (dans X) s'il existe une projection $P : X \to X$ tel que $ImP = Y$. C'est le cas si et seulement si, il existe un sous-espace Z de X tel que

$$X = Y \oplus Z : X = Y + Z \; et \; Y \cap Z = \{0\}$$

Le sous-espace Z (respectivement le sous-espace Y) est alors appelé le complémentaire de Y (respectivement de Z) dans X .
Si P est la projection dans X d'image Y alors $Z = kerP$ $(Y = Ker(I - P))$. Dans ce cas, Y est isomorphe à l'espace quotient $X/Z = X/KerP$.
Si de plus $\|P\| = 1$ alors Y est isométriquement isomorphe à l'espace quotient $X/KerP$.

On peut vérifier par Hahn-Banach que tout sous-espace de dimension 1 d'un espace de Banach X est complémenté . On en déduit que tout sous-espace de dimension finie ou de codimension finie de X est complémenté.

La surjection canonique, $\pi : X^{***} \to X^*$ telle que $\pi(x^{***}) = x^{***}/X$, est un exemple d'une projection de norme 1 ($\|\pi\| = 1$) avec $Ker\pi = X^\perp$. Autrement dit, on a toujours

$$X^{***} = X^* \oplus X^\perp. \tag{1.1}$$

En fait, on a la caractérisation suivante.

Proposition 1.3. *les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) L'espace X est un dual c.à.d. Il existe un espace de Banach Z tel que X est isométriquement isomorphe à Z^*.
(ii) Il existe une projection $\pi : X^{**} \to X$ telle que $\|\pi\| = 1$ et $Ker\pi$ est w^*-fermé.

Preuve. D'après la discussion précédente et en posant $X = Z^*$, on a $(i) \Rightarrow (ii)$.
Supposons (ii), comme $Ker\pi$ est w^*-fermé dans $(X^*)^*$, il existe un sous-espace Z de X^* tel que $Z^\perp = Ker\pi$ et comme $\|\pi\| = 1$, X est isométriquement isomorphe à l'espace quotient $X^{**}/Z^\perp$ qui est isométriquement isomorphe à Z^*.

1.4.2 L-projection et M-projection

La présentation suivante repose sur l'ouvrage de Harmand, D.Werner et W.Werner [45].
Définitions. Soit $P : X \to X$ une projection.
On dit que P est une L-projection dans X si $\forall x \in X,\ \|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|$.
On dit que P est une M-projection dans X si $\forall x \in X,\ \|x\| = max(\|Px\|, \|x - Px\|$.
Il est évident qu'une L-projection, respectivement une M-projection est de norme 1.

Soit Y un sous-espace de X. On dit que
- Y est L-complémenté dans X s'il existe une L-projection P dans X telle que $ImP = Y$.
- Y est M-complémenté s'il existe une M-projection P dans X telle que $ImP = Y$.

De façon équivalente, on a
- Y est L-complémenté dans X si et seulement si, il existe un sous-espace Z de X tel que

$$X = Y \oplus_1 Z : X = Y \oplus Z \ et \ \|y + z\| = \|y\| + \|z\|, \ \forall y \in Y, \forall z \in Z$$

- Y est M-complémenté dans X si et seulement si, il existe un sous-espace Z de X tel que

$$X = Y \oplus_\infty Z : X = Y \oplus Z \ et \ \|y + z\| = max(\|y\|, \|z\|), \ \forall y \in Y, \forall z \in Z.$$

Il est clair que dans chacun des cas si P est la projection d'image Y alors $Z = KerP$. On dit que Y est M-idéal dans X si son orthogonal $Y^\perp$ est L-complémenté dans X^*.

Faits (voir [45].
1- Il y a une dualité entre L-projection et M-projection dans le sens que,
P est une L-projection dans X si et seulement si P^* est une M-projection dans X^*.
P est une M-projection dans X si et seulement si P^* est une L-projection dans X^*.
Plus précisément, on a

$$X = Y \oplus_\infty Z \Leftrightarrow X^* = Y^\perp \oplus_1 Z^\perp \ \ et \ X = Y \oplus_1 Z \Leftrightarrow X^* = Y^\perp \oplus_\infty Z^\perp$$

2- Si P est M-projection dans X et π est une projection de norme 1 telle que $ImP = Im\pi$ alors $P = \pi$.
3- Si P est L-projection dans X et π est une projection de norme 1 telle que $KerP = Ker\pi$ alors $P = \pi$.
4- Deux L-projections (respectivement deux M-projections) commutent.
5- Si un sous-espace Z est M-complémenté dans un espace dual X^* alors il est nécessairement w^*-fermé et donc $Z = Y^\perp$ pour un certain sous-espace Y, L-complémenté dans X.
6- Si un sous-espace Y de X est un M-ideal alors le L-complémentaire de $Y^\perp$ dans X^* est isométriquement isomorphe à Y^*. Autrement dit, en faisant l'abus de remplacer les isomorphismes isométriques par des identités , on a l'implication

$$X^* = Y^\perp \oplus_1 Z \Rightarrow X^* = Y^\perp \oplus_1 Y^*$$

1.4.3 u-Projection

Une projection $P : X \to X$ est une projection inconditionnelle ou une u-projection si

$$\forall x \in X, \ \|x\| = \|x - 2Px\|.$$

Un sous-espace Y de X est dit inconditionnellement complémenté, en abrégé u-complémenté dans X s'il existe une u-projection dans X telle que $ImP = Y$.
De façon équivalente : Y est u-complémenté dans X si et seulement si, il existe un sous-espace Z de X tel que

$$X = Y \oplus_u Z : X = Y \oplus Z \ et \ \|y+z\| = \|y-z\|, \ \forall y \in Y, \forall z \in Z$$

Il est clair que si P est la projection d'image Y alors $Z = KerP$

Il est clair que si Y est L-complémenté dans X alors Y est u-complémenté dans X (avec la même projection). Autrement dit une L-projection est une u-projection.

Remarque 1.3. Une u-projection est souvent définie comme étant une projection P telle que $\| I - 2P \| = 1$. En effet, on peut facilement vérifier l'équivalence

$$P \ est \ u\text{-projection} \Longleftrightarrow \| I - 2P \| = 1.$$

Il est évident que si P est une u-projection alors $\| I - 2P \| = 1$. Soit P une projection telle que $\| I - 2P \| = 1$. L'application $S = I - 2P$ est une symétrie puisque $S \circ S = I_X$ et S est de norme 1 par hypothèse. Or une symétrie de norme 1 est une isométrie donc $\forall x \in X, \ \|x\| = \|S(x)\| = \|x - 2P(x)\|$.

Proposition 1.4. *Soient $P, Q : \ X \longrightarrow X$ deux u-projections. Alors*

$$ImP = ImQ \Longrightarrow P = Q.$$

Démonstration. P et Q sont des u-projections donc $\| I - 2P \| = \| I - 2Q \| = 1$.
L'hypothèse $ImP = ImQ$ implique $PQ = Q \ et \ QP = P$. D'où

$$(I - 2P)(I - 2Q) = I - 2P + 2Q = I + 2(Q - P)$$

On suppose que c'est vrai pour $k \in \mathbb{N}^\star$: $((I - 2P)(I - 2Q))^k = (I + 2k(Q - P)$.
Pour $k + 1$, on aura

$$((I - 2P)(I - 2Q))^{k+1} = ((I - 2P)(I - 2Q))^k (I + 2(Q - P))$$

$= (I+2k(Q-P)(I+2(Q-P) = I+2k(Q-P)+2(Q-P)+4k(Q-P)^2 = I+(2k+1)(Q-P)$
car $(Q - P)^2 = Q^2 + P^2 - QP - PQ) = 0$. Donc

$$((I - 2P)(I - 2Q))^n = (I + 2n(Q - P), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $\| I + 2n(Q - P) \| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ceci implique que $Q - P = 0$.

□

1.4.4 Projection de bande

Soit X un lattice de Banach. Suite aux définitions et notations de 1.1.3, on pose pour un sous-ensemble Y non vide de X,

$$Y_e = \{x \in X;\ x \perp y,\ \forall y \in Y\}.$$

Il est facile de voir que Y_e est une bande de X (dite bande étrangère à Y).

Une bande Y de X est appelée bande complémentée ou bande de projection si

$$X = Y \oplus Y_e.$$

et la projection $P : X \longrightarrow Y$ telle que $kerP = Y_e$ est dite projection de bande.
Parmi les identités qui ont lieu dans un lattice de Banach, on a (voir [3]) :
$|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$. D'où l'on déduit que si $|x| \wedge |y| = 0$ alors $|x+y| = |x-y|$ donc $\|x+y\| = \|x-y\|$. Ce qui implique que la projection de bande est une u-projection.

1.5 Espaces u-facteurs et L-facteurs de leurs biduaux

Dans toute cette partie, X est un espace de Banach qui sera identifié à son image canonique dans le bidual X^{**}.

1.5.1 Définitions et notations

On dira que X est un L-facteur si X est L-complémenté dans son bidual. On dira que X est un u-facteur si X est u-complémenté dans son bidual.

Si X est un L-facteur, autrement dit, s'il existe une L-projection $P : X^{**} \to X$ telle que $X = ImP$, on désigne le L-complémentaire de X dans X^{**} (c'est à dire $KerP$) par X_s et on écrit

$$X^{**} = X \oplus_1 X_s \quad , \quad X_s \ = KerP$$

Si X est un u-facteur et P est la u-projection d'image X, on écrit

$$X^{**} = X \oplus_u X_s \quad , \quad X_s \ = KerP$$

Remarque 1.4. La proposition 1.4. montre que si X est L-facteur (respectivement u-facteur) de son bidual alors la L-projection (respectivement la u-projection) correspondante et X_s sont uniques.

Notons qu'un espace de Banach non réflexif X ne peut pas être M-complémenté dans son bidual (il n'existe aucune M-projection dans X^{**} d'image X).
En effet si X est M-complémenté dans X^{**} alors, d'après le fait 5-, X est w^*-fermé dans X^{**} c'est à dire $X = \overline{X}^{\sigma(X^{**},X^*)} = X^{**}$.

Remarques
1. Si un espace de Banach Z est un M-ideal dans son bidual alors Z^* (le dual de Z) est un L-facteur : $Z^{***} = Z^* \oplus_1 Z^\perp$.
2. Si X est un L-facteur et son L-complémentaire est w^*-fermé : $X^{**} = X \oplus_1 X_s$ avec X_s w^*-fermé, alors il existe un espace de Banach Z tel que $Z^\perp = X_s$ et $X = Z^*$: X est un dual d'un M-ideal de son bidual.
En effet, 1. se déduit du fait 6- de la section 1.4.2. La preuve de la proposition 1.3 montre, en particulier le 2.
Notons que G. Godefroy et D. Li ont montré, dans ([38], Théorème II.1), qu'il existe un espace dual X séparable tel que : $X^{**} = X \oplus_1 X_s$ avec X_s non w^*-fermé.

1.5.2 Exemples

-Les espaces de Banach réflexifs sont trivialement des L-facteurs.

-L'espace c_0 n'est même pas complémenté dans l^∞ (voir [2], Chap 2).

-L'espace c_0 est un M-ideal de son bidual et l'espace $l^1 = l^1(\mathbb{N})$ est un L-facteur :

$$l^{1**} = l^1 \oplus_1 c_0^\perp$$

En effet, l^1 est le dual de c_0 alors en remplaçant dans (1.1) l'espace X par c_0, on aura $l^{1**} = l^1 \oplus c_0^\perp$. D'autre part, on peut vérifier par un calcul direct que

$$\forall u \in l^1, \forall v \in c_0^\perp,\ \|u+v\| = \|u\| + \|v\|.$$

Examinons quelques cas d'espaces de Banach classiques non réflexifs qui sont soit L-facteurs soit u-facteurs de leurs biduaux de façon non triviale.

Exemple 1. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré où μ est une mesure positive et finie. *L'espace $L^1(\mu) = L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ est L-facteur de son bidual :*

$$L^1(\mu)^{**} = L^1(\mu) \oplus_1 (L^1(\mu))_s$$

Ce résultat peut se justifier par des arguments des espace lattices de Banach comme il peut se justifier par des arguments de la théorie de la mesure.
Par la théorie de la mesure, on sait que le dual de $L^1(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $L^\infty(\mu)$; On écrit couramment : $L^1(\mu)^* = L^\infty(\mu)$.
L'espace $L^\infty(\mu)$ est(isométriquement isomorphe à) un $\mathcal{C}(K)$ où K est un w^*-compact (non métrisable) de $L^\infty(\mu)^*$; à ce sujet, on peut consulter ([2], Chp. 4) ou ([22], Chap. IV).
Grâce au théorème de représentation de Riesz, on identifie le dual de cet espace $\mathcal{C}(K)$ qui est le bidual de $L^1(\mu)$ à l'espace $\mathcal{M}(K)$ des mesures sur les boréliens Σ_K de K :

$$L^1(\mu)^{**} = L^\infty(\mu)^* = \mathcal{C}(K)^* = \mathcal{M}(K).$$

Dans cette représentation la mesure μ admet une extension naturelle en une mesure positive et finie $\widetilde{\mu} \in \mathcal{M}(K)$ et $L^1(\widetilde{\mu})$ représente l'image canonique de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\mu)^{**}$.
Soit $\nu \in L^1(\mu)^{**} = \mathcal{M}(K)$, le théorème de décomposition de Lebesgue montre qu'il existe un unique couple de mesures $\mu_a, \mu_s \in \mathcal{M}(K)$ telles que

$$\nu = \mu_a + \mu_s \quad \text{où} \begin{cases} \mu_a \ll \widetilde{\mu} \ : \mu_a \text{ est absolument continue par rapport à } \widetilde{\mu} \\ \qquad et \\ \mu_s \perp \widetilde{\mu} : \mu_s \text{est étrangère à } \widetilde{\mu}. \end{cases}$$

En vertu du théorème de Radon-Nykodym, l'espace $\{\lambda \in \mathcal{M}(K); \lambda \ll \widetilde{\mu}\}$ peut être identifié à l'espace $L^1(\widetilde{\mu})$. Posant $(L^1(\mu))_s = \{m \in \mathcal{M}(K); m \perp \widetilde{\mu}\}$, ($(L^1(\mu))_s$ consiste en toutes les mesures purement finiment additives [72]). On a, pour $\lambda \in L^1(\widetilde{\mu})$ et $m \in (L^1(\mu))_s$, $\|\lambda + m\| = \|\lambda\| + \|m\|$ car $\lambda \perp m$. Ainsi, en identifiant $L^1(\mu)$ avec son image canonique $L^1(\widetilde{\mu})$ dans le bidual $L^1(\mu)^{**}$, on peut écrire

$$L^1(\mu)^{**} = L^1(\mu) \oplus_1 (L^1(\mu))_s.$$

Exemple 3 : Cas des espaces d'Orlicz de fonctions. Soient Φ et Ψ deux fonctions d'Orlicz conjuguées. Suite aux définitions et notations de 1.1.2, on écrira
L^o_Φ $(resp. E^o_\Phi)$ au lieu de $(L_\Phi, \|.\|^o_\Phi)$ $(resp. (E_\Phi, \|.\|^o_\Phi))$ et
L_Φ $(resp. E_\Phi)$ au lieu de $(L_\Phi, \|.\|_\Phi)$ $(resp. (E_\Phi, \|.\|_\Phi))$
Faits.(voir [11], 1.45, 1.46 et 1.58)
1. $E^*_\Phi = L^o_\Psi$ et $(E^o_\Phi)^* = L_\Psi$.
2. L_Φ est réflexif si et seulement si $\Phi \in \Delta_2$ et $\Psi \in \Delta_2$.
3. L_Φ est f.s.c. si et seulement si $\Phi \in \Delta_2$.

Le dual de L_Φ est caractérisé pour chacune des deux normes par T. Ando dans [5]. Plus précisément, on a d'aprés ([5], Théorèmes 1 et 5) voir aussi ([11], Théorèmes 1.47,1.48,1.51),

$$L_\Psi^* = L_\Phi^o \oplus_1 (E_\Psi)^\perp \tag{1.2}$$

$$(L_\Psi^o)^* = L_\Phi \oplus (E_\Psi)^\perp \ et$$
$$\forall f = u + v \in (L_\Psi^o)^*,\ u \in L_\Phi,\ v \in (E_\Psi)^\perp,\ \|f\| = \inf\{\lambda > 0, \Phi(\frac{u}{\lambda}) + \frac{1}{\lambda}\|v\|\} \tag{1.3}$$

Par suite, on peut justifier la proposition suivante.

Proposition. *Si Φ et Ψ sont telles que $\Phi \in \Delta_2$ (et on suppose, pour écarter le cas réflexif, que $\Psi \notin \Delta_2$), alors*

1) L_Φ muni de la norme d'Orlicz est un L-facteur et le noyau de la L-projection d'image L_Φ est un w^*-fermé : $(L_\Phi^o)^{**} = L_\Phi^o \oplus_1 (E_\Psi)^\perp$.

2) L_Φ muni de la norme de Luxemburg est un u-facteur : $(L_\Phi)^{**} = L_\Phi \oplus_u (E_\Psi)^\perp$.

Preuve. L'assertion (1.3) montre que

$$(L_\Psi^o)^* = L_\Phi \oplus_u (E_\Psi)^\perp. \tag{1.4}$$

Supposant que $\Phi \in \Delta_2$ et (pour écarter le cas réflexif) $\Psi \notin \Delta_2$. Dans ce cas $E_\Phi = L_\Phi$ et, par le fait 1 précédent, on obtient

$$(L_\Phi^o)^{**} = (E_\Phi^o)^{**} = ((E_\Phi^o)^*)^* = L_\Psi^* \ et \ \ (L_\Phi)^{**} = (E_\Phi)^{**} = ((E_\Phi)^*)^* = (L_\Psi^o)^*.$$

Les assertions 1) et 2) se déduisent, alors de (1.2) et (1.4) respectivement.

Remarque. Des caractérisations plus globales du dual d'un espace d'Orlicz $L_\Phi(\mu)$, avec moins de restrictions sur Φ et/ou sur la mesure μ, sont données dans [66] et [24].

Exemple 2. *Les lattices de Banach faiblement séquentiellement complet sont des u-facteurs.* En effet ; soit X un lattice de Banach. Alors :

- Le dual X^* de X est aussi un lattice de Banach et X est un sous-lattice de son bidual autrement dit X et son image canonique dans X^{**} sont isométriques en ordre (voir [58]).

- Si de plus X est f.s.c. alors X est une bande complémentée dans X^{**} ([58] ; th.1.c.4). Soit π la projection de bande correspondante ($X = Im\pi = \pi(X^{**})$). Alors, d'après 1.4.4, π est une u- projection. Donc

$$X^{**} = X \oplus_u Ker\pi.$$

Pour unifier les notations on désignera la bande étrangère à X dans X^{**} c'est à dire $ker\pi$ par X_s au lieu de X_e.

1.5.3 Propriétés

Théorème 1.3. *(Théorème de G.Godefroy, [28]) Si X est L-facteur de son bidual alors X est faiblement séquentiellement complet (f.s.c).*

Rappelons que le résultat du théorème précédent a été obtenu par Godefroy de plusieurs façons ; initialement dans [28], il est aussi une conséquence de plusieurs de ses travaux (voir [28], [39],[45]) desquels on peut déduire, entre autres, le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Si X est u-facteur de son bidual alors X est faiblement séquentiellement complet (f.s.c).*

Démonstration. Supposons X est u-facteur de son bidual : $X^{**} = X \oplus_u X_s$ et soit P la u-projection d'image X. On a

$$\|x^{**}\| = \|2Px^{**} - x^{**}\|, \ \forall x^{**} \in X^{**}.$$

L'application $S = 2P - id_{X^{**}} : X^{**} \to X^{**}$ est telle que $Ker(S - id_{X^{**}}) = X$.
D'après la remarque 1.3, S est une symétrie isométrique, donc une bijection isométrique de X^{**} sur X^{**}. La conclusion s'ensuit de la proposition 1.2. □

Contrairement à la propriété d'être f.s.c., la propriété d'être L-facteur de son bidual ne passe pas aux sous-espaces non réflexifs. Pour $X = L^1(\mu)$, Godefroy a montré le résultat suivant ([29], Lemme 1 et Lemme 23).

Théorème de G. Godefroy. *Un sous-espace Y de $L^1(\mu)$ est L-facteur de son bidual si et seulement si, il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.*
(i) $Y^{\perp\perp} = Y \oplus_1 (Y^{\perp\perp} \cap (L^1(\mu))_s)$
(ii) Y est bien disposé dans $L^1(\mu)$: la boule unité B_Y est fermée dans $L^1(\mu)$ pour la topologie de la convergence en mesure.

D. Li montre, dans [55], qu'en fait la condition (i) est caractéristique des sous-espaces des espaces de Banach L-facteurs de leurs biduaux qui sont eux mêmes L-facteurs de leurs biduaux ; plus exactement, il montre le théorème suivant.
Théorème de D. Li. *Soit X un espace de Banach L-facteur de son bidual $X^{**} = X \oplus_1 X_s$, Y un sous-espace de X. Si Y est L-facteur de son bidual alors*

$$Y^{\perp\perp} = Y \oplus_1 (Y^{\perp\perp} \cap X_s)$$

.

1.5.4 w^*-Continuité des éléments de X^{**} et Classification de Baire

Si X est L-facteur (respectivement u-facteur) de son bidual, son L-complémentaire (respectivement u-complémentaire) noté X_s est appelé partie singulière. On présente ici quelques éléments qui justifient cette terminologie. Notons que par définition même de la topologie préfaible, les éléments de X sont w^*-continus.

