

*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique*

*Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou
Faculté de Sciences
Département de Mathématiques*

*Mémoire de Magister en Mathématiques
Option : Probabilités et Statistique*

*CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'INTEGRALE
STOCHASTIQUE ET DU MOUVEMENT BROWNIEN .*

Présenté par LADJIMI FETIMA

le 06/ 07 / 2011 , devant le Jury :

<i>M. Hocine FELLAG</i>	<i>: Professeur,</i>	<i>(U.M.M.T.O),</i>	<i>Président ;</i>
<i>M. Mohand Arezki BOUDIBA</i>	<i>: Maître de conférence (A),</i>	<i>(U.M.M.T.O),</i>	<i>Rapporteur ;</i>
<i>M. Djamal HAMADOUCHE</i>	<i>: Professeur,</i>	<i>(U.M.M.T.O),</i>	<i>Examineur ;</i>
<i>M. Youcef BERKOUN</i>	<i>: Maître de conférence (A),</i>	<i>(U.M.M.T.O),</i>	<i>Examineur.</i>

Remerciements

J'adresse mes remerciements à Monsieur HOCINE FELLAG, Professeur à L'U.M.M.T.O, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail et l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur HAMADOUCHE DJAMEL, Professeur à L'U.M.M.T.O, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail, et l'honneur qu'il me fait de participer à ce jury .

Je tiens à remercier Monsieur BERKOUN YUCEF, Maître de Conférences à L'U.M.M.T.O, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail et l'amabilité qu'il a de faire partie du jury.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur MOHAND AREZKI BOUDIBA, Maître de Conférences à L'U.M.M.T.O, pour m'avoir confié ce travail. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour sa disponibilité, ses remarques judicieuses et ses relectures attentives dont il sait me faire profiter, pour ses conseils et ses encouragements, pour sa confiance en moi et sa générosité.

Enfin j'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon frère Mouloud. Que Dieu lui ouvre les portes de son vaste Paradis ;

- * A la mémoire de mes grands-parents. Qu'ils reposent en paix ;
- * A mes très chers parents, pour leurs amour et sacrifices ;
- * A mes frères et soeurs, neveux et nièces ;
- * A mes belles soeurs et mon beau frère ;
- * A mes proches amis et toute ma famille pour leurs soutient et encouragements ;
- * A tous mes enseignants depuis la première année primaire. C'est grâce à eux que je suis arrivée à ce stade ;
- * A tous ceux qui m'ont aidé pour la réalisation de ce travail et à tous mes collègues des deux lycées de Mâatkas.

Projet de Mémoire

Fetima Ladjimi

14 juillet 2011

Table des matières

Introduction générale	3
1 Lois et processus gaussiens, Processus stationnaires	5
1.1 Lois et processus gaussiens	5
1.1.1 Loi gaussienne réelles	5
1.1.2 Vecteurs gaussiens réels	9
1.1.3 Processus Gaussiens réels	17
1.2 Processus stationnaires	18
1.3 Loi et Processus Gaussiens Complexes	20
2 Intégrale Stochastique	22
2.1 Introduction	22
2.2 Intégrale stochastique et processus stationnaire du second ordre	22
2.2.1 Mesures Aléatoires et Champs Aléatoires	23
2.2.2 Mesure spectrale	33
2.2.3 Intégrale de Wiener	44
3 Mouvement Brownien et Introduction à l'intégrale d'Itô	53
3.1 Introduction	53
3.2 Marches Aléatoires et Mouvement Brownien	54
3.3 Simulation des trajectoires	59
3.4 Définitions et Propriétés du Mouvement Brownien	61
3.5 Intégrale d'Itô	71

Conclusion et perspectives	76
ANNEXE	77
Bibliographie	78

Introduction générale

Le mémoire est une synthèse sur les processus stationnaires, le mouvement Brownien et l'intégrale stochastique. Il est structuré en trois chapitres.

Le premier chapitre est réparti en 3 parties. Dans la première partie nous précisons les propriétés élémentaires des lois gaussiennes réelles unidimensionnelles et multidimensionnelles.

Dans la deuxième partie nous rappellerons les notions préliminaires sur les processus stationnaires, nous étudions la stationnarité stricte et large d'un processus de second ordre, nous mettons en valeur que la fonction de covariance d'un processus stationnaire est hermitienne de type positif. Les moments d'ordre deux d'un processus gaussien, déterminent complètement la loi globale du processus, ce qui est loin d'être le cas pour un processus du second ordre quelconque. De plus dans le cas gaussien les notions de non corrélation et d'indépendance coïncident, et les deux notions de stationnarité sont équivalentes (cf. Azencott[3]).

La troisième partie comporte des notions sur les lois gaussiennes complexes et processus gaussiens complexes.

Le deuxième chapitre est une introduction à l'étude de l'intégrale stochastique, il est développé dans trois directions. La première introduit l'intégrale stochastique par l'intermédiaire des mesures aléatoires, (cf. Azencott [3]). La deuxième traite l'intégrale stochastique en introduisant la notion de mesure spectrale grâce au théorème de Herglotz-Bochner. Ce qui permet d'aboutir à une représentation intégrale des processus gaussiens complexes (cf. [7]).

La dernière direction est une introduction de l'intégrale stochastique de fonctions de carrés intégrables, par rapport à des processus à accroissements orthogonaux (cf. [6]). Cela permet de généraliser la représentation précédente aux processus stationnaires continus en moyenne quadratique.

Le troisième chapitre comporte les concepts de base du Mouvement Brownien, avec une construction intuitive qui décrit le Mouvement Brownien comme limite de marches aléatoires (cf. Joffe[16] et Ross[25]). Par suite nous donnons quelques propriétés caractéristiques du Mouvement Brownien. Nous terminons le chapitre par une introduction à l'intégrale d'Itô.

Chapitre 1

Lois et processus gaussiens, Processus stationnaires

1.1 Lois et processus gaussiens

1.1.1 Loi gaussienne réelles

Définition 1. 1. Une variable aléatoire réelle X est dite gaussienne ou normale si la loi de X admet une densité de probabilité f par rapport à la mesure de Lebesgue de la forme

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

où μ et σ sont des paramètres réels.

Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ la variable aléatoire est dite centrée et réduite.

On note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ la famille de variables aléatoires normales de paramètres μ et σ .

On a $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2$.

En effet

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

En posant

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0 + \mu = \mu.$$

De même

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Si

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \mu^2. \end{aligned}$$

Par suite une intégration par parties établit que

$$\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \sigma^2 + (\mathbb{E}(X))^2.$$

Donc $\mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sigma^2$.

Remarque 1. 1. Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En effet :

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq y\right) = P(X \leq \sigma y + \mu) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma y + \mu} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Si

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad x = \sigma t + \mu,$$

alors

$$P(Y \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

donc Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Proposition 1. 1 ([3]). Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la fonction caractéristique de X , $\varphi_X(t)$ est

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2).$$

Démonstration.

– Si $\sigma = 1$ et $\mu = 0$:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx.$$

Soit $y = x - it$, comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{2\pi},$$

nous avons

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

– Si $\sigma \neq 1$ et $\mu \neq 0$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

en posant

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{it(\sigma Y + \mu)}) = \mathbb{E}(e^{it\sigma Y} \times e^{it\mu}) \\ &= e^{it\mu} \mathbb{E}(e^{it\sigma Y}) = e^{it\mu} \varphi_Y(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi_X(t) = e^{(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)}.$$

□

La loi normale peut être également définie, d'une façon équivalente, par sa fonction caractéristique.

Définition 1. 2. Une variable aléatoire X est normale si sa fonction caractéristique φ_X est de la forme :

$$\varphi_X(t) = e^{(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)}.$$

Nous avons alors :

Proposition 1. 2. *Si X est une variable aléatoire admettant une fonction caractéristique φ_X de la forme*

$$\varphi_X(t) = e^{(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)},$$

alors X admet une densité de probabilité f de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Démonstration. : D'après la formule d'inversion de Fourier, comme $\varphi_X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \varphi_X(t) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t\sigma + (\frac{x-\mu}{\sigma})i)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sigma 2\pi} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

□

Théorème 1. 1. *Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors la v.a. $X + Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX} e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itX}) \mathbb{E}(e^{itY}) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= (e^{it\mu_1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2})(e^{it\mu_2 - \frac{1}{2}t^2\sigma_2^2}) = e^{it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}. \end{aligned}$$

Donc $X + Y$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. □

1.1.2 Vecteurs gaussiens réels

1) Vecteurs aléatoires

Soit l'espace euclidien \mathbb{R}^n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, si $X \in \mathbb{R}^n$ on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant X relativement à la base $(e_i)_{i=1, \dots, n}$, et X^t est la transposée de la matrice X .

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ par rapport à la base orthonormée $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ alors

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = X^t Y.$$

Rappelons que si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire tel que $X_i \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)) \quad \text{et} \quad \text{Cov}(X) = \Sigma = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t]$$

où Σ est la matrice carrée $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ avec

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j).$$

Proposition 1.3 ([14]). *Si A est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^d , et X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n , alors*

$$\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}(X).$$

Démonstration. On identifie l'application linéaire A avec sa matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^d , et les vecteurs à des matrices- colonnes.

Si $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d1} & \cdots & \alpha_{dn} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, nous avons

$$AX = \sum_{i=1}^{i=d} \left(\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} X_j \right) e_i \quad \text{avec} \quad (e_i)_{1 \leq i \leq d} \quad \text{la base canonique de} \quad \mathbb{R}^d.$$

Donc $\mathbb{E}(AX) = \sum_{i=1}^{i=d} \left(\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} \mathbb{E}(X_j) \right) e_i$ par la linéarité de l'espérance.

D'autre part

$$A\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{i=d} \left(\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} \mathbb{E}(X_j) \right) e_i$$

donc

$$\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}(X).$$

□

Définition 1. 3. Une matrice réelle symétrique A d'ordre n , est dite définie positive (respectivement positive) si pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ on a : $X^t A X > 0$ et $X^t A X = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (respectivement $X^t A X \geq 0$).

Proposition 1. 4 ([6]). Si la matrice de covariance Σ d'un vecteur aléatoire existe alors elle est symétrique, réelle et positive.

Démonstration.

La matrice Σ est Symétrique car $\Sigma^t = \Sigma$.

En effet

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[\langle X_i - \mathbb{E}(X_i), X_j - \mathbb{E}(X_j) \rangle] = \mathbb{E}[\langle X_j - \mathbb{E}(X_j), X_i - \mathbb{E}(X_i) \rangle] \\ &= \text{Cov}(X_j, X_i) = \Sigma_{ji}, \quad \forall i, j = 1 \dots n. \end{aligned}$$

La matrice Σ est positive, car pour tout vecteur $U = (U_1, \dots, U_n)$ on a

$$\begin{aligned} U^t \Sigma U &= U^t \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t] U = \mathbb{E}[U^t (X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t U] \\ &= \mathbb{E}[\langle U, X - \mathbb{E}(X) \rangle^2] = \mathbb{E}[(U^t (X - \mathbb{E}(X)))^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Car

$$\langle U, X - \mathbb{E}(X) \rangle = U^t (X - \mathbb{E}(X)) = \langle X - \mathbb{E}(X), U \rangle.$$

□

2) Vecteurs aléatoires gaussiens réels

Définition 1. 4. : On dit qu'un vecteur aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien, si la variable aléatoire réelle $\phi(X)$ est gaussienne pour toute forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

i.e. si $X = (X_1, \dots, X_n)$ relativement à une certaine base de \mathbb{R}^n , les variables aléatoires réelles $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ sont gaussiennes pour tout choix des nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n .

Proposition 1. 5 ([14]). Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien, et si A est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^d , alors $AX : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien.

Démonstration. Résulte du fait que $\phi \circ A$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n pour toute forme linéaire ϕ sur \mathbb{R}^d .

□

Propriétés

1. Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^n , alors chaque variable aléatoire réelle X_k est gaussienne, puisque l'application $(X_1, \dots, X_n) \mapsto X_k$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n .
2. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, alors le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) est gaussien.

Théorème 1. 2 ([3]). X est un vecteur aléatoire gaussien, si et seulement si sa fonction caractéristique φ_X est donnée par la formule :

$$\varphi_X(Z) = \exp\{iZ^t\mu - \frac{1}{2}Z^t\Sigma Z\} = \mathbb{E}(e^{i\langle Z, X \rangle}) \quad \forall Z \in \mathbb{R}^n,$$

avec $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\Sigma = Cov(X)$.

Démonstration. L'application $X \mapsto Z^t X = \langle Z, X \rangle$ est une forme linéaire, la variable $Z^t X$ est une v.a gaussienne son espérance

$$m = \mathbb{E}(Z^t X) = Z^t \mathbb{E}(X) = Z^t \mu$$

et sa variance

$$\sigma^2 = Var(Z^t X) = Z^t \Sigma Z.$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\varphi_{Z^t X}(t) = \exp\{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\} = \mathbb{E}(e^{it(Z^t X)}) = \mathbb{E}(e^{it\langle Z, X \rangle}).$$

Pour $t=1$ on obtient $\mathbb{E}(e^{it\langle Z, X \rangle}) = \varphi_X(Z) = \exp\{iZ^t\mu - \frac{1}{2}Z^t\Sigma Z\}$.

Inversement supposons que X est un vecteur de fonction caractéristique,

$$\varphi_X(Z) = \exp\left\{iZ^t\mu - \frac{1}{2}Z^t\Sigma Z\right\}$$

alors

$$\varphi_{Z^tX}(t) = \mathbb{E}(e^{it(Z^tX)}) = \mathbb{E}(e^{i(tZ^t)X}) = \varphi_X(Zt) = \exp\left\{itZ^t\mu - \frac{1}{2}tZ^t\Sigma Zt\right\} = \exp\left\{itm - \frac{1}{2}t^2\sigma\right\}.$$

Donc Z^tX est gaussienne, d'espérance m et de variance σ^2 .

□

Remarque : La loi d'un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n est entièrement déterminée par son espérance et sa matrice de variance-covariance.

Théorème 1.3 ([3]). *Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien, alors ses composantes sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées :*

$$\text{Cov}(X_j, X_k) = 0 \quad \forall j \neq k.$$

Autrement dit si et seulement si $X_1 - \mathbb{E}(X_1), \dots, X_n - \mathbb{E}(X_n)$ sont orthogonales dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Démonstration.

Nous savons déjà que des variables aléatoires réelles indépendantes sont non corrélées.

Inversement, si elles ne sont pas corrélées, la matrice de covariance de X est diagonale :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \sigma_k^2 = \text{var}(X_k).$$

Si on pose $\mu_k = \mathbb{E}(X_k)$ on a $\mathbb{E}(X) = \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Comme X est gaussien, on a pour tout vecteur $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \exp(i \langle t, \mu \rangle - \frac{1}{2}t^t\Gamma t) \\ &= \exp(i(t_1\mu_1 + \dots + t_n\mu_n) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + \dots + \sigma_n^2 t_n^2)) \\ &= \exp(it_1\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2) \times \dots \times \exp(it_n\mu_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t_n^2) \\ &= \varphi_{X_1}(t_1) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t_n). \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'indépendance de X_1, \dots, X_n . □

Proposition 1. 6 ([3]). *Un vecteur aléatoire gaussien X dans \mathbb{R}^n de moyenne μ , possède une densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , si sa matrice de covariance Σ est inversible. Cette densité est alors :*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^t \Sigma^{-1}(x - \mu)\right).$$

Pour démontrer cette proposition, rappelons que si X est un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n , A est une matrice (n, n) inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $Y = AX + b$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n la fonction g tel que

$$g(y) = \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}(y - b)).$$

En effet soit φ l'application linéaire définie par

$$Y = \varphi(X) = AX + b.$$

D'après le théorème du changement de variables nous avons :

Pour tout borélien $B \in \mathbb{R}^n$

$$P(Y \in B) = \int_B g(y) dy = P(X \in \varphi^{-1}(B)) = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(x) dx = \int_B f(\varphi^{-1}(y)) |J(\varphi^{-1}(y))| dy,$$

comme f et g sont positives alors

$$g(y) = f \circ \varphi^{-1}(y) |J(\varphi^{-1}(y))|.$$

Puisque $|J(\varphi^{-1}(y))| = |\det A^{-1}| = \frac{1}{|\det A|}$ alors,

$$g(y) = \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}(y - b)).$$

Revenons à la démonstration de la proposition 1.6.

