

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

OPTION : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET OPTIMISATION

Présenté par :

M. AKKOUCHE Abderrahmane

**Contrôle Optimal des Systèmes Décrits par des Équations aux
Dérivées Partielles Basé sur la Méthode d' Itération Variationnelle**

Soutenu le 05 novembre 2015 devant le jury composé de

M. Djamel HAMADOUCHE	Professeur	Université de Tizi-ouzou	Président
M. Mohamed AIDENE	Professeur	Université de Tizi-ouzou	Rapporteur
M. Ahmed MAIDI	MCA	Université de Tizi-ouzou	Co-rapporteur
M. Mohand Ouamer BIBI	Professeur	Université de Béjaia	Examineur
M. Mohand Said RADJEF	Professeur	Université de Béjaia	Examineur
M. Abdelmalek KOUADRI	MCA	Université de Boumerdès	Examineur

Remerciements

Je voudrai adresser mes remerciements les plus sincères et d'exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse, Mr Aidène Mohamed, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, et mon co-directeur de thèse Mr Maida Ahmed, Maitre de Conférences à l'université de Tizi Ouzou pour leurs disponibilités, leurs soutiens, leurs conseils et leurs aides. En m'écoutant patiemment, et en discutant maintes fois de la nature et l'avancement de mes travaux, ils m'ont permis de synthétiser, de comprendre et d'expliquer un grand nombre de questions. Leurs conseils et leurs gentillesse m'ont apporté un précieux soutien, qu'ils soient chaleureusement remerciés ici.

Je remercie également Mr Hamadouche Djamel, Professeur à l'université de Tizi Ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury. Mes vifs remerciements vont également à Mr Bibi Mohand Ouamer, Mr Radjef Mohand Said, Professeurs à l'université de Béjaia et Mr Kouadri Abdelmalek, Maitre de Conférences à l'université de Boumerdes, pour avoir accepté de faire partie du jury, et de s'être déplacés pour la soutenance.

Je remercie aussi mes parents pour m'avoir inculqué le goût d'apprendre et de m'avoir encouragé sans cesse pour toujours aller plus loin. Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à mes frères et mes soeurs qui m'ont soutenu sans faille durant mes études.

Je remercie également tous les membres du Laboratoire L2CSP de l'université de Tizi Ouzou, ainsi que tous les membres de la faculté des sciences, et en particulier le personnel de service de scolarité de post-graduation.

Enfin, je remercie tous mes amis et tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

Résumé

La contribution de cette thèse consiste à proposer des approches basées sur la méthode des itérations variationnelles pour la résolution des problèmes de contrôle optimal des systèmes dynamiques décrits par des équations aux dérivées partielles. Cette classe de systèmes est appelée systèmes à paramètres distribués ou systèmes de dimension infinie. L'application de la méthode des itérations variationnelles permet d'approcher itérativement la solution du problème de contrôle en démarrant d'une approximation initiale de la solution.

Pour déterminer la solution du problème de contrôle optimal de dimension infinie, deux approches ont été proposées. Dans la première, on utilise le principe du minimum de Pontryagin pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité sans aucune transformation du problème de départ. Ces conditions sont données sous forme d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles couplées, appelées équations de Hamilton-Pontryagin. Dans la deuxième approche, en utilisant la méthode des lignes, le problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués est réduit à un problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres localisés, c'est-à-dire à un système décrit par des équations aux dérivées ordinaires. Le problème de contrôle optimal obtenu est résolu en utilisant le principe du minimum de Pontryagin basée sur la méthode des itérations variationnelles.

Mots Clés : Contrôle optimal, équations aux dérivées partielles, équations différentielles, principe du minimum de Pontryagin, méthodes itératives, méthode des itérations variationnelles, méthode des lignes.

Abstract

The contribution of this thesis is to suggest a design approach, based on the variational iteration method, to solve optimal control problems of dynamic systems described by partial differential equations. This class of systems is called distributed parameter systems or infinite dimensional systems. The application of the variational iteration method allows to approach iteratively the solution of the optimal control problem by starting from an initial approximation of the solution.

To solve the optimal control problem of infinite dimension, two approaches are proposed. In the first approach, the minimum principle of Pontryagin is used to derive the necessary optimality conditions without any transformation of the initial problem. These conditions are given by a set of coupled partial differential equations known as the Hamilton-Pontryagin equations. In the second approach, by using the method of lines, the optimal control problem of distributed parameter systems is converted to an optimal control problem of a lumped parameter systems, that is, a system described by ordinary differential equations. Then, the obtained optimal control problem is solved using the Pontryagin's minimum principle based on the variational iteration method.

Keywords : Optimal control, partial differential equations, ordinary differential equations, Pontryagin's minimum principle, iterative methods, variational iteration method, method of lines.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	i
Abstract	ii
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vi
Notations	viii
Liste des travaux scientifiques	xi
Introduction générale	xii
1 Généralités sur le contrôle Optimal des systèmes dynamiques	1
1.1 Introduction	1
1.2 Problème de contrôle optimal en dimension finie	1
1.2.1 Contrôlabilité en dimension finie	3
1.2.2 Définition des différentes notions de contrôlabilité	3
1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	6
1.3 Méthodes de calcul du contrôle optimal	7
1.3.1 Méthodes directes	7
1.3.2 Méthodes indirectes	8
1.3.3 Existence de trajectoires optimales	10
1.3.4 Contrôle optimal quadratique	11
1.4 Problèmes de contrôle optimal en dimension infinie	13
1.4.1 Contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués linéaires	13
1.4.2 Minimisation de fonctionnelles linéaires	15

1.4.3	Systèmes décrits par des équations paraboliques	16
1.4.4	Quelques exemples de problèmes de contrôle	22
1.4.5	Méthodes de résolution	25
1.5	Contrôlabilité en dimension infinie	26
1.5.1	Contrôlabilité aux trajectoires	26
1.5.2	Contrôlabilité approchée	27
1.6	Conclusion	28
2	Méthodes Numériques de résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles	29
2.1	Introduction	29
2.2	Méthodes directes	31
2.2.1	Semi-Discrétisation	31
2.2.2	Discrétisation totale	34
2.2.3	Paramétrisation par les fonctions orthogonales	38
2.3	Méthodes indirectes	45
2.4	Conclusion	47
3	Méthode des Itérations Variationnelles	49
3.1	Introduction	49
3.2	Méthode de Décomposition d'Adomian	50
3.3	Méthode de Perturbation d'homotopie	51
3.4	Méthode des itérations variationnelles	53
3.4.1	Résolution des équations différentielles ordinaires	53
3.4.2	Résolution des équations aux dérivées partielles	55
3.5	Approche alternative de la méthode des itérations variationnelles	55
3.6	Convergence de la méthode des itérations variationnelles	57
3.6.1	Résultats de Convergence	59
3.7	Exemples illustratifs	61
3.8	Couplage de la méthode des lignes avec la méthode des itérations variationnelles	65
3.8.1	Introduction	65
3.8.2	Principe de la méthode des lignes	65
3.9	Conclusion	70
4	Résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles par la méthode des itérations variation-	

nelles	71
4.1 Introduction	71
4.2 Résolution par la méthode indirecte	72
4.3 Position du problème	72
4.4 Conditions nécessaires d'optimalité	73
4.5 Résolution des équations de Hamilton-Pontryaguin	75
4.5.1 Fonctionnelles de correction	75
4.5.2 Approximations initiales	76
4.6 Algorithme de la méthode	76
4.7 Exemples d'application	77
4.8 Résolution par l'approche directe	81
4.9 Conditions nécessaires d'optimalité	82
4.10 Résolution des équations de Hamilton-Pontryaguin par la méthode des itérations variationnelles	83
4.11 Algorithme de l'approche proposée	83
4.12 Exemple d'application	84

Table des figures

3.1	Graphe de la solution au point $z = \pi/4$.	68
3.2	Graphe de la solution au point $z = \pi/2$.	69
3.3	Graphe de la solution au point $z = \frac{3\pi}{4}$.	69
4.1	Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 0$.	88
4.2	Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 1$.	89
4.3	Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 2$.	89
4.4	Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 3$.	90
4.5	Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 4$.	90

Liste des tableaux

- 4.1 Résultats des itérations. 80
- 4.2 Résultats des itérations. 86
- 4.3 Compariason entre deux itérations successives 86

Notations

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels,
\mathbb{R}^m	espace vectoriel de dimension m construit sur le corps des réels,
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs
$M_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} ,
$M_{n,m}(\mathbb{R})$	ensemble des matrices carrées d'ordre $n \times m$ à coefficients dans \mathbb{R} ,
ϵ	nombre petit positif (tolérance),
\mathcal{O}	ouvert de \mathbb{R}^n ,
\mathcal{R}	résolvante,
Ω	sous-ensemble de \mathbb{R}^n ,
ω	sous-ensemble de Ω ,
$\partial\Omega = \Gamma$	frontière de Ω ,
z	variable d'espace,
t	variable du temps,
$[0, l]$	intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités 0 et l ,
$[0, t_f]$	intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités 0 et t_f ,
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$	vecteur d'état,
$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$	vecteur de contrôle,
$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n$	vecteur adjoint,
λ	multiplicateur de Lagrange général,
x^T	transposée de x ,
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	dérivée temporelle,
$\frac{\partial x}{\partial t}$ ou x_t	dérivée partielle du premier ordre par rapport à t ,
$\frac{\partial x}{\partial z}$ ou x_z	dérivée partielle du premier ordre par rapport à z ,
$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ ou x_{zz}	dérivée partielle du second d'ordre par rapport à z ,
$\frac{\partial x}{\partial u}$	dérivée normale extérieure,
$\frac{\partial x}{\partial \nu}$	

\mathcal{H}	fonction hamiltonienne,
\mathcal{L}	fonction de Lagrange,
\mathcal{X}	espace des états,
\mathcal{U}	espace des contrôles,
\mathcal{U}_{ad}	espace des contrôles admissibles,
ou t.q	tel que
$p.p$	presque partout
max	maximum
min	minimum
sup	borne supérieur
inf	borne inférieur
lim	limite
\mathcal{M}	variété de \mathbb{R}^n
$T_x \mathcal{M}$	espace tangent à \mathcal{M} au point x
$T_x^+ \mathcal{M}$	espace cotangent à \mathcal{M} au point x
$C^1(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions continûment différentiables,
$C^k(\Omega)$	ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω , $k \geq 0$
$L^p(\Omega)$	$\{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} f(z) ^p dz < \infty\} \quad 1 \leq p < \infty$
L^∞	$\{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } c > 0 \text{ t.q. } f(z) \leq c, \text{ p.p sur } \Omega\}$,
$L^2(0, t_f; \mathcal{X})$	espace des fonctions fortement mesurables sur $]0, t_f[$ à valeur dans \mathcal{X}
\mathcal{A}	opérateur différentiel
\mathcal{A}^*	opérateur adjoint de \mathcal{A}
$dom(\mathcal{A})$	domaine de l'opérateur \mathcal{A}
$\mathcal{L}(E, F)$	espace des opérateurs linéaires continus de E dans F
\langle, \rangle	produit scalaire,
H	espace de Hilbert,
$ \cdot $	valeur absolue ou module,
$\ \cdot\ $	norme euclidienne classique sur \mathbb{R}^n ,
$\ \cdot\ _H$	norme de l'espace H
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables et à support compact
$H^1(\Omega)$	espace de Sobolev d'ordre 1
$H_0^1(\Omega)$	adhérence de \mathcal{D} dans $H^1(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espace de sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$, par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$)

Liste des travaux scientifiques

Publications :

A. Akkouche, A. Maida and M. Aidene. Optimal control of partial differential equations based on the Variational Iteration Method. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 68, No. 6, 2014.

Communications :

1. **A. Akkouche**, A. Maida, S. Guermah and M. Aidene. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equation Based on the Variational Iteration Method*. 8ème Rencontre d'Analyse Mathématiques et Application, Alger, 2 6-29 Novembre 2012, Algérie.
2. **A. Akkouche**, A. Maida, S. Guermah et M. Aidene. *Commande Optimale des Systèmes à Paramètres Distribués Basée sur la Méthode d'Itération Variationnelle*. 3rd International Conference On Systems And Processing Information, May 12-14, 2013, Guelma, Algeria.
3. **A. Akkouche**, A. Maida and M. Aidene. *Solving Optimal Control Problems by Variational Approach Based on the Adomian's Decomposition Method*. Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control, Algiers, Algeria, October 29-31, 2013.
4. **A. Akkouche**, A. Maida and M. Aidene. *Solving optimal control problems based on the Pontryagin's principle using the Adomian decomposition method*. Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Informatique, Bejaia, 08-10 Juin 2014.

Introduction Générale

La théorie du contrôle est une branche interdisciplinaire de l'ingénierie et des mathématiques. La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire les systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande [94]. L'objectif alors est de déterminer une commande qui permet de transférer le système d'un état initial à un état final. Cet objectif doit être réalisé en optimisant une certaine fonction coût, appelée critère, tout en satisfaisant un certain nombre de contraintes, ce qu'on appelle problème de contrôle optimal.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles [96, 53, 60, 61], des équations intégrales, des équations intégro-différentielles, des équations aux dérivées partielles [75, 62, 63, 81, 78, 72, 21], et des équations stochastiques. Les problèmes de contrôle optimal décrits par les équations différentielles ordinaires sont appelés des systèmes de contrôle à paramètres localisés ou systèmes de contrôle de dimension finie. Tandis que les problèmes de contrôle décrits par les équations aux dérivées partielles sont appelés des systèmes à paramètres distribués ou répartis ou problèmes de contrôle optimal de dimension infinie [28, 29].

Les différentes approches proposées dans la littérature pour la résolution d'un problème de contrôle optimal peuvent être scindées en deux classes [88, 80, 18]. La première, dite approche directe, consiste à discrétiser le problème de contrôle optimal tel qu'il est posé et de le convertir en un problème d'optimisation statique [95, 88, 19, 21] qu'on peut résoudre par des méthodes d'optimisation déterministe ou stochastique [17, 13, 23]. La deuxième approche, dite approche indirecte ou après optimisation, est basée sur la programmation dynamique ou sur le principe du minimum de Pontryagin. En utilisant l'approche indirecte, la résolution du problème de contrôle revient à discrétiser les conditions nécessaires d'optimalité et par la suite d'obtenir un système d'équations linéaires ou non linéaires.

Les conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sont obtenues par deux grandes formulations, à savoir la programmation dynamique et le principe du minimum de Pontryagin. La programmation dynamique basée sur le principe de Bellman [15] conduit à

l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Cette équation, donnée par une équation aux dérivées partielles, est une condition suffisante d'optimalité, tandis que le principe du minimum de Pontryagin [76] qui est une généralisation de la théorie des variations, [52, 60, 10] fournit une condition nécessaire d'optimalité de la loi du contrôle optimal. Ces conditions nécessaires sont données sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires pour les problèmes de contrôles optimal des systèmes à paramètres localisés. Cependant, ces conditions sont données par un système d'équations aux dérivées partielles pour les problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués. Ce système d'équations différentielles est appelé équations de Hamilton-Pontryagin.

Depuis longtemps, des chercheurs se sont intéressés à la résolution des problèmes de contrôle optimal en approchant la solution des conditions d'optimalité. Il est à noter que la théorie du contrôle optimal des systèmes décrits par les équations différentielles est relativement avancée par rapport à la théorie de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Pour les systèmes de contrôle optimal décrits par les équations différentielles ordinaires, plusieurs méthodes ont été développées pour obtenir la solution numérique de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman; telle que la méthode d'approximation de Galerkin [14], les méthodes de collocation [37, 12, 51], ainsi que la solution numérique des équations de Hamilton-Pontryagin, en utilisant la méthode de tir [59], la méthode de tir multiple [92] et les méthodes de collocation indirectes. Pour les problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles, l'obtention de la solution des conditions nécessaires d'optimalité est difficile en raison de la complexité des équations à manipuler. Pour surmonter cette difficulté de résolution, ces systèmes sont généralement approchés par des systèmes de contrôle optimal décrits par les équations différentielles en utilisant entre autre : la technique de semi-discrétisation [86, 54], la technique de paramétrisation par les fonctions orthogonales [98, 26, 50, 64, 30].

Ces dernières années, des méthodes semi-analytiques pour la résolution des équations différentielles ont été proposées dans la littérature [79]. Ces méthodes ont été utilisées par des mathématiciens et des chercheurs pour résoudre une très grande variété d'équations : linéaires, non linéaires, homogènes et non homogènes. Ces méthodes donnent des approximations successives qui convergent rapidement vers la solution exacte si elle existe, dans le cas où la solution exacte est difficile à calculer ou ne peut s'obtenir à l'aide de procédés élémentaires, ces méthodes donnent une solution approchée sous forme d'une série tronquée avec une très grande précision. La solution est obtenue en utilisant des processus itératifs en choisissant une approximation initiale déterminée en considérant les conditions initiales et/ou les conditions aux limites du problème considéré. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode de décomposition d'Adomian [5, 6, 7], la méthode des itérations variationnelles

[39, 41, 44, 43, 47, 49], la méthode de perturbation d'homotopie [42, 45, 46, 48]. Ces méthodes itératives sont aussi utilisées pour la résolution des problèmes de contrôle optimal décrits par les équations différentielles, en résolvant l'équation de HJB [33, 73, 58], les équations de Hamilton-Pontryagin [65, 31, 34, 107], et les équations d'Euler-Lagrange [16].

La méthode des itérations variationnelles introduite par le mathématicien chinois Ji Huan He, en 1997, a été démontrée par plusieurs chercheurs qu'elle est fiable et efficace à des fins analytiques et numériques [1, 101, 102]. Des études de comparaison rapportées dans la littérature révèlent la supériorité de la méthode des itérations variationnelles et sa simplicité [99]. Ceci est justifié par le nombre important des applications de cette méthode dans différents domaines [69, 70, 47, 3]. Dans cette thèse, la méthode des itérations variationnelles est adoptée pour la résolution des conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale, en dimension infinie, obtenues en utilisant le principe du minimum de Pontryagin. L'objectif principal consiste à proposer un algorithme permettant d'identifier l'état initial des variables adjointes et à localiser la solution globale.

Le reste de la thèse est structuré comme suit :

Le premier chapitre de ce manuscrit présente des définitions et des généralités sur le contrôle optimal, les conditions d'existence de solutions optimales de problèmes de contrôle décrits par des équations différentielles ordinaires et partielles, ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité déduites en utilisant le principe du minimum de Pontryagin.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de quelques méthodes numériques directes et indirectes pour approcher la solution de problèmes de contrôle optimal décrits par des équations paraboliques.

Dans la première partie du troisième chapitre on aborde tout en expliquant le principe des méthodes itératives, telle que la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode de perturbation d'homotopie, ainsi que la méthode des itérations variationnelles. L'étude est axée sur la méthode des itérations variationnelles utilisée dans cette thèse pour la résolution des problèmes de contrôle optimal. Dans la deuxième partie, on présente le principe de la méthode des lignes couplée avec la méthode des itérations variationnelles pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

Dans le quatrième chapitre, on présente les résultats obtenus dans ce travail sur la résolution des problèmes de contrôle régis par les équations aux dérivées partielles. Dans la première partie, on utilise la méthode des itérations variationnelles pour approcher la solution des conditions nécessaires d'optimalité données par un système d'équations aux dérivées partielles. Dans la deuxième partie, on donne une nouvelle approche de résolution basée sur le couplage de la méthode des lignes et la méthode des itérations variationnelles. Dans ce cas, le problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués est transformé en

un problème de contrôle à paramètres localisés en utilisant la méthode des lignes, ensuite pour approcher la solution des équations de Hamilton-Pontryagin, la méthode des itérations variationnelles est utilisée.

Chapitre 1

Généralités sur le contrôle Optimal des systèmes dynamiques

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions générales sur le contrôle optimal des systèmes dynamiques. Le chapitre est décomposé en deux parties. La première partie est dédiée à l'étude des problèmes de contrôles optimal des systèmes décrits par les équations différentielles ordinaires. La deuxième partie est consacrée à l'étude des problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Pour chaque classe de problèmes, on aborde la notion de contrôlabilité, les conditions d'existence de contrôle optimal et de trajectoires optimales, ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité.

1.2 Problème de contrôle optimal en dimension finie

Les étapes principales pour la formulation d'un problème de contrôle optimal sont la modélisation du système à contrôler, la spécification du critère à optimiser et les contraintes physiques à satisfaire, i.e. la trajectoire, les conditions initiales et finales du problème.

Soit :

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

le vecteur caractérisant l'état du système à l'instant t , qu'on appelle vecteur d'état, et soit

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m, \quad (1.2)$$

le vecteur du contrôle qui agit sur l'évolution du processus.

La problématique générale du contrôle optimal est la suivante : Soit \mathcal{M} une variété différentiable de dimension n (on suppose ici que \mathcal{M} est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n), et soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^m .

Considérons le système de contrôle général donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & t \in [0, t_f], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $x(t) \in \mathcal{M}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, et f est une application de classe C^1 définie sur $\mathcal{M} \times \mathcal{U} \times [0, t_f]$ à valeur dans \mathbb{R}^n . Les contrôles $u(\cdot)$ sont des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. On suppose que le champ de vecteur f est suffisamment régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathcal{M}$ et tout contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, le système (1.3) admet une solution $x(t)$ unique.

Soit f^0 une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{M} \times \mathcal{U} \times [0, t_f]$, et g une fonction continue sur \mathcal{M} . Notons par \mathcal{U}_{ad} l'ensemble des contrôles admissibles, alors pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$, on définit le coût de la trajectoire associée $x(t)$ sur l'intervalle $[0, t_f]$ par :

$$J(u) = \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t), t) dt + g(t_f, x(t_f)) \quad (1.4)$$

Soient \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 deux ensembles de \mathcal{M} , alors le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x(t)$ solution de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ telles que $x(0) \in \mathcal{M}_0$, $x(t_f) \in \mathcal{M}_1$ et minimisant le coût $J(u)$.

Dans certains problèmes de contrôle optimal des contraintes sur les variables d'état et de contrôle sont à prendre en considération. En général, on distingue deux types de contraintes : instantanées et intégrales. Notons aussi que les conditions terminales (initiales et finales) représentent réellement des contraintes définies aux bornes de l'horizon de contrôle. Les contraintes instantanées sont données comme suit :

$$\forall t \in [0, t_f], c_t(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad c_t \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Les contraintes intégrales prennent la forme suivante :

$$\forall t \in [0, t_f], \int_0^{t_f} c_i(x(t), u(t), t) dt \leq 0, \quad c_i \in \mathbb{R}^n. \quad (1.6)$$

1.2.1 Contrôlabilité en dimension finie

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), & t \in [0, t_f], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où A , B et r sont trois applications localement intégrables sur $[0, t_f]$ à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et localement borné sur $[0, t_f]$ à valeurs dans le sous-ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$.

Définition 1.1

Le système contrôlé (1.7) est dit contrôlable en temps t_f si pour tous x_0 et $x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 et x_1 en temps t_f .

1.2.2 Définition des différentes notions de contrôlabilité

Les notions de contrôlabilité peuvent également différer selon la forme des cibles x_1 à atteindre. Par exemple, on peut ne chercher à atteindre que l'état nul $x_1 = 0$, cas duquel on parle de contrôlabilité à zéro, ou alors ne chercher à atteindre que les cibles correspondant à des trajectoires, ce qui consiste à contrôler aux trajectoires [68].

Ces notions de contrôlabilité sont toutes équivalentes en dimension finie (c'est-à-dire pour le cas des systèmes d'équations différentielles ordinaires) mais qui sont bien distinctes en dimension infinie (c'est-à-dire pour le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles).

Les différents concepts de contrôlabilité se définissent plus précisément de la façon suivante :

Définition 1.2 [68]

- *Contrôlabilité exacte* : on dit que le système (1.7) est exactement contrôlable au temps $t_f > 0$ si :

$$\forall (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \exists u \in \mathcal{U} / x(t_f; x_0, u) = x_1. \quad (1.8)$$

- *Contrôlabilité approchée* : on dit que le système (1.7) est approximativement contrôlable au temps $t_f > 0$ si :

$$\forall (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0 \exists u \in \mathcal{U} / \|x(t_f; x_0, u) - x_1\|_{\mathbb{R}^n} \leq \epsilon. \quad (1.9)$$

– *Contrôlabilité aux trajectoires* : on dit que le système (1.7) est contrôlable aux trajectoires au temps $t_f > 0$ si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall (x_0^*, u^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}, \exists u \in \mathcal{U} / x(t_f; x_0, u) = x(t_f; x_0^*, u^*). \quad (1.10)$$

– *Contrôlabilité à zéro* : on dit que le système (1.7) est contrôlable à zéro au temps $t_f > 0$ si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in \mathcal{U} / x(t_f; x_0, u) = 0. \quad (1.11)$$

a) Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires

Considérons le système de contrôle (1.7), et soit :

$$\mathcal{R}(\cdot) = [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (1.12)$$

la résolvante du système linéaire homogène

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (1.13)$$

définie par :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{R}}(t) = A(t)\mathcal{R}(t), \\ \mathcal{R}(0) = I_n, \end{cases} \quad (1.14)$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n . Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de la contrôlabilité.