Théorème de Banach-Dieudonné. *Pour $u \in X^{**}$, on a l'équivalence :*

$$u \in X \Longleftrightarrow u \mid B_{X^*} \textit{ est } w^* - \textit{continue}.$$

Démonstration. Soit $u \in X^{**}$ tel que $u \mid B_{X^*}$ est w^*-continue. Pour $\varepsilon > 0$, soient

$$C_\varepsilon^+ = \{(x^*, t) \in B_{X^*} \times \mathbb{R},\ t \geq u(x^*) + \varepsilon\}$$

$$C_\varepsilon^- = \{(x^*, t) \in B_{X^*} \times \mathbb{R},\ t \leq u(x^*) + \varepsilon\}$$

C_ε^+ et C_ε^- sont convexes fermés dans $(X^*, w^*) \times \mathbb{R}$. On applique Hahn-Banach à l'espace localement convexe $(X^*, w^*) \times \mathbb{R}$, Il existe f continue sur (X^*, w^*) telle que $(x^*, f(x^*))$ sépare C_ε^+ et C_ε^-. Donc il existe $f \in (X^*, w^*)^* = X$ t.q.

$$u(x^*) - \varepsilon \leq f(x^*) \leq u(x^*) + \varepsilon,\ \forall x^* \in B_{X^*}.$$

$$\Rightarrow \|u - f\| \leq \varepsilon$$

ε étant arbitraire, on déduit que $u \in X$.

□

Proposition 1.5. *Si X est L-facteur de son bidual : $X^{**} = X \oplus_1 X_s$*
alors $\forall x^{**} \in X_s - \{0\}$, x^{**} restreinte à B_{X^*} n'a aucun point de w^*-continuité.

Démonstration. Pour $x^{**} \in X_s$, on a

$$\|x^{**} + x\| = \|x^{**}\| + \|x\|,\ \forall x \in X.$$

Il est montré dans ([17], Lemme 2.4) que l'oscillation $Osc(x^{**})$ d'un tel x^{**} est constante sur (B_{X^*}, w^*) et égale à $\|x^{**}\|$. Donc, si $x^{**} \neq 0$, x^{**} n'a aucun point de continuité sur (B_{X^*}, w^*) puisque $\forall x^* \in (B_{X^*}, w^*)$, Osc$(x^{**})(x^*) \neq 0$.

□

Théorème de Baire (voir [16], p. 232). *Soient K un compact métrisable , $f : K \to \mathbb{R}$. Les conditions (1) et (2) suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe une suite de fonctions $f_n : K \to \mathbb{R}$ continue, $n \geq 1$ telles que

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t), \forall t \in K$$

(2) *$\forall L \subseteq K$, L fermé et $L \neq \varnothing$, la restriction $f_{|L}$ de f à L a un point de continuité.*

Définition. Si f vérifie l'une des conditions (1) et (2), elle est dite de première classe de Baire.

Grâce au grand théorème de Choquet sur la représentation intégrale des fonctions affines (voir [12] ou [16] ; p. 154), on a le théorème suivant qui représente une version affine du théorème de Baire.

Théorème. *(Théorème de Choquet sur la classification de Baire des fonctions affines). Soient K un convexe compact métrisable , $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction affine. Alors f est de première classe de Baire si seulement si il existe une suite de fonctions $f_n : K \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ affines, continues telles que*

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t), \quad \forall t \in K.$$

Le résultat suivant est une simple application du théorème précédent.

Proposition 1.6. *Si X est séparable alors , pour $x^{**} \in X^{**}$, les assertions sont équivalentes.*

(i) $x^{**} : (B_{X^*}, w^*) \to \mathbb{R}$ est de première classe de Baire .

(ii) $\exists (x_n) \subseteq X$ tel que $x^{**} = \sigma(X^{**}, X^*) - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Démonstration. L'espace X est séparable donc (B_{X^*}, w^*) est un compact métrisable. Le théorème de Choquet précédent, appliqué à $K = (B_{X^*}, w^*)$, nous donne l'équivalence suivante.

(i)$\Longleftrightarrow \exists\ x_n : (B_{X^*}, w^*) \to \mathbb{R}$ affine, continue, $n \geq 1$ telle que

$$x^{**}(x^*) = \lim_{n\to+\infty} x_n(x^*), \forall x^* \in B_{X^*}.$$

Par le théorème de Banach-Dieudonné , la suite (x_n) est dans X par suite

$$< x^{**}, x^* >= \lim_{n\to+\infty} < x_n, x^* >,\ \forall x^* \in X^* \Longleftrightarrow x^{**} = \sigma(X^{**}, X^*) - \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

$\square$

Proposition 1.7. *Si X est séparable et u-facteur de son bidual : $X^{**} = X \oplus_u X_s$, alors $\forall x^{**} \in X^{**} \setminus X$, $x^{**} : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas de première classe de Baire.*

Preuve. X est u-facteur de son bidual, alors (voir la preuve du théorème 1.4) il existe une bijection isométrique S de X^{**} sur X^{**} tel que $Ker(S - id_{X^{**}}) = X$ donc, d'après la proposition 1.2, on a

$$X = \mathfrak{B}_1 = \{u \in X^{**} t.q.\ \exists (x_n) \subset X,\ (x_n)\ w - Cauchy\ et\ u = \sigma(X^{**}, X^*) - \lim_{n\to\infty} x_n\}.$$

Ce qui veut dire que $\forall x^{**} \in X^{**} \setminus X$, x^{**} n'est pas limite préfaible d'une suite w-Cauchy dans X et par la proposition 1.6, l'application $x^{**} : (B_{X^*}, w^*) \to \mathbb{R}$ n'est pas de première classe de Baire .

1.6 Norme octaédrale

Définition 1.2. Soit un espace de Banach $(X, \|.\|)$. On dira que la norme $\|.\|$ est octaédrale (ou que l'espace $(X, \| . \|)$ est octaédral) si pour tout sous-espace F de dimension finie de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe y dans la sphère unité S_X de X tel que pour chaque $x \in F$,

$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)(1 + \|x\|)$$

Lemme 1.1. *([30],[17]) L'espace de Banach $(X, \|.\|)$ est octaédral dès qu'il vérifie la propriété (O) suivante :*

$$(O)\quad \exists u \in X^{**}, u \neq 0\ tel\ que\ \|u + x\| = \|u\| + \|x\|,\ \forall x \in X\ .$$

Si X est séparable alors, on a l'équivalence. $(O) \iff \|.\|$ est octaédrale .

Démonstration. La première partie représente le lemme III 2.2. dans [17] où est donnée une démonstration utilisant l'argument de compacité et de la w^*-continuité inférieure de la norme. On peut aussi utiliser directement le principe de la réflexivité locale. En effet, supposons (O) vérifiée. Soient F un sous-espace de dimension finie de X et $\varepsilon > 0$. On considère le sous-espace G engendré par $F \cup \{u\}$ (u étant l'élément dans (O)). G est un sous-espace de dimension finie de X^{**}, alors, d'après le principe de la réflexivité locale, il existe un isomorphisme $T : G \longrightarrow T(G) \subset X$ (T dépend de F *et de* ε) tel que

$$T_{/G\cap X} = I_{G\cap X}\quad et\quad \| T \| . \| T^{-1} \| < 1 + \varepsilon\ .$$

Comme $\| T \| . \| T^{-1} \| \geq 1$, on peut supposer $\| T(g) \| > (1-\varepsilon) \| g \|,\ \forall g \in G$.
Soit $z = T(u)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in F$

$$\| x + \lambda z \| = \| T(x + \lambda u) \| > (1-\varepsilon) \| x + \lambda u \| = (1-\varepsilon)(\| x \| + | \lambda |) .$$

L'équivalence dans le cas séparable représente l'équivalence (3) $\Leftrightarrow$ (4) du lemme 9.1 dans [33].

$\square$

Corollaire 1.1. *Tout espace de Banach non réflexif qui est un L-facteur est octaédral.*

Remarque 1.5. Il existe des espaces de Banach octaédraux qui ne sont même pas f.s.c. Par exemple l'espace $(\mathcal{C}([0,1], \|.\|))$ qui n'est pas f.s.c. est octaédral.
En effet, soit

$$x^{**} = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} - \chi_{[0,1]-\mathbb{Q}}$$

x^{**} est un élément de $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|)^{**}$ puisque x^{**} s'identifie à la forme linéaire définie sur l'espace des mesures $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|)^{*}$ par $< x^{**}, \mu >= \int x^{**} d\mu$ et x^{**} vérifie (O) ;

$$\|x^{**} + x\|_{**} = \|x^{**} + x\|_{\infty} = 1 + \|x\|_{\infty},\ \forall x \in (\mathcal{C}([0,1], \|.\|)).$$

Théorème 1.5. *[30] voir aussi ([17], th.2.5) Pour un espace de Banach X, les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes.*
(i) X contient une copie isomorphique de $l^1(\mathbb{N})$
(ii) Il existe une norme équivalente sur X pour laquelle la propriété (O) du lemme est vérifiée.

Remarque 1.6. En général, l'octaédralité ne se conserve pas par passage aux sous-espaces même avec une norme équivalente. Par exemple, l'espace $(\mathcal{C}([0,1], \|.\|_{\infty}))$ est octaédral et il contient des sous-espaces qui ne peuvent l'être pour aucune norme équivalente.
En effet $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_{\infty})$ contient (isométriquement) tous les espaces séparables en particulier $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_{\infty})$ contient $Y = c_0(\mathbb{N})$ comme Y ne contient pas de copie isomorphique de $l^1(\mathbb{N})$, il n'est pas octaédral d'après le théorème 1.5.

Chapitre 2

Sous-espaces non réflexifs des espaces de Banach u-facteurs

2.1 Introduction

Soit Y un sous-espace d'un espace de Banach X complémenté dans son bidual :

$$X^{**} = X \oplus X_s.$$

Si Y est réflexif alors $Y^{**} \cap X_s = \{0\}$, Y^{**} étant identifié à $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}^{\sigma(X^{**},X^*)}$ dans X^{**}.
Si Y est non réflexif alors selon le type de projection, les propriétés de l'espace X, du sous-espace Y et de la partie singulière X_s on peut avoir ou non $Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}$.
Nous montrons ici, en s'appuyant sur un théorème dû à B. Maurey [63], que pour X séparable, si la projection est inconditionnelle et Y est non réflexif, alors $Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}$.
Nous donnons au passage un nouvel exemple montrant l'importance de l'hypothèse de séparabilité de l'espace dans le théorème de Maurey. Nous fournissons également une preuve autonome du même résultat dans le cas où X est un lattice de Banach f.s.c. en utilisant la représentation de ces derniers comme des espaces de Köthe de fonctions, sachant que le même résultat a été montré par Godefroy et Li pour $X = L^1(\mu)$ dans [38]. Nous montrons que le résultat est faux si la projection en question n'est pas inconditionnelle même dans le cas où X est un dual et la partie singulière est w^*-fermée. Nous déduisons dans le cas où X est un L-facteur que si Y est non réflexif alors il est octaédrale.

2.2 Propriété de Maurey

B. Maurey a démontré dans [63], avec des arguments très élaborés utilisant la notion de "type fort" et les ultraproduits, le théorème suivant.

Théorème de B. Maurey [63]. Un espace de Banach séparable (réel) X contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbb{N})$ si et seulement s'il existe $x^{**} \in X^{**}$ tel que

$$x^{**} \neq 0 \text{ et } \parallel x^{**} + x \parallel = \parallel x^{**} - x \parallel, \ \forall x \in X$$

En fait, Maurey montre le résultat plus précis suivant :

Théorème 2.1. *([63] Remarque 2.8) Soit X un espace de Banach séparable.*
Si $T : l^1(\mathbb{N}) \longrightarrow X$, est un plongement isomorphique alors, il existe $x^{**} \in l^1(\mathbb{N})^{**}$ tel que

$$T^{**}x^{**} \neq 0 \text{ et } \parallel T^{**}x^{**} + x \parallel = \parallel T^{**}x^{**} - x \parallel \ , \ \forall x \in X.$$

Définition 2.1. Soit Y un sous-espace d'un espace de Banach X. On dit que le couple (Y, X) a la propriété de Maurey s'il existe $x^{**} \in Y^{\perp\perp} \subset X^{**}$ tel que :

$$x^{**} \neq 0 \text{ et } \|x^{**} + x\| = \|x^{**} - x\| \ , \ \forall x \in X.$$

D'après le théorème de B. Maurey, un tel sous espace Y contient toujours $l^1(\mathbb{N})$.

Si X est un espace de Banach non réflexif et u-facteur de son bidual alors (X, X) a trivialement la propriété de Maurey.

Lemme 2.1. *Soit X un espace de Banach u-facteur de son bidual : $X^{**} = X \oplus_u X_s$,*
Y un sous-espace de X. Alors

$$(Y, X) \quad \text{a la propriété de Maurey si et seulement si } \ Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}.$$

Démonstration. L'implication directe est évidente.
Supposons que (Y, X) a la propriété de Maurey, donc il existe $x^{**} \in Y^{\perp\perp}$ tel que

$$x^{**} \neq 0 \text{ et } \|x^{**} + x\| = \|x^{**} - x\| \ , \ \forall x \in X.$$

Si $x^{**} = x_0 + x_s$ avec $x_0 \in X$, $x_s \in X_s$, on a pour tout $n \geq 2$,

$$\|x^{**} + (n-2)x_0\| = \|x_s + (n-1)x_0\| = \|x_s - (n-1)x_0\| = \|x^{**} - nx_0\| = \|x^{**} + nx_0\|$$

On obtient, par induction

$$\|x^{**} + 2nx_0\| = \|x^{**}\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui montre que $x_0 = 0$ et donc $x^{**} = x_s \in X_s$.

□

Proposition 2.1. *Soit X un espace de Banach séparable u-facteur de son bidual :*

$$X^{**} = X \oplus_u X_s.$$

Si Y est un sous-espace non réflexif de X alors

$$Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}$$

c.à.d. (Y, X) a la propriété de Maurey.

Démonstration. X est u-facteur de son bidual donc, par le théorème 1.4, X est f.s.c. et d'après la propriété 1.1, Y contient une copie isomorphique Z de $l^1(\mathbb{N})$.
Le théorème 2.1 montre que (Z, X) a la propriété de Maurey et par conséquent (Y, X) a la propriété de Maurey.
En effet, soit $T : l^1(\mathbb{N}) \longrightarrow X$ le plongement tel que $Z = T(l^1(\mathbb{N}))$ et $T^{**} : \ l^1(\mathbb{N})^{**} \longrightarrow X^{**}$ la bitransposée de T. Il est clair que

$$Z^{\perp\perp} \subseteq Y^{\perp\perp} \ \ et \ Z^{\perp\perp} = (T(l^1(\mathbb{N})))^{\perp\perp} \cong T^{**}(l^1(\mathbb{N})^{**}).$$

Par le théorème 2.1 de Maurey il existe $y^{**} \in T^{**}(l^1(\mathbb{N})^{**}) = Z^{\perp\perp} \subseteq Y^{\perp\perp}$ tel que

$$y^{**} \neq 0 \ et \ \ \|y^{**} + x\| = \|y^{**} - x\| \ , \ \forall x \in X.$$

Le Lemme 2.1 termine la démonstration.

□

L'utilisation du théorème de B. Maurey dans la proposition 2.1 nécessite la séparabilité de l'espace X. En effet le théoreme de B. Maurey ne marche pas si l'espace X n'est pas séparable ; un contre exemple est déjà donné dans [63]. On donne, ici, une autre illustration de ce fait en passant par la notion de sous-espace normant.

Définition 2.2. Soit X un espace de Banach. Un sous-espace Y de X^* est dit 1-normant si

$$\forall x \in X, \ \|x\| = \sup\{|y^*(x)|; \ y^* \in B_Y\}.$$

On peut vérifier par Hahn-Banach que Y est 1-normant si et seulement si $\overline{B_Y}^{w^*} = B_{X^*}$.

Lemme 2.2. *([40], Lemme 2.4). Pour un espace de Banach X, X^* ne contient pas de sous-espace 1-normant propre si et seulement si*

$$\forall x^{**} \in X^{**}, \ \bigcap_{x \in X} B_{X^{**}}(x, \|x^{**} - x\|) = \{x^{**}\}$$

Proposition 2.2. *([31], proposition 1.4). Il existe une norme équivalente* $\|.\|$ *sur l'espace* $l^1(\mathbb{N}) \oplus l^2(\Gamma)$ *telle que* X^* *(le dual de l'espace* $X = (l^1(\mathbb{N}) \oplus l^2(\Gamma), \|.\|)$*) ne contient pas de sous-espace* 1*-normant propre.*

On peut maintenant justifier la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Il existe un espace de Banach* X *isomorphe à* $l^1(\mathbb{N}) \oplus l^2(\Gamma)$ *pour lequel il n'existe pas, dans* X^{**}*, d'élément* $x^{**} \neq 0$ *tel que*

$$\|x^{**} + x\| = \|x^{**} - x\| \ , \ \forall x \in X.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.2 et le lemme 2.2, il existe un espace $(X, \|.\|)$ isomorphe à $l^1(\mathbb{N}) \oplus l^2(\Gamma)$ tel que

$$\forall x^{**} \in X^{**}, \ \bigcap_{x \in X} B_{X^{**}}(x, \|x^{**} - x\|) = \{x^{**}\}$$

En particulier, il n'existe pas, dans X^{**}, d'élément $x^{**} \neq 0$ tel que

$$(i) \qquad \|x^{**} + x\| = \|x^{**} - x\| \ , \ \forall x \in X.$$

En effet (i) implique que

$$\forall x \in X, \ \ 0 \in B_{X^{**}}(x, \|x^{**} - x\|).$$

Car, $\forall x \in X, \ \|x\| = \|\frac{x}{2} + \frac{x^{**}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^{**}}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|x^{**} + x\| + \frac{1}{2}\|x^{**} - x\| = \|x^{**} - x\|.$

Par conséquent

$$0 \in \bigcap_{x \in X} B_{X^{**}}(x, \|x^{**} - x\|)$$

et par convexité, (i) implique

$$\{(2\lambda - 1)x^{**} \ ; \ \lambda \in [0,1]\} \subseteq \bigcap_{x \in X} B_{X^{**}}(x, \|x^{**} - x\|).$$

Ce qui termine la démonstration.

□

Il est clair que l'espace X de la proposition précédente contient $l^1(\mathbb{N})$ isomorphiquement mais n'est pas séparable puisqu'il contient aussi $l^2(\Gamma)$ isomorphiquement. La preuve précédente montre que pour cet espace le résultat du théorème 2.1 n'a pas lieu.

2.3 Cas des sous-espaces non réflexifs des lattices de Banach faiblement séquentiellement complets

La proposition 2.1, qui est assez générale, s'appuie fortement sur le théorème de Maurey dont la preuve est très complexe. Il est naturel de chercher à montrer, en utilisant des arguments simples et autonomes, le même résultat pour des espaces u-facteurs ayant une certaine structure. Notons que Godefroy et Li ont montré dans [38], avec des arguments liés à la théorie de la mesure, que si Y est un sous-espace non réflexif de $L^1(\mu)$ alors $Y^{\perp\perp} \cap L^1_s \neq \{0\}$; L^1_s étant la partie singulière de $L^1(\mu)^{**}$ (voir 1.5.2., exemple 1).
On rappelle les deux principaux lemmes qui ont conduit au résultat précédent.

Lemme([38], Lemme 1.1) *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $L^1(\Omega, \mu)$ qui converge presque partout vers* zéro. *Alors chaque point de w^*-accumulation z de la suite (f_n) appartient à la partie singulière L^1_s de L^{1**}.*

Lemme([38], Lemme 1.2) *Pour tout sous-espace Y de L^1, on a*

$$Y^\sharp = (Y^{\perp\perp} \cap L^1_s)^\top$$

Où $Y^\sharp = \{y^* \in Y^* \ , \ y^*$ est continue pour la convergence en mesure sur $B_Y\}$.

Nous montrons dans la suite que les lemmes ci-dessus se généralisent naturellement aux lattices de Banach faiblement séquentiellement complets. Nous fournissons ainsi une preuve simple et autonome de la proposition 2.1 dans le cas de ces espaces qui représentent une classe importante d'espaces u-facteurs. Pour cela nous utilisons la représentation de tels espaces comme des espaces de Köthe de fonctions sur un espace de probabilité. Notre principal outil sera alors la topologie de la convergence en mesure. Avant d'énoncer les résultats de cette généralisation, on rappelle quelques notions de la théorie de la mesure et la structure des lattices de Banach faiblement séquentiellement complets.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité ,(f_n) une suite dans $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.
On dit que (f_n) converge en mesure vers un élément $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{|f_n - f| \geq a\} = 0, \forall a > 0.$$

pour $f, g \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, on pose

$$d_0(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}$$

d_0 est une distance invariante par translation . La topologie définie sur $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ par d_0 est appelée topologie de la convergence en mesure et on la note τ_m.
On dit que (f_n) converge presque partout vers un élément $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ et on écrit $f_n \to f$ μ - *p.p.*, si

$$\exists S \in \Sigma,\ \mu(S) = 0 \ et\ \ \forall t \in \Omega \backslash S,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$$

Il est connu que la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure et que de toute suite qui converge en mesure on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout. On a aussi le théorème de Komlos suivant :
Théorème de Komlos (voir [52] ou [16] p.122). *Étant donnée une suite bornée* (f_n) *dans* $L^1[0,1]$, *il existe un* $f \in L^1[0,1]$, *une sous-suite* (g_n) *de* (f_n) *tels que chaque sous-suite* (h_n) *de* (g_n) *vérifie*

$$f = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} h_k \quad \mu - presque\ partout.$$

Soit X un lattice de Banach séparable faiblement séquentiellement complet (f.s.c.). Il s'ensuit (voir [58] ; Théorème 1.c.4) que :

1. X est une bande complémentée dans X^{**}.
2. X est un lattice de Banach continu en ordre.

Le point 1 implique (voir l'exemple 3 dans 1.5.2) que X est un u-facteur. Si on note π la projection de bande en question, on a :

$$X^{**} = X \oplus_u X_s \ \text{ avec } \ X = \pi(X^{**}) \ et\ X_s = Ker\pi = \{u \in X^{**},\ u \perp x, \forall x \in X\}.$$

Le point 2 implique, d'après ([58], Théorème 1.b.14), voir § 1.1.3, que X est isométrique en ordre à un espace de Köthe $\widetilde{X}$ de fonctions sur un espace de probabilité (Ω, Σ, μ) qui est un idéal de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ et $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ est un idéal de $\widetilde{X}$ tel que les inclusions

$$L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \subseteq \widetilde{X} \subseteq L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$$

sont continues avec L^∞ dense dans $\widetilde{X}$ et $\widetilde{X}$ est dense dans $(L^1, \|.\|_{L^1})$.

