

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master 2
en
Recherche Opérationnelle

Option
Recherche Opérationnelle

Thème

Optimisation semi-infinie.

Présenté par

CHALLAL Sonia

Devant le jury d'examen composé de :

Aidene.M	Professeur	UMMTO	Président
Ouanes.M	M.A.A	UMMTO	Rapporteur
Oukacha.B	M.A.A	UMMTO	Examineur
Merakeb.A	M.A.B	UMMTO	Examineur

Soutenu le 16 / 09 / 2011

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Ouanes Mouhammed pour sa supervision, son appui, sa compréhension et pour la foi inébranlable qu'il a manifestée à l'endroit de ce projet et je remercie les membres de jury. Je tiens également à remercier ma famille, qui a constitué une source d'inspiration unique dans le cadre de ce projet.

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités	6
1.1 Programmation linéaire	6
1.1.1 La forme standard d'un problème de programmation linéaire	6
1.2 Convexité	7
1.2.1 Fonction convexe	9
2 Optimisation semi-infinie linéaire	10
2.1 Introduction	10
2.2 Formulation d'un problème semi-infini	10
2.3 Problème dual d'un problème de programmation semi-infini linéaire	11
2.3.1 Solution de base [1]	12
2.3.2 Ensemble de base	12
2.3.3 Matrice de base	12
2.3.4 Existence d'une solution de base optimale pour le problème dual [1]	12
2.4 Méthodes de résolution d'un problème semi-infini linéaire	13
2.4.1 Résolution par la discrétisation	13
2.4.2 Problème semi-infini discrétisé	14
2.4.3 Algorithme de la méthode	14
2.4.4 Test d'optimalité	14
2.4.5 Algorithme de de résolution de (P.S.I.L) par la discrétisation	16
2.4.6 L'algorithme du simplexe	17
2.4.7 Exemple numérique:	19
Conclusion	21

3	Programmation non linéaire	26
3.1	Introduction	26
3.1.1	Définitions et propriétés	26
3.2	Optimisation sans contraintes	30
3.3	Optimisation avec contraintes égalités	32
3.4	Optimisation avec contraintes inégalités	33
4	Algorithme du gradient projeté pour la programmation semi-infinie	35
4.1	Introduction	35
4.2	Position du problème	35
4.3	Méthode du Lagrangien	37
4.3.1	Condition nécessaire du premier ordre	37
4.3.2	Condition du deuxième ordre	37
4.4	Calcul des directions de descente de (P)	38
	Conclusion	42
	Bibliographie	43

Introduction

Dans de nombreux domaines d'activités humaines (industrie, commerce, économie) les dirigeants d'entreprises sont souvent confrontés à de multitudes de choix lors de la prise de décision concernant une action donnée (organisation d'une production, réseau du transport,...).

Ils sont alors amenés à prendre des décisions qui répondent le mieux à leurs intérêts et ce en appliquant des méthodes qui optimisent des critères qu'ils ont choisis auparavant comme exemple la maximisation d'un profit ou la minimisation d'une dépense.

L'optimisation est un outil pertinent en sciences appliquées et pour l'analyse des systèmes physiques. Pour utiliser cet outil, on doit passer par l'identification des objectifs. Cet objectif peut être le profit, le temps, l'énergie potentielle, ou n'importe quelle quantité ou combinaison de qualité qui peut être représentée par une valeur algébrique. L'objectif dépend de quelques caractéristiques du système, appelées variables ou inconnus. Notre but est de déterminer les valeurs des variables qui optimisent l'objectif. Après l'identification des objectifs des variables pour les problèmes donnés (modélisation) et obtention d'un modèle formulé, un algorithme d'optimisation peut être utilisé pour la résolution du problème.

Il n'existe aucun algorithme universel. Il existe plutôt beaucoup d'algorithmes adaptés à des types particuliers de problèmes d'optimisation. Le choix d'un algorithme approprié pour l'application est laissé alors au décideur (utilisateur). Ce choix est fondamental, il peut déterminer le succès ou l'échec dans la recherche de la solution optimale et peut aussi influencer beaucoup sur le temps de calcul nécessaire à l'estimation de la solution.

La recherche opérationnelle s'appuie sur la représentation des problèmes concrets par des modèles mathématiques dont la résolution entraîne l'usage d'un ordinateur.

Les modèles de programmation linéaire et non linéaire permettant d'aborder un grand

nombre de problèmes d'optimisation en apparence très différent, dans des contextes très divers.

Les problèmes d'optimisation sont classés en fonction des caractéristiques mathématiques de la fonction objectif, des contraintes et des variables d'optimisation, les plus importantes classes d'optimisation sont :

- Problèmes monovariante (une seule variable).
- Problèmes multivariante (plus d'une variable).
- Problèmes continus (variable réelle).
- Problèmes discrets (variables entières).
- Problèmes mixtes (variables réelles et entières).
- Problèmes combinatoires (variables entières avec permutation).
- Problèmes linéaires (fonction objectif linéaire et contraintes linéaires).
- Problèmes quadratiques (fonction objectif quadratique et contraintes quadratiques ou linéaires).
- Problèmes non linéaires (fonction objectif non linéaire et/ou contraintes non linéaires).
- Problèmes avec contraintes.
- Problèmes sans contraintes.

Parmi les problèmes avec contraintes y a ceux qui ont **une infinité de contraintes**, présentant des structures de linéarité et sont appelés **problèmes semi-infinis linéaires**, ceux présentant des structures de convexité sont appelés **problèmes semi-infinis convexes**.

Notre travail s'inscrit dans cette problématique et cela soit dans le cas linéaire ou non linéaire.

Les différentes parties de notre modeste travail sont :

.Première partie : Rappels sur la programmation linéaire et la convexité.

.Deuxième partie : L'optimisation semi-infinie linéaire et les méthodes de résolution.

.Troisième partie : Rappels sur la programmation non linéaire.

- **La quatrième partie :** La programmation semi-infinie non linéaire.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Programmation linéaire

La programmation linéaire est l'un des outils de base de la recherche des optimums, elle intervient dans de nombreux secteurs liés aux activités humaines. Notons comme exemples la maximisation d'un bénéfice de production ou la minimisation d'une perte, soumis à de diverses contraintes de toute sorte comme : stocks, temps de fabrication,....

1.1.1 La forme standard d'un problème de programmation linéaire

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^{j=n} t_{ij} x_j \geq d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

la résolution d'un problèmes pratiques nécessite les étapes suivantes :

- **La modélisation** mathématique du problème sous forme d'un problème de programmation linéaire.
- **Formulation** du problème.
- **Résolution** du problème théorique par les algorithmes.
- **Détermination** de la solution réelle.
- **Vérification** de la validité de la solution.

Exemple

Une compagnie d'alimentation dispose de 2000Kg de café africain, 3000Kg du café brésilien

et 500Kg de café colombien. En utilisant les trois produits, la compagnie possède des mélanges pour obtenir deux types du café commercialisés :

Café type 1 : Constitue 60% du café africain, 30% du café brésilien et 10% du café colombien.

