MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : PROBABILITES ET STATISTIQUE

Présenté par :

M. Farid GRAICHE

Sujet :

Convergence hölderienne des processus empiriques et quantiles et applications

Devant le jury d'examen composé de :

M. Hocine FELLAG ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
M. Djamel HAMADOUCHE ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
M. Djamil AISSANI ;	Professeur ;	U. Bejaia ;	Examinateur
M. Abderrahmane YOUSFATE ;	Professeur ;	U. Sidi Bel-Abbes ;	Examinateur
M. Kamal BOUKHETALA ;	Professeur ;	U.S.T.H.B ;	Examinateur
M. Mohand Arezki BOUDIBA ;	M. de Conférences A ;	U.M.M.T.O ;	Examinateur

Soutenu le

Table des matières

Introduction générale **4**

1 Convergence hölderienne des processus stochastiques **8**

1.1 Introduction 8

1.2 Les espaces de Hölder $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$ 9

1.2.1 Définitions 9

1.2.2 Analyse par les fonctions triangulaires 9

1.2.3 Lignes polygonales 11

1.2.4 Compacité dans H_α^0 12

1.2.5 Dual de H_α^0 12

1.2.6 Processus à trajectoires dans H_α 13

1.2.7 Convergence faible et équitension dans H_α^0 14

1.3 Les espaces de Hölder $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ et $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$ 16

1.3.1 Définitions et notations 16

1.3.2 Analyse par les fonctions triangulaires 16

1.3.3 Dual de $C_0^{\alpha,o}$ 19

1.3.4 Convergence faible et équitension dans $C_0^{\alpha,o}$ 20

2 Processus empirique en norme hölderienne **23**

2.1 Introduction 23

2.2 Processus empirique non lissé 24

2.2.1 Définitions et notations 24

2.2.2 processus empirique basé sur des variables aléatoires indépendantes de même loi 25

2.2.3 Processus empirique uniforme 25
2.3 Processus empirique uniforme lissé polygonalement 27
2.3.1 Convergence de $\{\widehat{\xi}_n, n \geq 1\}$ dans $C[0,1]$ 27
2.3.2 Convergence de $\{\widehat{\xi}_n,\ n \geq 1\}$ dans H_α^0 28
2.4 Processus empirique uniforme lissé par convolution dans H_α^0 31
2.5 Processus empirique lissé par convolution dans $C_0^{\alpha,o}$ 34

3 Processus empirique pour des suites non stationnaires 37
3.1 Introduction 37
3.2 Convergence des lois fini-dimensionnelles de
$\{\bar{\xi}_n, n \geq 1\}$ 38
3.3 Convergence du processus empirique lissé polygonalement dans H_α^0 40
3.4 Convergence du processus empirique lissé par convolution dans H_α^0 48
3.5 Convergence du processus empirique lissé par convolution dans $C_0^{\alpha,o}$ 57

4 Application à la détection de rupture épidémique 65
4.1 Introduction 65
4.2 Cas indépendant non stationnaire 69
4.2.1 Convergence de $DI(n, \alpha)$ 69
4.2.2 Consistance de $DI(n, \alpha)$ 72
4.2.3 Exemple d'application 75
4.3 Cas dépendant stationnaire (α-mélange) 78
4.3.1 Définitions 78
4.3.2 Convergence de $DI(n, \alpha)$ 79
4.3.3 Consistance de $DI(n, \alpha)$ 81
4.3.4 Exemple d'application 82
4.4 Exemple numérique 85

Conclusion générale 89

Annexe A. Convergence de Processus stochastiques **91**
A.1 Convergence de processus dans les espaces métriques 91
A.2. Convergence de processus dans $D[0,1]$ 92
A.3 Convergence dans $C[0,1]$ 95

Annexe B. Mouvement brownien et pont brownien **97**
B.1 Introduction 97
B.1 Mouvement brownien 97
B.3 Pont brownien 102

Programme de simulation **104**

Bibliographie **106**

Introduction générale

Plusieurs problèmes statistiques (détection de rupture, tests épidémiques,...) sont résolus en utilisant la convergence faible des processus stochastiques. Ces applications statistiques sont basées sur des fonctionnelles continues de trajectoires de processus stochastiques.

La convergence faible d'une suite de processus stochastiques $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ est généralement étudiée dans l'espace de Skorokhod $D[0,1]$ ou $D(\mathbb{R}_+)$ quand les trajectoires des processus considérés sont à sauts (discontinues), dans l'espace des fonctions continues $C[0,1]$ ou $C(\mathbb{R}_+)$ quand elles sont continues. Mais souvent les trajectoires des processus de la suite considérée voir le processus limite (mouvement brownien et pont brownien) ont une régularité qui dépasse la barre de la continuité par exemple hölderiennes, d'où l'intérêt de travailler dans les espaces de Hölder qui ont plus de fonctionnelles continues de trajectoires, donc davantage d'applications statistiques.

Les espaces de Hölder que nous utilisons possèdent une base de Schauder de fonctions triangulaires qui les rend isomorphes à des espaces de Banach de suites. Cet isomorphisme permet de caractériser le dual en termes de suites et fournit une procédure de discrétisation naturelle qui est un outil commode pour notre travail.

La convergence de certains processus très utilisés en statistique descriptive (processus empirique et processus quantile) est largement étudiée dans les espaces de Hölder et la convergence hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à l'équitension de la suite des lois et à la convergence de ses lois fini-dimensionnelles. Pour une suite de processus empiriques basés sur des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme, Hamadouche [17] a établi la convergence de cette suite (lissage polygonal) dans l'espace de Hölder H_α^0 pour tout ordre $\alpha < \frac{1}{4}$ vers le pont brownien et ce résultat est optimal. Le caractère surprenant de la borne $\alpha < \frac{1}{4}$ (le processus limite a une régularité $\alpha < \frac{1}{2}$) s'explique par les propriétés des espacements d'une suite i.i.d. et le fait que le lissage polygonal est un peu brutal. Avec un lissage par convolution, les choses rentrent dans l'ordre et la convergence hölderienne d'une suite de processus empiriques basés sur des variables aléatoires indépendantes de même loi quelconque F est établie pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.

Comme le lissage par convolution du processus empirique ne commute pas avec le changement de variable $U_i = F(X_i)$ où F est la fonction de répartition marginale de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, le dernier résultat de convergence faible ne peut pas être appliqué pour l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et donc la convergence faible hölderienne de ce processus doit être étudiée directement sur la droite réelle. Pour cela, Hamadouche et Suquet [20] ont introduit une autre échelle d'espaces $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ $(0 < \alpha < 1)$ et pour des raisons d'équitension et donc de séparabilité, ils ont considéré son sous-espace $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$. Ils ont montré ainsi la convergence du processus empirique lissé par convolution dans $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.

Le travail de cette thèse porte sur l'extension des deux derniers résultats de convergence sur les espaces de Hölder H_α^0 et $C_0^{\alpha,o}$, aux suites non stationnaires de variables aléatoires et une application statistique sur la détection de rupture épidémique de la variance dans le cas de variables aléatoires dépendantes ou indépendantes.

La thèse comporte une introduction générale, quatre chapitres, une conclusion générale et deux annexes.

Dans le chapitre 1, on étudie la convergence hölderienne des processus stochastiques. On rappelle d'abord les résultats et les notations de Ciesielski [06] sur les espaces de Hölder

H_α^0 ainsi que ceux établis sur les espaces $C_0^{\alpha,o}$ et on définit les isomorphismes entre ces espaces et des espaces de suites. On donne ensuite les principaux résultats d'équitension et les critères de convergence en loi dans ces deux espaces.

Le chapitre 2 comprend les résultats de convergence faible hölderienne du processus empirique dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$ vers le pont brownien B avec les deux types de lissage (lissage polygonal et lissage par convolution). Avec le premier lissage, la convergence dans H_α^0 vers le pont brownien a lieu pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$ (qui est inférieur à la régularité hölderienne du processus limite). Avec le deuxième lissage, les choses rentrent dans l'ordre et la convergence sur H_α^0 et $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$ est obtenue.

Dans le chapitre 3, on considère une suite non stationnaire de variables aléatoires et on montre la convergence des lois fini-dimensionnelles du processus empirique correspondant vers celles d'un processus gaussien centré (pont brownien généralisé) B'. Ce dernier résultat sera ensuite utilisé pour déduire la convergence des lois fini-dimensionnelles des deux processus lissés (lissage polygonal et lissage par convolution) et ensuite établir la convergence faible hölderienne de ces deux processus vers le pont brownien généralisé B'. Pour une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $(F^{(i)})_{i\geq 1}$, on établit cette convergence dans les deux espaces H_α^0 et $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $\alpha < \frac{\beta}{2}$, où β est l'ordre de régularité hölderienne des fonctions de répartition $F^{(i)}$.

Dans le chapitre 4, on donne une application statistique de la convergence hölderienne pour la détection de rupture épidémique. On rappelle d'abord les statistiques proposées par Račkauskas et Suquet [35] $UI(n,\alpha)$ et $DI(n,\alpha)$ basées sur des sommes partielles de variables aléatoires. Ces deux statistiques ont le même comportement asymptotique mais les DI sont les plus intéressantes par leurs lois limites qui sont connues contrairement à UI (voir Račkauskas et Suquet [35]). Ensuite on établit la convergence de $DI(n,\alpha)$ dans le cas d'une suite non stationnaire de variables aléatoires indépendantes puis dans le cas d'une suite de variables aléatoires α-mélangeantes et enfin on donne un exemple d'application pour la détection de rupture épidémique de la variance dans les deux cas dépendant et indépendant. On termine la thèse par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche.

Quelques résultats de convergence faible de suites de processus stochastiques sont présentés en annexe A et une annexe B est consacrée aux définitions et aux propriétés des processus limites : mouvement brownien et pont brownien.

Chapitre 1

Convergence hölderienne des processus stochastiques

1.1 Introduction

La convergence faible (en loi) de processus stochastiques à trajectoires dans un espace fonctionnel E muni d'une norme $\|.\|_E$ est équivalente à la relative compacité de la suite de mesures associées à la suite de processus et à la convergence des lois fini-dimensionnelles. Prohorov a établi que la relative compacité d'une famille de mesures de probabilité est équivalente à l'équitension de cette famille si $(E, \|.\|_E)$ est un espace polonais (séparable, métrisable et complet).

On peut vérifier que les espaces $C[0,1]$ muni de la topologie uniforme et $D[0,1]$ (qui est l'espace des fonctions continues à droite et possédant des limites à gauche) muni de la topologie de Skorohod, sont des espaces polonais, donc la convergence faible sur ces espaces a lieu si on a la convergence des lois fini-dimensionnelles et l'équitension de la suite des lois.

La convergence hölderienne offre plus de fonctionnelles continues de trajectoires que $C[0,1]$ et donc davantage d'applications statistiques.

1.2 Les espaces de Hölder $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$

1.2.1 Définitions

Nous reprenons les notations et les résultats de Ciesielski [06] sur les espaces de fonctions hölderiennes sur $[0,1]$.
On définit l'espace de Hölder d'ordre α $(0 < \alpha \leq 1)$, noté $H_\alpha[0,1]$, comme l'espace des fonctions f définies sur $[0,1]$, nulles en 0 telles que

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0<|t-s|\leq 1} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha} < +\infty.$$

On note $\omega_\alpha(f,\delta)$ le module de continuité hölderien de f

$$\omega_\alpha(f,\delta) = \sup_{0<|t-s|\leq \delta} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

On définit le sous-espace $H_\alpha^0[0,1]$ de $H_\alpha[0,1]$ par

$$f \in H_\alpha^0[0,1] \Longleftrightarrow f \in H_\alpha[0,1] \text{ et } \lim_{\delta\to 0}\omega_\alpha(f,\delta) = 0.$$

Dans la suite, on notera H_α et H_α^0 au lieu de $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$.
$(H_\alpha, \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach non séparable. $(H_\alpha, \|.\|_\beta)$ est séparable pour tout $0 < \beta < \alpha$ et H_α s'injecte continûment dans H_β.
$(H_\alpha^0, \|.\|_\alpha)$ est un sous-espace fermé séparable de $(H_\alpha, \|.\|_\alpha)$.

1.2.2 Analyse par les fonctions triangulaires

Pour définir des isomorphismes de Banach, des espaces H_α et H_α^0 avec des espaces de suites, Ciesielski [06] a utilisé la base de Faber-Schauder basée sur la fonction triangulaire $\Delta(t)$ définie par

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour $n = 2^j + k,\ \ j \geq 0,\ \ 0 \leq k < 2^j$, on pose

$$\begin{aligned}
\Delta_n(t) &= \Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \quad t \in [0,1], \\
\Delta_0(t) &= t.1_{[0,1]}(t), \\
\Delta_{-1}(t) &= 1_{[0,1]}(t).
\end{aligned}$$

On note $C_0[0,1]$ l'hyperplan fermé des fonctions de $C[0,1]$, nulles en 0.

Lemme 1.1 (Faber-Schauder) : *Pour toute fonction f de $C_0[0,1]$,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n(f)\Delta_n(t), \tag{1.1}$$

avec $\lambda_0(f) = f(1)$ et pour $n = 2^j + k$ ($j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$) :

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f(\frac{k+1/2}{2^j}) - \frac{1}{2}\left\{ f(\frac{k}{2^j}) + f(\frac{k+1}{2^j}) \right\}.$$

La série (1.1) converge uniformément sur $[0,1]$, autrement dit, au sens de la norme $\|.\|_\infty$ de $C_0[0,1]$.

Comme $H_\alpha^0[0,1] \subset C_0[0,1]$, alors toute fonction de H_α^0 admet la décomposition précédente comme le montre le résultat suivant

Théorème 1.1 (Ciesielski [06]) : *Pour toute fonction f de H_α^0, la série*

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n(f)\Delta_n(t)$$

converge au sens de la norme $\|.\|_\alpha$. La famille $\{\Delta_n,\ n \geq 0\}$ est une base de Schauder de $(H_\alpha^0, \|.\|_\alpha)$.

Nous adoptons la notation classique ℓ^∞ pour l'espace de Banach des suites bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |u_n|$.

Théorème 1.2 (Ciesielski [06]) : *On pose* $\Delta_n^{(\alpha)} = 2^{-(j+1)\alpha}\Delta_n$ *pour* $n = 2^j + k$ $\left(j \geq 0,\ \ 0 \leq k < 2^j\right)$ *et* $\Delta_0^{(\alpha)} = \Delta_0$. *Les espaces* $\left(H_\alpha, \|.\|_\alpha\right)$ *et* $\left(\ell^\infty, \|.\|_\infty\right)$ *sont isomorphes par les opérateurs* S_α *et* $T_\alpha = S_\alpha^{-1}$ *définis comme suit :*

$$\begin{array}{rccc} S_\alpha : & H_\alpha & \longrightarrow & \ell^\infty \\ & f & \longmapsto & u = (u_n)_{n\geq 0}, \end{array}$$

avec $u_n = 2^{(j+1)\alpha}\lambda_n(f),\ \ n \geq 1$ *et* $u_0 = \lambda_0(f)$.

$$\begin{array}{rccc} T_\alpha : & \ell^\infty & \longrightarrow & H_\alpha \\ & u = (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & f = \sum\limits_{n\geq 0} u_n \Delta_n^{(\alpha)}. \end{array}$$

De plus $\|S_\alpha\| = 1$ *et* $\dfrac{2}{3(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)} \leq \|T_\alpha\| \leq \dfrac{2}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)}$.

En utilisant la base de Faber-Schauder, on peut définir aussi un isomorphisme entre H_α^0 et un sous-espace de ℓ^∞.

Théorème 1.3 (Ciesielski [06]) : H_α^0 *est isomorphe par* S_α *à* $c_{o,\alpha}$ *sous-espace des suites de* ℓ^∞ *vérifiant*

$$\lim_{j\to+\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0\leq k<2^j} |u_{j,k}| = 0.$$

Ainsi on a

$$f \in H_\alpha \Longleftrightarrow \sup_{j\geq 0} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0\leq k<2^j} |\lambda_{j,k}(f)| < +\infty,\ \ |\lambda_0(f)| < +\infty$$

et

$$f \in H_\alpha^0 \Longleftrightarrow f \in H_\alpha \text{ et } \lim_{j\to+\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0\leq k<2^j} |\lambda_{j,k}(f)| = 0.$$

1.2.3 Lignes polygonales

Les lignes polygonales d'interpolation d'une fonction hölderienne jouent un rôle important dans notre travail. Pour contrôler leurs normes, on utilise le résultat suivant.

Lemme 1.2 (Hamadouche [17]) : *Soit f une ligne polygonale sur $[0,1]$, de sommets $(x_i, f(x_i))$, $(0 \leq i \leq n+1)$ avec $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. Alors*

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

est atteint en deux sommets $s = x_i$ et $t = x_j$, $0 \leq i < j \leq n+1$.

1.2.4 Compacité dans H_α^0

La convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité dans l'espace des mesures de probabilité sur H_α^0 muni de la topologie de la convergence étroite. Cette relative compacité est équivalente à l'équitension de la suite des lois d'après le théorème de Prohorov. Pour connaître les compacts de H_α^0, on donne d'abord une condition suffisante de relative compacité très utile en pratique.

Lemme 1.3 (Hamadouche [17]) : *Si $0 < \alpha < \beta < 1$ et si K est borné dans H_β alors K est relativement compact dans H_α^0.*

Le lemme suivant fournit une condition nécessaire et suffisante de relative compacité, qui est une version hölderienne du théorème d'Ascoli.

Lemme 1.4 (Suquet [42]) : *K est relativement compact dans H_α^0 si et seulement si*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f \in K} \omega_\alpha(f, \delta) = 0.$$

1.2.5 Dual de H_α^0

On note $(\ell^1, \|.\|_{\ell^1})$ l'espace des suites réelles $a = (a_0, a_1, ...)$ telles que $\|a\|_{\ell^1} = \sum_{n \geq 0} |a_n| < +\infty$. Le résultat suivant nous donne une caractérisation du dual de H_α^0.

Théorème 1.4 (Ciesielski [06]) : *Toute fonctionnelle linéaire continue φ sur $(H_\alpha^0, \|.\|_\alpha)$ est* *de la forme*

$$\varphi(f) = \sum_{n\geq 0} a_n u_n,$$

avec $u_0 = \lambda_0(f)$, $u_n = 2^{(j+1)\alpha}\lambda_n(f)$, $n = 2^j + k$ $(j \geq 0,\ 0 \leq k < 2^j)$ *et* $a = (\ a_0, a_1, ...) \in \ell^1$. *De plus* $\|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'} \leq \|S_\alpha\| \, \|a\|_{\ell^1}$, $\|a\|_{\ell^1} \leq \|T_\alpha\| \, \|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'}$ *et les constantes* $\|S_\alpha\|$ *et* $\|T_\alpha\|$ *sont optimales.*

1.2.6 Processus à trajectoires dans H_α

Soit $\{\xi_t,\ t \in [0,1]\}$ un processus stochastique. Les résultats suivants nous donnent quelques conditions pour lesquelles le processus précédent admet une version à trajectoires *p.s.* dans H_α.

Théorème 1.5 (Kolmogorov) : *Soit* $\{\xi_t, t \in [0,1]\}$ *un processus défini sur un espace de probabilité* (Ω, A, P). *Supposons qu'il existe* $\delta > 0$, $\gamma > 0$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$\forall \lambda > 0, \quad P(|\xi_t - \xi_s| > \lambda) \leq \frac{C}{\lambda^\gamma} |t-s|^{1+\delta}.$$

Alors il existe une version de ξ *à trajectoires dans* H_α^0 *pour tout* $0 < \alpha < \dfrac{\delta}{\gamma}$.

Théorème 1.6 (Ibragimov [23]) : *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$, *croissante telle que pour tous* s, t *dans* $[0,1]$

$$\mathbb{E}\, |\xi_t - \xi_s|^p \leq f^p(|t-s|). \tag{1.2}$$

Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ *soient dans* H_α *est que*

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{\alpha+1+\frac{1}{\gamma}}} du < +\infty.$$

Remarque 1.1 : *Dans le cas où l'intégrale diverge, Ibragimov [23] a montré qu'il existe un processus* ζ *vérifiant (1.2), tel que*

$$P\left\{\sup_{s\neq t}\frac{|\zeta_t-\zeta_s|}{|t-s|^{\alpha}}=+\infty\right\}=1.$$

1.2.7 Convergence faible et équitension dans H_α^0

On considère un processus à trajectoires hölderiennes comme un élément aléatoire de H_α. Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α, la convergence faible dans H_α^0 entraîne celle dans H_α.
L'étude de la convergence faible des éléments aléatoires de H_α^0 est basée sur le résultat suivant.

Proposition 1.1 (Hamadouche [17]) : *La convergence en loi dans H_α^0 d'une suite de processus $(\xi_n, n\geq 1)$ est équivalente à l'équitension sur H_α^0 de la suite des lois $P_n = P\xi_n^{-1}$ des éléments aléatoires ξ_n et à la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n.*

Pour étudier la convergence faible de processus dans H_α, nous avons besoin des conditions d'équitension. En raison de cette notion d'équitension, on travaillera sur l'espace polonais $(H_\alpha^0, \|.\|_\alpha)$. Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α, la convergence en loi dans H_α^0 entraîne celle dans H_α. Une première condition suffisante d'équitension est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.7 (Kerkyacharian, Roynette [24]) : *Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant pour des constantes $\delta>0,\ \ \gamma>0$ et $c>0$:*

$$\forall\lambda>0,\quad P(|\xi_n(t)-\xi_n(s)|>\lambda)\leq\frac{c}{\lambda^{\gamma}}\,|t-s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0, pour tout $0<\alpha<\frac{\delta}{\gamma}$.

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient la version moments du dernier théorème.

Corollaire 1.1 (Lamperti [25]) : *Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant* *pour des constantes* $\delta > 0$, $\gamma > 0$ *et* $c > 0$ *:*

$$\mathbb{E}\left|\xi_n(t) - \xi_n(s)\right|^{\gamma} \leq c \ \left|t - s\right|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n *des processus* ξ_n *est équitendue dans* H_α^0, *pour tout* $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Le lemme 1.4 nous donne une Condition nécessaire et suffisante d'équitension qui est moins pratique a priori, mais utile pour tester l'optimalité de certains résultats.

Théorème 1.8 (Hamadouche [16]) : *Soit* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments aléatoires de* H_α^0. *La suite* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *est équitendue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{n \geq 1} P(\omega_\alpha(\xi_n, \delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Enfin, on donne le résultat suivant qui est plus maniable pour la vérification des conditions de moments.

