République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Soutenance de Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques - Informatique

Filière : Recherche Opérationnelle

Spécialité : Méthodes et Modèles de Décision

Thème

Critère d'optimalité d'un problème de contrôle optimal

Présenté par

M^{elle} *AMMOURA Meriem*

Dirigé par : **Mr Aidene.M**

Devant le jury d'examen composé de :

Mr Oukacha Brahim	M.C.A	UMMTO	Président
Mr Aidene Mohamed	Professeur	UMMTO	Rappoteur
Mme Moussouni Nacima	M.A.A	UMMTO	Examinatrice
Mme Titouche Saliha	M.A.B	UMMTO	Examinatrice

2010/ 2011

Remerciments

Je tiens à remercier Monsieur Aidene pour sa supervision, son appui, sa compréhension et pour la foi inébranlable qu'il a manifetée à l'endroit de ce projet.

Je remercie profondément les membres du jury qui ont accepté d'evaluer et de juger mon travail .Le président : Mr OUKACHA Brahim, et les examinatrices : Mme MOUSSOUNI Nacima et Mme TITOUCHE Saliha.

Je tiens également à remercier mes parents et mes frères, qui ont constitué une source d'inspiration unique dans le cadre de ce projet.

Table des matières

0.1 Introduction

Les problèmes d'optimisation datent depuis l'antiquité (il est difficile d'en préciser la date) . Les premiers problèmes posés sont de type géométrique : par exemple délimiter une plus grande surface avec une longueur donnée. Il fallait attendre le seizième siècle pour voir les premiers problèmes d'optimisation de type algébrique. Parmis les problèmes les plus connus à cette époque , le problème du Brachistochrone : calculer l'allure de la courbe qu'empruntra une particule glissant entre deux points données en un minimum de temps soumise seulement à son poids . Le premier à se poser le problème a été Gallilée. Indépendamment Jean Bernouilli en 1696 se posa aussi le problème et le solutionna ainsi que son frère Jaque Bernouilli, Newton, Leibniz et le marquis de l'hospital. Le principe du Brachistochrone est primordial pour la suite . D'autres problèmes virent le jour aussi inportant que le problème considéré : exemple le problème de l'avion de reconnaissance. Ces cas s'avèrent des applications importantes de la théorie du calcul des variations à travers laquelle une nouvelle théorie qui est le contrôle (commande) optimal fût batie.

La commande des processus constitue un objectif fondamental dans le domaine des sciences de l'ingénieur.

Commander un processus, c'est déterminer les commandes à appliquer à ce processus afin de lui assurer un comportement donné.

Au dix neuvième siècle , avec l'apparition des objets volants, a pris naissance la théorie du contrôle optimal.
La recherche opérationnelle est constituée de plusieurs domaines : la programmation mathématique, l'informatique, la théorie des graphes[28] le contrôle optimal , ect ....

Les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où la fonction critère et les contraintes sont linéaires. Beaucoup de problèmes réels de recherche opérationnelle peuvent être exprimés comme un problème de PL.

En résumé, la théorie de la commande optimale, est un modèle mathématique déterministe issu des résultats de la théorie des calculs de variations classiques, il existe une classe de méthodes de résolution de problèmes de commande optimale .(Le principe du maximum de Pontriaguine, qui est une extention des méthodes variationnelles classiques).

Notre travail se situe en contrôle optimal .

On utilise les techniques de programmation mathématique linéaire pour résoudre un problème de contrôle optimal linéaire.

Le mémoire est constitué de trois parties .

La première partie consiste à la démonstration de la condition nécessaire et suffisante pour un problème de contrôle optimal :

$$J(u) = c'x(t_*) \rightarrow Max_u,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0 = 0,$$

$$Hx(t_*) = g, |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_*].$$

La seconde partie constitue une généralisation de la première partie **i.e.** la démonstration de la condition nécessaire et suffisante pour le problème ci-dessous :

$$J(u) = Min_{k \in K}(c_k' x(t_*) + \alpha_k) \rightarrow Max_u,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0 = 0,$$

$$Hx(t_*) = g, |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_*].$$

Quand à la troisième et dernière partie, elle sera consacrée à l'application numérique qui est l'optimisation de la quantité d'argent disponible au temps t , on a décrit la méthode numérique en contrôle optimal puis on l'a résolu théoriquement en lui appliquant le Principe du Maximum de Pontriaguine puis numériquement avec le logiciel Matlab dont on a programmé une méthode de tir.

Chapitre 1

Condition nécessaire et suffisante pour un problème de contrôle optimal linéaire

1.1 Introduction

On considère ici le problème de contrôle optimal pour la maximisation d'un système dynamique linéaire.
Notre but est de démontrer le critère d'optimalité sans la non dégénéréscence.

1.2 Position du problème

Considèrons un problème de contrôle optimal du système dynamique linéaire suivant :

$$J(u) = c'x(t_*) \to Max_u, \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0 = 0, \tag{1.2}$$

$$Hx(t_*) = g, |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_*]. \tag{1.3}$$

Ici, $x(t) = x_j(t), j \in J$, désigne le vecteur d'état $n * 1$ du système à l'instant $t \in T$, $x(0) = 0$: l'état initial ; $u(t), t \in T$ désigne le contrôle scalaire actif du système et minimisant le critère $J(u)$, A et H sont constantes $(n * n)$- et $(m * n)$-matrices ; b et g sont constants n-et m- vecteurs ; $c' = c^t$ est- le vecteur coût n-constant.

1.3 Critère d'optimalité et de sub-optimalité

En utilisant la formule de Cauchy , la solution du système (1.2) est égale à :

$$x(t) = F(t)[x(0) + \int_0^t F^{-1}(s)bu(s)ds],$$

où $F(t) = \exp(At), t \in T$ est une matrice de rang n, solution du système conjugué :

$$\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_n.$$

En utilisant la dernière solution, le problème (1.1)-(1.3) devient un problème de la seule inconnue $u(t)$:

$$J(u) = \int_0^{t_*} C(t)u(t)dt \to max_u,$$

$$\int_0^{t_*} p(t)u(t)dt = g; |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_*], \tag{1.4}$$

où $C(t) = c'F(t_*)F^{-1}(t)b, p(t) = HF(t_*)F^{-1}(t)b, t \in T.$

En utilisant les contrôles admissibles u(t) et $\bar{u}(t) = u(t)$ $+ \Delta u(t), t \in T$, et leurs trajectoires correspondantes $x(t)$ et $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$, on calcule l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = C'\Delta x(t_*). \tag{1.5}$$

$$\int_0^{t_*} p(t)\bar{u}(t)dt = g = H\bar{x}(t_*),$$

$$\int_0^{t_*} p(t)u(t)dt = g = Hx(t_*),$$

$$\int_0^{t_*} (p(t)(\bar{u}(t) - u(t)))dt = 0 = H\Delta x(t_*). \tag{1.6}$$

Soit un vecteur $y \in R^m$, en multipliant l'équation (1.6) par y et en l'ajoutant à l'équation (1.5), on aura :

$$\Delta J(u) = y'H\Delta x(t_*) + C'\Delta x(t_*),$$

$$\Delta J(u) = (y'H + C')\Delta x(t_*),$$

cette dernière est appelée formule d'accroissement de la fonctionnelle qui peut être réecrite sous la forme suivante :

$$\Delta J(u) = \int_0^{t_*} \Psi'(t) b u(t) dt, \tag{1.7}$$

où $\Psi'(t), t \in T$ est solution du système conjugué :

$$\dot{\Psi} = -A\Psi, \Psi(t_*) = y'H + C'. \tag{1.8}$$

La solution du système est égale à :

$$\Psi(t) = \Psi(t_*) e^{-A(t-t_*)} = F^{-1}(t) F(t_*) \Psi(t_*).$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (1.7) sous la contrainte suivante :

$$-1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq 1 - u(t), t \in T,$$

est atteint pour

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 1 - u(t), & \text{si } \Psi'(t)b > 0\,; \\ -1 - u(t), & \text{si } \Psi'(t)b < 0\,; \\ 0, & \text{si } \Psi'(t)b = 0, t \in T. \end{cases}$$

et est égal à :

$$\beta(u, y) = \int_{T^+} \Psi'(t) b (1 - u(t)) dt + \int_{T^-} \Psi'(t) b (-1 - u(t)) dt, \tag{1.9}$$

appelée valeur de sub-optimalité .

Ici

$T^+ = \{t \in T : \Psi'(t)b > 0\}$ et $T^- = \{t \in T : \Psi'(t)b < 0\}$.

D'où nous avons toujours $\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, y)$. De cette dernière inégalité on déduit le critère d'optimalité et de sub-optimalité.

1.4 Condition suffisante d'optimalité et de sub-optimalité

1.4.1 Condition suffisante d'optimalité

Soit $u(t), t \in T$ un contrôle admissible et $y \in R^m$ un vecteur arbitraire, alors la relation suivante :

$$\Psi'(t)bu(t) = max_{|u(t)|<1}\Psi'(t)bu(t), t \in T, \qquad (1.10)$$

est suffisante pour l'optimalité du contrôle $u(t), t \in T$.

Soit $u(t), t \in T$ un contrôle admissible donné vérifiant la relation (1.10), alors la valeur de sub-optimalité (1.9) est égale à zero : $\beta(u, y) = 0$.
Comme nous avons l'inégalité $J(u^{\circ}) - J(u) \leq \beta(u, y)$, donc $J(u^{\circ}) \leq J(u)$; ce qui implique que $u(t), t \in T$, est un contrôle optimal .

1.4.2 Condition nécessaire

Si le contrôle $u(t), t \in T$ est optimal alors la relation (1.10) est vérifiée. Pour montrer cette implication , nous avons besoin de quelques définitions et lemmes. Le contrôle $u(t), t \in T$ est dit de type (1^*), s'il existe un intervalle $[\tau_1, \tau_2] \subset T, \tau_1 < \tau_2$, tel que u(t) satisfait la condition : $|u(t)| < 1, t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Autrement le contrôle u(t) est dit de type (2^*).

Lemme 1

Soit $u(t), t \in T$ un contrôle optimal de type (1^*), **i.e.** il existe $y \in R^m$ tel que la relation (1.10) soit vérifiée.