Café type 2 : Constitue 40% du café africain, 40% du café brésilien et 20% du café colombien.

- Le type 1 vaut 140DA le kilogramme.
- Le type 2 vaut 170DA le kilogramme.
- x_1 : quantité de café du type 1.
- x_2 : quantité de café du type 2.

Après la modélisation du problème on obtient la forme mathématique suivante :

$$(P) \begin{cases} 140x_1 + 170x_2 \rightarrow \max \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \leq 2000 \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 \leq 3000 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 \leq 500 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

et pour le résoudre on applique le simplexe.

1.2 Convexité

Définition 1.1. Un ensemble K est dit convexe si $\forall x_1, x_2 \in K, \forall \lambda \in [0,1] :$
 $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K.$

Un polyèdre $\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, \quad A_{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n\}$ est convexe.

Définition 1.2. Soit $\lambda \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i$ est appelée combinaison convexe des points $x^1, \dots, x^n.$

Résultat :

K est convexe si et seulement si toute combinaison convexe des points de K est incluse dans $K.$

Définition 1.3. On appelle enveloppe convexe de S le plus petit ensemble convexe contenant $S.$

Remarque 1.1. Si S est convexe alors $\text{conv}(S) = S$.

Définition 1.4. On appelle combinaison linéaire convexe de n vecteurs: x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}^n , la somme: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ avec $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Définition 1.5. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ alors:

L'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n, ax = \beta\}$ est appelé un Hyperplan de \mathbb{R}^n .

Remarque 1.2. L'hyperplan est un ensemble convexe.

Définition 1.6. Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in \mathbb{R}$ on appelle:

- Demi espace positif fermé, l'ensemble $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, ax \geq \beta\}$.
- Demi espace négatif fermé, l'ensemble $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n, ax \leq \beta\}$.
- Demi espace positif ouvert, l'ensemble $H_+^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n, ax > \beta\}$.
- Demi espace négatif ouvert, l'ensemble $H_-^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n, ax < \beta\}$.

Définition 1.7. L'intersection d'un nombre fini de demi-espace fermé de \mathbb{R}^n est appelé polytope convexe.

Définition 1.8. On appelle polyèdre, un polytope convexe borné (compact de \mathbb{R}^n).

Définition 1.9. Un ensemble de \mathbb{R}^n est dit compact, s'il est fermé et borné.

Exemples :

- **Un rectangle** est un compact de \mathbb{R}^2 .
- **Une sphère** est un compact de \mathbb{R}^3 .

Remarque 1.3. Chaque contrainte d'un problème de programmation linéaire définit un demi-espace fermé et l'ensemble des contraintes définissent un polytope convexe.

1.2.1 Fonction convexe

Définition 1.10. Soit f une fonction définie sur un convexe $K \in \mathbb{R}^n$, f est dite convexe si:

$\forall x_1, x_2 \in K, \quad \forall \lambda \in [0,1] :$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Remarque 1.4. f est dite concave si $(-f)$ est convexe.

Remarque 1.5. Les fonctions linéaires sont convexes et concaves en même temps.

Chapitre 2

Optimisation semi-infinie linéaire

2.1 Introduction

Il existe des logiciels pouvant résoudre des problèmes de taille considérable. Notons toute fois que ces logiciels restent limités et cela dans le cas où le nombre de contraintes est fini.

Dans la pratique, on se trouve souvent confrontés à des situations où le nombre de contraintes est infini. D'où l'intérêt d'adapter les mécanismes de choix des méthodes classiques aux situations plus générales où on dispose d'une infinité dénombrables ou non de contraintes. De ce concept, **La programmation semi-infinie** est née.

2.2 Formulation d'un problème semi-infini

Un problème semi-infini est du type :

$$(P) \begin{cases} f(x) \rightarrow \min \\ g(x,s) \geq b(s), \quad \forall s \in S \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

- S : Un compact de \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}^*$
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$
- $b : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

- Si f et g sont linéaires par rapport à x , on dit qu'on a un problème **semi-infini linéaire (P.S.I.L)**;

- Si f est convexe par rapport à x et/ou g concave par rapport à x on dit qu'on a un

problème **semi-infini convexe (P.S.I.C)**.

• Dans tous les autres cas, on a un **problème semi-infini non linéaire (P.S.I.N.L)**.

Remarque :

Dans ce qui suit on va étudier les problèmes S.I.L qui ont la forme générale suivante :

$$(P) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} C_r x_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) x_r \geq b(s), \quad s \in S \quad x_r \in \mathbb{R}, \quad r = 1 \dots n. \end{cases}$$

- $C_r \in \mathbb{R} \quad \forall r = 1, \dots, n,$
- S : est un compact de $\mathbb{R}^m,$
- $a_r : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2,$
- $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2.$

2.3 Problème dual d'un problème de programmation semi-infini linéaire

Considérons le problème primal suivant :

$$(P) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} C_r y_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r \geq b(s), \quad s \in S, \quad y_r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $\delta = \{s_1, \dots, s_n\}$ un sous ensemble de S , donc le problème dual correspondant s'écrit comme suit :

$$(D) \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} b(s_i) x_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_r(s_i) x_i = C_r, \quad r = 1, \dots, n, \\ s_i \in S, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Une solution du problème (D) sera notée par : $\{\delta, x\}$

- $\delta = \{s_1, \dots, s_n\} \subset S,$
- $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R},$

En posant :

$$C = (c_1, \dots, c_n)^T \text{ et } a(s_i) = (a_1(s_i), \dots, a_n(s_i))^T \in \mathbb{R}^n,$$

le problème devient :

$$(D) \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} b(s_i) x_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{i=n} a(s_i) x_i = C, \\ x = (x_1, \dots, x_n)^T \geq 0 \end{cases}$$

2.3.1 Solution de base [1]

Une solution $\{\delta, x\}$ de (D) est dite de base si les n vecteurs $a(s_1), \dots, a(s_n)$ sont linéairement indépendants.

2.3.2 Ensemble de base

Le sous ensemble $\{s_1, \dots, s_n\}$ de S qui correspond à la solution de base $\{\delta, x\}$ est appelé ensemble de base.

2.3.3 Matrice de base

Soit la matrice $A(s_1, \dots, s_n)$ de dimensions $n \times n$ et de colonnes $[a(s_1), \dots, a(s_n)]$ suivante :

$$A(s_1, \dots, s_n) \begin{pmatrix} a_1(s_1) & \cdot & \cdot & a_1(s_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n(s_1) & \cdot & \cdot & a_n(s_n) \end{pmatrix}$$

On dit que la matrice $A(s_1, \dots, s_n)$ est de base si son rang est égal à n , et le système d'équations :

$$A(s_1, \dots, s_n)x = C$$

a une unique solution donnée par

$$x = A(s_1, \dots, s_n)^{-1} \times C \quad x \geq 0$$

2.3.4 Existence d'une solution de base optimale pour le problème dual [1]

Proposition 1

Parmi les vecteurs $a(s)$, $s \in S$, il y a un sous ensemble de n vecteurs qui sont linéairement indépendants.