En identifiant X à $\widetilde{X}$, l'espace X est en particulier un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega,\mu)$, auquel nous pouvons restreindre la topologie τ_m.
Soit Y un sous-espace de X fermé pour la norme $\|.\|_X$. Posons

$$Y^\sharp = \{y^* \in Y^* \ t.q.\ y^*_{|B_Y} \ est \ \tau_m - continue\}$$

Il est facile de voir que $Y^\sharp$ est un sous-espace fermé de Y^*.

Proposition 2.4. *Si Y est non réflexif alors $Y^\sharp \neq Y^*$*

Démonstration. Supposons $Y^\sharp = Y^*$: $\forall y^* \in Y^*$, y^* est τ_m-continue sur B_Y. Soit (y_n) une suite bornée dans Y (on peut supposer $(y_n) \subset B_Y$). La suite (y_n) est aussi bornée dans $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$; puisque l'injection : $X \hookrightarrow L^1(\Omega,\mu)$ est continue. Par le théorème de Komlos, cité précédemment, la suite (y_n) contient une sous-suite (h_n) dont les moyennes de Césaro

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} h_n$$

convergent en mesure dans $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Donc la suite (σ_n) est τ_m-Cauchy dans B_Y et d'après la supposition ($\forall y^* \in Y^*$, y^* est τ_m-continue sur B_Y), la suite (σ_n) est w-Cauchy dans B_Y et puisque Y est f.s.c.,la suite (σ_n) est w-convergente vers $y \in Y$ (notons que y est dans B_Y car $\|y\| \leq \liminf \|\sigma_n\|$).
Une application du théorème de James (sur la caractérisation de la réflexivité) montre que Y est alors réflexif.
En effet pour $y^* \in S_{Y^*}$, on choisit la suite (y_n) telle que $y^*(y_n) \to \|y^*\| = 1$ d'après ce qui précède il existe une sous-suite de (y_n) qu'on note encore (y_n) et un $y \in B_Y$ tels que

$$y^*(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} y_k) \to y^*(y).$$

D'autre part

$$y^*(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} y^*(y_k) \to 1.$$

Ainsi y^* atteint sa norme en $y \in B_Y$. $\square$

La démonstration du lemme suivant, est similaire à celle du lemme 3.1 de [38].

Lemme 2.3. *Soit X un lattice de Banach séparable faiblement séquentiellement complet. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans X qui converge presque partout vers* zéro. *Alors*

$$\{ \text{ points de } w^* - \text{accumulation de } (x_n)\} \subseteq X_s.$$

Chaque point de w^*-accumulation de la suite (x_n) appartient à la partie singulière X_s.

Démonstration. On a : $X^{**} = X \oplus_u X_s$ avec $X_s = \{u \in X^{**}, u \perp x, \forall x \in X\}$.
$x_n \to 0$, μ-p.p. $\Longrightarrow \exists S \in \Sigma,\ \mu(S) = 0$ tel que

$$\forall t \in \Omega \backslash S,\ x_n(t) \to 0 : \quad \forall t \in \Omega\backslash S,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |x_n(t)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour $N \in \mathbb{N}^*$, posons

$$A_N = \bigcap_{n\geq N} \{t \in \Omega, |x_n| < \varepsilon\}.$$

On a $\mu(\Omega\backslash \bigcup_{N\geq 1} A_N) = 0$ car $(\Omega\backslash \bigcup_{N\geq 1} A_N) \subseteq S$.
La suite (A_N) étant croissante, le théorème de la convergence monotone implique qu'il existe N tel que $\mu(\Omega\backslash A_N) < \varepsilon$. Pour ce N, considérons l'application P_{A_N} définie sur X par

$$P_{A_N}(x) = x.\chi_{A_N} \ .$$

Comme X est un idéal dans $L^1(\Omega, \mu)$) et que $|P_{A_N}(x)| \leq |x|\ \forall x \in X$ alors $P_{A_N}(X) \subseteq X$. Plus précisément, l'espace $P_{A_N}(X) = \{x \in X,\ x \text{ porté par } A_N\}$ est complémenté dans X et P_{A_N} est une projection de bande dans X. D'où

$$X = P_{A_N}(X) \oplus P_{\Omega\backslash A_N}(X).$$

La bitransposée de P_{A_N}, soit $P^{**}_{A_N}$ est aussi une projection de bande dans X^{**} (voir [70], P. 224). Comme deux projections de bandes commutent (voir [70], p. 61), alors

$$\pi \circ P^{**}_{A_N} = P^{**}_{A_N} \circ \pi.$$

Soit $z \in X^{**}$ un point de w^*-accumulation de la suite (x_n). Nous pouvons écrire

$$z = x + u,\ x \in X,\ u \in X_s \ .$$

On a

$$\pi(P^{**}_{A_N}(z)) = P^{**}_{A_N}(\pi(z)) = P^{**}_{A_N}(x) = P_{A_N}(x). \tag{2.1}$$

La dernière égalité vient du fait que $P_{A_N}^{**} = P_{A_N}$ sur X.
D'autre part $P_{A_N}^{**}$ est w^*-continue, d'où

$$P_{A_N}^{**}(z) \in \overline{\{P_{A_N}^{**}(x_n)\}_{n\geq 1}}^{w^*} = \overline{\{P_{A_N}(x_n)\}_{n\geq 1}}^{w^*}.$$

Posons

$$K = \{y \in X, \ |y| \leq \varepsilon\}$$

K est un w-compact de X (voir [58], p. 28). Donc K est un w^*-compact dans X^{**} (car $w^*_{|X} = w$). Comme $\{P_{A_N}(x_n)\}_{n\geq 1} \subset K$, donc $\overline{\{P_{A_N}(x_n)\}_{n\geq 1}}^{w^*} \subseteq K$ par suite $P_{A_N}^{**}(z) \in K \subset X$. D'où

$$\pi(P_{A_N}^{**}(z)) = P_{A_N}^{**}(z)$$

Il s'ensuit des égalités (2.1) que $P_{A_N}(x) \in K$ c'est à dire $|x_{|A_N}| \leq \varepsilon$. Le réel ε étant arbitraire, on déduit que $x = 0 \quad \mu$-p.p. et donc $z = u \in X_s$.

$\square$

Pour la suite, on rappelle que si $\jmath : X \hookrightarrow L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ est l'injection canonique (d'un ideal dans un lattice), $\jmath$ est évidemment un homomorphisme de lattice car les lois $\vee$ et $\wedge$ sont les mêmes dans X et $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. La bitransposée de $\jmath$ soit $\jmath^{**} : X^{**} \longrightarrow (L^1(\Omega, \Sigma, \mu))^{**}$ est aussi un homomorphisme de lattice (voir [70], p. 224).
Pour simplifier les notations on écrira $L^1(\mu)$ (resp. $L^\infty(\mu)$) au lieu de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ (resp. $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$).

Lemme 2.4. *Soit X un lattice de Banach séparable f.s.c. : $X^{**} = X \oplus_u X_s$.*
Si

$$\jmath : X \hookrightarrow L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$$

est l'injection canonique ($\jmath(X)$ est un idéal de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$), alors

$$\jmath^{**}(X_s) = \jmath^{**}(X^{**}) \cap (L^1(\mu))_s$$

Démonstration. Montrons l'inclusion directe. Il est clair que

$$\jmath^{**}(X_s) \subseteq \jmath^{**}(X^{**}).$$

Soit $z \in \jmath^{**}(X_s)$ donc $z = \jmath^{**}(x_s)$ *avec* $x_s \in X_s$. On a les implications

$$x_s \in X_s \Longrightarrow x_s \perp x, \forall x \in X$$

$$\Longrightarrow \jmath^{**}(x_s) \perp \jmath^{**}(x),\ \forall x \in X,\ \ car\ \ \jmath^{**}\ homomorphisme\ de\ lattice$$

$$\Longrightarrow \jmath^{**}(x_s) \perp x,\ \forall x \in X\ \ car\ \ \jmath^{**} = \jmath\ sur\ X\ et\ \jmath(x) = x,\ \forall x \in X$$

$$\Longrightarrow \jmath^{**}(x_s) \perp \jmath(v), \forall v \in L^\infty(\mu)\ \ car\ L^\infty(\mu) \subseteq X \subseteq L^1(\mu).$$

Soit $u \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\ u = u^+ - u^-$, on a

$$u^+ = \sup_{n\geq 1}(u^+ \wedge n\chi_\Omega)\ \ et\ \ u^- = \sup_{n\geq 1}(u^- \wedge n\chi_\Omega)$$

Sachant que $u^+ \wedge n\chi_\Omega,\ u^- \wedge n\chi_\Omega \in L^\infty(\mu),\ \forall n \in \mathbb{N}$, donc

$$\jmath^{**}(x_s) \perp (u^+ \wedge n\chi_\Omega)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ et\ \ \jmath^{**}(x_s) \perp (u^- \wedge n\chi_\Omega),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

et par passage à la limite, on obtient

$$\jmath^{**}(x_s) \perp u^+\ \ et\ \ \jmath^{**}(x_s) \perp u^-,$$

donc

$$\jmath^{**}(x_s) \perp u.$$

Comme c'est vrai pour tout $u \in L^1(\mu)$, donc

$$z = \jmath^{**}(x_s) \in (L^1(\mu))_s.$$

Pour montrer l'autre inclusion, on considère $z \in \jmath^{**}(X^{**}) \cap (L^1(\mu))_s$. Donc

$$z = \jmath^{**}(u)\ avec\ u \in X^{**}\ \ et\ \ \jmath^{**}(u) \perp v,\ \forall v \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu).$$

On a, en particulier

$$\jmath^{**}(u) \perp \jmath(w),\ \ \forall w \in L^\infty(\mu).$$

Comme $\jmath = \jmath^{**}\ sur\ X \supseteq L^\infty(\mu)$, on déduit que

$$\jmath^{**}(u) \perp \jmath^{**}(w),\ \ \forall w \in L^\infty(\mu).$$

Ce qui implique que

$$u \perp w, \forall w \in L^\infty(\mu)\ \text{c.à d.}\ |u| \wedge |w| = 0, \forall w \in L^\infty(\mu).$$

Car, sinon, $\exists w \in L^\infty(\mu)$ tel que $|u| \wedge |w| \neq 0$ avec $|u| \wedge |w| \in X$ (puisque X est un ideal et $|u| \wedge |w| \leq |w| \in X$), donc $\jmath^{**}(|u| \wedge |w|) = \jmath(|u| \wedge |w|)$ et comme $\jmath$ est injective , $\jmath(|u| \wedge |w|) \neq 0$, d'où la contradiction avec $\jmath^{**}(u) \perp \jmath^{**}(w),\ \ \forall w \in L^\infty(\mu)$.

Donc $z = \jmath^{**}(u)$ avec $u \in X^{**}$ et $u \perp w$, $\forall w \in L^\infty(\mu)$.
Soit
$$x \in X,\ x = x^+ + x^- \textit{ avec } x^+ = \sup_{n\geq 1}(x^+ \wedge n\chi_\Omega) \textit{ et } x^- = \sup_{n\geq 1}(x^- \wedge n\chi_\Omega).$$
Le même raisonnement que dans la première inclusion, conduit à $z = \jmath^{**}(u)$ avec $u \perp x$, $\forall x \in X$ ce qui montre que $z \in \jmath^{**}(X_s)$.

$\square$

Lemme 2.5. *Soit X un lattice de Banach séparable f.s.c. : $X^{**} = X \oplus_u X_s$. Pour tout sous espace Y de X, on a l'implication*

$$y^* \in Y^\sharp, z \in Y^{\perp\perp} \cap X_s \Longrightarrow < y^*,\ z >= 0.$$

Démonstration. Supposons pour $y^* \in Y^\sharp$ et $z \in Y^{\perp\perp} \cap X_s$, que

$$< y^*,\ z >= \lambda,\ \lambda > 0$$

(Si $\lambda < 0$, on remplace y^* par $-y^*$).
On a $z \in Y^{\perp\perp} = \overline{Y}^{w^*} \subseteq \overline{X}^{w^*}$. Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \subset Y$ tel que $\|x_\alpha\|_Y \leq \|z\|$, $\forall \alpha \in I$ et soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre sur I telle que
$$w^* - \lim_{\alpha\to\mathfrak{F}} x_\alpha = z\ .$$
Comme $\jmath^{**}$ est w^*-continue alors
$$w^*\text{-}\lim_{\alpha\to\mathfrak{F}} \jmath(x_\alpha) = w^*\text{-}\lim_{\alpha\to\mathfrak{F}} \jmath^{**}(x_\alpha) = \jmath^{**}(z).$$
Puisque $z \in X_s$, on a d'après le lemme 2.4,

$$\jmath^{**}(z) \in (L^1(\mu))_s \quad (1)$$

On a aussi $\lim_{\alpha\to\mathfrak{F}} < x_\alpha,\ y^* > = < y^*,\ z >= \lambda$, alors

$$\exists A \in \mathfrak{F}\ /\ < x_\alpha,\ y^* > \geq \frac{\lambda}{2},\ \forall \alpha \in A. \tag{2.2}$$

Soit $C = conv[(x_\alpha)_{\alpha\in A}]$, il est clair que $z \in \overline{C}^{w^*}$ et donc $\jmath^{**}(z) \in \overline{\jmath(C)}^{w^*}$.

Fait (voir [40], p. 675).

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \jmath^{**}(z) \in \overline{\jmath(C) \cap (\|\jmath^{**}(z\| + \varepsilon)B_{L^1(\mu)}}^{w^*}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, pour un w^*-voisinage V de $\jmath^{**}(z)$, posons

$$W_{V,\varepsilon} = V \cap \jmath(C) \cap (\|\jmath^{**}(z\| + \varepsilon) B_{L^1(\mu)}.$$

Il est clair, du fait précédent, que $W_{V,\varepsilon}$ est non vide.

On peut, facilement, vérifier que, pour deux w^*-voisinages de $\jmath^{**}(z)$ V etV', et pour $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^\star$, on a : $W_{V,\varepsilon} \cap W_{V',\varepsilon'} = W_{V\cap V',\inf\{\varepsilon,\varepsilon'\}} = W_{V'',\varepsilon''}$.
Ainsi $\mathfrak{B} = \{W_{V,\varepsilon}\}$ constitue une base de filtre sur $\jmath(C)$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\jmath(C)$ contenant le filtre engendré par $\mathfrak{B}$.
On montre que l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ converge en mesure vers zéro.
Considérons, pour $a > 0$, l'application $F_a : \jmath(C) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $f \in \jmath(C)$, par

$$F_a(f) = \mu\{|f| > a\}.$$

On peut vérifier que $\forall a > 0$, F_a converge selon $\mathcal{U}$.
En effet, par définition, F_a converge selon $\mathcal{U}$ si et seulement si le filtre image $F_a(\mathcal{U})$ converge dans $\mathbb{R}$. Or, $\forall a > 0$, il existe $\mathbf{P} \in \mathcal{U}$ tel que $F_a(\mathbf{P})$ est bornée (car $\jmath(C)$ est borné) ce qui montre que, $\forall a > 0$, le filtre $F_a(\mathcal{U})$ converge dans $\mathbb{R}$.
Par définition de la convergence en mesure on a

$$\tau_m - \lim(\mathcal{U}) = 0 \Longleftrightarrow \forall a > 0,\ \lim_{\mathcal{U}} F_a = 0$$

Supposons que $\lim\limits_{\mathcal{U}} F_a = 2\delta > 0$, alors

$$\exists\ \mathbf{P} \in \mathcal{U}\ t.q.\ \forall f \in \mathbf{P},\ \mu\{|f| > a\} = F_a(f) > \delta \qquad (2)$$

Il résulte de la définition de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ que

$$w^* - \lim(\mathcal{U}) = \jmath^{**}(z) \qquad (3)$$

$$\lim_{\mathcal{U}} \|.\|_{L^1} \leq \|\jmath^{**}(z)\| \qquad (4)$$

$$(4)\ \text{ implique qu'il existe }\ \mathbf{P}' \in \mathcal{U}\ t.q.\ \forall f \in \mathbf{P}',\ \|f\|_{L^1} \leq \|\jmath^{**}(z)\| + \frac{a\delta}{12}.$$

D'après le résultat de Yosida et Hewitt ([72], Théorème 1.19), on a l'implication suivante.

$$(1)\text{ implique qu'il existe }\ M \in \Sigma\ \ :\ \mu(M) < \frac{\delta}{2}\ \ et\ \ |\jmath^{**}(z)|(M) = |\jmath^{**}(z)|(\chi_M) = \|\jmath^{**}(z)\|.$$

De (3) et du fait que la fonction $g \longrightarrow \chi_M.g$ est $w^* - w^*$-continue de L^{1**} dans L^{1**}, on a

$$w^* - \lim_{\mathcal{U}}(\chi_M(.)) = \chi_M.\jmath^{**}(z) \qquad (5)$$

De (5) et du fait que la norme $\|.\|_{L^1}$ est w^*-semi-continue inférieurement, on a

$$\exists\ \mathbf{P}'' \in \mathcal{U}\ t.q.\ \forall f \in \mathbf{P}'',\quad \|\chi_M.f\|_{L^1} \geq \|\chi_M.\jmath^{**}(z)\| - \frac{a\delta}{3}.$$

Soit $f \in \mathbf{P} \cap \mathbf{P}' \cap \mathbf{P}''$, on a

$$\|\chi_M.f\|_{L^1} = \int_M |f|d\mu \quad et \quad \|\chi_M.\jmath^{**}(z)\| = \|\jmath^{**}(z)\|,$$

$$\int_\Omega |f|d\mu = \int_M |f|d\mu + \int_{\Omega\setminus M} |f|d\mu.$$

Comme $f \in \mathbf{P} \cap \mathbf{P}''$, on a

$$\int_M |f|d\mu \geq \|\jmath^{**}(z)\| - \frac{a\delta}{3}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus M} |f|d\mu &\geq \int_{(\Omega\setminus M)\cap\{|f|>a\}} |f|d\mu \\ &\geq a\int_{(\Omega\setminus M)\cap\{|f|>a\}} 1d\mu = a\int_{\{|f|>a\}} 1d\mu - a\int_{M\cap\{|f|>a\}} 1d\mu \\ &\geq a\mu\{|f|>a\} - a\mu(M) \\ &\geq a(\delta - \frac{\delta}{2}) = \frac{a\delta}{2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{L^1} \geq \|\jmath^{**}(z)\| - \frac{a\delta}{3} + \frac{a\delta}{2} = \|\jmath^{**}(z)\| + \frac{a\delta}{6}.$$

Comme $f \in \mathbf{P}'$, on a

$$\|f\|_{L^1} \leq \|\jmath^{**}(z)\| + \frac{a\delta}{12}.$$

Cette contradiction montre que $\lim_{\mathcal{U}} F_a = 0$ ce veut dire que τ_m-$\lim(\mathcal{U}) = 0$.
Comme $y^* : B_Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est τ_m-continue, donc

$$\lim_{\mathcal{U}} y^* = y^*(0) = 0.$$

Ce qui implique qu'il existe $\mathbf{P} \in \mathcal{U}$ tel que

$$\forall f \in \mathbf{P}, < y^*,\ f >< \frac{\lambda}{4}.$$

Ce qui contredit (2.2) car $\forall f \in \mathbf{P}$, f est une combinaison convexe des $x_\alpha, \alpha \in A$ puisque $f \in \jmath(C) \cong C$.

$\square$

Proposition 2.5. *Soit X un lattice de Banach séparable faiblement séquentiellement complet : $X^{**} = X \oplus_u X_s$. Pour tout sous espace Y de X on a*

$$Y^\sharp = (Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top.$$

Démonstration. Rappelons que

$$(Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top = \{x^* \in X^*,\ x^*_{|Y^{\perp\perp}\cap X_s} = 0\}.$$

Il est clair, d'après le lemme 2.5, que

$$Y^\sharp \subseteq (Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top.$$

Pour l'autre inclusion supposons qu'il existe un $y^* \in Y^*$ tel que

$$y^* \in (Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top \ \text{ et } \ y^* \notin Y^\sharp.$$

Dire que $y^* \notin Y^\sharp$ revient à dire qu'il existe une suite (y_n) dans B_Y telle que (y_n) converge en mesure vers zéro (τ_m - $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$) et $\lim\limits_{n\to\infty} y^*(y_n) \neq y^*(0) = 0$. Donc (y_n) contient une sous-suite qui converge μ-p.p. vers zéro. Cette sous-suite qu'on notera encore (y_n) admet un point d'accumulation z pour la topologie $w^* = \sigma(X^{**}, X^*)$. D'après le lemme 2.3, $z \in X_s$ donc $z \in Y^{\perp\perp} \cap X_s$ par conséquent

$$< z,\ y^* >= 0.$$

D'autre part, comme z est un point de w^*-accumulation de (y_n), alors pour chaque $x^* \in X^*$, le nombre $< z,\ x^* >$ est un point d'accumulation de la suite réelle $(< y_n,\ x^* >)_{n\geq 1}$. En particulier $< z,\ y^* >$ est un point d'accumulation de la suite $(< y_n,\ y^* >)_{n\geq 1}$ donc

$$< z, y^* >= \lim_{n\to\infty} y^*(y_n) \neq 0.$$

On arrive à une contradiction. Donc $\forall y^* \in (Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top,\ y^* \in Y^\sharp$.