Théorème 1.9 (Hamadouche [17]) : *Soit* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *une suite de processus à trajectoires dans* H_α^0, *vérifiant les conditions suivantes*

a) Il existe des constantes $a > 1$, $b > 1$, $c > 0$ *et une suite de nombres positifs* $(a_n) \searrow 0$ *telles que*

$$\mathbb{E}\left|\xi_n(t) - \xi_n(s)\right|^{a} \leq c \ \left|t - s\right|^{b}, \tag{1.3}$$

pour tout n *et tous* s, t *tels que* $|t - s| \geq a_n$ *;*

b) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\{\omega_\alpha(\xi_n, a_n) > \varepsilon\} = 0$.

Alors pour tout $\alpha < a^{-1}\{\min(a, b) - 1\}$, *la suite* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *est équitendue dans* H_α^0.

1.3 Les espaces de Hölder $C_0^{\alpha}(\mathbb{R})$ et $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$

1.3.1 Définitions et notations

Pour $0 < \alpha < 1$, on définit $C_0^{\alpha}(\mathbb{R})$ comme l'espace des fonctions f telles que

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0,$$

et

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \omega_\alpha(f, 1) < +\infty,$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et pour $\delta > 0$,

$$\omega_\alpha(f, \delta) = \sup_{\substack{-\infty < s,t < +\infty \\ 0 < |t-s| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Le sous-espace $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$ de $C_0^{\alpha}(\mathbb{R})$ est défini par

$$f \in C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f \in C_0^{\alpha}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \to 0} \omega_\alpha(f, \delta) = 0.$$

$(C_0^{\alpha}, \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach non séparable. $(C_0^{\alpha,o}, \|.\|_\alpha)$ est un sous-espace fermé séparable de $(C_0^{\alpha}, \|.\|_\alpha)$. En effet, on peut montrer que l'ensemble des lignes polygonales à sommets d'abscisses $\frac{k}{2^j}$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, est dense dans $(C_0^{\alpha,o}, \|.\|_\alpha)$.

1.3.2 Analyse par les fonctions triangulaires

On va montrer que $C_0^{\alpha,o}$ est Schauder décomposable, c'est-à-dire il existe une suite de sous-espaces fermés $\{\chi_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ telle que

$$C_0^{\alpha,o} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \chi_i,$$

où la somme directe est topologique.

Cette décomposition nous permet de définir un isomorphisme entre $C_0^{\alpha,o}$ et un espace de

Banach de suites afin d'étudier l'équitension des processus à trajectoires dans $C_0^{\alpha,o}$. Pour cela on analyse $C_0^{\alpha,o}$ par deux échelles de fonctions triangulaires construites comme suit

$$\Delta^*(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si} \quad -1 \le t \le 0, \\ 1-t & \text{si} \quad 0 \le t \le 1, \\ 0 & \quad\text{ailleurs.} \end{cases}$$

et ses translatées

$$\Delta_k^*(t) = \Delta^*(t-k), \quad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

La deuxième échelle est la base de Faber-Schauder, obtenue par translations et changements d'échelles dyadiques de la fonction triangulaire

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ 0 & \quad\text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$\Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \quad t \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème suivant nous donne la décomposition de Schauder pour l'espace $C_0^{\alpha,o}$ basée sur les fonctions triangulaires précédentes.

Théorème 1.10 (Hamadouche - Suquet [20]) : *L'espace $C_0^{\alpha,o}$ possède la décomposition de Schauder*

$$C_0^{\alpha,o} = V_0 \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} W_j,$$

où V_0 est le sous-espace fermé de C_0^{α} engendré par $\{\Delta_k^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et pour $j \ge 0$, W_j est le sous-espace fermé de C_0^{α} engendré par $\{\Delta_{j,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Les projections E_0 sur V_0 et D_j sur W_j sont données par

$$E_0 f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\Delta_k^*, \tag{1.4}$$

$$D_j f = (E_{j+1} - E_j) f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(f) \Delta_{j,k}, \quad j \geq 0, \text{ où} \tag{1.5}$$

$$c_{j,k}(f) = f\left((k + \frac{1}{2})2^{-j}\right) - \frac{1}{2}\left\{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})\right\}. \tag{1.6}$$

Les séries (1.5) *et* (1.6) *convergent dans* C_0^α.

En utilisant la décomposition précédente, on obtient un isomorphisme entre C_0^α et un espace de Banach de suites.

Théorème 1.11 (Hamadouche - Suquet [20]) : *Soit S^α l'espace des suites doublement indexées $u = \{u_{j,k},\ j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}\}$, telles que*

$$\forall j \geq -1, \quad \lim_{|k| \to +\infty} u_{j,k} = 0$$

et

$$\|u\| = \sup_{j \geq -1} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_{j,k}| < +\infty.$$

Alors l'opérateur $T : C_0^\alpha \to S^\alpha$ défini par $Tf = u$, où

$$u_{-1,k} = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

$$u_{j,k} = f\left(\frac{k+1/2}{2^j}\right) - \frac{1}{2}\left\{f(\frac{k}{2^j}) + f(\frac{k+1}{2^j})\right\}, \quad j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}, \tag{1.8}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Remarque 1.1 : *Il est facile de voir que C_0^α n'est pas séparable. En effet, il contient le sous-espace fermé*

$$L = \left\{f = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{v_j}{2^{(j+1)\alpha}} \Delta_{j,0}, \quad (v_j)_{j \geq 0} \in \ell^\infty(\mathbb{N})\right\},$$

qui est isomorphe à $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Pour la caractérisation du dual de $C_0^{\alpha,o}$, on a également un isomorphisme entre $C_0^{\alpha,o}$ et un sous-espace de S^α.

Théorème 1.12 (Hamadouche - Suquet [20]) : *$C_0^{\alpha,o}$ est isomorphe par T au sous-espace $S^{\alpha,o}$ de S^α défini par*

$$S^{\alpha,o} = \left\{ u \in S^\alpha ; \lim_{j\to+\infty} 2^{j\alpha} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_{j,k}| = 0 \right\}.$$

1.3.3 Dual de $C_0^{\alpha,o}$

Pour caractériser les éléments du dual de $C_0^{\alpha,o}$, on utilise l'isomorphisme entre $C_0^{\alpha,o}$ et $S^{\alpha,o}$. En premier lieu, on construit une base canonique sur $S^{\alpha,o}$ de la façon suivante.

$$\forall i \geq -1,\ \forall l \in \mathbb{Z},\ \ e_{j,k}^{(\alpha)}(i,l) = \begin{cases} 2^{-(j+1)\alpha} & \text{si} \quad (i,l) = (j,k). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $e_{j,k}$ pour $e_{j,k}^{(0)}$.

Cette base nous permet d'identifier le dual topologique $(S^{\alpha,o})'$ de $S^{\alpha,o}$.

Lemme 1.5 (Hamadouche - Suquet [20]) : *Ψ est une forme linéaire continue sur $S^{\alpha,o}$ si et seulement s'il existe $z \in \ell^1(A)$ tel que*

$$\Psi(u) = \sum_{j\geq-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha} u_{j,k} z_{j,k}, \quad u \in S^{\alpha,o},$$

où l'on a noté $A = (\{-1\} \cup \mathbb{N}) \times \mathbb{Z}$. Cette représentation est unique.

Enfin, en utilisant l'isomorphisme entre $S^{\alpha,o}$ et $C_0^{\alpha,o}$, on déduit du lemme précédent une caractérisation du dual de $C_0^{\alpha,o}$.

Théorème 1.13 (Hamadouche - Suquet [20]) : *φ est un élément du dual topologique de $C_0^{\alpha,o}$ si et seulement s'il existe $z \in \ell^1(A)$ telle que*

$$\varphi(f) = \sum_{j\geq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha} z_{j,k} u_{j,k}(f), \quad f \in C_0^{\alpha,o}.$$

Les formes linéaires $u_{j,k}(f)$ étant définies par (1.8) *et* (1.9). *Cette représentation est unique.*

1.3.4 Convergence faible et équitension dans $C_0^{\alpha,o}$

Pour montrer la convergence en loi d'une suite d'éléments aléatoires $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ de $C_0^{\alpha,o}$, la méthode est la même que pour l'espace H_α^0. Cette convergence est équivalente à l'équitension de la suite des lois et à la convergence des lois fini-dimensionnelles. Il suffit donc de remplacer dans la proposition 1.1 l'espace H_α^0 par $C_0^{\alpha,o}$.

Pour étudier l'équitension, le résultat de base est le théorème suivant qui est une généralisation du théorème de Prokhorov sur l'équitension dans les espaces de Hilbert.

Théorème 1.14 (Suquet [42]) : *Soit χ un espace de Banach, séparable et Schauder décomposable*

$$\chi = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \chi_i \text{ (somme directe topologique)}.$$

On pose pour tout entier $j \geq 0$,

$$V_j = \bigoplus_{i=0}^{j} \chi_i$$

et on note E_j la projection continue de χ vers V_j. Soit $\digamma$ une famille de mesures de probabilité sur χ et $E_j\digamma = \{\mu \circ E_j^{-1},\ \ \mu \in \digamma\}$. Alors $\digamma$ est équitendue si et seulement si

(i) Pour tout entier $j \geq 0$, $E_j\digamma$ est équitendue sur V_j.

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{j\to+\infty} \sup_{\mu\in\digamma} \mu(f \in \chi : \|f - E_j f\| > \varepsilon) = 0.$

Remarque 1.2 : *Il est facile de voir que K est compact dans V_j si et seulement si $\pi_i K$ est* *compact dans* χ_i $(0 \leq i \leq j)$, *où* π_i *est la projection canonique sur* χ_i. *Donc la condition (i) peut être remplacée par la condition suivante plus commode dans notre cas.*

(i') Pour tout entier $i \geq 0$, $\pi_i \digamma$ *est équitendue sur* χ_i.

On donne maintenant un système de conditions suffisantes, qui sera utilisé par la suite pour montrer la convergence faible du processus empirique lissé par convolution vers un processus gaussien centré.

Théorème 1.15 (Hamadouche - Suquet [20]) : *Soit* $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ *une suite d'éléments aléatoires dans* $C_0^{\alpha,o}$. *On suppose l'existence de constantes* $\gamma \geq 0$, $\delta > 0$ *et* $\tau > 0$ *telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*
i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sup\limits_{n\geq 1}\mathbb{E}\left|\xi_n(k)\right|^{\tau} < +\infty$.
ii) Les séries $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\left|\xi_n(k)\right|^{\tau}$ *convergent uniformément par rapport à* n.
iii) Il existe une suite de fonctions croissantes bornées G_n *telles que pour* $\lambda > 0$,
$-\infty < s < t \leq s + 1 < +\infty$,

$$P(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| \geq \lambda) \leq \frac{|t-s|^{\delta}\left(G_n(t) - G_n(s)\right)}{\lambda^{\gamma}}.$$

iv) $M = \sup\limits_{n\geq 1}(G_n(+\infty) - G_n(-\infty)) < +\infty$.
v) Les séries $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}(G_n(l+1) - G_n(l))$ *convergent uniformément par rapport à* $n \geq 1$.
Alors $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$ *est équitendue dans* $C_0^{\alpha,o}$, *pour tout* $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Lorsque l'on a affaire à des éléments aléatoires de $C_0^{\alpha,o}$ engendrés à partir de processus à trajectoires discontinues par quelques procédures de lissage, (iii) est parfois trop forte. On peut néamoins l'affaiblir de la manière suivante.

Corollaire 1.2 (Hamadouche - Suquet [20]) : *Supposons que la suite* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *d'éléments aléatoires de* $C_0^{\alpha,o}$ *vérifie*

$$\omega_\alpha(\xi_n, 2^{-j(n)}) = O_P(1),$$

où $j(n)$ *est une suite d'entiers croissante vers l'infini. Alors le théorème 1.15 reste valable avec (iii) vérifiée seulement pour* $1 \geq t - s \geq 2^{-j(n)}$.

Chapitre 2

Processus empirique en norme höldérienne

2.1 Introduction

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Il est connu (cf. Billingsley [01]) que le processus empirique construit sur $(X_n)_{n\geq 1}$ (respectivement son lissage polygonal) converge en loi vers le pont brownien B dans $D[0,1]$ (respectivement dans $C[0,1]$).
Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord l'extension établie par Hamadouche [17] sur la convergence en loi du processus polygonal vers le pont brownien B dans l'espace de Hölder H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$. Notons que l'ordre de régularité α obtenu ici est inférieur à la régularité du processus limite B ($\alpha < \frac{1}{2}$), qui s'explique par les propriétés des espacements d'une suite i.i.d. En utilisant un lissage par convolution, les choses rentrent dans l'ordre et on obtient la convergence en loi vers le pont brownien B dans H_α^0 pour tout ordre $\alpha < \frac{1}{2}$.
Ensuite on note que le lissage par convolution du processus empirique ne commute pas avec le changement de variable $U_i = F(X_i)$ où F est la fonction de répartition marginale de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, le dernier résultat de convergence faible ne peut pas être appliqué pour l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et donc la convergence faible höldérienne de ce processus doit être étudiée directement sur la droite réelle.

2.2 Processus empirique non lissé

2.2.1 Définitions et notations

Définition 2.1 : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On définit la fonction de répartition empirique comme suit :*

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[X_i \leq\, t]}.$$

Théorème 2.1 (Glivenko - Cantelli) : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, de fonction de répartition Fet de fonction de répartition empirique F_n. Alors*

$$\|F_n - F\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow{p.s.} 0.$$

Définition 2.2 : *Soit $X_{n:i}$ $(1 \leq i \leq n)$ les statistiques d'ordre obtenues en ordonnant dans le sens croissant chaque échantillon $(X_1(w), X_2(w), .., X_n(w))$ de la loi uniforme sur $[0, 1]$ de la manière suivante :*

$$X_{n:1} = \min_{1\leq i\leq n} X_i,\ X_{n:2} = \min\left(\{X_1, X_2, .., X_n\}\backslash\{X_{n:1}\}\right), ..,\ X_{n:n} = \max_{1\leq i\leq n} X_i,$$

avec $X_{n:0} = 0$ et $X_{n:n+1} = 1$.

On définit le polygone des fréquences empiriques G_n par

$$G_n(t) = F_n(t) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t - X_{n:i-1}}{X_{n:i} - X_{n:i-1}}\right).1_{[X_{n:i-1}, X_{n:i}[}(t), \quad t \in [0, 1].$$

Remarque 2.1 : *Le polygone des fréquences empiriques G_n interpole linéairement F_n entre deux sauts consécutifs.*

2.2.2 processus empirique basé sur des variables aléatoires indépendantes de même loi

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi F et à valeurs dans $[0,1]$. On construit le processus empirique basé sur cette suite de la façon suivante :

$$Y_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)), \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1 \ . \tag{2.1}$$

Théorème 2.2 (Billingsley [01]) : *On suppose que les X_i sont indépendants et de même loi F. Si Y_n est défini par (2.1), alors Y_n converge en loi dans $D[0,1]$ vers l'élément aléatoire gaussien Y défini par*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(t)) &= 0, \\ \mathbb{E}(Y(s)Y(t)) &= F(s)(1-F(t)), s < t. \end{aligned}$$

2.2.3 Processus empirique uniforme

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$. La suite de processus empiriques $(\xi_n)_{n\geq 1}$ construite sur $(X_n)_{n\geq 1}$ s'obtient en centrant et en normalisant les fonctions de répartitions empiriques F_n des échantillons de taille n.

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t), \quad t \in [0,1], \ n \geq 1. \tag{2.2}$$

Les figures suivantes représentent les trajectoires du processus empirique uniforme pour $n = 10$ et $n = 1000$.

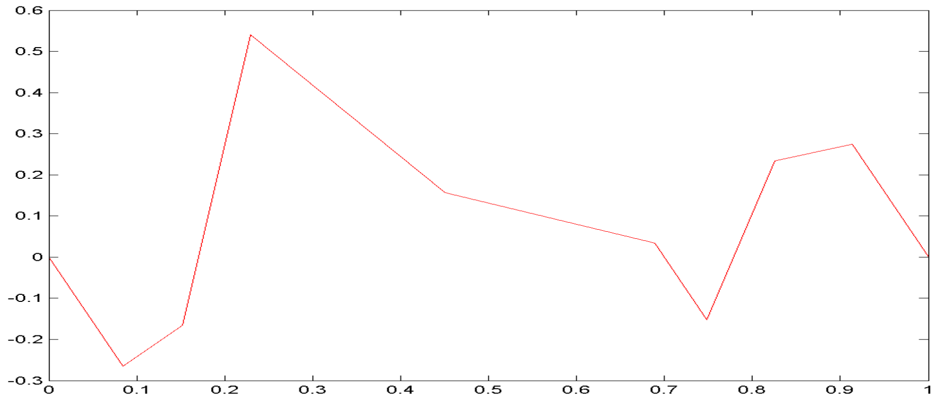

FIG. 2.1 – Trajectoires du processus empirique uniforme pour $n = 10$.

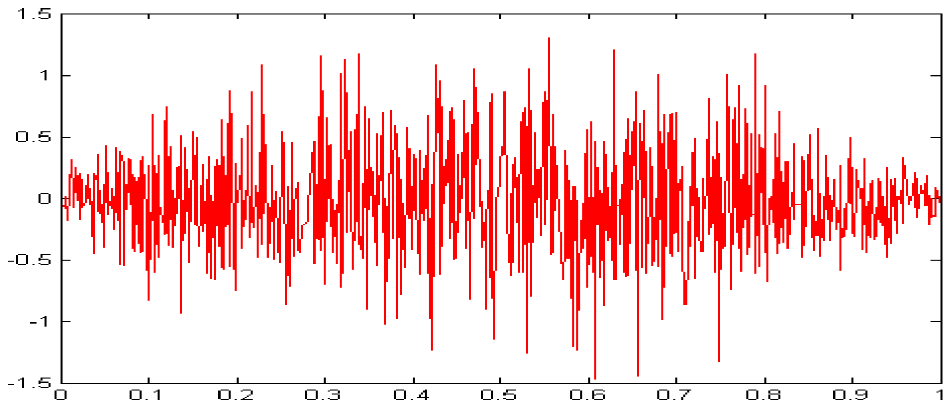

FIG. 2.2 – Trajectoires du processus empirique uniforme pour $n = 1000$.

On voit que lorsque n est grand les trajectoires du processus empirique tendent vers celles d'un pont brownien.

2.3 Processus empirique uniforme lissé polygonalement

Le processus empirique lissé polygonalement s'obtient en remplaçant la fonction de répartition empirique F_n par le polygone des fréquences empiriques G_n.

$$\widehat{\xi}_n(t) = \sqrt{n}(G_n(t) - t), \quad t \in [0,1],\ n \geq 1. \tag{2.3}$$

2.3.1 Convergence de $\{\widehat{\xi}_n, n \geq 1\}$ dans $C[0,1]$

On rappelle que $C[0,1]$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et on le munit de la norme du supremum.

Théorème 2.3 (Billingsley [01]) : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$ et $\widehat{\xi}_n$ le processus empirique lissé défini en (2.3), alors $\widehat{\xi}_n$ converge en loi dans $C[0,1]$ vers le pont brownien B.*

Idées de la preuve : La convergence des lois fini-dimensionnelles de $\widehat{\xi}_n$ vers celles de B est déduite de la convergence de celles de ξ_n en utilisant l'inégalité suivante.

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\xi_n(t) - \widehat{\xi}_n(t)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour montrer l'équitension, on utilise le théorème suivant.

Théorème 2.4 (Billingsley [01]) : *La suite des lois $(P_n)_n$* associée à *$(\widehat{\xi}_n)_n$ est équitendue dans $C[0,1]$ si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*
i) $\forall \eta \geq 0$, $\exists a$ tel que

$$P_n\left[f : |f(0)| > a\right] \leq \eta, \quad \forall n \geq 1.$$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \delta$ ($0 < \delta < 1$) et un entier n_0 tels que

$$\frac{1}{\delta} P_n\{f : \sup_{t\leq s\leq t+\delta} |f(t) - f(s)| \geq \varepsilon\} \leq \eta,\ n \geq n_0, \forall t.$$

2.3.2 Convergence de $\{\widehat{\xi}_n,\ n \geq 1\}$ dans H_α^0

La convergence en loi du processus $\widehat{\xi}_n$ peut être prolongée à l'espace de Hölder H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 2.5 (Hamadouche [17]) : *Le processus empirique uniforme lissé polygonalement $\widehat{\xi}_n$ défini en (2.3) converge en loi dans H_α^0 vers le pont brownien B pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$.*

Preuve : On rappelle les grandes lignes de la preuve (cf. Hamadouche [17]).

- $\widehat{\xi}_n$ est une ligne polygonale, donc dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha \leq 1$.

Pour montrer la convergence, on utilise la proposition 1.1.

- La convergence des lois fini-dimensionnelles de $\widehat{\xi}_n$ vers celles de B est déduite de la convergence en loi de $\widehat{\xi}_n$ vers B dans $C[0,1]$.

- Pour montrer l'équitension, on utilise le théorème 1.9 avec $a_n = \frac{1}{n}$.
On vérifie la condition a) du théorème en utilisant le lemme suivant.

Lemme 2.1 (Hamadouche [17]) : *Soient $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ n variables aléatoires centrées, indépendantes, de même loi et tel que $\mathbb{E}(Y_1^4) < +\infty$. Alors*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|^4 \leq n\mathbb{E}Y_1^4 + 3n(n-1)\mathbb{E}(Y_1^2)^2.$$

En posant $Y_i = 1_{\{s \leq X_i \leq t\}} - (t-s)$, on aura

$$\mathbb{E}\left|\xi_n(t) - \xi_n(s)\right|^4 \leq |t-s|^2 + \frac{3}{n}|t-s|.$$

Compte tenu de la majoration élémentaire $\left\|\xi_n - \widehat{\xi}_n\right\|_\infty < \frac{1}{\sqrt{n}}$ et pour $|t-s| \geq \frac{1}{n}$, on obtient

$$\mathbb{E}\left|\widehat{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(s)\right|^4 \leq 160\,|t-s|^2\,,$$

ce qui achève la vérification de la condition a) du théorème 1.9 avec $a = 4$, $b = 2$, $c = 160$ et $a_n = \frac{1}{n}$.

Pour vérifier la condition b), on note d'abord $\delta_{n,i} = X_{n:i} - X_{n:i-1}(1 \leq i \leq n+1)$, où les $X_{n:i}$ sont les statistiques d'ordre construite sur les X_i et $\delta_{n:i}$ les statistiques d'ordre construite sur les $\delta_{n,i}$ puis on utilise le résultat suivant.

