

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI TIZI-OUZOU

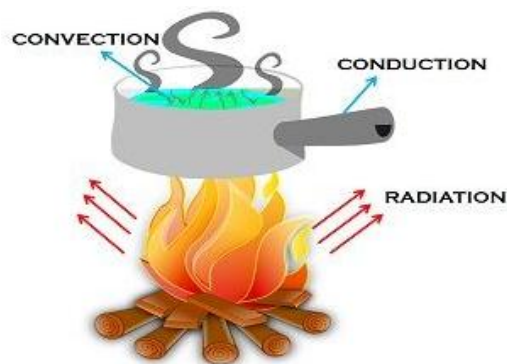
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE CHIMIE



Introduction aux modes de transfert de chaleur et exercices d'application

Dr. F. SIAGH-FERRAG



Octobre 2020

Préface

Ce document est vivement recommandé pour les étudiants en master chimie de l'environnement, en licence génie des procédés, aux étudiants des sciences technologiques ainsi que tous les étudiants qui souhaitent acquérir les notions de base sur les phénomènes de transfert de chaleur. L'objectif essentiel de ce document est de fournir les outils nécessaires à la résolution des problèmes simples de transferts de chaleur afin de développer chez l'étudiant l'habileté d'établir une approche mathématique rigoureuse des systèmes d'échanges et de résoudre des problèmes liés aux transferts thermiques.

Ce polycopié est structuré suivant le programme préconisé et comporte quatre chapitres illustrés par des exercices d'application. Dans le premier chapitre, les lois fondamentales décrivant les trois modes de transfert de chaleur : conduction, convection et rayonnement sont présentés de manière générale et un exercice d'application est consacré à chacun des modes.

Le deuxième chapitre traite la conduction unidirectionnelle en régime permanent, où l'équation générale de diffusion de chaleur à travers un solide est développée, dans les différents systèmes de coordonnées à savoir, cartésiennes, cylindriques et sphériques. Le transfert de chaleur par conduction en régime transitoire est également traité dans ce chapitre.

Le troisième chapitre fait apparaître le transfert de chaleur par convection libre et forcée. Plusieurs nombres adimensionnels ont été introduits et différentes corrélations empiriques ont été proposées, selon le régime d'écoulement des fluides pour déterminer le coefficient convectif.

Le quatrième chapitre, est consacré à la loi régissant la transmission de la chaleur par rayonnement et l'effet d'écran sur rayonnement est également examiné.

En fin, ce polycopié est le fruit de sept années d'enseignement (2009-2010 et 2013-2019) assuré pour les étudiants en master, chimie de l'environnement, à la Faculté des Science de l'UMMTO.

SOMMAIRE

CHAPITRE I : PRINCIPAUX PHENOMENES DE TRANSFERT DE CHALEUR	1
1.1 Transfert de chaleur par conduction	2
1.2 Transfert de chaleur par convection	3
1.2.1 Transfert de chaleur par convection naturelle	3
1.2.2 Transfert de chaleur par convection forcée	3
1.3 Transfert de chaleur par rayonnement	4
1.4 Exercices d'application	5
CHAPITRE II : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION	7
II.1 Transfert de chaleur par conduction en régime permanent	7
II.2 Équation générale de la conduction de chaleur ou équation générale de diffusion à travers un solide (en régime permanent ou stationnaire)	8
II.3 Exemple d'application	11
II.4 Conduction unidirectionnelle (une seule dimension) $T = T(x)$ ou $T(r)$	13
II.4.1 Conduction à travers un mur simple	13
II.4.2 Conduction à travers un mur à n couches (association en série)	15
II.4.3 Conduction à travers un mur composite (association en parallèle)	16
II.4.4 Conduction à travers un cylindre creux	18
II.4.5 Conduction à travers un cylindre creux à plusieurs couches	21
II.4.6 Conduction à travers une sphère creuse	22
II.4.7 Conduction à travers une sphère creuse à plusieurs couches	24
II.5 Conduction multidirectionnelle	25
II.6 Transfert de chaleur par conduction en régime transitoire ou régime variable	25
II.6 Nombres adimensionnels	26
II.6.1 Le nombre de Biot	26
II.6.2 Le nombre de Fourier	27
II.7 Conduction en régime transitoire avec $Biot < 0.1$ (résistance interne négligeable)	27
II.8 Conduction en régime transitoire avec $Biot \geq 0.1$ (résistance interne n'est pas négligeable)	28
II.9 Exercices d'application	34
CHAPITRE III : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION	37
III.1 Généralités	37
III.2 Loi de Newton- coefficient d'échange par convection	37
III.3 Convection naturelle	38
III.4 Convection forcée (étude de phénomène de convection)	39
III.4.1 Couches limites	39
III.4.2 Coefficient de convection h	40
III.4.2.1 Nombre de Reynolds	41
III.4.2.2 Nombre de Nusselt	41
III.4.2.3 Nombre de Grashof	41
III.4.2.4 Nombre de Prandtl	42
III.5 Méthode de calcul du coefficient de convection h	42
III.5.1 Quelques corrélations empiriques utilisées en convection naturelle.	43
III.5.1.1 Ecoulement du fluide à l'intérieur des conduites	43
III.5.1.2 Ecoulement du fluide sur un plan	44
III.5.2 Quelques corrélations empiriques utilisées en convection forcées	44
III.5.2.1 Ecoulement du fluide à l'intérieur des conduites	44
III.5.2.2 Ecoulement sur un plan	45

III.6 Exercices d'application	45
CHAPITRE IV : TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT	48
IV.1 Généralité	48
IV.2 Réception du rayonnement par un solide	49
IV.3 Définition d'un corps noir	50
IV.4 Loi de rayonnement ou loi de Stefan-Boltzmann	50
IV.4.1 Cas de deux plaques infinies noires	50
IV.4.2 Cas de deux plaques infinies non noires	51
IV.5 L'effet d'écran	53
IV.5.1 Cas sans écran	54
IV.5.2 Cas avec écran	54
IV.5.3 Généralisation à n écrans	54
IV.6 Coefficient de transfert de chaleur par rayonnement	55
IV.7 Exercices d'application	56
Bibliographie	

Nomenclature (principaux termes)

A_{\perp}	Surface perpendiculaire à l'écoulement du fluide
a	Constante
b	Constante
C	Célérité, vitesse de la lumière (m/s)
C_p	Capacité calorifique (J/kg. K) ou (J/kg. °C)
D	Diamètre de la conduite (m)
D_H	Diamètre hydraulique (m)
dq/dT	Quantité de chaleur par unité de temps (J/s) ou (W)
dT/dx	Gradient de température le long de x (K/m) ou (°C/m)
e	Épaisseur (m)
exp	Exponentiel
F_G	Facteur géométrique
F_{ε}	Facteur de correction
g	Accélération de la pesanteur (m/s)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection (W/m K) ou (w/m. °C)
I	Courant électrique (A)
L	Longueur (m)
L	Longueur caractéristique (m)
Ln	Logarithme Népérien
l	Largeur (m)
m	Masse (kg)
P	Périmètre mouillé (m)
R	Résistance (Ω)
R_{th}	Résistance thermique (K /W) ou (°C/W)
R	Rayon (m)
r	Rayon (m)
S	Système
S	Surface de passage du flux de chaleur (m ²)
T	Température du corps (°C) ou (K)
T_f	Température du fluide (°C) ou (K)
T_m	Température moyenne (°C) ou (K)
T_p	Température de la paroi (°C) ou (K)
T_s	Température du solide (°C) ou (K)
t	Temps (s)
$\nabla^2 T$	Laplacien de T
ΔT	Différence de température (DDT) (K) ou (°C)
P	Pression (atm)
T_p	Température de surface du solide (K) ou (°C)
T_{∞}	Température du fluide loin de la surface du solide (Température du milieu environnant) (K) ou (°C)
T_{max}	Température maximale (K) ou (°C)

ΔU :	Différence de potentielle (DDP) (V)
q_v :	Génération d'énergie (W/m^3)
V :	Vitesse (m/s)
V_m	Vitesse moyenne (m/s)
V :	Volume (m^3)
x, y, z	Variable d'espace