$\square$

On peut à présent déduire le corollaire suivant qui représente un cas spécial de la proposition 2.1 .

Corollaire 2.1. *Soit X un lattice de Banach séparable faiblement séquentiellement complet : $X^{**} = X \oplus_u X_s$. Si Y est un sous espace non réflexif de X alors*

$$Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}.$$

Démonstration. On sait, par la proposition 2.4, que $Y^* \neq Y^\sharp$. Ce qui implique, par la proposition 2.5, que $(Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top \neq Y^*$. Cela veut dire qu'il existe $y^* \in Y^*$ tel que

$$y^* \notin (Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top.$$

Autrement dit, il existe $y^* \in Y^*$, il existe $z \in Y^{\perp\perp} \cap X_s$ tels que $< z\ ,\ y^* > \neq 0$.
Ce qui veut dire qu'il existe $z \in Y^{\perp\perp} \cap X_s$, $z \neq 0$.

□

Précisons que l'utilisation de la proposition 2.5 dans la preuve précédente consiste dans la seule inclusion $(Y^{\perp\perp} \cap X_s)^\top \subseteq Y^\sharp$. L'autre inclusion, qui est l'objet du lemme 2.5 dont la preuve est très élaborée, n'est pas nécessaire pour la conclusion du corollaire 2.1 précédent.

2.4 Cas des projections de norme 1 non inconditionnelles

Proposition 2.6. *Il existe un espace de Banach X tel que*
1) X est un dual : $X^{**} = X \oplus X_s$ avec X_s w^*-fermé.
2) X contient un sous-espace Y non réflexif tel que

$$Y^{\perp\perp} \cap X_s = \{0\}$$

Démonstration. Soit X le bidual d'un espace de Banach non réflexif Y ; X est un espace dual et Y est un sous-espace non réflexif de X. Posons $X = E^*$ où $E = Y^*$ on a, voir la proposition 1.3,

$$X^{**} = X \oplus E^\perp = X \oplus (Y^*)^\perp.$$

Soit $u \in Y^{\perp\perp} \cap (Y^*)^\perp$ alors

$$u_{|Y^\perp} = 0 \ \text{ et } \ u_{|Y^*} = 0.$$

Or (voir la relation 1.1)

$$Y^{***} = Y^* \oplus Y^\perp.$$

Donc

$$u = 0 \ \text{ sur } \ Y^{***} = X^*.$$

□

Ce résultat souligne l'importance de l'hypothèse sur l'inconditionnalité de la projection dans la proposition 2.1 ; on voit que, même dans le cas où l'espace est un dual et le noyau de la projection est w^*-fermé, la conclusion de la proposition 2.1 n'a pas lieu.
Cependant si X est un espace dual d'un espace de Banach E et Y est un sous-espace w^*-fermé, alors on a l'implication :

$$Y \text{non réflexif} \Rightarrow Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}.$$

En effet, Sous les hypothèses citées, on a (voir [45], p. 165)

$$Y^{\perp\perp} = Y \oplus (Y^{\perp\perp} \cap E^{\perp}).$$

2.5 Octaédralité des sous-espaces des espaces L-facteurs

On a vu au chapitre précédent (voir remarque 1.6) qu'un sous-espace Y non réflexif d'un espace de Banach octaédral X n'est pas nécessairement octaédral. Cependant la situation est différente si X est L-facteur de son bidual et c'est la proposition 2.1 qui en est la clé.

Lemme 2.6. *Soit X un espace de Banach L-facteur de son bidual : $X^{**} = X \oplus_1 X_s$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $u \in X_s$.

(ii) $\|u + x\| = \|u\| + \|x\|$, $\forall x \in X$.

(iii) $\|u + x\| = \|u - x\|$, $\forall x \in X$.

Démonstration. les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont évidentes. Vérifions que $(iii) \Rightarrow (i)$.
Soit $u \in X^{**}$ donc

$$u = x + x_s;\ x \in X,\ x_s \in X_s \ \ et \ \ u + x = 2x + x_s$$

L'assertion (iii) et le fait que X est L-facteur de son bidual impliquent

$$\|x_s\| = \|u - x\| = \|u + x\| = 2\|x\| + \|x_s\|.$$

D'où $\|x\| = 0$ et $u = x_s$.

□

Théorème 2.2. *Soit X un espace de Banach séparable L-facteur de son bidual :*

$$X^{**} = X \oplus_1 X_s$$

Si Y est un sous-espace non réflexif de X, alors Y est octaédral.

Démonstration. L'espace X est en particulier un u-facteur. Par la proposition 2.1, on a $Y^{\perp\perp} \cap X_s \neq \{0\}$. Ce qui veut dire qu'il existe $u \in Y^{**}$ tel que $u \neq 0$ et $u \in X_s$ (Y^{**} étant identifié à $Y^{\perp\perp}$ dans X^{**}). Donc, compte tenu du lemme 2.6, il existe $u \in Y^{**}$, $u \neq 0$ tel que

$$\|u + x\| = \|u\| + \|x\| \ , \ \forall x \in X \quad (\text{ en particulier } \ \forall x \in Y).$$

Ce qui montre, d'après le lemme 1.1, que Y est octaédral.

$\square$

Chapitre 3

Propriété faible du point fixe dans les espaces de fonctions lisses

3.1 Introduction

Définition 3.1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach , C un convexe fermé borné de X. On appellera contraction sur C toute application $T : C \mapsto C$ vérifiant :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \ , \forall x, y \in C.$$

On dit que C a la propriété du point fixe si toute contraction T sur C admet un point fixe (i.e., $\exists x \in C \ : \ T(x) = x$).
On dit que X a la propriété faible du point fixe (en abrégé $wfpp$) si tous les convexes faiblement compacts de X ont la propriété du point fixe.

Kirk a montré, dans [51] que si l'espace de Banach X est réflexif et a la structure normale ce qui est le cas si X est uniformément convexe, alors X a $wfpp$.
Arguments fondamentaux :
Si C est un convexe faiblement compact de X et T une contraction sur C alors C contient une suite quasi-fixe ; c'est une suite (x_n) telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$.
En effet, soit $x_0 \in C$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, l'application $T_n : C \to C$ définie par : $T_n(x) = (1 - \dfrac{1}{n})T(x) + \dfrac{x_0}{n}$, admet un unique point fixe x_n (ce qui est vrai plus généralement dans le cas où C est un convexe fermé borné).
Toute chaîne ordonnée par l'inclusion dans l'ensemble des convexes fermés et bornés K de X telle que $K \subseteq C$ et $T(K) \subseteq K$ admet un élément minimal K_0 appelé convexe minimal pour T. Si K_0 est réduit à un seul point x alors x est un point fixe de T. Si T n'a pas de point fixe alors $diam K_o > 0$.

Lemme de Karlovitch (voir [48], [49]). Soit K un convexe faiblement compact minimal pour la contraction T et soit (x_n) une suite quasi-fixe, alors pour tout x de K ,

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = diam(K).$$

Partant de ces arguments, Karlovitch [48] a montré que l'espace de James (qui est réflexif mais qui n'a pas la structure normale) a la $wfpp$ ce qui prouve que la structure normale n'est pas nécessaire. D. Alspach [4] a montré que L'espace L^1 n'a pas la $wfpp$. Partant des arguments ci-dessus, B. Maurey [62] a utilisé la technique des ultrapuissances pour montrer que les sous-espaces réflexifs de L^1 (qui sont super-réflexifs) ont la $wfpp$ (Pour les propriétés géométriques citées, on renvoie à [27] et aussi à [15]).

Pei-Kee Lin [59] et (par la suite) Khamsi [50] ont montré, en utilisant la technique des ultrapuissances développée par Maurey, que les espaces de Banach qui sont à base λ-inconditionnelle avec $\lambda < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$ ont la $wfpp$. On savait déjà [62] que $c_0(\mathbb{N})$ (qui n'est pas réflexif mais qui est à base 1-inconditionnelle) a la wfpp.

Grace à des travaux plus récents de Kalton [14] et de Godefroy [32], on dispose de nombreux exemples d'espaces de Banach qui admettent des "plongements presque isométriques" dans les espaces à base 1-inconditionnelle. Dans ce chapitre, nous observons que de tels espaces sont isométriques à des sous-espaces d'espaces de Banach à base $(1+\varepsilon)$-inconditionnelle pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi. Nous développons aussi les résultats de Godefroy [32] et nous montrons leur application à la propriété du point fixe pour (en particulier) les espaces de fonctions lisses comme par exemple certains espaces de Muntz.

3.2 Rappels

3.2.1 Bases inconditionnelles

Définition 3.2. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach. Une suite $\{e_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de X est dite base de Schauder ou tout simplement base de X si pour tout $x \in X$, il existe une suite de scalaires unique $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que : $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$, où la convergence a lieu au sens de la norme :

$$\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n\| = 0.$$

Si $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est une base de X alors les projections $P_N : X \to X$, définies par

$$P_N(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n) = \sum_{n=1}^{n=N} a_n e_n, \quad \text{sont continues de plus} \quad \sup_N \|P_n\| < \infty.$$

Les projections $\{P_N\}_{N\in\mathbb{N}^*}$ sont appelées projections naturelles associées à la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ et le nombre $c = \sup\limits_N \|P_N\|$ est appelé constante de la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$.

Soit $\{e_n\}_{n\geq 1}$ une base sur X. Les forme linéaires e_n^* définies sur X par $e_n^*(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k e_k) = a_n$, sont continues sur X. Ces fonctionnelles sont caractérisées par $e_n^*(e_m) = \delta_n^m$.
La base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de X est dite contractante (shrinking, en anglais) si le système $\{e_n^*\}_{n\geq 1}$ (dit système biorthogonal associé à $\{e_n\}_{n\geq 1}$) est une base de X^*. Dans ce cas, les bases $\{e_n\}_{n\geq 1}$ et $\{e_n^*\}_{n\geq 1}$ ont la même constante c.

On dit qu'une base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de X est inconditionnelle si pour tout $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$, la série converge inconditionnellement ce qui veut dire que pour toute permutation π des entiers, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)} e_{\pi(n)}$ converge vers x.

Il est connu (voir [57], [54]) qu'une base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de X est inconditionnelle si et seulement si on a l'une des deux conditions équivalentes suivantes .
1) Pour toute partie F de $\mathbb{N}^\star$, la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ implique celle de $\sum\limits_{n\in F} a_n e_n$.
2) Pour tout choix de signe $\theta = (\theta_n)_{n\geq 1} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}$, la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ implique celle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n$.
A une base inconditionnelle $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de X, sont associées des symétries M_θ, $\theta = (\theta_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^\star}$ telles que pour $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$, $M_\theta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n$. Les symétries M_θ sont continues de plus $\sup_\theta \|M_\theta\| < \infty$.
Si $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ est une base inconditionnelle, le nombre

$$\lambda = \sup_\theta \|M_\theta\|$$

est appelé constante d'inconditionnalité de la base et on dira que la base $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ est λ-inconditionnelle. On a toujours

$$1 \leq c \leq \lambda \leq 2c.$$

Si $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ est une base λ-inconditionnelle contractante alors le système biorthogonal $\{e_n^*\}_{n\geq 1}$ associé à $\{e_n\}_{n\geq 1}$) est aussi une base λ-inconditionnelle dans X^*.

Exemple 1. *La base naturelle* $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$, $e_n = (0, 0, ...0, 1, 0, ...)$ *est une base* 1*-inconditionnelle dans chacun des espaces* $c_0(\mathbb{N})$, $l^p(\mathbb{N}), 1 \leq p < \infty$ *et plus généralement dans l'espace d'Orlicz séquentiel* l^ϕ *avec* ϕ *vérifiant la condition* Δ_2 *en* zéro*, [57].*

Pour en savoir plus sur les espaces de Banach à bases de Schauder on pourra consulter [57],[54],[60].

3.2.2 Propriétés d'approximation

Définition 3.3. (**Grothendieck**) Soit X un espace de Banach. On dit que X a la propriété d'approximation (AP) si pour tout compact $K \subset X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un opérateur $T : X \to X$ de rang fini tel que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in K$.
Si on peut prendre $\| T \| \leq \lambda$, pour un certain $\lambda > 0$ indépendent de K et de ε, on dit que X a la AP bornée (BAP).
Si de plus on peut imposer $\| T \| \leq 1$ $(\lambda = 1)$, on dit que X a la AP métrique (MAP).

Définition 3.4. (**Cas séparable**) Soit X un espace de Banach séparable.
(i) X a la BAP s'il existe une suite d'opérateurs bornés $R_n : X \to X$ de rang fini telle que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n x = x$, $\forall x \in X$. Si de plus $\sup\limits_n \| R_n \| \leq 1$, X a la MAP.
(ii) La suite (R_n) de (i) est dite suite approximante sur X.
(iii) On dit que X a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle (UMAP) s'il existe une suite approximante (R_n) sur X telle que

$$\lim_{n\to\infty} \| I - 2R_n \| = 1.$$

Si de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \| R_n^* x^* - x^* \| = 0$, pour tout $x^* \in X^*$, On dit que X a la UMAP contractante.

La UMAP a été introduite (pour les espaces de Banach séparables) par Casazza et Kalton en 1990 ([9]) et la version complexe par Godefroy, Kalton et Saphar dans [37]. Dans [34], Godefroy et Kalton ont montré que UMAP $\Rightarrow$ UMAP commutante. Dans [35, 36], Godefroy, Kalton et Li ont caractérisé les sous-espaces de L^1 avec la UMAP.
La propriété d'approximation apparaît pour la première fois dans le livre de Banach en 1932 mais c'est Grothendieck qui, dans un travail colossal ([42]), a intoduit la propriété d'approximation avec toutes ses variantes dans le cas des espaces de Banach quelconques. Le lecteur intéressé peut se référer à l'article de Casazza, [9].

Dans [42], Grothendieck a établi des critères qui conduisent en particulier aux résultats suivants.

Théorèmes de Grothendieck ([42]).

1. *Si un espace de Banach séparable X est(isométrique à) un dual et a la AP, alors X a la MAP.*

2. *Soit X un espace de Banach. Si X^* a la AP (respectivement la MAP), alors X a la AP (respectivement la MAP).*

Une preuve pour **1** est donnée dans ([57], Théorème1.e.15).

3.2.3 Décomposition finie dimensionnelle (FDD)

Définition 3.5. Soit X un espace de Banach. Une suite $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sous-espaces de dimension finie de X est appelée une décomposition finie dimensionnelle (FDD) pour X, si chaque $x \in X$ se présente de façon unique de la forme : $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, avec $x_n \in X_n$ pour tout n. Si une telle suite existe pour X, on dit que l'espace X a une FDD et on écrit $X = \sum_{n=1}^{+\infty} \oplus X_n$.

une FDD $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X détermine une suite $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de projections sur X en posant $P_n(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$. Ces projections sont bornées avec $\sup_n \| P_n \| < \infty$ et $P_nP_m = P_mP_n = P_{min(n,m)}$. Le nombre $K = \sup_n \| P_n \|$ est appelé constante de la décomposition. Inversement chaque suite approximante $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de projections bornées sur X telles que $P_nP_m = P_{min(n,m)}$ détermine une FDD $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $X_1 = P_1X$ et $X_n = (P_n - P_{n-1})X$ pour $n > 1$.

La FDD $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X est dite contractante si pour tout $x^* \in X^*$ $\lim_{n\to\infty} \| P_n^* x^* - x^* \| = 0$.

La FDD $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ est inconditionnelle si pour tout choix de signe $\theta = (\theta_n)_{n\geq 1} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ implique celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$. Dans ce cas les opérateurs M_θ définis par $M_\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ sont bornés. Le nombre $M = \sup_\theta \|M_\theta\|$ est appelé constante d'inconditionnalité de la décomposition. On dira que la FDD est M-inconditionnelle.

Remarque. Pour tout espace de Banach séparable X, on a les implications suivantes qui se déduisent directement à partir des définitions.

$$X \text{ est à base } \Rightarrow X \text{ a FDD } \Rightarrow X \text{ a la BAP} \Rightarrow X \text{ a la AP.}$$

En 1972, Enflo a construit un espace de Banach X séparable (et de plus réfléxif) sans la AP (voir [54]). Ainsi, il existe des espaces de Banach séparables sans une FDD et donc sans base. On sait aussi, grâce à Szarek (1987), qu'il existe des espaces de Banach séparables avec une UFDD mais sans base.

3.2.4 Distance de Banach-Mazur

Définition 3.6. Soient X et Y deux espaces de Banach isomorphes. On appelle distance de Banach-Mazur entre X et Y le nombre :

$$d_{BM}(X,Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|,\ T : X \to Y \ isomorphisme\}.$$

On a toujours

$$1 \leq d_{BM}(X,Y) < \infty.$$

Si $d_{BM}(X,Y) = 1$, on dit que X et Y sont presque isométriques. Cela se traduit par : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un isomorphisme T_ε de X dans Y tel que $\|T_\varepsilon\|\|T_\varepsilon^{-1}\| < 1+\varepsilon$.

Si $d_{BM}(X,Y) \leq \beta$, on dira parfois que X est β-isomorphe à Y .

Remarque. Si X et Y sont isométriques alors $d_{BM}(X,Y) = 1$. L'inverse n'est pas vrai (inf peut ne pas être atteint dans $d_{BM}(X,Y)$).

On dira qu'un espace de Banach X se plonge dans un espace de Banach Y avec une distorsion $1+\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ε de Y tel que X est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à X_ε (: $d_{BM}(X, X_\varepsilon) \leq 1+\varepsilon$).

3.3 Constante d'inconditionnalité et propriété faible du point fixe

3.3.1 Utilisation des ultrapuissances

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. On appelle ultrapuissance de X l'espace $\widetilde{X}$ quotient de l'espace

$$l^\infty(X) = \{(x_n) : x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\| < \infty\}$$

par le sous-espace $\mathcal{N} = \{(x_n) \in l^\infty(X) : \lim_{n\to\mathcal{U}} \|x_n\| = 0\}$.

Si (x_n) est un représentant de $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, on a

$$\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}} = \lim_{n\to\mathcal{U}} \|x_n\|$$

Il est clair que X est isométrique à un sous-espace de $\widetilde{X}$ par l'application $x \to (x, x, ...)$. Si (S_n) est une suite de projections sur X telles que $\sup_n \|S_n\| < \infty$, alors $\widetilde{S} = (S_n)$ telle que $\widetilde{S}(x_n) = (S_n x_n)$ est une projection sur $\widetilde{X}$ et $\|\widetilde{S}\| \leq \sup_n \|S_n\|$.

Arguments de Maury [62]. Soient C un convexe fermé borné de X et $T : C \to C$ une contraction. On désignera par $\widetilde{C}$ l'ultrapuissance de C : $\widetilde{C} = \{\widetilde{x} \in \widetilde{X};\ \widetilde{x} = (x_n)\ ,\ x_n \in C\}$.
- L'application $\widetilde{T} : \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ définie par $\widetilde{T}(\widetilde{x}) = \widetilde{T}(x_n) = (T(x_n))$ est une contraction sur $\widetilde{C}$.
- En outre $\widetilde{T}$ admet toujours des points fixes. En effet dire que $\widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{x}$ équivaut à dire que $\widetilde{x}$ est représenté par une suite quasi-fixe (x_n).
- Si K est un convexe faiblement compact minimal pour T alors $\widetilde{K}$ est un convexe fermé borné et $dim(K) = diam\widetilde{K}$.

En se basant sur les arguments de Maury, P.K. Lin a reformé le lemme fondamental de Karlovitch dans le langage des ultrapuissances comme suit :
Lemme de Lin([59], Théorème A')**.** *Soit K un convexe faiblement compact qui est minimal pour T. Si $\widetilde{y}$ est un point fixe de $\widetilde{T}$ dans $\widetilde{K}$ et $x \in K$, alors $\|\widetilde{y} - x\| = dim(K)$.*
Supposons de plus que $diamK = 1$ et $0 \in K$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|\widetilde{y}\| > 1 - \varepsilon$ quand $\|\widetilde{T}\widetilde{y} - \widetilde{y}\| < \delta$.

3.3.2 Théorèmes de P.K. Lin et A. Khamsi

Théorème 3.1. *[59] Soit X un espace de Banach avec une base λ-inconditionnelle.*
Si $\lambda < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$, alors X a la $wfpp$.