Preuve

Soit $u(t), t \in T$ un contrôle admissible de type (1^*), alors il existe un intervalle $[\tau_1, \tau_2], |u(t)| < 1, t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Par la continuité de u(t), il existe $\delta > 0$, tel que : $|u(t)| \leq 1 - \delta$. Alors une et une seule des conditions suivantes est vérifiée :

A) Le contrôle $u(t), t \in T$, peut être amélioré.

B)Il existe un vecteur $y \in R^m$ tel que la solution du système conjugué (1.8) vérifie $\Psi'(t)b = 0, t \in [\tau_1, \tau_2]$, où $\Psi(t)$ est calculé par la formule (1.8).

Soit $\bar{u}(t), t \in T$ un autre contrôle admissible définit sous la manière suivante :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), t \in T \backslash \bigcup_{j=1}^{N} T_j \,; \\ u(t) + z_j, t \in T. \end{cases}$$

avec $-\delta \leq z_j \leq \delta, j = 1, ..., N;$

où $T_j = [(j-1)(\frac{\tau_2-\tau_1}{N}) + \tau_1, j(\frac{\tau_2-\tau_1}{N}) + \tau_1]$, j = 1, ..., N, et $\bigcup_{j=1}^{N} T_j = [\tau_1, \tau_2]$, N nombre entier arbitraire.

Le problème de maximisation de l'accroissement de la fonctionnelle devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\Delta J(u) = \sum_{j=1}^{N} C_j(N) z_j \to max_{z_j, j=1,...,N}; \qquad (1.11)$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(N) z_j = 0, -\delta \leq z_j \leq \delta, j = 1, ..., N;$$

où

$$a_j(N) = \int_{T_j} HF(t_*, t) b dt;$$

$$C_j(N) = \int_{T_j} c' F(t_*, t) b dt, j = 1, ..., N;$$
$$F(t_*, t) = F(t_*) F^{-1}(t).$$

Le problème (1.11) admet une solution admissible initiale
$Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$.

Ici on a deux cas possibles :

I)Le vecteur $Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$ est une solution optimale .

II) Le vecteur $Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$ n'est pas optimal.

Cas **(II)**.

Considérons le cas **(II)** : $Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$ n'est pas optimal $\Rightarrow \exists Z^* = (z_j^*, j = 1, ..., N) \neq 0_N$ meilleur que Z,

i.e. $\sum_{j=1}^{N} C_j(N) z_j = 0$.

Donc il est clair que le contrôle $\bar{u}(t), t \in T$, définit sous le chemin suivant :

$$\bar{u}(t) = u(t), t \in T / \bigcup_{j=1}^{N} T_j,$$

$$\bar{u}(t) = u(t) + z_j^*, t \in T_j, j = 1, ..., N,$$

sera meilleur que le contrôle $u(t), t \in T$, car
$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) > 0$, **i.e.**
$J(\bar{u}) = \sum_{j=1}^{N} C_j(N) z_j^* > J(u)$.

Par conséquent, le cas **(II)** est démontré, nous pouvons amélioré le contrôle $u(t), t \in T$, **i.e.** on obtient la condition (A).

Cas (**I**).

En utilisant le critère d'optimalité [3] du problème (1.11) et son problème dual , nous déduisons l'existence du vecteur
$y^{\circ}(N) \in R^m$ tel que :

$$\Delta_j(N) = y^{\circ\prime}(N) a_j(N) + \sum_{j=1}^{N} C_j(N) = 0, j = 1, ..., N. \quad (1.12)$$

Le problème initial (1.1) est supposé normal.De cette supposition et sous la condition $|u(t)| < 1, t \in [\tau_1, \tau_2]$, il résulte que pour N suffisamment grand, le problème (1.9) est aussi normal .

De cette condition de normalité résulte l'existence des nombres positifs $N^{\circ} > 0$ et $M > 0$ tel que :

$$||y^{\circ}(N)|| \leq M, \forall N, N \geq N_0. \tag{1.13}$$

En utilisant le vecteur $y^{\circ}(N) \in R^m$, nous construisons la solution $\Psi_N(t), t \in T$, du système conjugué (1.8). Alors en utilisant la formule (1.9) , $a_j(N)$ et $C_j(N)$, la formule (1.12) sera reécrite sous la forme suivante :

$$\Delta_j(N) = \int_{T_j} \Psi'_N(t) b dt = 0, j = 1, ..., N. \tag{1.14}$$

Si nous tendons N vers l'infini $(N \to \infty)$, le problème (1.11) remplira le cas **(II)** , **i..e.** la condition ($\mathbf{B}$) est obtenue. Dans le cas **(I)** , de la relation (1.13) , nous obtenons l'existence de la limite :

$$\lim_{N \to \infty} y^{\circ}(N) \to y^* \in R^m.$$

En utilisant le vecteur $y^* \in R^m$, nous construisons la solution $\Psi^*(t), t \in T$ du système conjugué (1.8) . De cette dernière solution et de la formule (1.14) il s'en suit que :

$$\Psi'^*(t) b \equiv 0, t \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.15}$$

Par conséquent, nous avons démontré que pour un contrôle $u(t), t \in T$, nous avons soit la condition ($\mathbf{A}$) ou la condition ($\mathbf{B}$) .

Dans le lemme **(1)** , le contrôle $u(t), t \in T$, est optimal , donc nous sommes nécessairement dans le cas **(B)** . Puisque $\Psi'^{*}(t)b$ est, par consruction analytique , alors nous obtenons :

$$\Psi'^{*}(t)b = 0, \forall t \in T. \tag{1.16}$$

A ce stade , nous avons démontré que pour un contrôle $u(t), t \in T$, il existe un vecteur $y^* \in R^m$ tel que : la relation de (1.10) soit vérifiée.

Lemme 2

Soit u(t) un contrôle de type 2^*, alors pour le vecteur $y \in R^m$ construit par la formule $y = c'_B A_B^{-1}$, la relation (1.10) est vérifiée.

Preuve

Procédons par absurde .Supposons que la condition (1.10) n'est pas vérifiée , **i.e.** :

$\exists t_0 \in T : \Psi'(t_0)b < 0, u(t_0) = 1$, ou bien $\Psi'(t_0)b > 0$, $u(t_0) = -1$. Choisissons le 1er cas et de la continuité de la fonctionnelle $\Psi'(t)b, t \in T$, $\exists$un voisinage de $t_0, V(t_0) = [t_0, t_1]$ tel que $u(t) \equiv 1, \Psi'(t)b, t \in [t_0, t_1]$.

Soit $\tau = (\tau_j, j = 1, ..., p)$ un vecteur paramétrique et $\epsilon > 0$, tel que :

$$u(t,\tau,\epsilon)=\left(\begin{array}{c} u(t), t\in T\backslash([t_0,t_0+\epsilon]\bigcup_{j=1}^{p}T_j),\\ -1, t\in[t_0,t_0+\epsilon],\\ u(t_j-\epsilon), t\in[t_j,\tau_j], si\tau_j\geq t_j,\\ u(t_j+\epsilon), t\in[\tau_j,t_j], si\tau_j<t_j, j=1,...,p.\end{array}\right),$$

où

$$T_j=\left(\begin{array}{c} [t_j,\tau_j], \quad si \quad \tau_j\geq t_j,\\ [\tau_j,t_j], \quad si \quad \tau_j<t_j, j=1,...,p.\end{array}\right).$$

Soit $x(t,\tau,\epsilon), t\in T$, la trajectoire correspondante de la commande $u(t,\tau,\epsilon), t\in T$. En supposant que $u(t,\tau,\epsilon), t\in T$, construit sous ce chemin est admissible pour une certaine valeurs τ et ϵ.

Nous considérons le système suivant de $m+1$ equations et $p+1$ variables :

$$\Omega(\tau,\sigma,\epsilon)=\left(\begin{array}{c} Hx(t_*,\tau,\epsilon)-g\\ c'x(t_*,\tau,\epsilon)-\sigma,\end{array}\right)\equiv 0. \tag{1.17}$$

Si le système (1.17) admet une solution alors le contrôle $u(t,\tau,\epsilon)$, $t\in T$, est admissible.

Considérons les variables du système (1.17), les fonctions suivantes :

$$\tau_j(\epsilon), j=1,...,p; \sigma(\epsilon), \epsilon\in[0,\delta_0]. \tag{1.18}$$

On peut considérer les fonctions (1.18) comme des fonctions implicites.

En considérant l'application f définit sur un ensemble ouvert $W \subset R^p * R * R$:

$$f : W \to R^{m+1}$$

$$(\tau,\sigma,\epsilon) \longmapsto f(\tau,\sigma,\epsilon) = \begin{pmatrix} Hx(t_*,\tau,\epsilon) - g \\ c'x(t_*,\tau,\epsilon) - \sigma, \end{pmatrix}.$$

Cette application est de classe C^1.

Ailleurs pour $(\tau,\sigma,\epsilon) = (T,\epsilon,0)$, $f(T,\epsilon,0) = 0$, et sa jaconbienne partielle est égale à :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta t_j}(Hx(t_*,\tau,\epsilon) - g)_{j=1,\ldots,p} & \frac{\delta}{\delta\sigma}(Hx(t_*,\tau,\epsilon) - g) \\ \frac{\delta}{\delta t_j}(c'x(t_*,\tau,\epsilon) - \sigma,)_{j=1,\ldots,p} & \frac{\delta}{\delta\sigma}(c'x(t_*,\tau,\epsilon) - \sigma,) \end{pmatrix}.$$

De la définition de la trajectoire $x(t_*,\tau,\epsilon)$, on a :

$$\frac{\delta}{\delta t_j}x(t_*,\tau,\epsilon) = \frac{\delta}{\delta t_j}[\int_{T \ \ [t_0,t_0+\epsilon]} \bigcup_{j=1}^{p} T_j F(t_*,t_j)bu(t)dt - \int_{[t_0,t_0+\epsilon]} F(t_*,t_j)bdt + \sum_{j=1}^{p}\int_{T_j} F(t_*,t_j)bu(t,\tau,\epsilon)dt].$$

$\frac{\delta}{\delta t_j}x(t_*,\tau,\epsilon) = \int_{T_j} F(t_*,t_j)bu(t,\tau,\epsilon)dt \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta t_j}x(t_*,\tau,\epsilon) = \begin{cases} F(t_*,t_j)bu(t_j - \epsilon) & si \quad \tau_j \geq t_j; \\ F(t_*,t_j)bu(t_j + \epsilon) & si \quad \tau_j \leq t_j, j = 1,\ldots,p. \end{cases}$$

$\frac{\delta}{\delta\sigma}(Hx(t_*,\tau,\epsilon) - g) = 0$, $\frac{\delta}{\delta\sigma}(c'x(t_*,\tau,\epsilon) - \sigma) = -1$.