Nombres adimensionnels

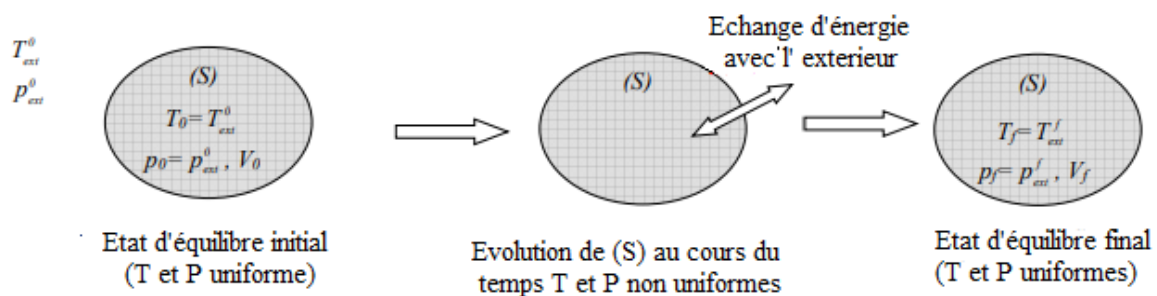
Bi :	Nombre de Biot
F_o :	Nombre de Fourier
Gr :	Nombre de Grashof
Nu :	Nombre de Nusselt
Pr :	Nombre de Prandtl
Re :	Nombre de Reynolds

Lettres grecques

Φ :	Rapport de quantité de chaleur extraite à l'instant t sur la quantité de chaleur maximale à extraire
Φ :	Débit (m^3/s)
ϕ :	Flux de chaleur transmis par conduction (w)
ϕ_a :	Flux absorbé
ϕ_i :	Flux incident
ϕ_r :	Flux réfléchi
ϕ_t :	Flux transmis
λ :	Conductivité thermique du milieu (w /m K) ou (w /m. °C) ou (kcal/h. m. °C)
σ :	Constante de Stefan égale à $5.67 \cdot 10^{-8} w/m^2 \cdot K^{-4}$
ε :	Émissivité du corps ($0 < \varepsilon < 1$)
ρ :	Masse volumique (Kg/m^3)
α :	Diffusivité thermique du corps (m^2/s)
α :	Pouvoir monochromatique réfléchi
δ :	Couche limite (m)
μ :	Viscosité dynamique du fluide (Pa. s) ($kg/m \cdot s$)
ν :	Viscosité cinématique du fluide (m^2/s)
β :	Coefficient de dilatation du fluide
β :	Pouvoir monochromatique absorbé
γ :	Pouvoir monochromatique de transmis
θ :	Température adimensionnelle

CHAPITRE I : PRINCIPAUX PHENOMENES DE TRANSFERT DE CHALEUR

La thermodynamique a montré que l'énergie peut être transférée à partir d'interactions entre le système et son environnement, sous forme de chaleur et de travail. Cependant, la thermodynamique ne se préoccupe que de l'état initial et de l'état final du système à l'équilibre, et ne fournit aucune information sur la nature des interactions mises en jeu et sur l'évolution temporelle du système entre les deux états d'équilibre.



Le deuxième principe de la thermodynamique admet que l'énergie thermique (ou la chaleur) ne peut passer que d'un corps chaud vers un corps froid, c'est-à-dire d'un corps à température donnée vers un autre à température plus basse, donc il y a transfert de chaleur, jusqu'à l'équilibre thermique, c'est-à-dire que les deux corps ayant les mêmes températures.

Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace.

Le transfert de chaleur est un transfert d'énergie microscopique désordonnée, cela correspond à un transfert d'énergie thermique entre particules, par des chocs aléatoires qui se produisent à l'échelle microscopique.

Le but de l'analyse des transferts de chaleur est d'identifier quels sont les modes de transfert mis en jeu au cours de la transformation et de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps $T = f(x, y, z, t)$.

Le transfert de chaleur est rencontré dans plusieurs domaines étudiés, comme le domaine de l'environnement, pharmaceutique, pétrochimique, industriels.

En effet de nombreux équipements sont utilisés dans ces domaines, les réacteurs, les fours, les chaudières, les bains thermostats, les colonnes à distillation ...etc. La problématique posée dans ce contexte est comment réduire les pertes thermiques ou encore comment maximiser le flux de chaleur à travers une surface.

Plusieurs modes de transfert thermiques ont été bien examinés dans ce document à savoir : le transfert par conduction, convection, et rayonnement.

1.1 Transfert de chaleur par conduction

Le transfert de chaleur par conduction correspond à un transfert d'énergie interne due aux interactions entre particules qui constituent le système (exemple : chocs de molécule dans le gaz, vibration dans les solides cristallins, etc....). Il est présent dans tous les corps quel que soit leur état physique (solide, liquide ou gaz). La théorie de la conduction repose sur la loi de Fourier et dans le cas d'une conduction unidirectionnelle suivant l'axe des x, cette loi s'écrit :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (I.1)$$

ϕ : Flux de chaleur transmis par conduction (w)

λ : Conductivité thermique du milieu (w/m K) ou (kcal/h. m. °C)

$\frac{dT}{dx}$: Gradient de température le long de x (K/m)ou(°C/m)

S : Surface de passage du flux de chaleur, S est perpendiculaire au flux de chaleur (m²)

(-) : Signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens opposé au gradient de température, c'est-à-dire, des températures les plus élevées vers les températures les plus basses (ce qui est du bon sens physique).

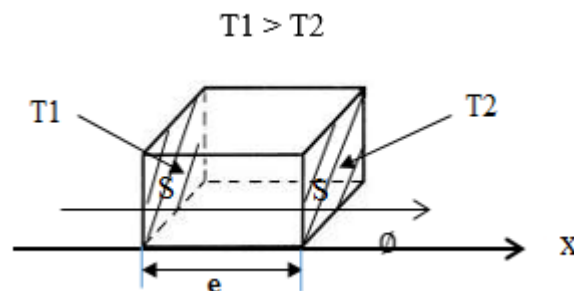


Figure I.1: Transfert thermique par conduction

La relation de Fourier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \quad (I.3)$$

R_{th} : Résistance thermique (K /w) ou (°C/w)

I.2 Transfert de chaleur par convection

Ce mode de transfert est spécifique aux fluides. En plus du transfert de chaleur par conduction toujours présent dans la matière (échelle microscopique), il y a dans les fluides, un transfert de chaleur provoqué par l'écoulement du fluide (échelle macroscopique). On peut donc définir la convection comme la combinaison de deux modes de transfert de chaleur. La convection est classée en deux catégories.

I.2.1 Transfert de chaleur par convection naturelle

La convection naturelle se produit lorsque le mouvement du fluide est dû uniquement à la poussée d'Archimède. Exemple, l'air chaud monte et l'air froid descend. Ce phénomène est rencontré dans de nombreuses situations comme le transfert de chaleur du radiateur vers les parties froides d'une pièce.

I.2.2 Transfert de chaleur par convection forcée

Dans la convection forcée, le fluide doit son mouvement à une cause extérieure (ventilateur, agitation, ...etc). Pour ce mode de transfert la poussée d'Archimède est négligeable.

Le transfert de chaleur par la convection est régi par la loi de Newton.

$$\phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (I.4)$$

ϕ : Flux de chaleur transmis par convection (w)

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection (w /m K)

T_p : Température de surface du solide (K) ou (°C)

T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide (K) ou (°C)

S : Surface de contact solide /fluide (m²)

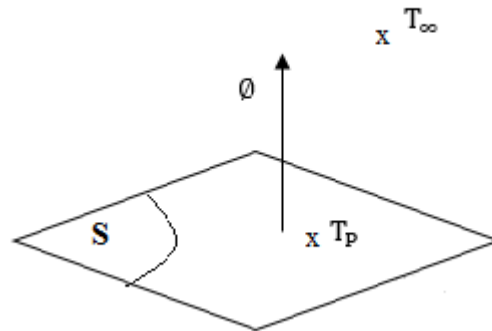


Figure I.2: Transfert de chaleur par convection à travers une surface de contact solide-fluide

Remarque : Un coefficient d'échange thermique élevé, signifie un « bon » transfert de chaleur entre la paroi et le fluide. Il est donc possible de transférer un flux de chaleur important avec une petite surface d'échange et un faible écart de température.