Démonstration. Supposons que X a une base $\{e_n\}$ λ-inconditionnelle et X n'a pas la $wfpp$. Alors il existe un convexe faiblement compact K qui est minimal pour une contraction T laissant invariant K. On peut supposer $diamK = 1$. Dans K, il va exister une suite quasi-fixe (x_n) pour T convergeant faiblement vers $0 \in K$. En passant au sous-suites, on peut supposer que les projections naturelles P_n sur X associées à $\{e_n\}$ vérifient

$$P_n P_m \neq 0 \ si \ n \neq m, \qquad \lim_{n\to\infty} \|P_n x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 \ \ et \ \ \lim_{n\to\infty} \|(I - P_n)(x_n)\| = 0$$

les points $\widetilde{y} = (x_n)$ et $\widetilde{z} = (z_n)$ avec $z_n = x_{n+1}$ sont fixes pour $\widetilde{T}$ et $\|\widetilde{y} - \widetilde{z}\| = 1$.
Soient $\widetilde{P} = (P_n)$ et $\widetilde{Q} = (P_{n+1})$. Alors $\widetilde{P}\widetilde{y} = \widetilde{y}$ et $\widetilde{Q}\widetilde{z} = \widetilde{z}$ et pour tout $x \in K$,

$$\widetilde{P}x = \widetilde{Q}x = \widetilde{P}\widetilde{z} = 0 = \widetilde{Q}\widetilde{y}.$$

$$\text{Soit } \ \widetilde{W} = \{\widetilde{w} \in \widetilde{K}; \exists x \in K : \|\widetilde{w} - x\| \leq \frac{\lambda}{2} \ \ et \ \ max(\|\widetilde{w} - \widetilde{x}\|, \|\widetilde{w} - \widetilde{y}\|) \leq \frac{1}{2}\}.$$

Alors $\widetilde{W}$ est un convexe non vide, fermé borné et invariant par $\widetilde{T}$. Donc $\widetilde{W}$ contient une suite quasi-fixe pour $\widetilde{T}$. Pour faciliter les calculs, on suppose que $\widetilde{W}$ contient un point $\widetilde{w}$ tel que $\|\widetilde{w}\| = 1$. Soit $x \in K$ avec $\|\widetilde{w} - x\| \leq \frac{\lambda}{2}$ et soit $\widetilde{f} \in \widetilde{X}^*$ avec $\widetilde{f}(\widetilde{w}) = 1 = \|\widetilde{f}\|$. D'où, $1 - \widetilde{f}(\widetilde{y}) = \widetilde{f}(\widetilde{w} - \widetilde{y}) \leq \|\widetilde{w} - \widetilde{y}\| \leq \frac{1}{2}$ et donc $\widetilde{f}(\widetilde{y}) \geq \frac{1}{2}$. De façon analogue, on obtient les inégalités $\widetilde{f}(\widetilde{z}) \geq \dfrac{1}{2}$ et $\widetilde{f}(x) \geq 1 - \dfrac{\lambda}{2}$. Soit $\alpha = \widetilde{f}((\widetilde{I} - \widetilde{P} - \widetilde{Q})\widetilde{w})$. Alors

$$1 - \alpha = \widetilde{f}(\widetilde{w}) - \widetilde{f}((\widetilde{I} - \widetilde{P} - \widetilde{Q})\widetilde{w}) = \widetilde{f}((\widetilde{P} + \widetilde{Q})\widetilde{w}) = \widetilde{f}(\widetilde{P}\widetilde{w}) + \widetilde{f}(\widetilde{Q}\widetilde{w})$$

et donc ou $\widetilde{f}(\widetilde{P}\widetilde{w}) \leq \dfrac{1-\alpha}{2}$, ou $\widetilde{f}(\widetilde{Q}\widetilde{w}) \leq \dfrac{1-\alpha}{2}$. Soit $\widetilde{f}(\widetilde{P}\widetilde{w}) \leq \dfrac{1-\alpha}{2}$. Alors

$$(2-2\alpha) - \frac{\lambda}{2} \leq 2\widetilde{f}((\widetilde{P}+\widetilde{Q})\widetilde{w}) - \widetilde{f}(\widetilde{w}-x) = \widetilde{f}((2\widetilde{P}+2\widetilde{Q}-\widetilde{I})(\widetilde{w}-x)) \leq \|\widetilde{f}\|\|2\widetilde{P}+2\widetilde{Q}-\widetilde{I}\|\|\widetilde{w}-x\| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

Et

$$\alpha + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 - (1-\alpha) \leq \widetilde{f}(\widetilde{y}) + \widetilde{f}(\widetilde{w}) - 2\widetilde{f}(\widetilde{P}\widetilde{w}) = \widetilde{f}(\widetilde{w}-\widetilde{y}) + 2\widetilde{f}(\widetilde{P}(\widetilde{y}-\widetilde{w})) \leq \|\widetilde{f}\|\|\widetilde{I}-2\widetilde{P}\|\|\widetilde{w}-\widetilde{y}\| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

D'où $3 - \dfrac{3\lambda}{2} \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$ et donc $\lambda \geq \dfrac{\sqrt{33}-3}{2}$

$\square$

En faisant intervenir la constante c de la base, Khamsi a établi (avec les mêmes arguments) le résultat suivant.

Théorème 3.2. *[50] Soit X un espace de Banach avec une base λ-inconditionnelle. Si les constantes λ et $c = \sup\limits_{F \subset \mathbb{N}} \|P_F\|$ vérifient : $c(\lambda + 2) < 4$, alors X a la $wfpp$.*

Le lien entre les 2 théorèmes peut se voir ainsi :
On a toujours $c(\lambda + 2) \leq \lambda(\lambda + 2)$, donc $\lambda < -1 + \sqrt{5}$ vérifie l'hypothèse du théorème 3.2. et $\lambda < -1 + \sqrt{5} \Rightarrow \lambda < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$.

Pour notre travail on s'appuiera sur (la forme donnée par) le théorème 3.1. Notre intérét pour ce théorème vient, tout d'abord, de la propriété suivante dont la démonstration est un simple exercice.

Propriété 3.1. *Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle $\{e_n\}_{n \geq 1}$. Si Y est un espace de Banach isomorphe à X alors Y admet une base inconditionnelle. Plus précisément, si $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est une base λ-inconditionnelle de X et T est un isomorphisme de X sur Y alors la suite $\{T(e_n)\}_{n \geq 1}$ est une base λ'-inconditionnelle de Y avec*

$$\lambda' \leq \lambda \|T\|.\|T^{-1}\|.$$

Démonstration. Soit $y \in Y$, $y = T(x)$ avec $x \in X$, donc il existe une suite de scalaires unique $\{a_i\}_{i\geq 1}$ telle que :

$\forall \varepsilon \geq 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Longrightarrow \|x - \sum_{i=1}^{i=n} a_i e_i\| < \dfrac{\varepsilon}{\|T\|} \Longrightarrow \|y - \sum_{i=1}^{i=n} a_i T(e_i)\| < \varepsilon$ car $\|y - \sum_{i=1}^{i=n} a_i T(e_i)\| \leq \|T\| \|x - \sum_{i=1}^{i=n} a_i e_i\|$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

Ainsi $\{T(e_n)\}_{n\geq 1}$ est une base de Y. De plus, comme T est un isomorphisme, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n T(e_n)$ entraîne celle de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$ et donc pour toute suite $(\theta_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^\star}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n$ converge car la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est inconditionnelle.

D'où la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n T(e_n)$ pour toute suite $(\theta_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^\star}$.

On a aussi, pour $(\theta_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^\star}$:

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n T(e_n)\|_Y = \|T(\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n)\|_Y \leq \|T\| \|\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n e_n\|_X &\leq \lambda \|T\| \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n\|_X \\ &\leq \|T\| \|T^{-1}\| \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n T(e_n)\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda' = \sup\{\|\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n a_n T(e_n)\| \ , \ \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n T(e_n)\| \leq 1 \ , \ (\theta_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^\star}\} \leq \lambda \|T\| \|T^{-1}\|.$$

□

Conséquence immédiate. Si X est un espace de Banach presque isométrique à un espace de Banach Y qui a une base 1-inconditionnelle, alors, en particulier, X a $wfpp$. En effet, par la Propriété 3.1, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, X a une base $(1+\varepsilon)$-inconditionnelle. On peut choisir, alors, ε tel que $1 + \varepsilon < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$.

Nous verrons dans la suite qu'en fait, il suffit que X se plonge dans un espace de Banach Y à base 1-inconditionnelle avec une distorsion $1 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

3.4 Plongements dans un espace avec base 1-inconditionnelle

3.4.1 Introduction

Les espaces de Banach qui se plongent dans un espace à base 1-inconditionnelle avec une distorsion $1+\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, sont caractérisés grâce aux travaux de Kalton et ses coauteurs, voir [14], [47], [36], [37]. On rappelle ici trois des principaux résultats.

Théorème 3.3. *([47],Théorème 3.5) Soit X un espace de Banach séparable ne contenant pas de copie de $l_1(\mathbb{N})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout $x \in X$, pour toute suite (x_n) faiblement convergente vers zéro ,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \|x + x_n\| = max(\|x\|, \lim_{n\to+\infty} \sup \|x_n\|) \ .$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ε de $c_0(\mathbb{N})$ tel que $d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.

Théorème 3.4. *([14], Proposition 3.3) Soit X un espace de Banach séparable. Alors les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach Y avec une 1-UFDD et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach Y avec une base 1-inconditionnelle et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.

Théorème 3.5. *([14], Corollaire 4.4) Soit X un espace de Banach séparable réflexif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout $x \in X$, pour toute suite (x_n) faiblement convergente vers zéro,

$$\lim_{n\to+\infty} (\|x + x_n\| - (\|x - x_n\|) = 0$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach réflexif Y avec une base 1-inconditionnelle et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.

3.4.2 Lien avec la propriété faible du point fixe

Rappelons que la propriété d'avoir une base (inconditionnelle ou pas) ne passe pas aux sous-espaces alors que la $wfpp$ est stable par passage aux sous-espaces .

Proposition 3.1. *Soient $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ε de Y tel que*

$$d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon \ ,$$

alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace Y_ε de Y , il existe une norme $\|.\|_\varepsilon$ équivalente sur Y tels que X est isométrique à $(Y_\varepsilon, \|.\|_\varepsilon \mid Y_\varepsilon)$ et

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|y\|_Y \le \|y\|_\varepsilon \le \|y\|_Y \quad \forall y \in Y \tag{3.1}$$

On montre d'abord un résultat de renormage formulé dans le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient Y un espace de Banach avec la norme $\|.\|_Y$ et Z un sous-espace de Y. Notons $\|.\|_Z$ la norme $\|.\|_Y$ restreinte à Z.*
Si $|||.|||_Z$ est une norme équivalente sur Z telle que pour un certain $\alpha \in]0,1]$

$$\alpha\|z\|_Z \leq |||z|||_Z \leq \|z\|_z \quad \forall z \in Z.$$

Alors il existe sur Y une norme équivalente $|||.|||_Y$ telle que :

$$|||.|||_Y \mid Z = |||z|||_Z \Leftrightarrow |||z|||_Y = |||z|||_Z \quad , \forall z \in Z \tag{3.2}$$

$$\alpha\|y\|_Y \leq |||y|||_Y \leq \|y\|_Y, \forall y \in Y \tag{3.3}$$

Démonstration. Soient

$$\begin{aligned} B_Y \ &= \{y \in Y,\ \|y\|_Y \leq 1\} \\ B_Z \ = \ B_Y \cap Z \ &= \{z \in Z,\ \|z\|_Z \leq 1\} \\ \widetilde{B}_Z \ &= \{z \in Z,\ |||z|||_Z \leq 1\} \end{aligned}$$

On a, alors, les relations suivantes.

$$B_Z \subseteq \widetilde{B}_Z \subseteq \frac{1}{\alpha} B_Z \subseteq \frac{1}{\alpha} B_Y \ et\ B_Y \subseteq \frac{1}{\alpha} B_Y \tag{3.4}$$

Posons, $\widetilde{B}_Y \ = \ \overline{co}\{B_Y \cup \widetilde{B}_Z\}$. Il est clair que $\widetilde{B}_Y$ est un convexe (fermé), borné dans $(Y, \|.\|_Y)$, il est équilibré et son intérieur contient 0. Donc La jauge de $\widetilde{B}_Y$ est une norme sur Y voir [69], [7] ; on la note $|||.|||_Y$ c'est à dire,

$$|||y|||_Y \ = \ \inf\{\lambda > 0, \frac{y}{\lambda} \in \widetilde{B}_Y\}.$$

Reste à montrer que cette norme vérifie (3.2) et (3.3) du lemme . Montrer (3.2) revient à montrer que $\widetilde{B}_Y \cap Z \ = \ \widetilde{B}_Z$. L'inclusion $\widetilde{B}_Z \subseteq \widetilde{B}_Y \cap Z$ est évidente. Montre l'implication

$$z \notin \widetilde{B}_Z \Rightarrow z \notin \widetilde{B}_Y \cap Z.$$

Si $z \notin Z$ c'est évident. Considérons le cas où $z \in Z$ et $z \notin \widetilde{B}_Z$. Une des conséquence du théorème de Hahn-Banach est qu'il existe une forme lineaire $f \neq 0$ sur Z telle que (voir [69] ; Théorème 3.7),

$$|f(x)| \leq 1 \ \ \forall x \in \widetilde{B}_Z \ et \ \ f(z) > 1.$$

Comme $B_Z \subseteq \widetilde{B}_Z$, on a : $|f(x)| \leq 1 \;\; \forall x \in B_Z$ donc $\|f_{/Z}\| \leq 1$. Par Hahn-Banach, il existe une forme linéaire g sur Y telle que :

$$\|g\| \leq 1 \; et \; g_{/Z} = f_{/Z}$$

Donc

$$|g(x)| \leq 1, \; \forall x \in \widetilde{B}_Z \cup B_Y.$$

Mais $g(z) = f(z) > 1$, . Donc $z \notin \overline{co}\{B_Y \cup \widetilde{B}_Z\} = \widetilde{B}_Y$. Ainsi $\widetilde{B}_Y \cap Z \subseteq \widetilde{B}_Z$
La deuxième inégalité dans (3.3) est évidente car

$$\forall y \in Y, \frac{y}{\|y\|_Y} \in \widetilde{B}_Y$$

Montrons la première. Nous déduisons des inclusions (3.4) que

$$\widetilde{B}_Z \cup B_Y \subseteq \frac{1}{\alpha} B_Y.$$

Comme $\frac{1}{\alpha} B_Y$ est un convexe fermé contenant $B_Y \cup \widetilde{B}_Z$, donc

$$\widetilde{B}_Y = \overline{co}\{B_Y \cup \widetilde{B}_Z\} \subseteq \frac{1}{\alpha} B_Y \quad \text{i.e.} \;\; \alpha\|y\|_Y \leq |||y|||_Y.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

$\square$

Démonstration. (Démonstration de la proposition 3.1) Par hypothèse, on a
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un sous-espace Y_ε de Y et un isomorphisme $T_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$ tel que

$$\|T_\varepsilon\| \|T_\varepsilon^{-1}\| < 1 + \varepsilon \; .$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que T_ε vérifie la relation

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \|T_\varepsilon(x)\|_Y \leq \|x\|_X \leq \|T_\varepsilon(x)\|_Y \;\; \forall x \in X. \tag{3.5}$$

On définit la norme $\|.\|_{Y_\varepsilon}$ sur Y_ε en posant, pour tout $y \in Y_\varepsilon$,

$$\|y\|_{Y_\varepsilon} = \|T_\varepsilon^{-1}(y)\|_X \; .$$

Il est évident que $T_\varepsilon : X \to (Y_\varepsilon, \|.\|_{Y_\varepsilon})$ est une isométrie et (3.5) s'écrit

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \|y\|_Y \leq \|y\|_{Y_\varepsilon} \leq \|y\|_Y \;\; \forall y \in Y_\varepsilon \; .$$

D'après le lemme 3.1, il existe une norme équivalente sur Y qu'on notera $\|.\|_\varepsilon$ qui vérifie (3.1) et telle que $(\|.\|_\varepsilon)_{|Y_\varepsilon} = \|.\|_{Y_\varepsilon}$ c'est à dire X est isométrique à $(Y_\varepsilon, (\|.\|_\varepsilon)_{|Y_\varepsilon})$.

$\square$

Remarquons que (3.5) implique $d_{BM}((Y,\|.\|_Y),(Y,\|.\|_\varepsilon)) < 1+\epsilon$.

Corollaire 3.1. *Soit X un espace de Banach . S'il existe un espace de Banach $(Y,\|.\|)$ ayant une base 1-inconditionnelle tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace X_ε de $(Y,\|.\|)$ avec $d_{BM}(X,X_\varepsilon) < 1+\varepsilon$, alors X a $wfpp$.*

Démonstration. Soit ε_0 tel que $1+\varepsilon_0 < \frac{\sqrt{33}-3}{2}$. D'après la proposition 3.1, il existe une norme équivalente $|||.|||$ sur Y vérifiant les conditions (i) et (ii) suivantes.

- (i) $d_{BM}((Y,\|.\|),(Y,|||.|||)) \leq 1+\varepsilon_0$.
- (ii) X est isométrique à un sous-espace de $(Y,|||.|||)$.

La condition (i) et la propriété 3.1 impliquent que $(Y,|||.|||)$ a une base λ-inconditionnelle avec $\lambda \leq 1+\varepsilon_0$. Donc $(Y,|||.|||)$ a $wfpp$ d'après le théorème 3.1 de Lin. On déduit de la condition (ii) que X a $wfpp$ puisqu'il est isométrique à un sous-espace d'un espace qui a la $wfpp$.

□

3.4.3 Conditions suffisantes

Ici on présente les résultats dus à Godefroy [32].
On rappelle que si X est un espace de Banach, un opérateur $T : X \mapsto X$ est compact si l'adhérence de $T(B_X)$ est compacte (B_X étant la boule unité fermée de X).
Soit Ω un espace localement compact métrisable et qui est un K_σ($:\Omega = \cup K_n$, K_n compact).
On note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω nulles à l'infini c.à.d.

$f \in \mathcal{C}_0(\Omega\ ) \Leftrightarrow f$ *continue sur* Ω *et* $\forall\varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon \subseteq \Omega$ *compact t.q.* $[x \notin K_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon] \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \{x \in \Omega/|f(x)| \geq \varepsilon\} \textit{ est compact.}$$

$\mathcal{C}_0(\Omega)$ est un sous-espace fermé de l'espace $\mathcal{C}_b(\Omega)$ des fonctions continues et bornées sur Ω muni de sa norme naturelle $\|.\|_\infty$.

Lemme 3.2. *[32] Soit X un sous espace fermé de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ tel que pour tout compact K de Ω, l'opérateur de restriction :*

$$r_K : X \to \mathcal{C}(K) \ \textit{ tel que } \ r_K(f) = f_{/K}$$

est compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous espace X_ε de $c_0(\mathbb{N})$ tel que

$$d_{BM}(X,X_\varepsilon) < 1+\varepsilon$$

Démonstration. On reprend ici la démonstration de Godefroy . Il s'agit de montrer que X ne contient pas $l^1(\mathbb{N})$ et vérifie la condition (i) du théorème 3.3. Sans perdre de généralité on peut supposer que

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} K_n \quad / \quad K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n...$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, l'ensemble $C_n = r_{K_n}(B_X)$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K_n)$.
Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite dans B_X , $(r_{K_1}(f_k))_{k\geq 1} = (f_{/K_1})_{k\geq 1}$ est une suite dans C_1 qui est relativement compact, donc $(f_k)_{k\geq 1}$ contient une sous-suite uniformément convergente sur K_1 , de la même façon on peut extraire de cette dernière une sous-suite uniformément convergente sur K_2 et ainsi de suite . En fin de compte l'argument diagonal permet de dire que toute suite de B_X contient une sous-suite $(f_m)_{m\geq 1}$ uniformément convergente sur chacun des compacts K_n , donc sur Ω .
Le théorème de la convergence dominée implique la convergence de la suite $(\int f_m d\mu\ )$ pour toute mesure μ de Radon (mesure borélienne bornée) sur Ω . Sachant que $(\mathcal{C}_0(\Omega))^*$ est isométrique à l'espace des mesures de Radon (bornées) sur Ω, voir [22], on déduit que $(f_m)_{m\geq 1}$ est faiblement convergente (puisque $\forall \mu \in (\mathcal{C}_0(\Omega))^*,\ \ (<\mu,\ f_m>)_m = (\int f_m d\mu)_n$ est convergente). Donc $(f_m)_{m\geq 1}$ est faiblement Cauchy. On déduit, par le théorème l^1 de Rosenthal [54], que X ne contient pas $l^1(\mathbb{N})$.
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite faiblement convergente vers zéro dans X. Alors , par la propriété des opérateurs compacts, on a

$$\forall K \subseteq \Omega,\ K\ compact,\quad \lim_{n\to\infty} \|r_K(x_n)\| = 0$$

Ainsi $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon \subset \Omega$,K_ε compact , $\exists N \in \mathbb{N}^\star$ t.q.

$$|x_{|\Omega - K_\varepsilon}| < \varepsilon \quad et \quad \forall n \geq N,\ \|x_{n|K_\varepsilon}\| < \varepsilon$$

d'où l'on a

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^\star, n \geq N \Rightarrow \|\min\{\ |x|\ ,\ |x_n|\ \}\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega,\ |x(\omega)|+|x_n(\omega)| = \max\{|x(\omega)|, |x_n(\omega)|\}+\min\{|x(\omega)|, |x_n(\omega)|\} \leq \max\{|x(\omega)|, |x_n(\omega)|\}+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|x + x_n\| \leq \max\{\|x\|, \|x_n\|\} + \varepsilon$$

Il s'ensuit la condition (i) du théorème 3.3. et la conclusion du lemme.

□

La proposition suivante a été établie par Godefroy. Nous en donnons ici une preuve détaillée. Pour cela nous vérifions, d'abord, quelques faits d'analyse fonctionnelle.

Fait 1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, C un convexe de X.
Si (C, w) est séparable alors $(C, \|.\|)$ est séparable .