Donc le jacobien de f au point $(T,\epsilon,0)$ est égal à :

$$\det \begin{pmatrix} -HF(t_*,t_j)b, j = 1,\ldots,p; & 0 \\ -c'F(t_*,t_j)b, j = 1,\ldots,p; & -e \end{pmatrix} \neq 0.$$

Les conditions des fonctions implicites sont remplies, alors il existe $\delta_0 > 0$ et une fonction continue unique :

$$\varphi : [0, \delta_0] \to R^{m+1}$$

$$\epsilon \longmapsto \varphi(\epsilon) = (\tau_j(\epsilon)_{j=1,\ldots,p}, \sigma(\epsilon)),$$

tel que $\Omega(\tau(\epsilon), \sigma(\epsilon), \epsilon) = 0$.

En particulier , pour chaque $\epsilon \in [0, \delta_0]$, le contrôle $u_\epsilon(t) = u(t, \tau(\epsilon), \epsilon), t \in T$ est admimissible et sa trajectoire $x_\epsilon(t)$ vérifie $Hx_\epsilon(t_*) = g$ et $c'x_\epsilon(t_*) = \sigma(\epsilon)$.

On compare $u_\epsilon(t)$ et u(t) :

$J(u_\epsilon) = \xi(\epsilon) = c'x_\epsilon(t_*) = \sigma(\epsilon)$ où $\epsilon \in [0, \delta_0]$,

$\Delta u(t) = u_\epsilon(t) - u(t) = 0, t \in T \ ([t_0, t_0 + \epsilon] \bigcup_{j=1}^{p} T_j)$,

$J(u_\epsilon) - J(u) = \xi(\epsilon) - \xi = \Delta\xi(\epsilon) = -2 \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \Psi'(t) b dt + \sum_{j=1}^{p} (-2) \int_{T_j}^{T_j(\epsilon)} \Psi'(t) b dt.$

La dérivé de la dernière fonction est égale à :

$$\frac{d\Delta\xi(\epsilon)}{d\epsilon} = -2\Psi'(t_0)b + \sum_{j=1}^{p} (-2)\Psi'(\tau_j(0))\dot{\tau}_j(0).$$

Mais comme nous avons :

$\Psi'(t_j)b = F(t_*, t_j)(y'H + c')b$

$= y'HF(t_*, t_j)b + cF(t_*, t_j)b$

$= (y'HF(t_*, t_j)b - cF(t_*, t_j)b).$

En utilisant les fonctions $\Delta(t_j) = (y'HF(t_*, t_j)b - cF(t_*, t_j)b)$ appelées vecteur d'estimation à l'instant $t_j \in T$, et comme $u(t), t \in T$ est optimal $\Rightarrow \Delta(t_j) \geq 0, \forall t_j$, alors $\frac{d\Delta\xi(\epsilon)}{d\epsilon} > 0 \Rightarrow J(u_\epsilon) > J(u)$, qui est une contradition avec le fait que u(t) est optimal .

Finalement nous avons démontré que pour un contrôle optimal de type 2^* , la relation (1.10) est vérifiée .

Chapitre 2

Condition nécessaire et suffisante pour un problème de contrôle optimal min-max

2.1 Introduction

Dans cette partie nous appliquons les notions du 1er chapitre pour démontrer le critère d'optimalité du problème min-max de contrôle optimal.

2.2 Position du problème

Considérons un problème terminal min-max de contrôle optimal du système dynamique linéaire :

$$J(u) = Min_{k\in K}(c_k' x(t_*) + \alpha_k) \rightarrow Max_u, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0 = 0, \tag{2.2}$$

$$Hx(t_*) = g, |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_*]. \tag{2.3}$$

Ici, $x(t) = x_j(t), j \in J$, désigne le vecteur d'état $n * 1$ du système à l'instant $t \in T, x(0) = 0$: l'état initial ; $u(t), t \in T$ désigne le contrôle scalaire actif du système et minimisant le critère $J(u)$; A et H sont des $(n * n)$- et $(m * n)$-matrices constantes ; b et g sont des n-et m- vecteurs constants ; $K = 1, ..., p$ est un ensemble fini des indices de la fonctionnelle ; $c'_k = c^t_k$ est- le vecteur n-constant.

Le problème (2.1)-(2.3) est dit "normal" (où les contraintes du problème (2.1)-(2.3)satisfaient la condition de Slater) s'il existe $\epsilon_0 > 0$, tel que pour tout m-vecteur Δg,vérifiant la condition $||\Delta g|| \leq \epsilon_0$, nous pouvons trouver un contrôle $\bar{u}(t), t \in T$, tel que sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t)$, vérifie la condition $H\bar{x}(t_*) = g + \Delta g$.

Remarque

Par la suite, on suppose que le problème (2.1)-(2.3) est normal.

Définition

Le contrôle $u(t)$ est admissible pour le problème (2.1)-(2.3) si ce contrôle et sa trajectoire correpondante $x(t), t \in T$ vérifient les contraintes (2.3).

Le contrôle admissible u° est optimal si $J(u^\circ) = \max_u J(u)$, et le contrôle admissible u^ϵ est ϵ-optimal si $J(u^\circ) - J(u^\epsilon) \leq \epsilon$. Ici ϵ est un nombre positif donné.

2.3 Critère d'optimalité et de sub-optimalité

En utilisant la formule de Cauchy , la solution du système (2.2) est égale à :

$x(t) = F(t)[x(0) + \int_0^t F^{-1}(s)bu(s)ds]$, où $F(t) = \exp(At), t \in T$ est une matrice de rang n, solution du système conjugué :

$$\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_n.$$

En utilisant la dernière solution, le problème (2.1)-(2.3) devient un problème à une unique inconnue $u(t)$:

$$J(u) = min_{k\in K}(\int_0^{t_*} C_k(t)u(t)dt + \alpha_k) \to max_u,$$

$$\int_0^{t_*} p(t)u(t)dt = g; |u(t)| \leq 1, t \in T = [0, t_*], \tag{2.4}$$

où $C_k(t) = c'_k F(t_*)F^{-1}(t)b, k \in K, p(t) = HF(t_*)F^{-1}(t)b, t \in T.$

En utilisant les contrôles admissibles u(t) et $\bar{u}(t) = u(t)+\Delta u(t), t \in T$, et leurs trajectoires correspondantes x(t) et $\bar{x}(t) = x(t)+\Delta x(t), t \in T$, Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_k = c'_k x(t_*) + \alpha_k - J(u), k \in K; \bar{\beta}_k = c'_k x(\bar{t}_*) + \alpha_k - J(\bar{u}), k \in K. \tag{2.5}$$

Par construction on a :

$$\beta_k \geq 0, \bar{\beta}_k \geq 0, k \in K. \tag{2.6}$$

Introduisons le vecteur $\Delta\beta(k) = (\Delta\beta_k, k \in K)$:

$\Delta\beta_k = \bar{\beta}_k - \beta_k = c'_k \Delta x(t_*) - \Delta J(u), k \in K$; donc

$$\Delta J(u) = c'_k \Delta x(t_*) - \Delta\beta_k. \tag{2.7}$$

De la relation (2.6) nous obtenons :

$$\Delta\beta_k \geq -\beta_k, k \in K, \tag{2.8}$$

et de la solution du système (2.2) et de l'admissibilité x(t) et $\bar{x}(t), t \in T$, nous déduisons que :

$$\int_0^{t_*} p(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt = H\Delta x(t_*) = 0. \tag{2.9}$$

Considérons le vecteur $y \in R^m$ et les $\lambda_k, k \in K$, vérifiant :

$$\sum_{k\in K} \lambda_k = 1.$$

En multipliant l'égalité (2.9) par y , et chaque équation de (2.7) par λ_k, et additionnant les (k+1) égalités, on obtient :

$$\sum_{k\in K} \Delta J(u) = y'H\Delta x(t_*) + \sum_{k\in K} \lambda_k(-\Delta\beta_k + c'_k\Delta x(t_*)).$$

Comme $\sum_{k\in K} \lambda_k = 1$, la dernière equation devient :

$\Delta J(u) = (y'H + \sum_{k\in K} \lambda_k c'_k)\Delta x(t_*) - \sum_{k\in K} \lambda_k\beta_k$, appelée formule d'accroissement de la fonctionnelle qui peut être reécrite sous la forme suivante :

$$\Delta J(u) = \int_0^{t_*} \Psi'(t)b\Delta u(t)dt - \sum_{k\in K} \lambda_k\beta_k, \tag{2.10}$$

où $\Psi(t), t \in T$ est solution du système conjugué :

$$\dot{\Psi} = -A'\Psi, \Psi(t_*) = H'y + \sum_{k\in K} \lambda_k c'_k. \tag{2.11}$$

La solution du système (2.11) est égale à : $\Psi(t) = \Psi(t_*)e^{-A(t-t_*)} = F^{-1}(t)F(t_*)\Psi(t_*)$.

Le maximum d'accroissement de la fonctionnelle (2.10) sous les contraintes suivantes

$$-1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq 1 - u(t), t \in T,$$

$$\Delta\beta_k \geq -\beta_k, k \in K,$$

est atteint pour

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 1 - u(t), & \text{si } \Psi'(t)b > 0\,; \\ -1 - u(t), & \text{si } \Psi'(t)b < 0\,; \\ 0, & \text{si } \Psi'(t)b = 0. \end{cases}$$

$$\Delta\beta_k = \begin{cases} -\beta_k, & \text{si } \lambda_k > 0\,; \\ 0, & \text{si } \lambda_k = 0, k \in K. \end{cases}$$

et est égale à :

$$\beta(u, y, \lambda) = \int_{T^+} \Psi'(t)b(1 - u(t))dt + \int_{T^-} \Psi'(t)b(-1 - u(t))dt + \sum_{k\in K_f} \lambda_k\beta_k, \tag{2.12}$$

appelée valeur de sub-optimalité .

