République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Mathématiques

Option :Modélisation mathématique

Intitulé du mémoire

Caractérisation des C_0-semi-groupes (groupes) presque périodiques.

Réalisé par :

Ghandriche Ahcène

Dirigé par :

M^r **Mellah**

Soutenue le 06 juillet 2017 devant la commission d'examen:

Président:	M^r Morsli	Professeur UMMTO.
Examinatrice:	M^{me} Khellas	Professeur UMMTO.
Examinatrice:	M^{elle} Smaali	MCA UMMTO.

Contents

Notations

Dans la suite $(\mathbb{E}, \|.\|_{\mathbb{E}})$, $(\mathbb{F}, \|.\|_{\mathbb{F}})$ désignent deux espaces de Banach définis sur le corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ (généralement $I = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$).

- **Ensembles:**
  Soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ un opérateur linéaire. Nous notons par:
  - $\mathfrak{R}(f)$ l'ensemble image de l'opérateur f.
  - $\mathcal{N}(f)$ le noyau de l'opérateur f.
  - $\mathcal{G}(f)$ le graphe de l'opérateur f.
- **Espaces Fonctionnels:**
  - $\mathcal{C}_b(I, \mathbb{E})$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{E}$ qui sont continues et bornées.
    Muni de la norme
    $$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_{\mathbb{E}} \tag{1}$$
    $\mathcal{C}_b(I, \mathbb{E})$ devient un espace de Banach.
  - $\mathcal{AP}(I, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues presque périodiques.
    Équipé de la norme définie par (1), $\mathcal{AP}(I, \mathbb{E})$ est un Banach.
  - $\mathcal{WAP}(I, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues faiblement presque périodiques.
    Équipé de la norme définie par (1), $\mathcal{WAP}(I, \mathbb{E})$ est un Banach.
  - $\mathcal{C}_0(I, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, qui s'annulent a l'infini.
    Équipé de la norme
    $$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\|_{\mathbb{E}}$$
    l'espace $\mathcal{C}_0(I, \mathbb{E})$ est un Banach.
  - c_0 l'espace des suites convergentes vers $0_{\mathbb{E}}$.
    Muni de la norme
    $$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\mathbb{E}}$$
    c_0 devient un espace de Banach.

- $\diamond$ $\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{F})$ l'espace des opérateurs linéaires continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
  Cet espace muni de la norme suivante:

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{E}} \leq 1} \|Tx\|_{\mathbb{F}},$$

  est un espace de Banach. Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$ on obtient $\mathbb{E}^\star := \mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{K})$ nommé le dual topologique de l'espace $\mathbb{E}$.

Généralement sur les espaces fonctionnels, on utilise deux types de convergence:

- $\diamond$ $\|.\|.\lim$: désigne la convergence en norme (forte).
- $\diamond$ $\omega.\lim$: désigne la convergence faible.

Introduction

La presque périodicité fait l'objet de plusieurs études ([24], [7], [5], [6], [8] $\cdots$), elle intervient surtout dans la résolution des équations différentielles abstraites qui modélisent des phénomènes naturels à savoir: la mécanique céleste ([26]), modèles cellulaires ([25]), ...
En général les solutions des équations différentielles abstraites sont données par des $\mathcal{C}_0$-semi-groupe ($\mathcal{C}_0$-groupe), plus précisément si on considère le problème suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & A\,u + f, \\ \\ u(0) & = & u_0, \end{array}\right.$$

où A est un opérateur linéaire (non borné). La solution de cette équation est donnée sous la forme suivante:

$$u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds,$$

où la famille des opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ est le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe associé au générateur infinitésimal A.
L'objectif principal de ce travail est la caractérisation de la presque périodicité d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe ($\mathcal{C}_0$-groupe) d'opérateurs sur un espace de Banach.
Leur étude fait intervenir divers outils mathématiques comme la théorie des opérateurs linéaires, la théorie spectrale, l'analyse fonctionnelle, $\cdots$

Notre mémoire s'ouvre sur un chapitre (de rappel) sur la presque périodicité des fonctions vectorielles qui contient l'ensemble de toutes les définitions, les propriétés et les théorèmes indispensables à notre thématique. À la dernière section de ce chapitre on fait une comparaison entre la presque périodicité des fonctions scalaires et vectorielles.

Le deuxième chapitre se concentre particulièrement sur la théorie des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes), qui est devenue un outil indispensable dans divers branches d'analyse mathématique.

Le troisième chapitre est le travail central de ce mémoire, nous avons développé l'article [23] de *Harm Bart and Seymour Goldberg* dont l'objectif est de caractériser la presque périodicité des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes), nous énoncerons divers types de presque périodicité pour cette famille d'opérateurs (presque périodicité, uniforme presque périodicité, presque périodicité faible, presque périodicité asymptotique et presque périodicité uniforme sur les parties compactes) et nous montrons que sous certaines hypothèses génériques, la connaissance du spectre du générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes) permet la vérification de la presque périodicité du $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes). La dernière section de ce chapitre est consacrée à notre modeste contribution à l'étude comparative entre les différents types de presque périodicité citées en haut.

Le dernier chapitre est une application à l'étude de la presque périodicité des solutions d'un *problème de Cauchy abstrait non homogène* où le terme additif est presque périodique, i.e des problèmes de type:

$$\begin{cases} u' &= A\,u + f, \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

où f est une fonction presque périodique. Dans l'article [11], *Arendt* & *Batty* donnent des conditions suffisantes pour que la solution u soit presque périodique, grâce à l'étude faite au chapitre précédent nous avons donné d'autres version de ce résultat.

Vers la fin, on trouve un appendice contenant des définitions, des remarques, des propositions et des théorèmes qui sont indispensables pour le développement de ce mémoire.

Chapter 1

Fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach

L'objectif de ce chapitre est de présenter la notion de fonction presque périodique à valeurs dans un espace de Banach qui sera utile pour définir la presque périodicité des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes), qui est l'objet de ce mémoire.
Pour plus de détails, consulter les références [5], [6], [7] et [8].

1.1 La presque périodicité forte

Définition 1.1.1. *Un sous ensemble A de I est dit relativement dense si:*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\, \ell_\varepsilon = \ell > 0,\ \textit{tel que}\ \forall a\ \in \mathbb{R},\ [a; a+\ell] \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 1.1.2. *Une fonction $f \in \mathcal{C}_b(I, \mathbb{E})$ est dite presque périodique au sens de* Bohr *si:*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \ell_\varepsilon = \ell > 0,\ \textit{tel que}\ \forall a\ \in \mathbb{R},\ \exists\ \xi \in [a, a+\ell]$$

tel que :

$$\sup_{t \in I} \parallel f(t+\xi) - f(t) \parallel_{\mathbb{E}} < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Le point ξ est dit alors, une ε-période de f.
L'ensemble des ξ qui vérifient l'inégalité(1.1) est appelé ensemble des ε-périodes de f, et il sera noté $\mathcal{J}(f, \varepsilon)$.

Remarque 1.1.1. *Une fonction f est presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{J}(f, \varepsilon)$ est relativement dense.*

L'exemple suivant est donné pour illustrer le comportement des fonctions presque périodiques vectorielles [1].

Exemple 1.1. *Soit f la fonction définie par:*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow & (\sin(\sqrt{2}t)+\sin(t);\cos(\sqrt{2}t)+\cos(t);\sin(t)) \end{array}$$

Le graphe représentatif de f est le suivant:

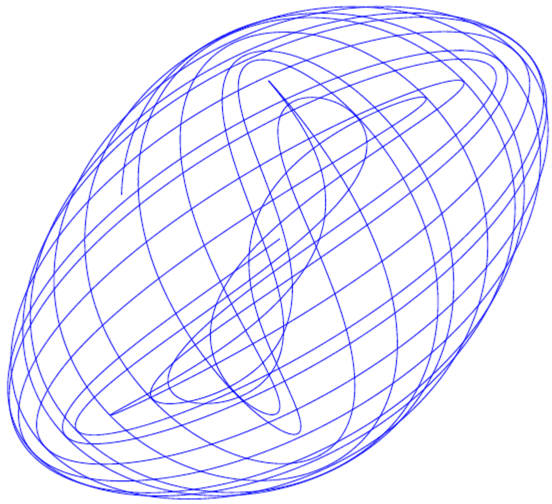

Figure (1)

Définition 1.1.3. *Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$, telle que la majoration(1.1) est satisfaite à partir d'un certain rang (c-à-d: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, k_\varepsilon \geq 0$, $\sup\limits_{t\geq k_\varepsilon} \| f(t+\xi)-f(t)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon$), alors f est dite asymptotiquement presque périodique.*

En utilisant la relative compacité, *Bochner* a caractérisé la classe des fonctions presque périodiques. Plus précisément:

Définition 1.1.4. *Une fonction $f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{E})$ est dite presque périodique au sens de* Bochner *si l'ensemble $\{f(t+\centerdot),\quad t\in\mathbb{R}\}$ est relativement compact (i.e. f est une fonction normale), dans l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{E})$. Ce qui veut dire, de toute suite $(h'_n)\subset\mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite (h_n), telle que la suite de fonctions $(f(\centerdot+h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.1. *Il existe une autre caractérisation de la presque périodicité donnée par* Bochner *dans [15], en utilisant les suites doubles et la convergence simple.*

[1] Pour tracer le graphe de cette fonction, on a utilisé le logiciel Octave.
Programme `t = -50:0.01:50; x = sin(sqrt(2)*t) + sin(t); y = cos(sqrt(2)*t) + cos(t); z = sin(t); plot3(x,y,z)`

Théorème 1.1. *Une fonction* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{E})$ *est presque périodique au sens de Bohr si et seulement si elle est presque périodique au sens de Bochner.*

Preuve. *Nous renvoyons à [8, théorème 6.6; page 156].* ■

Théorème 1.2. *Si* $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, *alors* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Preuve. *Nous renvoyons à [8, théorèmes 6.1 et 6.2; page 154].* ■

Proposition 1.1. *Soient* $f,g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *et* $\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. *Alors:* $f+g$ *et* $\phi f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{E})$.

Preuve. *Voir [5, propriété 9; page 10].* ■

Théorème 1.3. *L'espace* $\mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{E})$ *est un sous espace fermé de* $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{E})$. *Autrement dit, il est stable par la convergence uniforme.*

Preuve. *Voir [5, propriété 5; page 6].* ■

Remarque 1.2. *On combine la proposition (1.1) et le théorème (1.3), pour en déduire que l'espace* $\mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est un Banach.*

Proposition 1.2. *[7] Soit* f *une fonction presque périodique à valeurs dans un espace de Banach. On a alors, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *:*

$$\sup_{t\geq\alpha}\|f(t)\| \;=\; \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|.$$

Preuve. *Dans ce qui suit, nous utilisons la presque périodicité au sens de Bochner. Il est clair que, pour un* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\sup_{t\geq\alpha}\|f(t)\| \;\leq\; \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|.$$

Il suffit alors de montrer que :

$$\|f(s)\| \;\leq\; \sup_{t\geq\alpha}\|f(t)\|, \qquad \forall s<\alpha.$$

D'après la définition (1.1.4) et la presque périodicité de la fonction f, *on déduit qu'on peut extraire, de la suite* $\{f(\centerdot+n)\}_{n\geq1}$ *une sous suite* $\{f(\centerdot+n_k)\}_{k\geq1}$ *telle que*

$$f(\centerdot+n_k) \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{Uniformement\ Convergente\ sur\ \mathbb{R}} g(\centerdot). \tag{1.2}$$

On déduit, en utilisant la convergence uniforme, aussi que:

$$g(\centerdot-n_k) \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{Uniformement\ Convergente\ sur\ \mathbb{R}} f(\centerdot). \tag{1.3}$$

Soit $s < \alpha$, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $s + n_k \geq \alpha, \quad \forall\, k \geq k_0$.
D'où :

$$\|f(s + n_k)\| \leq \sup_{u \geq \alpha} \|f(u)\|, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

La convergence (1.2) implique que:

$$\|g(t)\| = \lim_{k \to \infty} \|f(t + n_k)\| \leq \sup_{u \geq \alpha} \|f(u)\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La convergence (1.3) et la majoration précédente impliquent:

$$\|f(t)\| = \lim_{k \to \infty} \|g(t - n_k)\| \leq \sup_{u \geq \alpha} \|f(u)\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finalement:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| \ \leq \ \sup_{t \geq \alpha} \|f(t)\|.$$

$\square$

Théorème 1.1.1. *[8, Theorem 6.5] L'ensemble image $\mathfrak{R}(f)$, d'une fonction presque périodique f, est relativement compact dans $\mathbb{E}$.*

Définition 1.1.5. *Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_b(I, \mathbb{E})$ est dite équi-presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble défini par:*

$$\bigcap_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{J}(f, \varepsilon)$$

est relativement dense dans I.

Nous illustrons ce qui précède par un exemple simple.

Exemple 1.1.1. *On fixe $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E})$, et on pose $\mathcal{F} := \{g_k,\ k = 1, \cdots, n\}$, où $g_k(\centerdot) = f(\centerdot + k)$. Il est facile de voir que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$,*
$\mathcal{J}(g_k, \varepsilon) = \mathcal{J}(f, \varepsilon)$ donc:

$$\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{J}(g_k, \varepsilon) = \mathcal{J}(f, \varepsilon).$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

La valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Définition 1.1.6. *Soit $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$. La limite (1.4),*

$$Moy\{f\} \stackrel{déf}{:=} \|.\|.\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt \tag{1.4}$$

s'appelle valeur moyenne de f et on la note $Moy\{f\}$.

Remarque 1.1.2.

1. *L'intégrale représentée dans (1.4) est l'intégrale de Bochner d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach (consulter [18]).*

2. *La limite (1.4) existe toujours.*

Proposition 1.3. *Si $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, alors sa valeur moyenne vérifie l'égalité suivante indépendamment du choix de $a \in \mathbb{R}$:*

$$Moy\{f\} := \|.\|.\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} f(t)\,dt$$

Preuve. *Voir [6, page 22].* ∎

Remarque 1.1.3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note par $M(\lambda, f)$, la valeur moyenne de la fonction presque périodique*

$$e^{-i\lambda\cdot}f(\cdot)$$

i.e, $M(\lambda, f)$ par définition:

$$M(\lambda;f) := Moy\,\{e^{-i\lambda\cdot}f(\cdot)\} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i\lambda t}f(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.7. *L'élément $M(\lambda;f) \in \mathbb{E}$ est dit coefficient de* Bohr-Fourier *de la fonction f.*

Définition 1.1.8. *L'ensemble $\varrho_{sp}(f) := \{\lambda \in \mathbb{R};\ M(\lambda;f) \neq 0_{\mathbb{E}}\}$ est appelé spectre de la fonction f.*

Définition 1.1.9. *Si $\lambda_0 \in \varrho_{sp}(f)$, alors λ_0 est dit exposant de Fourier de la fonction f.*

La propriété suivante est fondamentale dans la théorie des fonctions presque périodiques.

Proposition 1.4. *Le spectre d'une fonction presque périodique est au plus dénombrable.*

Preuve. *Nous renvoyons le lecteur à [6, page 23].* ∎

1.2 Fonctions presque périodiques à paramètre

On considère une fonction à paramètre $f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ continue.
Ce paragraphe a pour objectif de présenter la notion de presque périodicité d'une fonction à paramètre qui sera utile dans l'analyse des solutions des équations différentielles abstraites (EDA)(chapitre 4).
En général si $f(\cdot, x)$ est presque périodique en t en chaque x, et si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ est presque périodique, la composée $f(\cdot, \phi(\cdot))$ n'est pas forcément presque périodique. A titre d'exemple soit$f(t, x) = \sin(tx)$ et $\phi(t) = \sin(t)$, alors les fonctions f et ϕ sont clairement presque périodiques, mais la composée $\sin(t \sin(t))$, n'est pas presque périodique par absence d'uniforme continuité ([24, page 16]).
Pour remédier à ce problème, il suffit d'imposer à f qu'elle soit presque périodique en t uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{E}$.