Proposition 2

Si (D) est soluble, alors il existe une solution $(\{s_1, \dots, s_q\}, \{x_1, \dots, x_q\})$ telle que : $q \leq n$ et $x_i > 0 \quad i = 1, \dots, q$ et les vecteurs :

$a(s_1), \dots, a(s_q)$ sont linéairement indépendants.

Théorème 1(Existence d'une solution de base optimale) [1]

Si (D) est soluble alors il existe toujours parmi ses solutions une qui est de base.

Théorème 2 [1]

Les solutions $\{\delta, x\}$ et y sont optimales pour (D) et (P) respectivement si et seulement si :

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s)y_r \geq b(s), \quad s \in S \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_r(s_i)x_i = C_r, \quad r = 1, \dots, n \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} y_i(\sum_{i=1}^{i=n} a_r(s_i)x_i - C_r) = 0, & r = 1, \dots, n \\ x_i(\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_i)y_r - b(s_i)) = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{2.3}$$

Les dernières équations sont appelées **Les relations des écarts complémentaires**.

Remarque 2.1. Si on a une solution $\{\delta, x\}$ de (D) , la solution y de (P) , sera trouvée par les relations des écarts complémentaires. De même si on a une solution y de (P) , la solution $\{\delta, x\}$ de (D) sera trouvée.

2.4 Méthodes de résolution d'un problème semi-infini linéaire

2.4.1 Résolution par la discrétisation

La descritisation est une règle permettant d'utiliser un sous ensemble fini de points à partir d'un ensemble infini. Et résoudre avec les méthodes déjà existantes.

On aura alors à la fin une suite de solutions qui va converger vers la solution optimale.

2.4.2 Problème semi-infini discrétisé

Soit (P) le problème $(S.I.I)$ suivant :

$$(P) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} C_r y_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r \geq b(s), \quad s \in S \\ y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Et soit (P_m) le sous problème suivant :

$$(P_m) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} C_r y_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_i) y_r \geq b(s), \quad s_i \in S_m \\ y \in \mathbb{R}^n, \quad S_m = \{s_1, \dots, s_m\} \subset S. \end{cases}$$

(P_m) est appelé **problème discrétisé de (P)**

2.4.3 Algorithme de la méthode

Il s'agit à chaque itération m de résoudre le problème linéaire discrétisé (P_m) .

- Supposons qu'on est à l'itération m , le problème (P_m) peut être résolu par l'algorithme du simplexe qu'on va détailler plus tard.
- Soit $y_m = (y_1^m, y_2^m, \dots, y_n^m)$ la solution de (P_m)

Posons :

$$D = \{y \in \mathbb{R}^n, \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r \geq b(s), \quad s \in S\}$$

$$D_m = \{y \in \mathbb{R}^n, \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_i) y_r \geq b(s_i), \quad s_i \in S_m\}$$

et du fait que $S_m \subset S$ on a bien $D \subset D_m$

2.4.4 Test d'optimalité

Calculons :

$$\min_{s \in S} \left[\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r^m - b(s) \right]$$

On distingue deux cas :

Cas 1

Soit :

$$\min_{s \in S} \left[\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r^m - b(s) \right] \geq 0,$$

donc $Y_m \in D$

Notons par $Y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ la solution optimale de (P) , on a alors :

$$\sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r^* \leq \sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r^m \quad (2.4)$$

et d'autre part $D \in D_m$, alors :

$$\sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r^m \leq \sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r^* \quad (2.5)$$

De (2,4) et (2,5), Y_m est la solution optimale de (P) .

Cas 2 :

Si :

$$\min_{s \in S} \left[\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r^m - b(s) \right] < 0,$$

alors $Y_m \notin D$

On doit chercher une autre solution pour (P) qui sera réalisable et optimale

Trouvons $s' \in S$ tel que :

$$\min_{s \in S} \left[\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r^m - b(s) \right] = \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s') y_r^m - b(s')$$

Posons $S_{m+1} = S_m \cup s'$, $s' \notin S_m$, et passons à l'itération suivante $(m + 1)$ en considérant le nouveau problème discrétisé (P_{m+1}) suivant :

$$(P_{m+1}) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_i) y_r \geq b(s_i) & s_i \in S_{m+1} \\ Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Posons

$$D_{m+1} = \{Y \in \mathbb{R}^n / \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_i) y_r \geq b(s_i), \quad s_i \in S_{m+1}\}$$

On a bien $S_m \subset S_{m+1} \subset S$, et ainsi : $D \subset D_{m+1} \subset D_m, \quad \forall m = 1, \dots$

Soit $Y^{m+1} = (y_1^{m+1}, \dots, y_n^{m+1})$ la solution du problème (P_{m+1}) .

On utilise le même test précédent pour vérifier l'optimalité de Y^{m+1} pour (P) , et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de la solution Y^* du problème (P) .

2.4.5 Algorithme de de résolution de (P.S.I.L) par la discrétisation

Il est donné comme suit :

$$(P) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r \geq b(s), \quad s \in S_m \\ Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1. Posons : $m = 1$.
2. Définir le sous ensemble fini S_m de S .
3. Résoudre le programme linéaire discrétisé P_m où :

$$(P_m) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=n} c_r y_r \\ \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_i) y_r \geq b(s_i), \quad s_i \in S_m \\ Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Soit Y_m sa solution

4. Calculer :

$$\begin{aligned} L^k &= \min_{s \in S} \left[\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s) y_r^m - b(s) \right] \\ &= \sum_{r=1}^{r=n} a_r(s_k) y_r^m - b(s_k) \end{aligned}$$

5. Si : $L^k \geq 0$, aller en 6, sinon aller en 7.
6. Ecrire : Y^m est la solution optimale de (P) , aller vers 8.
7. Posons : $m = m + 1$, et posons : $S_{m+1} = S_m \cup s_k$, aller vers 3.
8. Fin.

Exemple

Soit le problème linéaire semi-infini suivant :

$$(P) \begin{cases} 2y + 1 \rightarrow \min \\ y + s \geq 1, \quad s \in [0,1] \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Posons : $S_1 = 1$

Donc le problème discrétisé correspondant est :

$$(P) \begin{cases} 2y + 1 \rightarrow \min \\ y \geq 0 \end{cases}$$

qui a comme solution : $y^1 = 0$

On a : $\min_{s \in [0,1]} [s - 1] = 0 = 0 - 1 = -1 < 0$,

donc : y^1 n'est pas la solution de (P) .

comme $\min_{s \in [0,1]} [s - 1] = -1$, alors : $s' = 0$

Posons : $S_2 = S_1 \cup 0 = 0,1$, et considérons le problème discrétisé :

$$(P_2) \begin{cases} 2y + 1 \rightarrow \min \\ y + s \geq 1, \quad s \in 0,1 \end{cases}$$

C'est à dire :

$$(P_2) \begin{cases} 2y + 1 \rightarrow \min \\ y \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

La solution de (P_2) est $y = 1$.

Calculons : $\min_{s \in [0,1]} [1 + s - 1] = \min_{s \in [0,1]} [s] = 0 \geq 0$

Donc y^2 est la solution optimale du problème (P) , c'est à dire : $y^* = 1$.