I.3 Transfert de chaleur par rayonnement

Le transfert de chaleur par rayonnement correspond au transfert d'énergie thermique sous forme d'onde électromagnétique analogue à celle de la lumière.

En effet, tout corps, même placé dans le vide, émet de l'énergie thermique sous forme de rayonnement. Cette émission est d'autant plus importante que la température du corps émetteur est élevée. Le rayonnement est régi par la loi de Stefan et Boltzmann.

ϕ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (w)

σ : Constante de Stefan égale à $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}^{-4}$

T : Température du corps (K) ou ($^{\circ}\text{C}$)

S : Surface du corps (m^2)

ε : Émissivité du corps ($0 < \varepsilon < 1$)

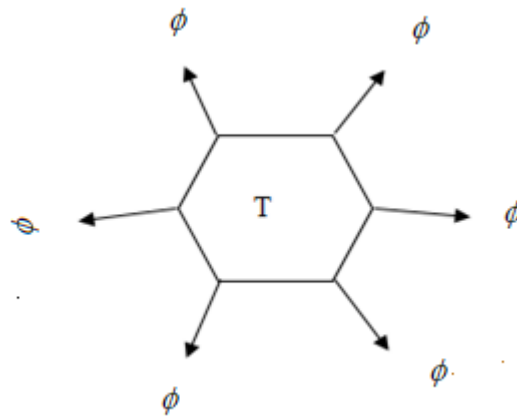


Figure I.3 : Un corps avec émission d'énergie thermique sous forme de radiation

L'émissivité d'un corps noir (surface idéale) et d'un corps gris (surface réelle) est de $\epsilon=1$ et $\epsilon \neq 1$; respectivement.

Pour un transfert de chaleur par rayonnement entre un solide et le milieu environnant, la relation de Stefan s'écrit :

$$\phi = \sigma S \epsilon (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (I.6)$$

T_p : Température de la paroi (K)

T_∞ : Température du milieu environnant (K)

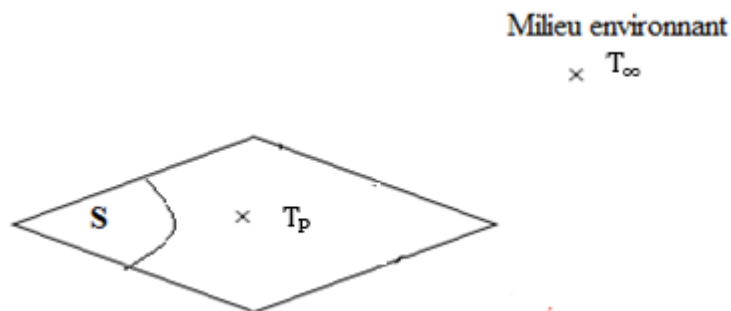


Figure I.4 : Transfert de chaleur par rayonnement entre une surface plane et le milieu environnant

I.4 Exercices d'application

Exercice 1

- 1- Calculer la perte calorifique au travers un mur en brique de 8 cm d'épaisseur, 4 m de hauteur et 2 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 35 °C et 3 °C. La conductivité thermique λ du mur est de 0,69 w/m °C.

- 2- Calculer la densité de flux de chaleur échangée entre les deux faces du mur ainsi que la résistance thermique du mur.

Exercice 2

Un courant d'air à 20 °C circule à une vitesse de 2.5 m/s au-dessus d'une plaque métallique rectangulaire (50 × 75 × 2 cm) dont la face supérieure est maintenue à 250°C. Le coefficient de transfert de chaleur par convection étant égal à 25 w/m² °C.

- 1- Calculez le flux de chaleur échangée entre la plaque et l'air. La plaque étant faite d'acier carbone à 1% ($\lambda = 43$ w/m. °C).
- 2- Déterminez la température de la face inférieure de la plaque si, en plus des effets de convection, l'énergie perdue par la plaque, par radiation, est de 300 W.

Exercice 3

Pour chauffer une pièce, on utilise un radiateur cylindrique de diamètre $D = 2$ cm et de longueur $L = 0,5$ m. Ce radiateur rayonne comme un corps noir et émet une quantité de chaleur de 1 kw. On néglige les échanges par convection et conduction. Calculer la température T du radiateur.

- 1- Si on néglige la chaleur absorbée par le radiateur.
- 2- Si on ne néglige pas la chaleur absorbée par le radiateur, sachant que la température de la pièce est 293 K.

CHAPITRE II : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

II.1 Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

L'équation de Fourier stipule que la quantité de chaleur par unité de temps traversant un corps d'épaisseur donnée, est proportionnelle au gradient de température appliquée aux extrémités du corps et à la surface perpendiculaire au flux de chaleur. La constante de proportionnalité est appelée la conductivité thermique du matériau constituant ce corps.

$$\phi = \frac{dq}{dT} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (II.1)$$

λ : Est une fonction de l'homogénéité du matériau et de la température. Elle traduit la capacité d'un matériau à transporter la chaleur par conduction.

Pour un corps homogène : $\lambda = f(t)$ seule.

A titre d'exemple pour l'Aluminium : Al

$$\lambda = 200 \text{ W/m K à } T = 300 \text{ °K}$$

$$\lambda = 300 \text{ W/m K à } T = 500 \text{ °K}$$

La conductivité thermique de certains composés à température ambiante est donnée dans le tableau suivant.

Tableau II.1 : Valeur de la conductivité thermique conductivité (λ)

Composés	λ (W/m K)
Liquides	
Mercure	8,7
Eau	0,6
Acétone	0,2
Alcool éthylique	0,17
Huile moteur	0,15
Gaz	
Oxygène	0,027
Air, Azote	0,026
Gaz carbonique	0,017
Solides Métalliques	
Argent	419
Cuivre	386
Or	293
Aluminium	204
Fer	73
Acier doux	45

Acier inox	15
Non métalliques	
Glace	1,88
Béton	1,40
Brique terre cuite	1,1
Verre	1.05
Brique rouge	0.63
Laine de roche	0,038-0,041
Laine de verre	0,0335-0,051
Plâtre	0,48
Liège	0,44-0,041
Bois	0,12-0,23
Carton	0,2
Amiante	0,16

II.2 Équation générale de la conduction de chaleur ou équation générale de diffusion à travers un solide (en régime permanent ou stationnaire)

Considérons un élément de volume, infiniment petit, défini par trois dimensions. Faisons le bilan d'énergie sur cet élément différentiel ($dx \ dy \ dz$) dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

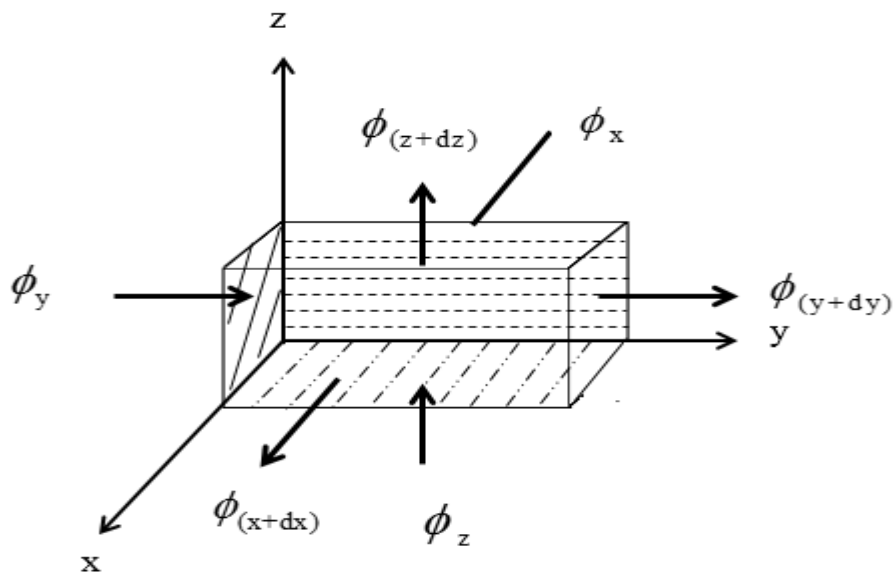


Figure II.1 : Bilan thermique sur un élément différentiel

Faisons le bilan d'énergie :

$$\text{Entrée} + \text{Génération} = \text{Sortie} + \text{Accumulation} \quad (\text{II.2})$$