Démonstration.

La matrice Σ est symétrique, positive et inversible, donc il existe une matrice P (inversible) tel que $\Sigma = PP^t$.

Soit $Y = P^{-1}(X - \mu)$, par définition les composantes de Y sont normales et de plus :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(P^{-1}(X - \mu)) = P^{-1}(\mathbb{E}(X - \mu)) = P^{-1}(\mathbb{E}(X) - \mu) = 0.$$

$$\text{Cov}(Y) = \mathbb{E}(YY^t) = \mathbb{E}(P^{-1}(X - \mu)(X - \mu)^t P^{-1}) = P^{-1}\Sigma(P^{-1})^t = P^{-1}PP^t(P^{-1})^t = I.$$

Donc toutes les composantes de Y sont de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, les Y_i , $i = 1, \dots, n$ sont indépendantes car $\text{Cov}(Y)$ est une matrice diagonale.

Donc la loi de vecteur Y est de densité f_Y donnée par :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P(Y \in dy) = P(Y_1 \in dy_1, Y_2 \in dy_2, \dots, Y_n \in dy_n) \\ &= P(Y_1 \in dy_1) \times P(Y_2 \in dy_2) \times \dots \times P(Y_n \in dy_n) \quad \text{par indépendance des } Y_i \\ &= f_{Y_1}(y_1) \times f_{Y_2}(y_2) \times \dots \times f_{Y_n}(y_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$f_Y(y) = \prod_{i=1}^{i=n} f_{Y_i}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^t y\right).$$

D'autre part :

$$f_X(x) = P(X \in dx) = \frac{1}{|\det(P^{-1})|} f_Y(P^{-1}(x - \mu))$$

et

$$|\det(P^{-1})| = \frac{1}{|\det P|} = \frac{1}{|PP^t|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^t P^{-1t} P^{-1}(x - \mu)\right) \\ &= \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^t (PP^t)^{-1}(x - \mu)\right) \\ &= \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^t \Sigma^{-1}(x - \mu)\right). \end{aligned}$$

□

Remarquons que nous pouvons aussi définir les vecteurs gaussiens directement par leurs densités.

Définition 1. 5. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est dit gaussien non dégénéré, s'il existe une matrice Σ inversible dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ symétrique positive et un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^n$, tel que sa densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^t \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\}.$$

Propriétés :

Avec les notations ci-dessus, si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un tel vecteur, nous avons immédiatement

(i) $\mu = \mathbb{E}(X)$ et si $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ alors $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $a^t X$ suit une loi gaussienne de moyenne $a^t \mu$ et de variance $a^t \Sigma a$.

Démonstration.

1) Preuve de (i) :

Σ est une matrice positive, il existe une matrice orthogonale P est une diagonale D telle que $P^t \Sigma P = D$. Si $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ désignent les valeurs propres de Σ alors $D = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$.

Soit $\psi : X = (X_1, \dots, X_n) \mapsto Y = (Y_1, \dots, Y_n) = P^t X$.

On a $Y = P^t X \Rightarrow X = PY$, donc

$$g(y) = P(Y \in dy) = \frac{1}{|\det P|} f(Py) = f(Py)$$

car $|\det P| = 1$ puisque P est orthogonale.

Si on pose $m = P^t \mu$ on aura,

$$\begin{aligned} (x - \mu)^t \Sigma^{-1}(x - \mu) &= (Py - Pm)^t \Sigma^{-1}(Py - Pm) = (y - m)^t P^t \Sigma^{-1} P (y - m) \\ &= (y - m)^t D^{-1}(y - m) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - m_i), \end{aligned}$$

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det D}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(y_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\} = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(y_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}.$$

Donc les variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n sont indépendantes et suivent respectivement la loi $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, d'où $\mathbb{E}(Y) = (\mathbb{E}(Y_1), \dots, \mathbb{E}(Y_n)) = (m_1, \dots, m_n) = m$ et $Cov(Y) = D$.

Donc

$$\mathbb{E}(X) = P\mathbb{E}(Y) = Pm = \mu$$

$$\begin{aligned} Cov(X) &= Cov(PY) = \mathbb{E}[(PY - \mathbb{E}(PY))(PY - \mathbb{E}(PY))^t] \\ &= P\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^t]P^t \\ &= PCov(Y)P^t = PD P^t = \Sigma. \end{aligned}$$

2) Preuve de (ii) :

1. Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0, I_n)$ alors toutes les composantes de X sont des gaussiennes indépendantes, car on a

$$P(X \in dx) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\right) = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right).$$

Donc X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, comme $a^t X = \sum_{i=1}^{i=n} a_i X_i$ donc $a^t X$ suit une loi gaussienne avec

$$\mathbb{E}(a^t X) = a^t \mathbb{E}(X) = a^t \mu = 0,$$

$$V(a^t X) = Var(a^t X) = a^t V(X) a = a^t I_n a.$$

2. Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec Σ est une matrice positive inversible. Il existe une matrice P inversible telle que $\Sigma = PP^t$.

Si on pose $Y = P^{-1}(X - \mu)$, alors Y suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc $a^t X$ suit une loi gaussienne puisque,

$$a^t X = a^t PY + a^t \mu$$

qui est une transformation linéaire d'une loi gaussienne.

De plus

$$\mathbb{E}(a^t X) = \mathbb{E}(a^t PY) + a^t \mu = a^t \mu$$

et

$$V(a^t X) = V(a^t PY + a^t \mu) = V(a^t PY) = a^t PV(Y)P^t a = a^t \Sigma a.$$

□

Théorème 1. 4. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires gaussiens de \mathbb{R}^d qui convergent en moyenne quadratique vers le vecteur X . Alors X est nécessairement un vecteur gaussien.*

1.1.3 Processus Gaussiens réels

Dans toute la suite, T désignera \mathbb{R}_+ ou un intervalle de \mathbb{R}_+

Définition 1. 6. *Un processus aléatoire réel est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de Probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) tel que :*

Pour t fixé, l'application $\omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire réelle.

Pour ω fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est une application de T dans \mathbb{R} .

Définition 1. 7. *Un processus réel $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit gaussien si*

$\forall n \geq 1$ et $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est gaussien .

La fonction $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ est appelée la moyenne du processus.

La fonction $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $K(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$ est appelée la fonction de covariance du processus.

Proposition 1. 7. *Si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus du second ordre, sa covariance*

$$K : T \times T \rightarrow \mathbb{C}$$

est une fonction de type positif c'est -à- dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^$, tous $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T^k$ et $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$, on a*

$$K(t_i, t_j) = \overline{K(t_j, t_i)} \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq k} x_i K(t_i, t_j) \overline{x_j} \geq 0.$$

Démonstration.

Il suffit de noter que la matrice $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i, j=1, \dots, k}$ avec $\Sigma_{ij} = K(t_i, t_j)$ est la matrice de covariance du vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$. □

Proposition 1. 8 (Kolmogorov). Soient $m : T \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque, et

$K : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de type positif. Alors il existe un processus gaussien réel X indexé par T , de moyenne \mathbf{m} et de covariance \mathbf{K} . Ce processus est unique presque sûrement .

1.2 Processus stationnaires

Définition 1. 8. On dit que $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus strictement (ou fortement) stationnaire, si pour tout n -uplé de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n (t_i \in \mathbb{R})$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ le vecteur $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ a la même loi que le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, i.e.

$$P(X_{t_1+h} \leq x_1, \dots, X_{t_n+h} \leq x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

En particulier on a

$$P(X_t \leq x) = P(X_{t+h} \leq x) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1. 5. Si le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est du second ordre et strictement (ou fortement) stationnaire alors,

1. $\mathbb{E}(X_t) = m$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec m un nombre réel
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$
3. $K(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - m)(X_s - m)] = \Gamma(t - s)$ pour tout $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, i.e. la covariance est une fonction Γ de $t - s$.

Démonstration. 1) et 2) sont évidents puisque

$$P(X_t \leq x) = P(X_{t+h} \leq x) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}$$

Pour démontrer 3) on a par l'inégalité de Cauchy- Schwartz il suit que

$$|\mathbb{E}(X_t X_s)| \leq (\mathbb{E}(X_t)^2)^{1/2} (\mathbb{E}(X_s)^2)^{1/2} < \infty.$$

Comme $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus stationnaire, on a

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_{s+h}) = \text{Cov}(X_t, X_s) = K(t, s) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

En posant $h = -s$ on aura

$$K(t, s) = \text{Cov}(X_{t-s}, X_0) = \Gamma(t - s),$$

et en posant $h = -t$ on aura

$$K(t, s) = \text{Cov}(X_0, X_{t-s}) = \Gamma(t - s),$$

d'où on tire que la covariance ne dépend que de la différence $t - s$ des temps t et s et de la loi de X_0 . \square

Définition 1. 9. *On dit que le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est stationnaire à l'ordre 2 ou faiblement stationnaire s'il est un processus du second ordre dont la moyenne $m(t)$ et la covariance $K(s, t)$ sont invariante par translation dans le temps. i.e.*

1. $\mathbb{E}(X_t) = m, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ où m est une constante réelle
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \Gamma(h) \quad \forall t, t+h \in \mathbb{R}$, ou Γ est une fonction de h .

Remarques

1. La fonction Γ est appelée la fonction de covariance du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, elle est paire si ce processus est stationnaire. En effet

$$\Gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(X_{t-h}, X_t) = \Gamma(-h)$$

2. Pour un processus du second ordre, la stationnarité stricte implique la stationnarité à l'ordre 2. Par contre il existe des processus stationnaires à l'ordre 2 qui ne sont pas stationnaires stricts.

Proposition 1. 9 (cf.[3]). *Un processus gaussien $(X_t)_{t \in T}$ est stationnaire si et seulement si il est stationnaire à l'ordre 2.*

Démonstration. Si $(X_t)_{t \in T}$ est gaussien, les lois jointes de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ sont gaussiennes; elles coïncident si et seulement si elles ont même moyenne et même covariance, d'où le résultat. \square

Définition 1. 10. *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est à accroissements stationnaires si la loi de l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendante de t pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$, i.e. $X_{t+s} - X_t$ a la même loi que $X_s - X_0$*

Définition 1. 11. Un processus aléatoire $(X_t)_{t \in T}$ est dit continu si pour tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue, on dira alors que les trajectoires sont continues. On a alors l'ensemble des trajectoires est une partie de $\mathcal{C}(T)$.

Définition 1. 12. Un processus aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est à accroissements indépendants, si pour toute famille strictement croissante de réels positifs $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ sont indépendantes.

1.3 Loi et Processus Gaussiens Complexes

Définition 1. 13. Pour un vecteur aléatoire complexe Z dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on définit le vecteur espérance $m_Z = \mathbb{E}[Z]$, et la matrice de covariance par $:\Sigma_Z = \mathbb{E}[(Z - m_Z)(Z - m_Z)^t]$.

Cette matrice est hermitienne positive.

Pour deux vecteurs aléatoires complexes U et V dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on définit leur matrice de covariance croisée par $:\Sigma_{(U,V)} = \mathbb{E}[(U - m_U)(V - m_V)^t]$.

Définition 1. 14. Une variable aléatoire complexe $Z = X + iY$ définie sur un espace probabilisé est gaussienne si X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes réelles indépendantes et de même variance.

Remarques

1. Une variable aléatoire réelle ne peut donc pas être considérée comme gaussienne complexe de partie imaginaire nulle.
2. La définition 1.14 peut paraître excessivement exigeante. On aurait pu décider de dire qu'une v.a. complexe $Z = X + iY$ est gaussienne dès que le couple (X, Y) est gaussien dans \mathbb{R}^2 . Mais, dans ce cas, la loi de Z ne serait plus déterminée par son espérance et sa variance σ_Z^2 . En effet, en admettant que Z soit centrée, la variance de Z vaut

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}[Z\bar{Z}] = \mathbb{E}[X^2 + Y^2]$$

La connaissance de σ_Z^2 est donc insuffisante à déterminer la loi de (X, Y) et donc de Z . Par contre si on rajoute l'hypothèse X et Y indépendantes et de même variance, on déduit immédiatement que (X, Y) est gaussienne bidimensionnelle de matrice de covariance $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_Z^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_Z^2 \end{pmatrix}$.

Définition 1. 15. On dit que le vecteur (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) à valeurs dans \mathbb{C}^n est gaussien, si toute combinaison linéaire à coefficients complexes des Z_k , $k = 1, \dots, n$ est une v.a. gaussienne complexe.

Proposition 1. 10. Un vecteur aléatoire complexe $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ est gaussien si et seulement si, en posant $X = \Re(Z)$ et $Y = \Im(Z)$, on a :

1. Le vecteur (X, Y) de dimension $2n$ est gaussien réel.
2. $\Sigma_X = \Sigma_Y$ et $\Sigma_{(X,Y)} = -\Sigma_{(Y,X)}$.

En particulier $\Sigma_Z = 2(\Sigma_X + i\Sigma_{(Y,X)})$. Donc la donnée de m_z et Σ_Z déterminent la loi de Z .

Définition 1. 16. Un processus complexe $(X_t)_t$ indexé par T est dit gaussien si pour toute partie finie $\{t_1, \dots, t_k\}$ de T , le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ est gaussien complexe.

Chapitre 2

Intégrale Stochastique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduisons dans un premier temps l'intégrale stochastique, par l'intermédiaire des mesures aléatoires, à la manière d'Azencott [3]. Ensuite nous présentons une deuxième approche par les mesures spectrales telle qu'elle a été développée par Breiman [7]. Enfin nous introduisons l'intégrale de Wiener et son application à l'énergie d'un signal.

2.2 Intégrale stochastique et processus stationnaire du second ordre

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de variables aléatoires complexes X tel que $X^2 \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Rappelons que $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[X\bar{Y}]$$

est un espace de Hilbert complexe.

Pour $X, Y \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on note

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}[|X - E(X)|^2]$$

la variance de X et

$$\Gamma(X, Y) = \mathbb{E}[(X - E(X))\overline{(Y - E(Y))}]$$

la covariance de X et Y .

2.2.1 Mesures Aléatoires et Champs Aléatoires

Mesure aléatoire à support fini

Soit \mathbb{T} le tore de dimension 1, on note $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ la tribu borélienne sur \mathbb{T} . Les mesures sur \mathbb{T} à valeurs complexes et à support fini sont de la forme $\nu = \sum_{k=1}^{k=r} a_k \delta_{\lambda_k}$ où λ_k sont des points distincts de \mathbb{T} , les $a_k \in \mathbb{C}$ et δ_{λ} est la masse unité au point λ .

Pour tout borélien B de \mathbb{T} on a :

$$\delta_{\lambda_k}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_k \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\nu(B) = \sum_{k=1}^{k=r} a_k \delta_{\lambda_k}(B)$$

et pour toute fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ on a

$$\int_{\mathbb{T}} f d\nu = \sum_{k=1}^{k=r} a_k f(\lambda_k).$$

Définition 2. 1. On appelle mesure aléatoire à support fini toute application Z de $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

$$Z = \sum_{k=1}^{k=r} A_k \delta_{\lambda_k}$$

avec les A_k sont des v.a. complexes dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ on définit la v.a. Z_f notée aussi $\int_{\mathbb{T}} f dZ$ en posant

$$Z_f = \int_{\mathbb{T}} f dZ = \sum_{k=1}^{k=r} A_k f(\lambda_k)$$

Propriétés

Soit Z une mesure aléatoire à support fini tel que

$$Z = \sum_{k=1}^{k=r} A_k \delta_{\lambda_k}.$$

On a :

- Pour toute fonction f de \mathbb{T} dans \mathbb{C} , la variable Z_f est par définition la combinaison linéaire des variables aléatoires A_k qui sont dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et donc elle est dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Pour toutes fonctions f et g de \mathbb{T} dans \mathbb{C} , si les v.a. A_k sont deux à deux non corrélées, $\sigma^2_k = \sigma^2(A_k)$ et si μ est la mesure positive à support fini, définie sur \mathbb{T} par

$$\mu = \sum_k \sigma_k^2 \delta_{\lambda_k},$$

alors on a

$$\Gamma(Z_f, Z_g) = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\mu.$$

En effet, nous avons

$$\Gamma(Z_f, Z_g) = \sum_k \sum_l f(\lambda_k) \overline{g(\lambda_l)} \Gamma(A_k, A_l) = \sum_k \sigma_k^2 f(\lambda_k) \overline{g(\lambda_k)} = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\mu,$$

car les variables aléatoires A_k sont non corrélées et par suite $\Gamma(A_k, A_l) = 0$ si $k \neq l$.