Remarque 2.2. Si on a $S = [\alpha, \beta,]$ avec un changement de variable, on pourra avoir un problème équivalent tel que : $S = [0,1]$.

2.4.6 L'algorithme du simplexe

Soit l'ensemble de base $\delta = (s_1, \dots, s_n) \subset S$ donné. On cherche à déterminer un autre ensemble de base $\delta' \subset S$ et pour celà on doit passer par les étapes suivantes :

Etape 1

Calculer la solution unique positive du système d'équations linéaires suivantes :

$$A(s_1, \dots, s_n)x = C.$$

Etape 2

Calculer l'unique solution du système

$$A^T(s_1, \dots, s_n)y = b(s_1, \dots, s_n)$$

Soit y la solution trouvée, on distingue alors deux cas :

Premier cas :

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s)y_r \geq b(s), \quad s \in S$$

Alors les deux solutions y et $\{\delta,x\}$ sont optimales pour (P) et (D) respectivement, là on s'arrête.

Deuxième cas :

Si y ne vérifie pas toutes les contraintes du problème primal, alors :

$\{\delta,x,y\}$ n'est pas une solution pour le systèmes (2,1),(2,2) et (2,3) précédant. Donc il faut chercher une autre solution $\{\delta',x',y'\}$ qui sera meilleur que $\{\delta,x,y\}$ et qui vérifie :

$$\sum_{r=1}^{r=n} b(s_i)x_i < \sum_{r=1}^{r=n} b(s'_i)x'_i \tag{2.6}$$

$\delta = \{s_1,\dots,s_n\}$ va être remplacé par $\delta' = \{s_1,\dots,s_{r-1},s',s_{r+1},\dots,s_n\} = (\delta \cup \{s'\}) - \{s_r\}$

Quelle est la variable s_r qui va quitter δ et celle (s') qui va la remplacer?

Etape 3

Chercher $s' \in S$ tel que :

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_r(s')y_r < b(s') \tag{2.7}$$

Etape 4

Calculer l'unique solution $d \in R^n$ du système d'équation linéaires :

$$A(s_1,\dots,s_n)d = a(s') \tag{2.8}$$

$a(s_i)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $a(s_i)$, $s_i \in \delta$

Etape 5

Si la solution d est telle que

$$d_i \leq 0 \quad i = 1,\dots,n$$

Dans ce cas les deux problèmes (P) et (D) n'admettent pas de solutions. L'algorithme va s'arrêter ici.

Etape 4

Si dans l'étape 4, $\exists d_i \geq 0$, alors on a choisit un $r \in \{1,\dots,n\}$, $d_r > 0$ tel que :

$$\frac{x_r}{d_r} = \min\{\frac{x_i}{d_i}, \quad d_i > 0\}$$

L'élément s_r correspondant va sortir de δ , alors

$$\delta' = (\delta \cup \{s'\}) - \{s_r\}$$

Montrons que : $\delta' = (\delta \cup \{s'\}) - \{s_r\}$ est un ensemble de base,

Soit :

$$\delta = \{s_1, \dots, s_n\} \text{ et } \delta' = (\delta \cup \{s'\}) - \{s_r\}.$$

Par exemple $r = 1$ c'est à dire : $\delta' = \{s', s_2, \dots, s_n\}$, il s'agit de montrer que : $a(s'), a(s_2), \dots, a(s_n)$ sont linéairement indépendants.

Comme $a(s_2), \dots, a(s_n)$ sont linéairement dépendants donc : $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ tels que $a(s') = \sum (a(s_i))\alpha_i$,

D'autres part on a,

$$a(s') = \sum_{i=1}^{i=n} a(s_i)d_i$$

En comparant les deux écritures du vecteurs $a(s')$ on aura :

$$\begin{cases} d = 0, \\ d_i = \alpha_i, \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Contradiction, car d'après r est tel que : $d_r > 0$, donc les vecteurs $a(s'), a(s_2), \dots, a(s_n)$ sont linéairement indépendants et donc l'ensemble δ' est de base.

2.4.7 Exemple numérique :

Soit le problème semi-infini linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=2} \frac{1+(-1)^{r-1}}{r} y_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=2} s^{r-1} y_r \geq 2^s, \\ y_r \in \mathbb{R}, \quad r = 1, 2. \end{cases}$$

Soit le problème (S.I,L) discrétisé suivant :

$$(P) \begin{cases} \sum_{r=1}^{r=2} \frac{1+(-1)^{r-1}}{r} y_r \rightarrow \min \\ \sum_{r=1}^{r=2} s_i^{r-1} y_r \geq 2^{s_i}, \quad s_i \in S = \{-1, 0, 1\}, \\ y_r \in \mathbb{R}, \quad r = 1, 2. \end{cases}$$

On remplace r par ses valeurs on aura :

$$(P) \begin{cases} y_1 \rightarrow \min \\ y_1 - y_2 \geq \frac{1}{2} \\ y_1 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose $S = \{-1, 0, 1\} = \{s_1, s_2, s_3\}$ alors $s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = 1$, et on pose : $\delta_0 = \{s_1, s_2\} \subset S$ un sous ensemble de S , le dual de P est :

$$(D) \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2} 2^{s_i} x_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{i=2} s_i^{r-1} x_i = \frac{1+(-1)^{r-1}}{r}, \quad r = 1, 2 \\ s_i \in \delta_0 = \{s_1, s_2\} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$a(s_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a(s_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, c'est à dire que la matrice $A(s_1, s_2)$ est de base :

Etape 1 :

On résoud le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 = 0 \end{cases}$$

Sa solution est $(x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$

Etape 2

La solution du système d'équations :

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = \frac{1}{2} \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

est $(y_1^\circ, y_2^\circ) = (1, \frac{1}{2})$

Vérifions si (y_1°, y_2°) est réalisable pour (P) .

Etape 3

Déterminons $s' \in S$ tel que :

$$\sum_{r=1}^{r=2} (s'_i)^{r-1} y_r^\circ < 2^{s'_i}$$

C'est clair que : $s' = s_3, = 1$

Etape 4

Calculons la solution $d \in \mathbb{R}^2$ de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \\ -d_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = -1 \\ d_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow d = (-1, 2)$$

Etape 5

On a $d_1 < 0$, mais : $d_2 > 0$, donc on passe à 6

Etape 6

$d_2 > 0$, donc :

$$\min\left\{\frac{x_1}{d_1}, d_i > 0\right\} = \frac{x_2}{d_2} = \frac{1}{2}$$

Donc c'est s_2 qui sortira de δ_0 .

Posons $\delta_1 = \{s_1, s_3\}$ et on a :

$$a(s_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a(s_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ qui sont L.I.}$$

On revient à l'étape 1 pour faire une itération.

Etape 1

Pour $\delta_1 = \{s_1, s_2\}$, le problème dual correspondant est :

$$(P) \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution du système : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ est $(x_1^1, x_2^1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Etape 2

La solution du système : $\begin{cases} y_1 - y_2 = \frac{1}{2} \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$ est $(y_1^1, y_2^1) = (\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$

$(y_1^1, y_2^1) = (\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ est réalisable pour (P) donc c'est la solution optimale pour le problème (P) .