- Entrée : $\phi_x + \phi_y + \phi_z$ (II.3)

- Génération : $q_v \ dx \ dy \ dz$ (II.4)

q_v = Génération d'énergie en w/m^3

• Sortie $\phi_{(x+dx)} + \phi_{(y+dy)} + \phi_{(z+dz)}$ (II.5)

$$\left. \begin{aligned} \phi_{(x+dx)} &= \phi_x + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx \quad \text{avec} \quad \phi_x = -\lambda dy dz \frac{dT}{dx} \quad (dS = dy dz) \\ \phi_{(y+dy)} &= \phi_y + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy \quad \text{avec} \quad \phi_y = -\lambda dx dz \frac{dT}{dy} \quad (dS = dx dz) \\ \phi_{(z+dz)} &= \phi_z + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} dz \quad \text{avec} \quad \phi_z = -\lambda dx dy \frac{dT}{dz} \quad (dS = dx dy) \end{aligned} \right\} \quad (II.6)$$

• Accumulation = $\frac{\partial}{\partial t} (m Cp T) = \frac{\partial}{\partial t} (m Cp T dx dy dz)$ avec $m = \rho dx dy dz$ (II.7)

m : Masse de l'élément de volume $dV = (dx)(dy)(dz)$

ρ : Masse volumique

Cp : Chaleur spécifique du solide

Remplaçons les équation (II.3), (II.4), (II.6), et (II.7), dans l'équation (II.2), nous aurons :

$$\begin{aligned} \phi_x + \phi_y + \phi_z + q_v dx dy dz &= \phi_x(x+dx) + \phi_y(y+dy) + \phi_z(z+dz) + \\ &\frac{\partial}{\partial t} (\rho Cp T dx dy dz) \\ (\phi_x + \phi_y + \phi_z) + q_v dx dy dz &= \phi_x + \frac{\partial}{\partial x} (-\lambda dy dz \frac{dT}{dx}) dx + \frac{\partial}{\partial y} (-\lambda dx dz \frac{dT}{dy}) dy \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (-\lambda dx dy \frac{dT}{dz}) dz + \frac{\partial}{\partial t} (\rho Cp T dx dy dz) \end{aligned}$$

Après simplification, nous aurons:

$$q_v = \frac{\partial}{\partial x} (-\lambda \frac{dT}{dx}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\lambda \frac{dT}{dy}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\lambda \frac{dT}{dz}) + (\rho Cp T) \quad (II.8)$$

Faisons l'hypothèse que le matériau est homogène et que λ et ρCp caractéristiques thermodynamique du matériau ne dépendent pas de la température.

- $\lambda = \text{cste}$
- $\rho Cp = \text{cste}$

L'équation (II.8) devient :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_v = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II.9)$$

L'équation (II.9) est appelée l'équation générale de la conduction à travers un solide, ou encore équation générale de la diffusion à travers un solide.

L'équation de la diffusion peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (\text{II.11})$$

α : Diffusivité thermique du corps (m^2/s)

La diffusivité de quelques composés est donnée dans le tableau ci-dessous.

Tableau II.2 : Diffusivité thermique de certains composés

Composés	Diffusivité (m^2/s) 10^{-6}
Argent	173
Or	127,2
Aluminium	98,8
Fer	20
Acier	12-15
Pierre	1,4
Béton	0,54
Laine de verre	0,58
Liège	0,115
Verre	0,4
Eau	0,14
Éthanol	12
Dioxyde de carbone	16,4
Air	22

L'opérateur Laplacien est introduit en coordonnées cartésiennes, l'équation de conduction s'écrit :

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

$\nabla^2 T$: Laplacien de T en coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 T : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{II.13})$$

- En coordonnées cylindriques

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{II.14})$$

- En coordonnées sphériques

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \theta \cos \phi \quad z = r \cos \phi$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (\text{II.15})$$

II.3 Exemple d'application

Soit une grande plaque d'épaisseur $2e$, la longueur (L) et la largeur (l) $\gg 2e$, qui génère q_v énergie. En supposant que la plaque soit plongée dans un milieu tels que les températures de ses deux faces principales sont équivalentes à celle du milieu ($h = \infty$).

Trouvez la température maximale dans la plaque. En déduire les flux de chaleur cédés par chacune des faces principales de la plaque au fluide. On suppose que le régime est permanent.

Méthodologie à suivre pour résoudre ce type de problème :

1- Choisir un système de coordonnées et écrire l'équation générale de la conduction

- On utilise le système de coordonnées cartésiennes, car on est en présence d'une surface plane.

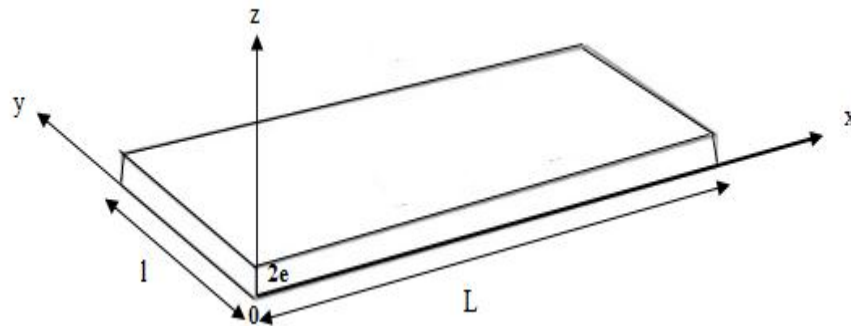


Figure II.2 : Une grande plaque avec les deux faces à température du milieu

- L'équation générale de conduction s'écrit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

2- Poser les hypothèses afin de simplifier l'équation (1).

- Grande plaque, $L, l \gg \gg 2e$, donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

- Régime permanent

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

3- L'équation générale de conduction (1) est une équation différentielle du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q_v}{\lambda}$$

4- Résolution de l'équation différentielle du deuxième ordre

- Première intégration

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\int \frac{q_v}{\lambda} dz = -\frac{q_v}{\lambda} z + a$$

- Deuxième intégration

$$T(z) = -\frac{q_v}{2\lambda} z^2 + a z + b$$

5- Détermination des constantes a et b

Afin de calculer les constantes a et b, les conditions aux limites sont utilisées :

- Pour $z=0$; $T = T_\infty$
- Pour $z=2e$; $T = T_\infty$

$$T(0) = b = T_\infty \quad (i)$$

$$T(2e) = -\frac{q_v}{2\lambda} (2e)^2 + a(2e) + b = T_\infty \quad (ii)$$

Donc, (i) - (ii) donne :

$$a = \frac{q_v}{2\lambda} (2e)$$

On remplace les constantes a et b par leurs valeurs dans T(z) et l'équation devient :

$$T(z) = -\frac{q_v}{2\lambda} z^2 + \frac{q_v}{\lambda} e z + T_\infty$$

6- Pour déterminer T_{\max} , il faut trouver la valeur de z qui annule la dérivée de T(z)

$$\frac{dT}{dz} = 0 \Rightarrow -\frac{q_v}{\lambda} z + \frac{q_v}{\lambda} e = 0 \Rightarrow z = e$$

$$T_{\max} = T(z=e) = -\frac{q_v}{2\lambda} e^2 + \frac{q_v}{\lambda} e^2 + T_\infty \Rightarrow T_{\max} = \frac{q_v}{2\lambda} e^2 + T_\infty$$

7- Quantité de chaleur cédée par chacune des faces :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dz}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{q_v}{\lambda} z + \frac{q_v}{\lambda} e$$

$$\phi_{z=0} = -\lambda S \left(\frac{q_v}{\lambda} e \right) = -S q_v e$$

$$\phi_{z=2e} = -\lambda S \left(-\frac{q_v}{\lambda} (2e) + \frac{q_v}{\lambda} e \right) = +S q_v e$$