Lemme 2.2 (Hamadouche [17]) : *Si* $0 < \alpha < 1$ *et si* $\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq 1$,

$$\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\widehat{\xi}_n, a_n).\delta_{n:1}^{-\alpha},$$

où $\omega(\widehat{\xi}_n, a_n) = \sup\limits_{|t-s|\leq a_n}\left|\widehat{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(s)\right|$ *désigne le module de continuité de* $\widehat{\xi}_n$ *au sens* $C[0,1]$.

En utilisant la majoration évidente

$$\omega(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\xi_n, a_n) + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

on aura

$$\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\xi_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha} + \frac{2}{\sqrt{n}}\delta_{n:1}^{-\alpha}.$$

Pour le contrôle de $\omega(\xi_n, a_n)$ et $\delta_{n:1}$, on applique respectivement les deux lemmes suivants.

Lemme 2.3 (Shorack, Wellner [38]) : *Soit* ξ_n *le processus empirique défini en (2.2). Si* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de nombres positifs tels que*

$a_n = \dfrac{(c_n \ln n)}{n}$ *où* $c_n \to 0$ *et* $\dfrac{\ln(\frac{1}{c_n})}{\ln n} \to 0.$

Alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln(\frac{1}{c_n})}{\ln n}\omega(\xi_n, a_n) \leq 2, \quad p.s.$$

Lemme 2.4 (Devroye [10]) : *Soient $\delta_{n:k}$ les statistiques d'ordre des espacements $\delta_{n,i} = X_{n:i} - X_{n:i-1}$. On a, pour $b_n \geq 0$ tel que $\frac{b_n}{n^2} \searrow 0$:*

$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{n^2\delta_{n:k} \leq b_n\}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right. \quad \text{si} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^k}{k} = \left\{ \begin{array}{l} < +\infty \\ = +\infty \end{array} \right.$$

En appliquant le Lemme 2.3 avec $c_n = \dfrac{1}{\ln n}$ et le lemme 2.4 avec $b_n = n^{-\varepsilon},\ \varepsilon > 0$, on obtient

p.s. $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0,\ \ n^2\delta_{n:1} > \dfrac{1}{n^\varepsilon}$
et
p.s. $\exists n_1$ tel que $\forall n \geq n_1,\ \ \dfrac{\sqrt{n}\ln(\ln n)}{\ln n}\omega(\xi_n, a_n) \leq 2.$

Par conséquent $\forall n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-(2+\varepsilon)\alpha}}\left(\frac{2\ln n}{\ln(\ln n)} + 1\right).$$

Le majorant de $\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ pour tout $\alpha < \dfrac{1}{2(2+\varepsilon)} < \frac{1}{4}$. On déduit alors que $\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n)$ converge vers 0 en probabilité pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$.

Par le théorème 1.9, $\{\widehat{\xi}_n,\ n \geq 1\}$ est équitendue pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.5.

L'ordre de régularité $\alpha < \frac{1}{4}$ obtenu dans le théorème précédent est optimal, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.6 (Hamadouche [17]) : *La suite $(\widehat{\xi}_n,\ n \geq 1)$ n'est équitendue dans $H_\alpha^0[0,1]$ pour aucun $\alpha \geq \frac{1}{4}$.*

Preuve : Puisque pour tout $\alpha \geq \frac{1}{4}$, $H_\alpha^0 \subset H_{\frac{1}{4}}^0$, il suffit de montrer que la C.N.S. d'équitension suivante n'est pas vérifiée pour $\{\widehat{\xi}_n,\ n \geq 1\}$ pour $\alpha = \frac{1}{4}$.

Théorème 2.7 (Hamadouche [17]) : *Soit une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments aléatoires de $H_\alpha^0[0,1]$, elle est équitendue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geq 1} P(\omega_\alpha(\xi_n,\delta) > \varepsilon) = 0.$$

Soient $X_{n:i}$ et $X_{n:i+1}$ les deux statistiques d'ordre réalisant l'espacement minimal $\delta_{n:1} = X_{n:i+1} - X_{n:i}$.

En posant $R_n = \frac{\left|\widehat{\xi}_n(X_{n:i+1}) - \widehat{\xi}_n(X_{n:i})\right|}{\delta_{n:1}^{\frac{1}{4}}}$, on obtient
$\liminf_{n\to+\infty} P(w_{\frac{1}{4}}(\widehat{\xi}_n, \frac{1}{n}) \geq \varepsilon) \geq \lim_{n\to+\infty} P(R_n \geq \varepsilon) = 1 - \exp(-(1+\varepsilon)^{-4}) > 0.$

Ceci contredit la C. N. S. du théorème précédent, donc $\{\widehat{\xi}_n, n\geq 1\}$ n'est pas équitendue dans $H_{\frac{1}{4}}^0$. Puisque $\forall \alpha \geq \frac{1}{4},\ H_\alpha^0 \subset H_{\frac{1}{4}}^0$, $\{\widehat{\xi}_n, n \geq 1\}$ ne peut être équitendue dans aucun H_α^0 pour $\alpha \geq \frac{1}{4}$.

Remarque 2.2 : *L'ordre de convergence ($\alpha < \frac{1}{4}$) obtenu pour le lissage polygonal est inférieur à l'ordre de régularité hölderienne du pont brownien ($\alpha < \frac{1}{2}$). Ceci nous conduit à un autre type de lissage qui est le lissage par convolution.*

2.4 Processus empirique uniforme lissé par convolution dans H_α^0

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$.

Soit k une densité de probabilité lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |u|\, k(u)du < +\infty. \tag{2.4}$$

Et $(c_n)_n$ une suite de réels positifs tendant vers 0 et vérifiant

$$n^{-\frac{1}{4}} = O(c_n). \tag{2.5}$$

On définit la suite $(k_n)_n$ de noyaux de convolution par

$$k_n(t) = c_n^{-1} k(c_n^{-1} t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

On considère le processus empirique lissé par convolution

$$\widetilde{\xi}_n(t) = (\xi_n * k_n)(t) - (\xi_n * k_n)(0), \quad t \in [0,1],\ n \geq 1. \tag{2.7}$$

Le terme $(\xi_n * k_n)(0)$ assure la condition $\widetilde{\xi}_n(0) = 0$, pour que les trajectoires de $\widetilde{\xi}_n$ soient dans H_α^0.

Théorème 2.8 (Hamadouche [17]) : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$. Supposons que la densité k vérifie la condition (2.4), la suite $(c_n)_n$ vérifie (2.5) et les noyaux de convolution k_n sont définis par (2.6). Alors la suite de processus $\widetilde{\xi}_n$ définis en (2.7) converge en loi dans H_α^0 vers le pont brownien B pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.*

Preuve : On utilise la proposition 1.1.

- Puisque les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles de B, on aura la convergence de celles de $\widetilde{\xi}_n$ en montrant que la distance dans $\mathbb{R}^k$ entre $(\widetilde{\xi}_n(t_1), ..., \widetilde{\xi}_n(t_k))$ et $(\xi_n(t_1), ..., \xi_n(t_k))$ tend vers 0 en probabilité.

- On montre l'équitension de la suite des lois de $\widetilde{\xi}_n$ en utilisant le théorème 1.9, avec $a_n = \frac{1}{n}$.

En appliquant l'inégalité de Jensen par rapport à la mesure de probabilité $k_n(u)du$ et le théorème de Fubini, on aura pour tout $a > 2$:

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t)-\widetilde{\xi}_n(s)\right|^a \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left|\xi_n(t-u)-\xi_n(s-u)\right|^a k_n(u)du.$$

L'inégalité de Rosenthal

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|^p \leq c_p[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|Y_i|^p + n^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i^2)^{\frac{p}{2}}]$$

appliquée aux variables aléatoires indépendantes et centrées
$\mathbb{Y}_i = 1_{\{s-u\leq X_i\leq t-u\}} - (t-s), \;\; s<t$, nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\xi_n(t-u)-\xi_n(s-u)\right|^a &\leq C_a(n^{1-\frac{a}{2}}\mathbb{E}\left|Y_1\right|^a + Var^{\frac{a}{2}}Y_1) \\ &\leq C_a(n^{1-\frac{a}{2}}\left|t-s\right| + \left|t-s\right|^{\frac{a}{2}})\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $k_n(u)du$, on obtient pour $|t-s| \geq \frac{1}{n}$

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t)-\widetilde{\xi}_n(s)\right|^a \leq 2C_a\left|t-s\right|^{\frac{a}{2}}.$$

Pour montrer que $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n})$ converge vers 0 en probabilité, notons d'abord que

$$\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n}) \leq \int_0^1 \left|\xi_n(u)\right| \sup_{0<|t-s|<\frac{1}{n}} \frac{\left|k_n(t-u)-k_n(s-u)\right|}{\left|t-s\right|^\alpha} du.$$

Puisque k est lipschitzienne et k_n est défini par (2.6), alors

$$\left|k_n(t-u)-k_n(s-u)\right|\left|t-s\right|^{-\alpha} \leq a(k)c_n^{-2}\left|t-s\right|^{1-\alpha}.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire

$$\mathbb{E}\left|\xi_n(u)\right| \leq \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left|\xi_n(u)\right|^2 = \sqrt{u(1-u)}, \;\; 0\leq u\leq 1,$$

on obtient

$$\mathbb{E}(\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n})) \leq a(k)c_n^{-2}n^{\alpha-1} = o(1), \text{ pour tout } 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

Les deux conditions du théorème 1.9 étant vérifiées, on aura donc l'équitension de $\{\widetilde{\xi}_n, n\geq 1\}$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$ et par conséquent la preuve du théorème 2.8.

Remarque 2.3 : *La dernière convergence est valable juste pour des variables aléatoires X_i à valeurs dans $[0,1]$. Du fait que le lissage par convolution ne commute pas avec le changement de variable $U_i = F(X_i)$, où F est la fonction de répartition marginale de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$, ceci limite la porté de ce résultat et l'étude du processus empirique lissé construit sur un échantillon quelconque $(X_1, ..., X_n)$ doit se faire directement sur la droite réelle. Ceci nous amène donc à étudier la convergence sur $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$.*

2.5 Processus empirique lissé par convolution dans $C_0^{\alpha,o}$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition marginale F. On note

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[X_i,+\infty[}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

la fonction de répartition empirique et

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

le processus empirique de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$.

Soit k une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $(c_n)_n$ une suite décroissante vers 0 vérifiant

$$n^{-\frac{1}{4}} = O(c_n).$$

On définit la suite $(k_n)_n$ de noyaux de convolution par

$$k_n(t) = c_n^{-1}k(c_n^{-1}t), \quad n \geq 1.$$

On suppose que la suite $\{k_n, n \geq 1\}$ est une approximation de l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}} k_n(t)dt = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{|t|>\varepsilon\}} k_n(t)dt = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Le processus empirique lissé par convolution correspondant est défini par

$$\widetilde{\xi}_n = \sqrt{n}(F_n - F) * k_n. \tag{2.8}$$

Le lemme suivant nous assure que sous des conditions sur k_n, les trajectoires de $\widetilde{\xi}_n$ sont dans $C_0^{\frac{1}{2}}$ et donc dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$.

Lemme 2.5 (Hamadouche - Suquet [20]) : *Soit f une fonction mesurable (non nécessairement continue) bornée, tendant vers 0 à l'infini et k un noyau de convolution vérifiant*

$$k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}), \tag{2.9}$$

$$|k(x) - k(y)| \leq a(k)\,|x - y|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

pour une constante $a(k)$. Alors $f * k$ est dans $C_0^{\frac{1}{2}}$.

Dans la suite, on supposera que les noyaux k_n vérifient (2.9) et (2.10) et qu'il existe $C > 0$, $0 < r \leq 1$ telles que

$$|F(x) - F(y)| \leq C\,|x - y|^r\,, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)^{\frac{1}{2}}(1 - F(x))^{\frac{1}{2}} dx < +\infty.$$

Sous les hypothèses précédentes, on a le résultat suivant

Théorème 2.9 (Hamadouche - Suquet [20]) : *La suite de processus empiriques lissés $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$ définis par (2.8) converge faiblement dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $0 < \alpha < \frac{r}{2}$, vers un processus gaussien centré ζ de fonction de covariance*

$$\Gamma(s,t) = F(s \wedge t) - F(s)F(t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Puisque ξ_n est mesurable et k_n vérifie (2.9) et (2.10), alors par le lemme 2.5, $\widetilde{\xi}_n = \xi_n * k_n$ est dans $C_0^{\frac{1}{2}}$ et donc dans $C_0^{\alpha,o}$, $\forall \alpha < \frac{1}{2}$.

Pour montrer la convergence de $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$, on utilise la généralisation de la proposition 1.1 à l'espace $C_0^{\alpha,o}$.

- Pour montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\widetilde{\xi}_n$, on se ramène à celles de ξ_n et on montre que la distance dans $\mathbb{R}^k$ entre $(\widetilde{\xi}_n(t_1), ..., \widetilde{\xi}_n(t_k))$ et $(\xi_n(t_1), ..., \xi_n(t_k))$ tend vers 0 en probabilité.

- Pour montrer l'équitension de la suite des lois de $\widetilde{\xi}_n$, on utilise le corollaire 1.2 avec la suite d'entiers $j(n)$ définie par $2^{j(n)} \leq n < 2^{j(n)+1}$.

On commence par vérifier les conditions (i) à (v) du théorème 1.15 (uniquement la forme affaiblie pour (iii)), puis on montre la convergence en probabilité vers 0 de $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{2}{n})$.

Chapitre 3

Processus empirique pour des suites non stationnaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étendre les résultats établis précédement sur les espaces de Hölder H_α^0 et $C_0^{\alpha,o}$ aux suites non stationnaires de variables aléatoires indépendantes. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $(F^{(i)})_{i\geq 1}$. On adoptera dans ce qui suit les notations suivantes.
$\xi_n(t)$: Processus empirique uniforme non lissé.

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(1_{\{X_i \leq t\}} - t\right), \quad t \in [0,1], \ n \geq 1. \tag{3.1}$$

$\overline{\xi}_n(t)$: Processus empirique non lissé basé sur une suite de variables aléatoires indépendantes non de même loi.

$$\overline{\xi}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{X_i \leq t\}} - F^{(i)}(t)], \quad t \in [0,1], \ n \geq 1. \tag{3.2}$$

$\widehat{\xi}_n(t)$: Processus empirique lissé polygonalement basé sur une suite de variables aléatoires indépendantes non de même loi.

$$\widehat{\xi}_n(t) = \sqrt{n}[G_n(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(t)], \quad t \in [0,1], \ n \geq 1. \tag{3.3}$$

Avec

$$G_n(t) = F_n(t) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{t - X_{n:i-1}}{X_{n:i} - X_{n:i-1}}).1_{[X_{n:i-1}, X_{n:i}[}(t).$$

3.2 Convergence des lois fini-dimensionnelles de $\{\overline{\xi}_n, n \geq 1\}$

En utilisant le théorème central limite appliqué aux suites non stationnaires de variables aléatoires indépendantes, on montre la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ vers celles d'un processus gaussien centré noté B'. Ce dernier résultat de convergence va être utilisé pour déduire la convergence des lois fini-dimensionnelles des deux processus lissés $\widehat{\xi}_n$ et $\widetilde{\xi}_n$. Il est donc utile d'énoncer d'abord ce résultat.

Théorème 3.1 (Graiche, Hamadouche [13]) : *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $(F^{(i)})_{i\geq 0}$. On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(s)F^{(i)}(t) = F(s)F(t),\ \forall s,t\in\mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Alors les lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ défini en (3.2) convergent vers celles d'un processus gaussien centré B' (appelé pont brownien généralisé) de covariance

$$\Gamma(s,t) = F(s\wedge t) - F(s)F(t),$$

où $s\wedge t = \inf(s,t)$.

Preuve : Soit $k > 0, t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $0 \leq t_1 < ... < t_k \leq 1$.
On note $V_n(t) = (\overline{\xi}_n(t_1), ..., \overline{\xi}_n(t_k))$, $\varphi_{V_n(t)}$ sa fonction caractéristique et C_i la matrice de variance covariance du vecteur $Y_i = (1_{\{X_i\leq t_1\}}, ..., 1_{\{X_i\leq t_k\}})$.
Pour $s\in\mathbb{R}$,

$$\overline{\xi}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{X_i\leq s\}} - F^{(i)}(s)] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{X_i\leq s\}} - \mathbb{E}(1_{\{X_i\leq s\}})].$$

Donc

$$\forall u \in \mathbb{R}^k, \quad \varphi_{V_n(t)}(u) = \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}[Y_i - \mathbb{E}(Y_i)]}(u) = \varphi_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\langle Y_i - \mathbb{E}(Y_i), u\rangle}(1).$$

On pose $Z_i = \langle Y_i - \mathbb{E}(Y_i), u\rangle$, $i \geq 1$. $(Z_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne 0 et de variance $\langle C_i u, u\rangle$.

$$\forall u \in \mathbb{R}^k,\ |Z_i| = | < Y_i - \mathbb{E}(Y_i), u > | \leq ||Y_i - \mathbb{E}(Y_i)||_2||u||_2 \leq \sqrt{k}||u||_2.$$

La condition de Lyapounov est satisfaite s'il existe $\delta > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}|Z_i|^{2+\delta} = 0$. Pour $\delta = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|Z_i|^3 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{k}||u||\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i)^2}{s_n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{k}||u||_2}{s_n}$$

On a $s_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^2(Z_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} < C_i u, u >$.

Les éléments $c_i(m,n)(m,n \in 1,..,k)$ de C_i sont donnés par

$$c_i(m,n) = cov(1_{\{X_i\leq t_m\}}, 1_{\{X_i\leq t_n\}}) = F^{(i)}(t_m \wedge t_n) - F^{(i)}(t_m)F^{(i)}(t_n).$$

En utilisant la condition (3.4), il est facile de vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} C_i$ est une matrice constante C. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} < C_i u, u > = < Cu, u >,$$

ceci implique que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n^2 = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} < C_i u, u >) = < Cu, u > \lim_{n\to+\infty} n = \infty,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|Z_i|^3 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{k}||u||_2}{s_n} = 0.$$

La condition de Lyapounov est alors vérifiée pour les variables aléatoires Z_i avec $\delta = 1$. Par conséquent

$$U_n = \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}[Z_i - \mathbb{E}(Z_i)] = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\langle C_i u, u\rangle}}\sum_{i=1}^{n}\langle Y_i - \mathbb{E}(Y_i), u\rangle \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mathcal{L}} N(0,1).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\langle C_i u, u\rangle = \langle Cu, u\rangle$, alors

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\langle Y_i - \mathbb{E}(Y_i), u\rangle \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mathcal{L}} N(0, \langle Cu, u\rangle),$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{V_n(t)}(u) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{W_n}(1) = \exp(-\frac{\langle Cu, u\rangle}{2}).$$

Le dernier résultat est valable pour tout u dans $\mathbb{R}^k$, on déduit alors que

$$V_n = (\overline{\xi}_n(t_1), ..., \overline{\xi}_n(t_k)) \xrightarrow[\mathbb{R}^k]{\mathcal{L}} N_k(0, C).$$

Les éléments de C sont donnés par

$$c(m,n) = F(t_m \wedge t_n) - F(t_m)F(t_n) = cov(B'(t_m), B'(t_n)),\ \forall m, n \in \{1, .., k\}$$

et $N_k(0, C)$ est la loi du vecteur $(B'(t_1), ..., B'(t_k))$. Finalement on a la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ vers celles de B'.

3.3 Convergence du processus empirique lissé polygonalement dans H_α^0

Dans cette section, on va étendre le résultat du chapitre 2, établi par Hamadouche [17] sur la convergence dans H_α^0 du processus empirique uniforme lissé polygonalement, vers le pont brownien B, pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$, aux suites non stationnaires de variables aléatoires indépendantes et on montre la convergence vers le pont brownien généralisé B' pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$.

On rappelle que le processus empirique lissé polygonalement est défini par

$$\widehat{\xi}_n(t) = \sqrt{n}[G_n(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(t)], \quad t \in [0,1],\ n \geq 1.$$

Théorème 3.2 (Graiche - Hamadouche [15]) : *Soit* $(X_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de lois respectives* $(F^{(i)})_{i\geq 1}$*. On suppose que* $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ *uniformément lipschitzienne,*
$\left|(F^{(i)} - F^{(j)})(X_{n:j})\right| = o(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}})$, $\forall i, j < n$, $\varepsilon > 0$, où $X_{n:j}$ est la $j^{ème}$ *statistique d'ordre et la condition* (3.4) *satisfaite. Alors la suite* $\{\widehat{\xi}_n,\ n \geq 1\}$ *converge en loi vers le pont brownien généralisé* B' *dans* H_α^0 *pour tout* $\alpha < \frac{1}{4}$*.*

Preuve : On a Or pour $0 \leq s < t \leq 1$, $0 \leq F^{(i)}(s) < F^{(i)}(t) \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|Y_i\right|^k &= \left|1 - [F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)]\right| \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right| (\left|1 - [F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)]\right|^{k-1} \\ &\qquad + \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right|^{k-1}).\end{aligned}$$

Pour $k \geq 2$, on a

$$\mathbb{E}\left|Y_i\right|^k \leq \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right|, \tag{3.7}$$

car $f(x) = x(1-x)(x^n + (1-x)^n) \leq x$, $\forall\ x \in [0,1]$, $\forall n \geq 1$. Ceci découle du fait que $0 < (1-x) \leq 1$ et $0 \leq x^n + (1-x)^n \leq x^{n-1} + (1-x)^{n-1} \leq ... \leq x + (1-x) = 1$.
Donc $\mathbb{E}(Y_i^2) \leq \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right|$.
Puisque $\mathbb{E}(Y_i^2) \geq 0$ et $\left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right| \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}(Y_i^2)^{\frac{p}{2}} \leq \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right|^{\frac{p}{2}}.$$

L'inégalité (3.6) devient

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(s)\right|^p \leq c_p \left[n^{-\frac{p}{2}}\sum_{i=1}^n \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right| + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right|^{\frac{p}{2}}\right]. \tag{3.8}$$

Puisque $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ est uniformément lipschitzienne, alors

$$\exists K > 0, \left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s)\right| \leq K\left|t - s\right|, \quad i \geq 1.$$

En remplaçant dans l'inégalité (3.8), on aura

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t)-\overline{\xi}_n(s)\right|^p \leq c_p\left[n^{1-\frac{p}{2}}K\left|t-s\right|+K^{\frac{p}{2}}\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}}\right].$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $\left\|\widehat{\xi}_n-\overline{\xi}_n\right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, on aura par l'inégalité de Jensen.

$$\mathbb{E}\left|\widehat{\xi}_n(t)-\widehat{\xi}_n(s)\right|^p \leq 2^{p-1}\left(\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t)-\overline{\xi}_n(s)\right|^p+\frac{2^p}{n^{\frac{p}{2}}}\right).$$

D'où

$$\mathbb{E}\left|\widehat{\xi}_n(t)-\widehat{\xi}_n(s)\right|^p \leq \frac{2^{2p-1}}{n^{\frac{p}{2}}}+2^{p-1}c_p\left[n^{1-\frac{p}{2}}K\left|t-s\right|+K^{\frac{p}{2}}\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}}\right].$$

Pour $|t-s|\geq\frac{1}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\widehat{\xi}_n(t)-\widehat{\xi}_n(s)\right|^p &\leq 2^{2p-1}\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}}+2^{p-1}c_p\left[K\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}}+K^{\frac{p}{2}}\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}}\right]\\ &= 2^{p-1}\left(2^p+c_p\left[K+K^{\frac{p}{2}}\right]\right)\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent la condition (a) du théorème 1.9 est verifiée avec
$a=p$, $b=\frac{p}{2}$, $c=2^{p-1}\left(2^p+c_p\left[K+K^{\frac{p}{2}}\right]\right)$ et $a_n=\dfrac{1}{n}$.