Le programme

Programme :

```
-----  
function simplex clc; A=[1 1;-1 0] c=[1;0] b=[0.5;1] S=[-1;0;1]  
S1=[1;2];%S1={s1;s2};  
S2=[3];%S2={s3};  
r=1:2;  
%%%%%%%% étape 1 %%%%%%%%%  
disp('étape 1') x=inv(A)*c; disp('Sa solution est : x=') disp(x)  
%%%%%%%% étape 2 %%%%%%%%%  
disp('étape 2') y=inv(A')*b; disp('La solution réalisable pour le  
problème (P) es : y=') disp(y)  
%%%%%%%% étape 3 %%%%%%%%%  
disp('étape 3') for i=1:length(S)  
    for l=1:length(S2)  
        for j=1:2  
            val(1,j)=(S(3)^(j-1));  
            resul(l)= val(1,j).*y(j);  
            s(i)=2^(S(i));  
            if resul(l)<s(i)  
                e=S2(l);  
            end;  
        end;  
    end;  
end; end; disp('e=') disp(e)  
%%%%%%%% étape 4 %%%%%%%%%  
d=inv(A)*val'  
%%%%%%%% étape 5 %%%%%%%%%
```



```

for i=1:length(d)
    if (d(i)<0)
        disp('la solution est ')
    else if (d(i)>0)
        %%%%%%%%% étape 6 %%%%%%%%%
        disp('on passe l''étape 6')
            g=(x(i)./d(i));
            end;
    end;
    end;
    w=min(g)
    disp('Donc c''est s2 qui sortira de S1')
    disp('Posons S1={s1;s3} et on a :')
    A=[1 1;-1 1]
    b=[0.5;2]
%%%%%%%%% étape 1 %%%%%%%%%
disp('étape 1') x=inv(A)*c; disp('x=') disp(x)
%%%%%%%%% étape 2 %%%%%%%%%
disp('étape 2') y=inv(A')*b; disp('y=') disp(y)
-----
Solution :
-----

A =

    1    1
   -1    0

c =

    1
    0

```

b =

0.5000

1.0000

S =

-1

0

1

étape 1 x=

0

1

étape 2 y=

1.0000

0.5000

étape 3 e=

3

d =

-1

2

la solution est optimale, on passe l'étape 6

w =

0.5000

Donc c'est s2 qui sortira de S1 Posons $S1=\{s1;s3\}$ et on a :

A =

1 1
-1 1

b =

0.5000
2.0000

étape 1 x=

0.5000
0.5000

étape 2 y=

1.2500
0.7500

Chapitre 3

Programmation non linéaire

3.1 Introduction

La programmation non linéaire regroupe un ensemble de sujets dans l'étude des problèmes d'optimisation

Une fonction objectif est donnée, et le problème consiste à trouver un point optimum pour cette fonction. Parfois, des contraintes limitent le domaine de la recherche.

Le fonction objectif et les contraintes sont continues et différentiables.

On utilise des résultats d'analyse mathématiques pour caractériser les points candidats :

Un premier pas consiste donc à obtenir des conditions d'optimalité.

Un effort important est consacré à relier des conditions d'optimalité au développement de l'algorithme de résolution.

3.1.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite linéaire si elle s'écrit comme suit

$$f(x) = C^T x = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i$$

- C : Un vecteur constant de \mathbb{R}^n .
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite linéaire si chaque'une de ses composantes $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ est linéaire.

Définition 3.2. Fonction affine

Une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite affine si elle s'écrit :

$$f(x) = C^T x + d$$

- C : Un vecteur constant de \mathbb{R}^n .
- d : Une constante de \mathbb{R} .

Une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite affine si chaque une de ses composantes : $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ est affine :

$$g_i(x) = Ax + b$$

- A : une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- b : un vecteur de \mathbb{R}^m .

Définition 3.3. Fonction non linéaire

Une fonction qui n'est pas affine est dite linéaire.

Définition 3.4. Gradient

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, la fonction notée

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f(x)}{\delta(x_1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\delta f(x)}{\delta(x_n)} \end{pmatrix}$$

est appelée le gradient de f .

Définition 3.5. Dérivée directionnelle

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soient $x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^n$.

La dérivée directionnelle de f au point x dans la direction d est :

$$Df(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \nabla f(x)d$$

elle est aussi appelée taux de variation de f dans la direction $d, d = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$

Le taux de variation devient :

$$\nabla f(x)d = \nabla f(x) \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} = \frac{\|\nabla f(x)\|^2}{\|\nabla f(x)\|} = \|\nabla f(x)\|$$

Soit d une direction quelconque, $d = 1$

$$|\nabla f(x)d| \leq \|\nabla f(x)\| \|d\| = \|\nabla f(x)\|$$

Le taux de variation de f dans la direction du gradient est le plus grand par rapport aux directions c.à.d la fonction croit le plus rapidement possible dans la direction de l'anti-gradient.

On appelle :

- $d = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$: la direction de montée.
- $d = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$: la direction de descente.

Remarque 3.1. Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$ existe et le gradient aussi existe alors, la dérivée directionnelle est le produit scalaire entre le gradient de f et sa direction d et est égale à

$$D(x) = (\nabla f(x))^T d$$

Définition 3.6. Fonction différentiable

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de f dans la direction d existe, alors la fonction f est dite différentiable.

Exemple

Soit $f(x_1, x_2) = \exp x_1 + x_1 x_2^2 - x_1 x_2$

Et soit $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

La dérivée directionnelle de f en $x = (x_1, x_2)$ dans la direction d est :

$$Df(x) = (d_1, d_2) \nabla f(x_1, x_2) = d_1(\exp x_1 + x_2^2 - x_2) + d_2(2x_1 x_2 - x_1)$$

Définition 3.7. La dérivée partielle est égale à la dérivée directionnelle dans la direction des axes des coordonnées.

Théorème : 2

- $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ensemble convexe X . f est convexe

sur X si et seulement si :

$$f(y) - f(x) \geq (y - x)^T \nabla f(x), \quad \forall x, y \in X$$

• $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe sur X si et seulement si :

$$f(y) - f(x) > (y - x)^T \nabla f(x), \quad \forall x, y \in X$$

Définition 3.8. La matrice jacobienne Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

La fonction $J(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ définie par :

$J(x) = (\nabla f(x))^T = \left(\frac{\delta f(x)}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta f(x)}{\delta x_n} \right)$ est appelée matrice jacobienne.

Définition 3.9. Matrice hessienne

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ de classe C^2 . La fonction définie par :

$$H = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_1 \delta x_2} & \dots & \dots & \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_2^2} & \dots & \dots & \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_n \delta x_2} & \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_n \delta x_2} & \dots & \dots & \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice hessienne.