Ici $T^+ = \{t \in T : \Psi'(t)b > 0\}$; $T^- = \{t \in T : \Psi'(t)b < 0\}$,
$K_f = \{k \in K : \lambda_k > 0\}$.

Ici nous avons toujours $\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, y, \lambda)$. De cette inégalité, nous déduisons que $J(u^\circ) - J(u) \leq \beta(u, y, \lambda)$, pour tout vecteur $y \in R^m$,
$\lambda_k \geq 0, k \in K, \sum_{k\in K} \lambda_k = 1$, l'optimalité de contrôle u°.

2.3.1 Condition suffisante de sub-optimalité

Théorème
Le contrôle admissible u est ϵ-optimal si $\beta(u, y, \lambda) \leq \epsilon$.

Preuve
Par construction on a $J(u^\circ) - J(u) \leq \beta(u, y, \lambda)$, alors $J(u^\circ) - J(u) \leq 0$, donc u est ϵ-optimal.

2.4 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

2.4.1 Condition suffisante

Soit $u(t), t \in T$ un contrôle admissible , $y \in R^m$ un vecteur arbitraire et les $\lambda_k, \lambda_k \geq 0, \sum_{k\in K} \lambda_k = 1$, alors les relations suivantes :

a) $\lambda_k > 0$, si $\beta_k = 0$, et $\lambda_k = 0$, si $\beta_k \geq 0, \forall k \in K$;

$$\textbf{b)} \Psi'(t)bu(t) = max_{|u(t)|\leq 1} \Psi'(t)bu(t), \tag{2.13}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du contrôle $u(t), t \in T$.

$u(t), t \in T$ un contrôle admissible donné vérifiant les relations (2.13), alors la valeur de suboptimalité (2.12) est égale à zero : $\beta(u, y, \lambda) = 0$. Comme nous avons l'inégalité $J(u^{\circ}) - J(u) \leq \beta(u, y, \lambda)$, donc $J(u^{\circ}) \leq J(u)$; ce qui implique que $u(t), t \in T$, est un contrôle optimal .

2.4.2 Condition nécessaire

Si le contrôle $u(t), t \in T$ est optimal alors les relations (2.13) sont vérifiées. Pour montrer cette implication , nous avons besoin de quelques définitions et lemmes. Le contrôle $u(t), t \in T$ est dit de type (1^*), alors s'il existe un intervalle $[\tau_1, \tau_2] \subset T, \tau_1 < \tau_2$, tel que u(t) satisfait la condition : $|u(t)| < 1, t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Autrement le contrôle u(t) est dit de type (2^*).

Lemme 1

Soit $u(t), t \in T$ un contrôle optimal de type (1^*), alors il existe $\lambda_k, k \in K$, et un vecteur $y \in R^m$ tel que les relations (2.13) soient vérifiées.

Preuve

Soit $u(t), t \in T$, un contrôle admissible de type (1^*), alors il existe un intervalle $[\tau_1, \tau_2], |u(t)| < 1, t \in [\tau_1, \tau_2]$.

De la continuité de u(t), il existe $\delta > 0$, tel que : $|u(t)| \leq 1 - \delta$. Alors une et une seule des conditions suivantes est vérifiée :

A) Le contrôle $u(t), t \in T$, peut être amélioré.

B) Il existe un vecteur $y \in R^m$ et $\lambda_k \geq 0, k \in K, \sum_{k\in K} \lambda_k = 1$, tel que la solution du système conjugué (2.11) vérifie $\Psi'(t)b = 0, t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Soit $\bar{u}(t), t \in T$ un autre contrôle admissible construit de la forme suivante :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j \,; \\ u(t) + z_j, t \in T, j = 1, ..., N, \end{cases}$$

avec $-\delta \leq z_j \leq \delta, j = 1, ..., N,$

où $T_j = [(j-1)(\frac{\tau_2-\tau_1}{N}) + \tau_1, j(\frac{\tau_2-\tau_1}{N}) + \tau_1]$, j = 1, ..., N, et $\bigcup_{j=1}^{N} T_j = [\tau_1, \tau_2]$, N nombre entier arbitraire.

Le problème de maximisation de l'accroissement de la fonctionnelle devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\Delta J(u) = min_{k\in K} \sum_{j=1}^{N} (C_{kj}(N)z_j + \beta_k) \rightarrow max_{z_j, j=1,...,N}; \tag{2.14}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(N)z_j = 0, -\delta \leq z_j \leq \delta, j = 1, ..., N;$$

où $\beta_k = c_k' x(t_*) + \alpha_k - J(u), k \in K; a_j(N) = \int_{T_j} HF(t_*, t)bdt;$

$C_{kj}(N) = \int_{T_j} c_k' F(t_*, t)bdt, k \in K, j = 1, ..., N; F(t_*, t) = F(t_*)F^{-1}(t).$

Le problème (2.14) admet une solution admissible initiale $Z = (z_j = 0,$
$j = 1, ..., N).$

Ici nous avons deux cas possibles :

I) Le vecteur $Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$ est une solution optimale.

II) Le vecteur $Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$ n'est pas optimal.

Cas **(II)**.

On considère le cas **(II)** : $Z = (z_j = 0, j = 1, ..., N)$ n'est pas optimal
$\Rightarrow \exists Z^* = (z_j^*, j = 1, ..., N) \neq 0_N$ meilleur que Z,

i.e. $min_{k\in K} \sum_{j=1}^{N}(C_{kj}(N)z_j^* + \beta_k) > min_{k\in K}\beta_k$;

Donc il est clair que le contrôle $\bar{u}(t), t \in T$, définit sous la forme suivante :

$$\bar{u}(t) = u(t), t \in T\setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j,$$

$$\bar{u}(t) = u(t) + z_j^*, t \in T_j, j = 1, ..., N,$$

est meilleur que le contrôle $u(t), t \in T$, car

$J(\bar{u}) = min_{k\in K}(\sum_{j=1}^{N}(C_{kj}(N)z_j^* + \beta_k) > min_{k\in K}\beta_k)$.

Par conséquent, le cas **(II)** est démontré, nous pouvons amélioré le contrôle $u(t), t \in T$, **i.e.** on obtient la condition (A).

Cas (**I**).

En utilisant le critère d'optimalité [3] du problème (2.14) et son problème dual, on déduitl'existence du vecteur $y^{\circ}(N) \in R^m$ et les $\lambda^{\circ}{}_k(N)$, tel que :

$$\lambda^{\circ}{}_k(N) \geq 0, k \in K; \sum_{k\in K} \lambda^{\circ}{}_k(N) = 1, \tag{2.15}$$

$$\Delta_j(N) = y^{\circ\prime}(N)a_j(N) + \sum_{k\in K} \lambda^{\circ}{}_k(N)C_{kj}(N) = 0, j = 1, ..., N. \tag{2.16}$$

De la relation (2.15) il résulte que : $0 \leq \lambda^{\circ}{}_k(N) \leq 1, k \in K; ||\lambda^{\circ}{}_k(N)|| = 1$.

Le problème initial (2.1) est normal. Cette supposition et sous la condition que

$|u(t)| < 1, t \in [\tau_1, \tau_2]$, il résulte que pour N suffisamment grand, le problème (2.12) est aussi normal . De cette condition de normalité résulte l'existence des nombres positifs $N^{\circ} > 0$ et $M > 0$ tel que :

$$||y^{\circ}(N)|| \leq M, \forall N, N \geq N_0. \tag{2.17}$$

En utilisant le vecteur $y^{\circ}(N) \in R^m$ et les $\lambda^{\circ}{}_k, k \in K$, on construit la solution $\Psi_N(t), t \in T$, du système conjugué (2.11). Alors en utilisant la formule (2.14) , $a_j(N)$ et $C_{kj}(N)$, la formule (2.16) sera reécrite sous la forme suivante :

$$\Delta_j(N) = \int_{T_j} \Psi'_N(t) b dt = 0, j = 1, ..., N. \tag{2.18}$$

Comme N est arbitraire, le tendre vers l'infini ($N \to \infty$), on remplira le cas **(II)**, **i.e.** la condition (**B**) est obtenue. Dans le cas **(I)** , de la relation (2.15) et (2.17), on obtient l'existence de la limite :

$$\lim_{N \to \propto} y^{\circ}(N) \to y^* \in R^m,$$

$$\lim_{N \to \propto} \lambda^{\circ}{}_k(N) = \lambda_k^*, k \in K, \sum_{k \in K} \lambda_k^*(N) = 1.$$

En utilisant le vecteur $y^* \in R^m$ et les $\lambda_k^*, k \in K$, nous construisons la solution $\Psi^*(t), t \in T$ du système conjugué (2.12) . De cette dernière solution et de la formule (2.18) il s'en suit que :

$$\Psi'^*(t) b \equiv 0, t \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{2.19}$$

Par conséquent, nous avons démontré que pour un contrôle $u(t), t \in T$, nous avons soit la condition (**A**) ou la condition (**B**) .

Dans le lemme **(1)** , le contrôle $u(t), t \in T$, est optimal , donc on est nécessairement dans le cas **(B)** . Puisque $\Psi'^*(t) b$est , par consruction analytique , alors on obtient :

$$\Psi'^*(t) b = 0, \forall t \in T. \tag{2.20}$$

A ce stade , nous avons démontré que pour un contrôle $u(t), t \in T$, il existe un vecteur $y^* \in R^m$ et les $\lambda_k^* \geq 0, k \in K, \sum_{k \in K} \lambda_k^* = 1$, tel que : la relation (**b**) de

(2.13) est vérifiée.

Il reste à montrer **(a)** de (2.13) . Connaissons déjà : $\lambda_k^* k \in K$, $\sum_{k\in K} \lambda_k^*(N) = 1$; nous supposons que si $\lambda_k^* > 0_k$. Alors nous avons : $\beta_k = 0, k \in K$.

On suppose que ces relations sont vérifiées, **i.e.** il existe : $k_0 \in K : \lambda_{k_0} > 0$ et $\beta_{k_0} > 0$.