Définition 1.2.1. *Soit f une fonction continue définie par:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} &\to \mathbb{F} \\ (t, x) &\to f(t, x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

On dit que f est presque périodique en t uniformément par rapport à x sur un ensemble compact $K \subset \mathbb{E}$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l = l_{\varepsilon,K} > 0, \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi \in [a; a + l]$$

tel que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \|f(t + \xi, x) - f(t, x)\|_{\mathbb{F}} \leq \varepsilon.$$

Exemple 1.2.1. *Soit f une fonction à paramètre définie par:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{E} &\to \mathbb{R} \\ (t, x) &\to \sqrt{\|x\|_{\mathbb{E}} + 4 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)}. \end{aligned}$$

Alors, f est presque périodique au sens de la définition (1.2.1).

Théorème 1.2.1. *Si f définie par la formule (1.5) est presque périodique uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{E}$ et si $\varphi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E})$, alors la composée de f et φ définie par:*

$$\begin{aligned} f \circ \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{F} \\ t &\to f(t, \varphi(t)), \end{aligned}$$

est presque périodique.

Preuve. *Voir ([24, page 27]).* ■

1.3 La presque périodicité faible

Beaucoup de propriétés qui existent en norme, existent aussi faiblement, comme: la continuité, la mesurabilité, l'analyticité, $\cdots$
Dans cette partie, nous ajoutons à la liste ci-dessus, la notion de la presque périodicité faible.

Définition 1.3.1. *Une fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{E})$ est dite faiblement presque périodique si pour tout $\varphi \in \mathbb{E}^\star$, $\varphi \circ f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.*

Sur l'espace $\mathcal{WAP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$ le critère de Bochner (1.1.4) prend la forme suivante:

Proposition 1.3.1. *Une fonction continue f est faiblement presque périodique si et seulement si, toute suite $(h'_n) \subset \mathbb{R}$ possède une sous-suite $(h_n) \subset (h'_n)$ telle que la suite $(f(\centerdot + h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.3.2. *Supposons que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{WAP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$ telle que $\omega.\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $f \in \mathcal{WAP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$.*

Preuve. *On peut trouver une démonstration des deux propositions ci-haut dans [5, successivement page 45 et 40].* ■

Proposition 1.3.3. *$f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E}) \Rightarrow f \in \mathcal{WAP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$.*

Preuve. *Si $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, il est facile de voir que pour tout $\phi \in \mathbb{E}^\star$, on a: $\mathcal{J}(f,\varepsilon) \subset \mathcal{J}(\phi\circ f, \|\phi\|_{\mathbb{E}^\star}\,\varepsilon)$. D'où: $\phi\circ f \in \mathcal{WAP}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.* □

L'implication inverse n'est pas tout le temps vraie, en effet soit l'exemple suivant[6, pages 75, 76].

Exemple 1.3.1. *Soit $\{e_k\}_{k\geq 1}$ une base orthonormale d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, et soit $\{\varphi_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telles que:*

- ⋆ $\|\varphi_k\|_\infty \leq 1, \ \forall\, k \geq 1.$
- ⋆ *support*$(\varphi_k) \cap$ *support*$(\varphi_j) = \emptyset, \ \forall\, k \neq j$ [2].

Nous définissons f par la formule suivante:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k\ \varphi_k(t).$$

Alors f présente un exemple d'une fonction faiblement presque périodique mais qui n'est pas presque périodique.

[2] Où *support*$(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} |\ \varphi(x) \neq 0\}}$.

Le théorème suivant fait le lien entre la presque périodicité forte et faible.

Théorème 1.4. *Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R};\mathbb{E})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *f est presque périodique.*

ii) *f est faiblement presque périodique et $\mathfrak{R}(f)$ est relativement compact dans $\mathbb{E}$.*[3]

Preuve. *[5, page 45].* ■

La valeur moyenne d'une fonction faiblement presque périodique
Dans cette partie, on suppose que l'espace de Banach $\mathbb{E}$ est *faiblement complet* (voir déf. A.0.2).

Proposition 1.3.4. *Soit $f \in \mathcal{WAP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$. On définit le coefficient de Bohr Fourier de f par:*

$$M(\lambda, f) = \omega.\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T+a}^{T+a} e^{-i\lambda t} f(t)\,dt, \quad a \in \mathbb{R}.$$

L'élément $M(\lambda, f)$ existe indépendamment de a.

Remarque 1.3.1.

i) *L'existence de $M(\lambda, f)$ est due à la faible complétude de l'espace.*

ii) *Nous avons vu que le spectre d'une fonction presque périodique est au plus dénombrable, cette propriété est aussi vérifiée par les fonctions faiblement presque périodiques [6, pages 68 et 69].*

1.4 Comparaison entre la presque périodicité des fonctions scalaires et vectorielles

La notion de primitives des fonctions joue un rôle très important dans la résolution des équations différentielles. Une question naturelle: sous quelles conditions la primitive d'une fonction presque périodique est presque périodique?
Dans le cas scalaire on a le résultat suivant:

Théorème 1.4.1. *La primitive d'une fonction presque périodique est presque périodique si et seulement si elle est bornée.*

[3] Dans quelques ouvrages (ex: [7]), la relative compacité est remplacée par une condition équivalente (justifié par le théorème A.1) qui est la total bornitude.

Preuve. *[8, page 98]*

Cependant, Kadets ([19]) à montré à l'aide du contre exemple ci-après que la condition de bornitude pour les fonctions vectorielles n'est pas suffisante.

Contre exemple 1. *Soit f une fonction définie comme suit:*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to c_0 \\ t &\to \left\{\frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Alors f est presque périodique,[4] *en effet:*
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose:

$$f_k(t) = \left\{\cos(t); \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right); \cdots ; \frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right); 0; 0; 0; \cdots\right\}$$

Alors $f_k \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; c_0)$ (f_k est $2^{k+1}\pi$périodique) $\forall k \in \mathbb{N}$, de plus on a:

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_k(t)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left\{0; 0; \cdots ; 0; \frac{1}{2^{k+1}}\cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right); \frac{1}{2^{k+2}}\cos\left(\frac{t}{2^{k+2}}\right); \cdots\right\} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}} \xrightarrow{k\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

D'où f est la limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques, ce qui montre (d'après le théorème (1.3)) qu'elle est presque périodique.
La primitive $F(t) = \left\{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de f est borné, mais elle n'est pas presque périodique. Car si on suppose le contraire et on fixe ξ une ε-période de F, on aura:

$$\left|\sin\left(\frac{t+\xi}{2^n}\right) - \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\right| \leq \|F(t+\xi) - F(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Il en découle:

$$\mathcal{J}(F;\varepsilon) \subset \mathcal{J}(\sin(\centerdot/2^n);\varepsilon); \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Donc, la famille $\mathcal{K} := \{\sin(\centerdot/2^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-presque périodique. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $\mathcal{J}(\mathcal{K};\varepsilon)$ relativement dense dans $\mathbb{R}$, contenant les ε-périodes des fonctions contenues dans $\mathcal{K}$.
Montrons que cela ne peut pas se produire si $\varepsilon < 2$, on a[5]*:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{t+\xi}{2^n}\right) - \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\right| \overset{(1)}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}} 2\left|\cos\left(\frac{2t+\xi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2^{n+1}}\right)\right|.$$

[4] Notre raisonnement, pour vérifier la presque périodicité de f (resp. la non presque périodicité de F), est basé sur les téchniques utilisées dans [5, pages 53, 54].

[5] Nous éclaircissons les passages de cette preuve comme suit:

- ⋆ Le choix de $\varepsilon < 2$ est d'ordre technique, il assure la monotonie de la fonction sin sur l'intervalle $[-\delta_\varepsilon; \delta_\varepsilon]$, qui sera utile pour démontrer (1.6).

$$\overset{(2)}{=} \quad 2\Big|\sin\Big(\frac{\xi}{2^{n+1}}\Big)\Big|.$$

Remarquons qu'on a:

$$2\Big|\sin\Big(\frac{\xi}{2^{n+1}}\Big)\Big| \leq \varepsilon \iff \frac{\xi}{2^{n+1}} \in [\mathbb{Z}\pi - \delta_\varepsilon; \mathbb{Z}\pi + \delta_\varepsilon], \tag{1.6}$$

où $0 < \delta_\varepsilon < \pi/2$ *tel que* $\sin(\delta_\varepsilon) = \varepsilon/2$.
Ça implique:

$$\mathcal{J}(\sin(\centerdot/2^n); \varepsilon) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2^{n+1}(k\pi - \delta_\varepsilon); 2^{n+1}(k\pi + \delta_\varepsilon)].$$

D'où:

$$\mathcal{J}(\mathcal{K}; \varepsilon) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{J}(\sin(\centerdot/2^n); \varepsilon) = [-2\delta_\varepsilon; 2\delta_\varepsilon].$$

Qui est clairement non relativement dense dans $\mathbb{R}$. *Contradiction avec le fait que la famille* $\mathcal{K}$ *est équi-presque périodique.*

Pour les fonctions vectorielles, on a seulement le résultat suivant:

Lemme 1.4.1. *Si la primitive* F *est bornée, alors elle est faiblement presque périodique.*

Preuve. *C'est évident, il suffit de composer* F *avec les éléments du dual, pour se ramener au cas scalaire. (1.4.1)* □

Le théorème (1.4) et le lemme (1.4.1), donnent le résultat suivant:

Théorème 1.4.2. *[7, Theorem 1, page 58] Soient* $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E})$ *et* F *une primitive de* f, *alors* F *est presque périodique si, et seulement si,* $\mathfrak{R}(F)$ *est relativement compact (totalement borné).*

Le théorème suivant caractérise la classe des espaces de Banach où la bornitude de F est suffisante pour établir sa presque périodicité.

Théorème 1.4.3. *[8, page 182] Soit* $\mathbb{E}$ *un espace de Banach tel que* $c_0 \not\subset \mathbb{E}$,[6] *alors la presque périodicité de* F *découle de sa bornitude.*

Preuve. *Nous renvoyons le lecteur à l'article [19].* ■

⋆ Pour faire le passage (1) , il suffit d'utiliser la relation trigonométrique suivante:

$$\sin(a - b) + \sin(a + b) = 2\sin(a)\cos(b).$$

⋆ Pour (2) , il suffit de prendre $t = -\xi/2$.

[6]La condition $c_0 \not\subset \mathbb{E}$, appelée aussi la propriété de *Bohl-Bohr*, signifie que $\mathbb{E}$ ne contient aucun sous espace isomorphe a c_0 (ex: les espaces réflexifs, les espaces faiblement complets, les espaces uniformément convexes, $\cdots$)

Chapter 2

Les $\mathcal{C}_0$-Semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes) d'opérateurs

2.1 Inroduction

La théorie des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes à pour objectif la résolution des problèmes de Cauchy abstraits, notés dans la suite *(ACP)*, i.e. des équations de type:

$$(ACP) \quad := \quad \begin{cases} u'(t) &= A\, u(t), \quad t \geq 0. \\ u(0) &= x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$A : D(A) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

est un opérateur linéaire (non borné) défini sur son domaine $D(A) \subset \mathbb{E}$, et u une application définie de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.
Dans la suite, on dit que u est la solution classique du *(ACP)* si:

1. $u(\centerdot) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+\backslash\{0\}; D(A))$
   où $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+\backslash\{0\}; D(A))$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

2. L'équation (2.1) est satisfaite en tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Regardons à présent quelques cas simples:

1. On se place sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$ et on pose:

   $$\begin{aligned} A : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\to ax, \end{aligned}$$

   où $a \in \mathbb{K}$. Dans ce cas la solution est donnée par la formule suivante:

   $$u(t) = e^{ta}\, x.$$

2. Dans le cas où A est une matrice définie sur un espace de dimension fini, la solution est explicitement donnée par l'exponentielle [1] de A, plus précisément:

$$u(t) = e^{tA}\ x := \Big(\sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} \Big)\ x. \tag{2.2}$$

Si on note par (T_t) la famille d'opérateurs $\exp(tA)$ (i.e $T_t = \exp(tA);\ \forall t \geq 0.$) définie sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, alors la solution $u(t)$ s'écrira sous la forme:

$$u(t) = T_t x \tag{2.3}$$

Grâce à la représentation $T_t = \exp(tA)$, la solution u satisfait la relation algébrique (appelée propriété du semi-groupe) suivante:

$$T_{t+h}x = e^{(t+h)A}\ x = e^{tA}\ e^{hA}\ x = e^{tA}T_h x = T_t T_h x.$$

D'où:

$$T_{t+h} = T_t T_h \tag{2.4}$$

De plus il est simple à vérifier qu'en $t = 0$, on a:

$$x = u(0) = T_0 x \Rightarrow T_0 = Id_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)}.$$

3. Lorsque A est un opérateur borné sur un espace de dimension infinie, la construction précédente de la solution reste valable, car l'expression (2.2), garde bien un sens puisque la série est normalement convergente [2] (donc convergente), en effet:
on a:

$$\|u(t)\| = \Big\| \Big(\sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} \Big) x \Big\| \leq \Big(\sum_{k \geq 0} \frac{(t\|A\|)^k}{k!} \Big) \|x\| = e^{t\|A\|}\|x\|.$$

Supposons maintenant que l'on s'intéresse à la résolution du problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta\ u, \quad t \geq 0. \\ \\ u(0) & = & f, \end{array} \right. \tag{2.5}$$

[1] Pour calculer l'exponentiel d'une matrice, souvent on fait appel à la diagonalisation, la trigonalisation et / ou la décomposition de Jordan.

[2] Sur un espace de Banach, une série est convergente ssi elle est normalement convergente.

où Δ est l'opérateur laplacien.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$(l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact), définie par:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-\|x\|^2}\right) & si \quad \|x\| < 1. \\ \\ 0 & si \quad \|x\| \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Posons $\psi_k(x) = \varphi(kx)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, alors on obtient:

$$\Delta\psi_k(x) = k^2\Delta\varphi(kx).$$

D'où:

$$\frac{\|\Delta\psi_k\|}{\|\psi_k\|} = k^2 \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} +\infty.$$

Il en découle la non bornitude de l'opérateur laplacien Δ. Ce qui montre que la solution u ne peut pas être donnée sous la forme:

$$u(t) = \exp(t\Delta)x.$$

Question: Qu'elle est la forme générale de la solution de (2.1) quand l'opérateur A est non borné?
Pour les opérateurs non bornés, nous allons essayer de donner une notion proche de la notion d'exponentiel d'un opérateur borné et qui permet de résoudre certains problèmes donnés par l'équation (2.1).

2.2 $\mathcal{C}_0$-groupes et $\mathcal{C}_0$-Semi-groupes d'opérateurs

Définition 2.2.1. *On appelle semi-groupe d'opérateurs, sur un espace de Banach $\mathbb{E}$, toute famille $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés vérifiant les propriétés suivantes:*

i) $T_0 = I$ *(L'opérateur identité),*

ii) $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ *pour tout* $t, s \geq 0$ *(Propriété de semi-groupe).*

De plus si, pour tout $x \in \mathbb{E}$ on a:

$$\lim_{t\to^+0} \|T_t x - x\| = 0, \tag{2.7}$$

on dit que $(T_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe d'opérateurs.
Dans le cas où la limite dans (2.7) est donnée par rapport à la norme sur l'espace des opérateurs i.e:

$$\lim_{t\to^+0} \|T_t - I\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E})} = 0,$$

on dit que $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu.

Proposition 2.2.1. *Un semi-groupe est uniformément continu ssi il est de la forme e^{tA}, où A est un opérateur borné.*

Preuve. *Voir [4, Corollary 1.4, page 3]* ■

Proposition 2.2.2. *La continuité en zéro implique la continuité sur $\mathbb{R}^+$ de l'application $T_{\bullet}x$, où pour tout $x \in \mathbb{E}$, $T_{\bullet}x$ est définie par:*

$$\begin{array}{rccl} T_{\bullet}x: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{E}. \\ & t & \rightarrow & T_t x. \end{array}$$

Preuve. *Soient $x \in \mathbb{E}$ et $h, t_0 > 0$, on a alors:*

$$\lim_{h\to 0} \|T_{t_0+h}x - T_{t_0}x\| \leq \|T_{t_0}\| \lim_{h\to 0} \|T_h x - x\| = 0.$$

D'où, compte tenu du fait que $t_0 \in \mathbb{R}^+$ est arbitraire, on déduit que $T_{\bullet}x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. □

Exemples.

1) Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ la famille d'opérateurs définie comme suit [3]

$$\begin{array}{rccl} T_t: & \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R};\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ & f & \rightarrow & T_t f, \end{array}$$

telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_t f(x) = \exp\left(\int_{x-t}^{x} q(s)\, ds\right) f(x-t),$$

où q est une fonction continue à support compact.
Alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe d'opérateurs.
En effet, pour tout $t, h \in \mathbb{R}^+$, on a:

$$T_t\big[T_h f(x)\big] = T_t\left[\exp\left(\int_{x-h}^{x} q(s)ds\right) f(x-h)\right].$$

[3]Cet exemple est inspiré de l'examen master 2 modélisation mathématique, février 2017, module Semi-groups of linear operators, assuré par M^{me} Khellas.

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\int_{x-t}^{x} q(s)ds\right)\ \exp\left(\int_{x-t-h}^{x-t} q(s)ds\right)\ f(x-t-h). \\ &= \exp\left(\int_{x-t-h}^{x} q(s)ds\right)\ f(x-t-h). \\ &= T_{t+h}f(x). \end{aligned}$$

D'où, la propriété de semi-groupe est satisfaite.
Vérifions la propriété de continuité, on a:

$$\begin{aligned} \|T_tf-f\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \|T_tf(x)-f(x)\|. \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\| \exp\left(\int_{x-t}^{x} q(s)\,ds\right) f(x-t) - f(x) \right\|. \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\| \exp\left(\int_{-\infty}^{x} q(s)\,ds\right)\right. \\ &\quad \left. \left[\exp\left(-\int_{-\infty}^{x-t} q(s)\,ds\right) f(x-t) - \exp\left(-\int_{-\infty}^{x} q(s)\,ds\right) f(x)\right] \right\| \end{aligned}$$

Nous condensons l'écriture précédente en posant:

$$g(x) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{x} q(s)\,ds\right)\ f(x) \in \mathcal{C}_{bu}(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

Nous obtenons alors:

$$\|T_tf-f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\| \exp\left(\int_{-\infty}^{x} q(s)\,ds\right) \Big[g(x-t)-g(x)\Big] \right\|$$

Nous exploitons la continuité de g pour en déduire que:

$$\lim_{t\to^+0} \|T_tf-f\| = 0.$$

2) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, définissons $(S_t)_{t\geq 0}$ par :

$$S_t := e^{tA}.$$

Alors $(S_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe (proposition (2.2.1)) et grâce à l'inégalité suivante:

$$\|e^{tA}-I\| \leq e^{t\|A\|}-1.$$

$(S_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu.

3) Si $\mathbb{Y}$ est un sous espace fermé de $\mathbb{E}$ invariant par un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe (T_t) (i.e: $T_t\mathbb{Y} \subset \mathbb{Y}$ pour tout $t \geq 0$) alors la famille d'opérateurs notée $(S_t)_{t\geq 0}$ définie par la restriction de $(T_t)_{t\geq 0}$ à $\mathbb{Y}$ (pour tout $t \geq 0$, $S_t := (T_t)_{|\mathbb{Y}}$) est aussi un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.

Le plus important objet associé a un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe est son générateur:

Définition 2.2.2. *On appelle générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire A défini sur l'ensemble:*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathbb{E}, \quad \lim_{t \to ^+0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

par:

$$Ax \ = \lim_{t \to ^+0} \frac{T_t x - x}{t}, \quad [4]$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.
L'ensemble $\mathcal{D}(A)$ s'appelle domaine de définition de l'opérateur A.

On énoncera quelques propriétés du générateur A sans les démontrer (on pourra trouver les preuves dans [4, pages 5 et 6]).

Théorème 2.2.1. *Soient $(T_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors on a:*

1) Pour tout $x \in \mathbb{E}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \quad \int_t^{t+h} T_s \, x \, ds = T_t x.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{E}$,

$$\int_0^t T_s \, x \, ds \in D(A) \quad \textit{et} \quad A\Big(\int_0^t T_s \, x \, ds \Big) \ = \ T_t x - x.$$

3) Pour tout $x \in D(A)$ on a $T_t x \in D(A)$ et:

$$\frac{d}{dt} T_t x \ = \ A T_t x \ = \ T_t A x.$$

4) Pour tout $x \in D(A)$,

$$T_t x - T_s x \ = \int_s^t T_\eta \, A \, x \, d\eta \ = \int_s^t A \, T_\eta \, x \, d\eta.$$

[4] Le générateur A décrit l'action du semi-groupe sur des intervalles de temps infinitésimaux.

Proposition 2.2.3. *Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, alors A est un opérateur fermé à domaine dense.*

Proposition 2.1. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, alors il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que:*

$$\|T_t\| \;\leq\; Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

Proposition 2.2. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe, tel que $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$, et A son générateur infinitésimal, alors pour tout $x \in \mathbb{E}$:*

$$\mathcal{R}_\lambda(A)\,x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, T_t\, x\, dt, \qquad Re(\lambda) > \omega.$$

Preuve. *Pour la démonstration de ces résultats, on se réfère à [9, pages 5, 42].*

■

Le théorème suivant donne une propriété spectrale très importante des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes.

Théorème 2.2.2. ***Théorème d'inclusion spectrale***
Soient $(T_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors:

$$\{e^{t\,\lambda} | \quad \lambda \in \sigma(A)\} = e^{t\,\sigma(A)} \subset \sigma(T_t); \quad \forall t \geq 0. \tag{2.8}$$

Preuve. *[9, page 179].* ■

Remarque 2.2.1. *En général*

$$\{e^{t\,\lambda} | \quad \lambda \in \sigma(A)\} = e^{t\,\sigma(A)} \neq \sigma(T_t); \quad \forall\ t \geq 0.$$

Afin de justifier la remarque précédente nous avons construit le contre exemple suivant:

Contre exemple 2. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de translation défini sur l'espace des fonctions continues 2π-périodiques ($\mathcal{C}_{2\pi}$)*

$$\begin{array}{rcl} T_t\, : \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ f(\cdot) & \to & f(t+\cdot). \end{array}$$

Alors, on a:

$$A = \frac{d}{dt} \quad \text{et} \quad \{\lambda \in \mathbb{C} | \;\; Re(\lambda) \leq 0\} \subset \sigma(A). \tag{2.9}$$

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors on a:

$$\mathcal{R}_\lambda(A) f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t+s) dt,$$

qui est bien définie ssi $Re(\lambda) > 0$, d'où:

$$\{\lambda \in \mathbb{C} | \ Re(\lambda) > 0\} = \rho(A).$$

D'où:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \ Re(\lambda) \leq 0\}.$$

Pour $t = 2\pi$, on a $T_{2\pi} \equiv I \Rightarrow \sigma(T_{2\pi}) = \{1\}$. Donc il est facile de voir que $e^{2\pi\sigma(A)} \neq \{1\}$.

Remarque 2.2.2. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément continu, on a mieux que (2.8), plus exactement:*

$$\{e^{t\,\lambda} | \quad \lambda \in \sigma(A)\} = e^{t\,\sigma(A)} = \sigma(T_t); \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.2.3. *Une famille d'opérateurs $(T_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{E})$, vérifiant:*

i) $T_0 = I$,

ii) $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ *pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$,

iii) $\lim\limits_{t\to 0} \|T_t x - x\| = 0, \ \forall x \in \mathbb{E}$

est appelée un $\mathcal{C}_0$-groupe d'opérateurs.
Le générateur infinitésimal A associé au $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est défini, pour tout x dans le domaine $\mathcal{D}(A)$, par:

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t},$$

où:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathbb{E}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

Remarque 2.2.3. *De la définition précédente découle directement deux points importants :*

- $\star$ *La limite dans la définition* (2.2.3) *est calculée dans les deux directions, contrairement aux $\mathcal{C}_0$-semi-groupes dont la limite est calculée uniquement pour les réels positifs.*
- $\star\star$ *De i) et ii) on déduit que T_t est inversible et son inverse est T_{-t}; pour les $\mathcal{C}_0$-semi-groupes, ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que l'inverse existe.*

Remarque 2.2.4. *Étant donné $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un $\mathcal{C}_0$-groupe et A le générateur infinitésimal associé, alors on peut exhiber de $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$, deux $\mathcal{C}_0$-semi-groupes à savoir:*

1. $(T_t)_{t\geq 0}$ *dont le générateur infinitésimal est* A.

2. $(T_{-t})_{t\geq 0}$ *dont le générateur infinitésimal est* $-A$.

Corollaire 2.2.1. *Si* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est un* $\mathcal{C}_0$*-groupe, alors* A *(resp.* $-A$*) est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe qui sera noté dans suite par* $(T_+(t))_{t\geq 0}$ *(resp.* $(T_-(t))_{t\geq 0}$*).*

La proposition suivante, est la réciproque du corollaire précédent.

Proposition 2.2.4. *L'opérateur linéaire* A *est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$*-groupe* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *ssi:*

i) A *est le générateur infinitésimal du* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe* $(T_+(t))_{t\geq 0}$.

ii) $-A$ *est le générateur infinitésimal du* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe* $(T_-(t))_{t\leq 0}$.

Dans ce cas le groupe (T_t) *sera donné par:*

$$T_t = \begin{cases} T_+(t) & \textit{pour} \quad t \geq 0, \\ T_-(t) & \textit{pour} \quad t < 0, \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une méthode efficace pour générer un $\mathcal{C}_0$-groupe d'opérateurs a partir d'un $\mathcal{C}_0$- semi-groupe d'opérateurs.

Théorème 2.2.3. *[4] Soit* $(T_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe d'opérateurs, tel qu'il existe un* $t_0 \in \mathbb{R}^+$ *pour lequel* T_{t_0} *est inversible, alors:*

- ⋆ *Pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, *l'opérateur* T_t *est inversible.*
- ⋆ *La famille d'opérateurs définie comme suit:*

$$S_t = \begin{cases} T_t & \textit{si} \quad t \geq 0, \\ T_{(-t)}^{-1} & \textit{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

  est un $\mathcal{C}_0$*-groupe d'opérateurs.*

Preuve. *La première moitié de la preuve repose sur [4, théorème 6.5, page 24]; tandis que la seconde est une déduction de la proposition précédente.*

■

Le célèbre théorème de (**Hille-Yosida-1948**) donne une caractérisation des opérateurs qui sont générateurs des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes Contractant.[5]
Dans la suite de notre mémoire, le développement mathématique est souvent basé sur les $\mathcal{C}_0$-groupes, donc il est très intéressant d'énoncer un théorème de génération d'un $\mathcal{C}_0$-groupe. Nous utilisons à la fois le théorème de *Hille-Yosida-1948* et la proposition (2.2.4), pour dégager le résultat suivant.

[5]Pour plus de détails, Voir [9, page 66] ou [4, page 8].

Théorème 2.2.4. ***Génération d'un*** $\mathcal{C}_0$***-groupe*** *[9]*
Soit (A,D(A)) un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach $\mathbb{E}$ *et on considère deux constantes* $M \geq 1$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$*, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) (A,D(A)) est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$*-groupe* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, satisfaisant l'estimation suivante:*

$$\|T_t\| \leq M\, e^{\omega\,|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii) (A,D(A)) (resp. $(-A,D(A))$*) est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe* $(T_+(t))_{t\geq 0}$ *(resp.* $(T_-(t))_{t\geq 0}$*), satisfaisant:*

$$\max\Big(\|(T_+(t))\|\,,\,\|(T_-(t))\|\Big) \leq M\, e^{\omega t}, \quad \forall\; t \geq 0.$$

iii) (A,D(A)) est fermé et densément défini et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $|\lambda| > \omega$*, on ait* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\Big\|\Big\{(|\lambda| - \omega)\,\mathcal{R}_\lambda(A)\Big\}^n\Big\| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

iv) (A,D(A)) est fermé et densément défini et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $|Re(\lambda)| > \omega$ *on ait* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|(\mathcal{R}_\lambda(A))^n\| \leq \frac{M}{(|Re(\lambda)| - \omega)^n}; \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. *Pour la démonstration de ce résultat, on se réfère à [9, page 72].* ■

Chapter 3

Caractérisation de la presque périodicité des C_0-Semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes) d'opérateurs

Dans ce chapitre, nous énoncerons la définition de la presque périodicité (resp. l'uniforme presque périodicité) des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes) et nous allons voir une caractérisation de la presque périodicité (resp. l'uniforme presque périodicité) des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes ($\mathcal{C}_0$-groupes) via leurs générateurs.
La presque périodicité, l'asymptotique presque périodicité et l'uniforme presque périodicité sur les parties compactes seront aussi évoquées. Nous terminons par une étude comparative entre les divers types de presque périodicité citées en haut.

3.1 La presque périodicité des C_0-semi-groupes (C_0-groupes)

Définition 3.1.1. *Un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est dit presque périodique si, pour tout $x \in \mathbb{E}$, l'application:*

$$\begin{array}{rrcl} T_{\cdot}x: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{E}. \\ & t & \to & T_t x. \end{array}$$

est presque périodique.

Remarque 3.1.1. *Une définition analogue peut être donnée pour les $\mathcal{C}_0$-groupes, il suffit juste de remplacer $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{R}$.*

3.1.1 La presque périodicité des $\mathcal{C}_0$-groupes

Dans toute la suite l'opérateur A est le générateur infinitésimal de $\mathcal{C}_0$-semi-groupe ($\mathcal{C}_0$-groupe) (T_t).

Théorème 3.1. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe uniformément borné.*
Si pour tout $x \in \mathbb{E}$:

$$Px \,=\, \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T_s x \; ds \tag{3.1}$$

existe, alors P est un projecteur de $\overline{\mathfrak{R}(A)}$ sur $\mathcal{N}(A)$.[1]

Avant de donner une preuve, nous énonçons quelques résultats qui seront utilisés au cours de la démonstration.

Lemme 3.1.1. *Soit $U:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{E}$ une fonctions continue bornée, alors on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t U_s \; ds \,=\, \lim_{\lambda\to+0} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, s}\; U_s \; ds.$$

Dans le sens où, soit les deux limites existent et elles sont égales, soit les deux limites n'existent pas.

Preuve. *Voir [13, page 123].* ■

Théorème 3.1.1. *Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contraction, et A son générateur infinitésimal. On a équivalence entre:*

i) $\mathbb{E} \,=\, \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathfrak{R}(A)}$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{E}$,

$$Px \,=\, \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T_s x \; ds \tag{3.2}$$

existe.

iii) $\forall x \in \mathbb{E},\ \lim\limits_{\lambda\to+0} \lambda\mathcal{R}_\lambda(A)x$ *existe.*

iv) $\forall x \in D(A),\ \lim\limits_{\lambda\to+0} A\mathcal{R}_\lambda(A)x$ *existe.*

Preuve. *Pour la démonstration de ce théorème, on se réfère à [13, page 125].* ■

[1] Dans le cas où l'espace $\mathbb{E}$ est de Hilbert, P coïncide avec l'opérateur de projection orthogonale de E sur $\mathcal{N}(A) = \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{N}(T_t - I)$.