- Toute mesure aléatoire Z à support fini définit donc une mesure μ positive sur \mathbb{T} .
- Soit l'application $\phi : f \mapsto Z_f$ de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On a

$$\langle \phi(f), \phi(g) \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} = \langle Z_f, Z_g \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} = \Gamma(Z_f, Z_g) = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\mu = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)}.$$

Ce qui montre que ϕ préserve le produit scalaire, donc ϕ est une isométrie.

Remarque 2. 1. Pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$, soit Z_A la variable aléatoire définie par $Z_A = Z_{\mathbf{1}_A}$ c'est à dire, la masse donnée à $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ par la mesure aléatoire Z . Si μ est la mesure positive associée à la mesure aléatoire Z , alors on a

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_A \overline{\mathbf{1}_B} d\mu = \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B d\mu = \mu(A \cap B).$$

Remarque 2. 2. La famille de v.a. $(Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ est un processus du second ordre, de covariance :

$$K(A, B) = \Gamma(Z_A, Z_B) = \mu(A \cap B).$$

Par construction et d'après les propriétés de Z_f . Ce processus est appelé champ aléatoire non corrélé.

Champs aléatoires non corrélés

Définition 2. 2. Soit $\mathbb{T} = [-\pi, +\pi[$, $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ la famille de parties boréliennes de \mathbb{T} et (Ω, \mathcal{A}, P) espace de probabilité.

Un champ aléatoire non corrélé est une application $A \mapsto Z_A$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que

1. Si $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ et $A \cap B = \emptyset$ alors Z_A et Z_B sont non corrélés et $Z_{A \cup B} = Z_A + Z_B$.
2. Si A_n est une suite de $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ qui décroît vers \emptyset quand $n \rightarrow \infty$, alors $Z_{A_n} \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (i.e. $\|Z_{A_n}\|_2 \rightarrow 0$).

Remarque 2. 3. Si ν est une mesure déterministe sur \mathbb{T} à valeurs dans \mathbb{C} , bornée alors l'application $A \mapsto \nu(A)$ définit un champ aléatoire non corrélé. En effet,

- 1) si $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ et $A \cap B = \emptyset$ on a

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

car ν est additive.

- 2) Si $A_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ décroît vers \emptyset quand $n \rightarrow \infty$, alors $\nu(A_n) \rightarrow 0$. On a

$$\|\nu(A_n)\|_2^2 = \int_{\Omega} \nu^2(A_n) dP = \nu^2(A_n),$$

comme ν est une mesure donc $\nu(A_n) \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Champs centrés :

Soit $(Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ un champ aléatoire non corrélé. Soit l'application $\nu : A \mapsto \nu(A) = \mathbb{E}(Z_A)$, on peut vérifier que ν est une mesure positive et bornée.

En effet,

- 1) si $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ et $A \cap B = \emptyset$ on a

$$\nu(A \cup B) = \mathbb{E}[Z_{A \cup B}] = \mathbb{E}[Z_A + Z_B] = \mathbb{E}[Z_A] + \mathbb{E}[Z_B] = \nu(A) + \nu(B).$$

2) Si $A_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ décroît vers \emptyset quand $n \rightarrow \infty$, alors on a

$$|\nu(A_n)| = |\mathbb{E}(Z_{A_n})| \leq \mathbb{E}(|Z_{A_n}|) \leq \|Z_{A_n}\|_2$$

et comme $(Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ est un champ aléatoire alors $\|Z_{A_n}\|_2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc $\nu(A_n)$ tend vers 0, quand $n \rightarrow \infty$.

De 1) et 2) en déduit que ν est une mesure. La mesure ν est bornée, car $\nu(\mathbb{T}) \leq \|Z_{\mathbb{T}}\|_2$.

Soit $(Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ un champ aléatoire non corrélé. Si on pose $Z'_A = Z_A - \nu(A)$, alors $(Z'_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ est un champ aléatoire qui vérifie $\mathbb{E}[Z'_A] = 0$, donc centré.

Théorème 2. 1 ([3]). : Soit $(Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$, un processus du second ordre centré, à valeurs complexes, indexé par les boréliens de \mathbb{T} .

Pour que $Z : A \mapsto Z_A$ soit un champ aléatoire non corrélé il faut il suffit qu'il existe une mesure positive bornée μ sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$ tel que la covariance de Z s'écrive

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = \mu(A \cap B).$$

La mesure μ est appelé la base du champ Z .

Démonstration.

1) Supposons que Z est un champ aléatoire non corrélé. Montrons qu'il existe une mesure positive μ tel que

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = \mu(A \cap B).$$

Posons $\mu(A) = \sigma^2(Z_A)$.

- Montrons que μ est une mesure positive.

Pour $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ et $A \cap B = \emptyset$, on a $\Gamma(Z_A, Z_B) = 0$ et donc

$$\mu(A \cup B) = \sigma^2(Z_{A \cup B}) = \sigma^2(Z_A + Z_B) = \sigma^2(Z_A) + \sigma^2(Z_B) + 2\Gamma(Z_A, Z_B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Si A_n décroît vers \emptyset , $\mu(A_n) \rightarrow 0$ car

$$\mu(A_n) = \sigma^2(Z_{A_n}) = \|Z_{A_n}\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|Z_{A_n}\|_2^2 \rightarrow 0.$$

Ainsi μ est une mesure positive.

La mesure μ est bornée car $\mu(\mathbb{T}) = \sigma^2(Z_{\mathbb{T}})$ est fini.

- Pour A et B quelconque, on peut écrire $A = C \cup D$, $B = C \cup F$ avec D, F, C sont disjoints et $C = A \cap B$ donc on a

$$Z_A = Z_C + Z_D \quad \text{et} \quad Z_B = Z_C + Z_F$$

et Z_D, Z_F, Z_C sont deux à deux orthogonales, ce qui donne

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = \Gamma(Z_C + Z_D, Z_C + Z_F) = \Gamma(Z_C, Z_C) = \sigma^2(Z_C) = \sigma^2(Z_{A \cap B}) = \mu(A \cap B).$$

2) Supposons que $(Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ est un processus du second ordre centré, et μ est une mesure positive bornée sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$, tel que

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = \mu(A \cap B). \tag{2.1}$$

Montrons que Z est un champ aléatoire.

i) On a

$$\sigma^2(Z_{A \cup B} - Z_A - Z_B) = \sigma^2(Z_{A \cup B}) + \sigma^2(Z_A) + \sigma^2(Z_B) - 2\Gamma(Z_{A \cup B}, Z_A) - 2\Gamma(Z_{A \cup B}, Z_B) + 2\Gamma(Z_A, Z_B).$$

De (2.1) on obtient

$$\sigma^2(Z_{A \cup B} - Z_A - Z_B) = \mu(A \cup B) + 2\mu(A \cap B) - \mu(A) - \mu(B) = \mu(A \cap B).$$

Par conséquent si $A \cap B = \emptyset$, alors $\sigma^2(Z_{A \cup B} - Z_A - Z_B) = 0$ d'où $Z_{(A \cup B)} = Z_A + Z_B$.

ii) Si A_n décroît vers \emptyset , on a $\|Z_{A_n}\|_2 = \sqrt{\mu(A_n)}$ et $\mu(A_n)$ tend vers 0, car μ est une mesure donc $\|Z_{A_n}\|_2 \rightarrow 0$.

De i) et ii) en déduit que Z est un champ aléatoire.

□

Exemples de mesures aléatoires

Exemple 2. 1 (Mesure aléatoire non corrélée à support dénombrable).

Soit $(A_k)_{k \geq 1}$ une suite de v.a. centrées, tel que $Cov(A_k, A_l) = 0$ si $l \neq k$.
Posons $\sigma_k^2 = \sigma^2(A_k)$ et soit $\lambda_k, k \geq 1$ une suite de points distincts de \mathbb{T} .

On a bien : Si $\sum_k \sigma_k^2 < \infty$ alors pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ $Z_B = \sum_{k \geq 1} A_k \mathbf{1}_B(\lambda_k)$ converge dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \| A_k \mathbf{1}_B(\lambda_k) \|_2^2 &\leq \sum_{k \geq 1} \| A_k \|_2^2 \| \mathbf{1}_B(\lambda_k) \|_2^2 \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \| A_k \|_2^2 \leq \sum_{k \geq 1} \sigma_k^2 < \infty, \end{aligned}$$

et $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace d' Hilbert complet par suite $\sum_{k \geq 1} A_k \mathbf{1}_B(\lambda_k)$ converge dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et de plus

$$\| \sum_{k \geq 1} A_k \mathbf{1}_B(\lambda_k) \|_2 \leq \sum_{k \geq 1} \| A_k \mathbf{1}_B(\lambda_k) \|_2 .$$

Donc $Z_B \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$Z = (Z_B)_{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ est un champ aléatoire non corrélé, centré, à support dénombrable et de base la mesure positive et bornée

$$\mu = \sum_{k \geq 1} \sigma_k^2 \delta_{\lambda_k} .$$

L'application $Z : B \mapsto Z_B$ est une mesure aléatoire non corrélée à support dénombrable inclus dans $\{\lambda_k \quad k \geq 1\}$, support qui est fini si les A_k sont nuls pour $k \geq N$.

Exemple 2. 2 (Champs aléatoires gaussiens). Toute mesure positive μ bornée sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$ est la base d'au moins un champ aléatoire non corrélé centré Z sur \mathbb{T} , et Z peut être choisi gaussien réel.

En effet, pour $A_1, A_2 \dots A_r \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$, $x_1, x_2 \dots x_r \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{i,j} x_i x_j \mu(A_i \cap A_j) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{i,j} x_i x_j \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{A_j} d\mu = \int_{\mathbb{T}} | \sum_i x_i \mathbf{1}_{A_i} |^2 d\mu \geq 0.$$

On a l'application

$$K : \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{donnée par } K(A, B) = \mu(A \cap B)$$

est de type positif. Par conséquent d'après (Proposition 1.8) il existe un processus gaussien réel centré $Z = (Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ indexé par $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$, unique à équivalence près, de covariance

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = K(A, B) = \mu(A \cap B).$$

D'après (le théorème 2.1.) Z est un champ aléatoire non corrélé, de base μ .

Intégrale Stochastique et Champs Aléatoires Soit Z un champ aléatoire non corrélé, nous cherchons à définir

$$Z_f = \int_{\mathbb{T}} f dZ \tag{2.2}$$

pour toute $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$.

Lorsque l'application

$$A \rightarrow Z_A(\omega)$$

est une mesure ν_{ω} sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$ pour tout $\omega \in \Omega$, on peut définir Z_f (comme à la définition 2.1) en posant

$$Z_f(\omega) = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda) d\nu_{\omega}(\lambda).$$

Par exemple si $Z = \sum_k A_k \delta_{\lambda_k}$ est une mesure aléatoire à support dénombrable, alors pour P-presque tout $\omega \in \Omega$ la formule $\nu_{\omega} = \sum_k A_k(\omega) \delta_{\lambda_k}$ définit une vraie mesure complexe sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$, si on suppose $\sum \sigma_k < \infty$. Mais cette approche ne peut pas s'appliquer au cas général.

Pour définir Z_f , rappelons les lemmes suivants :

Lemme 2. 1 ([3]). : Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert complexes. Soit F un sous espace vectoriel, fermé ou non, dans H_1 , et soit J une isométrie de F dans H_2 . Alors J se prolonge de façon unique en une isométrie $S : \overline{F} \rightarrow H_2$ et $S(\overline{F})$ est l'adhérence de $J(F)$ dans H_2 (i.e $S(\overline{F}) = \overline{J(F)}$).

Démonstration. Soit $x \in \overline{F}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ de point de F qui converge vers x , donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Comme J est une isométrie alors $(J(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans H_2 qui est complet, donc $(J(x_n))_n$ est convergente.

Par suite il existe $y \in H_2$ tel que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$.

Si on suppose que $(x'_n)_n$ est une autre suite qui converge vers x , on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x'_n\| = 0,$$

par isométrie on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J(x_n) - J(x'_n)\| = 0.$$

Donc y ne dépend pas de la suite choisie.

Posons $S(x) = y$ et comme les propriétés de linéarité et préservation du produit scalaire sont conservées par passage à la limite alors $S : \overline{F} \rightarrow H_2$ est bien une isométrie prolongeant J . L'unicité de S est évidente par construction de S car pour $x \in \overline{F}$, $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$.

Montrons que $S(\overline{F}) = \overline{J(F)}$.

Nous avons $S(\overline{F}) \subset \overline{J(F)}$ par construction de S , il reste à montrer que $\overline{J(F)} \subset S(\overline{F})$.

Soit $y \in \overline{J(F)}$, alors $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n)$ avec $x_n \in F$. Comme $(J(x_n))_n$ est convergente vers y , donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans F ce qui implique que $(x_n)_n$ est convergente vers x de \overline{F} et puisque S est continue, ainsi que

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = J\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = S(x)$$

alors $y \in S(\overline{F})$.

□

Lemme 2. 2 ([3]). : Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert complexes, $(v_t)_t \subset H_1$ et $(w_t)_t \subset H_2$ deux familles de vecteurs indexées par $t \in T$, où T est un ensemble quelconque. Supposons que

$$\langle v_s, v_t \rangle_{H_1} = \langle w_s, w_t \rangle_{H_2} \quad \text{pour } s, t \in T. \quad (2.3)$$

Soient V et W les sous espaces vectoriels fermés de H_1 et H_2 respectivement engendrés par les $(v_t)_{t \in T}$ et $(w_t)_{t \in T}$.

Alors il existe une unique isométrie S de V dans W telle que $S(v_t) = w_t$ pour tout $t \in T$.

De plus on a $S(V) = W$.

Démonstration. Soit F l'espace vectoriel de combinaisons linéaires finies des v_t , à coefficients complexes.

Pour $f = \sum_j c_j v_{t_j}$ dans F posons $S(f) = \sum_j c_j w_{t_j}$.

De (2.3) on déduit

$$\langle S(f), S(g) \rangle = \langle \sum_j c_j w_{t_j}, \sum_i b_i w_{t_i} \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{pour tout } f, g \in F.$$

On conclut que l'application $S : f \mapsto S(f)$ est une isométrie de F dans H_2 . D'après le (lemme 2.1), S se prolonge d'une façon unique en une isométrie

$$\tilde{S} : \overline{F} \rightarrow H_2.$$

Mais par construction $\overline{F} = V$ et $S(F)$ est l'espace vectoriel engendré par $(w_t)_{t \in T}$ tel que $\tilde{S} = \overline{S(F)} = W$. On a ainsi construit une isométrie \tilde{S} de V dans W telle que $\tilde{S}(v_t) = w_t$. Ce qui prouve le lemme.

□

Théorème 2. 2 ([3]). Soit Z un champ aléatoire non corrélé sur \mathbb{T} , centré de base μ . Alors il existe une unique isométrie $f \mapsto Z_f$ de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $Z_{\mathbf{1}_A} = Z_A$ pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$.

On a $\mathbb{E}(Z_f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$, et l'image de $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ par Z est égale au sous-espace fermé H^Z de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par les Z_A , $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$.

Démonstration.

Soient $H_1 = \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ et $H_2 = \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$, définissons $v_A \in H_1$ et $w_A \in H_2$ par $v_A = \mathbf{1}_A$ et $w_A = Z_A$. Alors pour $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ on a

$$\langle v_A, v_B \rangle_{H_1} = \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B d\mu = \mu(A \cap B) = \Gamma(Z_A, Z_B) = \langle w_A, w_B \rangle_{H_2} \quad (2.4)$$

Soit respectivement V et W les sous espaces de H_1 et H_2 engendrés par les $(v_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ et les $(w_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$.

L'ensemble des fonctions étagées denses dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$, on a $V = H_1$. D'autre par $W = H^Z$ avec H^Z l'enveloppe linéaire du champ Z .

D'après l'équation (2.4), le (lemme 2.2) entraîne l'existence d'une unique isométrie S de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ dans H^Z telle que $S(v_A) = w_A$, c.a.d $S(\mathbb{1}_A) = Z_A$.