Théorème 1 [94]

Le système de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad t \in [0, t_f], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice de contrôlabilité

$$C(t) = \int_0^{t_f} \mathcal{R}(t)^{-1} B(t) B(t)^T \mathcal{R}(t)^{-1T} dt, \quad (1.16)$$

est inversible.

b) Critère de contrôlabilité de Kalman

On suppose dans cette partie que le système (1.7) est autonome, c'est-à-dire que pour $t \in [0, t_f]$, $A(t) = A$ et $B(t) = B$. Le système (1.7) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in]0, t_f[\\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Définition 1.3

On définit la matrice de Kalman par :

$$C = (B, AB, A^2B \cdots, A^{n-1}B). \quad (1.18)$$

La condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité du système (1.17) est donnée par le Théorème suivant.

Théorème 2 [94]

On suppose que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, le système (1.17) est contrôlable en temps t^* (quelconque) si et seulement si la matrice C est de rang n .

C) Critère de Kalman pour les systèmes non autonomes

Silverman et Meadows [91] ont généralisé le critère de Kalman au cas des systèmes pour lesquels les matrices A et B dépendent du temps. On suppose $A \in C^{m-2}([0, t_f], M_n(\mathbb{R}))$ et que $B \in C^{m-1}([0, t_f], M_{n,m}(\mathbb{R}))$.

On définit la famille $(B_j(t))_{0 \leq j \leq n-1}$ en posant :

$$\begin{cases} B_0(t) = B(t) \\ B_j(t) = A(t) B_{j-1}(t) - \frac{d}{dt} B_{j-1}(t), \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1.19)$$

et on considère, pour tout $t \in [0, t_f]$, la matrice $\tilde{C}(t)$ de $M_{n, mn}(R)$ définie par :

$$\tilde{C}(t) = (B_0(t), B_1(t), \dots, B_{n-1}(t)). \quad (1.20)$$

Remarquons que si les matrices A et B sont constantes, alors pour tout $t \in [0, t_f]$, $\tilde{C}(t) = C$, où C est la matrice de Kalman donnée en (1.18).

1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement la variable d'état et la variable de contrôle, $(x(t), u(t)) \in \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

La contrôlabilité des systèmes non linéaires est une généralisation de la contrôlabilité des systèmes de contrôle optimal linéaires. Mais, on ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation.

Définition 1.4

On dit que le système (1.21) est localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \mathcal{V}$, il existe un temps fini t_f et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{U}$ tel que $x_1 = x(t_f, x_0, u(\cdot))$.

Définition 1.5

Une trajectoire du système de contrôle (1.21) est une fonction $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{O}$ tel que $t_f > 0$, $\bar{x}(t) \in C^0([0, t_f]; \mathbb{R}^n)$, $\bar{u}(t) \in L^\infty([0, t_f]; \mathbb{R}^m)$, \exists un ensemble compact $K \subset \mathcal{O}$ tel que $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in K$ pour presque tout $t \in [0, t_f]$, on ait :

$$\bar{x}(t_2) = \bar{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt, \quad \forall (t_1, t_2) \in [0, t_f]. \quad (1.22)$$

Définissons maintenant la notion de contrôlabilité le long d'une trajectoire.

Définition 1.6

Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [0, t_f] \mapsto \mathcal{O}$ une trajectoire du système de contrôle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Le système de contrôle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $|a - \bar{x}(0)| < \eta$ et $|b - \bar{x}(t_f)| < \eta$, il existe une trajectoire $(x, u) : [0, t_f] \mapsto \mathcal{O}$ tel que :

$$\begin{aligned} x(0) &= a, & x(t_f) &= b, \\ |u(t) - \bar{u}(t)| &\leq \epsilon, & t &\in [0, t_f]. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la notion de système de contrôle linéarisé le long d'une trajectoire.

Définition 1.7

Le système de contrôle linéarisé le long d'une trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [0, t_f] \mapsto \mathcal{O}$ est le système de contrôle linéaire donné par

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) u(t), \quad t \in [0, t_f]. \quad (1.23)$$

En utilisant les définitions (1.4)–(1.7), on introduit le résultat suivant qui donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non linéaires.

Théorème 3 [27]

Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{O}$ une trajectoire du système de contrôle non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Supposons que le système de contrôle linéarisé le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ est contrôlable, alors le système de contrôle non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$.

1.3 Méthodes de calcul du contrôle optimal

Pour déterminer la solution d'un problème de contrôle optimal, il y a essentiellement deux classes de méthodes : les méthodes directes et les méthodes indirectes [88, 80, 18].

1.3.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à convertir le problème de contrôle optimal en un problème de programmation non linéaire en effectuant une discrétisation totale du problème. Ensuite, la commande est déterminée en résolvant le problème d'optimisation obtenu par des techniques d'optimisation classiques déterministes ou stochastiques [20]. Dans ce cas, les variables d'optimisation représentent les commandes à appliquer aux différents instants d'échantillonnage.

Le principe général consiste à discrétiser le modèle d'état en utilisant, par exemple la méthode d'Euler, puis de remplacer les solutions (variables d'état en fonctions des commandes) dans le critère et les contraintes, ainsi le problème de contrôle optimal prend la forme d'un problème d'optimisation statique.

Une revue des différentes méthodes faisant partie de cette classe peut être trouvée dans [88, 32, 95]

1.3.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur deux grandes formulations, la première étant la programmation dynamique, la deuxième étant la formulation variationnelle qui est basée sur la méthode du multiplicateur de Lagrange et le principe du minimum de Pontryagin. L'approche indirecte consiste à dériver les conditions nécessaires d'optimalité du problème de contrôle qui sont données par un ensemble d'équations différentielles telles que les équations d'Euler-Lagrange [71], les équations de Hamilton-Pontryagin [76] et l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman [15]. Le principe de chaque approche est décrit dans ce qui suit.

Programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique pour les problèmes de contrôle optimal a été introduit par Bellman en 1952 [15]. Ce principe s'énonce comme suit :

si un contrôle $u(t)$ est optimal entre 0 et t_f pour la condition initiale $x(0)$, alors il est aussi optimal entre t et t_f , $t > 0$ avec la condition initiale au temps t

Ce principe, sous sa forme continue, conduit à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Cette dernière est donnée comme suit :

$$\begin{cases} J_t^*(x(t), t) + \mathcal{H}(x(t), u(x(t)), J_x^*, t), J_x^*, t) = 0, \\ J^*(x(t_f), t_f) = g(t_f, x(t_f)), \end{cases} \quad (1.24)$$

avec

$$J^*(x(t), t) = \min_u \left\{ \int_t^{t_f} f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + g(t_f, x(t_f)) \right\}, \quad \tau \in [t, t_f], \quad (1.25)$$

et

$$\mathcal{H}(x(t), u(x(t)), J_x^*, t), J_x^*, t) = \min_{u(t)} \mathcal{H}(x(t), u(t), J_t^*, t), \quad (1.26)$$

où

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), J_t^*, t) = f^0(x(t), u(t), t) + J_x^*(x(t), t) (f(x(t), u(t), t)), \quad (1.27)$$

est la fonction hamiltonienne.

La solution analytique de cette équation aux dérivées partielles est généralement difficile, voire impossible. C'est pourquoi cette approche est peu utilisée.

Équation d'Euler-Lagrange

L'idée de Lagrange est d'introduire une variable additionnelle p de même dimension que le vecteur d'état x , qu'on appelle vecteur des multiplicateurs de Lagrange ou vecteur adjoint.

Le Lagrangien \mathcal{L} associé au problème (1.3)–(1.4) est défini comme suit :

$$\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) = f^0(x(t), u(t), t) + p^T(t) (\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)). \quad (1.28)$$

En utilisant le calcul des variations, les conditions nécessaires d'optimalité sont déterminées en annulant la première variation de \mathcal{L} , c'est-à-dire $\delta\mathcal{L} = 0$. Dans ce cas, on obtient les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)}{\partial \dot{x}(t)} \right) = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)}{\partial u(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)}{\partial \dot{u}(t)} \right) = 0 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)}{\partial p(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t)}{\partial \dot{p}(t)} \right) = 0 \quad (1.31)$$

Les conditions aux limites en terme du Lagrangien sont données par :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)' \Big|_{t_f} \delta x(t_f) = 0. \quad (1.32)$$

La résolution de ces équations permet de déterminer les trajectoires optimales des variables d'états, les variables adjointes et les contrôles.

Principe du Minimum de Pontryagin

Le principe du minimum de Pontryagin [76] représente le résultat central de la théorie du contrôle optimal qui est une généralisation du calcul des variations. Le théorème suivant donne les conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales du problème (1.3)–(1.4).

Théorème 4 [94]

Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot)$ absolument continue sur $[0, t_f]$, appelée vecteur adjoint, vérifiant $p(t) \in T_{x(t)}^+ M$ et un réel $p^0 \geq 0$, telle que le couple $(p(\cdot), p^0)$ soit non trivial, et tel que pour presque tout $t \in [0, t_f]$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t), t), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t), t), \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $\mathcal{H}(x, p, p^0, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle + p^0 f^0(x, u, t)$ est le hamiltonien du système, et on a la condition de minimisation presque partout sur $[0, t_f]$

$$\mathcal{H}(x(t), p(t), p^0, u(t), t) = \min_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x(t), p(t), p^0, v(t), t), \quad (1.34)$$

Si de plus le temps final pour rejoindre la cible \mathcal{M}_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final telle que :

$$\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x(t_f), p(t_f), p^0, v, t_f) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)).$$

Si de plus \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in \mathcal{M}_0$ et $x(t_f) \in \mathcal{M}_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités de l'horizon de commande (ou juste l'une des deux si l'état final est libre)

$$p(0) \perp T_{x(0)}\mathcal{M}_0$$

et

$$p(t_f) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp T_{x(t_f)}\mathcal{M}_1.$$

1.3.3 Existence de trajectoires optimales

Considérant le système de contrôle (1.3), parmi toutes les solutions possibles, il faut trouver une trajectoire qui minimise le coût $J(u)$. Une telle trajectoire si elle existe, elle est dite optimale. Le théorème suivant nous donne une conditions nécessaires d'optimalité des trajectoires.

Théorème 5 [94]

Considérons le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

où f est de C^1 de \mathbb{R}^{n+m+1} dans \mathbb{R}^n , les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement on a des contraintes sur l'état

$$c_1(x) \leq 0, \dots, c_r(x) \leq 0,$$

où c_1, c_2, \dots, c_r sont des fonctions continues sur \mathbb{R}^n . Soient \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 deux compacts de \mathbb{R}^n tels que \mathcal{M}_1 est accessible depuis \mathcal{M}_0 Soit \mathcal{U} l'ensemble des contrôles à valeurs dans \mathbb{R}^m joignant \mathcal{M}_0 à \mathcal{M}_1 . Soient f^0 une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^{n+m+1} , et g une fonction

continue sur \mathbb{R}^n . On considère le coût

$$J(u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.35)$$

où $t_f \geq 0$ est tel que $x(t_f) \in \mathcal{M}_1$, on suppose que :

- Il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est uniformément bornée par b sur $[0, t_f]$, i.e.

$$\exists b > 0 \text{ tel que } \forall u \in \mathcal{U}, \forall t \in [0, t_f], \|x(t : u)\| \leq b,$$

- Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, l'ensemble des vecteurs vitesse augmentés

$$\tilde{V}(t, x) = \{(f^0(x, u, t), f(x, u, t)) | u \in \mathcal{U}\}$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal u sur $[0, t_f]$ telle que la trajectoire associée joint \mathcal{M}_0 à \mathcal{M}_1 en temps t_f et en coût minimal.

1.3.4 Contrôle optimal quadratique

Dans cette partie, on s'intéresse à un cas particulier du contrôle optimale connu sous le nom de problème de contrôle optimal linéaire quadratique.

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1.36)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.37)$$

On suppose toujours que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des fonctions continues de t , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est une fonction continue par morceaux.

Soit t_f fixé, on défini sur un horizon fini $[0, t_f]$, la fonction coût de type quadratique suivante :

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) K x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)) dt, \quad (1.38)$$

où $x(t_f) \in \mathbb{R}^n$ et $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique constante semi-définie positive. Les matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices semi-définie positive et définie positive,

respectivement.

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Le principe du minimum de Pontryagin introduit dans la section précédente, appliqué au problème (1.36)-(1.38), nous mène à une loi de commande en fonction uniquement de temps. Celle-ci est dite commande en boucle ouverte. Nous obtenons alors la proposition suivante.

Proposition 1

Soit $(x(t), u(t))$, $t \in [0, t_f]$ une solution optimale du problème linéaire quadratique (1.36)-(1.38), avec $R(t) > 0$, pour tout $t \in [0, t_f]$. Alors il existe un vecteur adjoint différentiable $p(t)$, $t \in [0, t_f]$ tel que la fonction hamiltonienne définie par :

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] + p^T(t) [A(t) x + B(t) u(t)], \quad (1.39)$$

Satisfait les conditions suivantes :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p(t)}(x(t), u(t), p(t), t), \quad (1.40)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}(x(t), u(t), p(t), t), \quad (1.41)$$

$$p(t_f) = K x(t_f), \quad (1.42)$$

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \min_{v(t) \in \mathcal{U}} H(x(t), v(t), p(t), t), \quad (1.43)$$

La condition (1.43) de la proposition 1, permet d'obtenir pour tout $t \in [0, t_f]$

$$u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) p(t). \quad (1.44)$$

En posant $S = B R^{-1} B^T$, nous sommes donc conduits au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$x(0) = x_0$, et $p(t_f) = K x(t_f)$.

Dans ce cas, la solution est globale puisque la fonction coût est convexe et soumise à des contraintes linéaires.

1.4 Problèmes de contrôle optimal en dimension infinie

Cette section est consacrée à l'étude des problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués, i.e., les systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles, qu'on appelle aussi systèmes de contrôle optimal de dimension infinie.

Soit \mathcal{X} , \mathcal{U} et V trois espaces de Banach et considérons le problème de contrôle optimal de dimension infinie donné sous la forme abstraite comme suit :

$$\min J(x, u), \tag{1.46}$$

$$\text{sous les contraintes} \tag{1.47}$$

$$\mathcal{F}(x, u) = 0, \tag{1.48}$$

$$u \in \mathcal{U}_{ad} \subset U, \tag{1.49}$$

$$x \in \mathcal{K} \subset \mathcal{X}, \tag{1.50}$$

où \mathcal{U}_{ad} et \mathcal{K} sont des sous-ensembles convexes fermés non vides de U et \mathcal{X} , respectivement. J est une fonction convexe de $\mathcal{X} \times U$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et \mathcal{F} est un opérateur linéaire ou non linéaire, stationnaire ou d'évolution, donné par un problème aux limites d'équations aux dérivées partielles.

Les espaces \mathcal{X} et U sont généralement les espaces des états et de contrôles, respectivement. \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble de contrôles admissibles qui est l'espace de contraintes sur le contrôle.

Supposons que l'opérateur \mathcal{F} est donné par l'équation suivante :

$$\mathcal{A}x(u) = \mathcal{B}u, \tag{1.51}$$

qu'on appelle équation d'état, avec \mathcal{A} est un opérateur aux équations aux dérivées partielles linéaire ou non linéaires, stationnaire ou d'évolution. \mathcal{B} est un opérateur linéaire ou non. A l'équation (1.51) on ajoute les conditions aux limites et lorsque \mathcal{A} est un opérateur d'évolution il faut ajouter des conditions initiales.

Le contrôle u peut apparaître de manière distribué sur le domaine entier où l'on étudie le phénomène physique considéré. Il peut également apparaître sur la frontière par l'intermédiaire des conditions aux limites.

1.4.1 Contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués linéaires

Soit Y et F deux espaces de Hilbert, et soit \mathcal{A} un opérateur différentiel partiel linéaire continu de Y dans F . De plus, on suppose que l'opérateur \mathcal{A} est un isomorphisme de Y dans

F . Soit \mathcal{U} un espace de Hilbert qui est l'espace de contrôles, et soit \mathcal{U}_{ad} un sous ensemble convexe fermé de \mathcal{U} qui est l'ensemble de contrôles admissibles. Soit $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; F)$ et pour tout $u \in \mathcal{U}$, on considère le problème aux limites donné sous la forme abstraite comme suit :

$$\mathcal{A}x(u) = f + \mathcal{B}u, \quad (1.52)$$

Soit \mathcal{Z} un espace de Hilbert qui est l'espace des observations, et soit $C \in \mathcal{L}(Y; \mathcal{Z})$ l'opérateur des observations, on considère la fonction coût

$$J(u) = \|Cx(u) - x_d\|_{\mathcal{Z}}^2 + (Nu, u)_{\mathcal{U}}, \quad (1.53)$$

où x_d est donné dans \mathcal{Z} , et $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ est un opérateur symétrique défini positif. Le problème de contrôle optimal consiste à déterminer u qui minimise J sur \mathcal{U}_{ad} , i.e.,

$$J(u) = \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.54)$$

Théorème 6 [63]

Si J est différentiable, alors le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$(Cx(u) - x_d, C(x(v) - x(u))) + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.55)$$

Conditions nécessaires d'optimalité

Soit $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; Y')$ l'opérateur adjoint de C et soit l'état adjoint $p = p(u)$, défini par

$$\mathcal{A}^*p = C^*(Cx(u) - x_d), \quad (1.56)$$

avec \mathcal{A}^* est l'opérateur adjoint de \mathcal{A} .

Alors

$$\begin{aligned} (C^*(Cx(u) - x_d), x(v) - x(u)) &= (Cx(u) - x_d, C(x(v) - x(u))), \\ &= (\mathcal{A}^*p, x(v) - x(u)), \\ &= (p, \mathcal{A}x(v) - \mathcal{A}x(u)), \\ &= (p, \mathcal{B}(v - u)) = (\mathcal{B}^*p, v - u)_{\mathcal{U}}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Donc l'équation (1.55) est équivalente à :

$$(\mathcal{B}^*p + Nu, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.58)$$

et l'unique contrôle optimal u est donné par la résolution des conditions d'optimalité suivantes

$$\mathcal{A}x = f + \mathcal{B}u, \quad (1.59)$$

$$\mathcal{A}^*p = C^*(Cx - x_d), \quad (1.60)$$

$$u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.61)$$

$$(\mathcal{B}^*p + Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.62)$$

1.4.2 Minimisation de fonctionnelles linéaires

Dans cette sous-section, on rappelle quelques résultats d'existence et d'unicité d'extrema de fonctionnelles linéaires. Considérons un espace de Hilbert réel \mathcal{U} muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) , et la norme induite sur \mathcal{U} par le produit scalaire est notée par $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Supposons qu'on a

- i) $\left\{ \begin{array}{l} \text{une forme bilinéaire } \pi \text{ continue, symétrique et coercive telle que} \\ (u, v) \mapsto \pi(u, v), \quad \pi(v, u) = \pi(u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{U} \end{array} \right.$
- ii) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Une forme linéaire continue sur } \mathcal{U}, \\ u \mapsto G(u) \end{array} \right.$
- iii) Un sous-ensemble convexe fermé \mathcal{U}_{ad} de \mathcal{U} .

et considérons le problème suivant :

$$\min J(u) = \pi(u, u) - 2G(u), \quad u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.63)$$

Pour énoncer la condition d'existence de la solution du problème (1.63), on donne la définition de la forme coercive suivante.

Définition 1.8 [24]

On dit qu'une forme bilinéaire $\pi(u, v) : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est :

i) – continue s'il existe une constante c tel que :

$$|\pi(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{U}, \quad (1.64)$$

ii) – coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\pi(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in \mathcal{U}, \quad (1.65)$$

d'où le résultat suivant :

Théorème 7 [77, 62]

Soit $\pi(u, v)$ une forme bilinéaire symétrique sur \mathcal{U} qui satisfait la condition (1.65). Alors il existe un élément $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$J(u) = \inf J(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.66)$$

De plus,

i) la fonction $u \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfait l'inégalité variationnelle

$$\pi(u, v - u) \geq G(v - u), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.67)$$

ii) Si $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, u satisfait l'équation d'Euler associée au problème (1.66)

$$\pi(u, w) = G(w), \quad \forall w \in \mathcal{U}. \quad (1.68)$$

iii) Si \mathcal{U}_{ad} est un cône convexe fermé de sommet 0, alors u satisfait :

$$\pi(u, v) \geq G(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \text{ et } \pi(u, u) = G(u). \quad (1.69)$$

iv) Supposons que l'application $v \mapsto J(v)$ est strictement convexe et différentiable (J est non nécessairement quadratique) satisfait :

$$J(v) \rightarrow \infty \text{ quand } \|v\|_{\mathcal{U}} \rightarrow \infty \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.70)$$

alors l'unique solution $u \in \mathcal{U}_{ad}$ qui satisfait la condition (1.66) est caractérisée par l'inégalité variationnelle

$$J'(u)(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.71)$$

où J' est la dérivé au sens de Gâteaux.

1.4.3 Systèmes décrits par des équations paraboliques

Soit V et H deux espaces de Hilbert réels, tel que V est dense dans H avec

$$V \subset H \subset V', \quad (1.72)$$

où V' est le dual topologique de V . Notons par \mathcal{U} l'espace de Hilbert qui est l'espace des contrôles et considérons deux opérateurs linéaires \mathcal{A} et \mathcal{B} tel que $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V; V')$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; L^2(0, t_f; V'))$. De plus, on note par (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur H et supposons qu'on a une forme bilinéaire sur V donnée par :

$$(\varphi, \psi) \mapsto \pi(t; \varphi, \psi), \quad \text{pour chaque } t \in]0, t_f[, \quad (1.73)$$

qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall \varphi, \psi \in V, \quad |\pi(t; \varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\| \|\psi\|, \quad (1.74)$$

et il existe un w_1 tel que

$$\pi(t; \varphi, \psi) + w_1 \|\varphi\|_H \geq \alpha \|\varphi\|_V^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall \varphi \in V, \quad t \in]0, t_f[. \quad (1.75)$$

En se basant sur le théorème de représentation de Riesz, on introduit l'opérateur \mathcal{A} associé avec la forme bilinéaire $\pi(\cdot, \cdot)$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V; V') : \quad \pi(t; \varphi, \psi) = (\mathcal{A}(t)\varphi, \psi), \quad \mathcal{A}(t)\varphi \in V'. \quad (1.76)$$

Alors pour tout $u \in \mathcal{U}$, on lui fait correspondre l'état $x = x(u)$ solution de l'équation d'état

$$\begin{cases} \frac{dx(u)}{dt} + \mathcal{A}(t)x(u) = f + \mathcal{B}u, \\ x(u)|_{t=0} = x_0, \\ x(u) \in L^2(0, t_f; V), \end{cases} \quad (1.77)$$

où $f \in L^2(0, t_f; V')$ et $x_0 \in H$ sont des fonctions données.

Remarque 1.1 La fonction $x(u)$ est une fonction $t \mapsto x(u)(t)$ qu'on peut noter comme $x(t; u)$. En pratique, la fonction $x(u)$ dépend aussi de la variable d'espace z , alors elle est notée $x(z, t; u)$.

Soit \mathcal{Z} l'espace de Hilbert qui est l'espace des observations et soit $C \in \mathcal{L}(L^2(0, t_f; V); \mathcal{Z})$ l'opérateur des observations tel que pour chaque état x dans V , on lui fait correspondre l'état observable $\mathbf{z} = Cx(u)$ dans \mathcal{Z} , qu'on cherche à ramener le plus proche possible d'une observation désirée donnée et connue à l'avance x_d dans \mathcal{Z} .

Le coût de l'application du contrôle u dans \mathcal{U} est donnée par $(Nu, u)_{\mathcal{U}}$, où $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ est un opérateur hermitien (coercif) défini positif

$$(Nu, u)_{\mathcal{U}} \geq \nu \|u\|_{\mathcal{U}}^2, \quad \nu > 0. \quad (1.78)$$

Par la suite, on définit la fonction objectif $J(\cdot)$ comme suit :

$$J(u) = \| C x(u) - x_d \|_{\mathcal{Z}}^2 + (N u, u)_{\mathcal{U}}. \quad (1.79)$$

L'objectif principal est de trouver les conditions nécessaires et suffisantes d'existence et si possible d'unicité du contrôle optimal u solution du problème de contrôle optimal (1.77)–(1.79).