Lemme 3.1.2. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe uniformément borné* [2] *sur $\mathbb{E}$, supposons que:*

i) $\exists\, \eta > 0$ *tel que* $\forall \lambda \in [0, \eta]$, $\quad \|\lambda\, \mathcal{R}_\lambda(A)\| \leq M$.

ii) Pour $x \in \mathbb{E}$, $\exists\, \{\lambda_n\} \searrow_{+0}$ *et* $y \in \mathbb{E}$ *tel que:*

$$\omega.\lim_{n\to+\infty} \lambda_n\, \mathcal{R}_{\lambda_n}(A)x = y.$$

Alors:

$$\lambda\, \mathcal{R}_\lambda(A)\, y = y, \quad \forall \lambda > 0, \qquad et \qquad \|.\|.\lim_{\lambda\to+0} \lambda\, \mathcal{R}_\lambda(A)\, x \;=\; y.$$

Preuve. *Voir [17, Lemma 18.5.1, page 153].* ■

Remarque 3.1.2. *Le théorème (3.1.1) concerne tout $\mathcal{C}_0$-semi-groupe contractant et dans la démonstration ci-dessous, nous allons essayer de démontrer le théorème (3.1) pour des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes uniformément bornés. Nous signalons que la différence c'est dans l'hypothèse de contraction d'un projecteur utilisée dans la preuve du ([13, Theorem 5.6.2, page 122]); contrairement à notre cas (voir définition A.2), où on a imposé au projecteur d'être seulement borné.*

Preuve. *Théorème 3.1*
On suppose que pour tout $x \in \mathbb{E}$ la limite suivante existe:

$$Px \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T_s x\; ds$$

Ça implique:

- *D'une part: d'après le théorème (3.1.1), pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\lim\limits_{\lambda\to+0} \lambda\mathcal{R}(A)x$ existe.*
  En combinant ça avec le lemme (3.1.1) appliqué à la fonction $U \;=\; T_{\cdot}x$, on obtient:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T_s x\; ds \;&=\; \lim_{\lambda\to+0} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, s}\; T_s x\; ds. \\ &\Updownarrow \\ P(x) \;&=\; \lim_{\lambda\to+0} \lambda\; \mathcal{R}_\lambda(A)x \end{aligned} \tag{3.3}$$

  Le x étant arbitraire, de (3.3)*, on déduit que:*

$$P^2(x) \;=\; P(P(x)) \;=\; \lim_{\lambda\to+0} \lambda\; \mathcal{R}_\lambda(A)P(x) \tag{3.4}$$

[2]Les hypothèses vérifiées par $(T_t)_{t\geq 0}$ sont plus fortes que celles indiquées dans [17, définition 18.4.1, page 509].

- *D'autre part:* $(T_t)_{t\geq 0}$ *vérifie la condition i) du lemme (3.1.2).*
  La condition ii) du lemme (3.1.2) est aussi vérifiée, en effet:
  Si on pose $\lambda_n = \lambda/n$, *alors:* $\lambda_n \searrow 0$ *et si on prend* $y = P(x)$, *alors d'après* (3.3)*:*

$$\begin{array}{rcl} \|.\|. \lim_{n\to+\infty} \lambda_n \mathcal{R}_{\lambda_n} x & = & P(x). \\ & \Downarrow & \\ \omega. \lim_{n\to+\infty} \lambda_n \mathcal{R}_{\lambda_n} x & = & P(x). \end{array}$$

  On déduit du lemme (3.1.2) que:

$$\lambda \mathcal{R}_\lambda(A) P x = P x, \qquad \forall \lambda > 0.$$

  Donc par passage à la limite, on aura:

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \mathcal{R}_\lambda(A) P(x) = P(x) \tag{3.5}$$

  Finalement, de (3.4) *et* (3.5)*, on déduit que:*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \mathcal{R}_\lambda(A) P(x) = \begin{cases} P(x). \\ P^2(x). \end{cases}$$

La bornitude de P *découle de l'uniforme bornitude de* $(T_t)_{t\geq 0}$*, en effet pour tout* $x \in \mathbb{E}$ *on a:*

$$\begin{array}{rcl} \|Px\| & = & \left\| \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t T_s x \, ds \right\| \\ & \leq & \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|T_s x\| \, ds \\ & \leq & \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \|T_s\| \, \|x\| \end{array}$$

D'où:

$$\|P\| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \|T_s\|$$

Donc P *est un projecteur.*
Pour compléter la démonstration, on montre que: $\mathcal{N}(P) = \overline{\mathfrak{R}(A)}$.

- $\mathcal{N}(P) \subset \overline{\mathfrak{R}(A)}$*:*
  Soit $x \in \mathcal{N}(P)$, $Px = 0 \Rightarrow Px$ *existe, donc d'après le théorème précédent,* $\lim_{\lambda\to+0} \lambda \mathcal{R}_\lambda(A) x$ *existe aussi, donc:*

$$0 = Px = \lim_{\lambda\to+0} \lambda \mathcal{R}_\lambda(A) x.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\lambda\to+0}\big\{(\lambda I - A)\mathcal{R}_\lambda(A)x + A\mathcal{R}_\lambda(A)x\big\}. \\ &= x + \lim_{\lambda\to+0} A\mathcal{R}_\lambda(A)x. \end{aligned}$$

D'où:

$$x = \lim_{\lambda\to+0} A(-\mathcal{R}_\lambda(A)x) \quad \Rightarrow \quad x \in \overline{\mathfrak{R}(A)}.$$

Finalement: $\mathcal{N}(P) \subset \overline{\mathfrak{R}(A)}$.

- $\overline{\mathfrak{R}(A)} \subset \mathcal{N}(P)$:
  Soit $y \in \overline{\mathfrak{R}(A)}$, *c'est-à-dire:* $\exists\ y_n \in \mathfrak{R}(A)$ *tel que* $\|\|.\ \lim_{n\to+\infty} y_n = y$.
  $y_n \in \mathfrak{R}(A) \Rightarrow y_n = Ax_n, \quad x_n \in D(A)$.

$$\begin{aligned} Py &= \lim_{n\to\infty} Py_n = \lim_{n\to\infty} PAx_n. \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\underbrace{\int_0^t T_sAx_n\,ds}\Big). \\ &\qquad\qquad \textit{propriété 4), thm (2.2.1)}\Downarrow \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(T_tx_n - x_n)\Big). \end{aligned}$$

Par passage à la norme, on aura:

$$\begin{aligned} \|Py\| &= \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\|T_tx_n - x_n\|\Big). \\ &\le \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(1 + \sup_{s\in\mathbb{R}^+}\|T_s\|)\,\|x_n\|\Big). \\ \|Py\| &= 0. \end{aligned}$$

Donc $Py = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{N}(P)$.
Finalement: $\mathcal{N}(P) = \overline{\mathfrak{R}(A)}$.

En exploitant les propriétés d'un projecteur et le théorème (3.1.1), on déduit que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \mathcal{N}(P) \oplus \mathfrak{R}(P). \\ \mathbb{E} &= \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathfrak{R}(A)}. \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{N}(A) = \mathfrak{R}(P)$.
On a:

$$x \in \mathfrak{R}(P) \Leftrightarrow x \notin \mathcal{N}(P) = \overline{\mathfrak{R}}(A) \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(A).$$

Il en découle:

$$\mathcal{N}(A) = \mathfrak{R}(P) \tag{3.6}$$

D'où:

$$\begin{array}{rcl} P := \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathfrak{R}(A)} & \rightarrow & \mathfrak{R}(P). \\ & & \Updownarrow \\ P := \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathfrak{R}(A)} & \rightarrow & \mathcal{N}(A). \end{array}$$

est un projecteur défini sur $\mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathfrak{R}(A)}$ *à valeurs dans* $\mathcal{N}(A)$.
De même la restriction de P *à* $\overline{\mathfrak{R}(A)}$, *notée encore* P, *est aussi un projecteur au sens de la définition (A.2).*
D'où:

$$P := \overline{\mathfrak{R}(A)} \rightarrow \mathcal{N}(A),$$

est un Projecteur.

□

Théorème 3.1.2. *Pour qu'un* $\mathcal{C}_0$*-groupe* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *soit presque périodique, il faut et il suffit que* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *soit uniformément borné et les vecteurs propres de son générateur infinitésimal* A *génèrent un sous espace dense dans* $\mathbb{E}$.
Dans ce cas, on aura:

$$\mathbb{E} = \overline{\mathfrak{R}(\lambda I - A)} \oplus \mathcal{N}(\lambda I - A), \quad \lambda \in i\,\mathbb{R}.$$

Preuve.
<u>Suffisance</u>*: supposons que* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est uniformément borné* ($\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\| = M < \infty$) *et que l'ensemble des vecteurs propres de* A, *notés* $\texttt{EigVect}(A)$, *engendrent un sous espace dense dans* $\mathbb{E}$.
D'après la proposition (2.2.4), A *est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$*-groupe si et seulement si* A *(resp.* $-A$*) est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe.*
En combinant ça avec le théorème (2.2.4), on déduit que $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$.
Soient $x \in \mathbb{E}$ *et* $\varepsilon > 0$, *par densité de* $\texttt{EigVect}(A)$ *dans* $\mathbb{E}$, *il existe* $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{E}$, *associés aux valeurs propres* $ir_1, ir_2, \cdots\cdots, ir_n$ *tels que :*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| < \varepsilon / M. \tag{3.7}$$

Le x_j *vérifie la relation suivante:* $Ax_j = ir_j x_j$, *et donc par intégration, on obtient:*

$$T_t x_j = e^{ir_j t} x_j, \quad t \in \mathbb{R}$$

En utilisant l'estimation (3.7), on obtient:

$$\varepsilon > \left\| T_t x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_t x_j \right\| = \left\| T_t x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{ir_j t} x_j \right\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{E}$, $T_{\cdot}x$ est la limite uniforme dans $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions presque périodiques, donc $T_{\cdot}x$ sera aussi presque périodique (Théorème (1.3)).
<u>Nécessité</u>*: supposons que $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique, on sait que :*

$$\forall x \in \mathbb{E}, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t x\| \quad < +\infty.$$

Avec le théorème de Banach Steinhaus, on déduit que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\| \quad < +\infty.$$

D'où l'uniforme bornitude de $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{E}$, $T_{\cdot}x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, la limite ci-dessous existe:

$$M(r,x) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs} T_s x \, ds; \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Du fait que le groupe $(e^{-irt}T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie les hypothèses du théorème(3.1), on déduit que:

$$\mathcal{N}(ir - A) \;=\; \{M(r,x) : x \in \mathbb{E}\}, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Avec $(ir - A)$ <u>le générateur</u> infinitésimal associé au groupe $(e^{-irt}T_t)_{t\in\mathbb{R}}$.[3]
Montrons que $\texttt{EigVect}(A) = \mathbb{E}$.[4]
On suppose qu'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathbb{E}^\star$ telle que $\varphi_{|\texttt{EigVect}(A)} = 0$.
D'après la formule(3.8), on sait que:

$$\begin{cases} M(r,x) & \in \quad \texttt{EigVect}(A). \\ & \text{ou} \\ M(r,x) & = \quad 0. \end{cases}$$

Dans les deux cas, on aura: $\varphi(M(r,x)) \;=\; 0$.
Mais, $T_{\cdot}x$ est presque périodique, cela impliquera la presque périodicité faible de la fonction $\varphi(T_{\cdot}x)$, ce qui suffira pour l'existence de sa moyenne:

$$\begin{aligned} M(r,x,\varphi) \;&=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}\varphi(\,T_s x\,)ds. \\ &=\; \varphi\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs} T_s x ds\Big). \end{aligned}$$

[3] La formule (3.8) suggère la relation ensembliste suivante:

$$\mathcal{N}(ir - A) \;=\; \{0\} \cup \texttt{EigVect}(A).$$

[4] Dans la preuve, nous utilisons la technique citée par [1, Corollary 1.8, page 8].

$$\begin{aligned} &= \varphi(\, M(r,x)\,). \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, les coefficients de Fourier *de la fonction* $t \to \varphi\,(\,T_t x\,)$ *sont nuls, donc la fonction* $t \to \varphi\,(\,T_t x\,)$ *est aussi nulle; en particulier pour* $t = 0$, $\varphi\,(\,T_0 x\,) = \varphi\,(\,x\,) = 0$, *mais le* x *est arbitraire dans* $\mathbb{E}$, *donc* $\varphi = 0$.
D'où: $\texttt{EigVect}(A) = \mathbb{E}$.
La décomposition de l'espace en somme directe:

$$\mathbb{E} = \overline{\mathfrak{R}(irI - A)} \oplus \mathcal{N}(irI - A).$$

découle du théorème (3.1), appliqué au groupe $(e^{-irt}T_t)$.

$\square$

Par la proposition ci-après, nous énonçons des conditions suffisantes (non nécessaires), qui assurent la presque périodicité d'un $\mathcal{C}_0$-groupe.

Proposition 3.1. *Un* $\mathcal{C}_0$*-groupe* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *défini sur un espace de Banach* $\mathbb{E}$ *est presque périodique si:*

1. $c_0 \not\subset \mathbb{E}$.
2. $T_{\cdot}y \in \mathcal{AP}(\mathbb{R},\mathbb{E})$, *pour tout* $y \in \mathfrak{R}(A)$.
3. *pour tout* $x \in \mathbb{E}$, $(T_{\cdot}x)$ *est bornée.*

Preuve. *Soit* $x \in D(A)$, *on a:*

$$\int_0^t T_s A x \; ds \;=\; T_t x - x.$$

Le point 2) *de la proposition (3.1) assure la presque périodicité de l'application* $t \to T_t A x$. *Maintenant l'application* $t \to T_t x$ *est une primitive bornée (point* 3)*) d'une fonction presque périodique et compte tenu de la condition* 1) *on déduit, grâce au théorème (1.4.3), que la fonction* $T_{\cdot}x$ *est presque périodique pour tout* $x \in D(A)$.
Pour $x \in \mathbb{E}$, *il existe* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, *telle que* $\|.\|.\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$; *avec ça on aura:*

$$\|T_t x - T_t x_n\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\| \|x - x_n\|.$$

Notons que la conditions 3) *et le théorème de Banach Steinhaus assurent la bornitude de* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\|$. *Donc:*

$$\|T_t x - T_t x_n\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\| \|x - x_n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{E}$, $T_{\cdot}x$ *est la limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques. Ce qui montre que le groupe* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est presque périodique.* $\square$

3.1.2 La presque périodicité des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes

Dans cette partie, le principe est de montrer que le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe est bijectif afin de l'injecter dans un $\mathcal{C}_0$-groupe en utilisant le théorème (2.2.3) puis on utilisera le théorème (3.1.2) pour caractériser la presque périodicité des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes. Dans toute la suite A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$.

Lemme 3.1.3. *Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de translation défini sur $\mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$ par la formule suivante:* $\quad (S_t f)(s) = f(t+s)$.
Alors, pour tout $t > 0$, S_t est une isométrie surjective.

Preuve. *Soit $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$, montrons que S_t est une isométrie, c'est à dire:*

$$\forall \quad t \in \mathbb{R}^+ \text{ fixé}, \qquad \|S_t f\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

mais cette égalité découle directement de la proposition(1.2).
Pour montrer que S_t est surjective, il suffit de vérifier que $\overline{\mathfrak{R}(S_t)} = \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$. Pour cela, soient $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$, $\varepsilon > 0$ et τ une ε-période de g avec $\tau > t$, on a alors:

$$\|S_\tau g - g\| = \sup_{s\geq 0} \|g(\tau+s) - g(s)\| \leq \varepsilon,$$

et

$$S_\tau g = S_t S_{\tau-t} g \in \mathfrak{R}(S_t).$$

D'où:

$$\overline{\mathfrak{R}(S_t)} = \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+).$$

Donc, S_t est surjective (Bijective). On déduit que S_t^{-1} existe et sa bornitude résulte du théorème de Banach sur l'inverse d'un opérateur*(voir [1, Corollary 2.7, page 35]) et du fait que c'est une isométrie impliquera d'après le théorème(2.2.3), l'injection de $(S_t)_{t\geq 0}$ dans un $\mathcal{C}_0$-groupe d'isométries $\tilde{S}_t$, plus précisément on a:*

$$\tilde{S}_t = \begin{cases} S_t & si \quad t \geq 0. \\ S_{(-t)}^{-1} & si \quad t < 0. \end{cases}$$

□

Le lemme suivant donne l'extension d'une fonction presque périodique définie sur $\mathbb{R}^+$ en une fonction presque périodique définie sur $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1.4. *Soit Ψ l'application définie par:*

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E}) & \rightarrow & \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E}) \\ & f(\centerdot) & \rightarrow & \Psi f(\centerdot) \stackrel{déf}{:=} (\tilde{S}_\centerdot f)(0), \end{array}$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{S}_t f(0) := \begin{cases} (S_t f)(0) & , \quad t \geq 0, \\ \\ (S_{-t}^{-1} f)(0) & , \quad t < 0, \end{cases}$$

Avec $(S_t)_{t \geq 0}$ est le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe défini au lemme (3.1.3).
Alors, Ψ est une isométrie surjective et Ψf est l'unique extension de f en une fonction presque périodique sur $\mathbb{R}$.