D'autre part, le processus $Z = (Z_A)_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}}$ est centré donc on a $\mathbb{E}(X) = 0$ pour $X \in H^Z$.
D'où le théorème. \square

Définition 2. 3. Soit Z un champ aléatoire non corrélé sur \mathbb{T} , centré, de base μ .

Pour toute fonction $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$, on appelle intégrale stochastique de f par rapport au champ Z l'élément Z_f de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associé à f par l'isométrie (Théorème 2.2). Nous noterons

$$Z_f = \int_{\mathbb{T}} f dZ = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda) dZ(\lambda).$$

Propriétés :

Pour $f, g \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a :

$$1) \int_{\mathbb{T}} (\alpha f + \beta g) dZ = \alpha \int_{\mathbb{T}} f dZ + \beta \int_{\mathbb{T}} g dZ \quad \text{par linéarité de l'isométrie.}$$

$$2) \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{T}} f dZ\right) = 0 \quad \text{par le théorème 2.2.}$$

$$3) \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{T}} f dZ\right)\overline{\left(\int_{\mathbb{T}} g dZ\right)}\right] = \langle Z_f, Z_g \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)} = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\mu.$$

Cas des mesures aléatoires à support dénombrable

Soit Z la mesure aléatoire à support dénombrable et centrée sur \mathbb{T} . On a $Z = \sum_k A_k \delta_{\lambda_k}$.

La base μ de Z est donnée par $\mu = \sum_k \sigma_k^2 \delta_{\lambda_k}$. Une fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$

si $\sum_k \sigma_k^2 |f(\lambda_k)|^2 < \infty$. On a alors la série

$$\sum_k A_k f(\lambda_k).$$

est convergente dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et

$$Z_f = \int_{\mathbb{T}} f dZ = \sum_k A_k f(\lambda_k).$$

Théorème 2. 3. Soient (Ω, P) un espace de probabilité et μ une mesure positive bornée sur $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}})$. Soit J une application linéaire de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ dans $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\mathbb{E}[J(f)] = 0$ pour tout $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$.

Pour que J soit une isométrie, il faut et il suffit qu'il existe un champ aléatoire non corrélé centré Z sur \mathbb{T} tel que $J(f) = \int_{\mathbb{T}} fdZ$. De plus J détermine Z de façon unique.

Démonstration. Supposons que J est une isométrie, montrons qu'il existe un champ Z tel que $J(f) = \int_{\mathbb{T}} fdZ$.

Définissons Z_A par $Z_A = J(\mathbf{1}_A)$, ce qui donne

$$\Gamma(Z_A, Z_B) = \langle J(\mathbf{1}_A), J(\mathbf{1}_B) \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} = \langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)} = \mu(A \cap B).$$

Donc $Z : A \mapsto Z_A$ est un champ non corrélé centré de base μ .

Puisque $f \mapsto Z_f = J(f) = \int_{\mathbb{T}} fdZ$ est l'unique isométrie telle que $Z_{\mathbf{1}_A} = Z_A$, on a $J(f) = Z_f$ pour tout $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$. \square

2.2.2 Mesure spectrale

Dans toute la section G un groupe abélien localement compact (LCA), m la mesure de Haar sur G .

Définition 2. 4. Une fonction complexe γ sur le groupe G est un caractère de G si

$$|\gamma(x)| = 1$$

pour tout $x \in G$, et vérifie la condition :

$$\gamma(x + y) = \gamma(x) \times \gamma(y) \quad \text{pour tout } x, y \in G.$$

L'ensemble des caractères continus dans G forme un groupe noté Γ , qui est le dual topologique de G .

Pour toute fonction $f \in L^1(G)$ la fonction \hat{f} définie sur Γ par

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(-x)dx \quad (\gamma \in \Gamma)$$

est appelée la transformé de Fourier de f .

L'ensemble de toutes les fonctions \hat{f} obtenues est noté $A(\Gamma)$.

Définition 2. 5. Une fonction Φ à valeurs complexes définie sur G , est dite de type positif si pour tout entier positif n , pour tous $x_1, \dots, x_n \in G$ et pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_i \overline{c_j} \Phi(x_i - x_j) \geq 0.$$

On peut traduire ce fait en disant que la matrice $M(i, j) = \Phi(x_i - x_j)$ $i, j \in [1, n]$ est hermitienne positive .

Proposition 2. 1 ([27]). Une fonction de type positif Φ définie sur G , vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Phi(-x) = \overline{\Phi(x)}$;
2. $|\Phi(x)| \leq \Phi(0)$;
3. $|\Phi(x) - \Phi(y)|^2 \leq 2\Phi(0)[\Phi(0) - \Phi(x - y)]$.

Nous proposons ci-dessous une forme du théorème de Bochner, c'est le théorème d'Herlotz. Pour sa démonstration nous avons besoin des éléments suivants :

Définition 2. 6. Soit ξ une famille des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} , et \mathcal{N} est l'ensemble de toutes les lois.

ξ est dite \mathcal{N} -séparante (\mathcal{N} -separating) si pour tous $F, G \in \mathcal{N}$,

$$\int f dF = \int f dG, \quad \forall f \in \xi$$

alors $F = G$.

Définition 2. 7. Soit \mathcal{N} l'ensemble de toutes les lois . Un sous ensemble $\mathcal{L} \subset \mathcal{N}$ préserve la masse si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle I tel que

$$F(I^c) < \epsilon, \forall F \in \mathcal{L}.$$

Proposition 2. 2 ([7]). Soit ξ une famille \mathcal{N} -séparante, et $\{F_n\}$ préserve la masse. Il existe $F \in \mathcal{N}$ telle que F_n converge vers F si et seulement si

$$\lim_n \int f dF_n \text{ existe, } \forall f \in \xi.$$

On a alors $\lim_n \int f dF_n = \int f dF, \quad \forall f \in \xi.$

La démonstration de cette proposition est dans Breiman (cf. [7]).

Théorème 2. 4 (Herglotz). *Pour qu'une fonction $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ soit de type positif, il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive bornée μ sur $\mathbb{T} = [-\pi, \pi[$ telle que*

$$\Phi(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{in\lambda} d\mu(\lambda),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La fonction Φ détermine μ de façon unique.

Démonstration.

a) Condition Suffisante :

Si μ est une mesure positive bornée sur \mathbb{T} et si

$$\Phi(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{in\lambda} d\mu(\lambda) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

alors nous avons pour tout entier positif n , pour tous $n_1, \dots, n_n \in \mathbb{Z}$ et pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_i \bar{c}_j \Phi(n_i - n_j) &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_i \bar{c}_j e^{i(n_i - n_j)\lambda} d\mu(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{i=1}^{i=n} c_i e^{in_i\lambda} \right|^2 d\mu(\lambda) \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que Φ est de type positif.

b) Condition Nécessaire :

Par hypothèse Φ est de type positif. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction $f_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{m=1}^{m=N} e^{-in\lambda} e^{im\lambda} \Phi(n - m).$$

Ainsi définie $f_N(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall N \in \mathbb{N}^*$, car ϕ est de type positif et donc, pour tout entier positif n , pour tous $n_1, \dots, n_n \in \mathbb{Z}$ et pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} c_i \bar{c}_j \Phi(n_i - n_j) \geq 0.$$

En particulier c'est vrai pour $c_j = e^{ij\lambda}, j = 1, \dots, n$.

soit $k = n - m$, nous avons

$$\begin{aligned} f_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{k=n-N}^{k=n-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{k=0}^{k=n-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) + \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{k=n-N}^{k=-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{k=N-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) \sum_{n=k+1}^{n=N} 1 + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1-N}^{k=-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) \sum_{n=1}^{n=N+k} 1 \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{k=N-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) (N - k) + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1-N}^{k=-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) (N + k) \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1-N}^{k=N-1} e^{-ik\lambda} \Phi(k) (N - |k|). \end{aligned}$$

Donc

$$f_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1-N}^{k=N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{-ik\lambda} \Phi(k).$$

Multiplions les deux membres de cette dernière égalité par $e^{is\lambda}$ pour $1 - N \leq s \leq N - 1$, et intégrons par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, +\pi]$. Nous avons

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{is\lambda} f_N(\lambda) d\lambda = \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \phi(s),$$

et

$$\phi(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f_N(\lambda) d\lambda.$$

puisque,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda(s-k)} d\lambda = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } s = k \\ 0, & \text{si } s \neq k \end{cases}$$

Si nous supposons sans perdre de généralité que $\phi(0) = 1$ (si $\phi(0) \neq 1$ il suffit de remplacer $f_N(\lambda)$ par $\frac{f_N(\lambda)}{\phi(0)}$), il apparaît donc que f_N est une densité de probabilité.

Soit μ_N la mesure de densité $f_N(\lambda)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T} . L'ensemble $\{e^{is\lambda}\}$ est une famille de fonctions qui séparent dans $[-\pi, \pi[$ et $\{\mu_N\}$ préserve la masse.

Comme

$$\lim_N \int e^{is\lambda} \mu_N(d\lambda) \text{ existe } \forall s,$$

d'après (la proposition 2.2) il existe une mesure μ bornée telle que μ_N converge faiblement vers μ . L'existence de μ est assurée et nous avons

$$\lim_N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{is\lambda} \mu_N(d\lambda) = \lim_N \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \phi(s) = \phi(s),$$

et par suite

$$\phi(s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda} \mu(d\lambda).$$

Ce qui établit le théorème.

□

Dans le cas où la fonction Φ est définie sur $G = \mathbb{R}$ l'existence et l'unicité de la mesure μ est assurée par le théorème de Bochner et dans le cas général par le théorème de Weil.

Théorème 2. 5 (Bochner). *Pour qu'une fonction continue Φ dans G ($G = \mathbb{R}$) soit de type positif, il faut et il suffit qu'il existe une unique mesure positive $\mu \in M(\Gamma)$ ($M(\Gamma)$ est l'ensemble de mesures complexes bornées sur Γ) telle que*

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \gamma(x) d\mu(\gamma) \quad (x \in G).$$

Pour G quelconque c'est le théorème de Weil.

Démonstration. Voir Rudin (cf.[27]).

□

Définition 2. 8. *Soit $(X_t)_t$ un processus du second ordre stationnaire à l'ordre 2 et centré de fonction de covariance ϕ . La mesure spectrale du processus $(X_t)_t$ est la mesure μ donnée par les théorèmes de Bochner ou d'Herglotz.*

Exemple 1 Soit $(X_t)_t$ un processus réel centré tel que

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = \begin{cases} 1 & \text{si } t - s = 0; \\ 0 & \text{si } t - s \neq 0. \end{cases}$$

comme $(X_t)_t$ est centré alors,

$$K(t, s) = \mathbb{E}[X_t X_s] = \phi(t - s). \quad (2.5)$$

ϕ est une fonction qui ne dépend que de $t - s$ donc $(X_t)_t$ est stationnaire. La fonction ϕ est de type positif. Le théorème d'Herglotz assure l'existence d'une mesure positive μ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)\lambda} \mu(d\lambda) = \phi(t - s) = \begin{cases} 1 & \text{si } t - s = 0; \\ 0 & \text{si } t - s \neq 0. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\mu(d\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi}$$

vérifie l'équation (2.5). Donc, par unicité,

$$\mu(d\lambda) = \frac{d\lambda}{2\pi}$$

sur \mathbb{T} est la mesure spectrale du processus $(X_t)_t$.

Exemple 2 Z_1, \dots, Z_n sont des variables aléatoires centrées indépendantes telle que

$$\mathbb{E}[|Z_j|^2] = 1.$$

Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire défini par :

$$X_t = \sum_{k=1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k t} Z_k.$$

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \mathbb{E}[X_t \overline{X_s}] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k t} Z_k \cdot \sum_{j=1}^{j=n} \overline{a_j} e^{-i\lambda_j s} \overline{Z_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_k \overline{a_j} e^{i\lambda_k t} e^{-i\lambda_j s} \mathbb{E}(Z_k \overline{Z_j}) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \overline{a_k} e^{i\lambda_k(t-s)} \mathbb{E}(|Z_k|^2) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} |a_k|^2 e^{i\lambda_k(t-s)} = \phi(t - s). \end{aligned}$$

Comme μ est une mesure telle que

$$\phi(t-s) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-s)\lambda} \mu(d\lambda) = \sum_{k=1}^{k=n} |a_k|^2 e^{i\lambda_k(t-s)}.$$

On a donc

$$\mu = \sum_{k=1}^{k=n} |a_k|^2 \delta_{\lambda_k}.$$

Représentation spectrale d'un processus gaussien

Si Z_1, \dots, Z_k sont des variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$, le processus $(X_n)_n$ défini par

$$X_n = \sum_{j=1}^{j=k} e^{i\lambda_j n} Z_j \quad (2.6)$$

est un processus gaussien de fonction de covariance

$$\mathbb{E}[X_n \overline{X_m}] = \sum_{j=1}^{j=k} \sum_{l=1}^{l=k} e^{i\lambda_j n} e^{-i\lambda_l m} \mathbb{E}[Z_j \overline{Z_l}] = \sum_{j=1}^{j=k} \sigma_j^2 e^{i\lambda_j(n-m)}.$$

C'est une fonction de $n - m$ et par suite le processus $(X_n)_n$ est stationnaire. On peut alors se poser la question inverse : si $(X_n)_n$ est un processus gaussien complexe peut-on trouver une représentation de X_n du type (2.6). Ce problème est difficile, il sera résolu dans le cadre de l'intégrale stochastique.

Définition intuitive de l'intégrale stochastique

Pour revenir à l'intégrale stochastique d'une fonction par rapport à un processus stationnaire, nous faisons une présentation intuitive et calculatoire à titre introductif de cette intégrale, par rapport à un Mouvement Brownien standard (cf. [25]).

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un Mouvement Brownien standard, et $f \in C^1([a, b])$, l'intégrale stochastique de f par rapport à $(X_t)_{t \geq 0}$ est la variable aléatoire réelle si elle existe notée $\int_a^b f(t) dX_t$, définie par :

$$\int_a^b f(t) dX_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(t_{i-1}) [X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] \quad (2.7)$$

avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ et $\max(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Remarquons que,

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] = f(b)X_b - f(a)X_a - \sum_{i=1}^{i=n} X_{t_i}[f(t_i) - f(t_{i-1})]$$

car

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] &= f(t_0)[X_{t_1} - X_{t_0}] + f(t_1)[X_{t_2} - X_{t_1}] + \dots + f(t_{n-1})[X_{t_n} - X_{t_{n-1}}] \\ &= -f(t_0)X_{t_0} + f(t_0)X_{t_1} - f(t_1)X_{t_1} + \dots + f(t_{n-1})X_{t_n} - f(t_{n-1})X_{t_{n-1}} \\ &= -f(t_0)X_{t_0} - X_{t_1}[f(t_1) - f(t_0)] - \dots - X_{t_n}[f(t_n) - f(t_{n-1})] + X_{t_n}f(t_n) \\ &= f(b)X_b - f(a)X_a - \sum_{i=1}^{i=n} X_{t_i}[f(t_i) - f(t_{i-1})]. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] = f(b)X_b - f(a)X_a - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} X_{t_i}[f(t_i) - f(t_{i-1})]$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} X_{t_i}[f(t_i) - f(t_{i-1})] = \int_a^b X_t df(t).$$

Donc

$$\int_a^b f(t) dX_t = f(b)X_b - f(a)X_a - \int_a^b X_t df(t) \quad (2.8)$$

Ce qui conforte la définition posée dans (2.7) car nous savons que le mouvement Brownien $(X_t)_{t \geq 0}$ est nul part différentiable (cf. [7]) alors que le deuxième membre de l' égalité (2.8) s'appuie sur $df(t)$ qui a un sens car on a supposé $f \in C^1([a, b])$. Donc la définition précédente est cohérente.

Si la fonction $t \longmapsto X_t$ est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ avec μ la mesure de densité f' par rapport à la mesure de Lebesgue, on a alors, en acceptant quelques passages à la limite,

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b f(t) dX_t \right) = 0$$

et,

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{i=n} f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] \right) &= \sum_{i=1}^{i=n} f^2(t_{i-1}) \text{Var}[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} f^2(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

par indépendance et stationnarité des accroissements de $(X_t)_{t \geq 0}$.

On utilisant l'égalité 2.7, on obtient

$$\text{Var} \left(\int_a^b f(t) dX_t \right) = \int_a^b f^2(t) dt.$$

Le cadre mathématique adéquat à ces calculs est l'intégrale stochastique d'Itô, que nous introduisons au chapitre III. A présent nous nous intéressons à l'intégrale stochastique dans le cas des processus stationnaires du second ordre.