Pour vérifier la condition (b), on remarque d'abord que puisque les trajectoires de $\widehat{\xi}_n$ sont des lignes polygonales, alors d'après le lemme 1.2 le supremum dans la définition de leurs normes hölderiennes est atteint en deux sommets de la ligne polygonale. Ceci reste vrai pour une ligne polygonale restreinte en abscisses à un segment I de longueur a_n au lieu de $[0,1]$.

Pour étudier la convergence en probabilité vers 0 de $\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n,a_n)$, on se ramène au contrôle de la norme hölderienne de la restriction de $\widehat{\xi}_n$ dans tout sous-intervalle I de longueur a_n de $[0,1]$, puis on discute suivant le nombre de sommets dans cet intervalle.
Rappelons que l'on définit les espacements $\overline{\delta}_{n,i}$ de l'échantillon $(X_1,X_2,..,X_n)$ par $\overline{\delta}_{n,i}=X_{n:i}-X_{n:i-1}(1\leq i\leq n+1)$. Si on note $\overline{\delta}_{n:i}$ les statistiques d'ordre construites sur $(\overline{\delta}_{n,1},...,\overline{\delta}_{n,n+1})$. $\overline{\delta}_{n:1}$ est alors la longueur minimale des $(n+1)$ intervalles découpés sur $[0,1]$ par l'échantillon $(X_1,X_2,..,X_n)$.

Lemme 3.1 (Hamadouche [17]) : *Si* $0 < \alpha < 1$ *et si* $1 \geq a_n \geq \frac{1}{n+1}$,

$$\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\widehat{\xi}_n, a_n)\overline{\delta}_{n:1}^{-\alpha},$$

où $\omega(\widehat{\xi}_n, a_n) = \sup_{0<|t-s|\leq a_n} \left|\widehat{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(s)\right|$ *désigne le module de continuité au sens* $C[0,1]$ *de* $\widehat{\xi}_n$.

Pour le contrôle de $\omega(\widehat{\xi}_n, a_n)$, on a

$$\omega(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\overline{\xi}_n, a_n) + \frac{2}{\sqrt{n}}, \tag{3.9}$$

où $\omega(\widehat{\xi}_n, a_n) = \sup_{|t-s|\leq a_n} \left|\widehat{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(s)\right|$ et $\omega(\overline{\xi}_n, a_n) = \sup_{|t-s|\leq a_n} \left|\overline{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(s)\right|$.
On a

$$\begin{aligned}
\omega(\overline{\xi}_n, a_n) &= \sup_{|t-s|\leq a_n} \left|\overline{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(s)\right| \\
&= \sup_{|t-s|\leq a_n} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{s\leq X_i\leq t\}} - (F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s))]\right|.
\end{aligned}$$

On Pose $Y_i = F^{(i)}(X_i)$, $s_i = F^{(i)}(s)$ et $t_i = F^{(i)}(t)$, $i \geq 1$

$(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
Pour $s \leq X_i \leq t$, on a $s_i \leq Y_i \leq t_i$. On aura donc

$$\begin{aligned}
\omega(\overline{\xi}_n, a_n) &= \sup_{|t-s|\leq a_n} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{s\leq X_i\leq t\}} - (F^{(i)}(t) - F^{(i)}(s))]\right| \\
&\leq \sup_{|t-s|\leq a_n} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{s_i\leq Y_i\leq t_i\}} - (t_i - s_i)]\right|
\end{aligned}$$

Puisque $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ est uniformément lipschitzienne, alors

$$\exists K > 0,\ |t_i - s_i| \leq K\,|t-s| \leq K a_n, \text{ pour } |t-s| \leq a_n.$$

On pose $b_n = Ka_n$.

$$\begin{array}{rcl}\omega(\overline{\xi}_n, a_n) & \leq & \sup\limits_{|t-s|\leq a_n}\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[1_{\{s_i\leq Y_i\leq t_i\}} - (t_i - s_i)]\right| \\ & \leq & \sup\limits_{|t_i-s_i|\leq b_n}\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[1_{\{s_i\leq Y_i\leq t_i\}} - (t_i - s_i)]\right|\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\leq & \sup\limits_{|k-l|\leq b_n}\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[1_{\{l\leq Y_i\leq k\}} - (k-l)]\right| \\ = & \omega(\xi_n, b_n),\end{array}$$

car s_i et t_i sont des cas particuliers de l et k tels que $|k-l| \leq b_n$.
Par conséquent

$$\omega(\overline{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\xi_n, b_n) = \omega(\xi_n, \frac{K}{n}). \tag{3.10}$$

Pour le contrôle de $\omega(\xi_n, \frac{K}{n})$, on a le résultat suivant.

Lemme 3.2 (Schorack-Wellner [38]) : *Soit ξ_n le processus empirique uniforme non lissé défini en (2.2). Si $(d_n)_n$ est une suite de nombres positifs telle que*
$d_n = \dfrac{(c_n \ln n)}{n}$ *où* $c_n \to 0$ *et* $\dfrac{\ln(\frac{1}{c_n})}{\ln n} \to 0.$
Alors

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\ln(\dfrac{1}{c_n})}{\ln n}\omega(\xi_n, d_n) \leq 2, \quad p.s.$$

En appliquant le lemme précédent, avec $d_n = \dfrac{K}{n}\left(c_n = \dfrac{K}{\ln n}\right)$, on aura

$$\text{p.s. } \exists n_1 \text{ tel que } \forall n > n_1, \frac{\sqrt{n}\ln(\dfrac{\ln n}{K})}{\ln n}\omega(\xi_n, \frac{K}{n}) \leq 2.$$

Par conséquent, d'après (3.9) et (3.10), on aura

$$\begin{aligned}
\omega(\widehat{\xi}_n, a_n) &\leq \omega(\overline{\xi}_n, a_n) + \frac{2}{\sqrt{n}} \\
&\leq \omega(\xi_n, \frac{K}{n}) + \frac{2}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{2\ln n}{\sqrt{n}\ln(\frac{\ln n}{K})} + \frac{2}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \omega(\widehat{\xi}_n, a_n)\overline{\delta}_{n:1}^{-\alpha}$, on déduit alors

$$p.s.\ \exists n_1 \text{ tel que } \forall n > n_1,\ \omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq \frac{2\ln n}{\sqrt{n}\ln(\frac{\ln n}{K})}\overline{\delta}_{n:1}^{-\alpha} + \frac{2}{\sqrt{n}}\overline{\delta}_{n:1}^{-\alpha}. \tag{3.11}$$

Soit w et $i_0 = i_0(w)$ fixés tels que

$$\overline{\delta}_{n:1}(w) = X_{n:i_0(w)}(w) - X_{n:i_0(w)-1}(w) = X_k(w) - X_l(w).$$

Puisque $\overline{\delta}_{n:1}(w) \geq 0$, alors $X_l(w) \leq X_k(w)$. Ceci implique que $F^{(i)}(X_l(w)) \leq F^{(i)}(X_k(w))$, $\forall i \geq 1$.

Puisque $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ est uniformément lipschitzienne, alors il existe $K > 0$ tel que

$$F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(k)}(X_l(w)) = \left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(k)}(X_l(w))\right| \leq K\overline{\delta}_{n:1}(w). \tag{3.12}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(k)}(X_l(w))\right| &= \left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(k)}(X_l(w)) + F^{(l)}(X_l(w)) - F^{(l)}(X_l(w))\right| \\
&\geq \left|\left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(l)}(X_l(w))\right| - \left|F^{(k)}(X_l(w)) - F^{(l)}(X_l(w))\right|\right| \\
&\geq \left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(l)}(X_l(w))\right| - \left|F^{(k)}(X_l(w)) - F^{(l)}(X_l(w))\right|.
\end{aligned}$$

Puisque $F^{(k)}(X_k)$ et $F^{(l)}(X_l)$ sont uniformes, alors

$$\left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(l)}(X_l(w))\right| \geq \delta_{n:1}(w),$$

où $\delta_{n:1}$ est l'espacement minimal uniforme. Donc

$$\left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(k)}(X_l(w))\right| \geq \delta_{n:1}(w) - \left|(F^{(k)} - F^{(l)})(X_l(w))\right|.$$

Puisque $k, l \leq n$, alors

$$\left|(F^{(k)} - F^{(l)})(X_l(w))\right| = o(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}), \quad \varepsilon > 0.$$

Ceci implique l'existence d'une constante C $(0 \leq C \leq 1)$, telle que

$$\left|(F^{(k)} - F^{(l)})(X_l(w))\right| \leq \frac{C}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Par conséquent

$$\left|F^{(k)}(X_k(w)) - F^{(k)}(X_l(w))\right| \geq \delta_{n:1}(w) - \frac{C}{n^{2+\varepsilon}}. \tag{3.13}$$

D'après (3.12) et (3.13), on déduit

$$K\overline{\delta}_{n:1} \geq \delta_{n:1} - \frac{C}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Pour contrôler $\delta_{n:1}$, on utilise le lemme suivant.

Lemme 3.3 (Devroye [10]) : *Soient $\delta_{n:k}$ les statistiques d'ordre des espacements uniformes $\delta_{n,i} = U_{n:i} - U_{n:i-1}$. On a, pour $b_n \geq 0$, tel que $\frac{b_n}{n^2} \searrow 0$:*

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty}\{n^2\delta_{n:k} \leq b_n\}\right) = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right. \quad \text{si} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^k}{n} = \left\{\begin{array}{l} < +\infty \\ = +\infty \end{array}\right.$$

En utilisant le dernier résultat avec $b_n = n^{-\varepsilon},\ \varepsilon > 0$, on obtient

$$\text{p.s. } \exists n_2 \text{ tel que } \forall n \geq n_2,\ \delta_{n:1} > \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Par conséquent

$$K\overline{\delta}_{n:1} \geq \frac{1-C}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Par suite

$$\overline{\delta}_{n:1} \geq \frac{K'}{n^{2+\varepsilon}}, \text{ avec } K' = (\frac{1-C}{K}).$$

D'où

$$\overline{\delta}_{n:1}^{-\alpha} \leq (K')^{-\alpha} \frac{1}{n^{-(2+\varepsilon)\alpha}}.$$

L'inégalité (3.11) devient

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2), \; \omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n) \leq 2(K')^{-\alpha}(\frac{\ln n}{\ln(\dfrac{\ln n}{K})} + 1)\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-(2+\varepsilon)\alpha}}.$$

Le terme à droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, pour $\frac{1}{2} - (2+\varepsilon)\alpha > 0$ c'est-à-dire pour tout $\alpha < \dfrac{1}{2(2+\varepsilon)} < \dfrac{1}{4}$. On déduit que $\omega_\alpha(\widehat{\xi}_n, a_n)$ converge presque sûrement (donc en probabilité) vers 0 pour tout $\alpha < \dfrac{1}{4}$.

Par le théorème 1.9, $\{\widehat{\xi}_n, \; n \geq 1\}$ est équitendue pour tout $\alpha < \dfrac{1}{p}(\dfrac{p}{2} - 1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}$ et $\alpha < \dfrac{1}{4}$. Puisque on a pas de contrainte sur le choix de p dans l'inégalité de Rosenthal, on a l'équitension de $\{\widehat{\xi}_n, \; n \geq 1\}$ pour tout $\alpha < \dfrac{1}{2}$ et $\alpha < \dfrac{1}{4}$ c'est-à-dire pour tout $\alpha < \min(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{4}$.

Convergence des lois fini-dimensionnelles de $\{\widehat{\xi}_n, \, n \geq 1\}$

Pour montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\widehat{\xi}_n$, on se ramène a celles de $\overline{\xi}_n$ en montrant que la distance dans $\mathbb{R}^k$ entre $(\widehat{\xi}_n(t_1), ..., \widehat{\xi}_n(t_k))$ et $(\overline{\xi}_n(t_1), ..., \overline{\xi}_n(t_k))$ tend vers 0 en probabilité, pour tout $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_k = 1, \;\; k \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\forall t \in [0,1], \;\; \left|\overline{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(t)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

donc

$$\left|\overline{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(t)\right|^2 \leq \frac{1}{n}.$$

On aura alors

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t) - \widehat{\xi}_n(t)\right|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ceci veut dire que

$$(\overline{\xi}_n - \widehat{\xi}_n)(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0,\ \forall t \in [0,1],$$

ce qui implique que

$$(\overline{\xi}_n - \widehat{\xi}_n)(t) \xrightarrow{P} 0,\ \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent

$$\left\|\overline{\xi}_n - \widehat{\xi}_n\right\|^2_{\mathbb{R}^k} = \sum_{i=1}^{k} \left|\overline{\xi}_n(t_i) - \widehat{\xi}_n(t_i)\right|^2 \xrightarrow{P} 0.$$

Puisque les lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ convergent vers celles de B', alors les lois fini-dimensionnelles de $\widehat{\xi}_n$ convergent aussi vers celles de B', ce qui termine la preuve du théorème 3.2.

3.4 Convergence du processus empirique lissé par convolution dans H_α^0

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec des lois respectives $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ et à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ est uniformément $\beta-$hölderienne $(0 < \beta \leq 1)$ et vérifiant (3.4).

Considérons $\overline{\xi}_n(t)$ le processus empirique non lissé défini précédement :

$$\overline{\xi}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}[1_{\{X_i \le t\}} - F^{(i)}(t)], \quad t \in [0,1], \ n \ge 1.$$

Soit k une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^{\beta} k(u)du < +\infty, \tag{3.14}$$

et il existe une constante $a(k) > 0$ telle que

$$|k(x) - k(y)| \le a(k)\,|x-y|\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Soit $(c_n)_n$ une suite de nombres positifs décroissante vers 0 telle que

$$n^{-\frac{1}{4}} = O(c_n). \tag{3.16}$$

On définit la suite de noyaux de convolution $(k_n)_n$ par

$$k_n(t) = c_n^{-1}k(c_n^{-1}t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Considérons le processus empirique lissé par convolution correspondant

$$\widetilde{\xi}_n(t) = (\overline{\xi}_n * k_n)(t) - (\overline{\xi}_n * k_n)(0), \quad t \in [0,1], \ n \ge 1. \tag{3.18}$$

Le terme $(\overline{\xi}_n * k_n)(0)$ est introduit pour avoir $\widetilde{\xi}_n(0) = 0$ pour que les trajectoires soient dans H_α^0.

Théorème 3.3 (Graiche - Hamadouche [13]) : *Sous les hypothèses précédentes, la suite* $\{\widetilde{\xi}_n,\ n \ge 1\}$ *converge en loi dans* H_α^0 *vers le processus gaussien centré* B' *pour tout* $\alpha < \frac{\beta}{2}$.

Preuve : Pour montrer que $\widetilde{\xi}_n$ est dans H_α^0, il suffit de vérifier que sous les hypothèses précédentes $\widetilde{\xi}_n$ est dans H_1 (puisque $H_1 \subset H_\alpha^0, \ \forall \alpha < 1$).

Vérifions d'abord que $\overline{\xi}_n * k_n$ est lipschitzienne.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\xi}_n * k_n(x) - \overline{\xi}_n * k_n(y)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \overline{\xi}_n(u)[k_n(x-u) - k_n(y-u)]du\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\overline{\xi}_n(u)\right| \left|c_n^{-1}[k(c_n^{-1}(x-u)) - k(c_n^{-1}(y-u))]\right| du \\
&\leq \left[a(k)c_n^{-2}\int_0^1 \left|\overline{\xi}_n(u)\right| du\right] |x-y|,
\end{aligned}$$

car k est lipschitzienne. On a donc $\overline{\xi}_n * k_n$ est lipschitzienne.
Puisque $\widetilde{\xi}_n(t) = (\overline{\xi}_n * k_n)(t) - (\overline{\xi}_n * k_n)(0)$, alors $\widetilde{\xi}_n$ est aussi lipschitzienne et donc $\widetilde{\xi}_n$ est dans H_1. Par conséquent $\widetilde{\xi}_n$ est dans H_α^0, pour tout $0 < \alpha < 1$.

Pour montrer la convergence en loi de $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$, on utilise la proposition 1.1.

Equitension de $\{\widetilde{\xi}_n,\ n \geq 1\}$: On utilise le théorème 1.9 avec $a_n = \frac{1}{n}$ et on étudie les deux cas $|t-s| \geq \frac{1}{n}$ et $|t-s| < \dfrac{1}{n}$.

1er cas $|t-s| \geq \dfrac{1}{n}$: En appliquant l'inégalité de Jensen par rapport à la mesure de probabilité $k_n(u)du$ et le théorème de Fubini, on aura pour tout $p > 2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)\right|^p &= \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} [\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(s-u)]k_n(u)du\right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(s-u)\right|^p k_n(u)du.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Rosenthal appliquée aux variables aléatoires indépendantes et centrées

$$\mathbb{Y}_i = 1_{\{s-u \leq X_i \leq t-u\}} - [F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(s-u)], \quad s < t,$$

nous donne

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(s-u)\right|^p \leq c_p \left[n^{-\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left|\mathbb{Y}_i\right|^p + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{Y}_i^2)^{\frac{p}{2}}\right].$$

D'après (4.8), on a

$$\mathbb{E}\left|\mathbb{Y}_i\right|^p \leq \left|F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(s-u)\right|, \ \forall p \geq 2.$$

Puisque $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ est uniformément $\beta-$hölderienne ($0 < \beta \leq 1$), alors

$$\exists K > 0, \left|F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(s-u)\right| \leq K\left|(t-u)-(s-u)\right|^\beta = K\left|t-s\right|^\beta, \ \ \forall i \geq 1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(s-u)\right|^p &\leq c_p\left[n^{-\frac{p}{2}}.n.K.\left|t-s\right|^\beta + \frac{1}{n}.n.K^{\frac{p}{2}}\left|t-s\right|^{\frac{\beta p}{2}}\right] \\ &= c_p\left[n^{1-\frac{p}{2}}K.\left|t-s\right|^\beta + K^{\frac{p}{2}}\left|t-s\right|^{\frac{\beta p}{2}}\right] \end{aligned}$$

Si on se restreint aux s, t tels que $|t-s| \geq \frac{1}{n}$, on aura

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(s-u)\right|^p \leq c_p\left[K\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}+\beta-1} + K^{\frac{p}{2}}\left|t-s\right|^{\beta\frac{p}{2}}\right].$$

Puisque $\frac{p}{2} + \beta - 1 \geq \frac{\beta p}{2}$ (car $(\frac{p}{2} + \beta - 1) - \frac{\beta p}{2} = (\frac{p}{2} - 1)(1-\beta) > 0$), alors

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(s-u)\right|^p \leq c_p\left[K + K^{\frac{p}{2}}\right]\left|t-s\right|^{\beta\frac{p}{2}}.$$

En intégrant par rapport à $k_n(u)du$, il vient

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)\right|^p \leq c_p\left[K + K^{\frac{p}{2}}\right]\left|t-s\right|^{\beta\frac{p}{2}}, \ \text{ pour } \ |t-s| \geq \frac{1}{n}.$$

Donc la condition (a) du théorème 1.9 est vérifiée avec $a = p, \ \ b = \frac{\beta p}{2}, \ \ c = c_p\left[K + K^{\frac{p}{2}}\right]$ et $a_n = \frac{1}{n}$.

2ème cas $|t-s| < \frac{1}{n}$: Pour compléter la preuve, vérifions que $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n})$ converge vers 0 en probabilité.

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n}) &= \sup_{|t-s|\leq \frac{1}{n}} \frac{\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)\right|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \int_0^1 \left|\overline{\xi}_n(u)\right| \sup_{0<|t-s|<\frac{1}{n}} \frac{|k_n(t-u) - k_n(s-u)|}{|t-s|^\alpha} du.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}|k_n(t-u) - k_n(s-u)| &= \left|c_n^{-1}[k(c_n^{-1}(t-u)) - k(c_n^{-1}(s-u))]\right| \\ &\leq c_n^{-1}a(k)\left|c_n^{-1}[(t-u)-(s-u)]\right| \\ &= c_n^{-2}a(k)\left|t-s\right|.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|k_n(t-u) - k_n(s-u)|\,|t-s|^{-\alpha} \leq a(k)c_n^{-2}\,|t-s|^{1-\alpha}.$$

Et en utilisant l'inégalité élémentaire

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(u)\right| \leq \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left|\overline{\xi}_n(u)\right|^2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(u)(1-F^{(i)}(u))}.$$

Puisque $\forall i,\ 0 \leq F^{(i)}(u) \leq 1$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(u)(1-F^{(i)}(u)) \leq 1$.
Nous obtenons

$$\mathbb{E}\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n}) \leq a(k)c_n^{-2}n^{\alpha-1} = o(1),\ \forall 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

On déduit que $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{1}{n})$ converge vers 0 en probabilité, pour tout $0<\alpha<\frac{1}{2}$.
Par le théorème 1.9, $\{\widetilde{\xi}_n,\, n\geq 1\}$ est équitendue pour tout $\alpha < \frac{\beta}{2} - \frac{1}{p}$ et $\alpha < \frac{1}{2}$. Comme il n'y a aucune contrainte sur le choix de p dans l'inégalité de Rosenthal, on aura l'équitension de $\{\widetilde{\xi}_n,\, n\geq 1\}$ pour tout $\alpha < \frac{\beta}{2}$ et $\alpha < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour tout $\alpha < \min(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\beta}{2}$.