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une partie dénombrable w-dense dans C : $\overline{\{x_n\}}^w = C$.
Posons $D = \{\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i x_i \ , \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \in \mathbb{Q}^+, \forall i = 1, ...k, \ k \in \mathbb{N}^\star\}$.
D est une partie dénombrable de C. Comme $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, alors

$$\overline{D}^{\|\cdot\|} = \{\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i x_i \ , \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1 \ , \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \forall i = 1, ...k, \ k \in \mathbb{N}^\star\} \ = \overline{conv\{x_n\}_{n\geq 1}}^{\|\cdot\|}$$

On déduit par Hahn-Banach que $\overline{D}^{\|\cdot\|} = C$. En effet, pour tout $A \subseteq C$ on a l'implication

$$\overline{A}^w = C \ \Rightarrow \overline{convA}^{\|\cdot\|} = C.$$

Car sinon il va exister, par Hahn-Banach, une forme linéaire f sur X qui sépare $\overline{convA}^{\|\cdot\|}$ d'un point $x_0 \in C = \overline{A}^w$ et $x_0 \notin \overline{convA}^w$. Ce qui est impossible puisque tout voisinage faible de x_0 rencontre A.

Fait 2. Soit Z un espace de Banach réflexif, Y un espace de Banach séparable. S'il existe une injection linéaire continue j de Z dans Y, alors Z est séparable.

Preuve. Z réflexif donc (B_Z, w) est compacte donc $K = j(B_Z)$ est w-compact dans Y (car j linéaire continue $\Rightarrow$ j w-continue). Le compact (K, w) est alors métrisable puisque tout ensemble w-compact dans un espace de Banach séparable est métrisable.
En effet , $(Y, \|.\|)$ séparable donc il existe une famille $(y_n^*)_{n\geq 1} \subseteq Y^*$, $\|y_n^\star\| \leq 1$ qui sépare les éléments de Y et l'application

$$y \to \rho(y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2^n} |y_n^*(y)|$$

est une norme sur Y. Cette norme ρ induit sur K une topologie τ moins fine que w donc $\tau = w$ sur K. D'autre part j est un homéomorphisme entre (B_Z, w) et (W, w) donc (B_Z, w) est un compact métrisable donc séparable ainsi $(B_Z, \|.\|)$ est séparable d'après le fait 1. D'où la séparabilité de Z.

Proposition 3.2. *[32] Soit Z un espace de Köthe réflexif de fonctions définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P})$ localement compact. Soit X un sous-espace de Z tel que pour chaque compact K de Ω , l'opérateur de restriction à K, $r_K : X \to Z$ est compact. alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach réflexif Y avec une base 1-inconditionnelle et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.*

Démonstration. On montre que X est un espace séparable réflexif vérifiant la condition (i) du théorème 3.5. Par définition d'un espace de Köthe (donnée dans la section 1.1.3), il existe une injection linéaire continue de Z dans $L^1(\Omega, \mathcal{P})$ qui est séparable. Comme Z est réflexif, alors il est aussi séparable d'après le fait 2. Donc Z est (à norme) continue en ordre. On a, d'après ([70], Théorème 5.10) ;

$$\|f\| = \sup\{\|r_K(f)\|, \quad K \subset \Omega, \ K compact\}, \ \forall f \in Z.$$

Pour tout $K \subset \Omega$ et tout $f \in Z$, on peut écrire

$$f = r_K(f) + f_{/(\Omega - K)}.$$

Soit $f \in X$, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite dans X faiblement convergente vers zéro. Par une propriété des opérateurs compacts on a, pour tout compact K de Ω

$$\lim_{n \to +\infty} \|r_K(f_n)\| = 0$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On choisit un compact K de Ω tel que

$$\|f_{|\Omega - K}\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

D'autre part , $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \ \|r_K(f_n)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On a donc, pour tout $n \geq N$,

$$\|(f + f_n) - (r_K(f) + f_{n|\Omega - K})\| = \|f_{/\Omega - K} + r_K(f_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$et \ \ \|(f - f_n) - (r_K(f) - f_{n|\Omega - K})\| = \|f_{|\Omega - K} - r_K(f_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $r_K(f_n)$ et $f_{|\Omega - K}$ sont à supports disjoints, donc

$$\forall n \geq N, \ \|f_{|\Omega - K} + r_K(f_n)\| = \|f_{|\Omega - K} - r_K(f_n)\|.$$

D'où l'on a, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|\|f+f_n\|-\|f-f_n\|| &= |(\|f+f_n\|-\|r_K(f)+f_{n|\Omega-K}\|)-(\|f-f_n\|-\|r_K(f)+f_{n|\Omega-K}\|)| \\
&= |(\|f+f_n\|-\|r_K(f)+f_{n|\Omega-K}\|)-(\|f-f_n\|-\|r_K(f)-f_{n|\Omega-K}\|)| \\
&\leq |\|f+f_n\|-\|r_K(f)+f_{n|\Omega-K}\||+|\|f-f_n\|-\|r_K(f)-f_{n|\Omega-K}\|| \\
&\leq \|(f+f_n)-(r_K(f)+f_{n|\Omega-K})\|+\|(f-f_n)-(r_K(f)-f_{n|\Omega-K})\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty}(\|f+f_n\|-(\|f-f_n\|)=0$$

□

Dans [32] (lemme 2.2), Godefroy a établi une condition suffisante pour la compacité des opérateurs r_K avec un argument de partition de l'unité. En fait on peut montrer un résultat plus général en utilisant le théorème d'Ascoli.

Lemme 3.3. *Soit Ω un espace localement compact métrisable (non nécessairement K_σ). Si X est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ tel que $\forall f \in X$,$\forall x \in \Omega$, f est ponctuellement lipschitzienne en x (ce qui, par définition, est :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \ (M \text{ dépend de } f \text{ et de } x) \text{ tel que } |f(x)-f(y)| \leq Md(x,y) \quad \forall y \in \Omega)$$

Alors pour tout compact K de Ω l'opérateur : $r_K : X \to \mathcal{C}(K)$ est compact.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$. Par hypothèse, on a :

$$\forall f \in X,\ \exists M_f \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall y \in \Omega,\ |f(x)-f(y)| \leq M_f d(x,y).$$

Soit

$$C_x = \{f \in X,\ M_f \leq 1\} :\ f \in C_x \Leftrightarrow |f(x)-f(y)| \leq\ d(x,y),\ \forall y \in \Omega.$$

C_x est un "tonneau" dans X c'est à dire un convexe fermé de X, équilibré :
$\alpha C_x \subseteq C_x, \forall\alpha, |\alpha| \leq 1$ et absorbant :$\forall f \in X,\ \exists\alpha > 0$ tel que $f \in \alpha C_x$.
Les deux dernières propriétés impliquent que $X = \cup_{n\geq 1} nC_x$. Par le lemme de Baire C_x contient un voisinage de zéro autrement dit il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_X(0,\varepsilon_x) \subseteq C_x$. Ainsi il existe $M_x > 0$ ($M_x = \frac{1}{\varepsilon_x}$) tel que

$$\forall f \in X,\ \forall y \in \Omega,\ |f(x)-f(y)| \leq M_x\|f\|_\infty d(x,y).$$

Soit K un compact de Ω. On veut montrer que l'opérateur $r_K : X \to \mathcal{C}(K)$ est compact. Ce qui revient à montrer que $E = r_K(B_X) = \{ f/_K,\ f \in B_X \}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$. Pour cela il suffit de montrer que B_X est équicontinue et d'appliquer Ascoli. D'après ce qui précède , on a, en particulier :

$$\forall x \in K,\ \exists M_x > 0\ t.q.\ \forall f \in B_X,\ \forall y \in K,\ |f(x) - f(y)| \leq M_x d(x, y).$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in K$, on considère

$$V_x = \{y \in K;\ d(y, x) < \frac{\varepsilon}{2M_x}\}.$$

On a

$$|f(z) - f(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall\ y, z \in V_x\ ,\ \forall f \in B_X.$$

Du fait que $K = \cup_{x \in K} V_x$, on déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in K\ , \exists x \in K\ t.q.\ \{\ z \in K\ ;\ d(z, y) < \eta\} \subseteq V_x.$$

Finalement, on a

$$\forall \varepsilon > 0\ , \exists \eta > 0\ t.q\ \forall y, z \in K\ ,\ d(z, y) < \eta \Rightarrow\ |f(z) - f(y)| \leq\ \varepsilon\ ,\ \forall f \in B_X.$$

Ce qui prouve que $r_K(B_X)$ est équicontinue.

□

3.4.4 Applications aux espaces de Banach de fonctions lisses.

Proposition 3.3. *Soit X un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ tel que $\forall f \in X$, f est dérivable en tout point x de $[0, 1[$. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon \text{ sous-espace de } c_0(\mathbb{N}) \text{ tel que } : d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon\ .$$

En particulier X a la $wfpp$.

Démonstration. Tout d'abord remarquons le fait que si f est dérivable en $x \in [0, 1[$, alors f est ponctuellement lipschitzienne sur tout compact $K \subseteq [0, 1]$ en x.
En effet, il suffit de voir que pour un compact $K \subseteq [0, 1]$, la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad si\ t \neq x \quad et\ \varphi(x) = f'(x)$$

est continue sur K donc bornée sur K. Donc $\exists M_x \in \mathbb{R}$ / $\forall t \in K,\ |f(t) - f(x)| \leq M_x |t - x|$. Ainsi la première assertion de la proposition se déduit des lemmes 3.3 et 3.2 et la deuxième assertion se déduit du corollaire 3.1.

□

Proposition 3.4. *Soit Z un espace de Köthe réflexif de fonctions réelles définies sur [0,1]. Si X est un sous-espace fermé de Z tel que $\forall f \in X$, f est dérivable en tout point x de $[0,1[$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach réflexif Y avec une base 1-inconditionnelle et un sous-espace Y_ε de Y tel que $d_{BM}(X, Y_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.
En particulier, X a la $wfpp$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que X vérifie les hypothèses de la proposition 3.2 et la deuxième assertion se déduira du corollaire 3.1. Comme dans la preuve précédente, on a $\forall f \in X, \forall x \in [0,1[$, f est ponctuellement lipschitzienne sur tout compact $K \subset [0,1[$ en x. En reprenant mot pour mot la démonstration du lemme 3.3 et en remplaçant $\|f\|_\infty$ par $\|f\|_Z$, on obtient que pour tout compact $K \subset [0,1[$, $\overline{\{f_{/K},\ f \in B_X\}}^{\|.\|_\infty}$ est compact dans $(\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty)$. Cela montre, pour tout compact $K \subset [0,1[$, la compacité de l'opérateur

$$r_K^\infty \ : X \to (\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty) \ \text{ tel que } \ r_K^\infty(f) = f_{/K}.$$

D'autre part les injections linéaires suivantes :

$$j_1 : (\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty) \hookrightarrow (L^\infty, \|.\|_\infty) \ , \quad j_2 : (L^\infty, \|.\|_\infty) \hookrightarrow (Z, \|.\|)$$

sont continues. Par conséquent $j = j_2 \circ j_1$ est une injection linéaire continue de $(\mathcal{C}(K), \|.\|_\infty)$ dans $(Z, \|.\|)$. D'où la compacité de l'opérateur

$$r_K = j \circ r_K^\infty : X \to (Z, \|.\|)$$

□

Remarque 3.1. Les espaces $L^p([0,1])$ et plus généralement les espaces d'Orlicz $L^\Phi([0,1])$ sont des exemples d'espaces de Köthe de fonctions réelles définies sur [0,1]. Cependant il est connu que les espaces L^p avec $1 < p < \infty$ (cas réflexif) sont uniformément convexes (voir [7]) et donc ils ont la $wfpp$, et les espaces $L^\Phi([0,1])$ avec $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ (cas réflexif) sont uniformément nonsquare (voir [11] p.128) et donc ils ont la $wfpp$ d'après [26], par conséquent tous les sous-espaces de chacun des espaces cités ont la $wfpp$ en particulier ceux qui vérifient la proposition 3.4.

De plus, dans le cas des L^Φ, on peut justifier grâce au théorème de Alam ([1], Th.2.1.12) combiné à celui de F.Fuentes et F.L.Hernandez ([25], Théorème 3), la proposition suivante.

Proposition 3.5. *Soit Φ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ_2 à l'infini, X un sous-espace fermé de $L^\Phi([0,1])$ tel que tout $f \in X$ est continûment dérivable sur $[0,1[$. Alors X a la $wfpp$.*

Démonstration. On rappelle que pour une fonction d'Orlicz Φ et pour un poids $\omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ tel que $\omega_n > 0$ et $\Sigma_{n=1}^{\infty}\omega_n < +\infty$, l'espace d'Orlicz à poids l_ω^Φ est l'espace de toutes les suites $x = (x_n)_n$ telles qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n \Phi(\frac{|x_n|}{\lambda}) < \infty$, muni de la norme de Luxemburg

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n \Phi(\frac{|x_n|}{\lambda}) \leq 1\}$$

On note h_ω^Φ le sous-espace de l_ω^Φ formé de toutes les suites $x = (x_n)_n$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n \Phi(\frac{|x_n|}{\lambda}) < \infty$ pour tout $\lambda > 0$. Il est facile de vérifier que les vecteurs unitaires $e_n;\ n \geq 1$, forment une base 1-inconditionnelle de l'espace h_ω^Φ.
Il est montré dans ([25], théorème 3) que si le poids w vérifie la condition

$$(\star) \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{w_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k > 0$$

alors, $l_\omega^\Phi = h_\omega^\Phi$ si et seulement si $\Phi \in \Delta_2$ à l'infini.
Soient Φ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ_2 à l'infini et X un sous-espace fermé de $L^\Phi([0,1])$ tel que toute fonction f de X est continûment dérivable sur $[0,1[$. Alors, d'après ([1], th.2.1.12), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un poids ω vérifiant la condition $(\star)$ ci dessus, il existe un sous-espace X_ε de l_ω^Φ tels que $d_{BM}(X, X_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$.
Comme, dans ce cas, l'espace l_ω^Φ est à base 1-inconditionnelle, les conditions du corollaire 3.1 sont vérifiées et donc X a la $wfpp$.

□

3.5 Propriété faible du point fixe dans les espaces de Müntz

3.5.1 Cas des espaces de Müntz dans $\mathcal{C}([0,1])$

Définition 3.7. Soient $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels telle que :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$$

et $M_\Lambda = vect\{t^{\lambda_k};\ k \in \mathbb{N}\}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions t^{λ_k} définies sur l'intervalle $[0,1]$. On note M_Λ^E, la fermeture de M_Λ dans un espace de Banach E contenant M_Λ. L'espace M_Λ^E (quand il n'est pas égal à E) est appelé espace de Müntz dans E.

Le théorème de Müntz classique, pour $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de sa norme usuelle, affirme que :

$$M_\Lambda^E = \ E \text{ si et seulement si} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$$

Quand $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, on obtient l'espace de Müntz $M_\Lambda^{\mathcal{C}([0,1])}$ dans $\mathcal{C}([0,1])$.
Si de plus la suite $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ est formée d'entiers naturels alors, d'après le théorème de Clarkson-Erdös-Schwartz (voir [1], Théorèmes 1.1.6 et 1.2.4), $\forall f \in M_\Lambda^{\mathcal{C}([0,1])}$, f est analytique sur l'intervalle $[0,1[$. Le corollaire suivant est alors une simple illustration de la proposition 3.3.

Corollaire 3.2. *Si $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $\sum_{k=1}^{n=+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, alors $M_\Lambda^{\mathcal{C}([0,1])}$ a la $wfpp$.*

3.5.2 Cas des espaces de Müntz dans un espace de Köthe f.s.c.

Soit E un espace de Köthe de fonctions sur $[0,1]$, muni de la mesure de Lebesgue tel que E est faiblement séquentiellement complet. Nous supposons en outre que E est stable par dilatation : pour chaque $\rho \in]0,1[$, l'opérateur de blow-up T_ρ defini par $T_\rho(f)(t) = f(\rho t)$ est tel que $T_\rho(E) \subset E$ et de plus

$$\limsup_{\rho\to 1} \|T_\rho\|_E < \infty.$$

Les théorèmes de Müntz et de Clarkson-Erdös-Schwartz se généralisent pour un tel E, [43] (voir aussi [1]). C'est, en particulier, le cas si $E = L^p([0,1])$ avec $1 \leq p < \infty$ ou si $E = L^\Phi([0,1])$ avec $\Phi \in \Delta_2$ ([58], p.120 et p.130).

Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $\lambda_0 = 0$ et $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$. D'après le théorème de Clarkson-Erdös-Schwartz ([43], Théorème 6.2.3), chaque $f \in M_\Lambda^E$ est réelle analytique en tout $t \in [0,1[$ de plus f se développe de façon unique comme

$$f(t) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} a_k(f) t^{\lambda_k}$$

pour tout $t \in [0,1[$, où la convergence est uniforme sur chaque intervalle $[0,\alpha]$ avec $\alpha < 1$.

Proposition 3.6. *Soit E un espace de Köthe de fonctions sur $[0,1]$ faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation, soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$. Alors :*

1) *M_Λ^E est isométrique à un espace dual et son prédual possède la propriété (au^*) : pour tout $f \in M_\Lambda^E$ et toute suite (f_n) qui converge préfaiblement vers zéro, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f + f_n\| - \|f - f_n\| = 0.$$

2) *M_Λ^E possède la propriété d'approximation métrique.*

Démonstration. **1)** Il est connu en théorie des espaces de Banach que : Si X est un espace de Banach, et que τ est une topologie localement convexe séparée sur X telle que la boule unité fermée B_X de X soit τ-compacte, alors X est isométrique au dual d'un espace de Banach Y (voir par exemple [46]) et la topologie préfaible correspondante coincide sur B_X avec la topologie τ. Or M_Λ^E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1[)$, on peut donc le munir de la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts de $[0,1[$ qu'on note τ_c qui est localement convexe (voir [69]).
Montrons que $B_{M_\Lambda^E}$ est τ_c-compacte. Sachant que E est f.s.c., il est continu en ordre ainsi il satisfait le théorème de la convergence monotone. Il s'ensuit que la norme de E est semi-continue inférieurement pour la topologie τ_c. En effet, soit $f \in M_\Lambda^E$, on a $\|f\|_E = \||f|\|_E$ et $|f| = \sup_n \chi_{[0,1-\frac{1}{n}]}|f|$ donc $(\chi_{[0,1-\frac{1}{n}]}|f|)_n$ croit vers $|f|$. Comme E est continu en ordre alors $\lim_{n\to\infty} \||f| - \chi_{[0,1-\frac{1}{n}]}|f|\| = 0$.
Soit une suite $(f_n) \subset B_{M_\Lambda^E}$ τ_c-convergente vers f alors $\|f\| \leq 1$ car

$$\|f\| > 1 \Rightarrow \exists n_0 \ t.q. \ \||f|\chi_{[0,1-\frac{1}{n_0}]}\| = 1 + \epsilon$$

$$\Rightarrow \exists k_0 \ t.q. \ \forall k \geq k_0, \ \||f_k|\chi_{[0,1-\frac{1}{n_0}]}\| > 1 + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \forall k \geq k_0, \||f_k|\| \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

contradiction avec $(f_n) \subset B_{M_\Lambda^E}$.
Par le théorème de Clarkson-Erdös-Schwartz ([43], Théorème 6.2.3), chaque $f \in M_\Lambda^E$ est dérivable sur $[0,1[$ et la preuve du lemme 3.3 montre, aussi, que pour tout $\rho \in]0,1[$, $B_{M_\Lambda^E}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([0,\rho])$ donc $T_\rho(B_{M_\Lambda^E})$ est équicontinue dans $\mathcal{C}([0,1])$. Ce qui montre que pour tout $\rho \in]0,1[$, l'opérateur $T_\rho : M_\Lambda^E \longrightarrow (\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$ est compact donc l'opérateur $T_\rho : M_\Lambda^E \longrightarrow (E, \|.\|_E)$ est compact (puisque l'injection $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty) \hookrightarrow (E, \|.\|_E)$ est continue). Soit (f_n) une suite de $B_{M_\Lambda^E}$. Elle contient une sous-suite qu'on note encore (f_n) telle que pour tout $\rho \in]0,1[$, la suite $(T_\rho(f_n))$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f_ρ .

Puisque $\|T_\rho(f_n)-f_\rho\|_E \leq c\|T_\rho(f_n)-f_\rho\|_\infty$, la suite $(T_\rho(f_n))$ converge aussi en norme $\|.\|_E$ vers f_ρ . Comme $T_\rho(M_\Lambda^E) \subset M_\Lambda^E$ et que ce dernier est fermé, on a $f_\rho \in M_\Lambda^E$.
En posant $f(x) = f_\rho(\frac{x}{\rho})$ si $x \in [0,\rho]$, on définit bien (presque partout) une fonction $f \in E$ telle que $f_\rho = T_\rho(f)$ (voir[32], preuve du lemme 3.1). Comme la norme de E est continue en ordre alors

$$\lim_{\rho\to 1} \|f - T_\rho(f)\|_E = 0$$

ce qui signifie que $f \in M_\Lambda^E$ puisque ce dernier est fermé.
De plus on a, pour tout $\alpha \in]0,1[$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_\alpha(f_n) - T_\alpha(f)\|_\infty = 0.$$

Ce qui montre que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tous les compacts de $[0,1[$, puisque pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\sup\limits_{t\in[0,\alpha]} |f_n(t) - f(t)| = \|T_\alpha(f_n) - T_\alpha(f)\|_\infty$.
Finalement et sachant que $\|.\|_E$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\| \geq \|f\|.$$

Ce qui implique que $f \in B_{M_\Lambda^E}$ et que $B_{M_\Lambda^E}$ est compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$.
Si (f_n) est une suite préfaiblement convergente vers zéro alors elle est bornée. Sachant que la topologie w^*-faible coincide sur $B_{M_\Lambda^E}$ avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$, alors on a, pour tout $\alpha \in [0,1[$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n|[0,\alpha]}\|_\infty = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n|[0,\alpha]}\|_E = 0.$$

(Ici, pour $g \in E$, on identifie $g_{|[0,\alpha]}$ avec la fonction $h_\alpha = g.\chi_{[0,\alpha]}$).
Ainsi, il suffit de reproduire la preuve de la proposition 3.2 (avec $K = [0,\alpha]$) pour déduire la deuxième assertion du point **1)**.