Définition 2. 9. Soit $(Z_t)_t$ une famille non dénombrable de variables aléatoires complexes indexées par $t \in [-\pi, +\pi[$.

Si I est l'intervalle $[t_1, t_2[$, définissons $Z(I)$ par $Z(I) = Z_{t_1} - Z_{t_2}$. Soit $(t_i)_{i=1}^{i=n}$ une suite finie tel que $-\pi \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \pi$, et $I_k = [t_{k-1}, t_k[$ pour $k = 1 \dots n$, de sorte que les I_k forment une partition de l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ et $t_k \in I_k, \forall k$. Soit f une fonction définie sur $[-\pi, +\pi[$ à valeurs dans \mathbb{C}

Si les sommes de Riemann $\sum_{k=1}^{k=n} f(t_k) Z(I_k)$, convergent en moyenne quadratique vers une unique variable aléatoire, pour toute partition de l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ telle que $\max_k |I_k| \rightarrow 0$, alors cette limite est appelée intégrale stochastique de f par rapport à $(Z_t)_t$ et notée

$$\int f(t) dZ_t.$$

Théorème 2. 6 (cf .[7]). Soit $X = (X_n)_n$ un processus stationnaire gaussien à valeurs dans \mathbb{C} de mesure spectrale μ , alors il existe une famille de variables aléatoires complexes $(Z_t)_t$ indexées par $t \in [-\pi, \pi[$ telle que

1. Pour tous t_1, t_2, \dots, t_m , la loi jointe des variables aléatoires $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_m}$ est gaussienne ;
2. Pour tous intervalles disjoints I_1 et I_2 , $\mathbb{E}[Z(I_1) \overline{Z(I_2)}] = 0$;
3. $\mathbb{E}[|Z(I)|^2] = \mu(I)$,
4. Pour tout n ,

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dZ_t.$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{L}(X)$ l'espace des combinaisons linéaires finies $\sum \alpha_k X_k$, avec α_k des nombres complexes non tous nuls. Considérons la classe des variables aléatoires Y tel qu'il existe une suite $(Y_n)_n \in \mathcal{L}(X)$ avec $Y_n \xrightarrow{\mathbb{L}^2} Y$. Munissons cette classe du produit scalaire

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle = \mathbb{E}[Y_1 \overline{Y_2}].$$

L'ensemble des classes d'équivalences de variables aléatoires définies ainsi, muni de produit scalaire $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ est un espace de Hilbert noté $\mathbb{L}^2(X)$.

Soit $\mathbb{L}^2(\mu)$ l'espace des fonctions $f(t)$ complexes, $\mathcal{B}_{[-\pi, \pi[}$ mesurables tel que

$$\int |f(t)|^2 \mu(dt) < \infty,$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \overline{g} d\mu.$$

Pour chaque élément $X_n \in \mathbb{L}^2(X)$ on fait correspondre une fonction $e^{int} \in \mathbb{L}^2(\mu)$. Etendons cette correspondance linéairement,

$$\sum_k \alpha_k X_k \longleftrightarrow \sum_k \alpha_k e^{ikt}.$$

Soit $\mathcal{L}(\mu)$, la classe des combinaisons linéaires finies $\sum_k \alpha_k e^{ikt}$.

Si

$$Y_1, Y_2 \in \mathcal{L}(X), \quad f, g \in \mathcal{L}(\mu), \quad \text{et} \quad Y_1 \longleftrightarrow f, Y_2 \longleftrightarrow g$$

alors

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 \longleftrightarrow \alpha f + \beta g,$$

et

$$\begin{aligned} \langle Y_1, Y_2 \rangle &= \mathbb{E}[(\sum_j \alpha_j^1 X_j) \overline{(\sum_k \alpha_k^2 X_k)}] = \sum_j \alpha_j^1 \overline{\alpha_j^2} \mathbb{E}[X_j \overline{X_k}] \\ &= \int \sum_j \alpha_j^1 \overline{\alpha_j^2} e^{i(j-k)t} \mu(dt) = \int f(t) \overline{g(t)} \mu(dt) = \langle f, g \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si $Y_n \in \mathcal{L}(X)$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{L}^2} Y$, alors $(Y_n)_n$ est une suite de Cauchy et y est dans $\mathbb{L}^2(X)$. Par conséquent, la suite $(f_n)_n$ tel que $f_n \longleftrightarrow Y_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mu)$. Il existe alors $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$ tel que $f_n \xrightarrow{\mathbb{L}^2} f$.

Considérons la correspondance qui associe à tout élément Y de $\mathbb{L}^2(X)$ l'élément f de $\mathbb{L}^2(\mu)$, par ce procédé. Par définition cette correspondance est linéaire et préserve le produit scalaire d'après (2.9). Donc c'est une isométrie (cf. [24]).

La fonction $\mathbb{1}_{[-\pi, \xi]}(t)$ est dans $\mathbb{L}^2(\mu)$, soit Z_ξ l'élément qui lui correspond dans $\mathbb{L}^2(X)$. Montrons que la famille $(Z_\xi)_\xi$ a les propriétés énoncées dans le théorème.

1. Si une variable réelle $Y_k^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{L}^2} Y_k$, $k = 1, \dots, m$ et le vecteur $(Y_1^{(n)}, \dots, Y_m^{(n)})$ est gaussien pour tout n alors (Y_1, \dots, Y_m) est gaussien, car chaque élément de $\mathbb{L}^2(X)$ est la limite en moyenne quadratique d'une variable gaussienne.

Si $Y_1, \dots, Y_m \in \mathbb{L}^2(X)$, alors la partie réelle et imaginaire du vecteur (Y_1, \dots, Y_m) sont gaussiennes. Ainsi pour tous ξ_1, \dots, ξ_m , la loi jointe des variables $Z_{\xi_1}, \dots, Z_{\xi_m}$ est gaussienne.

2. Pour tout intervalle $I = [\xi_1, \xi_2[$, $Z(I) \longleftrightarrow \mathbb{1}_I(t)$, pour I_1, I_2 disjoints,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(I_1)\overline{Z(I_2)}] &= \langle Z(I_1), Z(I_2) \rangle = \langle \mathbb{1}_{I_1}(t), \mathbb{1}_{I_2}(t) \rangle = \int \mathbb{1}_{I_1}(t)\mathbb{1}_{I_2}(t)\mu(dt) \\ &= \int \mathbb{1}_{I_1 \cap I_2}(t)\mu(dt) = 0 \end{aligned}$$

- 3.

$$\mathbb{E}[|Z(I)|^2] = \int \mathbb{1}_I(t)^2 \mu(dt) = \mu(I).$$

4. Soit $f(t)$ une fonction uniformément continue sur $[-\pi, \pi[$, pour toute partition de $[-\pi, \pi[$ en intervalles disjoints I_1, I_2, \dots, I_k fermés à gauche et ouverts à droite et $t_k \in I_k$,

$$\sum f(t_k)Z(I_k) \longleftrightarrow \sum f(t_k)\mathbb{1}_{I_k}(t).$$

On a $\sum f(t_k)\mathbb{1}_{I_k}(t) = f(t_k)$ si $t \in I_k$, si $\max_k |I_k| \rightarrow 0$.

La fonction $\sum f(t_k)\mathbb{1}_{I_k}(t) = f(t_k)$ converge uniformément vers $f(t)$ donc converge en moyenne quadratique vers $f(t)$.

Soit Y l'élément qui correspond à $f(t)$, alors $\sum f(t_k)Z(I_k) \xrightarrow{\mathbb{L}^2} Y$.

D'après la définition 2.9, on a

$$Y = \int f(t)dZ_t.$$

Si $f(t) = e^{int}$, alors on obtient

$$X_n = \int e^{int}dZ_t.$$

□

2.2.3 Intégrale de Wiener

Dans la présentation intuitive que nous avons faite en page 39, de l'intégrale d'une fonction par rapport à un Mouvement Brownien standard, dans la formule (2.8) on suppose que $t \rightarrow X_t$ est une fonction intégrable par rapport à df i.e $\int_a^b X_t f'(t) dt$ existe. On pouvait s'en contenter à titre introductif. Nous donnons ci-dessous une construction plus rigoureuse, généralisant l'intégrale stochastique déjà présentée nécessitant l'introduction de la mesure spectrale.

Nous allons introduire une intégrale stochastique étudiée par Wiener dans le cas du Mouvement Brownien, qui permet d'intégrer des fonctions déterministes par rapport à des processus à accroissements orthogonaux.

Définition 2. 10. *Un processus complexes $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du second ordre est dit continu à droite en moyenne quadratique si l'application $t \mapsto Z_t$ est continue à droite de \mathbb{R} dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

Définition 2. 11. *Un processus complexes $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du second ordre est dit à accroissements orthogonaux si*

- 1) *Il est continu à droite en moyenne quadratique,*
- 2) *pour tout couple d'intervalles disjoints $]t_0, t_1],]t_2, t_3]$*

$$\mathbb{E}[(Z_{t_3} - Z_{t_2})(\overline{Z_{t_1} - Z_{t_0}})] = 0.$$

Rappelons (cf. [15]) que pour toute fonction F définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} croissante et continue à droite il existe une mesure unique μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que pour tout $]a, b]$

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F .

Lemme 2. 3 ([6]). Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus à accroissements orthogonaux. Il existe une fonction croissante $F(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue à droite unique à une constante près, telle que

$$\forall s < t \quad \mathbb{E}(|Z_t - Z_s|^2) = F(t) - F(s)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Posons } F(t) &= \mathbb{E}[|Z_t - Z_0|^2] \text{ si } t \geq 0 \\ &= -\mathbb{E}[|Z_0 - Z_t|^2] \text{ si } t \leq 0. \end{aligned}$$

Nous avons pour tout $0 < s < t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Z_t - Z_s|^2] &= \mathbb{E}[(Z_t - Z_s)(\overline{Z_t - Z_s})] = \mathbb{E}[(Z_t - Z_0 + Z_0 - Z_s)(\overline{Z_t - Z_s})] \\ &= \mathbb{E}[(Z_t - Z_0)(\overline{Z_t - Z_0})] + \mathbb{E}[(Z_0 - Z_s)(\overline{Z_t - Z_s})] \\ &= \mathbb{E}[(Z_t - Z_0)(\overline{Z_t - Z_s})], \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}[(Z_0 - Z_s)(\overline{Z_t - Z_s})] = 0$, puisque $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est à accroissements orthogonaux.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_t - Z_0)(\overline{Z_t - Z_s})] &= \mathbb{E}[(Z_t - Z_0)(\overline{Z_t - Z_0 + Z_0 - Z_s})] \\ &= \mathbb{E}[|Z_t - Z_0|^2] + \mathbb{E}[(Z_t - Z_0)(\overline{Z_0 - Z_s})] \\ &= \mathbb{E}[|Z_t - Z_0|^2] + \mathbb{E}[(Z_t - Z_s + Z_s - Z_0)(\overline{Z_0 - Z_s})] \\ &= \mathbb{E}[|Z_t - Z_0|^2] + \mathbb{E}[(Z_t - Z_s)(\overline{Z_0 - Z_s})] - \mathbb{E}[|Z_s - Z_0|^2] \\ &= \mathbb{E}[|Z_t - Z_0|^2] - \mathbb{E}[|Z_s - Z_0|^2] \\ &= F(t) - F(s). \end{aligned}$$

D'où pour $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}(|Z_t - Z_s|^2) = F(t) - F(s). \quad (2.10)$$

De la même manière on vérifie que (2.10) est vrai pour $s < t < 0$ et $s < 0 < t$. Donc

$$\forall s < t \quad \mathbb{E}(|Z_t - Z_s|^2) = F(t) - F(s).$$

$F(t)$ est continue à droite.

En effet pour $h > 0, \forall t \quad |F(t+h) - f(t)| = \mathbb{E}(|Z_{t+h} - Z_t|^2)$ et $\mathbb{E}(|Z_{t+h} - Z_t|^2)$ tend vers 0, car $(Z_t)_t$ est continue en moyenne quadratique.

La fonction F est croissante car pour $t \geq s$ on a $F(t) - F(s) = \mathbb{E}(|Z_t - Z_s|^2)$ et comme $\mathbb{E}(|Z_t - Z_s|^2) \geq 0$ on a donc , $F(t) \geq F(s)$. \square

La fonction F du lemme précédent est croissante et continue à droite donc il existe une mesure positive dF σ -finie sur \mathbb{R} telle que

$$dF([t_1, t_2]) = F(t_2) - F(t_1).$$

dF est la mesure positive associée au processus à accroissements orthogonaux $(Z_t)_t$.

Pour définir l'intégrale stochastique d'une fonction par rapport à un processus à accroissement orthogonaux $(Z_t)_t$, on commence par les fonctions en escalier à support compact.

Notons \mathcal{E} l'ensemble des fonctions en escalier à support compact. \mathcal{E} est une algèbre.

Soit $f(t) = a_1 \mathbb{1}_{]t_1, t_2]}(t) + a_2 \mathbb{1}_{]t_2, t_3]}(t) + \dots + a_{k-1} \mathbb{1}_{]t_{k-1}, t_k]}(t)$ où les a_i sont dans \mathbb{C} . L'intégrale stochastique de f par rapport à $(Z_t)_t$ est la variable aléatoire complexe de carré intégrable notée $\int f(t) dZ_t$ définie par

$$\int f(t) dZ_t = a_1(Z_{t_2} - Z_{t_1}) + a_2(Z_{t_3} - Z_{t_2}) + \dots + a_{k-1}(Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}).$$

Lemme 2. 4 ([6]). *L'application*

$$f \mapsto \int f(t) dZ_t$$

définie de \mathcal{E} dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possède les propriétés suivantes :

1) elle est linéaire

$$\int (\alpha f + \beta g) dZ_t = \alpha \int f dZ_t + \beta \int g dZ_t$$

2) $\forall f, g \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{E} \left[\int f dZ_t \overline{\int g dZ_t} \right] = \int f(t) \overline{g(t)} dF(t)$$

3) $\forall f \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{E} \left[\left| \int f dZ_t \right|^2 \right] = \int |f(t)|^2 dF(t).$$

Démonstration.

La propriété 1) est évidente, démontrons le 3), le 2) se démontre de la même manière

$$\begin{aligned} \left| \int f dZ_t \right|^2 &= \int f dZ_t \int \overline{g dZ_t} \\ &= \sum_i |a_i|^2 |Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}|^2 + \sum_{i \neq j} a_i \overline{a_j} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) (\overline{Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j}}) \end{aligned}$$

d'où par l'orthogonalité

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \int f dZ_t \right|^2 \right] &= \sum_i |a_i|^2 \mathbb{E} [|Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}|^2] \\ &= \sum_i |a_i|^2 [F(t_{i+1}) - F(t_i)] \\ &= \int |f(t)|^2 dF(t). \end{aligned}$$

□

Soit $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ l'espace des classes de fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure dF , c'est un espace de Hilbert muni de produit scalaire,

$$\langle f, g \rangle = \int f \overline{g} dF \quad \text{et de norme} \quad \|f\|_{\mathbb{L}^2(dF)} = \left(\int |f|^2 dF \right)^{1/2}.$$

Les propriétés 1), 2) et 3) du lemme précédent peuvent alors s'énoncer de la façon suivante :

L'application $I : f \mapsto \int f dZ_t$ du sous-espace vectoriel \mathcal{E} de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ muni de la métrique et du produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$, dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un homomorphisme d'espace vectoriel qui préserve la norme.

Nous savons que le sous-espace \mathcal{E} est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$. Il en résulte que l'application I qui est continue (puisqu'elle conserve la norme) se prolonge de façon unique en un homomorphisme isométrique J de tout $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ceci nous permet de définir par ce prolongement l'intégrale stochastique d'une fonction ψ quelconque de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ en posant

$$\int \psi(t) dZ_t = \lim_{\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} \int \psi_n(t) dZ_t,$$

où $(\psi_n)_n$ est une suite de fonctions de \mathcal{E} convergeant vers ψ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$.