Convergence des lois fini-dimensionnelles de $\{\widetilde{\xi}_n,\ n\geq 1\}$: D'après le théorème 3.1, les lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ convergent vers celles de B', donc pour montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\widetilde{\xi}_n$ vers celles de B' on se ramène à celles de $\overline{\xi}_n$ en montrant que la distance dans $\mathbb{R}^k$ entre $(\widetilde{\xi}_n(t_1), .., \widetilde{\xi}_n(t_k))$ et $(\overline{\xi}_n(t_1), .., \overline{\xi}_n(t_k))$ tend vers 0 en probabilité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_k = 1$.

On vérifie d'abord la convergence vers 0 de $\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2$, pour tout $t \in [0, 1]$.
On a par l'inégalité de Jensen.

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 &= \left|[(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)] + [\overline{\xi}_n(0) - (\overline{\xi}_n * k_n)(0)]\right|^2 \\
&\leq 2\left[\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 + \left|(\overline{\xi}_n * k_n)(0) - \overline{\xi}_n(0)\right|^2\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 \leq 2[\mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 + \mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(0) - \overline{\xi}_n(0)\right|^2].$$

Pour vérifier la convergence de $\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2$ vers 0, il suffit de montrer que

$$\forall t \in [0, 1],\ (\overline{\xi}_n * k_n - \overline{\xi}_n)(t) = o_P(1).$$

On va montrer que

$$\mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

En appliquant l'inégalité de Jensen par rapport à la mesure de probabilité $k_n(u)du$ et le théorème de Fubini, on aura

$$\mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 k_n(u)du.$$

1) Si $u \in [t-1, t]$: on aura $t - u \in [0, 1]$.

a) Si $u \in [t-1, 0]$ ($u \leq 0$ et $t - u \geq t$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 &= Var(\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(t)) \\
&= Var\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(1_{\{t_i \leq t-u\}} - [F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)])\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(1_{\{t \leq X_i \leq t-u\}}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)](1 - [F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)]) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)\right|,
\end{aligned}$$

car $F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t) = \left|F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)\right|$ et $(1 - [F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)]) \leq 1$.
Puisque $(F^{(i)})_i$ est uniformément $\beta-$hölderienne, alors

$$\exists K > 0, \left|F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(t)\right| \leq K\left|(t-u) - t\right|^{\beta} = K\left|u\right|^{\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 \leq K\left|u\right|^{\beta}, \quad t \in [0, 1], u \in [t-1, 0].$$

b) $u \in [0, t]$ ($u \geq 0$ et $t - u \leq t$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 &= Var(\overline{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t-u)) \\
&= Var\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(1_{\{t-u \leq X_i \leq t\}} - [F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u)])\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(1_{\{t-u \leq X_i \leq t\}}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u)](1 - [F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u)]) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u)\right| \\
&\leq K\left|u\right|^{\beta}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 \leq K\left|u\right|^{\beta}, \quad t\in[0,1] \text{ et } u\in[0,t].$$

Par conséquent

$$\forall t\in[0,1], \quad \forall u\in[t-1,t] : \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 \leq K\left|u\right|^{\beta}.$$

2) Si $u\in\mathbb{R}\backslash[t-1,t]$ $(t-u\notin[0,1])$:

On a $\overline{\xi}_n(t-u)=0$, car $t-u\notin[0,1]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 &= \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t)\right|^2 \\
&= Var(\overline{\xi}_n(t)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Var(1_{\{X_i\leq t\}}). \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t)(1-F^{(i)}(t)).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t)(1-F^{(i)}(t)), \quad t\in[0,1] \text{ et } u\in\mathbb{R}\backslash[t-1,t].$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 k_n(u)du \\
&= \int_{t-1}^{t} \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 k_n(u)du + \int_{\mathbb{R}\backslash[t-1,t]} \mathbb{E}\left|\overline{\xi}_n(t-u)-\overline{\xi}_n(t)\right|^2 k_n(u)du \\
&\leq K\int_{t-1}^{t} \left|u\right|^{\beta} k_n(u)du + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t)(1-F^{(i)}(t)) \int_{\mathbb{R}\backslash[t-1,t]} k_n(u)du \\
&\leq K\int_{t-1}^{t} \left|u\right|^{\beta} k_n(u)du + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t) \int_{\mathbb{R}\backslash[t-1,t]} k_n(u)du.
\end{aligned}$$

Posons $x = c_n^{-1}u$ ($u = c_n x$ et $du = c_n dx$), on aura

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 &\leq Kc_n^\beta \int_{c_n^{-1}(t-1)}^{c_n^{-1}t} |x|^\beta k(x)dx + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t) \int_{\mathbb{R}\setminus[c_n^{-1}(t-1), c_n^{-1}t]} k(x)dx \\ &\leq Kc_n^\beta \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta k(x)dx + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t) \int_{\{|x|\geq c_n^{-1}t'\}} k(x)dx,\end{aligned}$$

où $t' = \min\{|t|, |t-1|\}$ et $t \in [0,1]$.

Puisque k vérifie (3.14), $(c_n)_n$ décroissante vers 0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} F^{(i)}(t) = F(t)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} Kc_n^\beta \int_{\mathbb{R}} |x|^\beta k(x)dx = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t) \int_{\{|x|\geq c_n^{-1}t'\}} k(x)dx = F(t) \lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|\geq c_n^{-1}t'\}} k(x)dx = 0,$$

car k est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent

$$(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Puisque

$$\mathbb{E}\left|\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 \leq 2[\mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(t) - \overline{\xi}_n(t)\right|^2 + \mathbb{E}\left|(\overline{\xi}_n * k_n)(0) - \overline{\xi}_n(0)\right|^2].$$

Alors

$$\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0, \quad \forall t \in [0,1],$$

par conséquent

$$\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t) \xrightarrow{P} 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Ainsi

$$\left\|\widetilde{\xi}_n - \overline{\xi}_n\right\|^2_{\mathbb{R}^k} = \sum_{i=1}^{k} \left|\widetilde{\xi}_n(t_i) - \overline{\xi}_n(t_i)\right|^2 \xrightarrow{P} 0.$$

Puisque les lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ convergent vers celles de B', alors celles de $\widetilde{\xi}_n$ convergent aussi vers celles de B'. Enfin on a la convergence en loi de $\widetilde{\xi}_n$ vers B', dans $H^0_\alpha, \forall \alpha < \frac{\beta}{2}$, ce qui achève la preuve du théorème 3.3.

3.5 Convergence du processus empirique lissé par convolution dans $C_0^{\alpha,o}$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, avec des lois respectives $(F^{(i)})_{i\geq 1}$.

On suppose que $(F^{(i)})_{i\geq 1}$ est uniformément $\beta-$hölderienne $(0 < \beta \leq 1)$ et vérifiant la condition (3.4). On suppose aussi que

$$\int_{\mathbb{R}} F^{(i)}(t)^{1/2}(1 - F^{(i)}(t))^{1/2} dt < +\infty, \quad \forall i \geq 1. \tag{3.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(t)^{1/2}(1 - F(t))^{1/2} dt < +\infty. \tag{3.20}$$

On considère le processus empirique non lissé

$$\overline{\xi}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} [1_{\{X_i \leq t\}} - F^{(i)}(t)], \quad t \in \mathbb{R},\ n \geq 1. \tag{3.21}$$

On introduit une suite de noyaux de convolution

$$k_n(t) = c_n^{-1} k(c_n^{-1} t),$$

vérifiant (2.9) et (2.10) et k est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^\beta k(t) dt < +\infty, \tag{3.22}$$

et $(c_n)_n$ est une suite de nombres positifs décroissante vers 0 telle que

$$n^{-1/4} = O(c_n). \tag{3.23}$$

On suppose que $(k_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}} k_n(t)dt = 1, \quad n \geq 1. \tag{3.24}$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\{|t|\geq \varepsilon\}} k_n(t)dt = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.25}$$

On considère le processus empirique lissé par convolution correspondant

$$\widetilde{\xi}_n(t) = (\overline{\xi}_n * k_n)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \; n \geq 1. \tag{3.26}$$

Théorème 3.4 (Graiche - Hamadouche [13]) : *Sous les hypothèses précédentes, la suite* $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$ *définie en* (3.26) *converge faiblement vers le processus gaussien centré* B' *dans* $C_0^{\alpha,o}$, *pour tout* $\alpha < \frac{\beta}{2}$.

Preuve : $\widetilde{\xi}_n \in C_0^{\alpha,o}$: Puisque $\overline{\xi}_n$ est mesurable, bornée et nulle à l'infini et $(k_n)_n$ une suite de noyaux de convolution vérifiant (2.9) et (2.10), alors par le lemme 2.5 $\widetilde{\xi}_n = \overline{\xi}_n * k_n$ est dans $C_0^{\alpha,o}$, pour tout $\alpha < 1/2$.

Equitension de $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$

On utilise le corollaire 1.2 avec la suite $j(n)$ donnée par $2^{j(n)} \leq n < 2^{j(n)+1}$. On va vérifier les conditions (i) à (v) du théorème 1.15.

i)- Pour $\tau = 2$, par l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini, on aura pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t)|^2 &= \mathbb{E}|\int_{\mathbb{R}} \overline{\xi}_n(t-u)k_n(u)du|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}|\overline{\xi}_n(t-u)|^2 k_n(u)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(t-u)(1-F^{(i)}(t-u))]k_n(u)du.
\end{aligned}
$$

Pour $H_n = H^{(n)} * k_n$, où $H^{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} F^{(i)}(1-F^{(i)})$, on obtient

$$
\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t)|^2 \leq H_n(t) \leq 1, \quad t \in \mathbb{R},\ n \geq 1.
$$

Par conséquent

$$
\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t)|^2 \leq 1 < +\infty.
$$

La première condition du théorème 1.15 est donc vérifiée.

ii)- On a pour $\tau = 2$, $\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(k)|^2 \leq H_n(k),\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Pour vérifier la condition (ii) du théorème 1.15, on montre la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} H_n(k)$.

Puisque H_n est positive, alors

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}} H_n(k) = \int_{\mathbb{R}} L(u)k_n(u)du,
$$

où $L(u) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} H^{(n)}(k-u), \quad u \in \mathbb{R}$.

La condition (3.19) implique l'existence de $\mathbb{E}(X_i)$ qui est équivalent à la convergence des séries $\sum\limits_{k>0} P(X_i > k)$ et $\sum\limits_{k\leq 0} P(X_i \leq k), \quad \forall i \geq 1$.

On a

$$
H^{(n)}(k-u) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-F^{(i)}(k-1)), \quad k > 1,\ u \in [0,1],
$$

$$
H^{(n)}(k-u) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(k), \quad k \leq 0,\ u \in [0,1].
$$

En utilisant la condition (3.19), on aura

$$\sum_{k>1}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-F^{(i)}(k-1))] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k>0}P(X_i \geq k)) < +\infty,$$

$$\sum_{k\leq 0}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(k)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k\leq 0}P(X_i \leq k)) < +\infty.$$

Par les inégalités précédentes et la 1-périodicité de L, on a la convergence normale de la série $L(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} H^{(n)}(k-u)$. Ainsi L est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, pour $m \geq 1$

$$\sum_{k\geq m} H_n(k) \leq \sum_{k\geq m}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-F^{(i)}(k-1))]\int_{\mathbb{R}} k_n(u)du + \parallel L \parallel_\infty \int_{|u|>1} k_n(u)du.$$

En utilisant les conditions (3.4), (3.24) et (3.25), le majorant de $\sum_{k\geq m} H_n(k)$ converge uniformément vers 0 en n, quand m tend vers $+\infty$.

Pour $m \leq 0$

$$\sum_{k\leq m} H_n(k) \leq \sum_{k\leq m}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(k)]\int_{\mathbb{R}} k_n(u)du + \parallel L \parallel_\infty \int_{|u|>1} k_n(u)du.$$

Avec les mêmes hypothèses que le premier cas ($m \geq 1$), on aura la convergence uniforme vers 0 en n du majorant de $\sum_{k\leq m} H_n(k)$, quand m tend vers $-\infty$.
On déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} H_n(k)$ converge uniformément vers 0 et la condition (ii) est alors vérifiée pour $\tau = 2$.

iii)- Puisque $\frac{1}{n} \leq 2^{-j(n)} \leq \frac{2}{n}$, alors par le corollaire 1.2, il suffit de vérifier (iii) seulement pour $1 \geq t-s \geq \frac{1}{n}$ et de prouver la convergence en probabilité vers 0 de $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{2}{n})$.

En utilisant l'inégalité de Rosenthal avec $\gamma > 2$, on obtient

$$\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)|^\gamma \leq C_\gamma[n^{-\frac{\gamma}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|Y_i|^\gamma + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i^2)^{\frac{\gamma}{2}}], \quad C_\gamma > 0,$$

avec $Y_i = \int_{\mathbb{R}}[1_{\{s-u\le X_i\le t-u\}} - \mathbb{E}(1_{\{s-u\le X_i\le t-u\}})]k_n(u)du$.

Par l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini, on aura pour $q \ge 2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y_i|^q &\le \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[1_{\{s-u\le X_i\le t-u\}} - \mathbb{E}(1_{\{s-u\le X_i\le t-u\}})]^q k_n(u)du \\ &\le \int_{\mathbb{R}} (F^{(i)}(t-u) - F^{(i)}(s-u))k_n(u)du \\ &= F^{(i)} * k_n(t) - F^{(i)} * k_n(s).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)|^\gamma &\le \frac{C_\gamma}{n^{\frac{\gamma}{2}}}\sum_{i=1}^n (F^{(i)} * k_n(t) - F^{(i)} * k_n(s)) \\ &\quad + \frac{C_\gamma}{n}\sum_{i=1}^n (F^{(i)} * k_n(t) - F^{(i)} * k_n(s))^{\frac{\gamma}{2}} \\ &\le \frac{1}{n}C_\gamma \sum_{i=1}^n [n^{1-\frac{\gamma}{2}} + (F^{(i)} * k_n(t) - F^{(i)} * k_n(s))^{\frac{\gamma}{2}-1}] \times \\ &\qquad (F^{(i)} * k_n(t) - F^{(i)} * k_n(s))\end{aligned}$$

Puisque $(F^{(i)})_{i\ge 1}$ est uniformément $\beta-$hölderienne et $n^{1-\frac{\gamma}{2}} \le |t-s|^{\frac{\gamma}{2}-1} \le |t-s|^{\beta(\frac{\gamma}{2}-1)}$ pour $1 \ge |t-s| \ge \frac{1}{n}$, alors

$$\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)|^\gamma \le |t-s|^{\beta(\frac{\gamma}{2}-1)}[\frac{1}{n}C_\gamma(1 + K^{\frac{\gamma}{2}-1})\sum_{i=1}^n (F^{(i)} * k_n(t) - F^{(i)} * k_n(s))].$$

Pour $C'_\gamma = C_\gamma(1 + K^{\frac{\gamma}{2}-1})$, $G_n = \frac{1}{n}C'_\gamma\sum_{i=1}^n (F^{(i)} * k_n)$ et $\delta = \beta(\frac{\gamma}{2} - 1)$, on obtient

$$\mathbb{E}|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)|^\gamma \le |t-s|^\delta(G_n(t) - G_n(s)).$$

iv)- $G_n(t) = \frac{1}{n}C'_\gamma\sum_{i=1}^n (F^{(i)} * k_n)(t)$
Puisque les $F^{(i)} * k_n$ sont des fonctions de répartition, alors

$$G_n(+\infty) - G_n(-\infty) = C'_\gamma < +\infty,$$

et (iv) est alors satisfaite.

v)- Pour $m \in \mathbb{N}$, on note que

$$\sum_{l \geq m} [F^{(i)} * k_n(l+1) - F^{(i)} * k_n(l)] = 1 - F^{(i)} * k_n(m),$$

$$\sum_{l \leq -m} [F^{(i)} * k_n(l) - F^{(i)} * k_n(l-1)] = F^{(i)} * k_n(-m).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{l \geq m} [G_n(l+1) - G_n(l)] &= \sum_{l \geq m} \frac{1}{n} C_\gamma \sum_{i=1}^{n} [F^{(i)} * k_n(l+1) - F^{(i)} * k_n(l)] \\
&= \frac{1}{n} C_\gamma \sum_{i=1}^{n} (1 - F^{(i)} * k_n(m))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l \leq -m} [G_n(l) - G_n(l-1)] &= \sum_{l \leq -m} \frac{1}{n} C_\gamma \sum_{i=1}^{n} [F^{(i)} * k_n(l) - F^{(i)} * k_n(l-1)] \\
&= \frac{1}{n} C_\gamma \sum_{i=1}^{n} F^{(i)} * k_n(-m).
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions (3.4), (3.24) et (3.25), $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{(i)} * k_n$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$. Par conséquent la convergence vers 0 quand m tend vers l'infini du terme à droite de l'inégalité précédente est uniforme en n.
On déduit que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} (G_n(l+1) - G_n(l))$ converge uniformément en $n \geq 1$ et la condition (v) est alors vérifiée.

Pour compléter la preuve, il reste à montrer la convergence en probabilité vers 0 de $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, 2^{-j(n)})$.

Puisque $\frac{1}{n} \leq 2^{-j(n)} \leq \frac{2}{n}$, il suffit de montrer que $\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{2}{n})$ converge vers 0 en probabilité.

$$\frac{|\widetilde{\xi}_n(t) - \widetilde{\xi}_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}} |\overline{\xi}_n(u)| \frac{|k_n(t-u) - k_n(s-u)|}{|t-s|^\alpha} du.$$

Puisque $k_n(t) = c_n^{-1}k(c_n^{-1}t)$ et k est uniformément lipschitzienne, on obtient

$$\mathbb{E}\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{2}{n}) \leq 2^{1-\alpha}a(k)c_n^{-2}n^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}|\overline{\xi}_n(u)|du.$$

Par l'inégalité élémentaire

$$\mathbb{E}|\overline{\xi}_n(u)| \leq E^{1/2}|\overline{\xi}_n(u)|^2 = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(u)(1-F^{(i)}(u))]^{1/2},$$

on aura

$$\mathbb{E}\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{2}{n}) \leq 2^{1-\alpha}a(k)c_n^{-2}n^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F^{(i)}(u)(1-F^{(i)}(u))]^{1/2}du.$$

En utilisant (3.4), $\int_{\mathbb{R}}[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}F^{(i)}(u)(1-F^{(i)}(u))]^{1/2}du$ converge vers $\int_{\mathbb{R}}F^{1/2}(u)(1-F(u))^{1/2}du$ quand n tend vers $+\infty$.

Puisque $\int_{\mathbb{R}}F^{1/2}(u)(1-F(u))^{1/2}du < +\infty$ et $n^{-1/4} = O(c_n)$, on déduit que

$$\mathbb{E}\omega_\alpha(\widetilde{\xi}_n, \frac{2}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \forall\alpha < \frac{1}{2}.$$

Finalement, par le corollaire 1.2, $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$ est équitendue dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $\alpha < \frac{\beta(\frac{\gamma}{2}-1)}{\gamma} = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{\gamma}$ et $\alpha < \frac{1}{2}$. Puisqu'il n'y a pas de borne supérieure dans le choix de γ dans l'inégalité de Rosenthal, on a l'équitension pour tout $\alpha < \min(\beta/2, 1/2) = \beta/2$.

Convergence des lois fini-dimensionnelles de $\{\widetilde{\xi}_n, n \geq 1\}$

Par le théorème 3.1, les lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ convergent vers celles de B', il en sera de même pour celles de $\widetilde{\xi}_n$ si on montre que la distance dans $\mathbb{R}^k$ entre $(\widetilde{\xi}_n(t_1), .., \widetilde{\xi}_n(t_k))$ et $(\overline{\xi}_n(t_1), .., \overline{\xi}_n(t_k))$ tend vers 0 en probabilité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1 < .... < t_k$.

On montre d'abord que

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\overline{\xi}_n * k_n - \overline{\xi}_n)(t) = o_P(1),$$

qui est une conséquence de l'inégalité de Jensen par rapport à $k_n(u)du$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\overline{\xi}_n * k_n(t) - \overline{\xi}_n(t)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}|\overline{\xi}_n(t-u) - \overline{\xi}_n(t)|^2 k_n(u)du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u)) \\
&\qquad\qquad [1-(F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u))]|k_n(u)du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u))|k_n(u)du.
\end{aligned}$$

En utilisant la condition (3.4), $\int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(F^{(i)}(t) - F^{(i)}(t-u))|k_n(u)du$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} |F(t) - F(t-u)|k_n(u)du$ quand n tend vers $+\infty$.

Puisque F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et en utilisant (3.25), on déduit que

$$\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(\Omega)} 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent

$$\widetilde{\xi}_n(t) - \overline{\xi}_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\left\|\widetilde{\xi}_n - \overline{\xi}_n\right\|^2_{\mathbb{R}^k} = \sum_{i=1}^{k}\left|\widetilde{\xi}_n(t_i) - \overline{\xi}_n(t_i)\right|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0.$$

Puisque les lois fini-dimensionnelles de $\overline{\xi}_n$ convergent vers celles de B', on aura de même pour celles de $\widetilde{\xi}_n$. Ceci achève la preuve du théorème 3.4.

Chapitre 4

Application à la détection de rupture épidémique

4.1 Introduction

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires de moyennes $m_1,\ m_2, ...,\ m_n$ respectivement. On veut tester l'hypothèse nulle
$(H_0) : m_1 = m_2 = ... = m_n$,
contre l'hypothèse alternative
$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n$ tels que
$m_1 = ... = m_{k^*} = m_{m^*+1} = ... = m_n, m_{k^*+1} = ... = m_{m^*}$ et $m_{k^*} \neq m_{k^*+1}$.

On note $l^* = m^* - k^*$ la longueur de l'épidémie et on suppose que l^* et $n - l^*$ tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini.

On définit le processus de sommes partielles basé sur les X_i par

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1},\ t \in [0, 1]. \tag{4.1}$$

$S(0) = 0$ et $S(t) = \sum\limits_{k \leq t} X_k$.
Pour une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, Donsker et Prohorov ont prouvé que si la variance σ^2 est finie, alors $\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n$ converge dans $C[0, 1]$ vers le mouvement brownien W.

Par le théorème de conservation de la convergence en loi par image continue, on aura $g(\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\xi_n)$ converge en loi vers $g(W)$, où g est une fonctionnelle continue. Ceci procure de multiples applications statistiques. Un exemple classique est la détection de rupture épidémique de l'espérance d'un échantillon (hypothèses H_0 et H_A).