II.4 Conduction unidirectionnelle (une seule dimension) $T = T(x)$ ou $T(r)$

Dans ce cas, le transfert de chaleur est unidirectionnel, il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

II.4.1 Conduction à travers un mur simple

On considère un mur d'épaisseur « e » de conductivité λ , dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 . Ces températures sont maintenues constantes.

$$T_1 > T_2$$

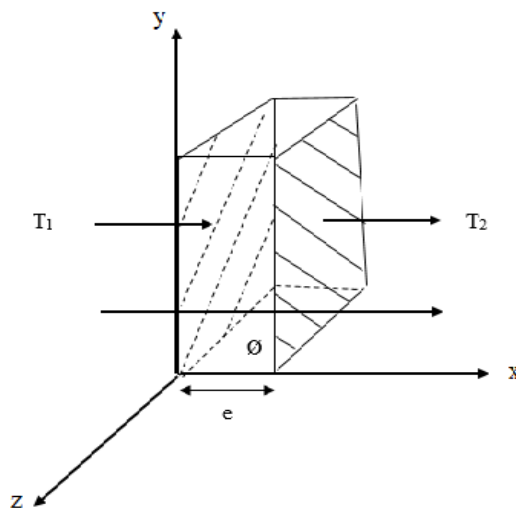


Figure II.3 : Bilan énergétique sur un mur simple

Équation bilan d'énergie en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

Hypotheses

- Le transfert de chaleur est unidirectionnel

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

- Pas de génération d'énergie

$$\frac{q_v}{\lambda} = 0$$

- Régime permanent

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

L'équation générale de conduction devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = a \Rightarrow T(x) = a x + b \quad (\text{II.16})$$

Détermination des constantes a et b à partir des conditions au limites :

- Pour $x=0$; $T(x)=T_1$
- Pour $x=e$; $T(x)=T_2$.

$$T(x=0) = b = T_1 \quad (\text{i})$$

$$T(x=e) = a e + b = T_2 \quad (\text{ii})$$

Donc, (i) - (ii) donne $T_1 - T_2 = a e$

$$a = \frac{T_2 - T_1}{e}$$

On remplace les constantes a et b par leurs valeurs dans T(x) et l'équation (II.16) devient :

$$T(x) = a x + b = \frac{(T_2 - T_1)}{e} x + T_1 \quad (\text{II.17})$$

Cette équation donne le profil de température à travers un mur simple. Ce profil est une droite linéaire.

En effet, le flux de chaleur donné par l'équation (II.1) peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda S \frac{(T_2 - T_1)}{e} = \lambda S \frac{(T_1 - T_2)}{e} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{e}{\lambda S}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th}} = \frac{\Delta T}{R_{th}} \quad (\text{II.18})$$

Nous remarquons une analogie entre le flux de chaleur et la loi d'Ohm en électricité. Cette dernière définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. Cette résistance est équivalente à la résistance thermique pour un mur plan d'épaisseur e, de conductivité λ et de surface latérale S.

$$\Delta U = R I \text{ equivalent } \Delta T = R_{th} \phi$$

ΔU : Différence de potentiel (DDP)

R : Résistance électrique

I : Courant électrique

ΔT : Différence de température (DDT)

R_{th} : Résistance thermique

ϕ : Flux de chaleur

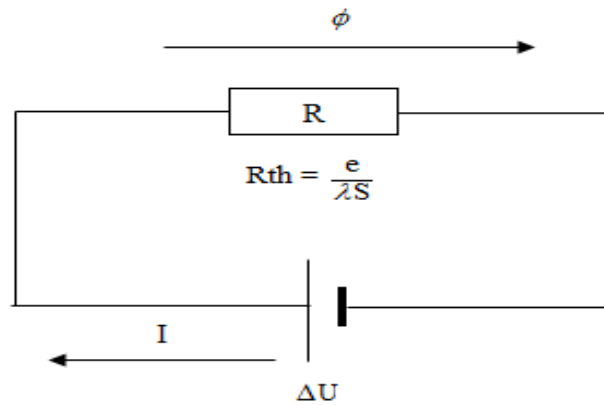


Figure II.4 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

II.4.2 Conduction à travers un mur à n couches (association en série)

Soit un mur constitué de n couches de matériaux différents et de surface latérale S.

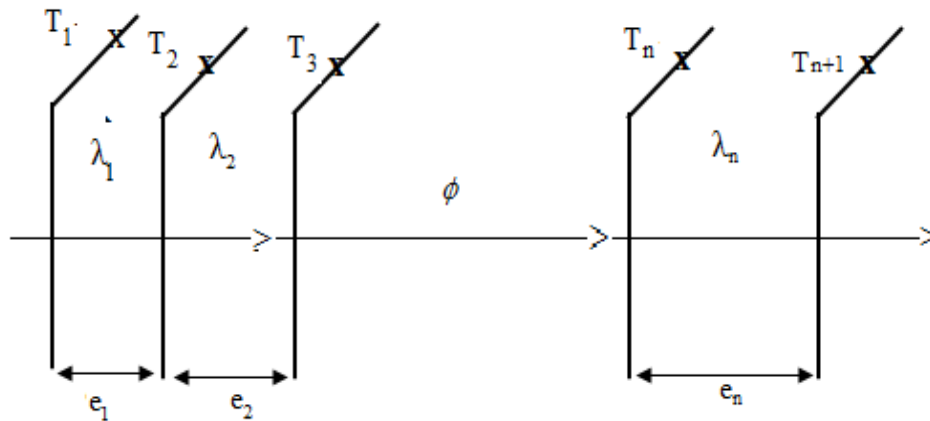


Figure II.5 : Flux de chaleur à travers un mur à plusieurs couches associées en série

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversé du mur et s'écrit :

$$\phi = \frac{\lambda_1 S}{e_1} (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad (T_1 - T_2) = \phi \frac{e_1}{\lambda_1 S}$$

$$\phi = \frac{\lambda_2 S}{e_2} (T_2 - T_3) \quad \Rightarrow \quad (T_2 - T_3) = \phi \frac{e_2}{\lambda_2 S}$$

⋮

⋮

$$\phi = \frac{\lambda_n S}{e_n} (T_n - T_{n+1}) \implies (T_n - T_{n+1}) = \phi \frac{e_n}{\lambda_n S}$$

$$(T_1 - T_{n+1}) = \phi \left[\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n S} \right] \quad (\text{II.19})$$

La résistance équivalente s'écrit sous la forme suivante.

$$R_{\text{eq}} = \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n S} \quad (\text{II.20})$$

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (\text{II.21})$$

Le flux de chaleur pour un mur à n couches devient :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{R_{\text{eq}}} \quad (\text{II.22})$$

Le flux thermique dans le cas d'un mur à n couches est établi à l'aide de l'équation générale suivante :

$$\phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S}} \quad (\text{II.23})$$

Par analogies aux résistances électriques, nous avons la figure suivante :

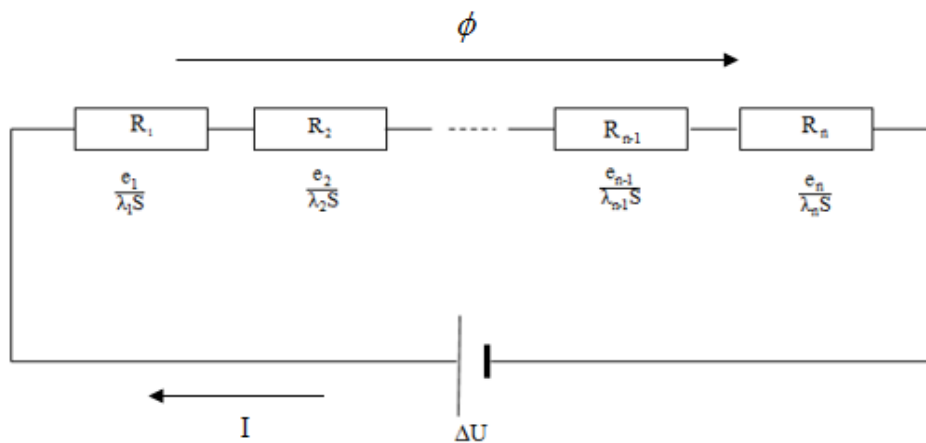


Figure II.6 : Schéma électrique équivalent pour un mur à n couches associées en série

II.4.3 Conduction à travers un mur composite (association en parallèle)

Soit un mur d'épaisseur e, composé de n couches de matériaux différents associées en parallèle.