Condition d'existence de solution

Notons que l'application :

$$\begin{aligned} x &: \mathcal{U} \rightarrow V \\ u &\mapsto x(u), \end{aligned} \quad (1.80)$$

est affine, alors la fonction coût peut être réécrite comme suit :

$$J(u) = \| C[x(u) - x(0)] + C x(0) - x_d \|_{\mathcal{Z}}^2 + (N u, u)_{\mathcal{U}}, \quad (1.81)$$

soit π une forme bilinéaire symétrique continue sur \mathcal{U} définie comme suit :

$$\pi(u, v) = (C[x(u) - x(0)], C[x(v) - x(0)])_{\mathcal{Z}} + (N u, v)_{\mathcal{U}}, \quad (1.82)$$

et soit la fonctionnelle G définie comme suit :

$$G(u) = (x_d - C x(0), C[x(u) - x(0)])_{\mathcal{Z}}, \quad (1.83)$$

Alors,

$$J(u) = \pi(u, u) - 2G(u) + \| x_d - C x(0) \|_{\mathcal{Z}}^2, \quad (1.84)$$

Puisque $\| x_d - C x(0) \|_{\mathcal{Z}}^2 \geq 0$, de l'équation (1.65) on a :

$$\pi(u, u) \geq \nu \| u \|_{\mathcal{U}}^2, \quad (1.85)$$

alors le problème de contrôle optimal est réduit à la formulation générale donnée en (1.63). Les théorèmes suivants nous donnent des conditions d'existence et d'unicité du contrôle optimal.

Théorème 8 [62]

Supposons que les hypothèses (1.74) et (1.75) sont vérifiées et que l'état du système est donné

(1.77). Alors il existe un élément unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$J(u) = \inf J(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.86)$$

Théorème 9 [62]

Si J est strictement convexe et différentiable, alors le contrôle $u \in \mathcal{U}_{ad}$ est optimal si et seulement si

$$J'(u)(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.87)$$

Lemme 1.1 [25]

Supposons que \mathcal{U} est un espace de Hilbert et $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ est un convexe fermé.

Soit $\pi(u, v)$ une forme bilinéaire continue sur \mathcal{U} qui satisfait :

$$\pi(u, v) \geq c_1 \|v\|_{\mathcal{U}}^2, \quad v \in \mathcal{U}, \quad c_1 > 0.$$

Soit encore,

$$J(u) = \pi(u, u),$$

alors il existe un unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

Théorème 10 [108]

Soit \mathcal{U}_{ad} une partie convexe fermée de \mathcal{U} . On suppose que J est convexe, continue sur U tel que :

$$\begin{cases} \text{Soit } \mathcal{U}_{ad} \text{ est borné,} \\ \text{Soit } J(v) \rightarrow +\infty \text{ quand } \|v\| \rightarrow +\infty, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}, \end{cases} \quad (1.88)$$

alors il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad},$$

de plus si J est strictement convexe, il y a unicité de u .

Conditions nécessaires d'optimalité

Soit les deux opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{isomorphisme canonique de } \mathcal{Z} \text{ dans } \mathcal{Z}', \\ \Lambda_U &= \text{isomorphisme canonique de } \mathcal{U} \text{ dans } \mathcal{U}'. \end{aligned}$$

Pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité du problème (1.77)–(1.79), on considère les deux cas suivant :

- i) $C \in \mathcal{L}(L^2(0, t_f; V); \mathcal{Z})$,
- ii) $Cx(u) = Dx(t_f; u)$, $D \in \mathcal{L}(H; H)$,

1^{er} cas : $C \in \mathcal{L}(L^2(0, t_f; V); \mathcal{Z})$

Dans ce cas l'opérateur adjoint de C est donné par : $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}'; L^2(0, t_f; V'))$ et les conditions nécessaires d'optimalité sont données par le théorème suivant :

Théorème 11 [62]

Supposons que les conditions (1.74)–(1.75) et (1.78) sont vérifiées, et supposons que $C \in \mathcal{L}(L^2(0, t_f; V); \mathcal{Z})$. Le contrôle optimal u est caractérisé par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{dx(u)}{dt} + \mathcal{A}(t)x(u) = f + \mathcal{B}u, \quad (1.89)$$

$$-\frac{dp(u)}{dt} + \mathcal{A}^*(t)p(u) = C^* \Lambda(Cx(u) - x_d), \quad (1.90)$$

$$x(0; u) = x_0, \quad (1.91)$$

$$p(t_f; u) = 0, \quad (1.92)$$

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{B}^* p(u) + N u, v - u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.93)$$

avec

$$x(u) \in L^2(0, t_f; V), \quad (1.94)$$

$$p(u) \in L^2(0, t_f; V). \quad (1.95)$$

Remarque 1 *Supposons que $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, i.e., il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, alors les conditions d'optimalité sont données par :*

$$\frac{dx(u)}{dt} + \mathcal{A}(t)x(u) = f - \mathcal{B}N^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{B}^*p, \quad (1.96)$$

$$-\frac{dp}{dt} + \mathcal{A}^*(t)p = C^* \Lambda(Cx(u) - x_d), \quad (1.97)$$

$$x(0; u) = x_0, \quad (1.98)$$

$$p(t_f) = 0, \quad (1.99)$$

$$(1.100)$$

et le contrôle optimal u est donné par :

$$u = -N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{B}^* p. \quad (1.101)$$

2^{eme} cas : $C x(u) = D x(t_f; u)$

La fonction coût est donnée par

$$J(u) = |D x(t_f; u) - x_d|^2 - (N u, u)_{\mathcal{U}}, \quad (1.102)$$

et le théorème suivant nous donne les conditions d'optimalité du contrôle u .

Théorème 12

Supposons que les conditions (1.74), (1.75) et (1.78) sont vérifiées et $J(u)$ est donné par (1.102), où $D \in \mathcal{L}(H; H)$, alors le contrôle optimal u est déterminé par :

$$\frac{dx(u)}{dt} + \mathcal{A}(t) x(u) = f + \mathcal{B} u, \quad (1.103)$$

$$- \frac{dp(u)}{dt} + \mathcal{A}^*(t) p(u) = 0, \quad (1.104)$$

$$x(0; u) = x_0, \quad (1.105)$$

$$p(t_f; u) = D^* (D x(t_f; u) - x_d), \quad (1.106)$$

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{B}^* p(u) + N u, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \forall u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.107)$$

avec

$$x(u) \in L^2(0, t_f; V), \quad (1.108)$$

$$p(u) \in L^2(0, t_f; V). \quad (1.109)$$

Remarque 2 Dans le cas où le sous-ensemble $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, on obtient :

$$\frac{dx(u)}{dt} + \mathcal{A}(t) x(u) = f - \mathcal{B} N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{B}^* p, \quad (1.110)$$

$$- \frac{dp}{dt} + \mathcal{A}^*(t) p = 0, \quad (1.111)$$

$$x(0; u) = x_0, \quad (1.112)$$

$$p(t_f) = D^* (D x(t_f; u) - x_d), \quad (1.113)$$

ainsi que la loi du contrôle optimal u est donnée par :

$$u = -N^{-1} \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{B}^* p. \quad (1.114)$$

1.4.4 Quelques exemples de problèmes de contrôle

Problème de Dirichlet avec un contrôle distribué

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^∞ , soit $t_f > 0$ et considérons le cylindre $Q = (0, t_f) \times \Omega$ et sa frontière latérale qui est donnée par $\Sigma = (0, t_f) \times \Gamma$. Soit l'espace de contrôles $\mathcal{U} = L^2(Q)$, \mathcal{B} est l'application identité et $V = H_0^1(\Omega)$.

Considérons le problème de contrôle optimal est donné par :

$$\min_u J(u(z, t)) = \frac{1}{2} \| C x(z, t) - x_d(z, t) \|_{\mathcal{Z}}^2 + (N u(z, t), u(z, t))_{\mathcal{U}}, \quad (1.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) + \mathcal{A}(t) x(z, t) = f(z, t) + u(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.116)$$

$$x(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.117)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.118)$$

où $f \in L^2(Q)$, $x_0 \in L^2(\Omega)$, $x_d \in L^2(Q)$ et l'opérateur \mathcal{A} est donné par :

$$\mathcal{A}(t) x = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \left(a_{ij}(z, t) \frac{\partial x}{\partial z_j} \right) \quad (1.119)$$

où a_{ij} sont des fonctions données dans $Q = \Omega \times]0, t_f[$ avec

$$\begin{cases} a_{ij} \in L^\infty(Q), \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(z, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \alpha > 0, \xi_i \in \mathbb{R} \text{ p.p sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.120)$$

Pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (1.115)–(1.118), on considère les deux cas suivants :

1^{er} **cas** : C est une injection de $L^2(0, t_f; V) \rightarrow L^2(Q)$, ainsi $\mathcal{Z} = L^2(Q) = \mathcal{Z}'$.

Alors, les conditions nécessaires d'optimalité sont données par [62]

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) + \mathcal{A}(t) x(z, t) = f(z, t) + u(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.121)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} p(z, t) + \mathcal{A}^*(t) p(z, t) = x(z, t) - x_d(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.122)$$

$$x(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.123)$$

$$p(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.124)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \Omega, \quad (1.125)$$

$$p(z, t_f) = 0, \quad z \in \Omega, \quad (1.126)$$

$$\int_Q (p + N u)(v - u) dz dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.127)$$

Si de plus $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ alors, le contrôle optimal $u(z, t)$ est donné par :

$$u(z, t) = -N^{-1} p(z, t), \quad (1.128)$$

2^{eme} cas : L'état final est observable, c'est-à-dire $Cx(z, t) = Dx(z, t_f)$, $D \in \mathcal{L}(H; H)$, $H = L^2(\Omega)$, et la fonction coût à minimiser est donnée par :

$$J(u(z, t)) = \int_{\Omega} (Dx(z, t_f) - x_d(z))^2 dz + (Nu(z, t), u(z, t)). \quad (1.129)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) + \mathcal{A}(t) x(z, t) = f(z, t) + u(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.130)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} p(z, t) + \mathcal{A}^*(t) p(z, t) = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (1.131)$$

$$x(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.132)$$

$$p(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.133)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \Omega, \quad (1.134)$$

$$p(z, t_f) = D^* (Dx(z, t_f) - x_d(z)), \quad z \in \Omega, \quad (1.135)$$

$$\int_Q (p + N u)(v - u) dz dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, u \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.136)$$

Si $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ alors, le contrôle optimal $u(z, t) = -N^{-1} p(z, t)$.

Problème de Neumann avec contrôle sur la frontière

Soit l'espace fonctionnel $V = H^1(\Omega)$, l'espace des contrôle $\mathcal{U} = L^2(\Sigma)$, et l'équation d'état est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) - \mathcal{A}(t) x(z, t) = f(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.137)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} x(z, t) = u(z, t), \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.138)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \text{sur } \Omega. \quad (1.139)$$

Pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité caractérisant le contrôle optimal u , on considère les deux cas suivants selon la nature du problème.

1^{er} cas : C est une injection de $L^2(0, t_f; V) \rightarrow L^2(Q)$,

Alors la fonction coût est donnée par

$$\min J(u(z, t)) = \int_Q (x(z, t) - x_d(z, t))^2 dz dt + (Nu(z, t), u(z, t))_{L^2(\Sigma)}, \quad (1.140)$$

où $x_d \in L^2(Q)$, et les conditions nécessaires d'optimalité sont données par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) + \mathcal{A}(t) x(z, t) = f(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.141)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} p(z, t) + \mathcal{A}^*(t) p(z, t) = x(z, t) - x_d(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.142)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} x(z, t) = u(z, t), \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.143)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}^*}} p(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.144)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \Omega, \quad (1.145)$$

$$p(z, t_f) = 0, \quad z \in \Omega, \quad (1.146)$$

$$\int_{\Sigma} (p + Nu)(v - u) d\Sigma \geq 0, \quad \forall v, u \in \mathcal{U}_{ad} \quad (1.147)$$

Si $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ alors, la condition (1.147) devient :

$$u(z, t) = -N^{-1} p(z, t). \quad (1.148)$$

2^{eme} cas : L'état final est observable, alors la fonction coût est donnée par

$$\min J(u(z, t)) = \int_{\Omega} (x(z, t_f) - x_d(z))^2 dz + (N u(z, t), u(z, t))_{L^2(\Sigma)} \quad (1.149)$$

les conditions nécessaires d'optimalité sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) + \mathcal{A}(t) x(z, t) = f(z, t), \quad \text{dans } Q, \quad (1.150)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} p(z, t) + \mathcal{A}^*(t) p(z, t) = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (1.151)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} x(z, t) = u(z, t), \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.152)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\mathcal{A}^*}} p(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.153)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad z \in \Omega, \quad (1.154)$$

$$p(z, t_f) = x(z, t_f) - x_d(z), \quad z \in \Omega, \quad (1.155)$$

$$\int_{\Sigma} (p + N u)(v - u) d\Sigma \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.156)$$

1.4.5 Méthodes de résolution

La classification des méthodes de résolution des problèmes de commande optimale en dimension infinie est difficile à établir. Néanmoins, en général, deux grandes approches sont à distinguer.

– *Approche directe (discrétiser puis optimiser)* : le principe des méthodes de cette approche est basé sur la notion de discrétisation ou d'approximation dont l'idée consiste à réaliser une approximation du problème en dimension infinie par un autre en dimension finie, c'est-à-dire les équations aux dérivées partielles sont réduites à un ensemble d'équations aux dérivées ordinaires. Dans ce cas, les méthodes développées pour les systèmes de dimension finie, décrites à la sous section (1.3.1), peuvent être appliquées.

– *Approche indirecte (optimiser puis discrétiser)* : le principe des méthodes de cette approche consiste à dériver les conditions d'optimalité directement en considérant le problème en dimension infinie sans aucune approximation. Une fois les conditions d'optimalité (équations différentielles) sont obtenues, des méthodes d'approximation d'équations ou de solutions sont utilisées pour les résoudre.

Une synthèse sur les différentes méthodes de résolution d'un problème de commande optimale en dimension infinie fera l'objet du chapitre 2.

1.5 Contrôlabilité en dimension infinie

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, soit t_f un réel strictement positif et considérons le cylindre $Q = (0, t_f) \times \Omega$ de frontière latérale $\Sigma = (0, t_f) \times \Gamma$.

Soit ω un ouvert non vide inclus dans Ω , soit χ_ω la fonction caractéristique sur ω et notons par G le cylindre $\omega \times [0, t_f]$.

Considérons l'équation parabolique avec un contrôle interne :

$$\frac{\partial}{\partial t} x(z, t) + A(t) x(z, t) = f(z, t) + u(z, t) \chi_\omega, \quad \text{dans } Q, \quad (1.157)$$

$$x = 0, \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.158)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.159)$$

où $x(z, t) \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$, $x_0 \in L^2(\Omega)$, et $A(t)x = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \left(a_{ij}(z, t) \frac{\partial x}{\partial z_j} \right)$.

Définition 1.9 [55]

– Le système d'équation (1.157)–(1.159) est dit *contrôlable à zéro en temps t_f* si pour toute fonction $f \in L^2(Q)$, $x_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2(G)$ tel que la solution x correspondante de (1.157)–(1.159) satisfait la condition

$$x(z, t_f) = 0, \quad \text{dans } \omega. \quad (1.160)$$

– Le système d'équation (1.157)–(1.159) est dit *approximativement contrôlable en temps t_f* si pour toute fonction $f \in L^2(Q)$, $x_0, x_1 \in L^2(\Omega)$ et $\epsilon > 0$, il existe un contrôle $u \in L^2(G)$ tel que la solution x correspondante de (1.157)–(1.159) satisfait la condition

$$\|x(z, t_f) - x_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon. \quad (1.161)$$

1.5.1 Contrôlabilité aux trajectoires

Critère de Kalman généralisé

Rappelons que le critère de Kalman est une condition nécessaire et suffisante des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants [9]. Dans cette section, on donne une extension de

ce critère aux systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}x(z, t) = (D\Delta + A)x(z, t) + Bu\chi_w, & (z, t) \in Q = \Omega \times (0, t_f), \\ x(z, t) = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times (0, t_f) \\ x(z, 0) = x_0(z) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.162)$$

où $x(z, t)$ est la variable d'état, $u(z, t)$ est la variable de contrôle et χ_w est la fonction caractéristique de w , i.e.

$$\chi_w(u) = \begin{cases} u, & \text{si } z \in w \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble ouvert borné avec une C^2 -frontière $\partial\Omega$, $\omega \subset \Omega$ est un sous-ensemble ouvert, $t_f > 0$, $D = \text{diag}(d_{ii})_{n \times n} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $u \in L^2(Q)^m$, et $x_0 \in L^2(\Omega)^n$, Δ est l'opérateur Laplacien.

Pour répondre à cette question, on donne d'abord la définition de l'opérateur de Kalman.

Définition 1.10

Soit $L = D\Delta + A$, avec $\text{dom}(L) = \text{dom}(\Delta)^n = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n$. Alors, on définit l'opérateur de Kalman associé avec (L, B) par l'opérateur matriciel donné par :

$$\mathcal{K} = [L|B] = [L^{n-1}B, L^{n-2}B, \dots, LB, B] : D(\mathcal{K}) \subset L^2(\Omega)^{nm} \rightarrow L^2(\Omega)^n,$$

avec $\text{dom}(\mathcal{K}) = \{u \in L^2(\Omega)^{nm}, \mathcal{K}u \in L^2(\Omega)^n\}$

Le résultat principal est donné par le théorème suivant :

Théorème 13 [9]

Le système (1.162) est exactement contrôlable aux trajectoires en tout temps t_f si et seulement si l'opérateur de Kalman \mathcal{K} satisfait

$$\text{Ker}(\mathcal{K}^*) = \{0\},$$

où \mathcal{K}^* est l'opérateur adjoint de \mathcal{K} dans $L^2(\Omega)^n$.

1.5.2 Contrôlabilité approchée

Les systèmes paraboliques ne sont pas exactement contrôlables au temps t_f , en raison de leur effet régularisant. Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour la contrôlabilité approchée des équations paraboliques.

Théorème 14 [108] (*Contrôlabilité approchée*)

Etant donné $x_d \in H = L^2(\Omega)$ et $t_f > 0$ fixé, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $u_\varepsilon \in L^2((0, t_f); L^2(w))$ tel que :

$$\|x(z, t_f) - x_d(z)\|_H \leq \varepsilon,$$

En d'autres termes, $A_T = \{x(z, t_f; u) | u \in L^2(0, t_f; \mathcal{U})\}$, l'ensemble des états atteignables au temps t_f est dense dans $L^2(\Omega)$.

1.6 Conclusion

Ce chapitre dédié à l'étude des problèmes de contrôle optimal des systèmes dynamiques est constitué de deux parties :

La première partie traite les problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations différentielles ordinaires. Après la formulation mathématique des problèmes de contrôle optimal, on a étudié la notion de contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. On a énoncé les conditions d'existence de solution optimale. Puis, on a donné les différentes méthodes pour dériver les conditions d'optimalité, telles que la programmation dynamique, le principe du minimum de Pontryagin et la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

La deuxième partie concerne l'étude des problèmes de contrôle optimal décrits par les équations aux dérivées partielles paraboliques qu'on rencontre en physique, en chimie ou en biologie. Dans cette partie, on a présenté les concepts de base ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité données par un système d'équations aux dérivées partielles couplées qui forme un problème aux limites multi-points. Ensuite, on a considéré la notion de contrôlabilité exacte et approchée.

Le chapitre suivant sera consacré à l'état de l'art sur les méthodes de résolution numérique des problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles.

Chapitre 2

Méthodes Numériques de résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente quelques méthodes numériques de résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués linéaires de type paraboliques. Pour obtenir la solution d'un problème de contrôle optimal, on utilise généralement deux approches. La première est dite directe et la deuxième est dite indirecte.

L'approche directe, avant optimisation, est basée sur trois techniques :

- La technique de semi-discrétisation,
- La technique de discrétisation totale,
- La technique de paramétrisation.

La technique de semi-discrétisation, basée sur la méthode des lignes [104], consiste à approcher les dérivées spatiales de l'équation d'état par des équations aux différences en utilisant la technique des différences finies. En conséquence, l'équation d'état donnée par un système d'équations aux dérivées partielles est transformée en un système d'équations différentielles ordinaires. En faisant une approximation de la fonction coût par les quadratures de Gauss, le problème de contrôle de départ est transformé en un problème de contrôle optimal décrit par un système d'équations différentielles.

La technique de discrétisation totale consiste à transformer le problème de contrôle de

dimension infinie en un problème d'optimisation statique de dimension finie en faisant une discrétisation spatio-temporelle de la variable d'état et de la variable de contrôle. Cette technique repose sur plusieurs méthodes telles que la méthode des différences finies, la méthode des éléments finies, les méthodes spectrales, ainsi que les méthodes sans maillage utilisant les fonctions à base radiale.

La technique de paramétrisation consiste à approcher les variables d'état et de contrôle par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions à variables séparées, c'est-à-dire :

$$x(z, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t) P_i(z),$$

$$u(z, t) = \sum_{i=0}^N u_i(t) P_i(z),$$

où les P_i , $i = 1, \dots, N$ sont des fonctions polynomiales connues telles que les polynômes de Legendre, les polynômes de Chebychev. Les x_i et u_i , ($i = 1, \dots, N$) sont des fonctions inconnues à déterminer. Cette technique est basée sur les matrices opérationnelles d'intégration pour transformer le problème de départ en un problème de contrôle à paramètres localisés.

L'approche directe présente quelques avantages dans la résolution des problèmes de contrôle optimal décrits par les équations aux dérivées partielles. Le premier avantage est que le problème de contrôle de systèmes à paramètres distribués est converti soit à un problème statique, soit à un problème de contrôle à paramètres localisés, qui est facile à résoudre par rapport au problème original. Le deuxième avantage est qu'il y a des algorithmes bien développés pour résoudre les problèmes de programmation statique ou les problèmes de contrôle optimal décrits par les équations différentielles ordinaires.

L'approche indirecte ou après optimisation consiste à transformer le problème de contrôle optimal décrit par les équations aux dérivées partielles en un problème multi-points aux limites. Ce problème représente les conditions nécessaires d'optimalité qui sont données par un système d'équations aux dérivées partielles, équations de Hamilton-Pontryagin, obtenues en utilisant l'approche variationnelle basée sur le principe du minimum de Pontryagin. La résolution des équations de Hamilton-Pontryagin se fait soit par des méthodes itératives ou par des méthodes directes.

2.2 Méthodes directes

Pour présenter les différentes techniques de l'approche directe proposées dans la littérature pour la résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués, on considère le problème de contrôle optimal suivant [86, 98, 50, 57] :

$$\min_{u(z,t)} J(u(z,t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^l [q x^2(z,t) + r u^2(z,t)] dz dt, \quad (2.1)$$

sous la contrainte

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z,t) + u(z,t), (z,t) \in [0, l] \times]0, t_f[, \quad (2.2)$$

avec la condition initiale,

$$x(z, 0) = f(z), \quad (2.3)$$

et les conditions aux limites,

$$\frac{\partial x}{\partial z}(z,t) = 0, \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } z = l, \quad (2.4)$$

Où $q \geq 0$ et $r \geq 0$.

2.2.1 Semi-Discretisation

Cette approche consiste à transformer l'équation d'état donnée par une équation aux dérivées partielles en un système d'équations aux dérivées ordinaires. Cette transformation se fait en remplaçant les dérivées spatiales par des équations aux différences en utilisant la technique des différences finies.

Approximation de l'équation d'état

On subdivise l'intervalle $[0, l]$ en N_1 sous intervalles de longueur $h = \frac{l}{N_1}$, et on définit les noeuds de discrétisation z_k comme suit :

$$z_k = k h, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_1. \quad (2.5)$$

Au point (z_k, t) , on approche les fonctions $x(z, t)$, $\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$ et $u(z, t)$ par $x_k(t)$, $\dot{x}_k(t)$ et $u_k(t)$, respectivement. En utilisant la technique des différences finies centrées d'ordre 2, on approche la dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial z^2} x(z, t)$ au point (z_k, t) comme suit :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z_k, t) = \frac{x_{k+1}(t) - 2x_k(t) + x_{k-1}(t)}{h^2}, \quad (2.6)$$

l'équation d'état (2.2) devient :

$$\dot{x}_k(t) = \frac{1}{h^2} (x_{k+1}(t) - 2x_k(t) + x_{k-1}(t)) + u_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, N_1, \quad (2.7)$$

ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= \frac{1}{h^2} (x_1(t) - 2x_0(t) + x_{-1}(t)) + u_0(t), \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{h^2} (x_2(t) - 2x_1(t) + x_0(t)) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{h^2} (x_3(t) - 2x_2(t) + x_1(t)) + u_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{N_1}(t) &= \frac{1}{h^2} (x_{N_1+1}(t) - 2x_{N_1}(t) + x_{N_1-1}(t)) + u_{N_1}(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pour obtenir les valeurs de $x_{-1}(t)$ et $x_{N_1+1}(t)$, on utilise la technique des différences finies d'ordre 1 au points $z = 0$ et $z = l$, et on aura :

$$\frac{x_{k+1}(t) - x_k(t)}{h} = 0 \Rightarrow x_{k+1}(t) = x_k(t), \quad (2.9)$$

d'où $x_{N_1+1}(t) = x_{N_1}(t)$ et $x_0 = x_{-1}(t)$.