Levine et Kline [26] ont proposé la statistique

$$Q = \max_{1\le i<j\le n} |S(j) - S(i) - S(n)(\frac{j}{n} - \frac{i}{n})|. \tag{4.2}$$

Pour $g(x) = \sup\limits_{0\le t\le 1} |x(t)|$, on a $Q = g(\xi_n)$.
g est continue sur $C[0,1]$ et on a sous l'hypothèse nulle d'un échantillon i.i.d. de variance 1 et d'espérance fixé

$$n^{-\frac{1}{2}}Q \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{0<t<1} |B(t)|,$$

où $B(t) = W(t) - tW(1)$ est le pont brownien correspondant à W.

Sous l'hypothèse alternative d'existence d'un point de rupture, la statistique $n^{-\frac{1}{2}}Q$ tend vers l'infini, donc le test est consistant.
Si on considère l'hypothèse alternative épidémique (H_A), alors on peut utiliser la statistique proposée par Račkauskas et Suquet [35]

$$UI(n,\alpha) = \max_{1\le i<j\le n} \frac{|S(j) - S(i) - S(n)(\frac{j-i}{n})|}{[(\frac{j-i}{n})(1 - \frac{j-i}{n})]^\alpha}. \tag{4.3}$$

La fonctionnelle correspondante est

$$h(x) = \sup_{0<|t-s|<1} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

h n'est pas continue sur $C[0,1]$, mais elle est continue sur $(H^0_\alpha, \|.\|_\alpha)$.
Pour une suite de variables aléatoires i.i.d., Lamperti [25] a prouvé que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty$, où $p = (\frac{1}{2} - \alpha)^{-1}$, alors $n^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\xi_n$ converge vers W dans H^0_α, pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Ceci nous permet d'avoir la limite de $h(n^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\xi_n)$ et donc celle de $\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}UI(n,\alpha)$. Ce résultat a été généralisé par

– Erickson : Processus de sommes partielles indexés par $[0,1]^d$.

– Hamadouche : Suites faiblement dépendantes.

– Račkauskas et Suquet : Espace de Hölder H^0_ρ, où $\rho(h) = h^\alpha ln^\beta(\frac{1}{h})$.

On note D_j l'ensemble des nombres dyadiques sur $[0,1]$ de niveau j :
$D_0 = \{0,1\},\ D_j = \{(2l-1)2^{-j},\ 1 \leq l \leq 2^{j-1}\},\ j \geq 1$.

On note aussi $D = \underset{j\geq 0}{\cup} D_j$ et $D^* = D\backslash\{0\}$.

Pour $r \in D_j,\ j \geq 0,\ r^- = r - 2^{-j}$ et $r^+ = r + 2^{-j}$.

Pour toute fonction $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit ses coefficients de Schauder $\lambda_r(x)$ par

$$\lambda_r(x) = x(r) - \frac{x(r^+) + x(r^-)}{2},\ r \in D_j,\ j \geq 1,$$

$\lambda_0(x) = x(0)$ et $\lambda_1(x) = x(1)$.

Račkauskas et Suquet [35] ont défini la statistique $DI(n,\alpha)$ par

$$DI(n,\alpha) = \max_{1<2^j\leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} \left| S(nr) - \frac{1}{2}S(nr^+) - \frac{1}{2}S(nr^-) \right|. \tag{4.4}$$

Ils ont considéré les variables aléatoires

$$DI(\alpha) = \sup_{j\geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} \left| W(r) - \frac{1}{2}W(r^+) - \frac{1}{2}W(r^-) \right| \tag{4.5}$$

et

$$UI(\alpha) = \sup_{0<t-s<1} \frac{|B(t) - B(s)|}{[(t-s)(1-(t-s))]^\alpha}. \tag{4.6}$$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoire. Sous l'hypothèse

(H'_0) : Les variables aléatoires X_i sont indépendantes identiquement distribuées. on a le résultat suivant

Théorème 4.1 (Račkauskas et Suquet [35]) : *On suppose que*

$$P(|X_1| > t) = o(t^{-p}),\ p = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}.$$

Alors

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} UI(n, \alpha) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathcal{L}} UI(\alpha)$$

et

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha),$$

où $\sigma^2 = var(X_1)$.

La consistance de rejeter (H_0) contre (H_A) est donnée par le résultat suivant

Théorème 4.2 (Račkauskas et Suquet [35]) : *Supposons sous* (H_A) *que les* X_i *sont indépendants et* $\sup\limits_{k \geq 1} V(X_k) < +\infty$. *Si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{h_n}{n^{\frac{1}{2-2\alpha}}} = +\infty,\ h_n = \frac{l^*}{n}(1 - \frac{l^*}{n}).$$

Alors

$$n^{-\frac{1}{2}} UI(n, \alpha) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{P} +\infty$$

et

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{P} +\infty.$$

L'intérêt des statistiques hölderiennes est dans la détection de courtes épidémies. La statistique $UI(n, \alpha)$ détecte des épidémies de longueur l^* d'ordre $n^{\delta}, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ alors que sans le dénominateur elle détecte seulement des épidémies de longueur l^* de l'ordre d'au

moins $n^{\frac{1}{2}}$.
$UI(n,\alpha)$ et $DI(n,\alpha)$ ont le même comportement asymptotique mais les $DI(n,\alpha)$ sont les plus intéressantes car leurs lois limites sont connues.

Notre objectif dans ce travail est de considérer des statistiques de type DI basées d'abord sur une suite non stationnaire de variables aléatoires indépendantes puis sur une suite stationnaire de variables aléatoires dépendantes ($\alpha-$mélangeantes), d'étudier leurs comportements asymptotiques et donner une application pour des tests de rupture de variances.

4.2 Cas indépendant non stationnaire

4.2.1 Convergence de $DI(n,\alpha)$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de variances $(\sigma_i^2)_{i\geq 1}$, on note $s_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2$. Sous l'hypothèse
(H_0') : Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et centrées. On a le résultat suivant

Théorème 4.3 : *Supposons qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que $m \leq \mathbb{E}|X_j|^2$ et $\mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < +\infty$, $\forall j > 1$.*

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$, on a

$$s_n^{-1} DI(n,\alpha) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha).$$

La preuve du théorème 4.3 est basée sur les résultats suivants.

Lemme 4.1 (Račkauskas, Suquet [35]) : *Soit $(\eta_n)_{n\geq 1}$ une suite tendue de variables aléatoires sur un espace de Banach séparable B et g_n, g des fonctionnelles continues de B dans $\mathbb{R}$. On* *suppose que g_n converge vers g dans B et $(g_n)_n$ est équicontinue. Alors*

$$g_n(\eta_n) = g(\eta_n) + o_P(1).$$

Lemme 4.2 (Račkauskas, Suquet [35]) : *Soit $(B, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $q : B \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle vérifiant*

a- q est sous-additive : $q(x+y) \leq q(x) + q(y),\ x,\ y \in B$.

b- q est symétrique : $q(-x) = q(x),\ x \in B$.

c- Pour une certaine constante C, $q(x) \leq C \parallel x \parallel,\ x \in B$.

Alors q satisfait la condition de Lipschitz :

$$|q(x+y) - q(x)| \leq C \parallel y \parallel,\ x,\ y \in B. \tag{4.7}$$

Et si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctionnelles q vérifiant a, b et c avec la même constante C, alors a, b et c sont aussi vérifiées pour $g(x) = \sup\{q(x),\ q \in \mathcal{F}\}$, qui vérifie alors la condition (4.7).

Théorème 4.4 (Hamadouche, Taleb [21]) : *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et non de même loi. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que*

$$m \leq \mathbb{E}|X_j|^2 \quad et \quad \mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < +\infty,\ \forall j > 1.$$

Alors la suite des lois de $s_n^{-1}\xi_n$ converge étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0, pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Preuve du théorème 4.3 : On note que

$$DI(n,\alpha) = \max_{1<2^j\leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(S_{n.})|\,, \tag{4.8}$$

où $(S_{n.})$ est le processus discontinu $(S(nt),\ 0 \leq t \leq 1)$ défini par

$$S(nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k.$$

Ce processus peut s'écrire aussi $S(nt) = \xi_n(t) - (nt - [nt])X_{[nt]+1}$, pour lequel $|\lambda_r(S_{n.}) - \lambda_r(\xi_n)| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} |X_i|\,.$

En utilisant cette estimation dans (4.8), on obtient

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) = g_n(s_n^{-1}\xi_n) + Z_n, \tag{4.9}$$

où $g_n(x) = \max\limits_{1<2^j\leq n} \max\limits_{r\in D_j} \frac{|\lambda_r(x)|}{2^{-j\alpha}},\ x \in H_\alpha^0$ et les Z_n vérifiant

$$|Z_n| \leq \frac{2}{\frac{s_n}{n^\alpha}} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|. \tag{4.10}$$

D'autre part

$$P(\max_{1\leq i\leq n}|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}) \leq \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}).$$

Or

$$P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}) \leq \frac{E|X_i|^\gamma}{(A\frac{s_n}{n^\alpha})^\gamma} \leq \frac{M}{(A\frac{s_n}{n^\alpha})^\gamma}.$$

$$(A\frac{s_n}{n^\alpha})^\gamma \geq (A\frac{(nm)^{\frac{1}{2}}}{n^\alpha})^\gamma = A^\gamma m^{\frac{\gamma}{2}} n^{\frac{\gamma}{2}-\gamma\alpha}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha}) \leq Cn^{1-\gamma(\frac{1}{2}-\alpha)},\ \textit{où}\ C = \frac{M}{A^\gamma m^{\frac{\gamma}{2}}}$$

Le majorant de $\sum\limits_{i=1}^{n} P(|X_i| > A\frac{s_n}{n^\alpha})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Par conséquent, on aura la convergence en probabilité vers 0 de $\frac{\max_{1\leq i\leq n}|X_i|}{\frac{s_n}{n^\alpha}}$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Les fonctionnelles $q_r(x) = \frac{\lambda_r(x)}{(r-r^-)^\alpha}$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 avec la même constante $C = 1$ et on a de même pour $g_n = \max\limits_{1<2^j\leq n} \max\limits_{r\in D_j} q_r$ et $g(x) = \sup\limits_{j\geq 1} \max\limits_{r\in D_j} q_r(x)$.
Avec (4.9), (4.10) et le lemme 4.1 on aura

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) = g(s_n^{-1}\xi_n) + o_P(1)$$

et la convergence de $s_n^{-1}DI(n,\alpha)$ vers $DI(\alpha)$ est donnée par le théorème 4.4.

4.2.2 Consistance de $DI(n,\alpha)$

Soit $(H'_A) : X_i = \begin{cases} m_c + X'_i & \text{si i} \in I_n = \{k^*+1, ..., m^*\} \\ X'_i & \text{si i} \in I_n^c = \{1, ..., n\} \setminus I_n \end{cases}$

où $m_c \neq 0$ et X'_i satisfait (H'_0).

La consistance de rejeter (H'_0) contre (H'_A) pour des grandes valeurs de $DI(n,\alpha)$ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 4.5 : *On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}|m_c| = +\infty, \tag{4.11}$$

où $h_n = min\{\frac{l^*}{n},\ 1-\frac{l^*}{n}\}$, *alors sous* (H'_A)

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{P} +\infty.$$

Preuve : **1**^{er} **cas** : $\frac{l^*}{n} \leq \frac{1}{2}$ $(h_n = \frac{l^*}{n})$.
On pose $S'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X'_i$ et on introduit les cardinaux
$a_{n,r} = |I_n \cap]nr^-, nr]|$ et $b_{n,r} = |I_n \cap]nr, nr^+]|$.

On peut écrire

$$\lambda_r(S_n) = \lambda_r(S'_n) + \frac{1}{2}(a_{n,r} - b_{n,r})m_c.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} |\lambda_r(S_n)| &= |\frac{1}{2}(a_{n,r} - b_{n,r})m_c + \lambda_r(S'_n)| \\ &\geq \frac{1}{2}|a_{n,r} - b_{n,r}||m_c| - |\lambda_r(S'_n)|. \end{aligned}$$

D'après Račkauskas et Suquet [35], on a

$$\max_{1\leq 2^j\leq n} \max_{r\in D_j} \frac{|a_{n,r} - b_{n,r}|}{2^{-j\alpha}} \geq \frac{l^*}{2(\frac{4l^*}{n})^\alpha} = \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+1}(\frac{l^*}{n})^\alpha}.$$

En utilisant l'inégalité

$$\max(f-g) \geq \max f - \max g,\ \forall f,\ g \geq 0,$$

on aura

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+2}(\frac{l^*}{n})^\alpha}|m_c| - DI'(n,\alpha).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} s_n^{-1}DI(n,\alpha) &\geq s_n^{-1}\frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+2}(\frac{l^*}{n})^\alpha}|m_c| - s_n^{-1}DI'(n,\alpha) \\ &= \frac{ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}}{2^{2\alpha+2}}|m_c| - s_n^{-1}DI'(n,\alpha). \end{aligned}$$

Par le théorème 4.3, $s_n^{-1}DI'(n,\alpha)$ est stochastiquement borné et d'après (4.11), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Par suite

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P} +\infty$$

2ème **cas :** $\frac{l^*}{n} > \frac{1}{2}$ $(h_n = 1 - \frac{l^*}{n})$

a) Si $t_{k^*} \geq 1 - t_{m^*}$ $\quad (t_{k^*} \geq (1-\frac{l^*}{n})/2)$

Il existe un unique j tel que $0 < 2^{-j-1} < t_{k^*} \leq 2^{-j} \leq 1/2 < t_{m^*}$.

On pose $r_0 = 2^{-j} \in D_j$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\lambda_{r_0}(S_n) &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} X_k - \sum_{nr \leq k \leq nr_0^+} X_k \\ &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nt_{k_*}} X_k' + \sum_{nt_{k_*} \leq k \leq nr_0} (X_k' + m_c) - \sum_{nr_0 \leq k \leq nr_0^+} (X_k' + m_c) \\ &= [(nr_0 - nr_0^-) + (nr_0^- - nt_{k_*}) - (nr_0^+ - nr_0)]m_c + 2\lambda_{r_0}(S_n') \\ &= (nr_0^- - nt_{k_*})m_c + 2\lambda_{r_0}(S_n'). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |\lambda_{r_0}(S_n)| &\geq \frac{1}{2}\left|nr_0^- - nt_{k_*}\right| \ |m_c| - \left|\lambda_{r_0}(S_n')\right| \\ &\geq \frac{1}{4}n(1-\frac{l^*}{n})\,|m_c| - \left|\lambda_{r_0}(S_n')\right|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\max_{1\leq 2^j \leq n} 2^{j\alpha} \max_{r\in D_j} \ |\lambda_r(S_n)| \geq \frac{1}{4}n(1-\frac{l^*}{n})\,|m_c| \max_{1\leq 2^j\leq n} 2^{j\alpha} - \max_{1\leq 2^j \leq n} 2^{j\alpha} \max_{r\in D_j}\left|\lambda_r(S_n')\right|$$

et

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}n\ (1-\frac{l^*}{n})\ n^{\alpha}\,|m_c| - DI^{'}(n,\alpha).$$

Par suite

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}n\ (1-\frac{l^*}{n})(1-\frac{l^*}{n})^{\alpha}\,|m_c| - DI^{'}(n,\alpha).$$

Finalement

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}n\ s_n^{-1}h_n^{1-\alpha}\,|m_c| - s_n^{-1}DI^{'}(n,\alpha).$$

b) Si $t_{k^*} < 1 -\ t_{m^*}$ $\quad (1-t_{m^*} \geq (1-\frac{l^*}{n})/2)$

On fixe j par $1-2^{-j} \leq t_{m^*} < 1-2^{-j-1}$ et on choisit $r_0 = 1-2^{-j} \in D_j$, on a alors

$$\begin{aligned}
2\lambda_{r_0}(S_n) &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} X_k - \sum_{nr_0 \leq k \leq nr_0^+} X_k \\
&= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} (X_k^{'} + m_c) - \sum_{nr_0 \leq k \leq nt_{m^*}} (X_k^{'} + m_c) - \sum_{nt_{m^*} \leq k \leq nr_0^+} X_k^{'} \\
&= (nr_0 - nr_0^- - nt_{m_*} + nr_0)\ m_c + 2\lambda_{r_0}(S_n^{'}) \\
&= n(1-t_{m^*})m_c + 2\lambda_{r_0}(S_n^{'}).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\lambda_{r_0}(S_n)| &\geq \frac{1}{2}n(1-t_{m^*})\ \ |m_c| - \left|\lambda_{r_0}(S_n^{'})\right| \\
&\geq \frac{n}{4}(1-\frac{l^*}{n})\,|m_c| - \left|\lambda_{r_0}(S_n^{'})\right|.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}n\ (1-\frac{l^*}{n})^{1-\alpha}\ \ |m_c| - DI^{'}(n,\alpha).$$

Par suite

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}n\ s_n^{-1}h_n^{1-\alpha}\,|m_c| - s_n^{-1}DI^{'}(n,\alpha).$$

Par le théorème 4.3, $s_n^{-1}DI'(n,\alpha)$ est stochastiquement borné et d'après (4.11), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Par suite

$$s_n^{-1}DI(n,\alpha) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P} +\infty$$

4.2.3 Exemple d'application

Comme exemple d'application du théorème 4.3 dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, Račkauskas et Suquet [36] ont considéré la détection de rupture de fonction de répartition, de fonction caractéristique et de matrice de covariance.
Notre objectif est de donner une application du théorème 4.3 pour la détection de rupture de la variance dans le cas d'une suite non stationnaire de variables aléatoires indépendantes.

Test de rupture de Variance

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires de variances $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, ...,\ \sigma_n^2$ respectivement. On veut tester l'hypothèse nulle
$(H_0) : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2 = \widetilde{\sigma}^2,$
contre l'hypothèse alternative
$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n$ tels que
$\sigma_1^2 = ... = \sigma_{k^*}^2 = \sigma_{m^*+1}^2 = ... = \sigma_n^2,\ \sigma_{k^*+1}^2 = ... = \sigma_{m^*}^2$ et $\sigma_{k^*}^2 \neq \sigma_{k^*+1}^2$.

On définit alors

$$V_n(s) = \sum_{1\le k\le ns} (X_k^2 - \widetilde{\sigma}^2), \quad s \in [0,1].$$

On considère la statistique de test

$$\nu(n,\alpha) = \max_{1\le 2^j\le n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(V_n)| \,.$$

En notant $\Psi(u) = P(|\lambda_r(W)| \le u)$ et $\bar{s}_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}X_i^4 - \widetilde{\sigma}^4)$, on obtient sous l'hypothèse (H_0') le résultat suivant.

Théorème 4.6 : *Supposons qu'il existe* $\gamma > 4,\ m > 0$ *et* $M > 0$ *telles que* $\tilde{\sigma}^4 < m \leq \mathbb{E}|X_j|^4$ *et* $\mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < +\infty,\ \forall j > 1.$

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P\{\bar{s}_n^{-1}\nu(n,\alpha) \leq u\} = \Psi_\alpha(u),\ \forall u > 0,$$

où $\Psi_\alpha(u) = \prod_{j=1}^{\infty}[\Psi(2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}$.

Preuve : On utilise le théorème 4.3 avec les variables aléatoires $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ définies par $Y_i = X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2,\ i = 1, ..., n.$

On a

$$\mathbb{E}|Y_i|^2 = \mathbb{E}|X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2|^2 = \mathbb{E}|X_i|^4 - 2\widetilde{\sigma}^2\mathbb{E}|X_i|^2 + \widetilde{\sigma}^4.$$

Sous (H_0'), les X_i sont centrées, donc $\mathbb{E}|X_i|^2 = \widetilde{\sigma}^2$ sous (H_0).

Ceci implique que

$$\mathbb{E}|Y_i|^2 = \mathbb{E}|X_i|^4 - \widetilde{\sigma}^4 \geq m - \widetilde{\sigma}^4,$$

où $m - \widetilde{\sigma}^4 > 0$.

On a également

$$\mathbb{E}|Y_i|^{\frac{\gamma}{2}} = \mathbb{E}|X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2|^{\frac{\gamma}{2}} \leq \mathbb{E}(|X_i|^2 + \widetilde{\sigma}^2)^{\frac{\gamma}{2}}$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\mathbb{E}(|X_i|^2 + \widetilde{\sigma}^2)^{\frac{\gamma}{2}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2}-1}[\mathbb{E}|X_i|^\gamma + \widetilde{\sigma}^\gamma] \leq 2^{\frac{\gamma}{2}-1}[M + \widetilde{\sigma}^\gamma].$$

D'où

$$\mathbb{E}|Y_i|^{\frac{\gamma}{2}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2}-1}[M + \widetilde{\sigma}^\gamma] < +\infty,\ \forall i \geq 1.$$

Les conditions du théorème 4.3 sont ainsi vérifiées pour la suite $(Y_i)_{i\geq 1}$ avec $\frac{\gamma}{2} > 2$, $m - \widetilde{\sigma}^4 > 0$ et $2^{\frac{\gamma}{2}-1}[M + \widetilde{\sigma}^\gamma] > 0$. Par suite $\forall \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$, on a

$$\bar{s}_n^{-1}\nu(n,\alpha) \underset{n\longrightarrow\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} DI(\alpha).$$

D'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\{\bar{s}_n^{-1}\nu(n,\alpha) \leq u\} = P\{DI(\alpha) \leq u\},\ \forall u > 0$$

et

$$P\{DI(\alpha) \leq u\} = P\{\sup_{j\geq 1}\frac{1}{2^{-j\alpha}}\max_{r\in D_j}|\lambda_r(W)| \leq u\}.$$

Puisque les variables aléatoires $\lambda_r(W)$ sont i.i.d., alors

$$\begin{aligned}
P\{\sup_{j\geq 1}\frac{1}{2^{-j\alpha}}\max_{r\in D_j}|\lambda_r(W)| \leq u\} &= \prod_{j=1}^{\infty} P(\frac{1}{2^{-j\alpha}}\max_{r\in D_j}|\lambda_r(W)| \leq u)\\
&= \prod_{j=1}^{\infty} P(\max_{r\in D_j}|\lambda_r(W)| \leq 2^{j\alpha}u)\\
&= \prod_{j=1}^{\infty} [P(|\lambda_r(W)| \leq 2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}\\
&= \prod_{j=1}^{\infty} [\Psi(2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}.
\end{aligned}$$

En posant $\Psi_\alpha(u) = \prod_{j=1}^{\infty}[\Psi(2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}$, on aura

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\{\bar{s}_n^{-1}\nu(n,\alpha) \leq u\} = \Psi_\alpha(u),\ \forall u > 0.$$

Si on note $\overline{\sigma}^2$ la variance des variables aléatoires durant l'épidémie, on a le résultat de consistance suivant.