Nous avons alors :

Proposition 2. 3 (cf. [6]). *Pour toutes $\varphi, \psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$*

$$1) \mathbb{E} \left[\int \varphi(t) dZ_t \overline{\int \psi(t) dZ_t} \right] = \int \varphi(t) \overline{\psi(t)} dF(t).$$

$$2) \mathbb{E} \left[\left| \int \varphi(t) dZ_t \right|^2 \right] = \|\varphi(t)\|_{\mathbb{L}^2(dF)}^2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int \varphi(t) dZ_t \overline{\int \psi(t) dZ_t} \right] &= \langle \int \varphi(t) dZ_t, \int \psi(t) dZ_t \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} \\ &= \langle J(\varphi), J(\psi) \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)}, \quad \text{puisque } J \text{ est une isométrie.} \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E} \left[\int \varphi(t) dZ_t \overline{\int \psi(t) dZ_t} \right] = \int \varphi(t) \overline{\psi(t)} dF(t).$$

De la même manière on obtient le 2).

□

A titre d'illustration, nous avons la proposition.

Proposition 2. 4 (Convergence dominée pour l'intégrale stochastique).

Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus à accroissements orthogonaux et dF la mesure positive associée. Soit $\varphi_n(t)$ une suite de fonctions mesurables convergeant dF -pp vers $\varphi(t)$ et telle qu'il existe $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ telle que

$$|\varphi_n(t)| \leq \psi(t) \quad \forall t, \forall n.$$

Alors

$$\int \varphi_n(t) dZ_t \longrightarrow \int \varphi(t) dZ_t$$

dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Démonstration.

Nous avons d'après la proposition 2.3,

$\| \int (\varphi_n(t) - \varphi(t)) dZ_t \|_{\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)}^2 = \| \varphi_n(t) - \varphi(t) \|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)}$ et (φ_n) est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$
 $(\varphi_n)_n$ est une suite de fonctions dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ telle que,

i) $\exists \psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$ tel que $\forall n, |\varphi_n(t)| \leq \psi(t)$;

ii) $(\varphi_n)_n$ converge $dF - pp$ vers φ .

Alors par convergence dominée de Lebesgue nous avons,

1. $\varphi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$;

2. $\| \varphi_n(t) - \varphi(t) \|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)} \longrightarrow 0$.

Donc,

$$\| \int (\varphi_n(t) - \varphi(t)) dZ_t \|_{\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)} \longrightarrow 0.$$

Par suite,

$$\int \varphi_n(t) dZ_t \longrightarrow \int \varphi(t) dZ_t$$

dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

□

Application de l'intégrale de Wiener (cf.[6]) :

Nous avons besoin de la proposition et du théorème suivants :

Proposition 2. 5 ([6]). *Soit $(Z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ un processus à accroissements orthogonaux centré de mesure positive associée $dF(\lambda)$ finie. Le processus*

$$X_t = \int e^{i\lambda t} dZ_\lambda$$

est stationnaire et sa fonction de covariance est donnée par

$$K(t) = \int e^{i\lambda t} dF(\lambda).$$

Démonstration. Le processus $(X_t)_t$ est centré et on a d'après l'isométrie définissant l'intégrale stochastique,

$$K(t+s, s) = \mathbb{E}(X_{t+s}\overline{X_s}) = \mathbb{E}\left[\int e^{i\lambda(t+s)}dZ_\lambda \overline{\int e^{i\lambda s}dZ_\lambda}\right] = \int e^{i\lambda t}dF(\lambda).$$

$K(t+s, s)$ ne dépend que de t , donc $(X_t)_t$ est stationnaire et sa fonction de covariance est

$$K(t) = \int e^{i\lambda t}dZ_\lambda.$$

□

Théorème 2. 7 ([6]). *Soit $(X_t)_t$ un processus centré stationnaire continu en moyenne quadratique, il existe un processus $(Z_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ à accroissements orthogonaux centré unique de mesure positive associée $dF(\lambda)$ finie tel que*

$$X_t = \int e^{i\lambda t}dZ_\lambda$$

et la fonction de covariance de $(X_t)_t$ est donnée par

$$K(t) = \int e^{i\lambda t}dF\lambda.$$

dF est la mesure spectrale du $(X_t)_t$ de masse totale $K(0)$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante :

La covariance $K(t)$ d'un processus stationnaire du second ordre est toujours de type positif. Elle est continue, puisque $(X_t)_t$ est continu en moyenne quadratique. Le théorème de Bochner assure que $K(t)$ est la transformée de Fourier d'une mesure positive bornée qu'on prend pour dF . Les égalités $K(t+s, s) = \mathbb{E}(X_{t+s}\overline{X_s}) = K(t) = \int e^{i\lambda t}dF(\lambda)$ entraînent que la correspondance

$$\alpha_1 X_{t_1} + \dots + \alpha_n X_{t_n} \leftrightarrow \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k e^{i\lambda t_k}$$

est linéaire isométrique et injective. La fonction $\mathbb{1}_{] -\infty, \mu]}(\lambda)$ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$. Soit Z_μ l'élément qui lui correspond dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le processus $(Z_\mu)_\mu$ est le processus à accroissements orthogonaux qui convient. □

Soit $(X_t)_t$ un processus du second ordre représentant un signal aléatoire. Nous admettons que son énergie moyenne est $\mathbb{E}(|X_t|^2)$. Si $(X_t)_t$ est stationnaire, la quantité $\mathbb{E}(|X_t|^2)$ ne dépend pas du temps et est appelée l'énergie du processus.

Dans le cas particulier où $(X_t)_t$ est de la forme

$$X_t = \sum_{j=1}^{j=k} e^{i\lambda_j t} Y_j \quad \text{où les } \lambda_j \text{ sont des nombres réels}$$

et les variables aléatoires Y_j sont centrées et orthogonales. Le processus $(X_t)_t$ est stationnaire car,

$$\mathbb{E}[X_t \overline{X_s}] = \sum_{j=1}^{j=k} \sum_{l=1}^{l=k} e^{i\lambda_j t} e^{-i\lambda_l s} \mathbb{E}[Y_j \overline{Y_l}] = \sum_{j=1}^{j=k} \mathbb{E}(|Y_j|^2) e^{i\lambda_j(t-s)}$$

qui est une fonction de $t - s$, et son énergie est

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) = K(0) = \sum_{j=1}^{j=k} \mathbb{E}(|Y_j|^2).$$

Nous savons aussi que la mesure spectrale de processus $(X_t)_t$ est la mesure μ avec

$$\mu = \sum_{j=1}^{j=k} \mathbb{E}(|Y_j|^2) \delta_{\lambda_j}.$$

Il en résulte que l'énergie de $(X_t)_t$ est la somme des énergies des processus élémentaires $e^{i\lambda_j t} Y_j$. Chacun de ces processus a pour énergie $\mathbb{E}(|Y_j|^2)$, qui est la masse de la mesure spectrale au point λ_j .

Plus généralement, si $(X_t)_t$ est un processus stationnaire de représentation spectrale

$$X_t = \int e^{i\lambda t} dZ_\lambda$$

et de mesure spectrale $dF(\lambda)$, le processus

$$Y_t = \int e^{i\lambda t} \mathbf{1}_{] \lambda_j, \lambda_{j+1}]} dZ_\lambda$$

qui ne conserve que les composantes monochromatiques dans la bande $] \lambda_j, \lambda_{j+1}]$ a pour énergie

$$\mathbb{E}(|Y_t|^2) = \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} dF(\lambda)$$

d'après la proposition 2.3.

Donc l'énergie de $(X_t)_t$ est répartie suivant les différentes bandes de fréquences selon la mesure spectrale $dF(\lambda)$. Plus exactement, pour résumer, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2. 6. *Soit $(X_t)_t$ un processus centré stationnaire continu en moyenne quadratique, représentant un signal aléatoire d'énergie moyenne $\mathbb{E}(|X_t|^2)$. Il existe un processus $(Z_\lambda)_\lambda$ à accroissements orthogonaux centré unique de mesure positive associée $dF(\lambda)$ finie tel que*

$$X_t = \int e^{i\lambda t} dZ_\lambda$$

et

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) = \sum_j \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} dF(\lambda)$$

Chapitre 3

Mouvement Brownien et Introduction à l'intégrale d'Itô

3.1 Introduction

Le mouvement Brownien doit son appellation au biologiste- botaniste anglais Robert Brown, qui le découvre en 1828 lors de l'observation du mouvement extrêmement désordonnée des particules de pollen en suspension dans un liquide.

La théorie mathématique a débuté en 1900-1905. Bachelier (1900) a eu les premiers résultats quantitatifs en s'intéressant aux fluctuations du prix des actions en bourse.

Einstein (1905) donne un modèle mathématique du Mouvement Brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur (cf. [18] et [23]).

N. Wiener (1923, 1924) a prouvé l'existence du Mouvement Brownien et en donne une définition et une construction mathématique rigoureuse.

K. Itô dans les années 40 développe un calcul différentiel spécifique au Mouvement Brownien (le calcul stochastique).

Le Mouvement Brownien a été par la suite intensément étudié (Paul Lévy, Khintchine, Chung, Williams,...).

3.2 Marches Aléatoires et Mouvement Brownien

Considérons une particule qui se déplace sur l'axe \mathbb{Z} , partant de 0 à l'instant 0, en effectuant à chaque unité de temps un saut d'une unité de longueur vers la droite ou vers la gauche avec la même probabilité. Soit Y_n le saut effectué à l'instant n . Avec ces hypothèses nous avons $Y_n = \pm 1$. Nous supposons de plus que les Y_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Soit X_n la position de la particule à l'instant n . Nous avons

$$\forall n > 0, X_n = X_{n-1} + Y_n$$

avec $X_0 = 0$. $(X_n)_n$ est la marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} .

Si on note $P_n(x) = P[X_n = x | X_0 = 0]$, nous avons

$$P_n(x) = C_n^{\frac{n+x}{2}} \frac{1}{2^n} \quad \text{avec} \quad C_n^k = 0 \quad \text{si} \quad k \notin \mathbb{Z}$$

Les P_n satisfont alors à l'équation aux différences :

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}P_n(x-1) + \frac{1}{2}P_n(x+1),$$

avec les conditions aux limites

$$P_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Supposons maintenant que la particule se déplace sur la droite réelle \mathbb{R} et le temps t est réel, soit S_t sa position à l'instant t en supposant que $S_0 = 0$. De façon précise, supposons que la particule se déplace de manière indépendante, d'une longueur Δx à droite ou à gauche avec la même probabilité à chacun des instants $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$. Le nombre de sauts jusqu'à l'instant t est

$$\left[\frac{t}{\Delta t} \right]$$

Soit $(X_n)_n$ la suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi définies par

$$X_n = \pm \Delta x$$

avec

$$P(X_n = \Delta x) = P(X_n = -\Delta x) = 1/2 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots, \left[\frac{t}{\Delta t} \right].$$

On a alors

$$S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor},$$

Nous avons $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(X_n)^2 = \Delta x^2$, d'où

$$\mathbb{E}(S_t) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Var}(S_t) = \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor (\Delta x)^2.$$

On suppose maintenant que la marche est accélérée et donc que la particule fait des sauts de plus en plus petits dans des intervalles de temps de plus en plus petits. Il s'agit donc de passer à la limite, en faisant tendre Δx et Δt vers 0. Y a-t-il un processus limite pour décrire cette situation ?

Si, par exemple, on prend $\Delta x = \Delta t$ et on fait tendre Δt vers 0, on obtient $\mathbb{E}(S_t) = 0$ et $\text{Var}(S_t) \rightarrow 0$. Le processus $(S_t)_{t>0}$ serait alors presque sûrement nul. Éliminons ce cas en faisant tendre Δx et Δt vers 0, en imposant la condition

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \rightarrow 2D$$

où D est une constante appelée coefficient de diffusion (Einstein a montré que

$$D = \frac{2RT}{Nf},$$

où N est le nombre d'Avogadro, T la température, R la constante des gaz parfaits et f le coefficient de friction).

Avec cette condition, l'équation aux différences obtenue précédemment pour la marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z} devient :

$$P_{t+\Delta t}(x) = \frac{1}{2}P_t(x - \Delta x) + \frac{1}{2}P_t(x + \Delta x)$$

D'où

$$\frac{(P_{t+\Delta t}(x) - P_t(x))}{\Delta t} \times \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{P_t(x - \Delta x) - P_t(x) + P_t(x + \Delta x) - P_t(x)}{(\Delta x)^2}. \quad (3.1)$$

Quand $(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0, 0)$ l'équation (3.1) devient équation dite de Fokker-Planck,

$$\frac{1}{D} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

Avec les conditions aux limites l'équation (3.2) devient :

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} - D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ P(0, x) = P_0(x) = \delta_x(0), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

C'est une équation du type de l'équation de la chaleur ou équation de diffusion. Pour plus de détail, on confère [10].

La résolution de l'équation (E) consiste à chercher une fonction $P(t, x)$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x , pour $(t, x) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R}$.

$$P(0, x) = P_0(x) \text{ signifie que } \lim_{t \rightarrow 0} P(t, x) = P_0(x).$$

On suppose que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t, x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) \right| dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) \right| dx < \infty$$

de sorte que les fonctions

$$x \mapsto P(t, x), \quad x \mapsto \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x)$$

ont pour chaque t une transformée de Fourier par rapport à la variable x .

Nous désignerons la transformée de Fourier de $x \mapsto P(t, x)$ par

$$\mathcal{F}[P](t, k) = \widehat{P}(t, k) = \int_{\mathbb{R}} P(t, x) e^{-ikx} dx.$$

On suppose de plus que pour tout $t > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}} P(t, x) e^{-ikx} dx \right).$$

En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (3.2), on obtient, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{\partial P}{\partial t} - D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] (t, k) &= \mathcal{F} \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] (t, k) - D \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right] (t, k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) e^{-ikx} dx - D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) e^{-ikx} dx. \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathbb{R}} P(t, x) e^{-ikx} dx \right) + Dk^2 \int_{\mathbb{R}} P(t, x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\partial \widehat{P}}{\partial t}(t, k) + Dk^2 \widehat{P}(t, k). \end{aligned}$$

Car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) e^{-ikx} dx = (ik)^2 \mathcal{F}[P](t, k).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{R}$, \widehat{P} est solution de l'équation différentielle par rapport au temps t suivante :

$$\frac{\partial \widehat{P}}{\partial t} + Dk^2 \widehat{P} = 0.$$

Par ailleurs $\widehat{P}(0, k) = \widehat{P}_0(k)$, d'où

$$\widehat{P}(t, k) = \widehat{P}_0(k) e^{-Dk^2 t}.$$

On sait que pour tout $t > 0$ fixé,

$$e^{-Dk^2 t} = \mathcal{F}[G](t, k), \quad \text{avec } G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right).$$

Pour $t > 0$ La fonction $G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$ est appelée noyau de Gauss ou noyau de la chaleur.

La fonction $k \mapsto \widehat{P}_0(k) e^{-Dk^2 t}$ est dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, donc

$$\widehat{P}(t, k) = \mathcal{F}[P_0 * G](t, k).$$

Comme \mathcal{F} est injective sur $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors,

$$P(t, x) = (P_0 * G)(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right) P_0(y) dy.$$

si à l'instant $t = 0$ la particule est on $x = 0$, alors $P_0(x) = \delta_x(0)$ et la solution de (E) est :

$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Remarquons que le même résultat peut être obtenu en appliquant le théorème de la limite centrale. En effet : Quand $(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0, 0)$, $\mathbb{E}(S_t) = 0$ et $Var(S_t) \rightarrow 2Dt$, donc

$$\frac{S_t}{\sqrt{2Dt}} \quad \text{tend en loi vers la loi normale } \mathcal{N}(0, 1)$$

puisque $S(t)$ est la somme de variables aléatoires indépendantes, et de même loi. Ce qui se traduit par la relation

$$P\left[\frac{S_t}{\sqrt{2Dt}} < \alpha\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

ce qui donne

$$P[S_t < \beta] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t D}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{4tD}} dx.$$

Si par exemple , en prend $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$ et $\Delta t \rightarrow 0$, alors $D = \frac{1}{2}$, d'où

$$\mathbb{E}(S_t) = 0, \text{Var}(S_t) \rightarrow t, \text{ et } P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

On obtient un processus limite $(S_t)_{t>0}$ admettant les propriétés suivantes :

1. Pour $t > 0$ fixé, la variable aléatoire S_t suit la loi $\mathcal{N}(0, t)$.

2. Le processus $(S_t)_{t>0}$ est à accroissements indépendants.

En effet ce résultat est du au fait que dans la marche aléatoire, les sauts ayant lieu dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

3. Le processus $(S_t)_{t>0}$ est à accroissements stationnaires.

Cette propriété résulte du fait que dans la marche aléatoire le changement de position dans un intervalle de temps ne dépend que de la longueur de cet intervalle.