Exemple

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 + x_2 x_3$

Le gradient est donné par :

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 x_3 + x_2 \\ x_1 x_3 + x_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

La hessienne est donné alors par :

$$H = \nabla^2 f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & x_3 + 1 & x_2 \\ x_3 + 1 & 0 & x_1 + 1 \\ x_2 & x_1 + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 3.10. Matrice semi-définie positive

Une matrice A est dite semi-définie positive si

$$xAx \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

Elle est dite définie positive

$$xAx > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

Définition 3.11. Une fonction deux fois défférentiable sur un ensemble convexe X de matrice hessienne semi-définie positive ou resp (semi-définie négative) pour tout $x \in X$ est convexe.

Définition 3.12. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un point x est dit stationnaire si $\nabla f(x) = 0$

Remarque 3.2. La matrice hessienne permet de conclure, s'il s'agit d'un point minimum ou d'un point maximum (ou bien ni l'un ni l'autre).

3.2 Optimisation sans contraintes

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit un problème d'optimisation sans contraintes par :

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min(\max) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Théorème 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en x^* .

x^* est un minimum local alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Démonstration

On écrit la formule de Taylor pour :

$$f(x^* + td) = f(x^*) + \nabla f(x^*)td + o(\|td\|), \quad t > 0, \quad d \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x^* + td) - f(x^*) = \nabla f(x^*)td + o(\|td\|), \quad t > 0, \quad d \in \mathbb{R}^n$$

$$0 \leq \frac{f(x^*+td)-f(x^*)}{t} = \nabla f(x^*)d + \frac{o(\|td\|)}{t}$$

On passe à la limite quand $t \rightarrow 0^+$

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^*+td)-f(x^*)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\nabla f(x^*)d + \frac{o(\|td\|)}{t})$$

$$= \nabla f(x^*)d$$

On a $0 \leq \nabla f(x^*)d, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$

En particulier si $d = -\nabla f(x^*)$, on aura

$$0 \leq \nabla f(x^*)(-\nabla f(x^*)) = \|\nabla f(x^*)\|^2 \Rightarrow \|\nabla f(x^*)\|^2 = 0 \Rightarrow \|\nabla f(x^*)\| = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$$

Remarque 3.3. Ce théorème est appelé condition nécessaire du premier ordre.

Remarque 3.4. Les points x qui vérifient $\nabla f(x) = 0$ sont appelés points critiques ou points stationnaires de f .

Notons que la condition du premier ordre est nécessaire mais pas suffisante.

Théorème 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable alors x^* est un minimum global si et seulement si $\nabla f(x^*) = 0$.

Démonstration

(\Rightarrow) x^* est un minimum global (local) $\Rightarrow \nabla f(x^*) = 0$: c'est le théorème démontré précédemment.

(\Leftarrow)(**La réciproque**) :

On utilise l'inégalité de convexité :

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)(x - x^*), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

On a $\nabla f(x^*) = 0$

D'où $f(x) \geq f(x^*)$, $x \in \mathbb{R}^n$ Donc x^* est un minimum global.

Théorème 3 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , x^* est un minimum local alors :

- $\nabla f(x^*) = 0$
- $Hf(x^*)$ est **semi-définie positive**.

• Pour x^* maximum local, la deuxième condition du théorème devient :

$Hf(x^*)$ est **semi-définie négative**.

Remarque 3.5. Ce théorème est appelé **condition nécessaire du deuxième ordre**.

Démonstration

• La première condition est déjà démontrée.

• La deuxième condition :

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(x^* + td) = f(x^*) + \nabla f(x^*)td + \frac{1}{2}td^T Hf(x^*)td + o(\|td\|)^2$$

$$\text{On a } \nabla f(x^*) = 0$$

$$f(x^* + td) - f(x^*) = \frac{1}{2}td^T Hf(x^*)td + o(\|td\|)^2$$

$$0 \leq \frac{f(x^*+td)-f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2}d^T Hf(x^*)d + \frac{o(\|td\|)^2}{t^2} \quad 0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^*+td)-f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2}d^T Hf(x^*)d + \lim_{0 \rightarrow 0^+} \frac{o(\|td\|)^2}{t^2}$$

$$0 \leq \frac{1}{2}d^T Hf(x^*)d \Rightarrow Hf(x^*) \text{ est semi-définie positive.}$$

Exemple

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow (2x, -2y) = (0,0)$$

$x^* = y^* = 0$ est un point stationnaire.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ cette matrice n'est ni définie positive ni définie négative. Donc $(0,0)$ n'est pas un minimum pour la fonction f .

Les problèmes d'optimisation sans contraintes peuvent être résolus par les différents algorithmes suivants :

- L'algorithme du gradient à pas optimal.
- L'algorithme du gradient à pas constant.
- L'algorithme de Newton-Raphson.

3.3 Optimisation avec contraintes égalités

On définit un problème d'optimisation avec contraintes égalités par

$$(P) = \begin{cases} f(x) \rightarrow \min \\ g_i(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Définition 3.13. On définit le Lagrangien par :

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i g_i(x)$$

Théorème de Lagrange (Condition du premier ordre)

Soit x^* un minimum local régulier pour le problème (P) alors il existe $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ tel que $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n$

Remarque 3.6. $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Définition 3.14. Théorème (Condition du deuxième ordre)

Soient f et g de classes C^2 .

Soit x^* un point régulier alors :

- $\exists \lambda_i^+ \in \mathbb{R} / \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$
- $H_x L(x^*, \lambda^*)$ est semi-définie positive sur $T(x^*)$

3.4 Optimisation avec contraintes inégalités

On définit un problème d'optimisation avec contraintes inégalités le problème suivant :

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min \\ g_i(x) \leq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Définition 3.15. Point régulier

On dit que x^* est régulier c.à.d il vérifie la qualification des contraintes.

Définition 3.16. On dit que $JG(x)$ est de rang plein si le rang de $JG(x) = m$.

Remarque 3.7. $\forall x$ admissible et rang $JG(x) = 1 \Rightarrow JG(x)$ est de rang plein \Rightarrow tous les points admissibles sont des points réguliers, on dit que la qualification des contraintes **(Q.C)** est vérifiée partout.

Définition 3.17. Théorème (Condition du premier ordre)

Supposons que f et $g_i, \quad i = 1, \dots, n$ sont de classe C^1 .

Supposons que x^* est un point régulier pour le problème (P) . Alors il existe $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^* \in \mathbb{R}^+$ appelés multiplicateurs de KARUSH-KUHN-et TUCKER tels que :

- $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$
- $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$

Remarque**Condition de Slater 1950**

- Si les fonctions g_i sont linéaires alors la **Qualification Des Contraintes (Q.C)** est vérifiée partout.

- Si les fonctions g_i sont convexes et il existe \bar{x} tel que $g_i(\bar{x}) < 0$ alors la **(Q.C)** est vérifiée partout. Dans le cas des contraintes égalités h_i et inégalités g_i :

- Si f est convexe, les g_i sont convexes et les h_i sont linéaires et la condition de Slater est vérifiée partout alors la condition nécessaire du premier ordre est suffisante.