Théorème 4.7 : *Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty} n\bar{s}_n^{-1}h_n^{1-\alpha}|\bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2| = +\infty, \tag{4.12}$$

où $h_n = min\{\frac{l^*}{n}, 1 - \frac{l^*}{n}\}$. *Alors sous* (H'_A), *on a*

$$\bar{s}_n^{-1}\nu(n,\alpha) \underset{n\longrightarrow\infty}{\xrightarrow{P}} +\infty.$$

Preuve : On va vérifier les conditions du théorème 4.5 pour les variables aléatoires $Y_i = X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2$ et $m_c = \bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2$. On a

$$Y_i = X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2 = \begin{cases} (\bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2) + X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n = \{k^* + 1, ..., m^*\}, \\ X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c = \{1, ..., n\} \setminus I_n \ . \end{cases}$$

On pose

$$Y_i' = \begin{cases} X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n, \\ X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c. \end{cases}$$

On aura alors

$$Y_i = \begin{cases} m_c + Y_i' & \text{si } i \in I_n \\ Y_i' & \text{si } i \in I_n^c \end{cases}$$

Sous (H_A'), $m_c = \bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2 \neq 0$ et les Y_i' sont indépendantes et centrées (donc vérifient l'hypothèse (H_0')). Ceci implique que les Y_i sont sous l'hypothèse (H_A').
D'après le théorème 4.5, on aura

$$\bar{s}_n^{-1} \nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{P} +\infty.$$

4.3 Cas dépendant stationnaire (α-mélange)

4.3.1 Définitions

On rappelle d'abord la définition du $\alpha-$mélange.

Définition 4.1 : *On appelle coefficient de mélange fort (α-mélange) entre deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ le nombre*

$$\alpha(\mathcal{A}, \, \mathcal{B}) = \underset{(A,B) \in (\mathcal{A}, \, \mathcal{B})}{sup} \left| P(A \cap B) - P(A)P(B) \right|.$$

Définition 4.2 : *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. On définit le coefficient de mélange fort α_n par*

$$\alpha_n = sup\{\alpha(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{n+k}^{\infty}), \ k \in \mathbb{N}^*\},$$

où $\mathcal{F}_j^l$ *désigne la tribu engendrée par les variables* $(X_i,\, j \leq i \leq l)$.

On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ *est* α*-mélangeante si* $\alpha_n \longrightarrow 0$ *lorsque* n *tend vers* ∞.

4.3.2 Convergence de $DI(n,\alpha)$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Sous l'hypothèse
(H_0') : La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est strictement stationnaire, de moyenne 0 et $\alpha-$mélangeante.
On a le résultat suivant

Théorème 4.8 : *Supposons qu'il existe* $\gamma > 2$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que*
$\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1}(\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty$.
Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$, *on a*

$$\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} DI(\alpha),$$

où $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2) + 2\sum\limits_{j=2}^{\infty}cov(X_1,X_j) < +\infty$.

La preuve du théorème 4.8 est basée sur les lemmes 4.1 et 4.2 et le résultat suivant

Théorème 4.9 (Hamadouche [18]) : *Soit* $(X_n)_n$ *une suite strictement stationnaire et* $\alpha-$*mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe* $\gamma > 2$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que*

$$\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1}(\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty.$$

Alors les lois de $\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\xi_n$, *définies en (4.1) convergent étroitement vers la mesure de Wiener* P_W *dans* H_α^0, *pour tout* $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Preuve du théorème 4.8 : On note que

$$DI(n,\alpha) = \max_{1\leq 2^j\leq n}\frac{1}{2^{-j\alpha}}\max_{r\in D_j}|\lambda_r(S_{n.})|\,, \tag{4.13}$$

où $(S_{n.})$ est le processus discontinu $(S(nt),\ 0 \leq t \leq 1)$ défini par

$$S(nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k.$$

Ce processus peut s'écrire aussi $S(nt) = \xi_n(t) - (nt - [nt])X_{[nt]+1}$, pour lequel $|\lambda_r(S_{n.}) - \lambda_r(\xi_n)| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n} |X_i|$.

En utilisant cette estimation dans (4.13), on obtient

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) = g_n(\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n) + Z_n, \tag{4.14}$$

où $g_n(x) = \max_{1\leq 2^j \leq n} \max_{r\in D_j} \frac{|\lambda_r(x)|}{2^{-j\alpha}}$, $x \in H_\alpha^0$ et les Z_n vérifiant

$$|Z_n| \leq \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{n})^\alpha} \max_{1\leq i\leq n} |X_i| = \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|. \tag{4.15}$$

On a

$$P(\frac{1}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1\leq i\leq n} |X_i| > \varepsilon) = P(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > \varepsilon\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}) \leq \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > \varepsilon\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

D'où

$$P(\frac{1}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1\leq i\leq n} |X_i| > \varepsilon) \leq nP(|X_1| > \varepsilon\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

On a

$$\forall p, \quad t^p P(|X_1| > t) \leq t^p \frac{\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\epsilon}}{t^{\gamma+\varepsilon}} = t^{p-\gamma-\varepsilon}\, \mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\epsilon}.$$

Comme $\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\epsilon} < \infty$, alors pour $p = (\frac{1}{2} - \alpha)^{-1}$, $t^p P(|X_1| > t)$ tend vers 0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$. Ce qui veut dire que $P(|X_1| > t) = o(t^{-p})$. Ainsi on a la convergence en probabilité vers 0 de $\max_{1\leq i\leq n} \frac{|X_i|}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.
Les fonctionnelles $q_r(x) = \frac{\lambda_r(x)}{(r-r^-)^\alpha}$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 avec la même constante $C = 1$ et on a de même pour $g_n = \max_{1\leq 2^j\leq n} \max_{r\in D_j} q_r$ et $g(x) = \sup_{j\geq 1} \max_{r\in D_j} q_r(x)$.
Avec (4.14), (4.15) et le lemme 4.1 on aura

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) = g(\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n) + o_P(1)$$

et la convergence de $\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha)$ vers $DI(\alpha)$ est donnée par le théorème 4.9.

4.3.3 Consistance de $DI(n,\alpha)$

Soit $(H'_A) : X_k = \begin{cases} m_c + X'_k & \text{si k} \in I_n = \{k^*+1,...,m^*\} \\ X'_k & \text{si k} \in I_n^c = \{1,...,n\} \setminus I_n \end{cases}$

où $m_c \neq 0$ et X'_k satisfait (H'_0).

La consistance de rejeter (H'_0) contre (H'_A) pour des grandes valeurs de $DI(n,\alpha)$ est donnée par le résultat suivant :

Théorème 4.10 : *On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha}|m_c| = \infty, \tag{4.16}$$

où $h_n = min\{\frac{l^*}{n},\ 1-\frac{l^*}{n}\}$, *alors sous* (H'_A)

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{P} +\infty.$$

Preuve : D'après la preuve du théorème 4.5, on a
1er cas : $\frac{l^*}{n} \leq \frac{1}{2}$ $(h_n = \frac{l^*}{n})$.

$$DI(n,\alpha) \geq \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+2}(\frac{l^*}{n})^{\alpha}}|m_c| - DI'(n,\alpha).$$

Par conséquent

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}}h_n^{1-\alpha}}{2^{2\alpha+2}}|m_c| - n^{-\frac{1}{2}}DI'(n,\alpha).$$

Par le théorème 4.10, $n^{-\frac{1}{2}}DI'(n,\alpha)$ est stochastiquement bornée et d'après (4.16), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{P} +\infty.$$

2ème cas : $\frac{l^*}{n} > \frac{1}{2}$ $(h_n = 1-\frac{l^*}{n})$
a) Si $t_{k^*} \geq 1 - t_{m^*}$ $\quad (t_{k^*} \geq (1-\frac{l^*}{n})/2)$,

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4}n^{\frac{1}{2}}h_n^{1-\alpha}\,|m_c| - n^{-\frac{1}{2}}DI'(n,\alpha).$$

b) Si $t_{k^*} < 1-\ t_{m^*} \quad (1 - t_{m^*} \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2)$,
$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \geq \frac{1}{4} n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha} \left| m_c \right| - n^{-\frac{1}{2}} DI'(n,\alpha).$$
Par le théorème 4.8, $n^{-\frac{1}{2}} DI'(n,\alpha)$ est stochastiquement borné et d'après (4.16), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n,\alpha) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} +\infty.$$

4.3.4 Exemple d'application

Test de rupture de Variance

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires de variances $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, ...,\ \sigma_n^2$ respectivement. On veut tester l'hypothèse nulle

$(H_0) : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2 = \widetilde{\sigma}^2$,

contre l'hypothèse alternative

$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n$ tels que

$\sigma_1^2 = ... = \sigma_{k^*}^2 = \sigma_{m^*+1}^2 = ... = \sigma_n^2,\ \sigma_{k^*+1}^2 = ... = \sigma_{m^*}^2$ et $\sigma_{k^*}^2 \neq \sigma_{k^*+1}^2$.

On définit alors
$$V_n(s) = \sum_{1 \leq k \leq ns} (X_k^2 - \widetilde{\sigma}^2),\ \ s \in [0,1].$$
On considère la statistique de test
$$\nu(n,\alpha) = \max_{1 \leq 2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} \left| \lambda_r(V_n) \right|.$$
En notant $\Psi(u) = P(|\lambda_r(W)| \leq u)$, on obtient sous l'hypothèse (H_0') le résultat suivant

Théorème 4.11 : *Supposons qu'il existe $\gamma > 4$ et $\epsilon > 0$ tels que*
$$\mathbb{E} \left| X_1 \right|^{\gamma+\epsilon} < +\infty \ et \ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{4}-1} (\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty.$$
Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$, on a
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P\{\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \nu(n,\alpha) \leq u\} = \Psi_\alpha(u),\ \forall u > 0,\ \text{où}$$

$\Psi_\alpha(u) = \prod_{j=1}^{\infty}[\Psi(2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}$.

Preuve : On utilise le théorème 4.8 avec les variables aléatoires $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ définies par $Y_k = X_k^2 - \widetilde{\sigma}^2,\ k = 1, ..., n.$

Sous (H_0'), la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est strictement stationnaire et $\alpha-$mélangeante de coefficient de mélange $\widehat{\alpha}_n \leq \alpha_n$.

Pour $\gamma > 4$ et $\epsilon > 0$

$$|Y_1|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} = \left|X_1^2 - \widetilde{\sigma}^2\right|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq (|X_1^2| + \widetilde{\sigma}^2)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}}.$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$(|X_1^2| + \widetilde{\sigma}^2)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}-1}[|X_1|^{\gamma+\epsilon} + \widetilde{\sigma}^{\gamma+\epsilon}],$$

d'où

$$\mathbb{E}|Y_1|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}-1}[\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} + \widetilde{\sigma}^{\gamma+\epsilon}]$$

Puisque $\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty$, alors $\mathbb{E}\,|Y_1|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} < +\infty$.

On a également

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{\frac{\gamma}{2}}{2}-1}(\widehat{\alpha}_n)^{\frac{\frac{\epsilon}{2}}{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{\frac{\gamma}{4}-1}(\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty.$$

Les conditions du théorème 4.8 sont ainsi vérifiées pour la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ avec $\gamma > 4$ et $\epsilon > 0$. Par suite pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$ et $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma+\epsilon}$ c.a.d. pour tout $\alpha < \min(\frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma},\ \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma+\epsilon}) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$, on a

$$\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\nu(n,\alpha) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha),$$

D'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\{\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\nu(n,\alpha) \leq u\} = P\{DI(\alpha) \leq u\},\ \forall u > 0$$

et

$$P\{DI(\alpha) \leq u\} = P\{\sup_{j\geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(W)| \leq u\}.$$

Puisque les variables aléatoires $\lambda_r(W)$ sont i.i.d., on a

$$\begin{aligned} P\{\sup_{j\geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(W)| \leq u\} &= \prod_{j=1}^{\infty} P(\frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(W)| \leq u) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} P(\max_{r\in D_j} |\lambda_r(W)| \leq 2^{j\alpha} u) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} [P(|\lambda_r(W)| \leq 2^{j\alpha} u)]^{2^{j-1}} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} [\Psi(2^{j\alpha} u)]^{2^{j-1}}. \end{aligned}$$

En posant $\Psi_\alpha(u) = \prod_{j=1}^{\infty} [\Psi(2^{j\alpha} u)]^{2^{j-1}}$, on aura

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\{\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \nu(n,\alpha) \leq u\} = \Psi_\alpha(u),\ \forall u > 0.$$

Si on note $\overline{\sigma}^2$ la variance des variables aléatoires durant l'épidémie, on a le résultat de consistance suivant.

Théorème 4.12 : *Soit* $u_n = n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha}$, *on suppose que sous* (H_A),

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n |\overline{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2| = +\infty. \tag{4.17}$$

Alors

$$n^{-\frac{1}{2}} \nu(n,\alpha) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{P} +\infty.$$

Preuve : On va vérifier les conditions du théorème 4.10 pour les variables aléatoires $Y_i = X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2$.

La condition (4.16) est satisfaite en posant $m_c = \bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2$.

On a

$$Y_i = X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2 = \begin{cases} (\bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2) + X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n = \{k^* + 1, ..., m^*\} \\ X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c = \{1, ..., n\} \setminus I_n \end{cases}$$

On pose $Y_i' = \begin{cases} X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n \\ X_i^2 - \widetilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c \end{cases}$

On aura alors

$$Y_i = \begin{cases} m_c + Y_i' & \text{si } i \in I_n \\ Y_i' & \text{si } i \in I_n^c \end{cases}$$

Sous (H_A), $m_c = \bar{\sigma}^2 - \widetilde{\sigma}^2 \neq 0$ et les Y_i' sont strictement stationnaires, de moyenne 0 et $\widehat{\alpha}-$mélangeantes ($\widehat{\alpha} < \alpha$) (donc vérifient l'hypothèse (H_0')). D'après le théorème 4.10, on a

$$n^{-\frac{1}{2}} \nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{P} +\infty.$$

4.4 Exemple numérique

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes, de loi $N(\delta_i, 1)$, $\delta_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. On veut tester au seuil $\alpha = 0.05$ l'hypothèse nulle

$(H_0) : \delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_n = 0,$

contre l'hypothèse alternative

$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n$ tels que

$\delta_1 = ... = \delta_{k^*} = \delta_{m^*+1} = ... = \delta_n = 0,$

$\delta_{k^*+1} = ... = \delta_{m^*} = \delta \neq 0.$

On simule 1000 échantillons de taille n de loi normale $N(0, 1)$.

Le tableau suivant donne les valeurs de la statistique $T_n = \sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, a)$ pour quelques valeurs de n et a.

La région critique du test est

$$W = \{(x_1, ..., x_n) \backslash T_n(x_1, ..., x_n) > c\}.$$

	$T_n = \sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, a)$		
n	$a = 0.1$ ($c = 1.12$)	$a = 0.3$ (c=1.42)	$a = 0.4$ (c=1.76)
10	0.6646	0.8783	1.0269
30	0.6893	0.9671	1.1571
50	0.6992	0.9888	1.2550
100	0.6926	1.0060	1.3148
500	0.6817	1.0040	1.3861
1000	0.6877	1.0073	1.4006
10000	0.6972	1.0245	1.4293

Table 5.1 : Valeurs de T_n sous (H_0).

c est la valeur critique donnée par la table de la loi limite de T_n (Račkauskas, Suquet [37]) au seuil $\alpha = 0.05$.

Si on simule 1000 échantillons de loi normale $N(\delta, 1)$ de taille $n = 100$ sous (H_A), on obtient les valeurs de T_n avec différentes valeurs de a, δ et $l^* = m^* - k^*$.

		$T_n = \sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n,a)$		
l^*	δ	$a = 0.1$ ($c = 1.12$)	$a = 0.3$ (c=1.42)	$a = 0.4$ (c=1.76)
5	0.5	0.7046	1.0320	1.3319
	1	0.7701	1.0905	1.4057
	1.5	0.8527	1.1962	1.5025
	2	0.9585	1.3296	1.6587
	2.5	1.1089	1.5232	1.8613
	3	1.2307	.	.
10	0.5	0.7412	1.0660	1.3493
	1	0.9059	1.2320	1.5011
	1.5	1.1258	1.4960	1.7906
15	0.5	0.8135	1.1301	1.3909
	1	1.1351	1.4454	1.7039
	1.5	.	.	2.2011

Table 5.2 : Valeurs de T_n sous (H_A).

On voit bien que la statistique T_n détecte même des courtes épidémies et lorsque l^* augmente, elle détecte plus rapidement cette épidémie (δ plus petit).

Afin de comparer les deux statistiques T_n et $n^{-\frac{1}{2}}Q$, où Q est la statistique de Levine et Kline, on simule 1000 échantillons de taille $n = 60$ de loi normale $N(\delta, 1)$. Le tableau suivant donne les valeurs de T_n pour $a = 0.25$ et celles de $n^{-\frac{1}{2}}Q$.

l^*	δ	$T_n = \sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n,a)$ $c = 1.32$	$n^{-\frac{1}{2}}Q$ $c = 1.50$
1	6	1.1963	1.3476
	7	1.3374	1.4294
	8	.	1.5416
2	3	1.2147	1.3328
	3.5	1.3292	1.4265
	4	.	1.4930
	4.5	.	1.5881
5	0.5	0.9220	1.1419
	1	1.0296	1.2581
	1.5	1.1167	1.4400
	2	1.3822	1.6177
8	0.5	0.9632	1.1740
	1	1.1357	1.4183
	1.5	1.3836	1.7189
10	0.5	0.9993	1.2142
	1	1.2653	1.5146
	1.5	1.6332	.
20	0.5	1.0062	1.3666
	1	1.3015	2.0021
	1.5	1.6912	.
30	0.5	1.0360	1.3692
	1	1.3670	1.9807

Table 5.3 : Comparaison entre T_n et $n^{-\frac{1}{2}}Q$.

On remarque qu'il est plus intéressant d'utiliser la statistique T_n que la statistique $n^{-\frac{1}{2}}Q$ pour de courtes épidémies ($l^* \leq n^{\frac{1}{2}} \simeq 8$).

Conclusion générale

Le travail de cette thèse a porté sur l'extension des résultats de convergence du processus empirique établis par Hamadouche [17] et Hamadouche et Suquet [20] aux suites non stationnaires de variables aléatoires sur les deux espaces de Hölder H_α^0 et $C_0^{\alpha,o}$ et une application statistique sur la détection de rupture épidémique de la variance pour des variables aléatoires dépendantes ou indépendantes.

Pour cela, nous avons introduit d'abord les deux espaces de Hölder H_α^0 et $C_0^{\alpha,o}$ et nous avons donné les résultats essentiels de convergence faible et d'équitension dans ces espaces. Ces derniers résultats sont ensuite utilisés pour montrer la convergence höldérienne du processus empirique uniforme lissé et ce avec deux types de lissage (lissage polygonal et lissage par convolution).

Notre contribution dans ce travail est d'abord donnée au chapitre 3 où les résultats précédents de convergence du processus empirique lissé par convolution sont étendus au cas d'une suite non stationnaire de variables aléatoires indépendantes et ensuite dans le chapitre 4 où on donne une application statistique pour la détection de rupture épidémique de la variance dans le cas des variables aléatoires dépendantes ou indépendantes.

Comme perspectives de ce travail, on peut s'intéresser à l'extension des résultats de convergence du processus quantile dans H_α^0 et celle du processus empirique dans $C_0^{\alpha,o}$ au cas de variables aléatoires dépendantes (dépendance faible ou courte mémoire et dépendance forte ou longue mémoire).

Ensuite on peut essayer de proposer d'autres statistiques de test pour la détection de rupture épidémique de la variance dans les divers cas de dépendance ou pour la détection de rupture épidémique d'autres paramètres statistiques (moyenne, mode, quantile,...).

On peut s'intéresser aussi à la recherche d'estimateurs pour ces paramètres (caractéristiques) statistiques du modèle considéré.

Enfin des applications numériques de ces applications statistiques citées dessus sur des données réelles peuvent être envisagées.

Annexe A
Convergence de Processus stochastiques

A.1 Convergence de processus dans les espaces métriques

Soit E un espace métrique muni d'une distance δ, $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne et P une loi de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

Définition A.1 : *Soient P_n, P des mesures de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.*
On dit que la suite $\{P_n\}$ des lois de probabilité converge faiblement vers la loi de probabilité P si pour toute fonction réelle, continue et bornée f sur E, on a

$$\int_E f dP_n \longrightarrow \int_E f dP.$$

On note $P_n \Longrightarrow P$.

Soit X une application de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ dans un espace métrique E. Si X est mesurable, on dit que X est un élément aléatoire de E.

Définition A.2 : *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ d'éléments aléatoires de E, converge en loi vers l'élément aléatoire X dans E, si la loi de probabilité P_n de X_n converge faiblement vers la loi de probabilité P de X ($P_n \Longrightarrow P$) dans E et on écrit $X_n \xrightarrow[E]{\mathcal{L}} X$.*

Théorème A.1 (Billingsley [01]) : *Supposons que E est séparable et les éléments aléatoires X_n et Y_n ont le même domaine de définition. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $\delta(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$, alors $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Théorème A.2 (Billingsley [01]) : *Soit f une application mesurable de E dans F dont l'ensemble des points de discontinuité est noté par D_f.*
Si $P_n \Longrightarrow P$ et $P(D_f) = 0$, alors $P_n f^{-1} \longrightarrow P f^{-1}$.

Soit X un élément aléatoire de E et $f(X)$ un élément aléatoire de F. Du théorème précédent on déduit.

Corollaire A.1 (Billingsley [01]) : *Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $P(X \in D_f) = 0$, alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.*

Corollaire A.2 (Billingsley [01]) : *Si $X_n \xrightarrow{P} a$ et si f est continue en a, alors*
$f(X_n) \xrightarrow{P} f(a)$.

On donne dans ce qui suit quelques résultats de relative compacité et d'équitension dans les espaces métriques.

Définition A.3 : *La loi de probabilité P définie sur $(E, \mathcal{E})$ est équitendue, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que $P(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. En d'autres termes, P est équitendue si et seulement si elle admet un support $\sigma-$compact.*

Soit Π une famille de lois de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$. On dit que Π est équitendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $P(K) > 1 - \varepsilon$, pour tout $P \in \Pi$.