En remplaçant les variables $x_{-1}(t)$ et $x_{N_1+1}(t)$ par leurs valeurs dans le système (2.8), on aura :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= \frac{1}{h^2} (x_1(t) - x_0(t)) + u_0(t), \\ \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{h^2} (x_2(t) - 2x_1(t) + x_0(t)) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{h^2} (x_3(t) - 2x_2(t) + x_1(t)) + u_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{N_1}(t) &= \frac{1}{h^2} (-x_{N_1}(t) + x_{N_1-1}(t)) + u_{N_1}(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Qu'on peut réécrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.11)$$

avec

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

et B est la matrice identité d'ordre $N_1 + 1$.

Approximation de la fonction coût

En utilisant la méthode des trapèzes, on transforme la fonction coût (2.1) donnée par une intégrale double en intégrale simple comme suit :

$$J(u(t)) = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{1}{2} q x_0^2(t) + \sum_{k=1}^{N_1-1} q x_k^2(t) + \frac{1}{2} q x_{N_1}^2(t) \right) + \left(\frac{1}{2} r u_0^2(t) + \sum_{k=1}^{N_1-1} r u_k^2(t) + \frac{1}{2} r u_{N_1}^2(t) \right) \right] dt \quad (2.13)$$

qu'on peut réécrire

$$J = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (2.14)$$

avec

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r} = \text{diag} \left[\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right]. \quad (2.15)$$

Définition du problème approché

Le problème de contrôle optimal à paramètres localisés est donné comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (2.16)$$

sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad (2.17)$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0, \quad (2.18)$$

où

$$x_0 = [f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_{N_1})]. \quad (2.19)$$

2.2.2 Discrétisation totale

La technique de discrétisation totale permet de transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation statique en utilisant une discrétisation d'espace et de temps, en utilisant différentes méthodes telles que la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis les méthodes d'approximation sans maillage. Dans ce manuscrit, on propose d'introduire une méthode sans maillage qui est la méthode d'interpolation par des fonctions à base radiale [57].

Définition 2.1 [4]

une fonction $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite radiale s'il existe une fonction d'une seule variable $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Psi(z) = \varphi(\|z\|_2), \quad \forall z \in \mathbb{R}^d. \quad (2.20)$$

Pour tout sous ensemble distinct $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subset \mathbb{R}^d$, avec a_1, a_2, \dots, a_N appelés centres, on note :

$$\Psi_i(z) = \varphi(\|z - a_i\|_2), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.21)$$

la fonction radiale associée au centre a_i .

Principe de la méthode d'interpolation par les fonctions à base radiales

Considérons N points distincts de \mathbb{R}^d donnés par z_1, z_2, \dots, z_N , et une fonction $f(z)$ connue seulement aux points z_i , ($i = 1, \dots, N$), c'est-à-dire $f(z_i) = f_i$, alors pour interpoler la fonction f à l'aide des fonctions à base radiale, on construit une approximation de la forme

$$F(z) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Psi_i(z), \quad (2.22)$$

où la fonction d'approximation F est représentée par une somme de N fonctions à base radiales, chacune étant associée à un centre z_i et pondérée par un coefficient λ_i , $i = 1, \dots, N$. les paramètres inconnus λ_i , ($i = 1, \dots, N$) sont choisis de telle sorte :

$$F(z_i) = f(z_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.23)$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$A \Lambda = \mathbf{f}, \quad (2.24)$$

où $A_{ij} = \Psi_i(z_j) = \varphi(\|z_j - z_i\|_2)$, $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ et $\mathbf{f} = [f_1, f_2 \dots, f_N]$.

Interpolation de fonctions spatio-temporelles

Pour approcher la fonction

$$F(z, t) : \mathbb{R}^d \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

par l'interpolation des fonctions à base radiales, on utilise l'approximation spatio-temporelle suivante :

$$F(z, t) \simeq F_N(z, t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Psi_i(z, t) = \Phi^T(z, t) \Lambda, \quad (2.26)$$

où $\Psi_i(z, t)$, $i = 1, \dots, N$, sont des fonctions radiales spatio-temporelles, avec

$$\Phi^T(z, t) = [\Psi_1(z, t), \Psi_1(z, t), \dots, \Psi_N(z, t)], \quad (2.27)$$

et

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N], \quad (2.28)$$

est le vecteur des paramètres inconnus à déterminer.

Si on choisit N points de collocation $\{(z_i, t_i)\}_{i=1}^N$, on peut approcher la fonction F par :

$$y_j = F(z_j, t_j) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Psi_i(z_j, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.29)$$

qu'on peut réécrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\Phi \Lambda = \mathbf{Y}, \quad (2.30)$$

où $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$,

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi^T(z_1, t_1), \Phi^T(z_2, t_2), \dots, \Phi^T(z_N, t_N)]^T \\ &= \begin{bmatrix} \Psi_1(z_1, t_1) & \Psi_2(z_1, t_1) & \dots & \Psi_N(z_1, t_1) \\ \Psi_1(z_2, t_2) & \Psi_2(z_2, t_2) & \dots & \Psi_N(z_2, t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_1(z_N, t_N) & \Psi_2(z_N, t_N) & \dots & \Psi_N(z_N, t_N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Application de la méthode aux problèmes de Contrôle optimal

Pour approcher la solution du problème (2.1)-(2.4) par la méthode d'interpolation de fonctions à base radiale, on considère un ensemble de n points dispersés arbitrairement dans Ω , qu'on note $X = \{(z_1, t_1), (z_2, t_2), \dots, (z_n, t_n)\}$. Les fonctions $x(z, t)$ et $u(z, t)$ sont remplacées par les fonctions $x_n(z, t)$ et $u_n(z, t)$ et sont approchées par des fonctions à base radiale comme suit :

$$x(z, t) \simeq x_n(z, t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{[1]} \Psi_k(z, t), \quad (2.32)$$

$$u(z, t) \simeq u_n(z, t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{[2]} \Psi_k(z, t), \quad (2.33)$$

De plus, on subdivise l'ensemble Ω en 4 sous ensembles donnés par :

$$\Omega_1 = \{(z, t) : t = 0, \quad 0 \leq z \leq L\}, \quad (2.34)$$

$$\Omega_2 = \{(z, t) : z = 0, \quad 0 < t \leq t_f\}, \quad (2.35)$$

$$\Omega_3 = \{(z, t) : z = L, \quad 0 < t \leq t_f\}, \quad (2.36)$$

$$\Omega_4 = \{(z, t) : 0 < z < L, \quad 0 < t \leq t_f\}, \quad (2.37)$$

On suppose aussi que $\Omega_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, 4$ et $\cup \Omega_i = \Omega$. De même on subdivise aussi l'ensemble X en quatre sous ensembles notés par $X_i, i = 1, \dots, 4$, donnés comme suit :

$$X_1 = \{(z_i^0, t_i^0) : (z_i^0, t_i^0) \in \Omega_1\},$$

$$X_2 = \{(z_i^1, t_i^1) : (z_i^1, t_i^1) \in \Omega_2\},$$

$$X_3 = \{(z_i^2, t_i^2) : (z_i^2, t_i^2) \in \Omega_3\},$$

$$X_4 = \{(z_i', t_i') : (z_i', t_i') \in \Omega_4\}.$$

En considérant les p_1 points de collocation générés dans Ω_1 , et en utilisant la condition initiale (2.3), on obtient p_1 équations linéaires algébriques données par :

$$F_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \Psi_k(z_i^0, t_i^0) - f(z_i^0), \quad i = 1, \dots, p_1. \quad (2.38)$$

En prenant les points de collocation $\{(z_i^1, t_i^1)\}_{i=1}^q$ sur Ω_2 et $\{(z_i^2, t_i^2)\}_{i=1}^w$ sur Ω_3 , et en utilisant les conditions aux limites (2.2)-(2.4), on obtient le système linéaire suivant :

$$F_{p_1+i} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k(z_i^1, t_i^1), \quad i = 1, \dots, q, \quad (2.39)$$

$$F_{p_1+q+i} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k(z_i^2, t_i^2), \quad i = 1, \dots, w. \quad (2.40)$$

Supposons que l'équation(2.2) est vérifiée au points $\{(z_i, t_i)\}_{i=1}^n$, alors on aura :

$$F_{p_1+q+w+i} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi_k(z_i, t_i) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_k(z_i, t_i) \right) - \sum_{k=1}^n \lambda_k^{[2]} \Psi_k(z_i, t_i), \quad (2.41)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Approximation de la fonction coût

En utilisant la formule de Gauss, la fonction coût (2.1) est approchée comme suit :

$$J \simeq J_n = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^l (q x_n^2(z, t) + r u_n^2(z, t)) dz dt, \quad (2.42)$$

$$= \frac{l t_f}{8} \sum_{r_1=0}^{M_1} \sum_{r_2=0}^{M_2} w_{r_1} w_{r_2} (q x_n^2(z_{r_1}, t_{r_2}) + r u_n^2(z_{r_1}, t_{r_2})), \quad (2.43)$$

où $\{z_{r_1}\}_{r_1=0}^{M_1}$ et $\{t_{r_2}\}_{r_2=0}^{M_2}$ sont les noeuds de Legendre-Gauss-Lobatto, w_{r_1} et w_{r_2} sont les poids de Legendre-Gauss-Lobatto [90].

Définition du problème approché

Compte tenu de ce qui précède, le problème de contrôle est transformé en un problème d'optimisation donné comme suit :

$$\min \frac{lt_f}{8} \sum_{r_1=0}^{M_1} \sum_{r_2=0}^{M_2} w_{r_1} w_{r_2} (q x_n^2(z_{r_1}, t_{r_2}) + r u_n^2(z_{r_1}, t_{r_2})), \quad (2.44)$$

sous les contraintes

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \Psi_k(z_i^0, t_i^0) - f(z_i^0) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.45)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k(z_i^1, t_i^1) = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (2.46)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_k(z_i^2, t_i^2) = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (2.47)$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k^{[1]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi_k(z_i, t_i) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_k(z_i, t_i) \right) - \sum_{k=1}^n \lambda_k^{[2]} \Psi_k(z_i, t_i) = 0, \quad (2.48)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

2.2.3 Paramétrisation par les fonctions orthogonales

La technique de paramétrisation peut être employée en utilisant différentes fonctions orthogonales, telles que les fonctions de Walsh, les fonctions à bloc d'impulsion, les polynômes de Legendre, Les polynômes de Chebyshev [30].

Les fonctions orthogonales ont été intensivement utilisées ces dernières années pour approcher la solution des systèmes dynamiques [89], les problèmes de contrôle optimal des systèmes à paramètres localisés [83, 66, 97], et sont également utilisées pour approcher la solution des problèmes de contrôle optimal à paramètres distribués [82, 98, 50, 26, 64, 85]. La différence entre ces méthodes réside dans la matrice opérationnelle d'intégration.

Pour illustrer le principe de la méthode de paramétrisation par les fonctions orthogonales, on considère l'exemple des polynômes de Legendre.

Préliminaires

Polynômes de Legendre décalés

En mathématique, les fonctions de Legendre sont les solutions de l'équation différentielle de Legendre donnée par :

$$\frac{d}{dz} \left((1 - z^2) \frac{d}{dz} \bar{P}_n(z) \right) + n(n+1) \bar{P}_n(z) = 0, \quad z \in [-1, 1], \quad (2.49)$$

En faisant un changement de variables, on pose

$$z = \frac{2t}{t_f} - 1, \quad (2.50)$$

on obtient l'équation différentielle, connue sous le nom "équation différentielle décalée de Legendre", donnée comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(t(t_f - t) \frac{d}{dt} P_n(t) \right) + n(n+1) P_n(t) = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (2.51)$$

où t_f peut être choisi arbitrairement.

Dans les équations ci-dessus (2.49) et (2.51), $\bar{P}_n(z)$ et $P_n(t)$ désignent les polynômes de Legendre et polynômes de Legendre décalés, respectivement. Ainsi, la solution de l'équation (2.49) est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(z) &= 1, \\ \bar{P}_1(z) &= z, \\ \bar{P}_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \\ &\vdots \\ \bar{P}_n(z) &= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} z^{n-2j}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad (2.53)$$

et la solution de l'équation (2.51) est donnée par :

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1, \\
P_1(t) &= \frac{2t}{t_f} - 1, \\
P_2(t) &= 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^2 - 6 \frac{t}{t_f} - 1, \\
&\vdots \\
P_n(t) &= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (2n-j)!}{j! ((n-j)!)^2} \left(\frac{t}{t_f} \right)^{n-j}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Propriétés des polynômes de Legendre décalés

Orthogonalité

Une propriété importante des polynômes de Legendre décalés est qu'ils sont orthogonaux sur $[0, t_f]$, c'est-à-dire ;

$$\int_0^{t_f} P_i(t) P_j(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \frac{t_f}{2i+1} & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{2.55}$$

Récurivité

Les polynômes de Legendre décalés satisfont la relation de récursivité suivante :

$$P_{i+1}(t) = \frac{2i+1}{i+1} \phi(t) P_i(t) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{2.56}$$

avec

$$\phi(t) = \frac{2t}{t_f} - 1, \tag{2.57}$$

$P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = \phi(t)$. De plus, les polynômes de Legendre décalés satisfont la propriété suivante :

$$\left(\frac{2(2i+1)}{t_f} \right) P_i(t) = \dot{P}_{i+1}(t) - \dot{P}_{i-1}(t). \tag{2.58}$$

Approximation de fonctions intégrables

Soit $f(t)$ une fonction de carré intégrable sur $[0, t_f]$, alors $f(t)$ peut être exprimée en termes de polynômes de Legendre décalés comme suit :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i P_i(t) = f^T P(t), \quad (2.59)$$

où

$$f^T = [f_0, f_1, \dots, f_{m-1}]^T, \quad (2.60)$$

est le spectre de Legendre de $f(t)$, et

$$[P_0(t), P_1(t), \dots, P_{m-1}]^T, \quad (2.61)$$

est le vecteur de polynômes de Legendre décalés. Les coefficients f_i , ($i = 0, 1, 2 \dots, m - 1$) sont déterminés comme suit :

$$f_i = \frac{(2i + 1)}{t_f} \int_0^{t_f} f(t) P_i(t) dt. \quad (2.62)$$

Si on suppose que la dérivée de la fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i P_i(t), \quad (2.63)$$

En utilisant la formule de récurrence (2.58), la relation entre les coefficients f_i de l'équation (2.59) et les g_i de l'équation (2.63) est donnée comme suit :

$$f_i = \frac{h}{2} \left[\frac{g_{i-1}}{(2i-1)} - \frac{g_{i+1}}{(2i+3)} \right], \quad (2.64)$$

Si la série dans l'équation (2.64) est tronquée jusqu'à l'ordre $m - 1$, alors l'équation (2.64) peut s'écrire comme suit :

$$F = \omega G, \quad (2.65)$$

où

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_{m-1}], \quad (2.66)$$

$$G = [g_0, g_1, \dots, g_{m-2}], \quad (2.67)$$

$$(2.68)$$

et ω est une $(m - 1) \times (m - 1)$ -matrice donnée comme suit :

$$\omega = \frac{t_f}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{7} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{9} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(2m-7)} & 0 & \frac{1}{(2m-5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(2m-5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{(2m-3)} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

En utilisant l'équation (2.65), on aura

$$G \approx \theta F, \quad (2.70)$$

où $\theta = \omega^{-1}$.

Soit $\hat{\theta}$ et ϕ deux matrices d'ordre $(m \times m)$ et $(nm \times nm)$, respectivement, définies par :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ 0 & & \theta & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

et

$$\phi = \begin{pmatrix} \hat{\theta} & & 0 \\ & \hat{\theta} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \hat{\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Approximation des problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués

Pour transformer le problème de contrôle optimal à paramètre distribués (2.1)–(2.4) en un problème de contrôle à paramètre localisés c'est-à-dire en un problème de contrôle optimal décrits par les équations aux dérivées ordinaires, on approche d'abord les fonctions $x(z, t)$ et

$u(z, t)$ par des séries de Legendre décalées finies comme suit :

$$x(z, t) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(t) P_i(z) = X^T(t) P(z), \quad 0 \leq z \leq l, \quad (2.73)$$

$$u(z, t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(t) P_i(z) = U^T(t) P(z), \quad 0 \leq z \leq l, \quad (2.74)$$

où

$$X(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)]^T, \quad (2.75)$$

$$U(t) = [u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)]^T, \quad (2.76)$$

$$P(z) = [P_0(z), P_1(z), \dots, P_{n-1}(z)]^T, \quad (2.77)$$

et les $P_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ sont des polynômes de Legendre décalés définis sur $[0, l]$. En multipliant l'équation (2.2) par $P^T(z)$, et en utilisant les équations (2.73)-(2.74) et en intégrant par rapport à z , on aura :

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{X}^T(t) P(z) P^T(z) dz &= \int_0^l X^T(t) \ddot{P}(z) P^T(z) dz + \int_0^l U^T(t) P(z) P^T(z) dz \\ &= -X^T(t) \int_0^l \dot{P}(z) \dot{P}^T(z) dz + \int_0^l U^T(t) P(z) P^T(z) dz. \end{aligned} \quad (2.78)$$

En utilisant l'équation (2.55), on obtient :

$$\int_0^l P(z) P^T(z) dz = l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix} = D. \quad (2.79)$$

Soit

$$d_{ij} = \int_0^l \dot{P}_i(z) \dot{P}_j(z) dz,$$

alors

$$\int_0^l \dot{P}(z) \dot{P}^T(z) dz = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0,n-1} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{n-1,0} & d_{n-1,1} & \cdots & d_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = V, \quad (2.80)$$

où

$$d_{ij} = d_{ji} = \begin{cases} \frac{2i(i+1)}{l} & \text{si } i \leq j \text{ et } i+j = 0 \text{ ou pair,} \\ 0 & \text{si } i < j \text{ et } i+j \text{ est impair.} \end{cases} \quad (2.81)$$

En remplaçant les équations (2.79) et (2.80) dans l'équation (2.78), on obtient le système de contrôle décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{X}(t) = A X(t) + U(t), \quad (2.82)$$

avec

$$A = -(D)^{-1} V^T = \frac{-1}{l} \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0,n-1} \\ 3d_{10} & 3d_{11} & \cdots & 3d_{1,n-1} \\ 5d_{10} & 5d_{11} & \cdots & 5d_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (2n-1)d_{n-1,0} & (2n-1)d_{n-1,1} & \cdots & (2n-1)d_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

En remplaçant les équations (2.73)-(2.74) et (2.79) dans (2.1), la fonction coût devient :

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)] dt, \quad (2.84)$$

où

$$Q = q \int_0^l P(z) P^T(z) dz = q D, \quad (2.85)$$

$$R = r \int_0^l P(z) P^T(z) dz = r D, \quad (2.86)$$

$$(2.87)$$

Définition du problème de contrôle optimal à paramètres localisés

Le problème de contrôle optimal à paramètres distribués est maintenant réduit à un problème de contrôle à paramètres localisés, donné par le problème quadratique suivant :

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)] dt, \quad (2.88)$$

sous les contraintes

$$\dot{X}(t) = A X(t) + U(t), \quad (2.89)$$

$$X(0) = X_0, \quad (2.90)$$

2.3 Méthodes indirectes

L'approche indirecte est basée sur le principe : optimiser ensuite discrétiser. Optimiser signifie dériver les conditions nécessaires d'optimalité en utilisant le principe du minimum de Pontryagin. Discrétiser signifie approcher la solution des conditions nécessaires d'optimalité données sous forme d'un problème aux limites. Autrement dit, la méthode indirecte résout le problème indirectement en convertissant le problème de contrôle en un problème aux limites. Par conséquent, dans les méthodes indirectes, la solution du problème est obtenue en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles et la solution obtenue satisfait les conditions initiales et les conditions aux limites.

Pour illustrer le principe de cette approche, on considère le problème de contrôle optimal suivant [22] :

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \| x - x_d \|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\nu}{2} \| u \|_{L^2(Q)}^2, \quad (2.91)$$

sous les contraintes :

$$-\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \Delta x(z, t) = u(z, t), \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, t_f), \quad (2.92)$$

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.93)$$

$$x(z, t) = 0, \quad \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0, t_f), \quad (2.94)$$

avec $x_0(z) \in H_0^1(\Omega)$, $\nu > 0$ est le poids de la fonction coût, et x_d est l'état désiré. En appliquant le principe du minimum de Pontryagin, le système (2.91)-(2.94) est caractérisé

par les conditions d'optimalité suivantes :

$$-\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \Delta x(z, t) - \frac{1}{\nu} p(z, t) = 0, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial t} + \Delta p(z, t) + (x - x_d) = 0, \quad (2.96)$$

$$u = \frac{1}{\nu} p. \quad (2.97)$$

avec la condition initiale $x(z, 0) = x_0(z)$ et la condition terminale pour l'équation de l'état adjoint $p(z, t_f) = 0$.

Approximation des conditions d'optimalité

Borzi [22] a proposé une approche basée sur la structure des différences finies et le schéma d'Euler implicite pour le système des conditions d'optimalité (2.95)–(2.97).

Soit $h > 0$ un pas de discrétisation du domaine d'espace et soit la suite de noeuds $\{\Omega_h\}_{h>0}$ définie comme suit :

$$\Omega_h = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_j = j h, \quad j \in \mathbb{Z}\} \cap \Omega. \quad (2.98)$$

On suppose que Ω est un carré et que les valeurs de la grille spatiale de pas h sont choisies de telle sorte que les frontières de Ω coïncident avec les lignes de la grille. Soit $\Delta t = \frac{t_f}{N_t}$ la longueur du pas de discrétisation du domaine du temps, et on définit le maillage

$$Q_{h, \Delta t} = \{(z, t_m) : z \in \Omega_h, t_m = (m - 1) \Delta t, \quad 1 \leq m \leq N_t + 1\}. \quad (2.99)$$

On approche la dérivé temporelle $\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$ au point $z \in \Omega_h$ et $t = t_m$ soit par le schéma implicite

$$\partial_t^+ x_h^m = \frac{x_h^m - x_h^{m-1}}{\Delta t}, \quad (2.100)$$

ou bien par le schéma explicite

$$\partial_t^- x_h^m = \frac{x_h^{m+1} - x_h^m}{\Delta t}, \quad (2.101)$$

et on approche l'opérateur laplacien Δx au point $z \in \Omega_h$ et $t = t_m$ par la formule des cinq points comme suit :

$$\Delta x_h^m = \frac{x_{i+1,j}^m + x_{i-1,j}^m - 4x_{i,j}^m + x_{i,j+1}^m + x_{i,j-1}^m}{h^2}. \quad (2.102)$$

Soit V_h l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur l'intervalle $[t_m, t_{m+1})$ défini sur

le cylindre Q_h comme suit :

$$V_h = \{v_h | v_h(t) = v_h(t_m) \text{ pour } t \in [t_m, t_{m+1}), v_h(t_m) \in L_h^2(\Omega_h)\}. \quad (2.103)$$

Soient $\tilde{R}_{h,Q} : L^2(Q) \rightarrow V_h$ et $R_{h,Q} : H^{2,1}(Q) \rightarrow V_h$ des opérateurs de restriction [38], tel que

$$\|\tilde{R}_{h,Q}v - R_{h,Q}v\|_0 \leq ch^2 \|v\|_{H^{2,1}(Q)}, \quad (2.104)$$

où $\|\cdot\|_0$ désigne la norme associée au produit scalaire discret sur $L^2(Q)$ et c est une constante positive.

Soit x_h^m et u_h^m les approximations de la solution $x(z, t)$ et $u(z, t)$ au point $z \in \Omega_h$ et $t = t_m$, respectivement. Le problème (2.91)–(2.94), peut être réécrit comme suit :

$$\min \frac{1}{2} \|x_h^m - R_{h,Q}x_d\|_0^2 + \frac{\nu}{2} \|u_h^m\|_0^2, \quad (2.105)$$

sous la contrainte

$$-\partial_t^+ x_h^m + \Delta_h y_h^m = u_h^m. \quad (2.106)$$

et les conditions nécessaires d'optimalité sont données par :

$$-\partial_t^+ x_h^m + \Delta_h x_h^m = \frac{\Delta t}{\nu} p_h^m, \quad (2.107)$$

$$\partial_t^- p_h^m + \Delta_h p_h^m = -(x_h^m - \tilde{x}_{dh}^m), \quad (2.108)$$

Le schéma numérique est

$$-(1 + 4\gamma)x_{ij}^m + \gamma(x_{i+1,j}^m + x_{i-1,j}^m + x_{i,j+1}^m + x_{i,j-1}^m) + x_{i,j}^{m-1} = \frac{\Delta t}{\nu} p_{i,j}^m, \quad 2 \leq m \leq N_t + 1, \quad (2.109)$$

$$-(1 + 4\gamma)p_{ij}^m + \gamma(p_{i+1,j}^m + p_{i-1,j}^m + p_{i,j+1}^m + p_{i,j-1}^m) + p_{i,j}^{m+1} = -\Delta t(x_{i,j}^m - \tilde{x}_{di,j}^m), \quad 1 \leq m \leq N_t, \quad (2.110)$$

avec $\gamma = \frac{\Delta t}{h^2}$, $2 \leq i, j \leq N_z$ et $\tilde{x}_d = \tilde{R}_{h,Q}x_d$.