Preuve. *La preuve sera décomposée en plusieurs étapes:*

<u>*Étape 1:*</u> *On montre la continuité de Ψf:*

$$\|\Psi f(t+h) - \Psi f(t)\| = \|(\tilde{S}_{t+h} f - \tilde{S}_t f)(0)\| \leq \|\tilde{S}_{t+h} f - \tilde{S}_t f\| \xrightarrow{h \longrightarrow 0} 0.$$

La convergence vers 0 découle de la continuité forte de $\tilde{S}_t$.
D'où Ψf est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>*Étape 2:*</u> *On montre que $\Psi f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E})$:*
Supposons que $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+; E)$ et $\tau > 0$ une ε-période de f.

$$\begin{aligned} \|\Psi f(t+\tau) - \Psi f(t)\| &= \|(\tilde{S}_{t+\tau} f - \tilde{S}_t f)(0)\| \\ &\leq \|\tilde{S}_{t+h} f - \tilde{S}_t f\| \\ &\leq \|\tilde{S}_t\| \, \|S_\tau f - f\| \quad \text{avec} \quad \|\tilde{S}_t\| = 1 \\ &= \sup_{s \geq 0} \|f(\tau + s) - f(s)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où:

$$\mathcal{J}(f, \varepsilon) \subset \mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon) \tag{3.9}$$

Puisque Ψf est définie sur $\mathbb{R}$, alors vérifie l'égalité suivante:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Psi f(t-\tau) - \Psi f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Psi f(t) - \Psi f(t+\tau)\|.$$

Donc $\mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon) = -\mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon)$, où $-\mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon) = \{-\xi;\ \xi \in \mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon)\}$.
Cela impliquera l'inclusion suivante:

$$-\mathcal{J}(f, \varepsilon) \subset \mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon). \tag{3.10}$$

De (3.9) *et* (3.10), *on déduit que:*

$$\mathcal{J}(f, \varepsilon) \bigcup -\mathcal{J}(f, \varepsilon) \subset \mathcal{J}(\Psi f, \varepsilon). \tag{3.11}$$

Cela montre que $\Psi f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E})$.

Étape 3: Ψf est l'unique extension de f:
En effet, on a:

$$(\Psi f)(t) = (\tilde{S}_t f)(0) = (S_t f)(0) = f(t), \qquad \forall t \geq 0.$$

Montrons que cette extension est unique, pour cela soit $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$ une autre extension de f, on aura alors:

$$\|g - \Psi f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t) - \Psi f(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|g(t) - \Psi f(t)\| = \|f(t) - f(t)\| = 0.$$

D'où l'unicité de l'extension.

Étape 4: Ψ est une application surjective:
Soit $g \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, notons par f la restriction de g sur $\mathbb{R}^+$, alors il est clair que $\Psi f = g$.

Étape 5: Ψ est une isométrie:
Puisque Ψf est une extension de f, il découle:

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|f(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\Psi f(t)\| = \|\Psi f\|. \tag{3.12}$$

D'un autre coté, le fait que $\tilde{S}_t$ est une isométrie, impliquera:

$$\|\Psi f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(\Psi f)(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(\tilde{S}_t f)(0)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\tilde{S}_t f\| = \|f\|. \tag{3.13}$$

Finalement, de (3.12) et (3.13) on déduit que Ψ est une isométrie.

□

Le théorème suivant fait le lien entre la presque périodicité d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe et la presque périodicité du $\mathcal{C}_0$-groupe dans lequel il s'injecte.

Théorème 3.1.2.1. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique, alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est bijectif et le $\mathcal{C}_0$-groupe $(\tilde{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ qui lui correspond est aussi presque périodique.*

Avant d'énoncer une preuve pour ce théorème, regardons le comportement de l'opérateur Ψ vis-à-vis de la composition avec des opérateurs bornés sur l'espace $\mathbb{E}$.

Lemme 3.1.5. *Pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, on a:*

$$B(\mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})) \subset \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E}) \quad \text{et} \quad B(\mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})) \subset \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$$

Preuve. *Soient $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$ et $\xi \in \mathcal{J}(f,\varepsilon)$. Montrons que:*

$$B(\mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})) \subset \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$$

On a:

$$\|B(f(t+\xi)) - B(f(t))\| \leq \|B\|\|f(t+\xi) - f(t)\|.$$

Ça implique:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(f(t+\xi)) - B(f(t))\| \leq \|B\|\,\varepsilon.$$

D'où, $B \circ f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$.
La preuve de:

$$B(\mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})) \subset \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$$

se fait de la même façon.

Lemme 3.1.6. *Pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, on a le résultat suivant:*

$$\forall f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E}), \qquad \Psi(B \circ f) \;=\; B \circ \Psi f. \tag{3.14}$$

Preuve. *Remarquons tout d'abord que la quantité $\Psi(B \circ f)$ est bien définie, car pour tout $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$, $B \circ f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$ (conséquence du lemme (3.1.5)).*
On Montre maintenant le lemme (3.1.6):
En effet, pour $t \geq 0$,

$$[\Psi(B\circ f)](t) = [\tilde{S}_t(B \circ f)](0) = [S_t(B\circ f)](0) = (B \circ f)(t)$$
$$= B(f(t)) = B((\Psi f)(t)) = [B \circ \Psi f](t).$$

Donc $\Psi(B \circ f)$ et $B \circ \Psi f$ sont deux extensions de $B \circ f$ sur $\mathbb{R}$, et comme on a unicité, la formule (3.14) est démontrée.

Preuve. ***Théorème (3.1.2.1)*** *On montre que le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est injectif (i.e : $\mathcal{N}(T_t) = \{0\}$ pour tout $t > 0$).*
Soient: $t > 0$; $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathcal{J}(T_{\cdot}x;\varepsilon)$ avec $\tau > t$ et on suppose de plus que: $T_t x = 0$.
On a: $T_\tau x = T_{\tau - t} T_t x = 0$, d'où:

$$\|x\| = \|T_0 x - T_\tau x\| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0.$$

On montre la surjectivité de T_t:
Soit $x \in \mathbb{E}$, et $t > 0$, alors il est clair que:

$$T_t[(\Psi T_{\cdot} x)(-t)] \overset{formule(3.14)}{=} [\Psi(T_t \circ T_{\cdot} x)](-t) = [\Psi(S_t T_{\cdot} x)](-t)$$
$$= [\tilde{S}_{-t} S_t T_{\cdot} x](0) = T_0 x = x.$$

D'où la surjectivité de T_t.
Finalement, puisque T_t est bijectif, il s'injecte dans un $\mathcal{C}_0$-groupe $(\tilde{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, donné par les égalités suivantes:

$$\begin{array}{rclcl}\tilde{T}_t x & = & T_{-t}^{-1}x & = (\Psi T_{\bullet} x)(t) & \text{si} \quad t<0. \\ \tilde{T}_t x & = & T_t x & = (\Psi T_{\bullet} x)(t) & \text{si} \quad t\geq 0.\end{array}$$

On écrit finalement:

$$\tilde{T}_{\bullet} x = \Psi T_{\bullet} x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E}) \tag{3.15}$$

Ce qui montre que le $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique. □

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental de cette sous section:

Théorème 3.1.2.2. *Le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique ssi:*

i) $(T_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément borné,*

ii) $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$,

iii) $\overline{\mathtt{EigVect}(A)} = \mathbb{E}$.

Preuve.
Suffisance*: un raisonnement pareil à celui utilisé dans la démonstration du théorème (3.1.2) justifie la presque périodicité de $(T_t)_{t\geq 0}$.*
Nécessité*: on suppose que le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique, alors d'après le théorème (3.1.2.1), le $\mathcal{C}_0$-groupe $(\tilde{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est aussi presque périodique. Notons que le générateur infinitésimal de $\mathcal{C}_0$-groupe $(\tilde{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ coïncide avec A, donc i) et iii) découlent directement du théorème (3.1.2), tandis que le point ii) est une conséquence du théorème (2.2.4).* □

Théorème 3.1.3. *Si $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique et si le point $ir \in \sigma(A)$ est isolé [5] dans $\sigma(A)$, alors ir est un pôle simple de $\mathcal{R}_\lambda(A)$ [6], dont le résidu [7] est donné par la formule ci-dessous:*

$$P_r x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}\, T_s x\, ds, \quad x \in \mathbb{E}. \tag{3.16}$$

En particulier, $ir \in \sigma_p(A)$.

[5] ir est isolé, s'il existe $\delta > 0$, tel que sur le disque pointé $C(ir,\delta)\backslash\{ir\}$ la résolvante $\mathcal{R}_{\bullet}(A)$ est partout analytique.

[6] ir est un pôle simple de $\mathcal{R}_{\bullet}(A)$ si: $\quad \lim_{\lambda\to ir}(\lambda - ir)\mathcal{R}_\lambda(A) = b \neq 0.$

[7] Le résidu de $\mathcal{R}_{\bullet}(A)$ au point ir est donné par la formule intégrale suivante:

$$Residu(\mathcal{R}_{\bullet}(A); ir) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \mathcal{R}_z(A)\, dz.$$

Avant d'énoncer une preuve pour ce théorème, on appliquera tout d'abord le théorème (B.0.2) au générateur infinitésimal A de T_t qui est fermé et on décomposera son spectre comme suit:

$$\sigma(A) = \{ir\} \cup (\sigma(A) \setminus \{ir\}) \quad avec \quad r \in \mathbb{R} \quad fix\acute{e}$$

Des conséquences immédiates s'obtient, nous listons quelques-unes dans la proposition ci-après.

Proposition 3.1.1.

1. *Puisque $P_{\{ir\}}$ est un projecteur; l'espace $\mathbb{E}$ se décomposera en somme directe à savoir:* $\mathbb{E} = \mathcal{N}(P_{\{ir\}}) \oplus \mathfrak{R}(P_{\{ir\}})$.
2. *l'opérateur A est complètement réduit par $(\mathcal{N}(P_{\{ir\}}); \mathfrak{R}(P_{\{ir\}}))$; notons par $A_0 = A|_{\mathcal{N}(P_{\{ir\}})}$ et $A_1 = A|_{\mathfrak{R}(P_{\{ir\}})}$, alors $A = A_0 \oplus A_1$.*
3. *le $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est complètement réduit par $(\mathcal{N}(P_{\{ir\}}); \mathfrak{R}(P_{\{ir\}}))$; notons par $T_0(t) = T_t|_{\mathcal{N}(P_{\{ir\}})}$ et $T_1(t) = T_t|_{\mathfrak{R}(P_{\{ir\}})}$, alors $T_t = T_0(t) \oplus T_1(t)$.*
4. *$(T_1(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un $\mathcal{C}_0$-groupe presque périodique sur $\mathfrak{R}(P_{\{ir\}})$, A_1 son générateur infinitésimal et $\sigma(A_1) = \{ir\}$.*

Preuve. *Théorème 3.1.3*
Le $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_1(t))_{t\in\mathbb{R}}$ étant presque périodique, donc d'après le théorème(3.1.2), l'ensemble des vecteurs propres de A_1 génèrent un sous espace dense dans $\mathfrak{R}(P_{\{ir\}})$. Mais comme $\sigma(A_1) = \{ir\}$, implique:

> *Premièrement: $\mathcal{N}(ir - A_1) = \mathfrak{R}(P_{\{ir\}})$ (i.e: $A_1 = Id_{\mathfrak{R}(P_{\{ir\}})}$), donc ir est un pôle simple de $\mathcal{R}_\lambda(A_1)$.*
>
> *Deuxièmement: $ir \notin \sigma(A_0)$, donc $\mathcal{R}_\lambda(A_0)$ est analytique au point ir.*

De la décomposition $\mathcal{R}_\lambda(A) = \mathcal{R}_\lambda(A_0) \oplus \mathcal{R}_\lambda(A_1)$, on déduit que ir est un pôle simple de $\mathcal{R}_\lambda(A)$.
Pour montrer que le Résidu$(\mathcal{R}_{\cdot}(A); ir)$ est donné par la formule (3.16), *il suffit de justifier l'égalité entre les deux projecteurs $P_{\{ir\}} \equiv P_r$.*
Remarquons:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}(ir - A) & = & \mathcal{N}(ir - A_0) \oplus \mathcal{N}(ir - A_1) \\ & & \quad \|_{(1)} \qquad\qquad\quad \|_{(2)} \\ & & \quad \{0\} \qquad \oplus \quad \mathfrak{R}(P_{\{ir\}}) = \mathfrak{R}(P_{\{ir\}}). \end{array}$$

$(ir \notin \sigma(A_0) \Rightarrow {\scriptstyle (1)}$ et $A_1 = I_{\mathfrak{R}(P_{\{ir\}})}) \Rightarrow {\scriptstyle (2)})$.
Donc, d'un coté $\mathcal{N}(ir - A) = \mathfrak{R}(P_{\{ir\}})$ et d'un autre coté l'équation (3.6) *justifie*

l'égalité suivante $\mathcal{N}(ir - A) = \Re(P_r)$.
Finalement,

$$\Re(P_{\{ir\}}) = \Re(P_r) \tag{3.17}$$

P_r *et* $P_{\{ir\}}$ *sont des projecteurs, donc deux décompositions de* $\mathbb{E}$ *en somme directe sont possibles:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &:= \mathcal{N}(P_r) \oplus \Re(P_r). \\ \mathbb{E} &:= \mathcal{N}(P_{\{ir\}}) \oplus \Re(P_{\{ir\}}). \end{aligned}$$

On a:

$$x \in \mathcal{N}(P_r) \iff x \notin \Re(P_r) = \Re(P_{\{ir\}}) \iff x \in \mathcal{N}(P_{\{ir\}}).$$

On déduit que

$$\mathcal{N}(P_{\{ir\}}) = \mathcal{N}(P_r) \tag{3.18}$$

Grâce à (3.17) *et* (3.18), *on déduit que:* $\quad P_{\{ir\}} \equiv P_r$.
Nous utilisons la propriété 4) *d'un opérateur réduit citée au théorème (A.0.1), pour démontrer que* $ir \in \sigma_p(A)$, *en effet: puisque* A *est complètement réduit,* $(irI - A)$ *le sera aussi, et d'après* 4), *théorème (A.0.1):*

$$(irI - A)^{-1}\text{existe} \iff (irI_{\mathcal{N}(P)} - A_0)^{-1}\text{existe} \qquad \text{et} \qquad (irI_{\Re(P)} - A_1)^{-1}\text{existe}.$$

Mais, on sait que $irI_{\Re(P)} = A_1$, *d'où* $\quad ir \in \sigma_p(A)$. □

3.2 La presque périodicité uniforme des $\mathbf{C_0}$-semi-groupes ($\mathbf{C_0}$-groupes)

Définition 3.2.1. *Un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe* $(T_t)_{t\geq 0}$ *est dit uniformément presque périodique si l'application:*

$$\begin{aligned} T \,:\, \mathbb{R}^+ &\to \mathcal{L}(\mathbb{E}). \\ t &\to T_t. \end{aligned}$$

est presque périodique.