Construisons un autre contrôle sous la forme suivante :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in T \setminus \bigcup_{j=1}^{N} T_j\,; \\ u(t) + z_j, & t \in T, \text{ où } -\delta \leq z_j \leq \delta, j = 1, ..., N. \end{cases}$$

et mettons :

$$\bar{\beta_k} = \beta_k + \Delta\beta_k, \tag{2.21}$$

où

$$\Delta\beta_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k \in K \setminus k_0\,; \\ -\theta, & \text{si } k = k_0. \end{cases}$$

De ces contrôles admissibles u(t) et $\bar{u}(t), t \in T$ et l'utilisation des contraintes du problème (2.14) et les relations (2.21) , il est nécessaire et suffisant que :

$\sum_{j=1}^{N} a_j(N) z_j = 0; \sum_{j=1}^{N} C_{kj}(N) z_j - \Delta J(u) = 0, k \in K \backslash k_0;$

$\sum_{j=1}^{N} C_{kj}(N) z_j - \Delta J(u) = -\theta, k = k_0, -\delta \leq z_j \leq \delta, j = 1, ..., N.$

Supposons que : $A = (a_j(N), j = 1, ..., N) - n * N;$

$C(K, J) = (C_k j)(N), j = 1, ..., N) - |k| * N$, le dernier système devient sous la forme matricielle suivante :

$$AZ = 0,$$

$$C(K, J)Z - e(K)\Delta J(u) = \Delta\beta(K);$$

$$-\delta \leq Z \leq \delta,$$

Pour N trés grand $(N > n, N > |K|)$, du système $AZ = 0$, on peut supposer que le rang de A= n ; et A_B est une sub-matrice inversible de A, alors :

$$AZ = A_B Z_B + A_H Z_H = 0,$$

$$\Rightarrow Z_B = -A_B^{-1} A_H Z_H,$$

$$\Rightarrow -C(K, J_B) A_B^{-1} A_H Z_H + C(K, J_H) Z_H - e(K) \Delta J(u) = \Delta\beta(K),$$

$$\Rightarrow (C(K, J_B) A_B^{-1} A_H - C(K, J_H), e(K)) \begin{pmatrix} Z_H \\ \Delta J(u) \end{pmatrix} = -\beta(K).$$

On pose $\Delta = (C(K, J_B) A_B^{-1} A_H - C(K, J_H), e(K))$. Comme ci-dessus, on peut supposer Δ de rang K. Alors il existe $j_f \subset J_H, |J_f| + 1 = |K|$, tel que la matrice $\Delta_f = C(K, J_B) A_B^{-1} A_f - C(K, J_f), e(K))$ est inversible .

Posons $Z_f = Z_j, j \in J_f$ et $Z_j = 0, j \in J_h \backslash J_f$, alors nous aurons :

$$\Delta_f \begin{pmatrix} Z_f \\ \Delta J(u) \end{pmatrix} = -\Delta\beta(K) \Rightarrow \begin{pmatrix} Z_f \\ \Delta J(u) \end{pmatrix} = -\Delta_f^{-1} \Delta\beta(K).$$

Soit D une sous matrice définit par la sous matrice $-\Delta_f^{-1}$, avec l'élimination de sa dérnière ligne , alors :

$$A_f = D.\Delta\beta(K); Z_B = -A_B^{-1}.A_f.D.\Delta\beta(K).$$

Comme $-\delta \leq Z = (Z_B, Z_f, Z - H\ Z_f) \leq \delta$.

Donc $-\delta \leq Z_B = -A_B^{-1}.A_f.D(0, ..., -\theta, 0, ..., 0) \leq \delta$

et $-\delta \leq Z_f = D.\Delta\beta(K) = D.(0, ..., -\theta, 0, ..., 0) \leq \delta$. Il suit de là pour θ trés petit , ces inégalités sont vérifiées.

Donc pour θ , le contrôle $\bar{u}(t), t \in T \in$ sera un contrôle admissible et on a l'inégalité

$J(\bar{u}) - J(u) = -\lambda_{k_0}(-\theta) > 0$: ceci est une contradiction avec l'optimalité du contrôle $u(t), t \in T$.

Donc pour un contrôle optimal de type (1^*) , la condition (**a**) de (2.13) est vérifiée .

Nous avons finalement démontré que pour un contrôle optimal de type (1^*) nous pouvons trouver les $\lambda_k, k \in K$ et le vecteur $y \in R^m$ tel que les conditions (2.13) sont satisfaites .

(lemme 1).

Considérons un contrôle admissible $u(t), t \in T$ de type (2^*) et soit x(t), $t \in T$ sa trajectoire correspondante .

soit ; $\epsilon = min_{k \in K}(c'_k x(t_*) + \alpha_k)$ et l'ensemble $K_{ap} = k \in K : c'_k x(t_*) + \alpha_k = \epsilon$.

Le contrôle $u(t), t \in T$ de type (2^*) est dit non dégénéré s'il existe P points $t_j \in T$ de la continuité de la commande $u(t)$, tel que $t_j \in T, j = 1, ..., p$, où $p = m + |K_{ap}| - 1$, et det $\Delta_{ap} \neq 0$,

où

$$\Delta_{ap} = \begin{pmatrix} P(t_j), j = 1, ..., p & 0 \\ (C(K_{ap}, t_j), j = 1, ..., p & e(K_{ap}) \end{pmatrix} \text{est une matrice}$$

$(m + |K_{ap}|) * (p + 1)$, et $e^t(K_{ap}) = (1, ..., 1)$est un vecteur-$|K_{ap}|$.

Notons $T_{ap} = t_j, j = 1, ..., p$ l'ensemble de discontinuité du contrôle u(t). Soit $J_m = j_1, ..., j_m \subset 1, ..., p$ tel que la sub-matrice Φ de Δ_{ap} qui est définit par : $\Phi = (P(t_j) = HF(t_*, t_j)b_{,j=j_1,...,j_m})$, est inversible.

Construisons le vecteur $y \in R^m$ et les $\lambda_k, k \in K$, sous le chemin suivant :

$$(y^t, \lambda(K_{ap})) = \underbrace{(0...01)}_{m+|K_{ap}|} .\Delta_{ap}^{-1} et \lambda_k = 0, k \in K \ K_{ap}. \tag{2.22}$$

Lemme 2

Soit u(t) un contrôle de type 2*, alors le vecteur $y \in R^m$ et les $\lambda_k, k \in K$ construit par les formules (2.22) , les relations (2.13) sont vérifiées .

Preuve

On procède par absurde . Supposons que la condition (**b**) n'est pas vérifiée , pour laquelle il existe :

$t_0 \in T : \Psi'(t_0)b < 0, u(t_0) = 1$, donc de la continuité de la fonctionnelle $\Psi'(t)b, t \in T, \exists [t_0, t_1], t_1 > t_0$, tel que $u(t) \equiv 1, \Psi'(t)b, t \in [t_0, t_1]$.

Soit $\tau = (\tau_j, j = 1, ..., p)$ un vecteur paramétrique et $\epsilon > 0$, tel que :

$$u(t,\tau,\epsilon) = \begin{cases} u(t) \quad t \in T \backslash ([t_0, t_0+\epsilon] \bigcup_{j=1}^{p} T_j); \\ -1 \quad t \in [t_0, t_0+\epsilon]; \\ u(t_j - \epsilon) \quad t \in [t_j, \tau_j] \quad si \quad \tau_j \geq t_j; \\ u(t_j + \epsilon) \quad t \in [\tau_j, t_j] \quad si \quad \tau_j < t_j, j = 1, ..., p; \end{cases}$$

Où

$$T_j = \begin{cases} [t_j, \tau_j] \quad si \quad \tau_j \geq t_j, \\ \lceil \tau_j, t_j \rceil \quad si \quad \tau_j < t_j. \end{cases}$$

Soit $x(t,\tau,\epsilon), t \in T$, la trajectoire correspondante de la commande $u(t,\tau,\epsilon)$, $t \in T$. En supposant que $u(t,\tau,\epsilon), t \in T$, construit sous ce chemin est admissible pour une certaines valeurs τ et ϵ.

Considérons le système suivant de $m+|K_{ap}|$ equations et p+1 variables :

$$\Omega(\tau,\sigma,\epsilon)=\begin{pmatrix} Hx(t_*,\tau,\epsilon)-g \\ c'_k x(t_*,\tau,\epsilon)+\alpha_k-\sigma, k\in K_{ap}\end{pmatrix}\equiv 0. \qquad (2.23)$$

Si le système (2.23) admet une solution alors le contrôle $u(t,\tau,\epsilon), t\in T$, est admissible.

Considérons les variables du système (2.23), les fonctios suivantes :

$$\tau_j(\epsilon), j=1,...,p; \sigma(\epsilon), \epsilon\in[0,\delta_0]. \qquad (2.24)$$

Considérons les fonctions (2.24) comme des fonctions implicites.