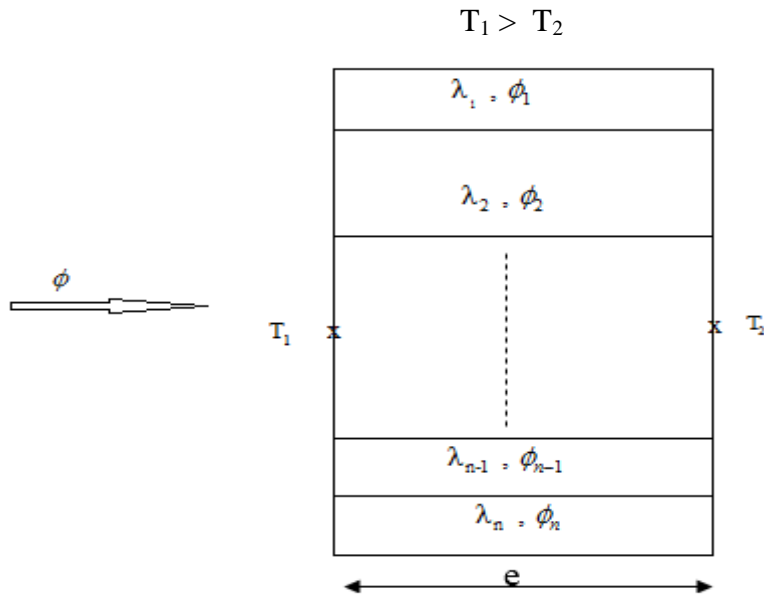
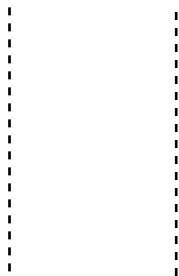


Figure II.7 : Flux de chaleur à travers un mur composite associé en parallèle

Le flux de chaleur traversant un mur composite associé en parallèle s'écrit:

$$\phi_1 = \frac{\lambda_1 S_1}{e_1} (T_1 - T_2)$$

$$\phi_2 = \frac{\lambda_2 S_2}{e_2} (T_1 - T_2)$$



$$\phi_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} S_{n-1}}{e_{n-1}} (T_1 - T_2)$$

$$\phi_n = \frac{\lambda_n S_n}{e_n} (T_1 - T_2)$$

Le flux global s'écrit :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_{n-1} + \phi_n \tag{II.24}$$

$$\phi = (T_1 - T_2) \left[\frac{\lambda_1 S_1}{e_1} + \frac{\lambda_2 S_2}{e_2} + \dots + \frac{\lambda_{n-1} S_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{\lambda_n S_n}{e_n} \right] \quad (\text{II.25})$$

$$\phi = (T_1 - T_2) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_n} \right] \quad (\text{II.26})$$

La résistance équivalente pour un mur composite associé en parallèle s'écrit :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_n} \quad (\text{II.27})$$

Le flux de chaleur traversant un mur composite associé en parallèle devient :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{eq}}} \quad (\text{II.28})$$

Par analogie à un circuit électrique, nous avons le schéma suivant :

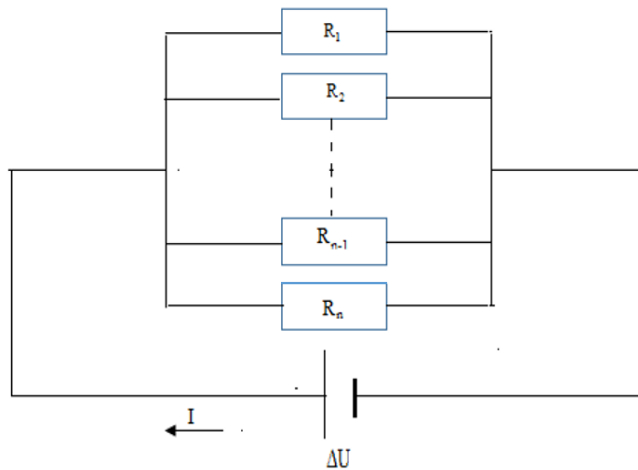


Figure II.8 : Schéma électrique équivalent d'un mur composite associé en parallèle

II.4.4 Conduction à travers un cylindre creux

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ , de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 , de longueur L . Les températures de faces interne et externe sont respectivement T_1 et T_2 . Supposons que le gradient longitudinal de température soit négligeable devant le gradient radial.

$$T_1 > T_2$$

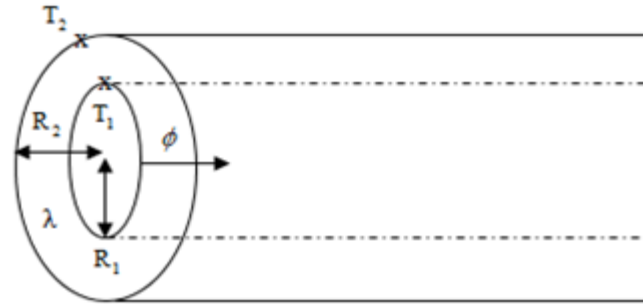


Figure II.9 : Transfert de chaleur dans un cylindre creux

Équation bilan thermique en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{II.14})$$

Considérons les hypothèses suivantes :

- Le transfert de chaleur est unidirectionnel, se fait selon la direction radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

- Pas de génération d'énergie

$$\frac{q_v}{\lambda} = 0$$

- Régime permanent

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

L'équation générale de conduction devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad T(r) = a \ln r + b \quad (\text{II.29})$$

Détermination des constantes a et b à partir des conditions aux limites.

- Pour $r = R_1$; $T(R_1) = T_1$
- Pour $r = R_2$; $T(R_2) = T_2$

$$T(R_1) = a \ln R_1 + b = T_1 \quad (i)$$

$$T(R_2) = a \ln R_2 + b = T_2 \quad (ii)$$

Donc, (i) - (ii) équivaut $a (\ln R_1 - \ln R_2) = T_1 - T_2$

$$a = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

$$T(R_1) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1 + b = T_1$$

On remplace a par sa valeur dans (i) pour avoir b :

$$b = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1$$

On remplace les constantes a et b par leurs valeurs dans T(r) et l'équation (II.29) devient :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln r + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1 \quad (II.30)$$

L'équation (II.30) donne le profil radial de la température à travers un cylindre creux. Le profil radial de température n'est pas linéaire le long du rayon, la température décroît de T_1 à T_2 selon une loi logarithmique.

Le flux de chaleur à travers un cylindre creux est donné par :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{r}$$

$$\phi = -\lambda (2 \pi r L) \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1}{r} \quad \text{avec } S = 2 \pi r L$$

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2 \pi L \lambda}} \quad (II.31)$$

Ou encore

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th}} \quad \text{avec} \quad R_{th} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2 \pi L \lambda} \quad (II.32)$$

II.4.5 Conduction à travers un cylindre creux à plusieurs couches

Considérons le cas d'un tube cylindrique recouvert de plusieurs couches de matériaux différents.