Chapitre 4

Algorithme du gradient projeté pour la programmation semi-infinie

4.1 Introduction

Un grand intérêt attire les chercheurs pour la classe des problèmes d'optimisation **Semi-infinie**, qui sont caractérisés par un nombre fini de variables et un nombre infini de contraintes. De tels problèmes apparaissent par exemple dans la réduction de pollution atmosphérique, dans la solution des équations intégrales faiblement singulières, dans la distribution de probabilités, etc...

Nous avons exposé précédemment l'une des techniques de résolution d'un problème semi-infini linéaire citons une autre classe des problèmes semi-infinis : **Problèmes semi-infinis non linéaire** qui fera appel à l'**algorithme du gradient projeté**.

4.2 Position du problème

Soit le problème suivant :

$$(P') \begin{cases} f(x) \rightarrow \min \\ g(x,s) \leq 0 \quad s \in S \end{cases}$$

- S : Un produit cartésien de N intervalles fermés de \mathbb{R} .
- $g : S \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Une fonction deux fois différentiable.
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: deux fois différentiable.

Le but de la méthode est de trouver un point **stationnaire** du problème (P').

Définition 4.1. • $f_j(x) = \frac{\delta f(x)}{\delta x_j}$, $j = 1, \dots, n$ sont les dérivées partielles de f par rapport à x_j .

• $g_j(x, s)$, $j = 1, \dots, n$ sont les dérivées partielles de g par rapport à x_j .

Définition 4.2. Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ une solution réalisable du problème (P')

x^* est un point stationnaire du problème (P') si :

Il existe des points $s_i^* \in S$ tel que $g(x^*, s_i^*) = 0$, $i = 1, \dots, t$ et il existe des scalaires positifs λ_i^* , $i = 1, \dots, t$ tels que :

$$f_j(x^*) + \sum_{i=1}^{i=t} \lambda_i^* g_j(x^*, s_i^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Définition 4.3. Soit x^* la solution réalisable du problème (P').

Et soient les variables s_i , telles que :

$$g(x^*, s_i^*) = 0, \quad i = 1, \dots, t$$

représentent les maximums locaux de la fonction $g(x, s)$ au voisinage de x^* .

Définition 4.4. On définit $E(x)$ l'ensemble des points maximum de g dans S qui satisfont la condition : $g(s, x) \geq -\epsilon$, $\epsilon > 0$

$$E(x) = \{s_i \in S \quad tq : g(x, s_i) = 0, et \exists \epsilon > 0, tq : g(x, s_i) \geq -\epsilon\}.$$

Définition 4.5. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $s = (s_1, \dots, s_N) \in E(x) \subset \mathbb{R}^N$

On définit :

• $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$: les composantes de s sur la frontière de S , $l \leq N$.

• $\nabla_1 g(x, s) = \left(\frac{\delta g(x, s)}{\delta s_1}, \dots, \frac{\delta g(x, s)}{\delta s_l} \right)$.

• $\nabla_2 g(x, s) = \left(\frac{\delta g(x, s)}{\delta s_{(s_{l+1})}}, \dots, \frac{\delta g(x, s)}{\delta s_N} \right)$

On définit :

$$\nabla_2^2 g(x, s) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_{l+1}^2} & \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_{l+1} \delta s_{l+2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_{l+1} \delta s_N} \\ \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_{l+2} \delta s_{l+1}} & \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta^2 s_{l+2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_{l+2} \delta s_N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_N \delta s_{l+1}} & \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta s_N \delta s_{l+2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\delta^2 g(x, s)}{\delta^2 s_N} \end{pmatrix}$$

Définition 4.6. Soit B un sous ensemble ouvert non vide de \mathbb{R}^n tel que :

• $\exists s \in S$ vérifiant

$$\nabla_2 g(x, s) = 0$$

• A chaque point s vérifiant $\nabla_2 g(x, s) = 0$ correspond un maximum local de g d'où $\nabla_2^2 g$ est définie négative.

4.3 Méthode du Lagrangien

4.3.1 Condition nécessaire du premier ordre

On définit le lagrangien par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i h_i(x) \quad (4.2)$$

avec :

$$h_i(x) = g(x, s_i(x)), \quad i = 1, \dots, p \quad (4.3)$$

Si $x^* \in B$

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (4.4)$$

4.3.2 Condition du deuxième ordre

Théorème : 1

Si $x^* \in B$, la solution du (P') tel que $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$ est vérifiée alors :

$$s^T [\nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)] s \geq 0, \quad \forall s : s^T \nabla h_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, t$$

Si la condition du second ordre est vérifiée alors x^* est une solution locale du problème (P') .

Définition 4.7. Soit $\theta > 0$, on définit $P(x)$ la fonction de pénalité associée à $f(x)$ par :

$$P(x) = f(x) + \theta \sum_{i=1}^{i=p} [h_i(x)] \quad (4.5)$$

4.4 Calcul des directions de descente de (P)

Théorème 2

La solution du problème :

$$\begin{cases} d^T(\nabla f(x) + \frac{1}{2}d^T H d) \rightarrow \min_d \\ h_i(x) + d^T \nabla h_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (4.6)$$

est appelée la direction de descente de (P) .

Où :

- $H = \nabla^2 L(x, \lambda)$.
- $\nabla f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Théorème 3

Une solution d est une direction de descente pour (P) au point x , si si le vecteur des multiplicateur de lagrange n'a aucune composante plus grande que θ .

Algorithme de gradient projeté

1. Donner une solution admissible et déterminer $E(x)$, on obtient alors un problème discrétisé.
2. Déterminer une direction de descente pour la fonction de pénalité P et pour garantir la direction de descente, une constante γ doit être déterminée comme le plus grand nombre parmi $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

$$T(\gamma, x) \geq p, \quad T(\gamma, x) = \frac{P(x + \gamma d) - P(x)}{\gamma P'(x, d)}$$

Avec : $P'(x, d) < 0$: est la dérivée directionnelle de la fonction de pénalité au point x dans la direction d .

3. Soit $\sigma = 0,0001$

Afin de calculer H, tq : $H = \nabla^2 L(a, \lambda) + UI$, il est nécessaire d'obtenir des approximations aux multiplicateurs de lagrange : $\lambda_i, \quad i = 1, \dots, p$ car les valeurs de p peuvent changer à chaque itération comme il faut fixer une valeur de μ_{min} comme suit :

- Si $\mu = \mu_{min}$ et $T > 0,5$ et $\gamma = 1$ alors $\mu_{min} = \frac{\mu_{min}}{4}$.
- Si $\mu = \mu_{min}$ et $\gamma \leq \frac{1}{4}$ alors $\mu_{min} = \mu_{min} \times 4$.