Remarque 3.2.1. *Une définition analogue peut être donnée pour les* $\mathcal{C}_0$*-groupes, il suffit juste de remplacer* $\mathbb{R}^+$ *par* $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2. *Le* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe* $(T_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément presque périodique ssi la famille* $\mathcal{F} := \{T_{\cdot}x,\ x \in \mathbb{E},\ \|x\| \leq 1\}$ *est équi-presque périodique au sens de la définition (1.1.5).*

Preuve. *Remarquons que:*

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \|T_{t+\xi} - T_t\| & < & \varepsilon. \\ & \Updownarrow \textit{ déf} & \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T_{t+\xi}x - T_t x\| & < & \varepsilon. \\ & \Updownarrow & \\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \|T_{t+\xi}x - T_t x\| & < & \varepsilon, \qquad \forall\, x \in \mathbb{E}, \|x\| \leq 1. \end{array}$$

d'où :

$$\mathcal{J}(T,\varepsilon) \;=\; \bigcap_{\|x\|_{\mathbb{E}}\leq 1} \mathcal{J}(T_{\cdot}x,\varepsilon). \tag{3.19}$$

Donc l'uniforme presque périodicité de T équivaut à l'équi-presque périodicité de la famille $\mathcal{F}$.

□

Dans la suite $(T_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe et $(\tilde{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le $\mathcal{C}_0$-groupe qui lui correspond.
Le théorème suivant est un résultat analogue à (3.1.2.1), plus exactement on a:

Théorème 3.2.1. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément presque périodique, alors $(\tilde{T}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est aussi uniformément presque périodique.*

Preuve. *Nous utilisons les relations* (3.11) *et* (3.15) *pour justifier l'inclusion ensembliste suivante:*

$$\mathcal{J}(T_{\cdot}x;\varepsilon) \,\cup\, -\mathcal{J}(T_{\cdot}x;\varepsilon) \subset \mathcal{J}(\tilde{T}_{\cdot}x;\varepsilon); \quad \forall\, x \in \mathbb{E}.$$

Ça implique:

$$\begin{array}{ccccc} \bigcap\limits_{\|x\|\leq 1} \mathcal{J}(T_{\cdot}x;\varepsilon) & \bigcup & \bigcap\limits_{\|x\|\leq 1} -\mathcal{J}(T_{\cdot}x;\varepsilon) & \subset & \bigcap\limits_{\|x\|\leq 1} \mathcal{J}(\tilde{T}_{\cdot}x;\varepsilon). \\ \Updownarrow \scriptstyle{3.19} & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{J}(T_{\cdot};\varepsilon) & \cup & -\mathcal{J}(T_{\cdot};\varepsilon) & \subset & \mathcal{J}(\tilde{T}_{\cdot};\varepsilon) \end{array}$$

D'où $\tilde{T}_{\cdot}$ est uniformément presque périodique. □

Grâce au théorème précédent, nous confondrons entre le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe et le $\mathcal{C}_0$-groupe qui lui correspond.

Les ensembles harmonieux: [8]

Définition. *Un sous ensemble* $\bigwedge \subset \mathbb{R}$ *est dit* harmonieux [9] *dans* $\mathbb{R}$*, si pour tout* $\varepsilon > 0$*, l'ensemble suivant:*

$$\bigcap_{\eta \in \bigwedge} \{\tau : |e^{i\eta\tau} - 1| \leq \varepsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$*.*

Exemple. *L'exemple le plus simple d'ensembles harmonieux dans* $\mathbb{R}$ *est les sous ensembles finis.*
Un autre exemple est fourni par les suites réelles croissantes, telles que:

$$\{r_{k+1}/r_k\} \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} +\infty.$$

Nous illustrons l'exemple précédent avec la suite $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, définie par:*

$$r_{k+1} = e^k r_k \qquad \text{et} \qquad r_0 = 1.$$

Propriété 1. *Soit* $\bigwedge \subset \mathbb{R}$ *un ensemble harmonieux, alors:*

$$\exists\, \delta > 0, \quad \text{tel que} \quad |a - b| > \delta, \qquad \forall\, a, b \in \bigwedge.$$

Donc $\bigwedge$ *est au plus dénombrable.*

Remarque. *Rappelons qu'un point* $x \in \wedge$ *est dit point d'accumulation de l'ensemble* $\wedge$ *si pour tout* $V \in \mathcal{V}_x$*(l'ensemble des voisinages de* x*),* $(V \setminus \{x\}) \cap \wedge \neq \emptyset$*.*
Donc, d'après la propriété précédente, il est évident qu'un ensemble contenant un point d'accumulation ne peut pas être harmonieux.

Notation: $\mathcal{AP}(\bigwedge; \mathbb{E}) = \{f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E})| \quad \varrho_{sp}(f) \subset \bigwedge\}$.
Avant d'énoncer le résultat fondamental de cette section, le lemme préliminaire suivant et le théorème qui le suit, donnent un aperçu sur l'intérêt de travailler avec des ensembles harmonieux.

Lemme 3.2.1. *Si* $\bigwedge$ *est un ensemble harmonieux, alors tout sous ensemble borné de* $\mathcal{AP}(\bigwedge; \mathbb{C})$ *est équi-presque périodique.*

Preuve. *cf [16, theorem 2, page 107] .* ■

[8] Pour une lecture plus détaillée sur ces ensembles nous recommandons le livre [16].
[9] Cette définition est équivalente à l'équi-presque périodicité de la famille $\{e^{i\,r\,\cdot}, r \in \bigwedge\}$; au sens de la définition (1.1.5).

Théorème 3.2.2. *Si $\bigwedge$ est un ensemble harmonieux, alors tout sous ensemble borné de $\mathcal{AP}(\bigwedge;\mathbb{E})$ est équi-presque périodique.*

Preuve. *Soient $K \subset \mathcal{AP}(\bigwedge;\mathbb{E})$ un sous ensemble borné et $B_{\mathbb{E}^\star}$ la boule unité du dual. Il est facile de vérifier que l'ensemble $\mathcal{F} := \{\varphi \circ f;\, \varphi \in B_{\mathbb{E}^\star};\, f \in K\} \subset \mathcal{AP}(\bigwedge;\mathbb{C})$ est un ensemble borné.*
Le lemme précèdent assure l'équi-presque périodicité de la famille $\mathcal{F}$.
Du coût, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $D \subset \mathbb{R}$ relativement dense tel que $\tau \in D$ et

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi \circ f(t+\tau) - \varphi \circ f(t)\| \leq \varepsilon; \quad \forall\, \varphi \circ f \in \mathcal{F},$$

implique

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| = \sup_{\varphi\in B_{\mathbb{E}^\star}} \|\varphi \circ f(t+\tau) - \varphi \circ f(t)\| \leq \varepsilon; \quad \forall\, f \in K.$$

D'où K est équi-presque périodique.

$\square$

Théorème 3.2.3. *Le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément presque périodique ssi:*

i) $(T_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément borné,*

ii) $\bigwedge = \dfrac{1}{i}\sigma(A)$ *est un ensemble harmonieux dans $\mathbb{R}$,*

iii) l'ensemble des vecteurs propres de A, génèrent un sous espace dense dans $\mathbb{E}$.

Preuve.
<u>Suffisance</u>*: supposons que les points $i), ii)$ et $iii)$ sont vérifiés, d'après le théorème (3.1.2), (T_t) est presque périodique, il nous reste à vérifier l'équi-presque périodicité de la famille $\mathcal{F} = \{T_{\bullet}x;\ \|x\| \leq 1\}$.*
Pour argumenter l'équi-presque périodicité de la famille $\mathcal{F}$, on procède par deux étapes:

* *Vérifions que pour tout $T_{\bullet}x \in \mathcal{F}$, $\varrho_{sp}(T_{\bullet}x) \subset \bigwedge$:*
Soit $r \in \varrho_{sp}(T_{\bullet}x)$, alors:

$$M(r, T_{\bullet}x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}T_s x ds \neq 0.$$

Donc, conformément à la formule (3.8), $r \in \dfrac{1}{i}\sigma_p(A) \subset \dfrac{1}{i}\sigma(A) = \bigwedge$.
D'où $\mathcal{F} \subset \mathcal{AP}(\bigwedge;\mathbb{E})$.

* *Vérifions que $\mathcal{F}$ est bornée:*
C'est une conséquence immédiate de la presque périodicité de $(T_t)_{t\geq 0}$.

Clairement, le théorème(3.2.2) affirme l'équi-presque périodicité de $\mathcal{F}$.
Nécessité*: on suppose que $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément presque périodique.*
Soit alors τ une ε-période de T, on a:

$$\|T_\tau - I\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_\tau x - x\| \leq \varepsilon.$$

Cette relation nous offre une information sur le spectre de T_τ; $\sigma(T_\tau) \subset D(1;\varepsilon)$.
Nous réunissons l'inclusion précédente avec le théorème d'inclusion spectrale pour en déduire:

$$e^{i\tau \wedge} = e^{i\tau \frac{1}{i}\sigma(A)} \subset \sigma(T_\tau) \subset D(1;\varepsilon).$$

Par conséquent,

$$\|e^{i\tau r} - 1\| \leq 1; \quad r \in \bigwedge.$$

Finalement, $\bigwedge$ est harmonieux.
Les points $i)$ et $iii)$ sont vérifiés par le théorème (3.1.2).

$\square$

Corollaire 3.2.1. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément presque périodique, alors $\sigma(A)$ est constitué des poles simples de $\mathcal{R}_\lambda(A)$. En particulier, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.*

Preuve. *Puisque $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément presque périodique, l'ensemble $\dfrac{1}{i}\sigma(A)$ est harmonieux dans $\mathbb{R}$, donc d'après la propriété (1), les points de $\sigma(A)$ seront isolés.*
Le reste de la preuve découle du théorème(3.1.3).

$\square$

Le théorème (3.2.3) donne des conditions nécessaires et suffisantes sur la presque périodicité d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. Une information de plus sur la distribution des éléments du $\sigma(A)$ (équi-distant)[10] motive le théorème suivant.

Théorème 3.2.4. *[10] Un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est α-périodique ssi:*

i) $\dfrac{\alpha}{2\pi i}\sigma(A) \subset \mathbb{Z}$.

ii) l'ensemble des vecteurs propres de A, génèrent un sous espace dense dans $\mathbb{E}$.

[10] $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \sigma(A)$ tels que $|a_{j+1} - a_j| = cte$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

3.3 Étude comparative entre les différents types de presque périodicité

3.3.1 Comparaison entre la presque périodicité et l'uniforme presque périodicité

Proposition 3.3.1. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe uniformément presque périodique, alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe presque périodique.*

Preuve. *Soit $\xi \in \mathcal{J}(T_{\boldsymbol{.}}; \varepsilon)$, alors on a:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|T_{t+\xi}x - T_t x\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|T_{t+\xi} - T_t\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

D'où:

$$\xi \in \mathcal{J}(T_{\boldsymbol{.}}x; \varepsilon\|x\|).$$

Donc:

$$\mathcal{J}(T_{\boldsymbol{.}}; \varepsilon) \subset \mathcal{J}(T_{\boldsymbol{.}}x; \varepsilon\|x\|)$$

Ce qui montre que $T_{\boldsymbol{.}}x$ est presque périodique. Finalement le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique. □

Pour analyser la véracité de la réciproque, nous avons construit le contre exemple suivant:

Exemple et Contre exemple 1.
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de translations défini comme suit:

$$\begin{array}{rccc} T_t : & \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E}) & \rightarrow & \mathcal{AP}(\mathbb{R}; \mathbb{E}) \\ & f & \rightarrow & T_t f :\overset{déf}{=} f(t + \boldsymbol{.}) \end{array}$$

⋆ *On montre que le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique*

Soit ξ une ε-période de f, alors on a:

$$\begin{aligned} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|T_{t+\xi}f - T_t f\| &= \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left[\sup_{s\in\mathbb{R}} \|T_{t+\xi}f(s) - T_t f(s)\| \right] \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left[\sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s+t+\xi) - f(s+t)\| \right] \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left[\sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s+\xi) - f(s)\| \right] \\ &= \sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s+\xi) - f(s)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{J}(f,\varepsilon) \subset \mathcal{J}(T_{.}f,\varepsilon).$$

C'est à dire, pour tout $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, $\quad T_{.}f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$. Finalement, le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique.
Dans la suite, on montre que $(T_t)_{t\geq 0}$ n'est pas uniformément presque périodique, c'est à dire que l'application ci-dessous n'est pas presque périodique:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})) \\ & t & \rightarrow & T_t \end{array}$$

L'idée est de montrer que la condition $ii)$ du théorème (3.2.3) n'est pas satisfaite. Pour cela, soit A le générateur infinitésimal de $(T_t)_{t\geq 0}$ défini sur le domaine

$$D(A) = \{f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{E});\ \text{telles que } f' \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})\}.$$

Par la formule suivante:

$$\forall\, f \in D(A); \quad A\,f\ =\ \frac{d}{dt}\,f.$$

D'après le contre exemple (2), son spectre est donné par

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \quad Re(\lambda) \leq 0\}.$$

Le spectre de A n'est pas dénombrable, cela implique qu'il ne peut pas être harmonieux (voir propriété (1)), donc d'après le théorème (3.2.3), $(T_t)_{t\geq 0}$ ne peut pas être uniformément presque périodique.

l'exemple précédent montre qu'on général la presque périodicité n'implique pas l'uniforme presque périodicité.

Remarque 3.3.1. *Selon [10, Theorem 2.1], l'inverse ait lieu si le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe est périodique.*

3.3.2 Comparaison entre la presque périodicité et la presque périodicité faible

Définition 3.3.1. *Un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est dit faiblement presque périodique si pour tout $x \in \mathbb{E}$ et pour toute $\varphi \in \mathbb{E}^\star$, l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \varphi \circ T_{.}\,x: & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{C}. \\ & t & \rightarrow & \varphi \circ T_t x. \end{array}$$

est presque périodique.

Remarque 3.3.2. *Une définition analogue peut être donnée pour les $\mathcal{C}_0$-groupes, il suffit juste de remplacer $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{R}$.*

En général, la presque périodicité faible d'un $\mathcal{C}_0$-groupe n'est pas équivalente à sa presque périodicité. Cependant cette équivalence a lieu si l'espace est faiblement complet.

Théorème 3.3.1. *Si $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un $\mathcal{C}_0$-groupe défini sur un espace de Banach $\mathbb{E}$ faiblement complet, alors $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique si et seulement si $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est faiblement presque périodique.*

Preuve.
Suffisance*: évident.*
Nécessité*: supposons que $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est faiblement presque périodique.*
Pour montrer que $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique, il suffit d'après le théorème (3.1.2) de montrer que $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est uniformément borné et $\overline{\texttt{EigVect}(A)} = \mathbb{E}$.

1. *$(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est uniformément borné:*
   Soient $x \in \mathbb{E}$, $\varphi \in \mathbb{E}^\star$ et $B = \{T_t x\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathbb{E}$.
   Par composition avec φ, on obtient:
   $$\varphi(B) = \{\varphi \circ T_t x\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}.$$
   Par hypothèse $\varphi \circ T_{\boldsymbol{.}} x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, donc:
   $$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi \circ T_t x\| < +\infty$$
   On déduit que l'ensemble B est borné dans $\mathbb{E}$, i.e:
   $$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t x\| < +\infty$$
   On applique le théorème de Banach Steinhaus pour en déduire l'estimation uniforme suivante:
   $$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\| < +\infty$$
   Ce qui montre que le $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est uniformément borné.