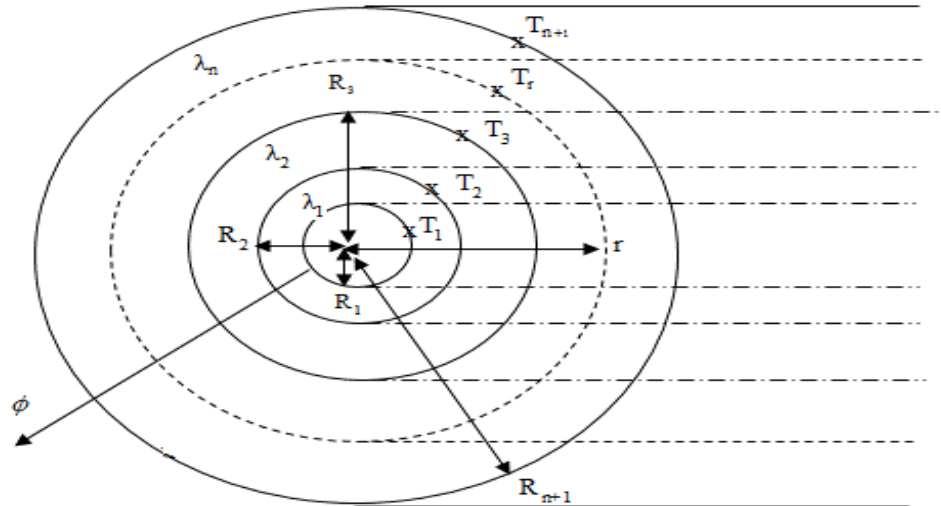


Figure II.10 : Transfert de chaleur à travers un cylindre creux recouvert de n couches

Le flux de chaleur traversant un cylindre creux à plusieurs couches s'écrit:

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L \lambda_1}} \Rightarrow T_1 - T_2 = \phi \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L \lambda_1}$$

$$\phi = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi L \lambda_2}} \Rightarrow T_2 - T_3 = \phi \frac{\ln \frac{R_3}{R_2}}{2\pi L \lambda_2}$$

$$\phi = \frac{(T_n - T_{n+1})}{\frac{\ln \frac{R_{n+1}}{R_n}}{2\pi L \lambda_n}} \Rightarrow T_n - T_{n+1} = \phi \frac{\ln \frac{R_{n+1}}{R_n}}{2\pi L \lambda_n}$$

$$T_1 - T_{n+1} = \phi \left[\frac{L_n \frac{R_2}{R_1}}{2 \pi L \lambda_1} + \frac{L_n \frac{R_3}{R_2}}{2 \pi L \lambda_2} + \dots + \frac{L_n \frac{R_{n+1}}{R_n}}{2 \pi L \lambda_n} \right] \quad (\text{II.33})$$

Le flux de chaleur devient :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{R_{eq}} \quad \text{avec} \quad R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (\text{II.34})$$

Le flux de chaleur dans le cas d'un cylindre creux à plusieurs couches est donné par la relation générale suivante :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{L_n \frac{R_{i+1}}{R_i}}{2 \pi L \lambda_i}} \quad (\text{II.35})$$

II.4.6 Conduction à travers une sphère creuse

Soit une armature sphérique de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2 . La paroi interne est à la température T_1 et la paroi externe à T_2 . On suppose que le flux de chaleur transféré par conduction dans la couche sphérique est radial et $T_1 > T_2$.

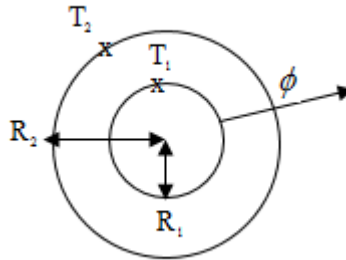


Figure II.11 : Transfert de chaleur à travers une sphère creuse

L'équation bilan de chaleur en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (\text{II.15})$$

- Le transfert de chaleur est unidirectionnel, selon la direction radiale :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

- Pas de génération d'énergie

$$\frac{q_v}{\lambda} = 0$$

- Régime permanent

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

L'équation générale de diffusion de chaleur devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = a \Rightarrow \partial T = a \frac{\partial r}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{a}{r} + b \quad (\text{II.36})$$

Détermination des constantes a et b à partir des conditions aux limites.

- Pour $r = R_1$, $T(R_1) = T_1$
- Pour $r = R_2$, $T(R_2) = T_2$

$$T(R_1) = -\frac{a}{R_1} + b = T_1 \quad (\text{i})$$

$$T(R_2) = -\frac{a}{R_2} + b = T_2 \quad (\text{ii})$$

$$\text{Donc, (i) - (ii)} \Rightarrow \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)a = T_1 - T_2 \Rightarrow a = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

On remplace a par sa valeur dans (i) pour avoir b :

$$T(a) = -\frac{1}{R_1} \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} + b = T_1 \Rightarrow b = T_1 + \frac{1}{R_1} \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

On remplace les constantes a et b par leurs valeurs dans T(r) et l'équation (II.36) devient :

$$T(r) = -\frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} \frac{1}{r} + \frac{1}{R_1} \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} + T_1 \quad (\text{II.37})$$

Cette relation donne le profil radial de température à travers une sphère creuse.

Le flux de chaleur à travers une sphère creuse est donné par l'équation suivante :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} \quad (\text{II.1})$$

$$\phi = -\lambda 4 \pi r^2 \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)} \frac{1}{r^2} \quad \text{avec} \quad S = 4 \pi r^2$$

$$\phi = -\lambda 4 \pi \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4 \pi \lambda}} \quad (\text{II.38})$$

Ou encore

$$\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{th}} \quad \text{avec} \quad R_{th} = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4 \pi \lambda} \quad (\text{II.38})$$

II.4.7 Conduction à travers une sphère creuse à plusieurs couches

Adoptons le même raisonnement que pour le cas d'un cylindre creux à n couches.

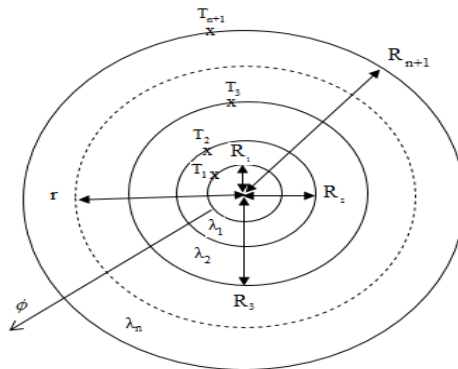


Figure II.12 : Transfert de chaleur à travers un cylindre creux recouvert de n couches

Le flux de chaleur s'écrit :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\left[\frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4 \pi \lambda_1} + \frac{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)}{4 \pi \lambda_2} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n+1}}\right)}{4 \pi \lambda_n} \right]} \quad (\text{II.39})$$

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{R_{eq}} \quad \text{avec} \quad R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (\text{II.40})$$

L'équation générale donnant le flux de chaleur d'une sphère creuse à plusieurs couches est :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}}\right)}{4 \pi \lambda_i}} \quad (\text{II.41})$$

II.5 Conduction multidirectionnelle

Dans le cas où la diffusion de chaleur ne s'effectue pas selon une seule direction, deux méthodes de résolution peuvent être appliquées.

- Méthode de coefficient de forme,
- Méthode numérique (méthodes de différences finies, discrétisation, maillage et nœuds)

Remarque : Cette partie n'est pas détaillée car ne figure pas dans le programme.

II.6 Transfert de chaleur par conduction en régime transitoire ou régime variable

Après l'étude de la conduction en régime stationnaire (la température n'est fonction que des variables d'espace), on s'intéresse à la conduction en régime transitoire ou variable.

Un régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable appelé régime permanent. Les grandeurs caractérisant le comportement du système varient (Figure II.12).

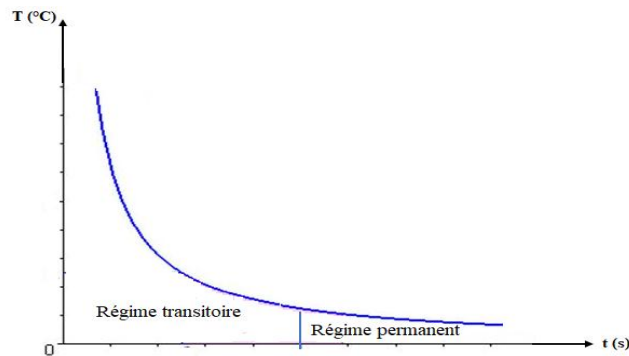


Figure II.12 : Evolution du paramètre température en fonction du temps pour le régime transitoire et le régime permanent

Dans le régime transitoire, on s'intéresse aux phénomènes de transfert de chaleur dans le corps.