En considérant l'application f définit sur un ensemble ouvert $W\subset R^p * R * R$:

$$f: W\to R^m+|K_{ap}|$$

$$(\tau,\sigma,\epsilon)\longmapsto f(\tau,\sigma,\epsilon)=\begin{pmatrix} Hx(t_*,\tau,\epsilon)-g \\ c'_k x(t_*,\tau,\epsilon)+\alpha_k-\sigma, k\in K_{ap}\end{pmatrix}.$$

Cette application est de classe C^1 . Ailleurs pour $(\tau,\sigma,\epsilon)=(T_{ap},\epsilon,0)$,
$f(T_{ap},\epsilon,0)=0$, et sa jaconbienne partielle est égale à :

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta t_j}(Hx(t_*,\tau,\epsilon)-g)_{j=1,...,p} & \frac{\delta}{\delta\sigma}(Hx(t_*,\tau,\epsilon)-g) \\ \frac{\delta}{\delta t_j}(c'_k x(t_*,\tau,\epsilon)+\alpha_k-\sigma,)_{j=1,...,p}, k\in K_{ap} & \frac{\delta}{\delta\sigma}(c'_k x(t_*,\tau,\epsilon)+\alpha_k-\sigma,)\end{pmatrix}.$$

De la définition de la trajectoire $x(t_*,\tau,\epsilon)$, on a :

$$\frac{\delta}{\delta t_j}x(t_*,\tau,\epsilon)=\frac{\delta}{\delta t_j}[\int_{T\backslash[t_0,t_0+\epsilon]}\bigcup_{j=1}^{p}T_jF(t_*,t_j)bu(t)dt-\int_{[t_0,t_0+\epsilon]}F(t_*,t_j)bdt+\sum_{j=1}^{p}\int_{T_j}F(t_*,t_j)bu(t,\tau,\epsilon)dt].$$

$\frac{\delta}{\delta t_j}x(t_*,\tau,\epsilon)=\int_{T_j}F(t_*,t_j)bu(t,\tau,\epsilon)dt \Rightarrow$

$$\frac{\delta}{\delta t_j}x(t_*,\tau,\epsilon)=\begin{cases} F(t_*,t_j)bu(t_j-\epsilon) & si \quad \tau_j\geq t_j; \\ F(t_*,t_j)bu(t_j+\epsilon) & si \quad \tau_j\leq t_j, j=1,...,p.\end{cases}$$

$\frac{\delta}{\delta\sigma}(Hx(t_*,\tau,\epsilon)-g)=0, \frac{\delta}{\delta\sigma}(c'_k x(t_*,\tau,\epsilon)+\alpha_k-\sigma)=-1.$

Donc le jacobien de f au point $(T_{ap},\epsilon,0)$ est égale à :

$$\det\begin{pmatrix} -HF(t_*,t_j)b, j=1,...,p; & 0 \\ -c'(K_{ap})F(t_*,t_j)b, j=1,...,p; & -e(K_{ap}) \end{pmatrix} = -\det\Delta_{ap}\neq 0.$$

Les conditions des fonctions implicites sont remplies, alors il existe $\delta_0>0$ et une fonction continue unique :

$$\varphi:[0,\delta_0]\to R^{m+|K_{ap}|}$$

$$\epsilon\longmapsto\varphi(\epsilon)=(\tau_j(\epsilon)_{j=1,\ldots,p},\sigma(\epsilon)),$$

tel que $\Omega(\tau(\epsilon),\sigma(\epsilon),\epsilon)=0.$

En particulier , pour chaque $\epsilon\in[0,\delta_0]$, le contrôle $u_\epsilon(t)=u(t,\tau(\epsilon),\epsilon), t\in T$ est admimissible et sa trajectoire $x_\epsilon(t)$ vérifie $Hx_\epsilon(t_*)=g$ et $(c'_k x_\epsilon(t_*)+\alpha_k)=\sigma(\epsilon), k\in K_{ap}$.

On compare $u_\epsilon(t)$ et u(t) :

$J(u_\epsilon)=\xi(\epsilon)=min_{k\in K}(c'_k x_\epsilon(t_*)+\alpha_k)=\sigma(\epsilon)$ où $\epsilon\in[0,\delta_0]$,

$\Delta u(t)=u_\epsilon(t)-u(t)=0, t\in T\backslash([t_0,t_0+\epsilon]\bigcup_{j=1}^{p}T_j),$

$\beta_k(\epsilon)-\beta_k=0$, pour $k\in K_{ap}$ car $\beta_k=0,\beta_k\epsilon=0, k\in K_{ap}$.

Pour $k\in K$ on a $\beta_k(\epsilon)=c'_k x_\epsilon(t_*)+\alpha_k-\xi(\epsilon), k\in K$, alors

$\sum_{k\in K}\lambda_k(\beta_k(\epsilon)-\beta_k)=\sum_{k\in K\ \ K_{ap}}\lambda_k(\beta_k(\epsilon)-\beta_k)+\sum_{k\in K_{ap}}\lambda_k(\beta_k(\epsilon)-\beta_k)=0.$

De la formule (2.9) on déduit :

$J(u_\epsilon) - J(u) = \xi(\epsilon) - \xi = \Delta\xi(\epsilon) = -2\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \Psi'(t)bdt + \sum_{j=1}^{p}(-2)\int_{T_j}^{T_j(\epsilon)} \Psi'(t)bdt.$

La dérivé de la dernière fonction est égale à :

$$\frac{d\Delta\xi(\epsilon)}{d\epsilon} = -2\Psi'(t_0)b + \sum_{j=1}^{p}(-2)\Psi'(\tau_j(0))\dot{\tau_j}(0).$$

Mais comme nous avons :

$\Psi'(t_j)b = F(t_*, t_j)(y'H + \sum_{k\in K} \lambda_k.c_k)b$

$= y'HF(t_*, t_j)b + \sum_{k\in K} \lambda_k.c_k F(t_*, t_j)b$

$= \sum_{k\in K} \lambda_k(y'_k HF(t_*, t_j)b - c_k F(t_*, t_j)b).$

En utilisant les fonctions $\Delta(t_j) = \sum_{k\in K} \lambda_k(y'_k HF(t_*, t_j)b - c_k F(t_*, t_j)b)$ appelées vecteur d'estimation à l'instant $t_j \in T$, et comme $u(t), t \in T$ est optimal $\Rightarrow \Delta(t_j) \geq 0, \forall t_j$, alors $\frac{d\Delta\xi(\epsilon)}{d\epsilon} > 0 \Rightarrow J(u_\epsilon) > J(u)$, qui est une contradition avec le fait que u(t) est optimal .

Finalement nous avons démontré que pour un contrôle optimal de type 2^* , la relation de **(b)** de (2.13) est vérifiée .

Mais la relation (**a**) de (1) est vérifiée par supposition. Par conséquent pour tout contrôle optimal non dégénéré de type 2^* , les conditions (2.13) sont vérifiées.

Chapitre 3

Application

3.1 Introduction

Le but de ce travail est la résolution d'un système dynamique linéaire. La résolution du probléme considéré est faite par la méthode de tir basée sur la principe du maximum de pontryaguin. Elle donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajecto ire optimale est la projection d'une extrémale . Les applications de l'exemple pratique sont effectuées à l'aide du logiciel MATLAB.

3.1.1 Position du problème

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} J(u) = C'x(t_*) \Rightarrow max, \\ \dot{x} = Ax(t) + B(u(t)), \\ x_0 = x(0) = 0, \\ U = \{u \in R/|u| \leq M, t \in [1, t_*], \} \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est $n * n$-matrice, $x \in R^n$, B est un n-vecteur fonction non linéaire de la commande $u(t), t \in [0, t_*]$.

Définition

Tout contrôle u(t), $t \in [1, t_*]$ vérifiant $u \in U$ est appelé contrôle admissible.

Si en plus il réalise le minimum du coût, ce contrôle est appelé contrôle optimal.

Avant de passer à la résolution du système (3.1), ainsi donné on doit d'abord vérifier s' il est contrôlable ou pas.

3.1.2 Contrôlabilité

Le système (3.1) est dit contrôlable si on peut le ramener d'un état initial donné vers un état final prescrit en un temps fini.

Ensemble accessible

L'ensemble d'accessibilité joue un rôle important dans la théorie du contrôle.Faisons une description de cet ensemble :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \\ x_0 = x(0) = 0, \quad t \in [1, t_*]. \end{cases}$$

Où A est une $n * n$-matrice, B n-vecteur, $u \in U$ est appelé contrôle ou commande.

$x(.) \in R^n$ l'ensemble des états du système, U le domaine des contrôles admissibles.

Définition (Ensemble accessible)

L'ensemble des points accessibles en un temps $t_* > 0$ est l'ensemble des extrèmités des solutions du système différentiel du problème (3.1)au temps t_* :

$Acc(x;t_*) = \{x_u(t_*), u \in U\}$

3.1.3 Condition de Kalman : théorème [7]

Le système $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t); x(0) = x_0, t \in [1, t_*]$ est contrôlable si et seulement si la matrice

$$C = (B, AB, ..., A^{n-1}B)$$

est de rang n.

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $rgC = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque

La condition de Kalman ne dépend ni de t_* ni de x_0. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_* depuis x_0 alors il est contrôlable en tous temps depuis tout point.

Etant donné un point $x \in R^n$, trouver un temps final t_* et un contrôle $u(t)$, $t \in [1, t_*]$ tel que la trajectoire associée à u, solution de (3.1) vérifie $x(0) = x_0$ et $x(t_*) = x_1$.

3.2 Méthode de résolution

On distingue deux grandes classes de méthodes de résolution en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes,

Méthodes directes : Parmi les méthodes directes, on peut citer : les méthodes de programmation linéaire , les méthodes de descrétisation, ect....

Méthodes indirectes : Le principe du maximum de Pontriaguine.

3.2.1 Principe du maximum de Pontriaguine

Le principe du maximum de Pontriaguine est un principe qui donne une condition nécessaire d'optimalité pour des systémes décrits par des équations différentielles ordinaires.

Théorème [7]

Si le contrôle u associé à la trajectoire x(.) est optimal sur $[1, t_*]$ alors il existe une application p(.) : $[1, t_*] \rightarrow R^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tel que le couple $(p(.); p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [1, t_*]$:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{3.2}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0, \tag{3.4}$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, t_*]$

$$H(t, X(t), p(t), p^0, u(t)) = max_{\nu \in U} H(t, X(t), p(t), p^0, \nu). \tag{3.5}$$

3.2.2 Conditions de transversalité

Supposons que : E_1 et E_2 sont des variétés de R^n ayant des espaces tangents en$X(0) \in E_1$ et $X(t_*) \in E_2$, alors le vecteur adjoint $p(t), t \in t_*$ doit vérifier les conditions aux deux extrêmités : peut étre construit de manière à vérifier les conditions aux deux éxtrémités :

$$p(0) \perp TX(0)E_1, \tag{3.6}$$

$$p(t_*) \perp TX(t_*)E_2, \tag{3.7}$$

appelées conditions de transversalité.

3.3 Exemple pratique

Dans une coopérative agricole, désignons par $x_1(t)$ l'évolution de la quantité d'argent disponible au temps t et $x_2(t)$ la quantité de blé disponible au temps t. Le contrôle $u(t), t \in [0, t_*]$ est le taux d'achat ou de vente du blé , u(t) est telle que $-M \leq u(t) \leq M$ ($u(t) > 0$:achat et $u(t) < 0$: vente), q(t) est le prix du blé qui est connu sur l'intervalle $[1, t_*]$ et λ le taux de stockage de l'unité de blé pour une unité de temps, t_* : période de temps.