La famille Π est dite relativement compacte si de toute suite d'éléments de Π, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Théorème A.3 (Prohorov[33]) : *Si la famille Π des lois de probabilité est équitendue, alors elle est relativement compacte.*

Théorème A.4 (Réciproque du dernier théorème) : *Supposons l'espace E séparable et complet. Si Π est relativement compacte, alors elle est équitendue.*

A.2. Convergence de processus dans $D[0,1]$

A.2.1. Définitions et notations

On note $D = D[0,1]$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, continues à droite et admettant une limite à gauche. Autrement dit,

i) Pour tout t tel que $0 \leq t < 1$, on a $f(t_+) = \lim\limits_{s \searrow t} f(s)$ existe et $f(t_+) = f(t)$.

ii) Pour tout t tel que $0 < t \leq 1$, on a $f(t_-) = \lim\limits_{s \nearrow t} f(s)$ existe.

Définition A.4 : *On définit le module de continuité d'une fonction f de D par*

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1-\delta} w_f[t, t+\delta],$$

où $\omega_f(T_0) = \sup\limits_{s,t \in T_0} |f(t) - f(s)|\,, T_0 \subset [0,1]$.

On définit un autre module de continuité w'_f, par

$$\omega'_f(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{0 < i \leq r} w_f[t_{i-1}, t_i), \quad 0 < \delta < 1,$$

où l'infinimum est pris sur toutes les subdivisions $\{t_i\}$ vérifiant

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < ... < t_r = 1. \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \quad i = 1, 2, ..., r. \end{cases}$$

$$\omega'_f(\delta) \leq \omega_f(2\delta), \ \delta < \frac{1}{2}.$$

Soit Λ la classe de fonctions continues de $[0,1]$ dans lui même, strictement croissantes. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$.

Soit ε pour lequel elle existe une fonction $\lambda \in \Lambda$ telle que

a) $\|\lambda\| \leq \varepsilon$, avec $\|\lambda\| = \sup\limits_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t-s} \right|$.

b) $\sup_t |f(t) - g(\lambda t)| \leq \varepsilon,\ f, g \in D.$

Définition A.5 : *On définit la distance d_0 entre f et g de $D[0,1]$, vérifiant les conditions a) et b) par*

$$d_0(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0, \|\lambda\| < \varepsilon \wedge \sup_t |f(t) - g(\lambda t)| < \varepsilon\}.$$

Cette distance fait de $D[0,1]$ un espace séparable et complet et elle définit la topologie de Skorohod.

A.2.2 Convergence faible et équitension

Soient $t_1, ..., t_k$ des éléments de $[0,1]$ et π l'application (projection)

$$\begin{array}{cccc} \pi_{t_1,\dots,t_k}: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & f & \longrightarrow & (f(t_1), ..., f(t_k)) \end{array}$$

Soit P une loi de probabilité sur $(D, \mathcal{D})$. On note par T_P l'ensemble des points $t \in [0,1]$ pour lesquels la projection π_t est continue sauf aux points appartenant à un ensemble de mesure nulle.

Si $0 < t < 1$ alors $t \in T_P$ si et seulement si $P(S_t) = 0$ où $S_t = \{f : f(t) \neq f(t_-)\}$.

Il est clair que 0 et 1 appartiennent à T_P.

Les résultats essentiels de convergence faible et d'équitension sont

Théorème A.5 (Billingsley [01]) : *Soit* (P_n) une suite de lois de probabilité sur $(D, \mathcal{D})$ telle que

i) La suite (P_n) est équitendue.

ii) $P_n \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} \Longrightarrow P \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k},\ \forall t_1, ..., t_k \in T_P.$

Alors

$$P_n \Rightarrow P$$

Théorème A.6 (Billingsley [01]) : *La suite de lois* (P_n) *est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées*

i) Pour tout $\eta > 0$, *il existe* a *tel que*

$$P_n \left\{ f : \sup_t |f(t)| > a \right\} \leq \eta, \ n \geq 1.$$

ii) Pour tout ε *et* η *positifs, il existe* δ, $0 < \delta < 1$ *et un entier* n_0 *tels que*

$$P_n \left\{ f : \omega'_f(\delta) > \varepsilon \right\} \leq \eta, \ n \geq n_0.$$

A.3. Convergence de processus dans $C[0,1]$

A.3.1. Définitions et notations

On note $C = C[0,1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la topologie uniforme définie par la distance entre deux fonctions comme suit :

$$d(f,g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, \ f, g \in C[0,1].$$

$C[0,1]$ est séparable et complet pour la topologie uniforme.

Définition A.6 : *On définit le module de continuité d'un élément* f de $C[0,1]$ par

$$\omega_f(\delta) = \omega(f,\delta) = \sup_{|t-s|<\delta} |f(t) - f(s)|, \ 0 < \delta \leq 1.$$

A.3.2 Convergence faible et équitension

L'espace $C[0,1]$ muni de la topologie uniforme est un espace séparable et complet, donc la convergence faible sur $C[0,1]$ est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles et à l'équitension de la suite des lois comme le montre le résultat suivant.

Théorème A.7 (Billingsley [01]) : *Soient P_n et P des lois de probabilité sur (C, A). Si les lois fini-dimensionnelles de P_n convergent vers celles de P et la suite (P_n) est équitendue alors $P_n \Longrightarrow P$.*

Théorème A.8 (Billingsley [01]) : *La suite (P_n) est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

i) Pour tout η strictement positif, il existe a tel que

$$P_n\{f : |f(0)| > a\} \leq \eta,\ n \geq 1.$$

ii) Pour tout ε et η positifs, il existe δ, $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tels que

$$P_n\{f : \omega_f(\delta) > \varepsilon\} \leq \eta,\ n \geq n_0.$$

Annexe B
Mouvement brownien et pont brownien

B.1 Introduction

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une grosse particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les petites molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen de Clarkia pulchella (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de diverses autres plantes.

Ce mouvement permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Il est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières.

Norbert Wiener donne une définition mathématique en 1923 en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues réelles. Il étudie, de manière mathématique, la continuité et non-dérivabilité des trajectoires du mouvement brownien. Il définit également l'intégrale de Wiener (l'intégrale par rapport au mouvement brownien).

B.2 Mouvement brownien

B.2.1. Définition du mouvement brownien

D'après le théorème de Kolmogorov, pour μ et σ^2 fixés, il existe un processus gaussien $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= t\mu, \forall t \geq 0. \\ Cov(X_s, X_t) &= \Gamma(s,t) = \sigma^2(s \wedge t), \quad \forall s,t \geq 0. \end{aligned}$$

Tout processus de cette famille est dit mouvement brownien.

En faisant le changement de variable $Y_t = \dfrac{X_t - \mu t}{\sigma}$, on aura

$$\mathbb{E}(Y_t) = 0 \text{ et } \Gamma(s,t) = s \wedge t, \quad \forall s,t \geq 0.$$

Un tel processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est alors appelé mouvement brownien canonique ou standard. On l'appelle aussi processus de Wiener.

B.2.1. Propriétés du mouvement brownien

I. Indépendance et stationnarité des accroissements

Pour $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, on a

$$\begin{gathered} Cov(X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_4} - X_{t_3}) = 0, \\ \mathbb{E}(X_{t_2} - X_{t_1}) = \mu(t_2 - t_1), \\ Var(X_{t_2} - X_{t_1}) = \sigma^2(t_2 - t_1). \end{gathered}$$

En général si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$, les accroissements $(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})_{j=1,2,..,k}$ sont mutuellement indépendants et la loi du k-upplet ne dépend que des écarts $t_{j+1} - t_j$.

On dit que le mouvement brownien est à accroissements indépendants et stationnaires.

II. Continuité des trajectoires

Avec une probabilité égale à 1, X_t est une fonction continue en t, autrement dit presque toute trajectoire du mouvement brownien est continue.

Remarque : *La fonction aléatoire $X(t)$ n'est dérivable en aucun point $t \in \mathbb{R}$.*

III. Continuité p.s. des trajectoires pour une modification de $\mathbf{X}_\mathrm{t}$

Théorème B.1 (Kolmogorov - Čentsov) : *Soit un processus (X_t) sur (Ω, A, P) tel que*

$$\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^\alpha \leq c\,|t-s|^{1+\beta}\,, \quad \forall s, t \in [0, T],$$

avec α et β des constantes positives.

Alors il existe un processus (Y_t) sur (Ω, A, P) tel que

1. $P\{X_t = Y_t\} = 1, \forall t \in [0, T]$.

2. $P\left\{ \sup\limits_{0<|t-s|\leq h} \dfrac{|Y_t - Y_s|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta \right\} = 1,$

où δ est une constante, h une variable aléatoire p.s. positive et $\gamma \in \left]0, \frac{\beta}{\alpha}\right[$.

(Y_t) est appelé modification de (X_t) γ-hölderienne.

Pour le mouvement brownien, il existe une modification dont toutes les trajectoires sont localement γ-hölderiennes pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

Dans la suite, on définira un mouvement brownien qu'on notera W_t comme étant un processus gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires et à trajectoires continues γ-hölderiennes.

IV. Mesurabilité du mouvement brownien

Dans ce qui a précédé, on a supposé seulement que $w \to W_t(w)$ est mesurable à t fixé. Grace à la continuité des trajectoires, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème B.2 : *L'application*

$$\begin{array}{rccc} W: & \Omega \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (w,t) & \longrightarrow & W(w,t) = W_t(w) \end{array}$$

est mesurable pour $(A \otimes B(\mathbb{R}^+), B(\mathbb{R}))$.

V. Invariance du mouvement brownien

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Les processus suivants sont des mouvements browniens.

- $X(t) = |W(t)|$ (mouvement brownien réfléchi à l'origine).
- $Y(t) = \begin{cases} W(t) & \text{si } t \leq T \\ 0 & \text{si } t > T \end{cases}$

où T est le premier instant où $(W(t))$ atteint la valeur 0. $Y(t)$ est appelé mouvement brownien absorbé (à l'origine).

- $Z(t) = W(t) + \mu t$, où μ est un nombre réel.

$Z(t)$ est appelé mouvement brownien à dérive (drift) et μ est le paramètre de dérive.

- $G(t) = e^{W(t)},\ t \geq 0$ (mouvement brownien géométrique).
- $U_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\lambda t)$.
- $V(t) = tW(\frac{1}{t})[1 - 1_{\{0\}}(t)]$.

VI. Propriété de Markov

Le mouvement brownien est un processus de Markov, c.à.d.

$$\forall s \geq t,\ A \in B(\mathbb{R}), P\{W_s \in A/F_t\} = P\{W_s \in A/W_t\},$$

avec $F_t = \sigma(W_\tau,\ \tau \leq t)$.

Remarque B.1 : *Le processus de Markov ici est homogène car le couple (s,t) n'intervient que par la difference $s-t$.*

VII. Propriété de Markov forte

C'est une généralisation de la propriété suivante (qui est une conséquence directe de l'indépendance des accroissements).

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, le processus $(W_{t+s} - W_t)_{s\in\mathbb{R}}$ est un mouvement brownien indépendant de F_t. Cette propriété reste vraie si t est un temps d'arrêt.

Avant de généraliser, donnons d'abord la définition d'un temps d'arrêt.

Définition B.1 : *La variable aléatoire $\tau \in \mathbb{R}$ est un temps d'arrêt pour la suite croissante de tribus F_t si*

$$\forall t,\quad \{\tau \leq t\} \in F_t.$$

Si τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt, alors $\tau_1 \wedge \tau_2$, , $\tau_1 \vee \tau_2$ et *$\tau_1 + \tau_2$ le sont aussi.*

Théorème B.3 (propriété de Markov forte) : *Soit τ un temps d'arrêt pour la suite de tribus $\{F_t\}_{t\geq 0}$, engendrée par le mouvement brownien W_t. $U = W_{\tau+t} - W_\tau$ est un mouvement brownien indépendant de F_t.*

VIII. Irrégularité des trajectoires

Dans ce paragraphe, on suppose que (Ω, A, P) est complet.

On a déja vu que les trajectoires sont $\gamma-$hölderiennes en tout point et pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant voir que presque toutes les trajectoires sont nulle-part $\gamma-$hölderiennes pour $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

Théorème B.4 : *Pour presque tout w, $(W_t(w))_{t\geq 0}$ n'est en aucun point $\gamma-$hölderienne pour $\gamma \geq \frac{1}{2}$.*

IX. Propriété de martingale

Définition B.2 : *Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé, $(F_t)_{t\in T}$ une famille de sous tribus de F. $(X_t)_{t\in T} = X$ est un processus réel adapté à la famille $(F_t)_{t\in T}$.*

On dit que X est une martingale par rapport à la famille $(F_t)_{t\in T}$ si
1- Chaque variable aléatoire X_t est intégrable.
2- $\forall (s,t) \in T \times T$ tel que $s \leq t$:

$$\mathbb{E}(X_t/F_s) = X_s, \ p.s.$$

Soit (W_t) un mouvement brownien standard, alors les processus (W_t), $(W_t^2 - t)$ et $\exp\left(\alpha W_t - \dfrac{\alpha^2}{2}t\right)$, $\alpha > 0$ sont des martingales par rapport à la famille $(F_t)_{t\in T}$, où F_t est la tribu engendrée par $(W_s \ \ 0 \leq s \leq t)$.

B.3 Pont brownien

Le pont brownien est un processus gaussien centré, défini sur $T = [0,1]$ tel que

$$Cov(s,t) = s(1-t), \ \forall s \leq t.$$

On le note B_t et on le définit de la façon suivante.

$$B_t = W_t - tW_1,$$

où W_t est le mouvement brownien standard.

Remarques :

1- $B_1 = 0$ p.s. et cela signifie que toutes les courbes viennent p.s. de 0 au temps $t = 0$, vers 0 au temps $t = 1$. C'est la raison pour laquelle on l'appelle pont brownien.

On peut considérer le pont brownien B_t^y entre 0 et y sous la forme

$$B_t^y = W_t - t(W_1 - y) = B_t + ty,\ 0 \leq t \leq 1,$$

où B_t est le pont brownien standard venant de 0 vers 0.

B_t^y est appelé parfois le pont brownien fractionnaire.

2- $B = (B_t)_t$ possède pratiquement les mêmes propriétés que le mouvement brownien $W = (W_t)_t$.

Programme de simulation

On donne ici le programme utilisé à la fin du chapitre 4 pour simuler sous (H_A) les statistiques $T_n = n^{-1/2}DI(n,a)$ et $n^{-1/2}Q$ avec $n = 60$, $k^* = 20$, $m^* = 25$ $\left(l^* = m^* - k^* = 5\right)$ et $\delta = 1$.

Ce programme a été écrit en Matlab sous environnement Windows.

```
n=60 ;a=0.25 ;k*=20 ;m*=25 ;a=0.25 ;delta=1 ;
k=floor(log2(n)) ;
rep=1000 ;
for rep=1 :rep ;
for i=1 :k*
x(i)=randn ;
for i=k*+1 :m*
x(i)=randn+delta ;
for i=m*+1 :n
x(i)=randn ;
end
end
end
x
S=cumsum(x) ;
for j=2 :k
for l=2 :2^(j-1)
S1(j,l)=S(floor(n*(((2*l)-1)/2^j)));
S2(j,l)=S(floor((2*n*(l-1))/2^j));
```

$S3(j,l) = s(floor((2*n*(l))/2^\wedge j));$

$D1(j,l) = (2^\wedge(j*a))*abs(S1(j,l) - (1/2)*S2(j,l) - (1/2)*S3(j,l));$

end

end

$D1;$

$D2 = max(D1);$

$D3 = max(D2);$

$forj = 1 : k$

$S11(j) = S(floor(n/2^\wedge j));$

$S12(j) = S(floor((2*n)/2^\wedge j));$

$D4(j) = (2^\wedge(j*a))*abs(S11(j) - (1/2)*S12(j));$

end

$D4;$

$D5 = max(D4);$

$DY(rep) = max(D3, D5);$

end

$DY;$

$T\_n = n^\wedge(-1/2)*mean(DY)$

Pour $n^{-1/2}Q$

$fori = 2 : n$

$forj = 1 : i-1$

$Q1(i,j) = abs(S(i) - S(j) - ((i-j)/n)*S(n));$

end

end

$Q1;$

$Q2 = max(Q1);$

$Q(rep) = max(Q2);$

end

$Q;$

$Q3 = n^\wedge(-1/2)*mean(Q)$

Bibliographie

[01] BILLINGSLEY P., Convergence of probability measures. J. Willy, New York, 1968.

[02] BILLINGSLEY P., Probability and measure. Second Edition, J. Willey, New York, 1986.

[03] BOCCARA N., Probabilité. Edition Ellipses, 1995.

[04] BRÉZIS H., Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, 1983.

[05] BRODSKY B. E., DARKHOVSKY B. S., Non parametric Methods in Change Point Problems. Kluwer, Dordrecht, 1993.

[06] CIESIELSKI Z., On the isomorphisms of the spaces H_α and m. Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 8(1960), 217-222.

[07] CSÖRGŐ M., HORVÁTH L., Limit Theorems in Change-Point analysis. Wiley, New York.

[08] DAVYDOV Y., The invariance principle for stationary processes. Theory Probab. Appl. 15 (1970), 487-498.

[09] DAVYDOV Y., Weak convergence of discontinous processes to continous ones. Th. of Probab. and Math. Stat., Proc. of the seminar dedicated to the memory of Kolmogorov, march-may 1993, st Petersbourg, I. Ibragimov, A. Zaitser Eds. Gordon and Breach, 1996, 15-16.

[10] DEVROYE L., Upper and lower class sequences for minimal uniform spacings. Z. Wahrsch. Verw. Geb, 61 (1982), 237-254.

[11] DOUKHAN P., Mixing. Lecture Notes in Statistics, 85 (1994).

[12] DOUKHAN P., MASSART P., RIO E., The functional central limit theorem for strongly mixing processes. Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., 30 (1994), 63-82.

[13] GRAICHE F., HAMADOUCHE D., Hölder convergence of the perturbed empirical process for non-stationnary sequences. Journal of Probability and Statistical Sciences, **8**(2) (2010), 143-158.

[14] GRAICHE F., HAMADOUCHE D., Convergence hölderienne du processus empirique pour des variables aléatoires indépendantes non de même lois. Mémoire de Magister, Département de mathématiques, Faculté des Sciences, U.M.M.T.O, 2005.

[15] GRAICHE F., HAMADOUCHE D., MERABET D., Testing epidemic change in variance. Pub. IRMA Lille, **71** (V) (2011), 1-20, preprint.

[16] HAMADOUCHE D., Principe d'invariance dans les espaces hölderiens pour des variables α- mélangeantes ou associées. Pub. IRMA Lille, 37-IX (1995).

[17] HAMADOUCHE D., Weak convergence of smoothed empirical process in Hölder space. Stat. Prob. Letters, 36 (1998), 393-400.

[18] HAMADOUCHE D., Invariance principles in Hölder spaces. Portugaliae Mathematica, 57 (2000), 127-151.

[19] HAMADOUCHE D., MERABET D., The uniform empirical process under dependence in Hölder norm. Bulletin of Statistics & Economics, 3 S09 (2009),1-13.

[20] HAMADOUCHE D., SUQUET Ch., Weak Hölder convergence of processes with application to the perturbed empirical processes. Applicationes Mathematicae, 26 (1999), 68-83.

[21] HAMADOUCHE D., TALEB Y., Hölderain version of Donsker-Prohorov's invariance principle. IAENG Internationnal Journal of Applied Mathematics, 39 (2009), 1-8.

[22] HIDA T., Brownien motion. Springer (1980).

[23] IBRAGIMOV I., Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 289 (1979), 545-547.

[24] KERKYACHARIAN G., ROYNETTE R., Une démonstration simple des théorème de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. I 312 (1991), 877-882.

[25] LAMPERTI J., On convergence of stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), 430-435.

[26] LEVINE B., KLINE J., CUSUM tests of homogeneity. Statistics in Medicine 4 (1985), 469-488.

[27] LEVY P., Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris (1937).

[28] NEWMAN C. M., WRIGHT A. L., An invariance principle for certain dependent sequences. Ann. Probab. 9 (1981), 671-675.

[29] OLIVEIRA P. E., Invariance principles in $L^2[0,1]$. Comment. Math. Univ. Carolinae 31, 2 (1990), 357-366.

[30] OLIVEIRA P. E., SUQUET Ch., An invariance principle in $L^2(0,1)$ for non stationary $\varphi-$mixing sequences. Comm. Math. Univ. Carolinae 36, 2 (1995), 293-302.

[31] OLIVEIRA P. E., SUQUET Ch., $L^2(0,1)$ weak convergence of the empirical process for dependent variables. Lecture Notes in Statistics 103 (1995), A. Antoniadis and G. Oppenheim (Eds) Wavelets and Statistics, 331-344.

[32] OLIVEIRA P. E., SUQUET Ch., Weak convergence in $L^P[0,1]$ of the uniform empirical process under dependence. preprint, Pub. IRMA, Lille 41-VI, à paraitre à Stat. Probab. Letters.

[33] PROHOROV Y. V., Convergence of random processes and limit theorems in pro-

bability theory. Theor. Prob. Appl. 1 (1956), 157-214.

[34] RAČKAUSKAS A., SUQUET Ch., Necessary and sufficient condition for the Hölderian functional central limit theorem. J. Theor. Probab. 17 (1) (2004), 221-243.

[35] RAČKAUSKAS A., SUQUET Ch., Hölder norm test statistics for epidemic change. J. Stat. Planing and Inference 126 (2) (2004),495-520.

[36] RAČKAUSKAS A., SUQUET Ch., Testing epidemic changes of infinite dimensional parameters. Statistical Inference for Stochastic Processes, **9** (2006), 111-134.

[37] RAČKAUSKAS A., SUQUET Ch., On the distribution of sequential Hölder norms of the Brownian motion. Pub. IRMA, Lille, vol. 71, No IX (2011).

[38] SCHORACK G. R., WELLNER J. A., Empirical processes with applications to statistics. Wiley (1986).

[39] SCHWARTZ L., Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann (1970).

[40] SHAO Q.-M., YU H., Weak convergence for wighted empirical processes of dependent sequences. Ann. Probab. 24 (04) (1996), 2098-2127.

[41] SINGER I., Bases in Banach spaces II. Springer (1981).

[42] SUQUET Ch., Tightness in Schauder decomposable Banach spaces. Translation of A.M.S., proceeding of the st Petersbourg Math. Soc., **5** (1995).

[43] SUQUET Ch., VIANO M.-C., Change point detection in dependent sequences : invariance principles for some quadratic statistics. Math. Meth. of. Stat., volume 7, Number 2 (1998), 157-191.

[44] YAO Q., Test for change points with epidemic alternatives. Biometrika 80 (1993), 179-191.