Le Processus obtenu dans ce cas est appelé le Mouvement Brownien standard.

3.3 Simulation des trajectoires

Le but de ce paragraphe est de simuler des trajectoires d'un Mouvement Brownien standard, comme limite de marches aléatoires en suivant la construction du paragraphe précédent.

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ la famille de variables aléatoires définies par : $S_0 = 0$ et

$$S_t = \Delta x(X_1 + X_2 + \dots + X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor}),$$

où $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définies par

$$X_n = \pm 1$$

avec

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor.$$

Ce qui se traduit par les figures suivantes, obtenues en faisant changer la subdivision de l'intervalle $[0, t]$.

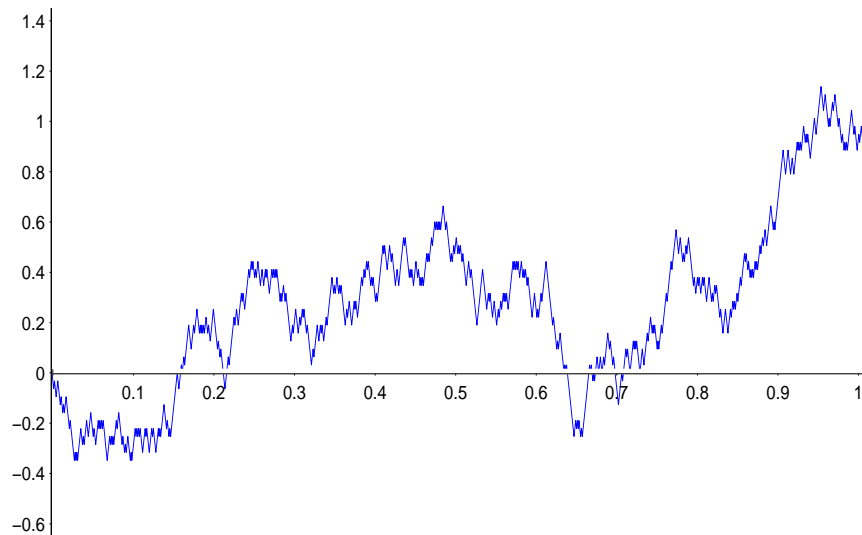


FIG. 3.1: Trajectoire obtenue pour $\Delta t = 0.001$, $t = 1$ et $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$.

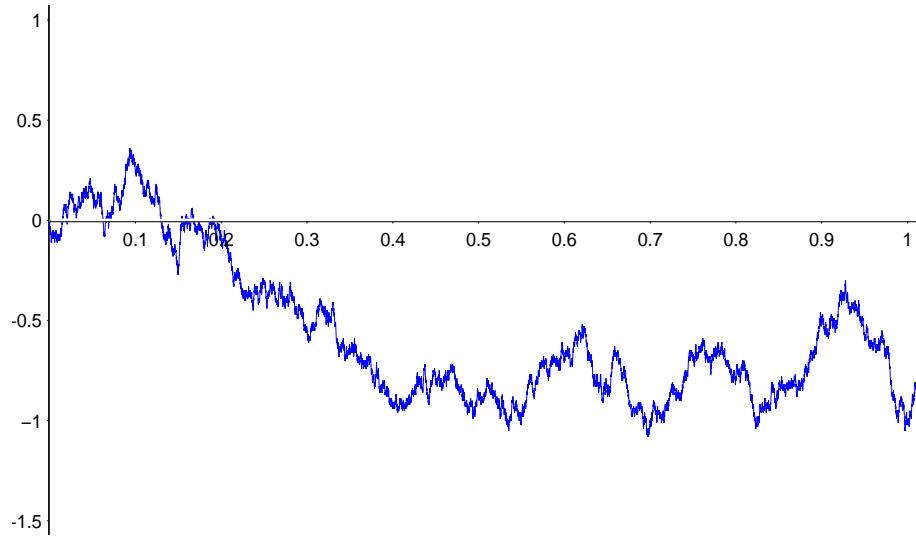


FIG. 3.2: Trajectoire obtenue pour $\Delta t = 0.0001$, $t = 1$ et $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$.

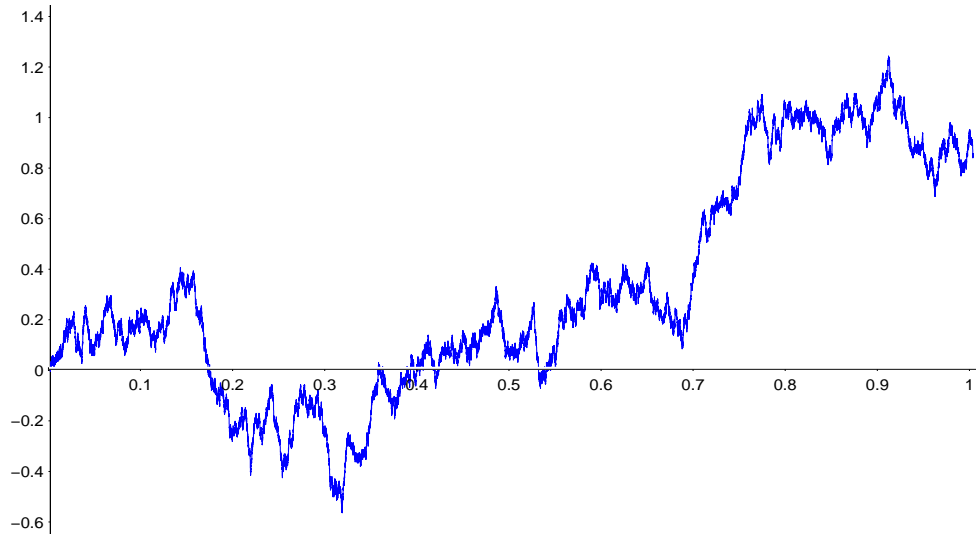


FIG. 3.3: Trajectoire obtenue pour $\Delta t = 0.00005$, $t = 1$ et $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$.

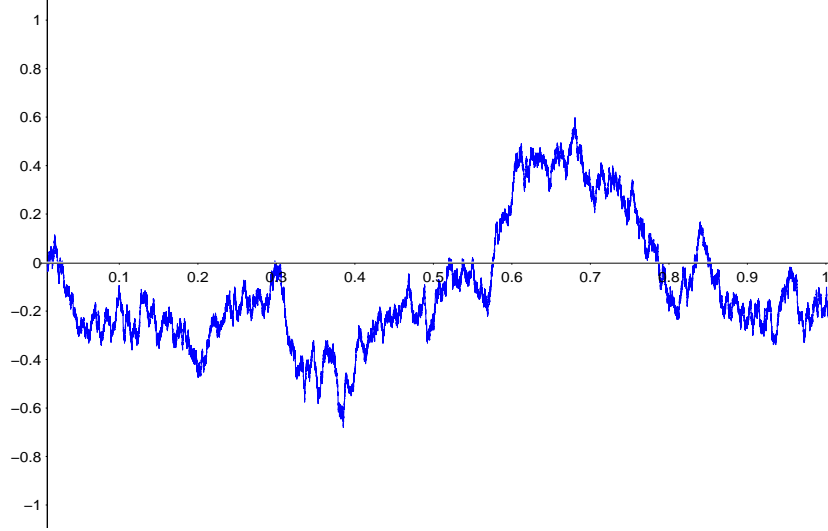


FIG. 3.4: Trajectoire obtenue pour $\Delta t = 0.00001$, $t = 1$ et $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$.

3.4 Définitions et Propriétés du Mouvement Brownien

Dans toute la suite, T désignera \mathbb{R}_+ ou un intervalle de \mathbb{R}_+ .

Définition 3. 1. Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une famille de variables aléatoires réelles. On dira que $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien (M.B) dans \mathbb{R} si :

1. $B_0 = 0$.
2. Pour chaque ω la trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.
3. $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements indépendants.
4. Pour tout t et tout s , $t > s \geq 0$ la variable aléatoire $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne de moyenne $\alpha(t - s)$ et d'écart type $\sigma\sqrt{t - s}$.

σ^2 est un réel positif appelé coefficient de diffusion et α un nombre réel appelé la dérive.

Remarque 3. 1. Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien de dérive $\alpha = 0$ et de coefficient de diffusion $\sigma = 1$ alors $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé Mouvement Brownien standard ou canonique.

Proposition 3. 1 (Caractère gaussien du M.B [18]). Un processus aléatoire continu $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B standard si et seulement s'il suit une loi normale centrée de fonction de covariance

$$K(s, t) = \min(s, t) = s \wedge t \quad \forall s, t \geq 0$$

Démonstration.

a) Condition Nécessaire :

- i) Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$, des réels positifs, les variables aléatoires réelles $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes et gaussiennes. Montrons que le vecteur $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est gaussien (c.à.d $a_1 B_{t_1} + a_2 B_{t_2} + \dots + a_n B_{t_n}$ est gaussienne pour tout vecteur (a_1, a_2, \dots, a_n) de \mathbb{R}^n).

Pour ce faire il suffit de vérifier seulement que $B_{t_i} + B_{t_j}$ est gaussienne.

En effet :

(1) Nous savons que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha B_{t_i}$ est gaussienne.

$$(2) B_{t_i} + B_{t_j} = (B_{t_i} - B_{t_j}) + 2(B_{t_j}) = (B_{t_i} - B_{t_j}) + 2(B_{t_j} - B_0).$$

Donc $B_{t_i} + B_{t_j}$ est gaussienne car elle est la somme de deux v.a. gaussiennes indépendantes.

Le vecteur $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est gaussien Car $\forall \varphi$ une forme linéaire $\varphi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ est gaussien.

- ii) Soit $s, t \in \mathbb{R}, s \leq t$.

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \text{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}(B_s B_t) = \mathbb{E}(B_s (B_t - B_s + B_s)) \\ &= \mathbb{E}(B_s (B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2) \quad . \\ &= \mathbb{E}(B_s^2) = s. \end{aligned}$$

Par indépendance des accroissements.

Donc $K(s, t) = s = \min(s, t) = s \wedge t$ d'où le résultat.

b) Condition Suffisante :

Supposons que $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est gaussien centré avec $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$. Donc chaque variable aléatoire B_t est gaussienne d'espérance $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et de variance $\text{Var}(B_t) = \mathbb{E}(B_t^2) = t$.

- i) Comme $\mathbb{E}(B_0) = 0$ et $Var(B_0) = 0$ alors $B_0 = 0$ p.s
ii) Pour tous $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i \dots < t_n$ avec $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} Var(B_{t_i} - B_{t_j}) &= Var(B_{t_i}) - 2Cov(B_{t_i}, B_{t_j}) + Var(B_{t_j}) = t_i - 2(t_i \wedge t_j) + t_j \\ &= |t_i - t_j|. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i' < j' < i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} Cov(B_{t_i} - B_{t_j}, B_{t_{i'}} - B_{t_{j'}}) &= Cov(B_{t_i}, B_{t_{i'}}) - Cov(B_{t_i}, B_{t_{j'}}) - Cov(B_{t_j}, B_{t_{i'}}) + Cov(B_{t_j}, B_{t_{j'}}) \\ &= (t_i \wedge t_{i'}) - (t_i \wedge t_{j'}) - (t_j \wedge t_{i'}) + (t_j \wedge t_{j'}) \\ &= t_{i'} - t_{j'} - t_{i'} + t_{j'} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus gaussien, on conclut que les variables aléatoires réelles

$$B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont gaussiennes centrées indépendantes de variances

$$t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}.$$

Et donc $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un Mouvement Brownien standard.

□

Remarque 3. 2. Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un Mouvement Brownien de dérive α et de coefficient de diffusion σ , alors le processus $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que,

$$W_t = \frac{B_t - \alpha t}{\sigma}$$

est un Mouvement Brownien standard.

Définition 3. 2.

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, est une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-tribus de \mathcal{A} .

Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, si $\forall t \in T$, la variable aléatoire réelle X_t est \mathcal{F}_t mesurable.

Remarque 3. 3. La filtration naturelle associée à un processus $(X_t)_{t \in T}$ est par définition la famille de sous tribus :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t),$$

où

\mathcal{F}_t est la plus petite tribu rendant mesurable les applications $\omega \mapsto X_s(\omega)$, pour $s \leq t$.

Définition 3. 3. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration. On appelle temps optionnel (*t.o.*) ou temps d'arrêt (*t.a.*) relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, toute v.a. $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que

$$\forall t \in T, \{\omega, \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t .$$

Proposition 3. 2. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration et τ un t.o. relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Alors

$$\forall t \in T, \{\tau > t\} \text{ et } \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t .$$

Définition 3. 4. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration et τ un t.o. relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. On appelle tribu engendrée par τ , la tribu \mathcal{F}_τ , définie par

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{A}, B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in T\}$$

Nous donnons une deuxième définition du Mouvement Brownien, équivalente à la première.

Définition 3. 5. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration et $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus aléatoire adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et continu .

$(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien standard si

1. $B_0 = 0$.
2. Pour tout t et s $t > s \geq 0$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s .
3. Pour tous t, s $t > s \geq 0$ l'accroissement $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne de moyenne 0 et d'écart type $\sqrt{t - s}$.

Remarque 3. 4. Cette définition implique que $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B au sens de la (définition 3.1.) puisque

$$\sigma(B_s, s \leq t) \subset \mathcal{F}_t.$$

Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B au sens de la (définition 3.1.) alors il est un M.B par rapport à la filtration naturelle. En effet d'après le lemme suivant.

Lemme3. 1 ([17]). Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus aléatoire à accroissements indépendants . Alors pour tout $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $X_t - X_s$ est indépendant de la filtration naturelle \mathcal{F}_s .

Définition 3. 6. Soient $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration et $(X_t)_{t \in T}$ un processus aléatoire adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ et dans $\mathbb{L}_P^1(\Omega, \mathcal{A})$.

On dit que $(X_t)_{t \in T}$ est une Martingale (Mgle), relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, si

$$\forall s, t \in T, s < t, \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s .$$

On dit que $(X_t)_{t \in T}$ est une sous - martingale (sMgle), relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, si

$$\forall s, t \in T, s < t, \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s .$$

On dit que $(X_t)_{t \in T}$ est une sur - martingale (SMgle), relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, si

$$\forall s, t \in T, s < t, \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s .$$

Propriétés

Proposition 3. 3 (Propriété de martingale). Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ alors

- (i) $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.
- (ii) $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

De (i) nous déduisons

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) = t - s, \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

Démonstration.

- (i) 1. $\mathbb{E}(|B_t|) \leq [\mathbb{E}(B_t^2)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} < \infty$ par Cauchy- Schwartz.

2. $\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s|\mathcal{F}_s)$, par linéarité de l'espérance.

$$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s = B_s, \text{ car } B_t - B_s \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_s$$

Ce qui prouve le (i).

(ii) $\mathbb{E}(B_s B_t|\mathcal{F}_s) = B_s \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$, car B_s est \mathcal{F}_s mesurable.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 - (t - s)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) - (t - s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) - (t - s) \\ &= (t - s) - (t - s) = 0. \end{aligned}$$

Car $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s et $B_t - B_s$ suit une loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 - (t - s)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}(B_s B_t|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^2 + s|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) - 2B_s^2 + B_s^2 + s \\ &= \mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) - (B_s^2 - s) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$.

□

Théorème 3. 1 (Levy). *Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus à trajectoire continue, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et tel que :*

i) $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

ii) $(B_t^2 - t)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

alors $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement Brownien standard.

Propriété de symétrie du M.B et loi d'échelle

Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B et c une constante positive alors les processus $(B_t^{(1)})_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(B_t^{(2)})_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que

$$B_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}, \quad B_t^{(2)} = -B_t$$

sont aussi des Mouvements Browniens .

Propriété d'inversion du temps Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B alors le processus $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que,

$$W_t = \begin{cases} tB_{1/t} & \text{si } 0 < t < \infty \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est aussi un M.B.