2. $\overline{\texttt{EigVect}(A)} = \mathbb{E}$*:*
   Les deux égalités ci-après sont justifiées a l'aide de L'uniforme bornitude et la faible presque périodicité du $\mathcal{C}_0$-groupe:
   $$\lim_{t\to\infty}(ir - A)\frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs} T_s x ds \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}(x - e^{-irt}T_t x) = 0_{\mathbb{E}}.$$

$$\begin{aligned}\omega.\lim_{t\to\infty}(ir-A)\frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}T_sxds &= 0_{\mathbb{E}}. &(3.20)\\ \varphi\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}T_sxds\Big) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}\varphi(T_sx)ds &(3.21)\\ &= M(r,x,\varphi).\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}$ *est faiblement complet, la formule* (3.21) *assure l'existence d'un élément* $\tilde{M}(r,x)\in\mathbb{E}$ *tel que:*

$$\omega.\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-irs}T_sxds=\tilde{M}(r,x)\quad et\quad \varphi(\tilde{M}(r,x))=M(r,x,\varphi),\ \forall\,\varphi\in\mathbb{E}^{\star}.$$

de la formule (3.20) *et* (3.21)*, on déduit que:*

$$(\tilde{M}(r,x);0_{\mathbb{E}})\ \in\ \overline{\mathcal{G}(ir-A)}^{\,.\omega}$$ [11]

Remarquons que $\mathcal{G}(ir-A)$ *est un ensemble convexe fermé (sa fermeture découle de la fermeture de l'opérateur* $(ir-A)$ *) dans* $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$*, donc par un résultat d'analyse fonctionnelle* [12]*, on déduit que:*

$$(\tilde{M}(r,x);0_{\mathbb{E}})\ \in\ \overline{\mathcal{G}(ir-A)}^{\,.\omega}\ =\ \overline{\mathcal{G}(ir-A)}^{\,.\|.\|}=\mathcal{G}(ir-A).$$ [13]

Donc: $(ir-A)\,\tilde{M}(r,x)=0_{\mathbb{E}}\Rightarrow\tilde{M}(r,x)\in\mathcal{N}(ir-A)$.
A ce stade, on applique le raisonnement utilisé dans la preuve du théorème (3.1.2) à l'élément $\tilde{M}(r,x)$ *pour en déduire que* $\overline{\texttt{EigVect}(A)}=\mathbb{E}$.

□

Remarque 3.3.3. *Sur des espaces plus généraux, l'équivalence s'obtient si le* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe est périodique (voir [10, Theorem 2.1]).*

3.3.3 Comparaison entre la presque périodicité et l'asymptotique presque périodicité

Proposition 3.3.2. *Si* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est un* $\mathcal{C}_0$*-groupe presque périodique, alors il est aussi asymptotiquement presque périodique.*

[11] $\overline{\mathcal{G}(ir-A)}^{\,.\omega}$ est la fermeture faible du $\mathcal{G}(ir-A)$.
[12] [1, Theorem 3.7, page 60].
[13] $\overline{\mathcal{G}(ir-A)}^{\,.\|.\|}$ est la fermeture en norme du $\mathcal{G}(ir-A)$.

Preuve. *Le résultat découle de l'inégalité suivante:*

$$\sup_{t\geq k}\|T_{t+\xi}x - T_t x\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\|T_{t+\xi}x - T_t x\|, \text{ où } k \in \mathbb{R}^+.$$

La réciproque est l'objectif de cette proposition.

Proposition 3.3.3. *[20, proposition 4, page 11] Si $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un $\mathcal{C}_0$-groupe, uniformément borné tel que sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est asymptotiquement presque périodique, alors $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique.*

Preuve. *On suppose que $T_{|\mathbb{R}^+}$ est asymptotiquement presque périodique, donc par définition il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que:*

$$\sup_{t\geq k_\varepsilon}\|T_{t+\xi}x - T_t x\| \leq \varepsilon,$$

où $\xi \in \mathcal{J}(T_{|\mathbb{R}^+}x;\varepsilon)$.
Soit $s \in \mathbb{R}$, alors $s = t + h$, avec $t \geq k_\varepsilon$, nous obtiendrons:

$$\begin{aligned}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|T_{s+\xi}x - T_s x\| &= \sup_{h\in\mathbb{R}}\|T_{t+h+\xi}x - T_{t+h}x\| \\ &\leq \sup_{h\in\mathbb{R}}\|T_h\| \sup_{t\geq k_\varepsilon}\|T_{t+\xi}x - T_t x\| \leq M\varepsilon.\end{aligned}$$

D'où le $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique. □

3.3.4 Comparaison entre la presque périodicité et la presque périodicité uniforme sur les parties compacts

Dans cette partie, nous allons associer à chaque $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une fonction g_T à paramètre définie par:

$$\begin{aligned} g_T : \mathbb{R}\times\mathbb{E} &\to \mathbb{E} \\ (t,x) &\to g_T(t,x) := T_t x \end{aligned} \tag{3.22}$$

Théorème 3.3.2. *Le $\mathcal{C}_0$-groupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est presque périodique ssi la fonction g_T associée est presque périodique uniformément sur les parties compactes de $\mathbb{E}$.*

Preuve.
Suffisance:Elle découle du fait que $\{x\}$ est compact dans $\mathbb{E}$.
Nécessité: On suppose que le $\mathcal{C}_0$-groupe est presque périodique, alors il est uniformément borné, en effet:

On sait que pour tout $x \in \mathbb{E}$, $T_{\bullet}x \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$, *donc* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t x\| < +\infty$, *par application du théorème de Banach Steinhaus, il existe une constante* $M \geq 1$ *telle que:*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t\| = M < +\infty$$

Soit $\mathcal{K}$ *une partie compacte de* $\mathbb{E}$.
On sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\mathcal{F} = \{x_1; \cdots; x_n\} \subset \mathbb{E}$ *telle que*

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\Big(x_j; \frac{\varepsilon}{4M}\Big),\ n \in \mathbb{N}.$$

Soit la correspondance suivante:

$$\begin{array}{rcl} i : \mathcal{K} & \to & \{1; \cdots; n\}. \\ x & \to & i_x \end{array}$$

Où i_x *tel que* $x \in B\Big(x_{i_x}; \dfrac{\varepsilon}{4M}\Big)$.
Par la presque périodicité du $\mathcal{C}_0$*-groupe, on a:*

$$\|T_{t+\tau}x_j - T_t x_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2n},\ \text{où}: \quad \tau \in \mathcal{J}(T_{\bullet}x_j; \varepsilon)\ \forall j \in \{1, \cdot, n\}.$$

Par cette construction on aura:

$$\begin{array}{rcl} \|g_T(t+\tau, x) - g_T(t,x)\| & = & \|T_{t+\tau}x - T_t x\| \\ & \leq & \|T_t x - T_t x_{i_x}\| + \|T_{t+\tau}x - T_{t+\tau}x_{i_x}\| + \|T_{t+\tau}x_{i_x} - T_t x_{i_x}\|. \\ & \leq & (\|T_t\| + \|T_{t+\tau}\|)\|x - x_{i_x}\| + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|T_{t+\tau}x_i - T_t x_i\|. \\ & \leq & 2M\|x - x_{i_x}\| + n\dfrac{\varepsilon}{2n}. \\ & \leq & \varepsilon. \end{array}$$

D'où:

$$\sup_{x\in\mathcal{K}} \|g_T(t+\tau, x) - g_T(t,x)\| \leq \varepsilon.$$

Donc:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathcal{K}} \|g_T(t+\tau, x) - g_T(t,x)\| \leq \varepsilon.$$

Finalement, la fonction g_T *est presque périodique.*

Corollaire 3.1. *Si* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est un* $\mathcal{C}_0$*-groupe presque périodique et* f *une fonction presque périodique, alors la composée* $T \circ f(t) := T_t f(t)$ *est presque périodique.*

Preuve. *Il découle des théorèmes (3.3.2) et (1.2.1).* ■

Chapter 4

Sur la presque périodicité des solutions d'un problème de Cauchy abstrait (ACP)

4.1 Introduction

On pose le problème de Cauchy non homogène suivant:

$$\begin{cases} u'(t) &= A\,u(t) + f(t), \quad t \geq 0. \\ \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Remarque 4.1. *Pour $t = 0$, au niveau de l'équation (4.1), en remplace la dérivée en t par la dérivée a droite.*

Définition 4.1. *[22, page 6] On dit que le problème (4.1) est bien posé sur $\mathbb{R}^+$ si pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une unique solution classique pour ce problème et si pour tout $u_0^n \subset D(A)$ telle que $u_0^n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, la suite des solutions vérifiée aussi:*

$$u_n(t) \xrightarrow{n \to +\infty} 0, \;\; \forall\, t \;\in \mathbb{R}^+$$

Théorème 4.1. *On suppose que A est le générateur infinitésimale d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ et que f est continuement dérivable [1].*
Alors le problème (4.1) admet une unique solution classique donnée sous la forme suivante:

$$u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds, \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

[1] Cette condition assure l'existence de la solution.

Preuve. *Pour l'énoncé et la preuve de ce théorème on se refère à [21, Theorem 2.2.3, page 30]*

4.2 La presque périodicité des solutions

Le long de cette partie, on pose le problème suivant et on suppose qu'il est bien posé (voir la définition (4.1)):

$$\begin{cases} u'(t) &= A\,u(t) + f(t), \quad t \geq 0. \\ u(0) &= 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

où $f \in \mathcal{AP}(\mathbb{R};\mathbb{E})$.
Une question naturelle est de savoir sous quelles conditions la solution obtenue est presque périodique ?
Par analogie à la formule (4.2), la solution u du problème (4.3), sera donnée par l'écriture intégrale suivante:

$$u(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s)ds. \tag{4.4}$$

Regardons à présent la presque périodicité de u a travers un exemple simple:

Exemple 4.1. *Soit f une fonction constante telle que*

$$f(s) = Ax_0,\ \forall\ s\ \in \mathbb{R} \quad \text{où} \quad x_0 \in D(A).$$

On aura alors:

$$u(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s)ds = \int_0^t T_s f(t-s)ds = \int_0^t T_s A x_0 = T_t x_0 - x_0.$$

Qui n'est en générale pas presque périodique. En effet, dans le cas où le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ n'est pas <u>uniformément borné</u>*, la fonction $T_{\bullet} x_0$ et d'après le point i) du théorème(3.1.2.2), n'est pas presque périodique. D'où:*

$$u(\bullet) = T_{\bullet} x_0 - x_0 \notin \mathcal{AP}(\mathbb{R}^+;\mathbb{E})$$

Remarque 4.2. *En général la solution u n'est pas presque périodique.*

Nous donnerons dans la suite, a travers des résultats partiels, des conditions suffisantes (non nécessaires) garantissant la presque périodicité de la solution u.

Théorème 4.2. *[11, theorem 4.3, page 11] La fonction u est presque périodique si les conditions suivantes sont assurées:*

1. *u est bornée et uniformément continue ($u \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R};\mathbb{E})$).*
2. *$\sigma(A) \cap iR$ est dénombrable.*
3. *l'une des trois conditions suivantes:*
   (a) *$c_0 \not\subset \mathbb{E}$.*
   (b) *u est totalement ergodique, c-à-d:*
   $$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\eta s}u(s+\boldsymbol{.})ds \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R};\mathbb{E}), \quad \forall\eta \in \mathbb{R}.$$
   (c) *$(u)(\mathbb{R}^+)$ est relativement faiblement compact.*

Remarque 4.3. *La condition 2) du théorème (4.2) est automatiquement vérifiée, dès que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-groupe et $\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)$ est un opérateur compact [2].*

Nous énonçons alors la proposition suivante:

Proposition 4.1. *u est presque périodique si:*

1. *u est bornée et uniformément continue ($u \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R};\mathbb{E})$).*
2. *A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-groupe et $\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)$ est un opérateur compact.*
3. *l'une des trois conditions suivantes:*
   (a) *$c_0 \not\subset \mathbb{E}$.*
   (b) *u est totalement ergodique, c-à-d:*
   $$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\eta s}u(s+\boldsymbol{.})ds \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R};\mathbb{E}), \quad \forall\eta \in \mathbb{R}.$$
   (c) *$(u)(\mathbb{R}^+)$ est relativement faiblement compact.*

[2]Un opérateur est dit compact si l'image d'un ensemble borné est relativement compact.

Preuve. *En effet, on sait que le spectre ponctuel d'un opérateur compact est au plus dénombrable [12, Theorem 5.5.G, page 281], donc:*

$$\sigma_p(\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)) \quad \text{est dénombrable} \tag{4.5}$$

Maintenant, a ce stade, nous appliquons un théorème qui fait le lien entre le spectre d'un opérateur borné ($\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)$) et le spectre d'un opérateur non borné (A), nommé Spectral Mapping Theorem for the Resolvent*[9, page 161], dont la relation mathématique est la suivante:*

$$\forall \lambda_0 \in \rho(A), \quad \sigma_p(\mathcal{R}_{\lambda_0}(A)) \setminus \{0\} = \frac{1}{\lambda_0 - \sigma_p(A)}, \tag{4.6}$$

où:

$$\frac{1}{\lambda_0 - \sigma_p(A)} := \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - \beta} \quad \textit{avec} \quad \beta \in \sigma_p(A) \right\}.$$

La dénombrabilité de $\sigma_p(A)$ découle des relations (4.5) et (4.6).
Mais ([9, corollary 1.15, page 162]) affirme que:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \tag{4.7}$$

D'où le spectre de A est dénombrable.
Pour achever la preuve, rappelons qu'au cours de la démonstration du théorème (3.1.2) on a vus que $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$. Finalement la condition 2) *est satisfaite.*

De l'étude précédente on déduit le théorème suivant.

Théorème 4.3. *La fonction u est presque périodique si:*

1. *u est bornée et uniformément continue.*
2. *$(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément presque périodique.*
3. *$c_0 \not\subset \mathbb{E}$.*

Preuve. *On suppose que la condition* 2) *est satisfaite, i.e que (T_t) est uniformément presque périodique, cela implique, d'après la condition* 2) *du théorème(3.2.3), la dénombrabilité du $\sigma(A)$. Le reste de la preuve découle du théorème précédent.* ■

Théorème 4.4. *[7, exemple 2, page 64] La solution u est presque périodique si:*

1. *$\exists\, t_0 > 0$, tel que $T_{t_0}^{-1}$ existe et est borné.*
2. *$(T_t)_{t\geq 0}$ est presque périodique.*
3. *$\mathfrak{R}(u)$ est relativement compact dans $\mathbb{E}$.*

Dans le cas où $c_0 \not\subset \mathbb{E}$*, on peut remplacer la condition* 3)*, par:*

3)′ $\mathfrak{R}(u)$ *est borné dans* $\mathbb{E}$.

Preuve. *Avec quelques simplifications, on reprend les idées de la démonstration de [7, Zaidman]. Mais avant ça rappelons tout d'abord que:*

$$u(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s) ds = T_t \int_0^t T_{-s} f(s) ds \tag{4.8}$$

On démontre la presque périodicité de u en 3 étapes:

Étape 1: La fonction $s \to T_{-s} f(s)$ *est presque périodique (voir corollaire (3.1)).*

Étape 2: On montre la presque périodicité de $\int_0^{\cdot} T_{-s} f(s) ds$.
Comme cette intégrale représente la primitive d'une fonction presque périodique, il suffit d'après le théorème (1.4.2), d'établir la relative compacité de l'ensemble $\mathfrak{R}(\int_0^{\cdot} T_{-s} f(s) ds)$*. On a:*

$$u(t) = T_t \int_0^t T_{-s} f(s) ds \Rightarrow T_{-t}[u(t)] = \int_0^t T_{-s} f(s) ds.$$

Donc, $\mathfrak{R}(\int_0^t T_{-s} f(s) ds) = \mathfrak{R}(T_{-t}[u(t)])$.
Dans la suite, nous exploiterons l'hypothèse 3)*, pour démontrer que l'ensemble* $\mathfrak{R}(T_{-t}[u(t)]$ *est relativement compact dans* $\mathbb{E}$.
Soit $(t''_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}$*, par l'hypothèse* 3)*, on sait qu'il existe une sous suite* $(t'_n) \subset (t''_n)$ *telle que* $u(t_n) \xrightarrow{\|\|\|n\to+\infty} y \in \mathbb{E}$.
Ensuite de (t'_n) *on tire une sous suite* (t_n) *telle que la suite* $(T_{-t_n} y)$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{E}$.
Nous vérifions que la suite $(T_{-t_n}[u(t_n)])$ *est aussi de Cauchy, en effet pour tout* $n,\ m \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|T_{-t_n}[u(t_n)] - T_{-t_m}[u(t_m)]\| &\leq \|T_{-t_n}\| \, \|[u(t_n)] - y\| \\
&+ \|T_{-t_n} y - T_{-t_m} y\| \\
&+ \|T_{-t_m}\| \, \|y - [u(t_m)]\| \\
&\leq 2M\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous synthétisons ce qui précède, on disent qu'il est possible d'extraire de (t''_n) *une sous suite* (t_n) *telle que la suite* $T_{-t_n}[u(t_n)]$ *est convergente. Finalement l'ensemble* $\mathfrak{R}(T_{-t}[u(t)]) = \mathfrak{R}(\int_0^t T_{-s} f(s) ds)$ *est relativement compact dans* $\mathbb{E}$.
D'où $\int_0^{\cdot} T_{-s}\ f(s)\ ds$*, est presque périodique.*

Étape 3: La presque périodicité de la fonction u
Selon l'écriture (4.8), u est la composée d'une fonction presque périodique $T_t x$ *avec une autre fonction presque périodique qui est* $\int_0^t T_{-s} f(s) ds$*, alors un raisonnement pareil a celui utilisé a l'étape 1, permet de conclure sur la presque périodicité de u.*

Dans le cas où $c_0 \not\subset \mathbb{E}$*, et suite au théorème (1.4.3), il suffit de prouver que l'ensemble* $\Re(T_{-t}[u(t)])$ *est borné dans* $\mathbb{E}$*, mais ceci résulte directement de l'uniforme bornitude de la famille* $(T_t)_{t \geq 0}$ *et de la condition* $3)'$. $\square$

Appendix A

Analyse fonctionnelle

Dans cette partie, nous allons énoncer des résultats (sans démonstrations) de topologie et d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles.