2) Il est clair que $T_\rho(M_\Lambda^E) \subset M_\Lambda^E$ et de plus $T_\rho(f)(t) = \sum\limits_{k=1}^{k=+\infty} \rho^{\lambda_k} a_k(f) t^{\lambda_k}$.
D'après ([43], Théorème 6.2.2), pour $\delta \in]0, \frac{1}{\rho} - 1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\rho^{\lambda_k} a_k(f) t^{\lambda_k}\|_E \leq \rho^{\lambda_k}(1+\delta)^{\lambda_k}\|f\|, \ \forall k \geq N.$$

Donc

$$\forall \rho \in]0,1[,\ \forall f \in B_{M_\Lambda^E},\quad \lim_{n\to\infty} \| \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} \rho^{\lambda_k} a_k(f) t^{\lambda_k} \|_E = 0$$

Il s'en suit que T_ρ est la limite (en norme) de la suite d'opérateurs $R_n : M_\Lambda^E \to M_\Lambda^E$ de rangs finis définis par

$$R_n(f)(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \rho^{\lambda_k} a_k(f) t^{\lambda_k}.$$

Soit $g(t) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k t^{\lambda_k}$, alors $(T_\rho(g) - g)(t) = \sum_{k=1}^{k=n} (1-\rho^{\lambda_k}) a_k t^{\lambda_k}$ et

$$\sup_{t\in[0,1]} |(T_\rho(g) - g)(t)| \leq \sum_{k=1}^{k=n} (1-\rho^{\lambda_k})|a_k|.$$

Donc

$$\lim_{\rho\to 1} \|g - T_\rho(g)\|_\infty = 0,\ \forall g \in M_\Lambda.$$

Par conséquent

$$\lim_{\rho\to 1} \|g - T_\rho(g)\|_E = 0,\ \forall g \in M_\Lambda.$$

Comme nous avons supposé que pour un certain $\delta > 0$, l'ensemble $\{T_\rho;\ 1-\delta < \rho < 1\}$ est borné en norme, donc

$$\lim_{\rho\to 1} \|f - T_\rho(f)\|_E = 0,\ \forall f \in M_\Lambda^E.$$

Cela montre que M_Λ^E a la propriété d'approximation et comme M_Λ^E est un dual alors il a la propriété d'approximation métrique (voir section 3.2.1, Théorèmes de Grothendieck, **1**).

$\square$

Fait. Si X est un espace de Banach séparable avec la propriété (au^*) tel que son dual X^* a la propriété d'approximation métrique (MAP), alors X a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle (UMAP) contractante.
En effet, puisque X^* a la MAP alors X a, aussi, la MAP (voir section 3.2.1, théorèmes de Grothendieck, **2**). Soit (R_n) une suite approximante sur X avec $\sup_n \| R_n \| \leq 1$. Alors, d'après Lima ([56], théorème 4.2), la suite (R_n) vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \| I - 2R_n \| = 1 \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} \| R_n^* x^* - x^* \| = 0,\ \text{pour tout } \ x^* \in X^*.$$

Ce qui veut dire que (R_n) est inconditionnelle et contractante.

Théorème 3.6. *Soit E un espace de Köthe de fonctions sur $[0,1]$ faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation, soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$.*
Alors l'espace de Müntz M_Λ^E a la propriété faible du point fixe $(wfpp)$.

Démonstration. D'après la proposition 3.6, $M_\Lambda^E = X^*$ tel que X est un espace de Banach séparable qui a la propriété (au^*) et $M_\Lambda^E = X^*$ a la propriété d'approximation métrique (MAP). Alors, d'après le fait précédent, X a la propriété d'approximation métrique inconditionnelle contractante. Ce qui est équivalent, d'après ([34], Cor.IV.4.) à :
pour tout $\epsilon > 0$, X est 1-complémenté dans un espace avec une F.D.D. $(1+\epsilon)$-inconditionnelle ($(1+\epsilon)$-UFDD) contractante. Ce qui implique que pour tout $\epsilon > 0$, le dual de X qui est M_Λ^E est un sous-espace d'un espace Y avec une $(1+\epsilon)$-UFDD. En passant à une norme $(1+\epsilon)$ équivalente à la norme initiale dans Y, on obtient l'assertion suivante :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de Banach Y avec une 1-UFDD, il existe un sous-espace X_ϵ de Y tels que $d_{BM}(X, X_\epsilon) < 1 + \epsilon$.
Ce qui est équivalent, d'après le théorème 3.4, à l'assertion suivante :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de Banach Y avec une base 1- inconditionnelle, il existe un sous-espace X_ϵ de Y tels que $d_{BM}(X, X_\epsilon) < 1 + \epsilon$.
On applique le corollaire 3.1 pour conclure.

□

Chapitre 4

Octaédralité et propriété du point fixe

4.1 Introduction.

Ce chapitre s'inscrit dans la littérature sur la théorie du point fixe pour des contractions sur des convexes fermés bornés.

Définition 4.1. On dit qu'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ possède ou a la propriété du point fixe (en abrégé, X a la fpp) si tous les convexes non vides, fermés et bornés de X ont la propriété du point fixe. Ce qui veut dire que pour tout convexe non vide, fermé et borné C de X, tout $T : C \mapsto C$ vérifiant $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in C$, admet un point fixe : $\exists x \in C$ tel que $T(x) = x$.

Remarque 4.1. Pour tout espace de Banach X, la fpp est plus forte que la $wfpp$ (définie au chapitre 3 ; définition 3.1), puisque tout convexe faiblement compact de X est (en particulier) fermé et borné dans X. Si X est réflexif alors, d'après le corollaire du théorème de Kakutani (voir section 1.2.1), fpp et $wfpp$ coincident.

Durant l'année 1965 F. Browder [8] et D. Göhde [41] ont, indépendamment, montré qu'un espace de Banach qui est uniformément convexe a la fpp.

Parmi les espaces de Banach classiques, il est connu que :

- Les espaces réflexifs L^p ou l^p avec $p > 1$ ont la fpp. Car ses derniers sont, justement, uniformément convexes voir [13].

- Les espaces (non réflexifs) $l^1(\mathbb{N})$ et $c_0(\mathbb{N})$ munis de leurs normes usuelles n'ont pas la fpp. En effet, Il est montré, dans chacun d'eux, l'existence d'un convexe fermé borné non vide sans la propriété du point fixe (voir [27]).

Donc tous les espaces de Banach contenant des copies isométriques de $l^1(\mathbb{N})$ ou de $c_0(\mathbb{N})$ n'ont pas la fpp, en particulier les espaces classiques L^1, L^∞, et $\mathcal{C}([0,1])$ n'ont pas la fpp.

Depuis 1965, les questions suivantes ont donné lieu à plusieurs travaux.

1. Si X est un espace de Banach réflexif, X a t-il la fpp ?
2. Un espace de Banach qui a la fpp est-il nécessairement réflexif ?

Jusqu'à nos jours, on n'a pas trouvé d'espace de Banach réflexif sans la fpp et on n'a pas de réponse à la première question.

P.N. Dowling, C.J. Lennard et B. Turett ont montré, en utilisant le concept de copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ introduit par J. Hagler dans [44] (voir la définition 4.2), que pour certains espaces de Banach classiques la fpp implique la réflexivité ; c'est notamment le cas des sous-espaces de L^1 et de certains espaces d'Orlicz ([18] ,[19]). Les mêmes auteurs ont fait remarquer dans ([20]) que la deuxième question suscite, naturellement, une autre question qui est : existe t-il des renormés de $l^1(\mathbb{N})$ ou de $c_0(\mathbb{N})$ qui ont la fpp ?

Récemment, P.K. Lin a montré dans [61] que $l^1(\mathbb{N})$ peut être renormé pour avoir la fpp.
Ce qui répond positivement à la dernière question et, donc, négativement à la deuxième question : *Il existe des espaces de Banach non réflexifs qui ont la fpp.*

Ainsi, la recherche de classes plus larges d'espaces de Banach pour lesquels la fpp implique la réflexivité se poursuit.

Dans ce chapitre nous montrons, dans un premier temps, que les espaces octaédraux n'ont pas la propriété du point fixe ce qui représente une généralisation d'un résultat de H. Pfitzner ([65]). Dans un deuxième temps, nous fournissons un exemple qui répond par la négation à une question posée par le même auteur dans [65].
Pour le premier cas, nous allons utiliser le concept de copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$.
Pour le deuxième cas, nous allons faire appel au manque de la Frechet-différentiabilité dans les espaces octaédraux .

4.2 Espaces de Banach asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$

4.2.1 Définitions et exemples

Définition 4.2. Soit X un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|$. On dit que X contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$ ou que X contient une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ ou, plus simplement, que X est asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$, si on peut trouver une suite (ε_n) dans]0,1[qui décroît vers zéro et une suite (x_n) d'éléments de la sphère unité S_X de X tels que :

$$\sum_{n\geq 1}(1-\varepsilon_n)|\alpha_n| \leq \| \sum_{n\geq 1} \alpha_n x_n\| \leq \sum_{n\geq 1} |\alpha_n|$$

pour toute suite $(\alpha_n) \in l^1(\mathbb{N})$.
Le sous-espace de X engendré par la suite (x_n) est appelé copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$.

Le concept de copie asymptotiquement isométrique $l^1(\mathbb{N})$ a été introduit par J. Hagler dans [44]. Il est clair qu'un espace de Banach qui est asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$ vérifie la condition du théorème de distorsion de James (voir [20]) et donc contient une copie presque isométrique de $l^1(\mathbb{N})$. Mais l'inverse n'est pas vrai, voir exemple 3 ci-dessous.
Notre présentation, se base sur les articles [19, 18, 20] dus à Dowling, Lennard et Turett. On illustre ici certains de leurs travaux.

Exemple 1[20]. Chaque sous-espace de dimension infinie de $l^1(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle, contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.

Exemple 2([18]). Chaque sous-espace non réflexif de $L^1[0,1]$, muni de sa norme usuelle, contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.

Exemple 3 ([20]). Soit (γ_n) une suite dans $]0,1[$ strictement croissante vers 1. On définit une norme sur $l^1(\mathbb{N})$ par

$$|||x||| = \sup_n \gamma_n \sum_{k=n}^{\infty} |x_k| \ , \quad \forall x = (x_n) \in l^1(\mathbb{N}).$$

La norme $|||.|||$ est équivalente à la norme usuelle de $l^1(\mathbb{N})$ et $(l^1(\mathbb{N}), |||.|||)$ ne contient aucune copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.

Exemple 4([19]). Soit Γ un ensemble non dénombrable. Chaque renormé de $l^1(\Gamma)$ contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.

Exemple 5([19]). soient Φ et Ψ deux fonctions complémentaires d'Orlicz , (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ mesure finie et non atomique. Si $\Phi \in \Delta_2$ et $\Psi \notin \Delta_2$ alors l'espace d'Orlicz $L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ muni de la norme d'Orlicz est asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$.

4.2.2 Lien avec la propriété du point fixe

Le concept de copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$ a été particulièrement utilisé et développé par Dowling, Lennard et Turett dans la théorie du point fixe.
En effet Dowling et Lennard ont montré le théorème suivant :

Théorème 4.1. *[18] Si un espace de Banach X contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$, alors X n'a pas la propriété du point fixe pour les contractions sur des convexes fermés bornés de X.*

Par ce théorème et le résultat de l'exemple 2, on obtient que les sous-espaces de $L^1[0,1]$ qui ne sont pas réflexifs n'ont pas la *fpp*. D'autre part, on sait par Maurey [62], que les sous-espaces réflexifs de $L^1[0,1]$ ont la *fpp*. Ainsi, on a la caractération suivante.

Proposition. *Un sous-espace de $L^1[0,1]$ a la fpp si et seulement si, il est réflexif.*

En utilisant le fait que si un espace de Banach X contient une copie isomorphique de $l^1(\mathbb{N})$ alors X^* ne peut pas être renormé pour avoir la *fpp* et le résultat de l'exemple 4, Dowling, Lennard et Turett ont montré, dans [19] que $l^\infty(\mathbb{N})$ ne peut pas être renormé pour avoir la *fpp*. Par conséquent, si la fonction d'Orlicz Φ ne vérifie pas la condition Δ_2, l'espace d'Orlicz $L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ muni de la norme d'Orlicz n'a pas la *fpp*. Car, dans ce cas, L^Φ muni de la norme de Luxemburg contient une copie de l^∞ (voir [11],[66]).
Par ailleurs, il est connu que $L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ est réflexif si et seulement si Φ et sa conjuguée Ψ vérifient la condition Δ_2 si et seulement si la norme d'Orlicz est uniformément non-carrée (voir [11] p.128) et que les espaces qui sont uniformément non carrés (nonsquare) ont la *fpp* ([26]). D'où l'on déduit, compte tenu du résultat de l'exemple 5, la caractération suivante :

Proposition. *l'espace d'Orlicz $L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ muni de la norme d'Orlicz a fpp si et seulement si, il est réflexif .*

4.3 Cas des espaces de Banach octaédraux

H.Pfitzner a montré (voir [65], corollaire 4) que chaque sous-espace non réflexif d'un espace L-facteur (de son bidual) contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.
En particulier les sous-espaces non réflexifs d'un espace L-facteur n'ont pas la *fpp*.
On a vu au chapitre 2 (Théorème 2.2) que les sous-espaces non réflexifs d'un espace de Banach séparable qui est L-facteur de son bidual sont octaédraux. On montre ici, de façon simple, que la propriété d'être asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$ est générale à tous les espaces de Banach qui sont octaédraux.

Théorème 4.2. *Si un espace de Banach X est octaédral, alors X contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.*
En particulier, si X est octaédral alors X n'a pas la fpp.

Démonstration. Soit $(\eta_i)_{i\geq 1}$ une suite dans $]0,1[$ strictement décroissante vers zéro.
Soit $\varepsilon \in]0,1[$ tel que

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-\eta_i) > 1-\varepsilon.$$

Il est clair que la suite $(\prod_{i=n-1}^{\infty}(1-\eta_i))_{n>1}$ croit vers 1.
Prenons $x_1 \in S_X$ et considérons le sous-espace F_1 de X engendré par x_1. Sachant que la norme de X est octaédrale, il existe $x_2 \in S_X$ tel que :

$$\|\alpha_1 x_1 + x_2\| \geq (1-\eta_1)(|\alpha_1|+1),\ \forall \alpha_1 \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\| \geq (1-\eta_1)(|\alpha_1|+|\alpha_2|),\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

En réappliquant la définition de l'octaédralité pour le sous-espace F_2 engendré par $x_1,\ x_2$, il va exister $x_3 \in S_X$ tel que

$$\|x + \alpha_3 x_3\| \geq (1-\eta_2)(\|x\|+|\alpha_3|), \forall\ x \in F_2,\ \forall \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Comme $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F_2,\ \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\| \geq (1-\eta_1)(1-\eta_2)(|\alpha_1|+|\alpha_2|) + (1-\eta_2)|\alpha_3|,\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

En continuant ce procédé, on construit une suite $(x_n) \subset S_X$ telle que , pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\|\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i\| \geq \prod_{i=1}^{i=n-1}(1-\eta_i)|\alpha_1| + \prod_{i=1}^{i=n-1}(1-\eta_i)|\alpha_2| + \prod_{i=2}^{i=n-1}(1-\eta_i)|\alpha_3| + ... + \prod_{i=n-2}^{i=n-1}(1-\eta_i)|\alpha_{n-1}| + (1-\eta_{n-1})|\alpha_n|$$

et donc

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\| \geq \prod_{i=1}^{\infty}(1-\eta_i)|\alpha_1| + \sum_{n=2}^{\infty}(\prod_{i=n-1}^{\infty}(1-\eta_i)|\alpha_n|)$$

En posant $\varepsilon_1 = \varepsilon$ et $\varepsilon_n = 1 - \prod_{i=n-1}^{\infty}(1-\eta_i), \quad \forall n \geq 2$, on voit que la suite (ε_n) est décroissante vers zéro et vérifie, pour toute suite $(\alpha_n) \in l^1(\mathbb{N})$

$$\sum_{n\geq 1}(1-\varepsilon_n)|\alpha_n| \leq \|\sum_{n\geq 1} \alpha_n x_n\| \leq \sum_{n\geq 1}|\alpha_n|.$$

Ce qui montre que X contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.
La deuxième assertion se déduit du théorème.4.1.

□

Notons que la preuve précédente est en partie la même que celle qui consiste à montrer le théorème 1.5 (voir, dans [17], *ii*) $\Rightarrow$ *i*) du th.3.5.2.).

Du théorème précédent et du théorème 2.2, on déduit le corollaire suivant qui est le résultat de H.Pfitzner pour les espace de Banach séparables.

Corollaire 4.1. *Soit X un espace de Banach séparable L-facteur de son bidual et soit Y un sous-espace non réflexif de X. Alors*
Y contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$.
En particulier Y n'a pas la fpp.

Avec les mêmes notations que la section 3.5.1, on a le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Soit E un espace de Köthe de fonctions sur $[0,1]$ faiblement séquentiellement complet et stable par dilatation, soit $\Lambda = (\lambda_k)$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$. Alors*

1. Si E est L-facteur de son bidual, alors l'espace de Müntz M_Λ^E a la propriété du point fixe si et seulement si, il est réflexif.

2. Si $E = L^1([0,1])$, alors l'espace de Müntz M_Λ^E n'a pas la propriété du point fixe, mais chaque sous-ensemble convexe de M_Λ^E non vide et compact pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$ a la propriété du point fixe.

Démonstration. 1. Si M_Λ^E n'est pas réflexif alors il est octaédral et donc asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$ par suite il n'a pas la fpp (voir le corollaire 4.1). Si M_Λ^E est réflexif alors, dans ce cas, la fpp coïncide avec la $wfpp$. Or, d'après le théorème 3.6, M_Λ^E a la $wfpp$ donc il a la fpp.
2. Quand $E = L^1([0,1])$ et comme M_Λ^E a la propriété d'approximation, alors d'après ([32],théorème 3.3) M_Λ^E est presque isométrique à un sous-espace w^*-fermé de $l^1(\mathbb{N})$ et, par conséquent, il n'est pas réflexif. Donc, d'après 1., il n'a pas la fpp.
De plus M_Λ^E est isométrique à un dual d'un M-idéal dans son bidual qui est $(M_\Lambda^E)^\sharp$ (voir [36], Théorème 3.3) et la topologie $w^* = \sigma(M_\Lambda^E, (M_\Lambda^E)^\sharp)$ coïncide sur les sous-ensembles convexes bornés de M_Λ^E avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$ et avec la topologie τ_m de la convergence en mesure.
Sachant, par Besbes [6], que chaque sous-ensemble convexe non vide τ_m-compact de $L^1([0,1])$ a la propriété du point fixe, on déduit que les sous-ensembles convexes de M_Λ^E non vides et compacts pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0,1[$ ont la propriété du point fixe.

□

Remarque. Dans le cas où E est l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ ou l'espace $L^1([0,1])$, on sait que M_Λ^E n'est pas réflexif. Cependant la question suivante se pose.
Peut-on avoir M_Λ^E réflexif si l'espace E ne l'est pas ?

4.4 Octaédralité des copies asymptotiques de $l^1(\mathbb{N})$

Soit X un espace de Banach asymptotiquement $l^1(\mathbb{N})$ (qui contient une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$). Il est clair que X n'est pas nécessairement L-facteur de son bidual. Sachant que la classe des espaces octaédraux est strictement plus large que celle des L-facteurs (voir corollaire 1.1 et Remarque 1.5), il est naturel de poser la question : X est-il octaédral ? Sous l'hypothèse la plus forte, Pfitzner ([65]) a posé la question de savoir si les copies asymptotiques de $l^1(\mathbb{N})$ sont des L-facteurs ?

Nous allons construire ici une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ qui n'est pas octaédrale. Pour cela, nous passons par le manque de la Frechet-différentiabilité d'une norme octaédrale.

4.4.1 Différentiabilité de la norme octaédrale.

Définition 4.3. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, et $x \in S_X$.
On dit que la norme $\|.\|$ est Gateaux différentiable (G-différentiable) en x si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

$$(i)_G \quad \lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \quad \textit{existe} \quad \forall y \in X$$
$$(ii)_G \quad \lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|-2\|x\|}{t} = 0 \quad \forall y \in X$$

On dit que la norme $\|.\|$ est Frechet différentiable (F-différentiable) en x si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

$$(i)_F \quad \lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \quad \textit{existe}\ \forall y \in X \text{ et elle est uniforme pour } y \in S_X$$

$$(ii)_F \quad \lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|x+y\|+\|x-y\|-2\|x\|}{\|y\|} = 0$$

Il est clair que la F-différentiabilité implique la G-différentiabilité.
Pour un espace de dimension finie la F-différentiabilité est équivalente à la G-différentiabilité.
La F-différentiabilité se caractérise à l'aide des points fortement exposés :

Proposition 4.1. *(voir [17] corollaire 1.5.). Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach.*
$\|.\|$ est F-différentiable en $x \in S_X$ si et seulement si, il existe un point x^* fortement exposé dans B_{X^*} par x : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall y^* \in B_{X^*}$; $< y^*,\ x > > 1-\delta \Longrightarrow \|y^*-x^*\| < \varepsilon$.

Remarque. La non G-différentiabilité n'est pas caractéristique des espaces de Banach qui sont L-facteurs de leurs biduaux ; Il existe des espaces de Banach dont la norme est G-différentiable en tout point $x \in S_X$ et qui sont L-facteurs de leurs biduaux, c'est le cas de l'espace de Hardy H^1 (voir [45],p.167).
Ce qui suit montre que ce n'est pas le cas de la F-différentiabilité.