3.3.1 Modélisation

Le problème de la coopérative est modélisé sous forme d'un problème de contrôle optimal :

$$\begin{cases} J(u) = x_1(t_*) + q(t)x_2(t_*) \to max_u, \\ \dot{x}_1(t) = -\lambda x_2(t) - q(t)u(t), x(0) = x_0, \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \\ |u(t)| \leq M, t \in [0, t_*]. \end{cases} \tag{3.8}$$

En faisant le changement de variables, en posant :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

on obtient un problème équivalent sous matricielle :

$$\begin{cases} C_{t_*}(u) \to max, \\ \dot{X}(t) = AX(t) + B(u(t)), X(0) = X_0, \\ -M \leq u(t) \leq M, t \in [0, t_*], \end{cases} \tag{3.9}$$

où

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B(u(t)) = \begin{pmatrix} -q(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la résolution du problème (3.9), on applique le principe du maximum. Introduisant l'Hamiltonien du système :

$H(t,x,p,u) =< p, AX(t) + B(u(t)) >$

$$=(p1,p2)\begin{pmatrix} -\lambda x_2(t) - q(t)u(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

$H(t,x,p,u) = p_1(-\lambda x_2(t) - q(t)u(t)) + p_2 u(t).$
Delà on déduit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\delta H}{\delta p} = \begin{pmatrix} -\lambda x_2(t) - q(t)u(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \\ \dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda p_1 \end{pmatrix}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\lambda x_2(t) - q(t)u(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \\ \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = \lambda p_1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = Mt^2 + 5t, \\ x_2(t) = -Mt, \\ p_1 = c_1, \\ p_2 = \lambda c_1 t + c_2. \end{cases}$$

En introduisant les conditions de transversalité

$p(t_*) - p^0 \frac{\delta g}{\delta x} = 0$

$\Rightarrow p(t_*) = p^0 \frac{\delta g}{\delta x} = (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ -q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t_*) \\ p_2(t_*) \end{pmatrix}$

Delà on obtient :

$$\begin{cases} x_1(t) = Mt^2 + 5t, \\ x_2(t) = -Mt, \\ p_1(t) = 1, \\ p_2(t) = \lambda(t - t_*) + q(t_*). \end{cases}$$

Cherchons le maximum de la fonction hamiltonienne :
$\max H(t,x,p,u) = -\lambda x_2(t) + max_{|u(t)|\leq M}\{u(t)(p_2(t) - q(t))\}$.

La quantité d'achat ou de vente est répartie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} M \quad si \quad p_2(t) > q(t), t \in [1, t_*], \\ -M \quad si \quad p_2(t) < q(t), t \in [1, t_*]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Exemple d'application numérique

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} J(u) = x_1(12) + q(t)x_2(12) \to max_u, \\ \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) - q(t)u(t), x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2(t) = u(t), x_2(0) = x_{20}, \\ |u(t)| \leq 1, t \in [1, 12], \end{cases} \tag{3.11}$$

où

$$q(t) = \begin{cases} 8 \quad si \quad t \in [1, 3[, \\ 14 \quad si \quad t \in [3, 6[, \\ 30 \quad si \quad t \in [6, 12]. \end{cases}$$

Le problème précédent peut s'ecrir sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} C_{12}(u) \to max, \\ \dot{X}(t) = AX(t) + B(u(t)), X(0) = X_0, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, t \in [1, t_*], \end{cases} \tag{3.12}$$

où

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B(u(t)) = \begin{pmatrix} -q(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Contrôlabilité du système

Le détérminant étant différent de 0, alors le système (3.11) est contrôlable. Passant au calcul du contrôle optimal ; en utilisant le principe du maximum. L'Hamiltonien du système est :

$$H(t,x,p,u) =< p, AX(t) + B(u(t)) >$$

$$=(p1,p2)\begin{pmatrix} -2x_2(t) - q(t)u(t) \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

$$H(t,x,p,u) = p_1(-2x_2(t) - q(t)u(t)) + p_2u(t).$$

Delà on déduit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\delta H}{\delta p} = \begin{pmatrix} -2x_2(t) - q(t)u(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \\ \dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda p_1 \end{pmatrix}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) - q(t)u(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \\ \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = 2p_1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = Mt^2 + 5t, \\ x_2(t) = -Mt, \\ p_1 = c_1, \\ p_2 = \lambda c_1 t + c_2. \end{cases}$$

En introduisant les conditions de transversalité

$$p(12) - p^0\frac{\delta g}{\delta x} = 0,$$

$$\Rightarrow p(12) = p^0\frac{\delta g}{\delta x} = (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ -q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(12) \\ p_2(12) \end{pmatrix}.$$

Delà on obtient :

$$\begin{cases} x_1(t) = -Mt^2 - q(t)M, \\ x_2(t) = Mt, \\ p_1(t) = 1, \\ p_2(t) = 2(t-12) + q(12). \end{cases}$$

Cherchons le maximum de la fonction hamiltonienne :
$\max H(t,x,p,u) = -\lambda x_2(t) + max_{|u(t)|\leq M}\{u(t)(p_2(t) - q(t))\}.$

La quantité d'achat ou de vente est répartie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad p_2(t) > q(t), t \in [1,12], \\ -1 \quad si \quad p_2(t) < q(t), t \in [1,12]. \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour t = 12, on aura :

$$\begin{cases} x_1(t) = -t^2 - 30t = -(12)^2 - 30(12) = -504, \\ x_2(t) = t = 12, \\ p_1(t) = 1, \\ p_2(t) = 2(t-12) + q(12) = 2t + 6 = 30. \end{cases}$$

La fonction $p_2(t)$ est une droite positive croissante de la variable t (voir figure 1).

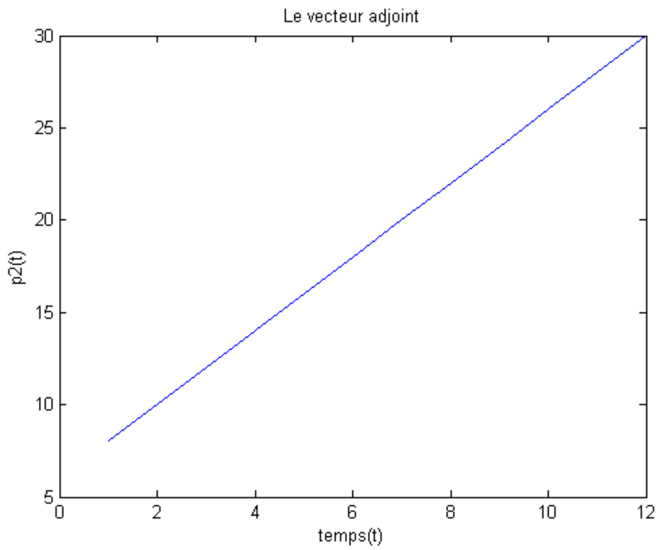

figure 1

Le graphe du prix de blé (q(t)) en fonction du temps t est donné par la figure 2.

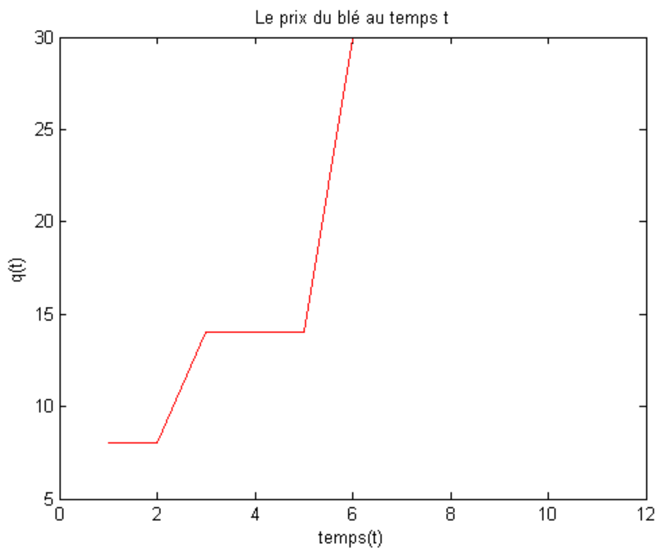

figure 2

Le signe de la foction $(p_2(t) - q(t))$ est représentée par la figure 3 .

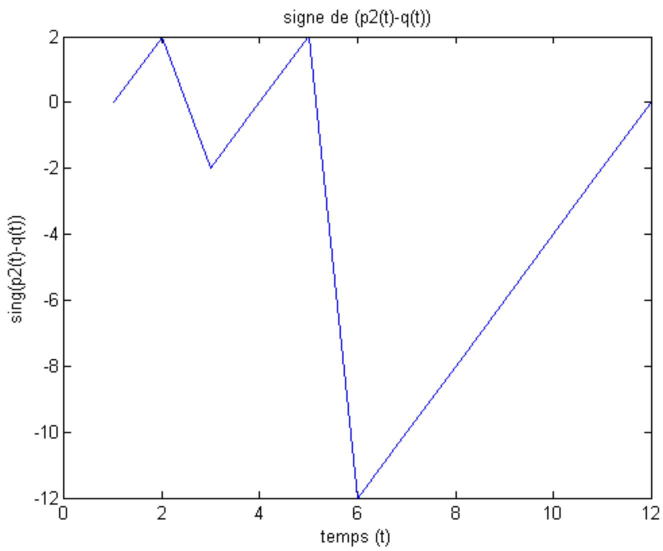

figure 3

Interprétation

Le signe de la fonction $(p_2(t) - q(t))$ varie de la manière suivante :
Dans les intervalles $[1, 5\backslash 2]$,[4,5] et $[5, 11\backslash 2]$: on remarque que la fonction est positive. Ailleurs, elle est négative .

3.4 Résolution numérique du problème à l'aide du logiciel Matlab

3.4.1 Introduction au logiciel de programmation

MATLAB est une abréviation de Matrix LABoratory. Ecrit à l'origine, en Fortran, par C. Moler, MATLAB était destiné à faciliter l'accès au logiciel matriciel développé dans les projets LINPACK et LISPACK. La version actuelle est écrite en c par the Math Works Inc.