Théorème A.1. *Pour qu'un ensemble M, inclus dans un espace métrique* <u>*complet*</u> $\mathbb{E}$*, soit relativement compact, il faut et il suffit que cet ensemble soit totalement borné.*

Théorème A.2. ***Banach-Steinhaus***[1, Theorem 2.2, page 32]:
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach.
Soit $(T_t)_{t\in\mathcal{I}}$ une famille d'opérateurs linéaires et continus de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
On suppose que :

$$\sup_{t\in\mathcal{I}} \|T_t x\| < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{E}.$$

Alors :

$$\sup_{t\in\mathcal{I}} \|T_t\| < \infty.$$

Théorème A.3. ***du Graphe fermé***[1, Theorem 2.9, page 37]:
Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. On suppose que $\mathcal{G}(T)$, muni de la norme suivante:

$$\|(x, Tx)\|_{\mathcal{G}} = \|x\|_{\mathbb{E}} + \|Tx\|_{\mathbb{F}},$$

est fermé dans $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$. Alors T est continu.

Définition A.1. ***Opérateur fermé:***
Un opérateur $A : D(A) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, est dit fermé ssi son graphe $(\mathcal{G}(A), \|.\|_{\mathcal{G}})$ est fermé dans $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

Définition A.2. ***Projecteur***[12]
Un opérateur linéaire borné $P : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ est appelé un projecteur si il est idempotent c'est à dire : $P^2 \equiv P$.

Proposition A.1. *[12, page 241] Si $P : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ est un projecteur, alors l'espace $\mathbb{E}$ peut être décomposé en somme directe, comme suit : $\mathbb{E} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.*

Espaces faiblement complets

Définition A.0.1. *Soient $\mathbb{E}$ un espace normé sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite une suite de Cauchy faible, si $\{\phi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$, pour tout $\phi \in \mathbb{E}^\star$.*

Définition A.0.2. *Un espace $\mathbb{E}$ est dit faiblement complet si toute suite de Cauchy faible, admet une limite faible.*

Exemples.

◇ *les espaces suivants sont faiblement complets:*
les espaces réflexifs, $L^1([a,b])$, ℓ^1, $\cdots$.

◇ *les espaces suivants ne le sont pas:*
$\mathcal{C}([a,b])$, ℓ^∞, $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, c, c_0, $\cdots$. [1]

Nous renvoyons à l'ouvrage [2], pour plus de détails sur cette notion.

Opérateurs réduits

Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach, M_1, M_2 deux sous espaces de $\mathbb{E}$ et T un opérateur linéaire défini sur $D \subset \mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Définition A.0.3. *[12, page 268] L'opérateur T est dit complètement réduit par les sous espaces M_1 et M_2 si:*

◇ *M_1 et M_2 sont linéairement indépendants* [2].

◇ *M_1 et M_2 sont invariants par T c'est à dire : $T(D \cap M_k) \subset M_k, \quad k = 1, 2.$*

◇ *$\mathbb{E} = M_1 \oplus M_2$.*

[1] Dans [3, page 120], Yosida a illustrer la non complétude faible de $\mathcal{C}([0,1])$ par un contre exemple.

[2] Soient $M_1; \cdots; M_n$ des sous espaces de $\mathbb{E}$, alors $M_1; \cdots; M_n$ sont linéairement indépendants si:

$$y \in M_{i_0} \quad \textit{tel que} \quad y = \sum_{k=1;k\neq i_0}^{n} \alpha_k x_k \quad \textit{où} \quad x_k \in M_k \Rightarrow y = 0.$$

◊ $\Pi_k(D) \subset D, \quad k = 1, 2.$ *où* Π_k*, est le projecteur canonique défini de* $\mathbb{E}$ *à valeurs dans* M_k*.*

Théorème A.0.1. *[12, Theorem 5.4.A, page 270]*
Soit T *un opérateur linéaire complètement réduit par* $(M_1; M_2)$*, notons par* $T_k = T|_{M_k}$*, la restriction de l'opérateur* T *au sous espace* M_k *pour* $k = 1, 2$*, alors:*

1. $D(T) = D(T_1) \oplus D(T_2)$.
2. $\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}(T_1) \oplus \mathfrak{R}(T_2)$.
3. $\mathfrak{R}(T) = E$ *si et seulement si* $\mathfrak{R}(T_k) = M_k$ *pour tout* $k = 1, 2$.
4. T^{-1} *existe si et seulement si* T_k^{-1} *existe pour tout* $k = 1, 2$.

Intégrale de Bochner

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach et $f : I \to \mathbb{E}$ une fonction intégrable au sens de Bochner

Proposition A.0.1. *[18, proposition 1.1.6, page 11] Soit* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$*. Alors,* $T \circ f$ *est aussi intégrable au sens de Bochner et*

$$T\left(\int_I f(t)\, dt\right) = \int_I T \circ f(t)\, dt.$$

Proposition A.0.2. *[18, proposition 1.1.7, page 11] Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* $\mathbb{E}$*, supposons que* $f(I) \in D(A)$ *et* $A \circ f : I \to \mathbb{E}$ *une fonction Bochner intégrable. Alors:*

$$A\left(\int_I f(t)\, dt\right) = \int_I A \circ f(t)\, dt.$$

Pour plus de détails sur l'intégrale de Bochner, voir [18].

Appendix B

Un Aperçu sur la théorie spectrale des opérateurs fermés

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach complexe et $T : D(T) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ un opérateur linéaire fermé [1] et non borné.

Définition B.0.4. *On appelle ensemble résolvant de T, l'ensemble*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T : D(T) \to \mathbb{E} \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de T et sera noté $\sigma(T)$. On notera que si $\lambda \in \rho(T)$, l'inverse

$$\mathcal{R}_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}$$

est défini sur tout l'espace $\mathbb{E}$ et est fermé [2]. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e:

$$\mathcal{R}_\lambda(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}),$$

Cet opérateur est appelé la résolvante de T au point λ.
Le spectre de T, contient les sous ensembles suivants:

1. *Le spectre ponctuel, noté $\sigma_p(T)$, défini par:*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T : D(T) \to \mathbb{E} \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(T)$ est dit valeur propre de T, il lui correspond un $0 \neq x \in D(T)$ tel que $(\lambda I - T)x = 0$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ.

[1] C'est pas une restriction de la généralité car, d'une part dans le chapitre 3 nous avons travaillé uniquement avec le spectre du générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe (groupe), qui est fermé (voir la proposition (2.2.3)) et d'autre part la remarque (B.0.1) justifie notre approche.

[2] L'opérateur $(\lambda I - T)$ est fermé (puisque T est fermé), et la fermeture de $(\lambda I - T)^{-1}$ découle de la proposition (B.0.3).

2. *Le spectre approché, noté $\sigma_{ap}(T)$, défini par:*

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T : D(T) \to \mathbb{E} \text{ n'est pas injectif ou à image non fermée}\}.$$

3. *Le spectre résiduel, noté $\sigma_r(T)$, défini par:*

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T : D(T) \to \mathbb{E} \text{ à image non dense}\}.$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_r(T) \quad \text{et} \quad \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T).$$

Mais les deux ensembles $\sigma_{ap}(T)$ et $\sigma_r(T)$ ne sont pas forcément disjoints.

Proposition B.0.3. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Preuve. *Soit T un opérateur fermé entre deux espaces de Banach $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, on a:*

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = \Lambda\left(\mathcal{G}(T)\right)$$

où Λ est l'homéomorphisme [3] défini par:

$$\begin{aligned} \Lambda = \mathbb{E} \times \mathbb{F} \quad &\to \quad \mathbb{F} \times \mathbb{E} \\ (x, y) \quad &\to \quad (y, x). \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{G}(T^{-1})$ est fermé. □

Remarque B.0.1. *Les opérateurs fermés sont très intéressants pour la théorie spectrale en effet, si $\lambda \in \rho(T)$, l'opérateur $(\lambda I - T)^{-1}$ est continu (par définition de $\rho(T)$) donc à graphe fermé [4], on en déduit que son inverse $(\lambda I - T)$ est fermé (voir proposition (B.0.3)), et il en résulte que T est fermé.*
Autrement dit: <u>si T n'est pas fermé on aura $\sigma(T) = \mathbb{C}$.</u>

Proposition B.0.4. ***(Identité de la résolvante)***
Les résolvantes $\mathcal{R}_\mu$ et $\mathcal{R}_\lambda$, correspondant aux points μ et λ, sont permutables et vérifient la relation:

$$\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu = (\mu - \lambda)\, \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_\mu.$$

[3] Bijection bicontinue.

[4] Toute application continue a un graphe fermé [1, Remark 6, page 37].

Preuve. *On a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu &= \mathcal{R}_\lambda \, [\, (\mu I - A) - (\lambda I - A) \,] \, \mathcal{R}_\mu. \\ &= \mathcal{R}_\lambda \, [\, (\mu - \lambda) \; I \,] \, \mathcal{R}_\mu. \\ &= (\mu - \lambda) \; \mathcal{R}_\lambda \; \mathcal{R}_\mu. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $\mathcal{R}_\mu \mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_\mu$ *, en effet on a:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu &= (\mu - \lambda) \; \mathcal{R}_\lambda \; \mathcal{R}_\mu. \\ -(\mathcal{R}_\mu - \mathcal{R}_\lambda) &= -[\, (\lambda - \mu) \; \mathcal{R}_\mu \mathcal{R}_\lambda \,]. \\ (\mu - \lambda) \; \mathcal{R}_\lambda \; \mathcal{R}_\mu. &= -[\, (\lambda - \mu) \; \mathcal{R}_\mu \mathcal{R}_\lambda \,]. \\ \mathcal{R}_\lambda \; \mathcal{R}_\mu &= \mathcal{R}_\mu \; \mathcal{R}_\lambda. \end{aligned}$$

□

L'un des théorèmes les plus importants en théorie spectrale des opérateurs est le *théorème de décomposition spectrale*, car à partir d'une décomposition ensembliste du spectre, on peut récupérer une décompostion d'espace en somme directe de deux (ou plus) sous espaces.
La construction de cette décomposition d'espace dans le cas des opérateurs bornés se trouve traité d'une manière détaillée dans [14, section 1.2, *Spectral decomposition and Riesz projection, page 8*].
Nous présentons via le théorème ci-dessous une version du théorème de décomposition spectrale, valable pour les opérateurs fermés.

Théorème B.0.2. *[14]. Soit* $A : D(A) \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *un opérateur fermé et supposons que* $\sigma(A) = \sigma \cup \tau$ *avec* $\sigma \cap \tau = \emptyset$*, alors:*

1. *L'opérateur* P_σ *défini par:*

$$P_\sigma \; = \; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathcal{R}_\lambda(A) \; d\lambda.$$

   est un projecteur sur $\mathbb{E}$[5]*.*

2. *Les sous espaces* $\mathcal{N}(P_\sigma)$ *et* $\mathfrak{R}(P_\sigma)$ *sont invariants par* A*.*

3. $\mathfrak{R}(P_\sigma) \subset D(A)$ *et* $A|_{\mathfrak{R}(P_\sigma)}$ *est un opérateur borné.*

4. $\sigma(A|_{\mathfrak{R}(P_\sigma)}) = \sigma$ *et* $\sigma(A|_{\mathcal{N}(P_\sigma)}) = \tau$*.*

Preuve. *Pour une démonstration de ce résultat, on se réfère à [14, theorem 2.1, page 326].* ■

[5] Γ est un contour parcouru une fois dans le sens direct, qui encercle σ et qui est disjoint de τ.

Bibliography

[1] Haim Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, *Springer* 2010.

[2] Dunford, N; Schwartz, J.T, Linear Operators, Part I, New York : Interscience 1958.

[3] Kôsaku Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, sixth edition, New York 1980.

[4] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, © 1983 Springer-Verlag. New York, Inc.

[5] Luigi Amerio & Giovanni Prouse, Almost-Periodic Functions and Functional Equations, 1971 Springer Science+Business Media, LLC.

[6] B. M. Levitan, V. V. Zhikov, Almost periodic functions and differential equations, Cambridge University Press, 1982.

[7] S. Zaidman, Almost-periodic functions in abstract spaces, Pitman Advanced Publishing Program 1985.

[8] C. Corduneanu, Almost Periodic Functions, Chelsea Publishing Company N.Y, Second English Edition 1989.

[9] Klaus-Jochen Engel & Rainer Nagel, A Short Course on Operator Semigroups, Springer, Octobre 2005.

[10] Bart, H, Periodic strongly continuous semigroups, Ann. Mat. Pura Appl, 20 October 1976.

[11] W. Arendt & C.J.K. Batty, Almost Periodic Solution of First and Second Order Cauchy Problems. Journal of differential equations 137, 363-383 (1997), Article No. DE973266.

[12] Angus E. Taylor, Introduction to Functional Analysis, Wiley and Sons, New York 1958.

[13] Ioan I. Vrabie, $\mathcal{C}_0$-Semigroups and Applications, Editor: Saul LUBKIN, 2003.

[14] Israel Gohberg, Seymour Goldberg & Marinus A. Kaashoek, Classes of Linear Operators Vol. I, Birkhauser Verlag, 1990.

[15] S. Bochner, A new approach to almost periodicity, princeton university, communicated October 17, 1962.

[16] Yves Meyer, Algebraic Numbers and Harmonic Analysis, North-Holland Publishing Company, 1972.

[17] Einar Hille & Ralph S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society 1957.

[18] W. Arendt & Charles J.K. Batty & Mathiass Hieber & Frank Neubrander, Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems, second edition, © springer Basel AG 2011.

[19] I. M. Kadets, On the integration of almost periodic functions with values in a Banach space, Karkov institue for municipal Building Engineers. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozhenia, Vol. 3, No. 3, pp 71-74, July-September, 1969. Original article submitted February 27, 1969.

[20] Edoardo Vesentini, Spectral Properties of Weakly Asymptotically Almost Periodic Semigroups, Scuola Normale Superiore, 56126 Pisa, Italy, advances in mathematics 128, 217-241 (1997). Article No. AI971613.

[21] G.E.Ladas & V. Lakshmikantham, Differential equations in abstract spaces, Academic Press New York and London, 1972.

[22] S D Zaidman, Abstract Differential equations, Pitman Advanced Publishing Program 1979.

[23] Harm Bart and Seymour Goldberg, characterizations of Almost Periodic Strongly Continuous Groups and Semigroups, Math. Ann. 236, 105-116(1978) © by Springer-Verlag 1978.

[24] A.M.Fink, Almost Periodic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.Heidelberg. New York 1974.

[25] M.C.Mackey & A. Rey, *Transitions and kinematics of reaction-convection fronts in a cell populations models, Physica. D. 80, Issue 1-2, (1995), 120-139.*

[26] A.M. Fink, Almost periodic functions invented for specific purposes, Vol. 14, No. 4, October 1972.