2.4 Conclusion

La solution d'un problème de contrôle optimal des systèmes à paramètres distribués peut être obtenue soit par les méthodes directes ou par les méthodes indirectes.

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de départ en un autre pro-

blème plus simple à résoudre en utilisant différentes techniques de résolution, telles que la discrétisation en espace, la discrétisation totale ou la méthode de paramétrisation.

La résolution par les méthodes directes se fait soit en deux étapes ou en trois étapes selon la technique utilisée.

En utilisant la technique de discrétisation totale la résolution se fait en deux étapes. En première étape, on transforme le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation statique. En deuxième étape, on fait recours à des méthodes d'optimisation appropriées pour obtenir la solution.

En utilisant la technique de discrétisation en espace et la technique de paramétrisation, la résolution se fait en trois étapes. La première étape consiste à transformer le problème de départ à un problème de contrôle en dimension finie. La deuxième étape consiste à transformer le problème obtenu de la première étape soit à un problème d'optimisation statique ou à un problème aux limites. La troisième étape, consiste à déterminer la solution du problème obtenu.

Les méthodes indirectes se font en deux étapes, la première partie repose sur la dérivation des conditions nécessaires d'optimalité par le principe du minimum de Pontryagin, et la deuxième étape fait recours à une méthode numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

Chapitre 3

Méthode des Itérations Variationnelles

3.1 Introduction

La modélisation des phénomènes physiques, biologiques, économiques et industriels se fait par des équations différentielles ordinaires, des équations différentielles à retard, des équations intégrales, des équations intégro-différentielles et par des équations aux dérivées partielles. Ces équations sont généralement fortement non linéaires et leurs solutions analytiques est difficile voir impossible à déterminer par des moyens analytiques. Pour obtenir la solution de ces équations, on fait appel aux méthodes numériques d'approximation classiques, entre autre les méthodes des éléments finis, les méthodes des différences finies, les méthodes des volumes finis, les méthodes spectrales. Ces méthodes utilisent la technique de discrétisation du domaine de définition du problème étudié pour construire un maillage, et la solution est donnée sur les points noeuds de discrétisation.

Dans les trente dernières années, des mathématiciens ont développé des méthodes semi analytiques pour la résolution de ce type de problèmes, telles que la méthode de décomposition d'Adomian [5], la méthode des itérations variationnelles [39], la méthode de perturbation d'homotopie [42].

Ces méthodes permettent d'obtenir une solution exacte ou une solution approchée avec une grande précision, même aux équations qui sont fortement non linéaires, en utilisant un schéma itératif.

La Méthode des Itérations Variationnelles (en anglais Variational Iteration Method (VIM)) a été établie par le mathématicien Chinois Ji-Huan He [39] en 1997. Elle a été utilisée pour la première fois pour la résolution des équations aux dérivées partielles [39] et pour la résolution des équations différentielles à retard [40] pour obtenir une solution analytique approchée. Depuis, cette méthode est très utilisée par des mathématiciens et des chercheurs pour manipuler une grande variété d'applications scientifiques et d'ingénierie : linéaires, non linéaires,

homogènes et aussi non homogènes [100, 101, 102, 103, 11, 36, 8, 2].

La méthode des itérations variationnelles est très efficace et fiable pour la résolution analytique ou numérique pour la résolution des équations différentielles. La méthode donne des approximations de la solution qui converge rapidement vers la solution exacte du problème si elle existe, sinon dans le cas où la solution exacte n'existe pas ou la série de fonction générée n'admet pas de forme fermée, alors la solution du problème est approchée par une série tronquée formée par les n premiers termes.

3.2 Méthode de Décomposition d'Adomian

Dans cette section on introduit la méthode de décomposition d'Adomian pour la résolution des équations différentielles ordinaires. Considérons l'équation différentielle suivante donnée sous la forme canonique :

$$L y(t) + R y(t) + N y(t) = h(t), \quad (3.1)$$

où L et R sont des opérateurs linéaires, avec L est la dérivée d'ordre le plus élevé, qu'on suppose qu'il est inversible. N est un opérateur non linéaire et h est une fonction analytique donnée.

L'application de l'opérateur inverse L^{-1} pour l'équation (3.1) donne

$$L^{-1}(L y(t)) = L^{-1}(h(t)) - L^{-1}(R y(t)) - L^{-1}(N y(t)), \quad (3.2)$$

d'où

$$y(t) = \phi(t) - L^{-1}(R y(t)) - L^{-1}(N y(t)), \quad (3.3)$$

où ϕ est une fonction obtenue en intégrant la fonction h et en tenant compte des conditions initiales qui sont supposées prédéterminées.

La méthode de décomposition d'Adomian consiste à chercher la solution sous la forme d'une série infinie

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad (3.4)$$

de plus, le terme non linéaire est décomposé sous forme d'une série de polynômes donnés par la série infinie suivante :

$$N y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad (3.5)$$

où les A_n , $n \geq 0$ sont appelés polynômes d'Adomian qui sont obtenus par la formule suivante

$$A_n(y(t)) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i(t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

En remplaçant les relations (3.4)–(3.5) dans l'équation (3.3), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \phi(t) - L^{-1} \left(R \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y(t)) \right), \quad (3.7)$$

d'où le schéma itératif suivant :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \phi(t), \\ y_1(t) &= -L^{-1}R(y_0(t)) - L^{-1}A_0, \\ y_2(t) &= -L^{-1}R(y_1(t)) - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ y_{k+1}(t) &= -L^{-1}R(y_k(t)) - L^{-1}A_k, \end{aligned} \quad (3.8)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \phi(t), \\ y_{k+1}(t) &= -L^{-1}R(y_k(t)) - L^{-1}A_k, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Une fois les termes $y_k(t)$, $k \geq 0$ sont déterminés, on peut obtenir une solution approchée donnée par la série tronquée

$$y(t) \approx y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n y_k(t), \quad n \geq 0 \quad (3.10)$$

et la solution exacte, si elle existe, est obtenue comme suit :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}(t). \quad (3.11)$$

3.3 Méthode de Perturbation d'homotopie

Pour illustrer le principe de la méthode de perturbation d'homotopie [42], (en anglais Homotopy Perturbation Method (HPM)), considérons l'équation différentielle sous la forme

canonique :

$$L(y(t)) + N(y(t)) = h(t), \quad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

où L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire et h est une fonction analytique donnée.

La méthode HPM consiste à introduire un paramètre artificiel $p \in [0, 1]$ déformant le problème de départ en construisant une homotopie

$$v(t, p) : \mathcal{I} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

comme suit :

$$H(v(t, p), p) = (1 - p) [L(v(t, p) - L(y_0(t)))] + p [L(v(t, p) + N(v(t, p)) - h(t)] = 0, \quad (3.14)$$

$t \in \mathcal{I}$, $p \in [0, 1]$, qu'on peut arranger pour obtenir

$$H(v(t, p), p) = L(v(t, p) - L(y_0(t)) + p L(x_0(t)) + p [N(v(t, p) - h(t)] = 0, \quad (3.15)$$

où $y_0(t)$ est l'approximation initiale de la solution du problème de départ. Supposons que la solution de l'équation (3.15) est donnée sous la forme d'une série de puissance de la forme

$$v(t, p) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i(t), \quad (3.16)$$

et le terme non linéaire $N(v(t, p))$ est donné sous la forme d'une série infinie de polynômes

$$N(v(t, p)) = N(v_0(t)) + p N(v_0(t), v_1(t)) + p^2 N(v_0(t), v_1(t), v_2(t)) + \dots \quad (3.17)$$

où $N(v_0(t))$, $N(v_0(t), v_1(t))$, \dots , $N(v_0(t), v_1(t), \dots, v_m(t))$ sont les polynômes de He qui sont définis comme suit [35] :

$$N(v_0(t), v_1(t), \dots, v_m(t)) = \left[\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial p^m} N \left(\sum_{i=0}^m p^i v_i(t) \right) \right]_{p=0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

En remplaçant les équations (3.16) et (3.17) dans (3.15), et en regroupant les coefficients

p de même puissance, on obtient

$$\begin{aligned}
 p^0 : & \quad L(v_0(t)) - L(y_0(t)) = 0, \\
 p^1 : & \quad L(v_1(t)) - L(y_0(t)) + N(v_0(t)) - h(t) = 0, \\
 p^2 : & \quad L(v_2(t)) + N(v_0(t), v_1(t)) = 0, \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

En résolvant ce système d'équations, on déduit les composantes $v_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots$). Alors, en posant $p = 1$, on obtient une approximation de la solution de équation (3.12) donnée par :

$$y(t) \approx y^N(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{i=0}^N p^i v_i(t).
 \tag{3.20}$$

3.4 Méthode des itérations variationnelles

La méthode des itérations variationnelles permet de résoudre des équations différentielles ordinaires, des équations fractionnaires et des équations aux dérivées partielles. Pour illustrer le principe de la méthode des itérations variationnelles, on considère dans cette section l'application de la méthode à la résolution des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles.

3.4.1 Résolution des équations différentielles ordinaires

Considérons l'équation différentielle écrite sous la forme canonique

$$Ly(t) + Ny(t) = h(t),
 \tag{3.21}$$

où L et N sont respectivement l'opérateur linéaire et non linéaire, et $h(t)$ est une fonction analytique donnée qui représente le terme de la non homogénéité.

Pour obtenir la solution de l'équation (3.21), on construit une fonctionnelle de correction de la forme :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) (Ly_n(\tau) + N\tilde{y}_n(\tau) - h(\tau)) d\tau, \quad \tau \in [0, t]
 \tag{3.22}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange [56], qui peut être identifié par la théorie du calcul des variations, \tilde{y}_n est considérée comme la variation restreinte qui signifie que $\delta \tilde{y}_n = 0$.

L'étape principale de la méthode des itérations variationnelles est d'abord la détermi-

nation du multiplicateur de Lagrange λ de façon optimale par une intégration par parties comme suit :

– si $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$:

En mettant la fonctionnelle de correction stationnaire par rapport à y_n et posant $\delta \tilde{y}_n(0) = 0$, on aura

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) (y_n'(\tau) + N \tilde{y}_n(\tau) - h(\tau)) d\tau, \\ &= \delta y_n(t) + \lambda(t) \delta y_n(t) - \int_0^t \lambda'(\tau) \delta y_n(\tau) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

Alors, de l'équation (3.23), on obtient les conditions de stationnarité

$$\delta y_n(\tau) : \lambda'(\tau) = 0, \quad (3.24)$$

$$\delta y_n(t) : 1 + \lambda(t) = 0, \quad (3.25)$$

ce qui donne $\lambda = -1$.

– Si $L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$, on aura

$$\begin{aligned} \delta y_{n+1}(t) &= \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) y_n''(\tau) d\tau \\ &= \delta y_n(t) + \lambda(t) \delta y_n'(t) - \lambda'(t) \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda''(\tau) \delta y_n(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.26)$$

et les conditions de stationnarité sont données par :

$$\begin{cases} \delta y_n(\tau) : \lambda''(\tau) = 0, \\ \delta y_n(t) : 1 - \lambda'(t) = 0, \\ \delta y_n'(t) : \lambda(t) = 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

ce qui donne $\lambda(\tau) = \tau - t$.

– De manière générale, si $L = \frac{d^m}{dt^m}(\cdot)$ on obtient

$$\lambda(\tau) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (3.28)$$

Une fois le multiplicateur de Lagrange λ est identifié, alors en choisissant une approximation initiale $y_0(t)$ de la solution du problème (3.21), les autres approximations successives $y_i(t)$, $i \geq 0$ sont aisément obtenues en utilisant la fonctionnelle de correction (3.22). Par conséquent,

la solution exacte est donnée par :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t). \quad (3.29)$$

3.4.2 Résolution des équations aux dérivées partielles

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante :

$$L y(z, t) + N y(z, t) = h(z, t), \quad (3.30)$$

où L et N sont respectivement l'opérateur linéaire et non linéaire, et h est une fonction donnée.

Pour les équations aux dérivées partielles, on peut construire la fonctionnelle de correction associée à l'équation (3.30) dans la direction de t et z [39] comme suit :

$$y_{n+1}(z, t) = y_n(z, t) + \int_0^t \lambda(\tau) (L y_n(z, \tau) + N \tilde{y}_n(z, \tau) - h(z, \tau)) d\tau, \quad (3.31)$$

$$y_{n+1}(z, t) = y_n(z, t) + \int_0^z \lambda(\tau) (L y_n(\tau, t) + N \tilde{y}_n(\tau, t) - h(\tau, t)) d\tau. \quad (3.32)$$

3.5 Approche alternative de la méthode des itérations variationnelles

En 2010, Odibat [74] a proposé une autre variante pour la méthode VIM, qui peut être implémentée facilement pour la résolution des équations différentielles non linéaires. Dans ce qui suit, on présente les étapes principales de cette approche.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$L y(t) + N y(t) = h(t), \quad t > 0, \quad (3.33)$$

où $L = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$ est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire et $h(t)$ est une fonction analytique connue. Les conditions initiales sont données par :

$$y^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.34)$$

avec c_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, sont des nombres réels connus.

Selon la méthode des itérations variationnelles, la fonctionnelle de correction de l'équation

(3.33) peut s'écrire comme suit :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t [\lambda(\tau) (L y_n(\tau) + N y_n(\tau) - h(\tau))] d\tau. \quad (3.35)$$

En remplaçant le multiplicateur de Lagrange (3.28) dans la fonctionnelle de correction (3.35), on obtient la formule itérative suivante :

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} (L y_n(\tau) + N y_n(\tau) - h(\tau)) \right] d\tau. \quad (3.36)$$

Soit \mathcal{A} un opérateur défini comme suit :

$$\mathcal{A}[y] = \int_0^t \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} (L y(\tau) + N y(\tau) - h(\tau)) d\tau, \quad (3.37)$$

et définissons les composantes v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ comme suit :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= y_0(t), \\ v_1(t) &= \mathcal{A}[v_0(t)], \\ v_2(t) &= \mathcal{A}[v_0(t) + v_1(t)], \\ &\vdots \\ v_{k+1}(t) &= \mathcal{A}[v_0(t) + v_1(t) + \dots + v_k(t)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Par conséquent, on aura

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (3.39)$$

Donc, la solution du problème (3.33), peut être obtenue en utilisant les relations (3.37) et (3.38), sous la forme d'une série :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (3.40)$$

Choix de l'approximation initiale v_0

L'approximation initiale est donnée par $v_0(t)$ et est choisie en tenant compte des conditions initiales et les conditions aux limites du problème. Pour les problèmes de Cauchy, c'est-à-dire les problèmes à valeurs initiales, l'approximation initiale est donnée par :

$$v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{(k)}}{k!} t^k. \quad (3.41)$$

3.6 Convergence de la méthode des itérations variationnelles

Le concept de la convergence de la méthode des itérations variationnelles a été étudié et démontré par plusieurs auteurs pour la résolution des équations différentielles [44], les systèmes d'équations différentielles [87], les équations intégrales [84], les équations différentielles fractionnaires [106], les équations différentielles a retard [105] et les équations aux dérivées partielles [93, 74]. D'importants théorèmes ont été donnés impliquant les conditions nécessaires et suffisantes de convergence.

La série de fonction $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ définie par (3.40), avec la condition initiale $v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{(k)}}{k!} t^k$, converge vers la solution exacte du problème (3.33)–(3.34). Ce résultat est justifié par le théorème suivant.

Théorème 15 [74]

Soit \mathcal{A} l'opérateur défini par (3.37) d'un espace de Hilbert H dans H . La solution $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, définie en (3.40), converge si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|\mathcal{A}[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k+1}]\| \leq \gamma \|\mathcal{A}[v_0 + v_1 + \cdots + v_k]\| \quad (3.42)$$

c'est-à-dire $\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|$, $\forall k \in N \cup \{0\}$.

Ce théorème est un cas spécial du théorème du point fixe de Banach.

Preuve

Soit la suite $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} S_0 = v_0, \\ S_1 = v_0 + v_1 \\ S_2 = v_0 + v_1 + v_2 \\ \vdots \\ S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \end{cases} \quad (3.43)$$

Montrons que $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert H . Pour cela, on considère

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \gamma \|v_n\| \leq \gamma^2 \|v_{n-1}\| \leq \cdots \leq \gamma^{n+1} \|v_0\| \quad (3.44)$$

Pour tout $n, j \in N, n \geq j$, on a :

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_j\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_{j+1} - S_j)\| \\
&\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \cdots + \|(S_{j+1} - S_j)\| \\
&\leq \gamma^n \|v_0\| + \gamma^{n-1} \|v_0\| + \cdots + \gamma^{j+1} \|v_0\| \\
&= \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1} \|v_0\|.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

et puisque $0 < \gamma < 1$, on aura

$$\lim_{n,j \rightarrow \infty} \|S_n - S_j\| = 0. \tag{3.46}$$

Donc, $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ est une suite de Cauchy, dans l'espace de Hilbert H , ce qui implique que la série $y(t) = \sum_{k=0}^\infty v_k(t)$ définie en (3.40) converge.

Théorème 16 [74]

Si la solution $y(t) = \sum_{k=0}^\infty v_k(t)$, définie en (3.40), converge alors elle est une solution exacte du problème non linéaire (3.33).

Remarque 3

Définissons les paramètres suivants :

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \text{si } \|v_i\| \neq 0, \\ 0 & \text{si } \|v_i\| = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

Si les premiers $\beta_i, i = 1, 2, \dots, l$ ne sont pas inférieurs à 1 et $\beta_i \leq 1$ pour $i > l$, alors la série $\sum_{k=0}^\infty v_k(t)$ du problème (3.33) converge vers la solution exacte du problème. Autrement dit, les premiers termes n'ont pas d'effet sur la convergence de la série. D'après le théorème 15, on a :

$$\|S_n - S_j\| \leq \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1} \|v_0\|, \tag{3.48}$$

et puisque $0 < \gamma < 1$, pour $n \geq j$ et l fixé, on aura

$$\lim_{n,j \rightarrow \infty} \|S_n - S_j\| = 0. \tag{3.49}$$

Dans ce cas, la convergence de VIM dépend des β_i , pour $i > l$.

3.6.1 Résultats de Convergence

Equations différentielles ordinaires

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} y(t) + N y(t) &= h(t), \quad t > 0, \\ y^{(k)} &= c_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \tag{3.50}$$

où $m \in \mathbb{N}$ et N est un opérateur non linéaire et $h(t)$ est une fonction analytique donnée. Alors la solution $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ obtenue par la formule itérative suivante :

$$\begin{cases} v_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k \\ v_{k+1}(t) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau-t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{dt^m} [v_0(\tau) + \dots + v_k(\tau)] \right. \right. \\ \left. \left. + N[v_0(\tau) + \dots + v_k(\tau)] - h(\tau) \right) \right] dt, \end{cases} \tag{3.51}$$

converge vers la solution exacte du problème (3.51) si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.52}$$

Equations aux dérivées partielles

Considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial t^m} y(z, t) + N y(z, t) &= h(z, t), \quad t > 0, \\ y^{(k)}(z, 0) &= f_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \tag{3.53}$$

où $m \in \mathbb{N}$, N est un opérateur non linéaire et h est fonction analytique donnée. La solution $y(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t)$ obtenue en utilisant la formule itérative suivante :

$$\begin{cases} v_0(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(z)}{k!} t^k, \\ v_{k+1}(z, t) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau-t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{dt^m} [v_0(z, \tau) + \dots + v_k(z, \tau)] \right. \right. \\ \left. \left. + N[v_0(z, \tau) + \dots + v_k(z, \tau)] - h(z, \tau) \right) \right] dt, \end{cases} \tag{3.54}$$

converge vers la solution exacte du problème (3.53) si $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que

$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.55)$$

Système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} y_1(t) + N_1(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = h_1(t), \\ \frac{d^m}{dt^m} y_2(t) + N_2(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = h_2(t), \\ \vdots \\ \frac{d^m}{dt^m} y_n(t) + N_n(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = h_n(t), \end{cases} \quad (3.56)$$

où $n, m \in \mathbb{N}$, $N_i, i = 1, \dots, n$ sont des opérateurs non linéaires et $h_i(t), i = 1, \dots, n$ sont des fonctions analytiques données. les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = c_{1,k}, \\ y_2^{(k)} = c_{2,k}, \\ \vdots \\ y_n^{(k)} = c_{n,k}, \end{cases} \quad (3.57)$$

pour $k = 0, 1, \dots, m - 1$. La solution

$$(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_{1,k}(t), \sum_{k=0}^{\infty} v_{2,k}(t), \dots, \sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}(t) \right), \quad (3.58)$$

est obtenue en utilisant la formule itérative suivante :

$$\begin{cases} v_{i,0}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{i,k}}{k!} t^k, \\ v_{i,k+1}(t) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} \left(\frac{d^m}{dt^m} [v_{i,0}(\tau) + \dots + v_{i,k}(\tau)] \right. \right. \\ \left. \left. + N[v_{i,0}(\tau) + \dots + v_{i,k}(\tau)] - h_i(\tau) \right) \right] dt, \end{cases} \quad (3.59)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, et elle converge vers la solution du système (3.56) si $\exists 0 < \gamma_i < 1$ tel que :

$$\|v_{i,k+1}\| \leq \gamma \|v_{i,k}\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{et } \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.60)$$

3.7 Exemples illustratifs

Exemple 1

Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, & 0 < t \leq 1 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases} \quad (3.61)$$

qui a pour solution exacte $y(t) = \sin t$. D'après (3.51), la formule itérative pour le problème (3.61) est donnée par :

$$\begin{cases} v_0(t) = t, \\ v_{k+1}(t) = \int_0^t [(\tau - t) ([v_0''(\tau) + \dots + v_k''(\tau)] + [v_0(\tau) + \dots + v_k(\tau)])] d\tau. \end{cases} \quad (3.62)$$

Cette formule conduit aux approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= t, \\ v_1(t) &= -\frac{1}{3!} t^3, \\ v_2(t) &= \frac{1}{5!} t^5, \\ v_3(t) &= -\frac{1}{7!} t^7, \\ &\vdots \\ v_k(t) &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Rappelons que

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}, \quad (3.64)$$

et on voit aisément que la série de fonction $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge vers la solution exacte $y(t) = \sin(t)$, obtenue en utilisant le développement de Taylor. Le calcul des β_i pour cette

équation donne :

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{\|v_1(t)\|}{\|v_0(t)\|} = \frac{\|t^3/3!\|}{\|t\|} = \frac{1}{3!} < 1, \\
\beta_1 &= \frac{\|v_2(t)\|}{\|v_1(t)\|} = \frac{\|t^5/5!\|}{\|t^3/3!\|} = \frac{3!}{5!} < 1, \\
&\vdots \\
\beta_i &= \frac{\|v_{i+1}(t)\|}{\|v_i(t)\|} = \frac{\|t^{2i+3}/(2i+3)!\|}{\|t^{2i+1}/(2i+1)!\|} = \frac{(2i+1)!}{(2i+3)!} < 1,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

ce qui signifie que tous les β_i sont tous inférieurs à 1, $\forall i \geq 0$ et $0 < t \leq 1$. Ceci confirme que la série générée par la méthode des itérations variationnelle converge vers la solution exacte $y(t) = \sin(t)$.

Exemple 2

Soit l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\begin{cases} y'(t) - y^2(t) - 1 = 0, & 0 < t \leq 1, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{3.66}$$

qui a pour solution exacte $y(t) = tg(t)$. D'après (3.51), la formule itérative du problème (3.66) est donnée comme suit :

$$\begin{cases} v_0(t) = 0, \\ v_{k+1}(t) = - \int_0^t [(v_0(\tau) + \dots + v_k(\tau))^2 - 1] d\tau. \end{cases} \tag{3.67}$$

En utilisant cette dernière, on obtient les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned}
v_0(t) &= 0, \\
v_1(t) &= t, \\
v_2(t) &= \frac{1}{3} t^3, \\
v_3(t) &= \frac{2}{15} t^5 + \frac{1}{63} t^7, \\
v_4(t) &= \frac{4}{105} t^7 + \frac{38}{2835} t^9 + \frac{134}{51975} t^{11} + \frac{4}{12285} t^{13} + \frac{1}{59535} t^{15} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.68}$$

et la série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge vers la solution exacte du problème $y(t) = \tan(t)$. De plus, en calculant les β_i pour ce problème, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 0, \\ \beta_1 = \frac{\|v_2(t)\|}{\|v_1(t)\|} = 0.333333, \\ \beta_2 = \frac{\|v_3(t)\|}{\|v_2(t)\|} = 0.447619, \\ \beta_3 = \frac{\|v_4(t)\|}{\|v_3(t)\|} = 0.364727, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3.69)$$

On remarque que $\beta_i < 1, \forall i \geq 0$ sont tous inférieurs à 1, ce qui implique que la suite de fonctions générée par la méthode des itérations variationnelles converge vers la solution exacte du problème.