Convergence en variation quadratique [17] :

Rappelons que si f est une fonction définie sur $[a, b]$ de \mathbb{R} et

$$\pi = (t_1, t_2, \dots, t_n), a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$$

une partition de l'intervalle $[a, b]$ en n subdivision on note

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$$

la largeur de plus large intervalle. La p^{ime} variation (avec $p > 0$) de la fonction f par rapport à la partition π est définie par

$$V_{[a,b]}^p(f, \pi) = \sum_{i=1}^{i=n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p.$$

Considérons le Mouvement Brownien $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur l'intervalle $[0, t]$, la variation quadratique de B_t est

$$V_{[0,t]}^2(B_s(\omega), \pi) = \sum_{i=1}^{i=n} |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|^2.$$

Lemme3. 2 ([17]). Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un Mouvement Brownien dans l'espace (Ω, \mathcal{A}, P) alors

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} V_{[0,t]}^2(B_s(\omega), \pi) = t, \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega, P).$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{[0,t]}^2(B_s(\omega), \pi) - t]^2 &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=n} |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|^2 - t\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{i=n} (|B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)|^2 - (t_i - t_{i-1}))\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})]^2. \end{aligned}$$

Car

$$\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})][(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})] = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_{[0,t]}^2(B_s(\omega), \pi) - t]^2 &\leq \sum_{i=1}^{i=n} \mathbb{E}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 4 \sum_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 4 \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \sum_{i=1}^{i=n} (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 4|\pi|t. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} 4|\pi|t = 0,$$

donc

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} V_{[0,t]}^2(B_s(\omega), \pi) = t, \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega, P).$$

Loi forte des grands nombres [17] :

Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \text{ presque sûrement (p.s).}$$

Propriété de maximum [18]

Soit

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, \quad m_t = \inf_{0 \leq s \leq t} B_s.$$

Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un M.B standard alors

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ et } m_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t$$

existe et on a

(i) $m_t < 0 < M_t$ on $[0, +\infty[$,

(ii) $-\infty = m_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} B_t < \limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = M_\infty = +\infty.$

Démonstration.

i) (m_t) décroissante en t et (M_t) croissante en t , donc monotone ce qui implique que m_∞ et M_∞ existe. Soit

$$A_n = \{\omega, B_{t_n} > 0\}$$

(A_n) est une suite d'événements indépendants, car B_{t_n} est la somme de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$P(A_n) = P(B_{t_n} > 0) = 1/2$$

car B_{t_n} suit une loi gaussienne de moyenne 0 et de variance t_n .

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n) = 1/2 \tag{3.3}$$

par le théorème de 0 ou 1 de Kolmogorov on a

$$P(\limsup A_n) = 0 \quad \text{ou} \quad P(\limsup A_n) = 1$$

et d'après (3.3) en déduit que

$$P(\limsup A_n) = 1.$$

$$\limsup A_n = \{B_{t_n} > 0 \text{ i.o.}\} \subset \{M_t > 0 \forall t > 0\},$$

donc $M_t > 0$ p.s.

Par symétrie du M.B on déduit que $P(\{m_t < 0 \forall t > 0\}) = 1$, donc $m_t < 0$ p.s.

ii) Montrons que, $\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = M_\infty = +\infty$.

Soit $k \in \mathbb{R}$,

$$P(B_{t_n} > k) = P\left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} > \frac{k}{\sqrt{t_n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k/\sqrt{t_n}}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \rightarrow 1/2.$$

Par conséquent

$$P(B_{t_n} > 0 \text{ i.o.}) = P(\limsup_n [B_{t_n} > k]) \geq \limsup_n P(B_{t_n} > k) = 1/2.$$

D'où si on pose $k = \infty$, alors

$$P(\limsup_n [B_{t_n} = +\infty]) \geq 1/2.$$

Par le théorème de Kolmogorov on obtient

$$P(\limsup_n [B_{t_n} = +\infty]) = 1.$$

Donc

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = M_\infty = +\infty.$$

Par symétrie du M.B on aura

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = m_\infty = -\infty.$$

□

Propriété de Markov simple

Le mouvement Brownien est un processus de Markov.

Pour tout $t \leq s$ et $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma(B_r, r \leq t)$

$$P\{B_s \in A/\mathcal{F}_t\} = P\{B_s \in A/B_t\}.$$

En effet : Il suffit de vérifier que $\forall k, \forall t_1 \leq t_2 \dots \leq t_k \leq s$ on a

$$P\{B_s \in A/B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}\} = P\{B_s \in A/B_{t_k}\}.$$

$B_s - B_{t_k}, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1} - B_0$ sont indépendants donc la loi de B_s conditionnellement aux écarts : $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1} - B_0$ est une loi gaussienne de variance $(s - t_k)$, ce qui implique

$$P\{B_s \in A/B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}\} = P\{B_s \in A/B_{t_k}\}.$$

Propriété de Markov forte

Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, le processus $(B_{t+s} - B_s)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_s .

Cette propriété découle directement de l'indépendance des accroissements. Elle reste vraie lorsque s est un temps d'arrêt.

Théorème 3. 2 ([4]). *Soit τ un temps d'arrêt pour la suite de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ engendrée par le mouvement Brownien B_t . Le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ défini par $U_t = B_{\tau+t} - B_\tau$ est un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_τ .*

3.5 Intégrale d'Itô

Nous avons défini au chapitre II l'intégrale stochastique d'une fonction de carré intégrable par rapport à un processus à accroissement orthogonaux. Cette intégrale permet de donner un sens à l'expression $I = \int g(t)dZ_t$ avec dF la mesure positive associée au processus $(Z_t)_t$ et $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, dF)$.

Nous allons étudier le cas où $(Z_t)_t$ est un M.B standard $(B_t)_t$. Comme $(B_t)_t$ est un processus à accroissement indépendants cela nous permet d'intégrer les processus (cf. [6], [9], [29]).

Soit donc $(B_t)_t$ un mouvement Brownien réel standard,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t),$$

et

$$\mathcal{F} = \sigma(B_t, t \geq 0),$$

Définition 3. 7 (Processus élémentaire). *On appelle processus élémentaire tout processus $(H_t)_{t \geq 0}$ défini par*

$$H_t = Y_0 \mathbb{1}_{[0, t_1]}(t) + Y_1 \mathbb{1}_{]t_1, t_2]}(t) + \dots + Y_{n-1} \mathbb{1}_{]t_{n-1}, t_n]}(t) \quad (3.4)$$

où $Y_i, i = 1, \dots, n-1$ sont des variables \mathcal{F}_{t_i} -mesurables et bornées pour toute suite $(t_i)_{i=1}^{i=n}$ telle que $0 < t_1 < \dots < t_n, \forall n$.

$\mathbb{1}_A(t)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A . Les trajectoires d'un processus élémentaire sont donc des fonctions en escalier, constantes sur les intervalles $]t_{i-1}, t_i]$, nulles après $t_n \forall n$.

Définition 3. 8. *Si $(H_t)_{t > 0}$ est un processus élémentaire, on appelle intégrale stochastique de $(H_t)_t$ la variable aléatoire, notée $I(H) = \int_0^\infty H_t dB_t$ définie par :*

$$I(H) = \int_0^\infty H_t dB_t = Y_0 B_{t_1} + Y_1 (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + Y_{n-1} (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

Proposition 3. 4. *Si $(H_t)_{t > 0}$ est un processus élémentaire, alors*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty H_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty H_t^2 dt \right] \quad (3.5)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I(H)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} Y_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})Y_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=j} Y_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})Y_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{i<j} Y_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})Y_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right]\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i,j} Y_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})Y_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] &= \sum_i \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Y_{i-1}^2(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 / \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)\right] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2 \mathbb{E}\left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 / \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right)\right] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left[Y_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})\right].\end{aligned}$$

Car Y_{i-1} est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ mesurable, et d'après la propriété de martingale de $(B_t)_t$ (cf. Proposition 2.3).

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i<j} Y_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})Y_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] &= \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Y_{i-1}Y_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) / \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[Y_{i-1}Y_{j-1} \mathbb{E}\left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) / \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Car $\mathbb{E}\left[Y_{i-1}Y_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) / \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] = \mathbb{E}\left[(Y_{i-1}Y_{j-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}))\right] = 0$,

Car les variables $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ et $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$.

Donc,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty H_t dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_t^2 dt\right]$$

□

Si $(H_t)_{t \geq 0}$ est élémentaire, le processus $s \rightarrow H_s \mathbf{1}_{]0,t]}(s)$ est aussi élémentaire. On définit la variable aléatoire $\int_0^t H_s dB_s$, en posant

$$\int_0^t H_s dB_s = \int_0^\infty H_s \mathbf{1}_{]0,t]}(s) ds = \sum_{i=1}^{i=n} Y_{i-1}(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}). \quad (3.6)$$

Il résulte de cette formule que $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_t$ est un processus à trajectoires continues, et que si $0 < s < t$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t H_u dB_u / \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s H_u dB_u \quad p.s. \quad (3.7)$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t H_u dB_u / \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{i=n} Y_{i-1} (B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}) / \mathcal{F}_s \right] \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathbb{E} [Y_{i-1} (B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}) / \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_{i-1} \mathbb{E} [(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}) / \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_{i-1} (B_{t_i \wedge s} - B_{t_{i-1} \wedge s}) \\ &= \int_0^s H_u dB_u. \end{aligned}$$

Cette propriété implique que

$$\left(\int_0^t H_u dB_u\right)_t$$

est une (\mathcal{F}_t) -martingale à trajectoires continues et de carré intégrable d'après (3.5).

Nous avons aussi,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_u dB_u\right)^2 - \int_0^t H_u^2 du / \mathcal{F}_s \right] = \left(\int_0^s H_u dB_u\right)^2 - \int_0^s H_u^2 du. \quad (3.8)$$

D'où

$$\left(\left(\int_0^t H_u dB_u\right)^2 - \int_0^t H_u^2 du \right)_t$$

est une martingale à trajectoires continues.

Partant de ces constatations, nous allons étendre l'intégrale stochastique par passage à la limite, à tous les processus qui sont limites de processus élémentaires.

Proposition 3. 5 ([30]). *L'ensemble des processus élémentaires muni du produit scalaire*

$$\langle H, K \rangle = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty H_t K_t dt \right],$$

est un espace préhilbertien. Soit \mathcal{H} son complété (c'est un espace de Hilbert). L'application qui à $(H_t)_{t>0}$ associe son intégrale stochastique s'étend en une isométrie de \mathcal{H} dans l'espace des variables aléatoires de carré intégrable.

Nous avons alors :

Proposition 3. 6 ([6]). *Soit $(J_s)_s$ un processus appartenant à l'espace \mathcal{H} , et $(H_s^{(n)})_s$ un processus élémentaires tel que*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty (J_s - H_s^{(n)})^2 ds \right] \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors la formule

$$\int_0^\infty J_s dB_s = \lim_{\mathbb{L}^2} \int_0^\infty H_s^{(n)} dB_s$$

définit une variable aléatoire $\int_0^\infty J_s dB_s$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on a

1. $\forall J \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty J_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty J_s^2 ds \right].$
2. $\forall G, J \in \mathcal{H}, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^\infty G_s dB_s \int_0^\infty J_s dB_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty G_s J_s ds \right].$

3. *Pour tout $J \in \mathcal{H}$, le processus $s \rightarrow H_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$ est aussi dans \mathcal{H} et si on pose*

$$\int_0^t J_s dB_s = \int_0^\infty J_s \mathbf{1}_{]0,t]} dB_s$$

alors on a

$\left(\int_0^t J_s dB_s \right)_t$ *est une (\mathcal{F}_t) -martingale à trajectoires p.s. continues.*

4. *Le processus à trajectoires continues $\left(\left(\int_0^t J_s dB_s \right)^2 - \int_0^t J_s^2 ds \right)_t$ est une martingale.*

Proposition 3. 7 ([6]). *Soit $(J_s)_s$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_s)_s$, à trajectoires continues et tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{E} \left[\int_0^t J_s^2 ds \right] < \infty,$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, les processus

$$J_s^T = J_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s)$$

sont dans \mathcal{H} et les intégrales stochastiques de la proposition 3.6 se raccordent, dans le sens où, si $t < T_1 < T_2$ alors

$$\int_0^t J_s^{T_1} dB_s = \int_0^t J_s^{T_2} dB_s.$$

Ces intégrales sont donc notées

$$\int_0^t J_s dB_s.$$

Conclusion Nous nous en tenons à ces définitions et propriétés en guise d'introduction à l'intégrale d'Itô et pour étayer notre remarque page 41.

Conclusion et perspectives

L'intégrale stochastique et la notion de mesure spectrale sont un moyen de représentation d'un processus gaussien complexe stationnaire.

De nombreuses applications peuvent être envisagées, en particulier dans l'étude des séries chronologiques précisément les signaux aléatoires par l'utilisation de la mesure spectrale et densité spectrale dans le cas où celles-ci peuvent être calculées.

ANNEXE : Programme de simulation des trajectoires du mouvement Brownien par "MATLAB 7.0"

```
t=1; val=0.5; n=input( 'Le pas de la subdivision' );  
y(1)=0;  
for i=2 :fix(t/n), u=rand;  
if u<val, x(i)=1;else x(i)=-1;end;  
y(i)=y(i-1)+ x(i);  
end;  
j=[1 :1 :fix(t/n)];y= y(j)*sqrt(n);plot(j,y)
```

Bibliographie

- [1] Robert. B. ASH : *Probability and Measure Theory*. Academic press, A Harcourt science and technology company, 2nd Edition, 2000.
- [2] Krishna B. Athreya Soumendra N. Lahiri : *Measure Theory and Probability Theory*. Springer Science+Business Media, LLC.2006
- [3] R.Azencott et D.Dacunha-Castelle : *Séries d'observations irrégulières*. Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1984.
- [4] P. Billingsley : *Probability and Measure*. Wiley and Sons, 2nd Edition 1986.
- [5] P. Billingsley : *Convergence of Probability Measure*. Wiley and Sons,1968.
- [6] N. Bouleau : *Processus stochastiques et applications*. Hermann. Paris, 1988.
- [7] Leo Breiman : *Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia 1992.
- [8] K. L. Chung : *A Course in Probability Theory*. Academic Press, 3rd Edition, 2001
- [9] K. L. Chung et R. J. Williams : *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser Boston, 2nd edition, 1990
- [10] Daniel J. Duffy : *Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach*. John Wiley et Sons Ltd, 2006.
- [11] Bertrand Duplantier : *Le Mouvement Brownien, (Divers et Ondoyant)*. Séminaire Poincaré 1 (2005) 155-212.
- [12] R. Durrett : *Probability Theory and Examples*. Wadsworth Publishing Company, 2nd Edition 1996.
- [13] R. Durrett : *Stochastic Calculus*. CRC Press. 1996.
- [14] W. Feller : *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume II*. John Willey and Sons , N-Y, 3rd Edition, 1971.

- [15] Charles Halmos : *Measure Theory* . Springer-Verlag, New York, 2nd Edition, 1970.
- [16] A.Joffe : *Promenades Aléatoires et Mouvement Brownien*. presses de l'université de Montréal. 1965.
- [17] Leonid B. Korolov et Yakov G. Sinai : *Theory of Probability and Random Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2nd Edition, 2007.
- [18] M. Loeve : *Probability Theory II*. Springer-Verlag New York Inc, 4nd Edition 1978.
- [19] Paul Malliavin : *Intégration et Probabilités, Analyse de Fourier et Analyse spectrale*. Masson, Paris, 1982.
- [20] Charle-Michel Marle, *Mesure et Probabilités*. Herman 1974.
- [21] N. Métivier, *Notions Fondamentales de la Théorie des probabilités*. 2nd Edition, Dunod, paris,1972.
- [22] Jacques Neveu : *Processus Aléatoires Gaussiens*. Presses de l'université de Montréal, 1968.
- [23] Edward Nelson : *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967.
- [24] I.Ibrahimov, Y. Rozanov : *Processus Aléatoires Gaussiens*. Editions de Moscou 1974.
- [25] Sheldon M. Ross : *Stochastic Processes*. John Wiley et Sons, inc, 2nd Edition 1996.
- [26] H. L. Royden : *Real Analysis*. 3nd Edition, Macmillan, New York, 1988.
- [27] W. Rudin : *Fourier Analysis on the groups*. Willey , N-Y, 1982.
- [28] W. Rudin : *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 3nd Edition, 1986.
- [29] I. Guikhman et A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires* Editions Mir, Moscou, 1980.
- [30] B. Ycart, *Introduction aux équations différentielles stochastiques*. LMC/IMAG,1998.