4. Poser : $x = x + \gamma d$, avec $T(\gamma, x) \geq p$.

Exemple

Soit l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 \rightarrow \min \\ (1 - x_1^2s^2)^2 - x_1s^2 - x_2^2 + x_2 \leq 0, \quad \forall s \in S \\ S = \{0,1\} \end{cases}$$

1. $x^0 = (1,2), \quad f = 4,9$

• Cherchons les maximums locaux de g

$$g(x^0, s) = (1 - s^2)^2 - s^2 - 4 + 2$$

$$g(x^0, s) = s^4 - 3s^2 - 1$$

$$\nabla g(x^0, s) = 0 \Rightarrow s = 0, \quad s = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$s = \sqrt{\frac{3}{2}}$ n'est pas un maximum local de g car :

$$\nabla^2 g(x^0, \sqrt{\frac{3}{2}}) = 12 > 0$$

$$E = 0, \quad p = 1$$

$$h_1(x) = g(0, x) = 1 - x_2^2 + x_2$$

$$[h_1(x)]_+ = \max(0, g(0, x^0)) = \max(0, -1) = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2^2$$

3. Calculons la direction de descente de P

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 h_1(x)$$

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2^2 + \lambda_1(1 - x_2^2 + \text{desc}x_2)$$

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2^2 + \lambda_1 - \lambda_1 x_2^2 + \lambda_1 x_2$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2} = 0 \\ 2x_1 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda(-x_2^2 + x_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{3}{4}, \quad x_2 = 1,61, \quad \lambda_1 = 1,45$$

$$L(x, 1,45) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_1 + 0,45x_2 + 1,45$$

$$\nabla L(x, 1,45) = (\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2}, 0,9x_2 + 1,45)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$$

La direction de descente de P est la solution du système quadratique suivant :

$$\begin{cases} d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} d^T H d \rightarrow \min \\ h(x) + d^T \nabla h(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla h(x) = (0, -2x_2 + 1) = (0, -2, 22)$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{2}{3}x_1\right) + \frac{1}{2}$$

$$C = (0, -0, 22) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2.22 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(d_1, d_2) = (0.2, 2.22)d_1 + (0, 1)d_2$$

$$(d_1, d_2) = (0, d_2 - 2.22d_1)$$

$$\text{D'où: } d_1 = 0, \quad d_2 = d_2 + 2.22d_1$$

$$Z^T H Z d_2 = -Z^T (\nabla f + H w d_1)$$

$$Z^T H Z d_2 = 0.9d_2$$

$$-Z^T (\nabla f + H w d_1) = -3.22 + 2d_1$$

$$0.9d_2 = -3.22 + 2d_1 \Rightarrow d_1 = 0, \quad d_2 = -3.57$$

$$x = x + \gamma d$$

$$\text{Pour: } \gamma = 1, \quad T(1, x) < 0$$

$$\text{Pour: } \gamma = \frac{1}{2}$$

$$x = (-0.75, 1.61) \quad x = x + \gamma d = (-0.75, -0.17)$$

$$p(x) = 2.4$$

$$p(x + \gamma d) = -0.02$$

$$p'(x, d) = -11.49$$

$$T\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{-2.42}{-11.49} = 0.21$$

$$0.22 \geq 0.001 = \sigma$$

$$\text{D'où } \gamma = \frac{1}{2}$$

$$1. \quad x^0 = (-0.75, -0.17)$$

• Cherchons les maximums locaux de g :

$$g(x^0, s) = 0.2s^4 - 0.37s^2 + 0.8s$$

$$\nabla g(x^0, s) = 0.8s^3 - 0.74s$$

$$\nabla g(x^0, s) = 0 \Rightarrow s = 0, \quad s = 0.96 \simeq 1$$

$$E = \{0, 1\}$$

$$h_1(x) = g(0, x) = 1 - x_2^2 + x_2$$

$$h_2(x) = g(1, x) = (1 - x_1^2)^2 - x_1$$

$$[h_1(x)]_+ = \max(0, g(0, x^0)) \max(0, 0.81) = 0.81$$

$$[h_2(x)]_+ = \max(0, g(1, x^0)) = \max(0, 0.75) = 0.75$$

$$p(x) = \frac{1}{3} = x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2^2 + 1.56\theta$$

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + x_2^2 + \lambda_1(1 - x_2^2 + x_2) + \lambda_2(1 - 2x_1^2 + x_1^4 - x_1 - x_2^2 + x_2)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2} - 4\lambda_2x_1 - \lambda_2 \\ \frac{\delta L}{\delta x_2} = 2x_2 - 2\lambda_1x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2x_2 + \lambda_2 \\ \lambda_1 h_1(x) = 0 \\ \lambda_2(h_2(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 0, x_1 = -0.75, \quad x_2 = -0.61, \lambda_1 = 0.55$$

$$L(x, 0.55, 0) = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + 0.45x_2^2 + 0.55x_2 + 0.55$$

$$\nabla L(x, 0.55, 0) = \left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2}, 0.9x_2 + 0.55\right)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

La direction de descente de P est la solution du système quadratique suivant :

$$\begin{cases} d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2}d^T H d \rightarrow \min \\ h_1(x) + d^T \nabla h_1(x) \leq 0 \\ h_2(x) + d^T \nabla h_2(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla h_1(x) = (0, -2x_2 + 1) = (0, 2.22)$$

$$\nabla h_2(x) = (0.51, 2.22)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2.22 \\ 0.51 & 2.22 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2.22 \\ 0.51 & 2.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 2.22 \end{pmatrix}$$

$$w = (0, 1), \quad Z = (1, 1)$$

$$(d_1, d_2) = (d_2, d_1 + d_2)$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0$$

$$x = x + \gamma d$$

$$x = (-0.75, -0.61), \quad 0.19$$

Conclusion

Nous sommes basés dans notre modeste travail à une classe particulière des problèmes d'optimisation nommée problèmes d'optimisation semi-infinie, à savoir : les problèmes semi-infinie linéaires ou non linéaires et quelques techniques de résolution et pour cela on a présenté un problème semi-infini linéaire et la méthode de discrétisation qui nécessite l'application de l'algorithme du simplexe et enfin on a présenté le problème semi-infini non linéaire qui fait appel à l'algorithme du gradient projeté.

Et comme perspectives futures, on peut utiliser l'algorithme des trois phases dans le cas linéaire et les techniques d'optimisation global pour résoudre ce type de problème, en se basant sur la méthode de Branch and Bound.

Bibliographie

[1] AIDENE, M, OUKACHA, B, Recherche opérationnelle, Programmation linéaire, UMMTO, 2005. [2] J. Amaya, J.A. Géomez, Strong duality for inexact linear programming problems, *Optimisation* 49(2001)243 – 269.

[3] N.I. Akhiezer. *The Classical moment problem*. Hafner Publishing Co., New York, 1995.

[4] A. Hoffman. On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Reserach of the National Bureau of Standards, Section B, Mathematical Sciences*, 49 : 263 – 265,1952.

[5] G.B. Dantsig. *Linear Programming and extentions*. Princeton University Press, Princeton, 1963

6 E.J. Anderson, P. Nas, *Linear Programming in Infinte Dimentional Spaces*, Wiley, New York, 1987.

[7] N.I. Akhiezer. *The Classical moment problem*. Hafner Publishing Co, New York, 1995.

[8] J.F. Bonnans, J. CH. Gilbert, C. Lemarichal, et C. Sagastizabal. *Numerical Optimisation : Theorecal and numerical aspects*. Série Universitext, Springer-Velag, Berlin, 2003.

[9] J.F. Bonnans et P. Rouchon. *Commandes et optimisation de système dynamiques*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaisea, 2005.