Exemple 3

Considérons l'équation de la chaleur homogène suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} y(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} y(z, t) - y(z, t), \quad 0 < z < \pi, t > 0, \\ y(z, 0) = \sin z, \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \end{array} \right. \quad (3.70)$$

qui a pour solution exacte

$$y(z, t) = \sin z e^{-2t}. \quad (3.71)$$

En considérant (3.53), la formule itérative pour le problème (3.70) est donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(x, \tau) = \sin z \\ v_{k+1} = - \int_0^t \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau} v_0(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} v_1(z, \tau) + \dots + \frac{\partial}{\partial \tau} v_k(z, \tau) \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} v_0(z, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_1(z, \tau) + \dots + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_k(z, \tau) \right) \right. \\ \left. + (v_0(z, \tau) + v_1(z, \tau) + \dots + v_k(z, \tau)) \right] d\tau, \end{array} \right. \quad (3.72)$$

ce qui conduit aux approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned}
 v_1(z, t) &= -2t \sin z, \\
 v_2(z, t) &= \frac{(2t)^2}{2!} \sin z, \\
 v_3(z, t) &= -\frac{(2t)^3}{3!} \sin z \\
 &\vdots \\
 v_k(z, t) &= -(-1)^k \frac{(2t)^k}{k!} \sin z.
 \end{aligned}
 \tag{3.73}$$

Par conséquent, la solution est donnée comme suit :

$$y(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z, t) = \sin z \left(1 - (2t) + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{(2t)^k}{k!} \right)
 \tag{3.74}$$

ce qui correspond à la solution exacte (3.71) Calculons maintenant les β_i

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= \frac{\|v_1(z, t)\|}{\|v_0(z, t)\|} = 2, \\
 \beta_1 &= \frac{\|v_2(z, t)\|}{\|v_1(z, t)\|} = 1, \\
 \beta_2 &= \frac{\|v_3(z, t)\|}{\|v_2(z, t)\|} = \frac{2}{3}, \\
 \beta_3 &= \frac{\|v_4(z, t)\|}{\|v_3(z, t)\|} = \frac{1}{2}, \\
 &\vdots \\
 \beta_i &= \frac{\|v_{i+1}(z, t)\|}{\|v_i(z, t)\|} = \frac{2}{i}.
 \end{aligned}$$

On remarque que $\beta_i < 1, \forall i \geq 2$, alors la suite de fonctions générée par la méthode des itérations variationnelles converge vers la solution exacte du problème.

3.8 Couplage de la méthode des lignes avec la méthode des itérations variationnelles

3.8.1 Introduction

La méthode des lignes [104] est une approche pour la résolution des équations aux dérivées partielles, qui est une forme spéciale de la méthode des différences finies standard. La méthode des lignes consiste fondamentalement à discrétiser le domaine du problème partiellement, c'est à dire le domaine est discrétisé soit dans la direction d'espace, discrétisation longitudinale, ou bien dans la direction du temps, discrétisation transversale [67].

3.8.2 Principe de la méthode des lignes

Considérons le problème parabolique suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} y(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} y(z, t) + f(z, t), \quad 0 < z < l, t > 0, \quad (3.75)$$

avec la condition initiale

$$y(z, 0) = y_0(z), \quad z \in]0, l[, \quad (3.76)$$

et les conditions aux limites

$$y(0, t) = g_0(t), \quad t \geq 0, \quad (3.77)$$

$$y(l, t) = g_1(t), \quad t \geq 0, \quad (3.78)$$

où $f(z, t)$, $y_0(x)$, $g_0(t)$ et $g_1(t)$ sont des fonctions données.

Pour approcher la solution du problème (3.75)-(3.78), on transforme l'équation (3.75) en un système d'équations différentielles. Pour cela, on subdivise l'intervalle $[0, l]$ en N_1 sous intervalles de même longueur $h = \frac{l}{N_1}$ pour obtenir les $(N_1 + 1)$ points suivants :

$$z_k = k h, \quad k = 0, \dots, N_1. \quad (3.79)$$

Notons par $y_k(t)$ l'approximation de la la fonction $y(z, t)$ au point (z_k, t) , et en utilisant la technique des différences finies on approche la dérivée spatiale $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(z, t)$ au point (z_k, t) comme suit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(z_k, t) = \frac{1}{h^2} (y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)), \quad k = 1, \dots, N_1 - 1. \quad (3.80)$$

et la dérivée temporelle est approchée au point (z_k, t) par :

$$\frac{\partial}{\partial t} y(z_k, t) = \dot{y}_k(t). \quad (3.81)$$

En remplaçant les équations (3.80)–(3.81) dans l'équation (3.75), on obtient le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \frac{1}{h^2} (y_2(t) - 2y_1(t) + y_0(t)) + f_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = \frac{1}{h^2} (y_3(t) - 2y_2(t) + y_1(t)) + f_2(t), \\ \vdots \\ \dot{y}_{N_1-2}(t) = \frac{1}{h^2} (y_{N_1-1}(t) - 2y_{N_1-2}(t) + y_{N_1-3}(t)) + f_{N_1-2}(t), \\ \dot{y}_{N_1-1}(t) = \frac{1}{h^2} (y_{N_1}(t) - 2y_{N_1-1}(t) + y_{N_1-2}(t)) + f_{N_1-1}(t), \end{array} \right. \quad (3.82)$$

où $f_k(t) = f(z_k, t)$. Les deux termes $y_0(t)$, $y_{n+1}(t)$ sont déterminés en utilisant les conditions aux limites (3.77)–(3.78), ainsi on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(t) = y(0, t) = g_0(t), \\ y_{N_1}(t) = y(l, t) = g_1(t). \end{array} \right. \quad (3.83)$$

Les conditions initiales sont définies comme suit :

$$y_k(0) = y_0(z_k), \quad k = 1, \dots, N_1. \quad (3.84)$$

En remplaçant $y_0(t)$ et $y_{n+1}(t)$ par leurs valeurs, le système (3.82) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \frac{1}{h^2} (y_2(t) - 2y_1(t)) + f_1(t) + \frac{1}{h^2} g_0(t), \\ \dot{y}_k(t) = \frac{1}{h^2} (y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)) + f_k(t), \quad k = 2, \dots, N_1 - 2, \\ \dot{y}_{N_1-1}(t) = \frac{1}{h^2} (-2y_{N_1-1}(t) + y_{N_1-2}(t)) + f_{N_1-1}(t) + \frac{1}{h^2} g_1(t), \end{array} \right. \quad (3.85)$$

qu'on peut mettre sous la forme matricielle

$$\dot{y}(t) = A y(t) + f(t), \quad (3.86)$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + \frac{1}{h^2} g_0(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_{N_1-2}(t) \\ f_{N_1-1}(t) + \frac{1}{h^2} g_1(t) \end{pmatrix}$$

et la condition initiale est donnée par

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_0(z_1) \\ y_0(z_2) \\ \vdots \\ y_0(z_{N_1-1}) \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

Pour approcher la solution du système (3.85) on utilise la méthode des itérations variationnelles. Les fonctionnelles de corrections pour le système (3.85) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} y_1^{n+1}(t) &= y_1^n(t) + \int_0^t \lambda_1(\tau) \left\{ \dot{y}_1^n(\tau) - \frac{1}{h^2} (y_2^n(\tau) - 2y_1^n(\tau)) - f_1(\tau) - \frac{1}{h^2} g_0(\tau) \right\} d\tau, \\ y_k^{n+1}(t) &= y_k^n(t) + \int_0^t \lambda_k(\tau) \left\{ \dot{y}_k^n(\tau) - \frac{1}{h^2} (y_{k+1}^n(\tau) - 2y_k^n(\tau) + y_{k-1}^n(\tau)) - f_k(\tau) \right\} d\tau, \\ k &= 2, \dots, N_1 - 2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} y_{N_1-1}^{n+1}(t) &= y_{N_1-1}^n(t) + \int_0^t \lambda_{N_1-1}(\tau) \left\{ \dot{y}_{N_1-1}^n(\tau) - \frac{1}{h^2} (-2y_{N_1-1}^n(\tau) + y_{N_1-2}^n(\tau)) \right. \\ &\quad \left. - f_{N_1-1}(\tau) - \frac{1}{h^2} g_1(\tau) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

Exemple d'application

Considérons l'équation de la chaleur avec conditions homogènes suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} y(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} y(z, t) - y(z, t), \quad 0 < z < \pi, \quad t > 0, \quad (3.89)$$

$$y(z, 0) = \sin z, \quad (3.90)$$

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad (3.91)$$

qui a pour solution exacte

$$y(z, t) = \sin z e^{-2t}. \quad (3.92)$$

En appliquant la méthode des lignes, l'équation (3.89) devient :

$$\dot{y}_1(t) = \frac{1}{h^2} (y_2(t) - 2y_1(t)) - y_1(t), \quad (3.93)$$

$$\dot{y}_k(t) = \frac{1}{h^2} (y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)) - y_k(t), \quad k = 2, \dots, N_1 - 2, \quad (3.94)$$

$$\dot{y}_{N_1-1}(t) = \frac{1}{h^2} (-2y_{N_1-1}(t) + y_{N_1-2}(t)) - y_{N_1-1}(t), \quad (3.95)$$

La solution exacte ainsi que la solution obtenue en résolvant le système (3.93)–(3.95) par la méthode des itération variationnelles pour $N_1 = 4$ sont données par les figures (3.1)–(3.3).

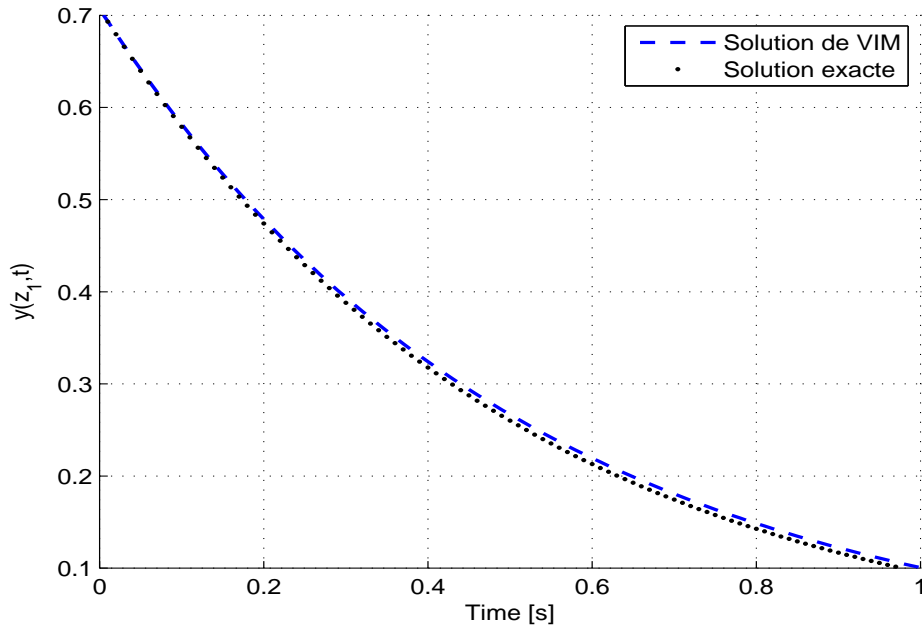


FIGURE 3.1 – Graphe de la solution au point $z = \pi/4$.

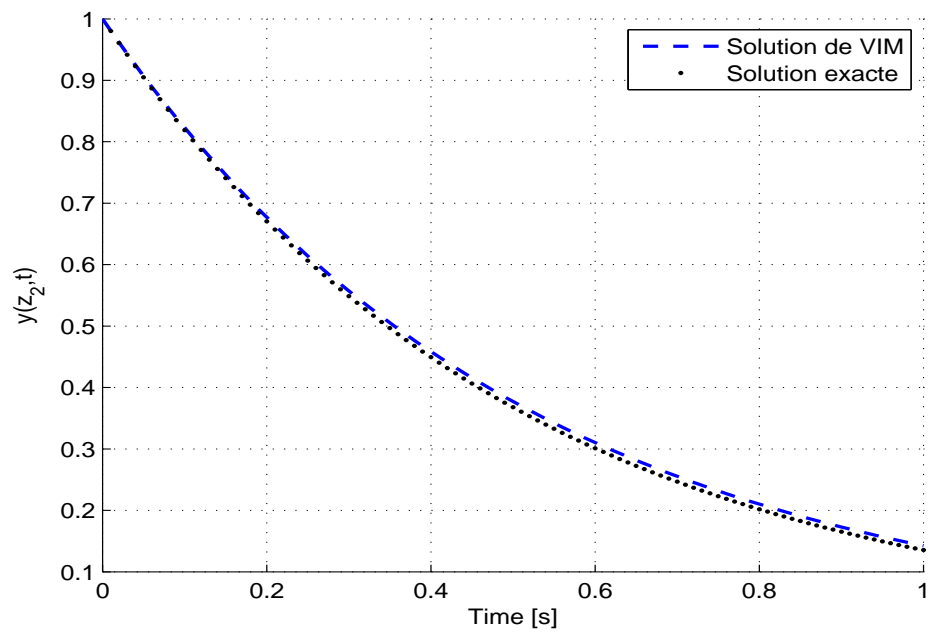


FIGURE 3.2 – Graphe de la solution au point $z = \pi/2$.

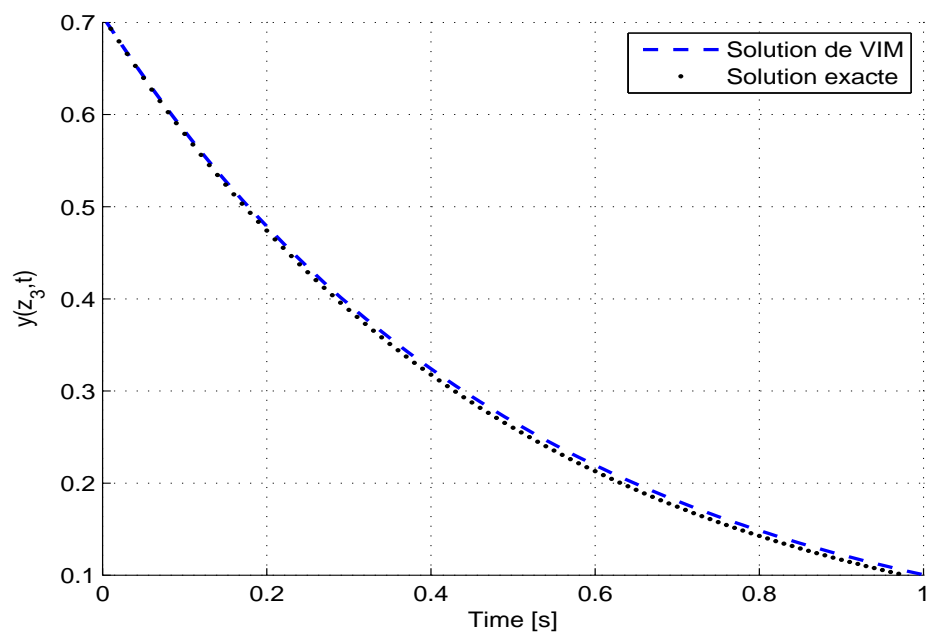


FIGURE 3.3 – Graphe de la solution au point $z = \frac{3\pi}{4}$.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit quelques méthodes itératives pour la résolution des équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles, telle que la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode de perturbation d'homotopie, et la méthode des itérations variationnelles. Ces méthodes utilisent un schéma itératif pour déterminer la solution du problème considéré. La solution, si elle existe, est donnée sous forme d'une série infinie qui converge vers la solution exacte du problème. Pour les problèmes concrets issus de la réalité, où la solution exacte n'existe pas, une série tronquée peut être utilisée pour une solution numérique approchée avec un nombre minime de termes.

Ces méthodes itératives sont démontrées être fiables et efficaces pour les modèles linéaires ainsi que les modèles non linéaires. Elles traitent le problème d'une manière directe sans discrétisation ou linéarisation. Mais toutefois la méthode des itérations variationnelles est avantageuse par rapport à la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie. A l'inverse de la méthode de perturbation d'homotopie, La méthode des itérations variationnelles traite le problème d'une manière directe sans perturbation par des petits paramètres. De plus, la méthode VIM n'exige pas le calcul des polynômes d'Adomian ainsi que les polynômes de He.

Chapitre 4

Résolution de problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles par la méthode des itérations variationnelles

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on utilise la méthode des itérations variationnelles pour obtenir une solution analytique approchée de la loi de commande optimale de problèmes de contrôle optimal des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Nous considérons ici un problème de contrôle optimal avec un critère quadratique, et l'état du système est donné par une equation de diffusion linéaire.

Dans la section 1, pour obtenir la solution de la loi de commande optimale, on utilise le principe du minimum de Pontryagin pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité, qui résultent dans les équations de Hamilton-Pontryagin, ces équations constituent un problème à multi-points aux frontières (limites, bords). Ensuite, pour obtenir la solution de ces équations, qui serve à dériver la loi de la commande, on utilise la méthode des itérations variationnelles.

Dans la section 2, pour obtenir la loi de commande, on transforme d'abord le problème de contrôle de dimension infinie (problème gouverné par les EDPs) à un problème de dimension finie (problème gouverné par les équations aux dérivées ordinaires), en utilisant la méthode des lignes pour transformer l'équation d'état en un système de n équations différentielles de

premier ordre. Ensuite, on utilise la méthode des itérations variationnelles pour approcher la solution des équations de Hamilton-Pontryagin obtenues en utilisant le principe du minimum de Pontryagin, qui constituent un problème aux limites. Nous comparons enfin les résultats obtenus par l'approche proposée avec ceux obtenus avec d'autres approches proposées dans la littérature.

4.2 Résolution par la méthode indirecte

Dans cette section, on introduit le principe du minimum de Pontryagin pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité du problème de contrôle optimal en dimension infinie. Ces conditions sont données sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles soumises à des conditions initiales et aux limites. Ensuite, on utilise la méthode des itérations variationnelles pour déterminer la solution de ce système d'une manière itérative.

4.3 Position du problème

Soit $\Omega = [0, l] \subset \mathbb{R}$ et soit $t_f > 0$ fixé et soit Q le domaine du problème défini par $Q = \Omega \times [0, t_f]$. Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_{u(z,t)} J(u(z, t)) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^l [q (x_d(z, t) - x(z, t))^2 + r u^2(z, t)] dz dt, \quad (4.1)$$

sous les contraintes

$$x_t(z, t) = \Phi(x(z, t), x_z(z, t), x_{zz}(z, t), z, t) + f(z, t) + u(z, t), \quad (4.2)$$

avec

$$x(z, 0) = x_0(z), \quad (4.3)$$

$$x(0, t) = \text{constante}, \quad (4.4)$$

$$x(l, t) = \text{constante}, \quad (4.5)$$

où $x(z, t) \in L^2(Q)$ est la variable d'état, $u(z, t) \in L^2(Q)$ est la variable de contrôle, $x_d(z, t) \in L^2(Q)$ est le profil désiré, et $f(z, t) \in L^2(Q)$ est une fonction donnée qui représente le terme source.

4.4 Conditions nécessaires d'optimalité

Pour déterminer les conditions nécessaires d'optimalité du problème de contrôle optimal (4.1)-(4.5), on utilise l'approche variationnelle basée sur le principe du minimum de Pontryagin.

Posons

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} [q(x_d(z, t) - x(z, t))^2 + r u^2(z, t)], \quad (4.6)$$

et

$$\Phi_2 = \Phi + f + u, \quad (4.7)$$

et considérons la fonctionnelle de performance augmentée, qui inclut l'équation d'état (4.2), donnée par :

$$J_A = J + \int_0^{t_f} \int_0^l p^T(z, t)(\Phi_2 - x_t) dz dt, \quad (4.8)$$

et soit le Hamiltonien \mathcal{H} défini comme suit :

$$\mathcal{H} = \Phi_1 + p \Phi_2, \quad (4.9)$$

où $p(z, t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur adjoint qui est de même dimension que le vecteur d'état $x(z, t)$. Pour obtenir la première variation de l'équation (4.8), on introduit les variations δx , $\delta \dot{x}$, δx_z , δx_{zz} , δu , et δp ,

Considérons l'accroissement de la fonctionnelle augmentée ΔJ_A défini comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta J_A &= J_A(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, x_z + \delta x_z, x_{zz} + \delta x_{zz}, u + \delta u, p + \delta p) \\ &\quad - J_A(x, \dot{x}, x_z, x_{zz}, u, p). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ensuite, en utilisant le développement en séries de Taylor et retenir seulement les termes linéaires, la première variation de la fonctionnelle J_A est :

$$\begin{aligned} \delta J_A &= \int_0^{t_f} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right)^T \delta u + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right)^T \delta x_z + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x_{zz} \right. \\ &\quad \left. + (\Phi_2 - x_t)^T \delta p - p^T \delta \dot{x} \right] dz dt, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Puisque les variations δx_z , δx_{zz} et $\delta \dot{x}$ dépendent de δx , alors pour exprimer la première variation δJ_A uniquement en fonction de δx , on intègre les trois termes suivants par parties,

on obtient :

$$\int_0^l \int_0^{t_f} p^T \delta \dot{x} dt dz = \int_0^l p^T \delta x \Big|_0^{t_f} dz - \int_0^l \int_0^{t_f} \frac{\partial p^T}{\partial t} \delta x dt dz, \quad (4.12)$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \delta x_z dz dt = \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right)^T \delta x \Big|_0^l dt - \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right)^T \delta x dz dt, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x_{zz} dz dt &= \int_0^{t_f} \left[\left(\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) \Big|_0^l - \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x \right) \Big|_0^l \right] dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x dz dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En remplaçant les expressions (4.12)-(4.14) dans (4.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta J_A &= \int_0^{t_f} \int_0^l \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} \right]^T \delta x + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right)^T \delta u, \right. \\ &+ \left. \left(\Phi_2 - \frac{\partial x}{\partial t} \right)^T \delta p \right\} dz dt + \int_0^{t_f} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) \Big|_0^l - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) \Big|_0^l \right]^T \delta x \right. \\ &\left. \left(\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x_z \right) \Big|_0^l \right\} dt + \int_0^l p^T \delta x \Big|_0^{t_f} dz, \end{aligned} \quad (4.15)$$

En appliquant le principe du minimum de Pontryagin, les conditions nécessaires d'optimalité pour un extremum pour J_A sont données comme suit :

– Equation d'état ;

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \Phi(x, x_z, x_{zz}, z, t) + f(z, t) + u(z, t), \quad (4.16)$$

– Equation adjointe ;

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) \right], \quad (4.17)$$

Les équations (4.16)–(4.17) sont appelées les équations de Hamilton-Pontryagin.

– Conditions de transversalité aux limites

$$\left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) \right]^T \delta x + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x_z, \quad z = l, \quad (4.18)$$

$$\left[- \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) \right]^T \delta x - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right)^T \delta x_z, \quad z = 0, \quad (4.19)$$

– Condition de transversalité finale ;

$$\int_0^l p \delta x \Big|_{t=0}^{t_f} dz = 0, \quad (4.20)$$

– Contrôle optimal ;

Si les premières conditions sont satisfaites, alors la première variation devient :

$$\delta J_A = \int_0^{t_f} \int_0^l \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right)^T \delta u dz dt, \quad (4.21)$$

Si la variation δu est sans contraintes, alors la condition nécessaire pour un extremum est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0, \quad (4.22)$$

d'où l'expression de la commande $u(z, t)$ est donnée par

$$u(z, t) = -\frac{1}{r} p(z, t). \quad (4.23)$$

4.5 Résolution des équations de Hamilton-Pontryaguin

4.5.1 Fonctionnelles de correction

Pour résoudre les équations de Hamilton-Pontryaguin (4.16)-(4.17) et approcher la solution du problème de contrôle (4.1)-(4.5) avec la méthode des itérations variationnelles, on écrit les fonctionnelles de correction correspondantes aux équations (4.16)-(4.17) dans la

direction de t , comme suit :

$$x^{(k+1)}(z, t) = x^{(k)}(z, t) + \int_0^t \lambda_x(\tau) \left\{ x_\tau^{(k)}(z, \tau) - \Phi(x^{(k)}, x_z^{(k)}, x_{zz}^{(k)}, z, \tau) - f(z, \tau) + \frac{1}{r} p^{(k)}(z, \tau) \right\} d\tau, \quad (4.24)$$

$$p^{(k+1)}(z, t) = p^{(k)}(z, t) + \int_0^t \lambda_p(\tau) \left\{ p_\tau^{(k)}(z, \tau) + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) \right] \right\} d\tau, \quad (4.25)$$

où λ_x et λ_p sont des multiplicateurs de Lagrange qui valent

$$\lambda_x(\tau) = \lambda_p(\tau) = -1, \quad (4.26)$$

En remplaçant les valeurs des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_x(\tau)$ et $\lambda_p(\tau)$ dans les fonctionnelles de correction (4.24)-(4.25), on obtient les formules itératives suivantes :

$$x^{(k+1)}(z, t) = x^{(k)}(z, t) - \int_0^t \left\{ x_\tau^{(k)}(z, \tau) - \Phi(x^{(k)}, x_z^{(k)}, x_{zz}^{(k)}, z, \tau) - f(z, \tau) + \frac{1}{r} p^{(k)}(z, \tau) \right\} d\tau, \quad (4.27)$$

$$p^{(k+1)}(z, t) = p^{(k)}(z, t) - \int_0^t \left\{ p_\tau^{(k)}(z, \tau) + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{zz}} \right) \right] \right\} d\tau, \quad (4.28)$$

4.5.2 Approximations initiales

Pour démarrer le processus itératif (4.27) – (4.28), on doit d’abord avoir une approximation initiale x^0 et p^0 . Rappelons que la solution approchée des équations (4.16)-(4.17) doit satisfaire la condition initiale (4.3), les conditions aux limites (4.4)-(4.5), les conditions aux limites de transversalité (4.18)-(4.19) et la condition terminale (finale) de transversalité (4.20). Les approximations initiales $x^{(0)}(z, t)$ et $p^{(0)}(z, t)$ peuvent être choisies comme des fonctions à paramètres inconnus qui peuvent être identifiés en imposant la condition initiale, les conditions aux limites et les conditions de transversalité. Le nombre de paramètres inconnus est égal au nombre de conditions à satisfaire.