MATLAB comprend un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés Toolboxes (ou boites à outils) indispensables à la plupart des utilisateurs. Les boites à outils sont des collections qui étendent l'environnement MATLAB pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes. Les domaines ouverts sont très variés et comprennent notamment le traitement du signal, l'identification de systèmes, les réseaux de neurones, la logique floue, le calcul de structure, les statistiques, etc.

Le programme associé au problème (3.11) est le suivant :
function ble
%T : temps fixé
%$x_1(t)$: quantité d'argent disponible au temps t
%$x2(t)$: quantité de blé disponible au temps t
%u(t) : taux d'achat et de vente de blé
%q(t) : prix de blé au temps t, u(t) connu sur [0,T]
%λ : coût de stockage de l'unité de blé pour une unité de temps
%$|u(t)| \leq M, u(t) > 0$: achat , $u(t) < 0$: vente

% Système
% $x1dot = -\lambda x2(t) - q(t)u(t), \quad x_1(0) = x_{10}$
% $x2dot = u(t), \quad x_2(0) = x_{20}$
% $-M \leq u(t) \leq M$
%**On veut maximiser** $x_1(t) + q(t)x_2(t)$

Appliquant le principe du maximum clc ;
$x_{10} = 0; x_{20} = 0;$
global $x_0; x_0 = [x_{10}; x_{20}]$;
global $\lambda \quad M \quad t_*$;
$\lambda = 2$;

$t_* = 12$;

$t = 1 : t_*$;

M=1 ;

$q = prix_q(t)$;

for i=1 :length(q)

$A = [0 \quad -\lambda; 0 \quad 0]$;

b=[-q(i) 1] ;

C=[b ;b*A] ;

dC(i)=det(C) ;

end ;

disp('Le Le déterminant de la matrice du système est : det=')

disp(dC)

if $dC == 0$

disp('le système n'est pas contrôlable')

else if $dC \neq 0$

disp('le système est contrôlable ')

end ;

end ;

options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;

$[t, x] = ode45(@systeme, [0; t_*], x_0, options)$; $tc = T + (((prix_q(t)) - q(t_*))/2)$;

$u = controle_u(t); p2 = \lambda * (t - t_*) + q(t_*)$;

disp('La quantité d''argent disponible au temps t $x_1(t_*) =')$ x(end,1)

disp('La quantité de blé disponible au temps t $x_2(t_*) =')$ x(end,2)

disp('Prix du blé au temps t q(t)=')

disp(q)

disp('Le vecteur d''adjoint $p_2 =')$ disp(p_2')

disp('le temps de contrôle tc=')

disp(tc)

disp('Taux d''achat de vente de blé u(t)=')

disp(u)

for j=1 :T if $(u(j) > 0)$

disp('Prix d''achat')

else if $(u(j) < 0)$

disp('Prix de vente')

end ;

end ;

end ;

Résolution du système

function xdot=système(t,x)

global λt_* ;

$q = prix_q(t)$;

$u = controle_u(t)$;

for $i = 1 : t_*$

$xdot = [-\lambda * x(2) - q(i) * u(i)u(i)]$;

$J = x(1) + \lambda * x(2)$;

end ;

xdot=xdot'

disp(J)

Prix de blé

function $q = prix_q(t)$

global t_* ;

$t = 1 : t_*$;

for i=1 :length(t)

if $(i \geq 0)\&(i < 3)$

q(i)=8 ;

else if $(i \geq 3)\&(i < 6)$

q(i)=14 ;

else if $(i \geq 6)\&(i <= 12)$

q(i)=30 ;

end ;

end ;
end ;
end ;

Le controle d'achat ou de vente

function $u = controle_u(t)$
global $\lambda \quad t_* \quad M$;
$q = prix_q(t)$;
q=q' ;
$t = 1 : t_*$;
for j=1 :length(q)
$qt(j) = q(j) - q(t_*);$
end ;
$tc = t_* + (qt/2);$
for i=1 :length(t)
$p_2(i) = \lambda * (i - t_*) + q(t_*);$
$sing(i) = p_2(i) - q(i);$
if $(sing(i) \geq 0)$
u(i)=M ;
else if $(sing(i) < 0)$
u(i)=-M ;
end ;
end ;
end ;
$t = 1 : t_*$;
plot(t,sing)
plot(t,u*sing)
plot(t,p2)
plot(t,q)
u=u' ;
q=q' ;

A partir du programme précédent, on a pu tracer les graphes suivants :

la figure 4 représente le prix d'achat ou de vente du blé au temps t.

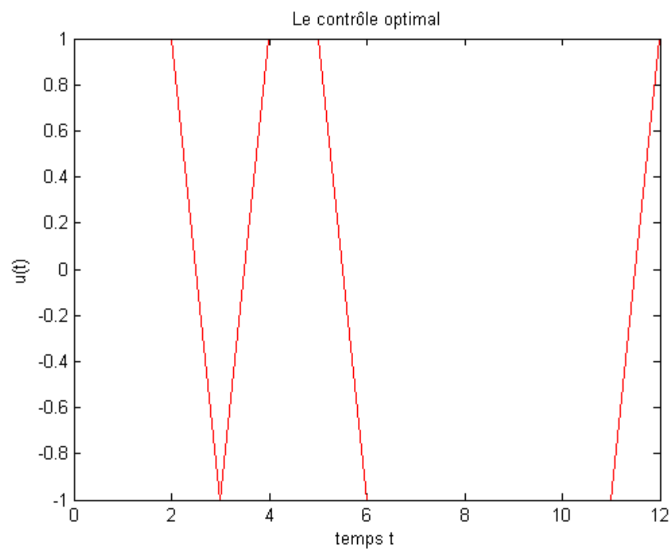

figure 4

Interprétation

En janvier,février,avril,mai et déscembre, la coopérative de l'agricole est en période d'achat du blé , quant au reste de l'année,elle est en période de vente.

La figure 5 est l'allure de fonction hamiltonienne .

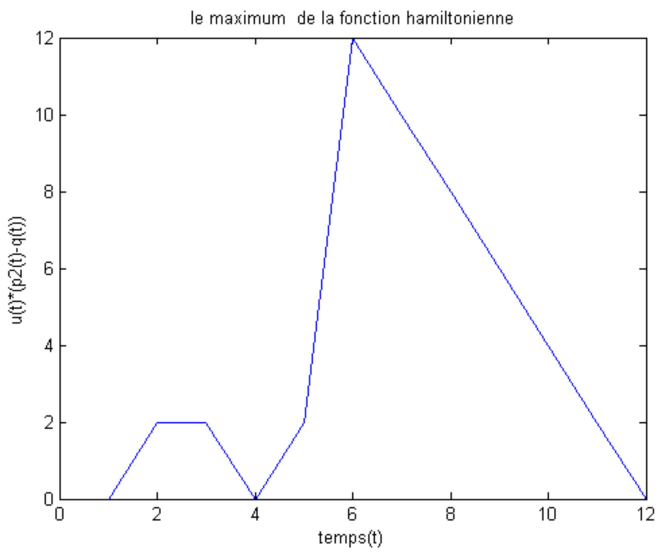

figure 5

Interprétation

La fonction hamiltonienne atteint son maximum en juin.

Les résultats obtenus sous Matlab sont les suivants

La quantité d'argent disponible au temps t $x_1(t_*) =$

ans =

-504.0000

La quantité de blé disponible au temps t $x_2(t_*) =$

ans =

12

Prix du blé au temps t q(t)=

8 8 14 14 14 30 30 30 30 30 30 30

Le temps de contrôle tc=

1 1 4 4 4 12 12 12 12 12 12 12

Taux d'achat de vente de blé u(t)=

1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1

Prix d'achat

Prix d'achat

Prix de vente

Prix d'achat

Prix d'achat

Prix de vente

Prix de vente

Prix de vente

Prix de vente

Prix de vente

Prix de vente

Prix d'achat

3.5 Conclusion

Notre but dans le cadre de ce mémoire était d'établir le critère d'optimalité pour un des problèmes de contrôle optimal.

En premier lieu , nous avons introduit la condition nécessaire et suffisante pour un prblème min \ max qui a été exposé le long du premier chapitre.

Ensuite nous nous sommes intéressés à démontrer le critère d'optimalité pour un problème min-max.

La dernière partie a été axée sur la résolution d'un problème de contrôle optimal, sur une période allant du mois de janvier jusqu'à descembre.

Le problème considéré est résolu théoriquement, puis numériquement, les résultats obtenus sont identiques. Pour la résolution, nous avons utlisé une méthode indirecte(méthode de tir), basée sur le principe du maximum de Pontriaguine, elle donne une condition nécessaire d'optimalité.

La théorie du contrôle optimal est très vaste, ainsi les domaines d'application sont encore plus vastes et pour cela je propose comme pérspective de recherche :

-La résolution de problèmes d'optimisation multi-objectifs linéaire et non linéaire.

-La résolution d'un problème min-max en contrôle optimal avec des contraintes bornées.

-La résolution d'un problème min-max en contrôle optimal avec des commandes polyédrales.

Bibliographie

[1] . M .Aidene ,
Algorithm for the min-max problem in control optimal . Journal of Doclady of Academy of science, Belarus 1986.

[2] R.Gabasov,
Some problems of contructive theory of optimal control. Journal of Math.control theory. Banach Center Publ., 1985.

[3] R.Gabasov,
Adaptive method of solving linear programming problem. Preprint series of University of Kalsruhe, Institut of statistic and mathematics, 1994.

[4] R.Gabasov,F.M.Kirillova et O.J.Kostyukova,
Dual algorithm of optimization linear dynamic system problems of control and information theory, 1983.

[5] A.V.A.Guminsky.
Dual support method for Max-min optimization of a linear control sys-

tem.Warsawa. 1987.Institut of mathematic of Polonia academy of science.

[6] A.V.A.Guminsky.
Primal support method for Max-min optimization of a linear control system.Warsawa. 1987.Institut of mathematic of Polskoi academy of science.

[7] E. Trélat,
Théorie du contrôle optimal et application en aéronotique. université D'orléans, UFR sciences, Fédération Denis Poisson, Labo, MAPMO, UMR 6628 Route de chartres, Bp 6759, 45067 Orléans Cedex 2.