Fait. Soit X un espace de Banach L-facteur non réflexif. Alors $\forall x \in S_X$, la norme biduale qu'on note $\|.\|_{**}$ n'est pas F-différentiable en x.

Démonstration. Supposons $X^{**} = X \oplus_1 X_s$ avec $X_s \neq \{0\}$ et soit $x \in S_X$.

On a, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $x^{**} \in X_s$ avec $\|x^{**}\| = 1$,

$$\frac{\|x + tx^{**}\|_{**} - \|x\|}{t} = \frac{\|x\| + |t| - \|x\|}{t} = \frac{|t|}{t}.$$

La dernière expression n'a pas de limite quand t tend vers 0 et ceci quelque soit $x \in S_X$. $\square$

Proposition 4.2. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach. Si* $\|.\|$ *est F-différentiable en* $x \in S_X$*, alors la norme du bidual* X^{**} *qu'on note* $\|.\|_{**}$ *est F-différentiable en* $J_X(x) = x$*.*
(J_X *étant l'injection canonique de* X *dans* X^{**}*).*

Démonstration. Supposons que $\|.\|$ est F-différentiable en $x \in S_X$. Alors, par la proposition 4.1, il existe $x^* \in B_{X^*}$ vérifiant la propriété $(f.e.)$ suivante :

$$(f.e.)\ \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ t.q.\ \ \forall y^* \in B_{X^*}; < y^*,\ x > \, > 1 - \delta \Longrightarrow \|y^* - x^*\|_* < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $z^* \in B_{X^{***}}$ tel que $< z^*,\ x > \, > 1 - \delta$. Comme $B_{X^{***}} = \overline{B_{X^*}}^{w^*}$, alors il existe une famille $(z^*_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_{X^*}$, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I tels que

$$z^* = w^* - \lim_{\alpha \to \mathcal{U}} z^*_\alpha \ donc\ \ < z^*,\ x >= w^* - \lim_{\alpha \to \mathcal{U}} < z^*_\alpha,\ x >$$

Donc il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\forall \alpha \in U$, $< z^*_\alpha,\ x > \, > 1 - \delta$ ce qui donne, d'après $(f.e.)$,

$$\forall \alpha \in U, \|z^*_\alpha - x^*\|_{***} = \|z^*_\alpha - x^*\|_* < \frac{\varepsilon}{2}\ \ (1)$$

D'autre part ,on a, $z^* - x^* = w^* - \lim_{\alpha \to \mathcal{U}} (z^*_\alpha - x^*)$ et comme la norme $\|.\|_{***}$ est w^*-semi-continue inférieurement, alors $\exists U' \in \mathcal{U}$ tel que

$$\forall \alpha \in U', \|z^* - x^*\|_{***} \leq \|z^*_\alpha - x^*\|_{***} + \frac{\varepsilon}{2}.\ \ (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \Longrightarrow \|z^* - x^*\|_{***} \leq \varepsilon.$$

$\square$

Corollaire 4.2. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach L-facteur de son bidual.*
Si X *est non réflexif alors la norme* $\|.\|$ *est nulle part F-différentiable :* $\forall x \in S_X$*,* $\|.\|$ *n'est pas F-différentiable.*

Démonstration. conséquence directe de la proposition 4.2 et du fait qui la précède.

$\square$

Le Corollaire précédent, peut être déduit du lemme plus fort suivant.

Lemme 4.1. *Soit $\|.\|$ une norme sur un espace de Banach X.*
Si $\|.\|$ est octaédrale alors $\|.\|$ est nulle part F-différentiable.

Démonstration. Supposons $(X, \|.\|)$ octaédral. Soit $x \in S_X$. En appliquant la définition de l'octaédralité au sous-espace $F = \mathbb{K}x$, on aura

$$(o) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in S_X / \|x + \lambda x_\varepsilon\| \geq (1 - \varepsilon)(1 + |\lambda|).$$

Si la norme $\|.\|$ est F-différentiable en $x \in S_X$, alors $\forall \eta > 0, \exists \delta > 0$ tels que

$$\forall y \in X, \|y\| < \delta \Rightarrow \|x + y\| + \|x - y\| - 2 \leq \eta \|y\|$$

En particulier pour $\eta = \frac{1}{2}$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall y \in X, \|y\| < \delta \Rightarrow \|x + y\| + \|x - y\| - 2 \leq \frac{\|y\|}{2}$$

Pour $y = \lambda x_\varepsilon$ tel que $|\lambda| < \delta$, on aura :

$$\|x + \lambda x_\varepsilon\| + \|x - \lambda x_\varepsilon\| - 2 \leq \frac{|\lambda|}{2}$$

Or, d'après (o), on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \|x + \lambda x_\varepsilon\| + \|x - \lambda x_\varepsilon\| - 2 \geq (1 - \varepsilon)(1 + |\lambda|) + (1 - \varepsilon)(1 + |\lambda|) - 2 = 2|\lambda| - 2\varepsilon(1 + |\lambda|)$$

Ce qui nous conduit à l'absurdité :

$$\forall \varepsilon > 0, 2|\lambda| - 2\varepsilon(1 + |\lambda|) \leq \frac{|\lambda|}{2}.$$

□

4.4.2 Copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ non octaédrale

Théorème 4.4. *Il existe une norme équivalente $|||.|||$ sur $l^1(\mathbb{N})$ vérifiant (i) et (ii) suivants :*
- *(i) $(l^1(\mathbb{N}), |||.|||)$ est une copie asymptotiquement isométrique de $l^1(\mathbb{N})$*
- *(ii) $|||.|||$ admet un point de Frechet-différentiabilité.*

Démonstration. Soit $a \in]0, 1[$. On considère l'application $N_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$N_a(x, y) = \sup\{a|x| + |y|, |x|\}, \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Alors N_a est une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$a|x| + |y| \leq N_a(x, y) \leq |x| + |y|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et N_a est Frechet-différentiable au point $(1, 0)$. En effet il est évident que N_a est une norme qui vérifie 1.. Montrons, alors 2. ; soit

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0, \ |y| < |x|(1 - a)\}$$

V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le point $(1, 0)$ de plus $\forall (x, y) \in V, \quad N_a(x, y) = x$.
Ce qui montre la différentiabilité de N_a en $(1, 0)$.

Posons, pour $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^1(\mathbb{N})$,

$$|||\alpha||| = \sup\{\ a|\alpha_1| + \Sigma_{n\geq 2}|\alpha_n|, \ |\alpha_1|\}$$

Donc

$$|||\alpha||| = N_a(|\alpha_1|, \Sigma_{n\geq 2}|\alpha_n|)$$

D'après ce qui précède, $|||.|||$ est une norme sur $l^1(\mathbb{N})$ qui vérifie

$$a\|\alpha\|_1 \leq |||\alpha||| \leq \|\alpha\|_1, \ \forall \alpha \in l^1(\mathbb{N})$$

et qui est F-différentiable en $\alpha = e_1 = (1, 0, ...)$.
D'autre part, on peut facilement voir que $(l^1(\mathbb{N}), |||.|||)$ est une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$. En effet, Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset l^1$ telle que $x_n = e_n, \ \forall n \geq 1$, où e_n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n^{ieme} qui vaut 1 ($(e_n)_{n\geq 1}$ est la base canonique de $l^1(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle).
Alors pour tout $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in l^1$ et

$$|||\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n||| \geq a|\alpha_1| + \sum_{n\geq 2} |\alpha_n|$$

Si on définit la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ par : $\varepsilon_1 = 1 - a$ et $\varepsilon_n = 0, \ \forall n \geq 2$, on voit que

$$\sum_{n\geq 1} (1 - \varepsilon_n)|\alpha_n| \leq \|\sum_{n\geq 1} \alpha_n x_n\| \leq \sum_{n\geq 1} |\alpha_n|.$$

$\square$

On déduit du théorème 4.4 et du lemme 4.1 le corollaire suivant qui répond par la négative à la question posée dans ([65]).

Corollaire 4.3. *Il existe une copie asymptotique de* $l^1(\mathbb{N})$ *qui n'est pas octaédrale.*
En particulier, Il existe une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ *qui n'est pas L-facteur de son bidual.*

Pfitzner a montré dans ([65], lemme 1) que les copies asymptotiques de $l^1(\mathbb{N})$ qui sont des sous-espaces d'un espace L-facteur sont des L-facteurs. Le corollaire 4.3 précédent et le théorème 2.2 montrent, en particulier, que les copies asymptotiques de $l^1(\mathbb{N})$ ne sont pas toujours (isométriques à) des sous-espaces d'un espace L-facteur. Cependant, la question suivante est naturelle et reste ouverte.
Est-ce qu'une copie asymptotique de $l^1(\mathbb{N})$ contient toujours des sous-espaces non réflexifs qui sont L-facteurs de leurs biduaux ?

Bibliographie

[1] I. Al Alam, Géométrie des espaces de Müntz et opérateurs de composition à poids,Thèse, Univ. de Lens (2008)

[2] F. Albiac and N. J. Kalton, Topics in Banach Space Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol.233, Springer,New York, 2006.

[3] Charalambos D. Aliprantis et Kim C. Border, Infinite Dimensional Analysis, 3rd ed. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006.

[4] D. Alpach, A fixed point free nonexpansive map, Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981),421-424.

[5] T. Ando, Linear functionals on Orlicz spaces, Nieuw Arch. Wisk. 8 (1960), 1-16.

[6] M. Besbes, Points fixes des contractions définies sur un convexe L^0- fermé de L^1, Note aux C.R.A.S. Paris, 311 (1990), 5, 243-246.

[7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle ,Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[8] F. E. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A. 54 (1965), 1041-1044.

[9] P.G. Casazza, Approximation properties, Handbook of the geometry of Banach spaces **1**(2OO1), 271-316.

[10] P.G. Casazza and N.J. Kalton, Notes on approximation properties in separable Banach spaces, Geometry of Banach spaces (Strobl,1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol 158, Cambridge Univ.Press,(1990), 49-63.

[11] H. Chen, Geometry of Orlicz spaces, Dissertationes Mathematicae, Rozprawy Mathematyczne (1996).

[12] G. Choquet, Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P. A. Meyer,(appendice), Séminaire de théorie du potentiel, 6^{ieme} année, exposé n°8, IHP Paris, 1961-1962.

[13] James A. Clarkson,Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

[14] S. R. Cowell and N .J. Kalton, Asymptotic unconditionality, Quart. J ; Math. 61, 2 (2010), 217-240.

[15] J. Diestel, Geometry of Banach Space-Selected Topics, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer Verlag (1975).

[16] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, GTM 92, Springer-Verlag, 1984.

[17] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, Smoothness and renormings in Banach spaces, Pitman Monographs and Surveys 64, Longman Ed. 1993.

[18] P. N. Dowling and C. J. Lennard, Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997),443-446.

[19] P. N. Dowling, C. J. Lennard, B. Turett ; Reflexivity and the fixed point property for nonexpansive maps, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 653-662.

[20] P. N. Dowling, C. J. Lennard, B. Turett, Renorming of l^1 and c_0 and fixed point properties, Handbook of metric fixed point theory, 267-297, Kluwer Acad.Publ. Dordrecht, 2001.

[21] P. N . Dowling, B. Randrianantoanina and B. Turett ; The fixed point property via dual space properties, Journal of Functional Analysis 233 (2006) 494 -514.

[22] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operator I, Interscience,New York,1958.

[23] Y. Dutrieux, Géometrie non lineaire des espaces de Banach, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2002.

[24] R. Fernandez, Caracterization of the dual of an Orlicz space, Comment. Math., 30 n˚1 (1990), 69-83.

[25] F. Fuentes, F. L. Hernandez, On weighted Orlicz sequence spaces and their subspaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol.18 n˚3, (1988), 585-599.

[26] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster,E. M. Mazcunan-Navarro , Uniformly nonsquare Banach space have the fixed point property for nonexpansive mappings, Journal of Functional Analysis 255 (2008) 768 -775.

[27] K.Goebel and W.A.Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, (1990).

[28] G. Godefroy,Parties admissibles d'un espace de Banach. Applications, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.16 (1983), 109-122.

[29] G. Godefroy ,Sous-espaces bien disposés de L^1,Applications. Trans. Amer. Math. Soc.286 (1984),227-249.

[30] G.Godefroy, Metric characterization of fist Baire class functions and octahedral norms, Studia Math. 95 (1989),1-15.

[31] G. Godefroy, Asplund spaces and decomposable nonseparable Banach spaces, Rocky Mountain J. of Math., 25, 3 (1995),1013-1024.

[32] G.Godefroy , Unconditionality in spaces of smoth functions , Arch. Math. 92 (2009), 476-484 .

[33] G. Godefroy,N. J. Kalton, The ball topology and its applications, Contemp. Math. 85, Amer. Math. Soc.,1989,195-237.

[34] G. Godefroy and N. J. Kalton, *Approximating sequences and bidual projections*, Quart. J. Math. Oxford (2), 48 (1997), 179-202.

[35] G. Godefroy, N. J. Kalton and D. Li, Propriété d'aproximation métrique inconditionnelle et sous-espaces de L^1 dont la boule unité est compacte en mesure, C.R.A.S. Paris 320 (1995), 1069-1073.

[36] G. Godefroy, N. J. Kalton and D. Li, On subpaces of L^1 which embed into l^1 ,J. Reine Angew, Math. 471(1996), 43-75.

[37] G. Godefroy,N. J. Kalton and P. D. Saphar, Unconditional ideals in Banach spaces, Studia Math.104(1993),14-59.

[38] G. Godefroy and D. Li,Some natural families of M-ideals, Math. Scand. 66 (1990), 249-263.

[39] G. Godefroy, F. Lust-Piquard, Some applications of geometry of Banach spaces to harmonic analysis, Colloq. Math. 60/61(1990),443-456.

[40] G. Godefroy, P. D. Saphar, Duality in spaces of operators and smooth norms on Banach spaces, Illinois J. of Math., 12 , 4(1988),672-695.

[41] D.Göhde, Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung, Math. Nachr. 30 (1965), 251-258.

[42] A.Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mém. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[43] V. Gurarii and W. Lusky, *Geometry of Müntz spaces and related questions*, Lecture Notes in Mathematics 1870, Springer-Verlag (2005).

[44] J. Hagler, Embeddings of L^1 into conjugate Banach spaces, Ph.D. Thesis(1972), University of California, Berkeley.

[45] P.Harmand, D.Werner and W.Werner, M-Ideal in Banach spaces and Banach algebras, Springer Verlag Lecture Notes 1547 (1993).

[46] S.Kaijser, A Note On Dual Banach Spaces, Math. Scand. 41 (1977), 325-330.

[47] N. J. Kalton and D. Werner, Property (M), M-ideals and almost isometric structure of Banach spaces, J. Reine Angew, Math. 461(1995), 137-178.

[48] L. A. Karlovitz, Existence of fixed point for nonexpansive mappings in a space without normal structure,Pacific J. Math. 66 (1976),153-159.

[49] L. A. Karlovitz, Some fixed point results for nonexpansive mappings in fixed point theory and its applications, Academic Press,New York (1976), 91-103.

[50] M. A. Khamsi, La propriete du point fixe dans les espaces de Banach avec base inconditionnelle, Math. Annalen 277, 4 (1987), 727-734.

[51] W.A.Kirk , A fixed point theorem for mappings which do not increase distance, Amer. Math. Monthly 72(1965),1004-1006.

[52] J. Komlos, A generalization of the problem of Steinhaus, Acta. Math. Hungar,18 (1967) 217-229.

[53] M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutikii, Convex functions and Orlicz spaces(translation), P. Noordhoff Lid., Groningen (1961).

[54] D.Li, H.Queffélec, Introduction à l'étude des espaces de Banach, Analyse et Probabitités, Cours Specialises 12, Soc. Math. de France (2004).

[55] D. Li, Espaces L-facteurs de leurs biduaux : Bonne disposition, meilleure approximation et propriété de Radon-Nikodym, Quart. J. Math. Oxford (2), 38 (1987), 229-243.

[56] A. Lima, Property (wM^*) and the unconditional metric compact approximation property, Studia Math. 113 (1995), 249-263.

[57] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1977).

[58] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1979).

[59] P. K. Lin, Unconditional bases and fixed of nonexpansive mappings, Pacific J. Math.116,(1985), 69-76.

[60] P. K. Lin, Köthe-Bochner function Spaces, Birkhäuser (2004).

[61] Pei-Kee Lin, There is an equivalent norm on l_1 that has the fixed point property, Nonlinear Analysis, 68 (2008), 2303-2308.

[62] B. Maurey, Points fixes des contractions sur un convexe fermé de L^1, Semin. Anal. Fonct. 1980-1981, Ecole Polytechnique.

[63] B. Maurey, Types and l^1-subspaces, Longhorn Notes, Texas Functional Analysis Seminar, Austin, Texas (1982/1983).

[64] T. J. Morrison, Functional Analysis, an introduction to Banach Spaces Theory, Pure and Applied Math. A . Wiley-Interscience Publication. U.S.A. 2000.

[65] H. Pfitzner, A note on asymptotically isometric copies of l^1 and c_0, Proc. Amer. Math. Soc. 129, 5 (2001), 1367-1373.

[66] M. M. Rao, Linear functionals on Orlicz spaces : General theory, Pacific J. of Math., 25, 3 (1968), 553-585.

[67] M. M. Rao, Z. D. Ren, Theory of Orlicz spaces, Marcel Dekker, Inc. New York (1991).

[68] H. P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l^1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411-2413.

[69] W. Rudin, Functional Analysis,2nd.edition, McGraw Hill (1990).

[70] H. H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer, Berlin 1974.

[71] Yamina Yagoub-Zidi, Some Isometric Properties of Subspaces of Function Spaces, Mediterranean Journal of Mathematics (2013).

[72] K.Yosida and G.Hewitt, Finitely additive measures, Trans. Amer. Math.Soc. 72 (1952), 46-66.

Résumé

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans la théorie isométrique des espaces de Banach. Tout d'abord, nous montrons en s'appuyant sur un théorème dû à B.Maurey que si un espace de Banach séparable X est l'image d'une projection P définie sur X^{**} avec $\|I-2P\|=1$ (tels espaces sont dits u-facteurs) et Y est un sous-espace de X, alors le bidual de Y contient au moins un élément non nul du noyau de P. La preuve du théorème de Maurey étant très complexe, on fournit une preuve autonome de ce résultat dans le cas important des lattices de Banach faiblement séquentiellement complets, sachant la représentation de ces derniers comme des espaces de Köthe de fonctions. Si la projection P satisfait $\|x+u\|=\|x\|+\|u\|$, pour tout x dans X et pour tout u dans $KerP$, on dit que X est L-facteur. Les espaces L-facteurs constituent une classe bien étudiée d'espaces u-facteurs. Après avoir déduit du résultat ci-dessus que leurs sous-espaces non réflexifs ont des normes octaédrales, nous établissons que la propriété d'octaédralité est strictement plus forte que celle de contenir $l^1(\mathbb{N})$ asymptotiquement. Ceci répond en particulier à une question posée par Pfitzner. Le deuxième aspect de cette thèse concerne les propriétés du point fixe. Nous déduisons du dernier résultat cité plus haut que les espaces à norme octaédrale n'ont pas la propriété du point fixe. D'autre part et après avoir observé à partir d'un théorème dû à P.K. Lin que les espaces qui se plongent dans un espace de Banach à base 1-inconditionnelle avec une distorsion $1+\delta$, $\forall\delta>0$, ont la propriété faible du point fixe, nous établissons en s'appuyant sur des récents travaux de Cowell-Kalton et G. Godefroy, la propriété faible du point fixe pour une certaine classe d'espaces de fonctions lisses.

Les résultats obtenus sont appliqués en particulier pour élucider les questions sur les propriétés du point fixe pour une importante classe des sous-espaces de Müntz des espaces de Köthe.

Mots-Clefs : Espaces de Banach u-facteurs, Normes octaédrales, Espaces de Müntz, Propriété du Point Fixe,Base Inconditionnelle.

Abstract

This Ph.D. dissertation deals with some isometric properties of Banach spaces . In the first we observe, as a consequence of a theorem due to B.Maurey, that if a Banach space X is the range of a projection P defined on X^{**} with $\|I-2P\|=1$ (such spaces are called u-embedded) and Y is a subspace of X, then the bidual of Y meets non -trivially the kernel of P. The proof of the Maurey's theorem is quite involved, we provide a self-contained proof of this result in the important case where X is a weakly sequentially complete Banach lattices knowing the representation of them as Köthe function spaces. If the projection P satisfies $\|x+u\|=\|x\|+\|u\|$ for all x in X and all u in $KerP$ we say that X is L-embedded. The L-embedded spaces form a well-studied class of a u-embedded spaces. After deducting from the above result that a non-reflexive subspace of an L-embedded space is octahedral, we establish that octahedrality strictly implies the asymptotic containement of $l^1(\mathbb{N})$. This respond, in particular, to question of Pfitzner. The second aspect of this work concerns the the fixed point properties. We deduce from the last result mentioned above that every octahedral space fails the fixed point property. On the other hand, and after observing as a consequence of a theorem due to P.K. Lin that the spaces which can be $(1+\delta)$-embedded $\forall\delta>0$ in the space with 1-unconditinal basis have the weak fixed point property, we establish from recent work of Cowell-Kalton and Godfrey the weak fixed point property for some class of spaces of smooth functions.

The results are applied in particular to clarify the issues on the fixed point properties for an important class of Müntz subspace of Köthe spaces.

keywords : u-embedded Banach spaces, Octahedral norms, Müntz spaces, Fixed point properties, Unconditinal Basis.