4.6 Algorithme de la méthode

Les étapes de l’approche proposée pour la résolution des équations de Hamilton-Pontryagin sont résumées dans l’algorithme suivant :

1. Initialisation

Poser $k = 0$, et choisir les approximations initiales $x^{(0)}(z, t)$ et $p^{(0)}(z, t)$ comme des fonctions polynomiales à paramètres inconnus.

2. Déterminer les approximations successives de la solution $x^{(k+1)}(z, t)$ et $p^{(k+1)}(z, t)$ en utilisant les fonctionnelles de correction (4.24) et (4.25).

3. Déterminer les paramètres inconnus en imposant la condition initiale, les conditions aux limites, et les conditions de transversalité.

4. En utilisant l'expression du contrôle (4.23), déterminer la solution approchée de la loi de commande $u^{(k+1)}(z, t)$.

5. Évaluer la valeur de la fonction coût $J(u^{(k+1)})$

6. Si $|J(u^{(k+1)}(z, t)) - J(u^{(k)}(z, t))| \leq \epsilon$, stop sinon, poser $k = k + 1$ et aller à (2).

4.7 Exemples d'application

Dans cette section, on considère un exemple numérique pour illustrer l'approche proposée basée sur la méthode des itérations variationnelles.

Exemple

On considère un problème de contrôle optimal décrit par une équation parabolique linéaire avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet. Le problème est formulé comme suit

$$\min_{u(z,t)} J(u(z, t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[(x_d(z, t) - x(z, t))^2 + u^2(z, t) \right] dz dt, \tag{4.29}$$

sous les contraintes :

$$x_t(z, t) = x_{zz}(z, t) + f(z, t) + u(z, t), \tag{4.30}$$

$$x(0, t) = 0, \tag{4.31}$$

$$x(1, t) = 0, \tag{4.32}$$

$$x(z, 0) = 0, \tag{4.33}$$

$$x_d(z, t) = t^2 z(1 - z), \tag{4.34}$$

$$f(z, t) = 2t^2 z(1 - z). \tag{4.35}$$

Soit le Hamiltonien \mathcal{H} défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, x_z, x_{zz}, u, p, z, t) &= \frac{1}{2} \left[(x_d(z, t) - x(z, t))^2 + u^2(z, t) \right] \\ &+ p(z, t)(x_{zz}(z, t) + f(z, t) + u(z, t)), \end{aligned} \quad (4.36)$$

La loi du contrôle $u(z, t)$ qui minimise le Hamiltonien \mathcal{H} est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0, \quad (4.37)$$

ce qui donne

$$u(z, t) = -p(z, t), \quad (4.38)$$

et les conditions nécessaires d'optimalité, c'est-à-dire les équations de Hamilton-Pontryagin sont données par :

$$x_t(z, t) = x_{zz}(z, t) - p(z, t) + f(z, t), \quad (4.39)$$

$$p_t(z, t) = -p_{zz}(z, t) - x(z, t) + x_d(z, t). \quad (4.40)$$

avec les conditions aux limites (4.31) et (4.32) et la condition initiale (4.33).

Les conditions aux limites transversales (4.18) et (4.19) aux points $z = 0$ et $z = 1$ sont données comme suit :

$$p(0, t) = 0, \quad (4.41)$$

$$p(1, t) = 0. \quad (4.42)$$

La condition finale de transversalité (equation (4.20))

$$p(z, 1) = 0 \quad (4.43)$$

Les fonctionnelles de corrections qui correspondent aux équations de Hamilton-Pontryagin (4.39) et(4.40) dans la direction de t sont :

$$x^{(k+1)}(z, t) = x^{(k)}(z, t) - \int_0^t \{x_\tau^{(k)}(z, \tau) - x_{zz}^{(k)}(z, \tau) + p^{(k)}(z, \tau) - f(z, \tau)\} d\tau, \quad (4.44)$$

$$p^{(k+1)}(z, t) = p^{(k)}(z, t) - \int_0^t \{p_\tau^{(k)}(z, \tau) + p_{zz}^{(k)}(z, \tau) + x^{(k)}(z, \tau) - x_d(z, \tau)\} d\tau, \quad (4.45)$$

Sélection des approximations initiales $x^{(0)}(z, t)$ et $p^{(0)}(z, t)$

Selon les conditions initiales et aux limites qui correspondent au problème de contrôle optimal (4.29)–(4.33), il s'en suit que la solution $x(z, t)$ doit satisfaire la condition initiale (4.33), les deux conditions aux limites (4.31) et (4.32), ainsi la solution $p(z, t)$ doit satisfaire les conditions aux limites de transversalités (4.41)–(4.42) et la condition finale de transversalité (4.43). Alors, chacune des solutions $x(z, t)$ et $p(z, t)$ doit satisfaire trois conditions, d'où les approximations initiales $x^{(0)}(z, t)$ et $p^{(0)}(z, t)$ nécessitent trois paramètres inconnus et sont données par les fonctions suivantes :

$$x^{(0)}(z, t) = a_0 z + a_1 t + a_2, \quad (4.46)$$

$$p^{(0)}(z, t) = b_0 z + b_1 t + b_2, \quad (4.47)$$

avec a_i et b_i , ($i = 0, 1, 2$) sont des paramètres inconnus qui seront déterminés en imposant les conditions aux limites et les conditions de transversalité.

En utilisant les approximations initiales (4.46) et (4.47), dans les formules itératives (4.44)–(4.45), la première itération donne

$$x^{(1)}(z, t) = a_0 z + a_2 - b_0 z t - \frac{b_1 t^2}{2} - b_2 t + \frac{2 t^3 z(1-z)}{3}, \quad (4.48)$$

$$p^{(1)}(z, t) = b_0 z + b_2 - a_0 z t - \frac{a_1 t^2}{2} - a_2 t + \frac{t^3 z(1-z)}{3}. \quad (4.49)$$

En imposant la condition initiale (4.31), les conditions aux limites (4.31) et (4.32), les conditions aux limites de transversalité (4.41)–(4.43) et la condition finale de transversalité (4.43), c'est-à-dire ;

$$x^{(1)}(z, 0) = 0 \quad (4.50)$$

$$x^{(1)}(0, t) = 0, \quad (4.51)$$

$$x^{(1)}(1, t) = 0, \quad (4.52)$$

$$p^{(1)}(0, t) = 0, \quad (4.53)$$

$$p^{(1)}(1, t) = 0, \quad (4.54)$$

$$p^{(1)}(z, 1) = 0, \quad (4.55)$$

on obtient :

$$a_0 = a_2 = b_0 = 0, \quad (4.56)$$

$$a_1 = \frac{2z(z-1)}{3(t^2-1)}, \quad b_1 = -\frac{2tz(z-1)}{3(t^2-1)}, \quad b_2 = \frac{z(z-1)t^2}{3(t^2-1)}, \quad (4.57)$$

d'où la première approximation de la solution est donnée par :

$$x^{(1)}(z, t) = \frac{2t^3 z(1-z)}{3}, \quad (4.58)$$

$$p^{(1)}(z, t) = \frac{t^3 z(1-z)}{3}, \quad (4.59)$$

et la première approximation du contrôle est

$$u^{(1)}(z, t) = -\frac{t^3 z(1-z)}{3}. \quad (4.60)$$

L'évaluation de la fonction coût (4.29) donne

$$J(u^{(1)}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[(x_d(z, t) - x^{(1)}(z, t))^2 + (u^{(1)}(z, t))^2 \right] dz dt = 0.00095238. \quad (4.61)$$

Les résultats obtenus par les autres itérations sont résumés dans le Tableau 4.1.

itération k	$ J(u^{(k)}) - J(u^{(k-1)}) $
0	—
1	$0.183715461e - 5$
2	$0.524223719e - 4$
3	$0.984740568e - 6$
4	$0.933596337e - 6$
5	$0.130975053e - 7$
6	$0.105275454e - 7$
7	$0.110904750e - 9$

TABLE 4.1 – Résultats des itérations.

En choisissant $\varepsilon = 10^{-7}$, la méthode des itérations variationnelles converge après 6 itérations et la solution ε -optimale du contrôle $u(z, t)$ est donnée par :

$$u(z, t) \approx u^{(6)}(z, t) = -\frac{(t^5 - 4t^4 + 56t^3 - 168t^2 + 1680t - 3360) t^3 z (1-z)}{10080}, \quad (4.62)$$

et le profile ϵ -optimal $x(z, t)$ est donné par :

$$x(z, t) \approx x^{(6)}(z, t) = \frac{(t^5 - 16t^4 + 56t^3 - 672t^2 + 1680t - 13440)t^3 z(1-z)}{20160}, \quad (4.63)$$

4.8 Résolution par l'approche directe

Considérons de nouveau le problème de contrôle optimal suivant [86, 98, 82, 57] :

$$\min_{u(z,t)} J(u(z, t)) = \int_0^{t_f} \int_0^l [q x^2(z, t) + r u^2(z, t)] dz dt, \quad (4.64)$$

sous les contraintes :

$$x_t(z, t) = x_{zz}(z, t) + u(z, t), \quad z \in [0, l], t \in (0, t_f) \quad (4.65)$$

$$x(z, 0) = f(z), \quad z \in [0, l], \quad (4.66)$$

$$x_z(0, t) = x_z(l, t) = 0, \quad t \in (0, t_f). \quad (4.67)$$

où q et r sont des valeurs poids positives.

Dans cette section, pour résoudre le problème (4.64)-(4.67) et obtenir une approximation pour le contrôle $u(z, t)$, on le transforme d'abord à un problème de contrôle optimal de dimension finie. Pour cela, on utilise la technique des différences finies pour approcher la dérivée spatiale $x_{zz}(z, t)$ de l'équation d'état (4.65) et la règle des trapèzes pour approcher l'intégrale double du critère à optimiser (4.64) en une intégrale simple.

Le problème de contrôle optimal approché obtenu peut s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$J = \frac{h}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (4.68)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad (4.69)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.70)$$

avec

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r} = \text{diag} \left[\frac{1}{2}, 1, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right], \quad (4.71)$$

et $x_0 = [f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_N)]$ où $x(t)$ et $u(t)$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de contrôle de dimension $N + 1$, A est une $(N + 1) \times (N + 1)$ matrice tridiagonale

donnée comme suit :

$$A = \frac{1}{(h)^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

et B est la matrice identité d'ordre $N + 1$.

4.9 Conditions nécessaires d'optimalité

Le Hamiltonien \mathcal{H} associé au problème de contrôle optimal (4.68)–(4.70) est :

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = \frac{1}{2} h (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) + p^T(t) (A x(t) + B u(t)), \quad (4.73)$$

En utilisant le principe du minimum de Pontryagin, la loi du contrôle optimal $u(t)$ est :

$$u(t) = -\frac{1}{h} R^{-1} B^T p, \quad (4.74)$$

et les équations de Hamilton-Pontryagin sont :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) - \frac{1}{h} B R^{-1} B^T p(t), \\ \dot{p}(t) = -h Q x(t) - A^T p(t), \end{cases} \quad (4.75)$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = x_0, \text{ et } p(t_f) = 0. \quad (4.76)$$

4.10 Résolution des équations de Hamilton-Pontryagin par la méthode des itérations variationnelles

Pour résoudre les équations de Hamilton-Pontryagin (4.75) par la méthode des itérations variationnelles, on définit les fonctionnelles de correction suivantes :

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda_x \left\{ \dot{x}^{(k)}(\tau) - A \tilde{x}^{(k)}(\tau) + \frac{1}{h} B R^{-1} B^T \tilde{p}^{(k)}(\tau) \right\} d\tau, \quad (4.77)$$

$$p^{(k+1)}(t) = p^{(k)}(t) + \int_0^t \lambda_p \left\{ \dot{p}^{(k)}(\tau) + h Q \tilde{x}^{(k)}(\tau) + A^T \tilde{p}^{(k)}(\tau) \right\} d\tau, \quad (4.78)$$

avec $\lambda_x(\tau)$ et $\lambda_p(\tau)$ sont les vecteurs de multiplicateurs de Lagrange tel que $\lambda_x(\tau) = \lambda_p(\tau) = -1_{N+1}$.

En remplaçant les multiplicateurs de Lagrange par leurs valeurs dans les fonctionnelles de correction (4.77) et (4.78), on obtient les formules itératives suivantes :

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(k)}(t) - \int_0^t \left\{ \dot{x}^{(k)}(\tau) - A x^{(k)}(\tau) + \frac{1}{h} B R^{-1} B^T p^{(k)}(\tau) \right\} d\tau, \quad (4.79)$$

$$p^{(k+1)}(t) = p^{(k)}(t) - \int_0^t \left\{ \dot{p}^{(k)}(\tau) + h Q x^{(k)}(\tau) + A^T p^{(k)}(\tau) \right\} d\tau. \quad (4.80)$$

4.11 Algorithme de l'approche proposée

L'idée principale de l'approche proposée consiste à transformer le problème de contrôle optimal de dimension infinie en un problème de contrôle optimal de dimension finie, par semi-discrétisation de l'équation d'état, et la transformation de l'intégrale double en intégrale simple en utilisant la méthode des trapèzes. Puis, on utilise le principe du minimum de Pontryagin pour déduire les équations de Hamilton-Pontryagin, qui constituent les conditions nécessaires d'optimalité, qu'on résout avec la méthode des itérations variationnelles. La résolution de ces dernières permet de déterminer la trajectoire du vecteur d'état $x(t)$ et la trajectoire du vecteur adjoint $p(t)$ et de déduire la loi du contrôle optimal $u(t)$.

Les étapes de l'approche proposée peuvent être résumées comme suit :

Étape 1 – Transformer l'équation d'état (4.65) en un système d'équations différentielles ordinaires en utilisant la méthode des lignes.

Étape 2 – Transformer l'intégrale double (4.64) en une intégrale simple en utilisant la méthode des trapèzes.

Étape 3 – Définir le Hamiltonien du problème de contrôle optimal.

Étape 4 – Déterminer l'expression du contrôle $u(t)$.

Etape 5 – Déterminer les équations de Hamilton-Pontryagin.

Etape 6 – Poser $k = 0$, $x^{(0)}(t) = [f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_N)]$, $p^{(0)} = \Lambda$, Λ est un vecteur de paramètres inconnus.

Etape 7 – Résoudre les équations de Hamilton-Pontryagin (4.75) avec la méthode des itérations variationnelles en calculant $x^{(k+1)}(t)$ et $p^{(k+1)}(t)$ par les formules itératives (4.79) et (4.80).

Etape 8 – Déterminer les paramètres du vecteur Λ .

Etape 9 – Dédire la loi du contrôle $u^{(k+1)}(t)$ en utilisant la relation (4.74).

Etape 10 – Evaluer la valeur de la fonction coût $J(u^{(k+1)}(t))$.

Etape 11 – Si

$$|J(u^{(k+1)}(t)) - J(u^{(k)}(t))| \leq \epsilon, \quad (4.81)$$

stop, sinon, poser $k = k + 1$ et aller à l'étape (7).

4.12 Exemple d'application

Soit $L = 4$, $t_f = 1$, $q = r = 1$, $f(z) = 1 + z$. En prenant $N = 4$, $h = 1$.

Les matrices du système A , B , R et Q sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

$$Q = R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

et $B = I_5$, avec $x(0) = (1, 2, 3, 4, 5)$.

Pour approcher la solution du problème par la méthode des itérations variationnelles, on

utilise les formules itératives suivantes :

$$x_0^{k+1}(t) = x_0^k(t) - \int_0^t (\dot{x}_0^k(t) + x_0^k(t) - x_1^k(t) + 2p_0^k(t)) d\tau, \quad (4.84)$$

$$x_1^{k+1}(t) = x_1^k(t) - \int_0^t (\dot{x}_1^k(t) - x_0^k(t) + 2x_1^k(t) - x_2^k(t) + p_1^k(t)) d\tau, \quad (4.85)$$

$$x_2^{k+1}(t) = x_2^k(t) - \int_0^t (\dot{x}_2^k(t) - x_1^k(t) + 2x_2^k(t) - x_3^k(t) + p_2^k(t)) d\tau, \quad (4.86)$$

$$x_3^{k+1}(t) = x_3^k(t) - \int_0^t (\dot{x}_3^k(t) - x_2^k(t) + 2x_3^k(t) - x_4^k(t) + p_3^k(t)) d\tau, \quad (4.87)$$

$$x_4^{k+1}(t) = x_4^k(t) - \int_0^t (\dot{x}_4^k(t) - x_3^k(t) + x_4^k(t) + 2p_4^k(t)) d\tau, \quad (4.88)$$

$$p_0^{k+1}(t) = p_0^k(t) - \int_0^t (\dot{p}_0^k(t) + 0.5x_0^k(t) - p_0^k(t) + p_1^k(t)) d\tau, \quad (4.89)$$

$$p_1^{k+1}(t) = p_1^k(t) - \int_0^t (\dot{p}_1^k(t) + x_1^k(t) + p_0^k(t) - 2p_1^k(t) + p_2^k(t)) d\tau, \quad (4.90)$$

$$p_2^{k+1}(t) = p_2^k(t) - \int_0^t (\dot{p}_2^k(t) + x_2^k(t) + p_1^k(t) - 2p_2^k(t) + p_3^k(t)) d\tau, \quad (4.91)$$

$$p_3^{k+1}(t) = p_3^k(t) - \int_0^t (\dot{p}_3^k(t) + x_3^k(t) + p_2^k(t) - 2p_3^k(t) + p_4^k(t)) d\tau, \quad (4.92)$$

$$p_4^{k+1}(t) = p_4^k(t) - \int_0^t (\dot{p}_4^k(t) + 0.5x_4^k(t) + p_3^k(t) - p_4^k(t)) d\tau, \quad (4.93)$$

Pour l'initialisation de l'état, on prend $x_0^0(t) = 1$, $x_1^0(t) = 2$, $x_2^0(t) = 3$, $x_3^0(t) = 4$ et $x_4^0(t) = 5$, et comme la condition initiale du vecteur adjoint est inconnue, on prend $p_0^0(t) = a_0$, $p_1^0(t) = a_1$, $p_2^0(t) = a_2$, $p_3^0(t) = a_3$, et $p_4^0(t) = a_4$, où les a_i , $i = 0, 1, \dots, 4$ sont des paramètres inconnus à déterminer en imposant la condition finale de transversalité $p_i(1) = 0$, $i = 0, 1, \dots, 4$.

Les résultats obtenus sont résumés dans la tableau (4.2).

k	valeur de a	valeur de b	valeur de c	valeur de d	valeur de e	valeur de J
0	1.245454545	1.990909091	2.727272727	3.190909091	2.845454545	14.12639118
1	0.6669349493	1.321418426	1.938547486	2.287520121	1.785579017	16.32063922
2	0.8436088714	1.539636599	2.192594321	2.557460816	2.100523438	15.46197729
3	0.8031494231	1.505607840	2.169347932	2.548904850	2.057429313	15.37872967
4	0.8105175781	1.513599780	2.172921794	2.538682498	2.052456546	15.46851976
5	0.8102173282	1.514079345	2.175842523	2.550314880	2.061161616	15.40262045
6	0.8091913487	1.513288477	2.174635553	2.545185317	2.055986910	15.42620736
7	0.8098896166	1.513899787	2.175133577	2.547441505	2.058150377	15.41599258
8	0.8095102428	1.51359458	2.174938801	2.546651402	2.057291216	15.41935204
9	0.8096710004	1.513733254	2.174997488	2.546933636	2.057581492	15.41822628
10	0.8096098712	1.513682557	2.174975036	2.546848454	2.057486081	15.41856022
11	0.8096300267	1.513700374	2.174980781	2.546874751	2.057513902	15.41846565
12	0.8096238540	1.513695156	2.174978811	2.546867811	2.057506017	15.41849034
13	0.8096255341	1.513696659	2.174979225	2.546869671	2.057508018	15.41848423
14	0.8096250948	1.513696285	2.174979096	2.546869231	2.057507513	15.41848564
15	0.8096252170	1.513696401	2.174979139	2.546869345	2.057507630	15.41848533

TABLE 4.2 – Résultats des itérations.

et l'écart entre deux itérations successives est donné dans le tableau (4.3).

k	$J(u^k) - J(u^{k-1})$	k	$J(u^k) - J(u^{k-1})$
0	—	8	0.00335946
1	2.19424804	9	0.0011257
2	0.85866193	10	0.0003339
3	0.08324761	11	0.0000945
4	0.08979008	12	0.0000247
5	0.06589932	13	0.0000061
6	0.02358692	14	0.0000014
7	0.01021478	15	0.0000003

TABLE 4.3 – Comparaison entre deux itérations successives .

En considérons $\epsilon = 10^{-6}$, la méthode des itérations variationnelles converge après 16 itérations, et les approximations de la loi de commande sont :

$$\begin{aligned}
u_0(t) = & -1.619250398 + 2.408142362t - 1.062765583t^2 + 0.4026781716t^3 \\
& - 0.1326126870t^4 + 0.01455952776t^5 - 0.0089592772t^6 \\
& - 0.2846989396e - 3t^7 - 0.127117082e - 2t^8 + 0.32323698e - 4t^9 \\
& - 0.251806878e - 3t^{10} + 0.16303384e - 4t^{11} - 0.324103648e - 4t^{12} \\
& + 0.211324286e - 5t^{13} - 0.277830360e - 5t^{14} + 0.165510436e - 6t^{15} \\
& - 0.1720932500e - 6t^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(t) = & -1.513696380 + 1.957211565t - 0.7569759535t^2 + 0.345826731t^3 \\
& - 0.050956899t^4 + 0.0050102614t^5 + 0.0181765482t^6 - 0.01109546881t^7 \\
& + 0.0084459888t^8 - 0.003286364231t^9 + 0.00167685339t^{10} - .50223957e - 3t^{11} \\
& + 0.2008540811e - 3t^{12} - 0.49492993e - 4t^{13} + 0.164922161e - 4t^{14} \\
& - 0.3472875075e - 5t^{15} + 0.998259440e - 6t^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(t) = & -2.174979126 + 2.710607476t - 0.924861903t^2 + 0.4639744486t^3 - 0.116022875t^4 \\
& + 0.0807441793t^5 - 0.0537494597t^6 + 0.02622508506t^7 - 0.01527801527t^8 \\
& + 0.005335639257t^9 - 0.00246587239t^{10} + 0.69019840e - 3t^{11} - 0.2646179293e - 3t^{12} \\
& + 0.62393151e - 4t^{13} - 0.204808853e - 4t^{14} + 0.4181375829e - 5t^{15} \\
& - 0.1200698938e - 5t^{16}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(t) = & -2.546869348 + 3.138748069t - .984671197t^2 + 0.2600708979t^3 + 0.187235967t^4 \\
& - 0.1271181726t^5 + 0.0956430335t^6 - 0.03843884604t^7 + 0.01954903537t^8 \\
& - 0.006289200311t^9 + 0.00264113990t^{10} - 0.71512793e - 3t^{11} + 0.2577221925e - 3t^{12} \\
& - 0.60112605e - 4t^{13} + 0.189230606e - 4t^{14} - 0.3866266217e - 5t^{15} \\
& + 0.1077047805e - 5t^{16}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4(t) = & -4.115015278 + 5.978723418t - 2.706894000t^2 + 1.178627690t^3 - 0.377802068t^4 \\
& + 0.0810658110t^5 - 0.0391293684t^6 + 0.00519102792t^7 - 0.00473344802t^8 \\
& + 0.507857770e - 3t^9 - 0.541166404e - 3t^{10} + 0.48642610e - 4t^{11} - 0.493707646e - 4t^{12} \\
& + 0.371570608e - 5t^{13} - 0.35025812e - 5t^{14} + 0.224809468e - 6t^{15} \\
& - 0.195564932e - 6t^{16}.
\end{aligned}$$

Une comparaison est faite entre les résultats obtenus par la présente méthode et les résultats obtenus par Sage et White [86] en résolvant numériquement l'équation de Riccati. Cette comparaison, représentée dans les figures (4.1)–(4.5), montre que les solutions sont les mêmes.

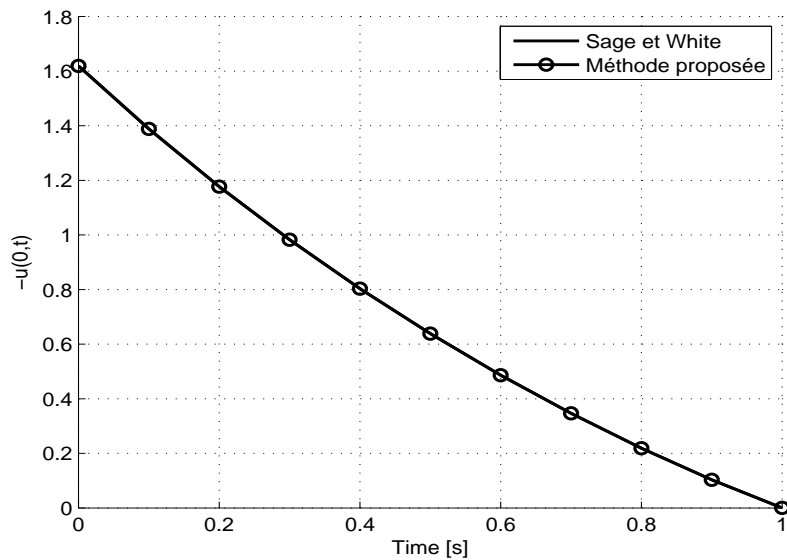


FIGURE 4.1 – Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 0$.

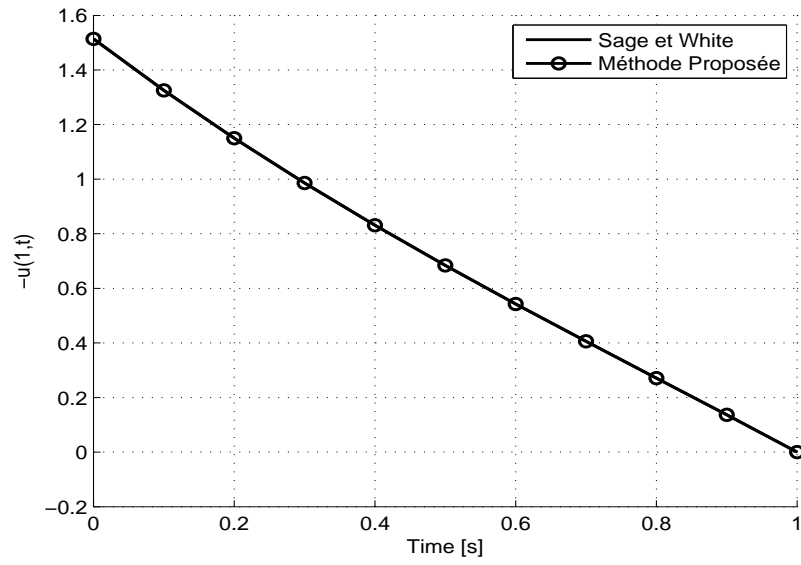


FIGURE 4.2 – Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 1$.

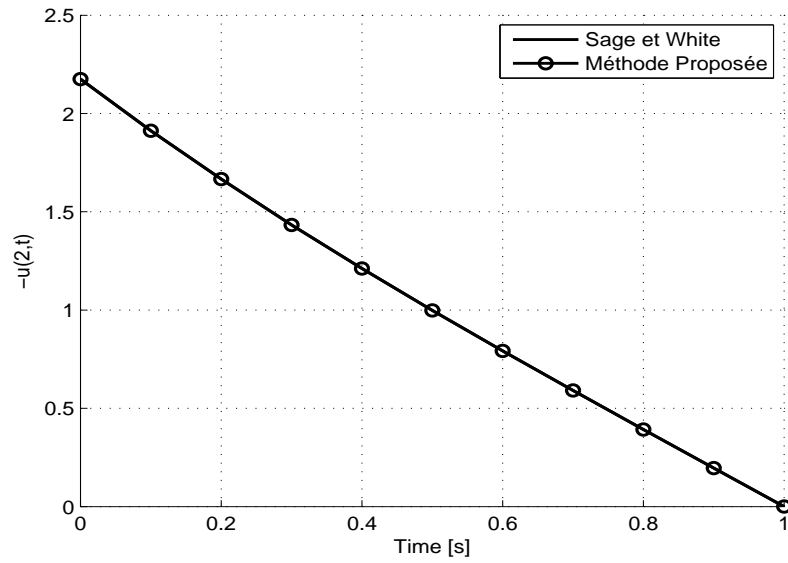


FIGURE 4.3 – Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 2$.

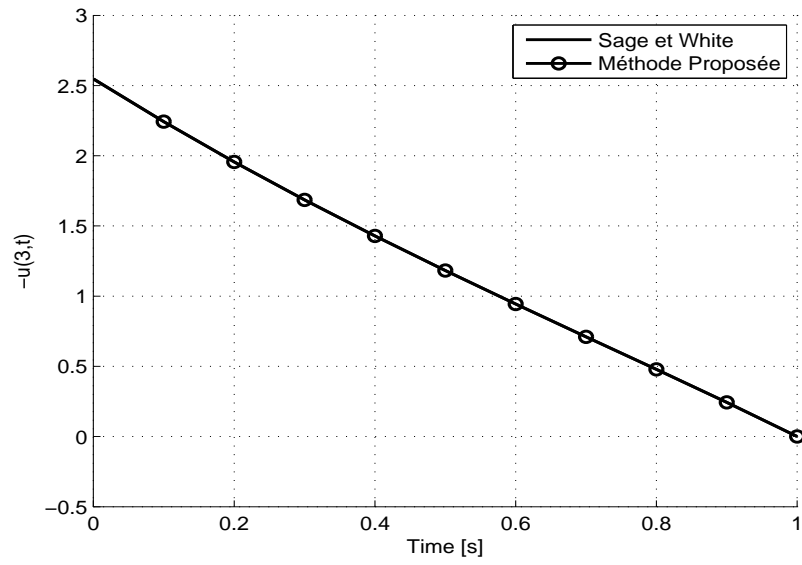


FIGURE 4.4 – Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 3$.

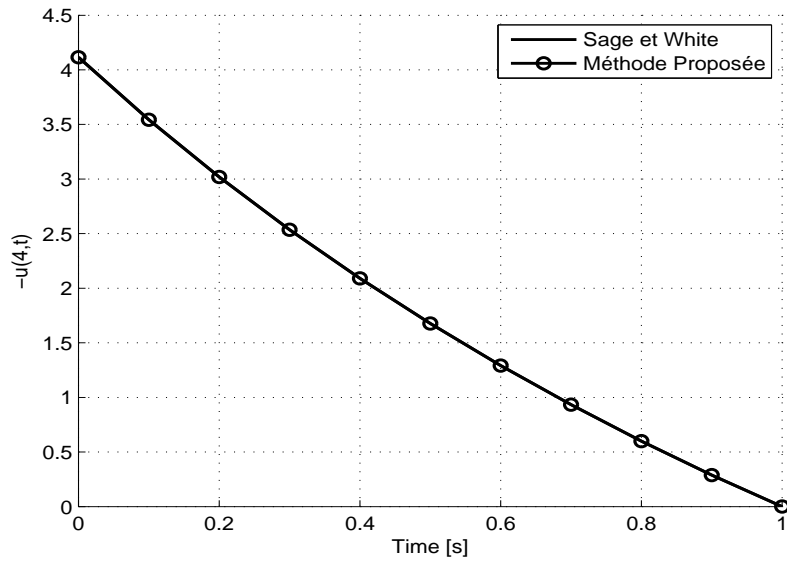


FIGURE 4.5 – Trajectoire du contrôle optimal $u(z, t)$ pour $z = 4$.

Conclusion Générale

La problématique traitée dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes de dimension infinie. Le travail est principalement axé sur le principe du minimum de Pontryagin. L'objectif consiste à proposer un algorithme permettant d'identifier les fonctions initiales pour le vecteur adjoint des équations de Hamilton-Pontryagin et à localiser directement la solution optimale.

Ainsi, après avoir présenté une synthèse sur la théorie du contrôle optimal des systèmes dynamiques de dimensions finie et infinie, un état de l'art sur les méthodes numériques pour la résolution des problèmes de contrôle optimal des systèmes de dimension infinie a été présenté. Puis, l'étude est axée sur les méthodes itératives de résolution des équations différentielles en se basant essentiellement sur la méthode des itérations variationnelles. Cette méthode a été exploitée, par la suite, pour développer un algorithme permettant l'initialisation des variables adjointes des équations de Hamilton-Pontryagin qui constituent un problème ouvert dans la littérature.

A la lumière de la revue réalisée sur les différents travaux reportés dans la littérature, il ressort que la plupart des contributions sont basées sur l'approximation des conditions d'optimalité en utilisant des méthodes numériques basées sur l'approximation des équations ou des solutions. Ce constat a motivé le travail réalisé dans cette thèse pour développer une approche basée directement sur la résolution des équations de Hamilton-Pontryagin sans aucune approximation préalable.

L'idée de base consiste à utiliser un outil mathématique permettant de déterminer la solution d'une équation différentielle sans discrétisation, l'examen de la littérature a révélé l'existence d'une panoplie de méthodes, appelées dans la littérature méthodes itératives, dont le principe général consiste à déterminer la solution itérativement à partir d'une approximation initiale de la solution choisie en tenant compte des conditions initiales et/ou des conditions aux limites. Parmi ces méthodes, on a constaté que les méthodes les plus utilisées et documentées, dans la littérature, sont la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode des itérations variationnelles, et la méthode de perturbation d'homotopie. Ainsi, en se référant aux études comparatives réalisées par certains auteurs, notre choix a été porté sur

la méthode des itérations variationnelles, qui en plus de sa simplicité, cette dernière échappe au calcul des polynômes d'Adomian qui est une étape difficile et nécessite d'énormes calculs. De plus, la convergence de cette méthode a été démontrée par plusieurs auteurs comparativement aux deux autres méthodes pour lesquelles la convergence a été démontrée sous certaines restrictions et hypothèses. Notons aussi, que l'implémentation informatique de la méthode des itérations variationnelles est aussi très simple. Le programme se résume dans une boucle répétitive avec des évaluations des intégrales.

Ainsi, en utilisant la méthode des itérations variationnelles, les conditions d'optimalité, c'est-à-dire les équations de Hamilton-Pontryagin, peuvent être intégrées itérativement à partir des conditions initiales. Pour l'équation d'état, la condition initiale est définie par l'état initial qui est toujours connu. Pour l'équation adjointe, la condition initiale est inconnue. Dans ce cas, une fonction avec des paramètres inconnus dont leur nombre est choisi sur la base des conditions initiales et aux limites qui doivent être satisfaites. Une fois les équations de Hamilton-Pontryagin, sont intégrées, par la méthode des itérations variationnelles, les paramètres inconnus sont déterminés en résolvant un système d'équations algébriques obtenu en imposant les conditions aux limites. Dans le cas de l'existence de plusieurs solutions, la fonction coût doit être évaluée pour les différentes solutions obtenues et la solution à retenir et celle qui donne une valeur optimale du critère. Puis en substituant la solution obtenue dans le critère, on obtient l'expression de la commande optimale. La méthode proposée a été mise sous forme d'un algorithme dont les différentes étapes ont été expliquées.

En perspective, le travail présenté dans cette thèse peut être étendu pour les systèmes à paramètres distribués non linéaires, et d'appliquer la méthode des itérations variationnelles pour des problèmes de contrôle optimal avec des contraintes sur le contrôle et sur l'état.

Bibliographie

- [1] M.A. Abdou and A.A. Soliman. New application of variational iteration method. *Physica D*, 211 :1–8, 2005.
- [2] M.A. Abdou and A.A. Soliman. Variational iteration method for solving burgers and coupled burgers equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181 :245–251, 2005.
- [3] E. M. Abulwafa, M. A. Abdou, and A. A. Mahmoud. The solution of nonlinear coagulation problem with mass loss. *Chaos Solitons Fractal*, 29 :313–330, 2006.
- [4] M. Addam. *Approximation du problème de diffusion en tomographie optique et problème inverse*. PhD thesis, Université du littoral Côte d’Opale, 2010.
- [5] G. Adomian. *Stochastic Systems*. Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [6] G. Adomian. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Academic Press, Inc., New York, 1986.
- [7] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics : the Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [8] A.H.A. Ali and K.R. Raslan. Variational iteration method for solving partial differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40 :1520–1529, 2009.
- [9] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. Gonzalez-Burgos. Controllability for a class of reaction-diffusion systems : the generalized Kalman’s condition. *Applied Mathematics and Computation*, 345 :543–548, 2007.
- [10] M. A. Athans and P. L. Falb. *Optimal Control : An Introduction to the Theory and Its Applications*. Mineola, New York : Dover Publications, 2006.
- [11] B. Batiha, M.S.M. Noorani, I. Hashim, and K. Batiha. Numerical simulations of systems of PDEs by variational iteration method. *Physics Letters A*, 372 :822–829, 2008.
- [12] F. Bauer, L. Grune, and W. Semmler. Adaptive spline interpolation for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Applied Numerical Mathematics*, 56 :1196–1210, 2006.

- [13] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience, 3 ed, 2006.
- [14] R. W. Beard, G. Saridis, and J. T. Wen. Galerkin approximations of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Automatica*, 33 :2159–2177, 1997.
- [15] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [16] S. Berkani, F. Manseur, and A. Maidi. Optimal control based on the variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 64 :604–610, 2012.
- [17] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Belmont, Massachusetts : Athena Scientific Publishers, 2004.
- [18] J. T. Betts. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21 :193–207, 1998.
- [19] J. T. Betts. *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Philadelphia : SIAM Press, 2001.
- [20] J. T. Betts. *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- [21] J. T. Betts and S. L. Campbell. *Discretize then optimize, in Mathematics for Industry : Challenges and Frontiers*. D. Ferguson and T. Peters, eds SIAM, 2005.
- [22] A. Borzi. Multgrid methods for parabolic distributed optimal control problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157 :365–382, 2003.
- [23] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge, United Kingdom : Cambridge University Press, 2004.
- [24] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, Paris, 1987.
- [25] Y. Cao. Numerical approximations of exact controllability problems by optimal control problems for parabolic differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 119 :127–145, 2001.
- [26] R.Y. Chang and S.Y. Yang. Solution of two-point-boundary-value problems by generalized orthogonal polynomials and application to optimal control of lumped and distributed parameter systems. *International Journal of Control*, 43 :1785–1802, 1986.
- [27] J. M. Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.
- [28] R. F. Curtain and A. J. Pritchard. *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [29] R. F. Curtain and H. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, New York, Inc, 1995.

- [30] K. B. Datta and B. M. Mohan. *Orthogonal functions in Systems and Control*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [31] S. Effati and S.H. Nik. Solving a class of linear and non-linear optimal control problems by homotopy perturbation method. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 28 :539–553, 2011.
- [32] P. J. Enright and B. A. Conway. Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15 :994–1002, 1992.
- [33] A. Fakharian and M. T. H. Beheshti. Solving linear and nonlinear optimal control problem using modified adomian decomposition method. *Journal of Computer and Robotics*, 1 :1–8, 2008.
- [34] F. Ghomanjani, S. Ghaderi, and M. H. Farahi. Solving the optimal control of linear systems via homotopy perturbation method. *Intelligent Control and Automation*, 3 :26–33, 2012.
- [35] A. Ghorbani. Beyond Adomian polynomials : He polynomials. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39 :1486–1492, 2009.
- [36] A. Golbabai and M. Javidi. A variational iteration method for solving parabolic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 54 :987–992, 2007.
- [37] N. Govindarajan, C. C. de Visser, and K. Krishnakumar. A sparse collocation method for solving time-dependent HJB equations using multivariate B-splines. *Automatica*, 50 :2234–2244, 2014.
- [38] W. Hackbusch. *Elliptic Partial Differential Equations*. Springer,, New York, 1992.
- [39] J. H. He. A new approach to nonlinear partial differential equations. *Communication Nonlinear Science Numerical Simulation*, 34 :203–205, 1997.
- [40] J. H. He. Variational Iteration Method for Delay Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2 :235–236, 1997.
- [41] J. H. He. Approximation analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. *Computer methods in Applied Mechnics and Engineering*, 167 :57–68, 1998.
- [42] J. H. He. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178 :257–262, 1999.
- [43] J. H. He. Variational iteration iteration method- a kind of nonlinear analytical technique : Some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 :699–708, 1999.

- [44] J. H. He. Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique : some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 :699–708, 1999.
- [45] J. H. He. Homotopy perturbation method : a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, 135 :73–79, 2003.
- [46] J. H. He. Asymptotology by homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation*, 156 :591–596, 2004.
- [47] J. H. He. A generalized variational principle in micromorphic thermoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 32 :93–98, 2005.
- [48] J. H. He. New interpretation of homotopy perturbation method. *International Journal of Modern Physics B*, 20 :2561–2568, 2006.
- [49] J. H. He. Some asymptotic method for strongly nonlinear equations. *International Journal modern Physics B*, 20 :1141–1199, 2006.
- [50] I. R. Horng and J. H. Chou. Application of shifted chebyshev series to the optimal control of linear distributed-parameter systems. *Intenational Journal of Control*, 42 :233–241, 1985.
- [51] C. S. Huang, S. Wang, C. S. Chen, and Z. C. Li. A radial basis collocation method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Automatica*, 42 :2201–2207, 2006.
- [52] D. G. Hull. *Calculus of Variations*. Mineola, New York : Dover Publications, 1974.
- [53] D. G. Hull. *Optimal Control Theory for Applications*. New York : Springer-Verlag, 2003.
- [54] E. Huntley. A note on the application of the matrix riccati equation to optimal control of distributed parameter systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 25 :319–321, 1980.
- [55] O. Imanuvilov, G. Leugering, R. Triggiani, and B. Y. Zhang. *Control Theory of Partial Differential Equations*. Chapman and Hall/CRC, USA, 2005.
- [56] M. Inokuti, H. Sekine, and T. Mura. *General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, in : S. Namat-Nasser, Variational Method in the Mechanics of Solids*. Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [57] S. Kazem J.A. Rad and K. Parand. Optimal control of a parabolic distributed parameter system via radial basis functions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 :2559–2567, 2014.
- [58] B. Kafash, A. Delavarkhalafi, and S. M. Karbassi. Application of variational iteration method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Applied Mathematical Modelling*, 37 :3917–3928, 2013.

- [59] H. B. Keller. *Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems*. SIAM, 1976.
- [60] G. Leitman. *The Calculus of Variations and Optimal Control*. New York : Springer, 1981.
- [61] F. L. Lewis and V. L. Syrmos. *Optimal Control*. New York : JohnWiley and Sons, 2 ed, 1995.
- [62] J. L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differentiel Equations*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [63] J. L. Lions. *Some Aspects of the Optimal Control of Distributed Parameter system*. SIAM, Philadelphia, 1972.
- [64] G. B. Mahapatra. Solution of optimal control problem of linear diffusion equations via walsh functions. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 24 :487–489, 1979.
- [65] A. Maida and J. P. Corriou. Open-loop optimal controller design using variational iteration method. *Applied Mathematics and Computation*, 219 :8632–8645, 2013.
- [66] H.R. Marzban and M. Razzaghi. Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and legendre polynomials. *Journal of the Franklin Institute*, 341 :279–293, 2004.
- [67] R. M. M. Mattheij, S. W. Rienstra, and J. H. M ten Thije Boonkkamp. *Partial Differential Equations : Modeling, Analysis, Computation*. Philadelphia : SIAM Press, 2005.
- [68] K. Mauffrey. *controlabilité des systèmes par des équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2012.
- [69] S. Momani and S. Abusaad. Application of He’s variational iteration method to Helmholtz equation. *Chaos Solitons Fractal*, 27 :1119–1123, 2005.
- [70] S. Momani and Z. Odibat. Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics. *Physics letters A*, 355 :271–279, 2006.
- [71] D.S. Naidu. *Optimal Control Systems*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2003.
- [72] P. Neittaanmäki and D. Tiba. *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms and Applications*. Marcel Dekker, New York, USA, 1994.
- [73] H. Saberi Nik, S. Effati, and M. Shirazian. An approximate-analytical solution for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation via homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, 36 :5614–5623, 2012.
- [74] Z.M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 :1181–1192, 2010.

- [75] D. A. Ondo. *Modélisation et analyse des systèmes à paramètres distribués non linéaires par la méthode de Boltzmann sur réseau : application aux écoulements à surface libre*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2013.
- [76] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Pergamon Press, New York, 1964.
- [77] A. Quarteroni. *Numerical Model for Differential Problems*. Springer, Italia, Second Edition, 2014.
- [78] W. F. Ramirez. *Process Control and Identification*. Academic Press, 1994.
- [79] J. I. Ramos. On the variational iteration method and other iterative techniques for nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 199(1) :39–69, 2008.
- [80] A. V. Rao. A survey of numerical methods for optimal control. *Applied Mathematics and Computation*, 345 :543–548, 2007.
- [81] W. H. Ray. *Advanced Process Control*. Butterworths, Boston, 1989.
- [82] M. Razzaghi and M. Habibi. Application of Legendre series to the control problems governed by linear parabolic equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 42 :77–84, 1996.
- [83] M. Razzaghi and M. Razzaghi. Solution of Linear Two-point Boundary Value Problems and Optimal Control of Time-varying Systems by Shifted Chebyshev Approximations. *Journal of the Franklin Institute*, 327 :321–328, 1990.
- [84] R. Saadati, M. Dehghan, S.M. Vaezpour, and M. Saravi. The convergence of He’s variational iteration method for solving integral equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 58 :2167–2171, 2009.
- [85] I. S. Sadek and M. A. Bokhari. Optimal control of a parabolic distributed parameter system via orthogonal polynomials. *Optim. Control Appl. Meth*, 19 :205–213, 1998.
- [86] A. P. Sage and C. C. White. *Optimal Systems Control*. NJ : Prentice Hall, Englewood cliffs, 1977.
- [87] D. K. Salkuyeh. Convergence of the variational iteration method for solving linear systems of ODEs with constant coefficients. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 :2027–2033, 2008.
- [88] R. W. H. Sargent. Optimal control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124 :361–371, 2000.

- [89] S. Sedaghat, Y. Ordokhani, and M. Dehghan. Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 :4815–4830, 2012.
- [90] J. Shen and T. Tang. *High order numerical methods and algorithms*. Chinese Science Press, 2005.
- [91] L.M. Silverman and H.E. Meadows. Controllability and Observability in Time-Variable Linear Systems. *SIAM Journal on Contro*, 5 :64–73, 1967.
- [92] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, 2002.
- [93] M. Tatari and M. Dehghan. On the convergence of He’s variational iteration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207 :121–128, 2007.
- [94] E. Trélat. *Contôle optimal : théorie et applications*. Mathématiques concrètes, Vuibert, France, 2011.
- [95] E. Trélat. Optimal control theory and some applications to aerospace problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154 :713–758, 2012.
- [96] R. Vinter. *Optimal Control*. Boston, Birkhauser, 2000.
- [97] M. L. Wang and R. Y. Chang. Optimal Control of Lumped Parameter Systems via Shifted Legendre Polynomial Approximation. *Journal of Optimiztion Theory and Applications*, 45 :313–324, 1985.
- [98] M.L. Wang and R.Y. Chang. Optimal control of linear distributed parameter systems by shifted legendre polynomial functions. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 105 :222–226, 1983.
- [99] A. M. Wazwaz. A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207 :129–136, 2007.
- [100] A.M. Wazwaz. A new method for solving singular value problems in the second order ordinary differential equations. *Applied Mathematical and Computer*, 128 :45–57, 2002.
- [101] A.M. Wazwaz. The variational iteration method : A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 54 :926–932, 2007.
- [102] A.M. Wazwaz. The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs. *Computers and Mathematics with Applications*, 54 :895–902, 2007.
- [103] A.M. Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer, 2009.

- [104] A.Vande Wouwer, P.Saucez, and W.E. Schiesser. *Adaptive Method of LINES*. CHAPMAN HALL/CRC, London, 2001.
- [105] S. Yang and A. Xiao. Convergence of the variational iteration method for solving multi-delay differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61 :2148–2151, 2011.
- [106] S. Yang, A. Xiao, and H. Su. Convergence of the variational iteration method for solving multi-order fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 60 :2871–2879, 2010.
- [107] S. A. Yousefi, M. Dehgan, and A. Lotfi. Finding the optimal control of linear systems via He’s variational iteration method. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(5) :1042–1050, 2010.
- [108] J.-P. Yvon. Contrôles des systèmes à paramètres distribués. Techniques de l’Ingénieur, Paris, 2009.