Exemple :

Refroidissement des circuits intégrés (résistance)

Congélation des aliments ou refroidissements des aliments

On distingue deux cas :

- Le cas où la température est dépendante uniquement du temps

- Le cas où la température dépend du temps et des variables d'espace

Pour le premier cas, nous avons considéré que la température dans le corps est la même en tout point. La conduction interne est suffisamment bonne (λ élevé). Un changement de température induit une uniformisation rapide de température au sein du corps, la résistance est donc faible pour atteindre la même température partout. Dans ce type de cas la température ne varie qu'en fonction du temps $T = f(t)$.

Pour le deuxième cas, la conductivité thermique du corps est faible (λ petit), provoque une grande résistance à l'intérieur du corps et par conséquent la température varie en fonction du temps et les coordonnées spatiales $T = f(t, x, y, z)$.

II.6 Nombres adimensionnels

Deux nombres adimensionnels sont particulièrement très importants et nécessaire afin d'étudier le transfert de chaleur par conduction en régime variable, le nombre de Biot et le nombre de Fourier.

II.6.1 Le nombre de Biot

On définit le rapport de la résistance interne sur la résistance externe comme étant le nombre adimensionnel Biot (Bi). Autrement dit le nombre Biot est le rapport entre la résistance à la conduction à celle par convection. Ainsi le nombre de Biot compare la convection à la surface d'un corps à la conduction à l'intérieur de ce même corps.

$$Bi = \frac{\frac{e}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}} = \frac{he}{\lambda} = \frac{\text{Résistance interne}}{\text{Résistance externe}} \quad (\text{II.42})$$

e : Est la caractéristique de la dimension du corps que l'on considère, il est préférable d'écrire Biot sous la forme suivante

$$Bi = \frac{hL}{\lambda} \quad (\text{II.43})$$

Bi : Nombre de Biot

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection

λ : Conductivité thermique du corps

L : Dimension caractéristique du corps (demi-épaisseur pour une plaque, rayon pour un cylindre ou une sphère)

II.6.2 Le nombre de Fourier

On définit le nombre de Fourier qui caractérise la part du flux de chaleur qui est transmise au corps à un temps t par rapport à la chaleur stockée par ce corps. Autrement dit, le nombre de Fourier est un nombre adimensionnel qui caractérise la pénétration de la chaleur en régime transitoire.

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (\text{II.44})$$

Fo : Nombre de Fourier

α : Diffusivité thermique (m^2/s)

t : Temps (s)

L : Longueur caractéristique (m)

III.7 Conduction en régime transitoire avec Biot < 0.1 (résistance interne négligeable)

Pour Biot < 0.1, la conductivité thermique du corps est importante donc la résistance interne est négligeable par conséquent, il y a une uniformité de la température dans le corps, la température dépend uniquement du temps, $T = f(t)$.

Considérons le cas d'une petite boule métallique chaude (volume V , surface externe S) initialement à une température T_i (Figure II.13). Au temps $t=0$, on la laisse tomber dans un grand bassin d'eau qui est à une température constante T_∞ . La boule se refroidit et on suppose que le coefficient de transfert de chaleur à sa surface vaut h .

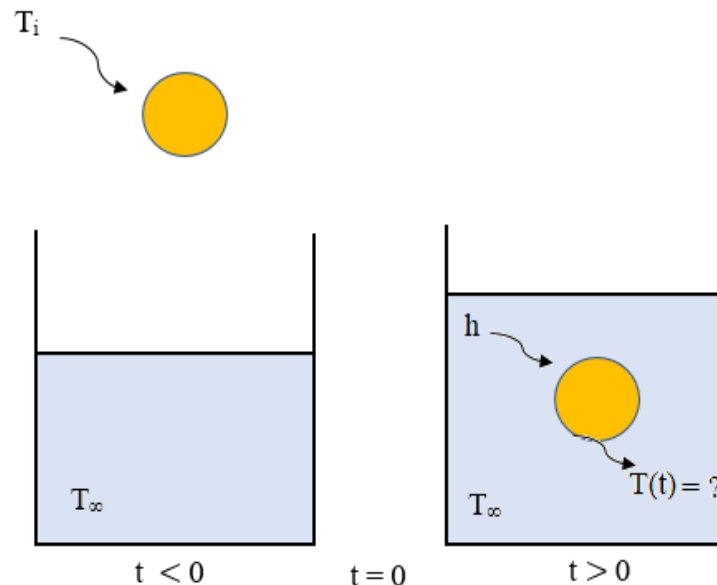


Figure II.13: Exemple de transfert thermique par conduction en régime transitoire

Faisons le bilan de chaleur

La chaleur cédée par la boule métallique est égale à la chaleur récupérée par le milieu (grand bassin d'eau).

$$- m C_p \frac{dT}{dt} = h S (T - T_\infty) \quad (\text{II. 45})$$

m : Masse de la boule

C_p : Chaleur spécifique de la boule

Le signe (-), car il s'agit d'un refroidissement donc la boule cède de la chaleur. Par contre nous avons un signe +, lorsqu'il s'agit d'un chauffage.

L'équation (II.45) s'écrit :

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_\infty} = \frac{h S}{m C_p} \int_0^t dt \quad (\text{II. 46})$$

D'où

$$\text{Ln} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = - \frac{h S}{m C_p} t \quad (\text{II.47})$$

Avec

$$m = \rho V \quad (\text{II.48})$$

ρ : Masse volumique

V : Volume de la boule

La variation de la température en fonction du temps dans la boule métallique est donnée par la relation (III.8).

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp\left(- \frac{h S}{\rho V} t\right) \quad (\text{II.49})$$

Le temps requis pour que la boule atteigne une certaine température est déterminée par l'équation (II.50).

$$t = - \frac{\rho V C_p}{h S} \text{Ln} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{II.50})$$

II.8 Conduction en régime transitoire avec $\text{Biot} \geq 0.1$ (résistance interne n'est pas négligeable)

Pour $\text{Biot} \geq 0.1$ la conductivité thermique du corps est faible, la résistance à la conduction est très grande donc la température dépend du temps et des variables d'espace, $T = f(x, y, z, t)$.

La température à l'extérieure du corps n'est plus la même qu'à l'intérieure, donc le bilan de chaleur n'est plus applicable et par conséquent, on utilise l'équation fondamentale de conduction de température.

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

q_v : Génération d'énergie

α : Diffusivité thermique m^2/s

Comme il y'a pas génération d'énergie, l'équation (II.12) de diffusion de chaleur par conduction devient :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.51})$$

La résolution de cette équation différentielle peut aboutir à des solutions analytiques, mais le plus souvent, nous avons recours à des résolutions numériques (méthodes des différences finies) ou autres. Cependant, certains auteurs ont exploité les solutions analytiques pour produire des graphiques appelés abaque.

Heisler est le premier auteur avoir publier ces abaque (ou graphes) qui sont un outil d'analyse graphique pour évaluer la conduction en régime transitoire à travers une paroi plane infiniment longue d'épaisseur $2L$, un cylindre infiniment long de rayon r_0 et une sphère de rayon r_0 .

Pour une géométrie donnée (Figure II.14-II.16), le diagramme est tracé en utilisant trois variables différentes. L'axe vertical du graphe représente la température sans dimension θ , pour les positons de $(x/L \text{ et } r/r_0)$ $0 - 1$, alors que l'axe horizontal désigne le nombre de Fourier et les courbes à l'intérieur du graphe représentent l'inverse des valeurs de Biot.

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = f(\text{Bi}, \text{Fo}, \xi) \quad (\text{II.52})$$

$$\xi = \frac{x}{e} \quad (\text{II.53})$$

Figure II.17 montre en particulier la chaleur transférée sans dimension de la paroi en tant que fonction d'une variable de temps sans dimension en fonction de Biot et les courbes à l'intérieur du graphe sont des valeurs de Fourier.

$$\Phi = \frac{\int_0^t q \, dt}{mcp (T_i - T_\infty)} = f(\text{Bi}, \text{Fo}) \quad (\text{II.54})$$

Φ : Désigne le rapport de quantité de chaleur extraite à l'instant t sur la quantité de chaleur maximale à extraire

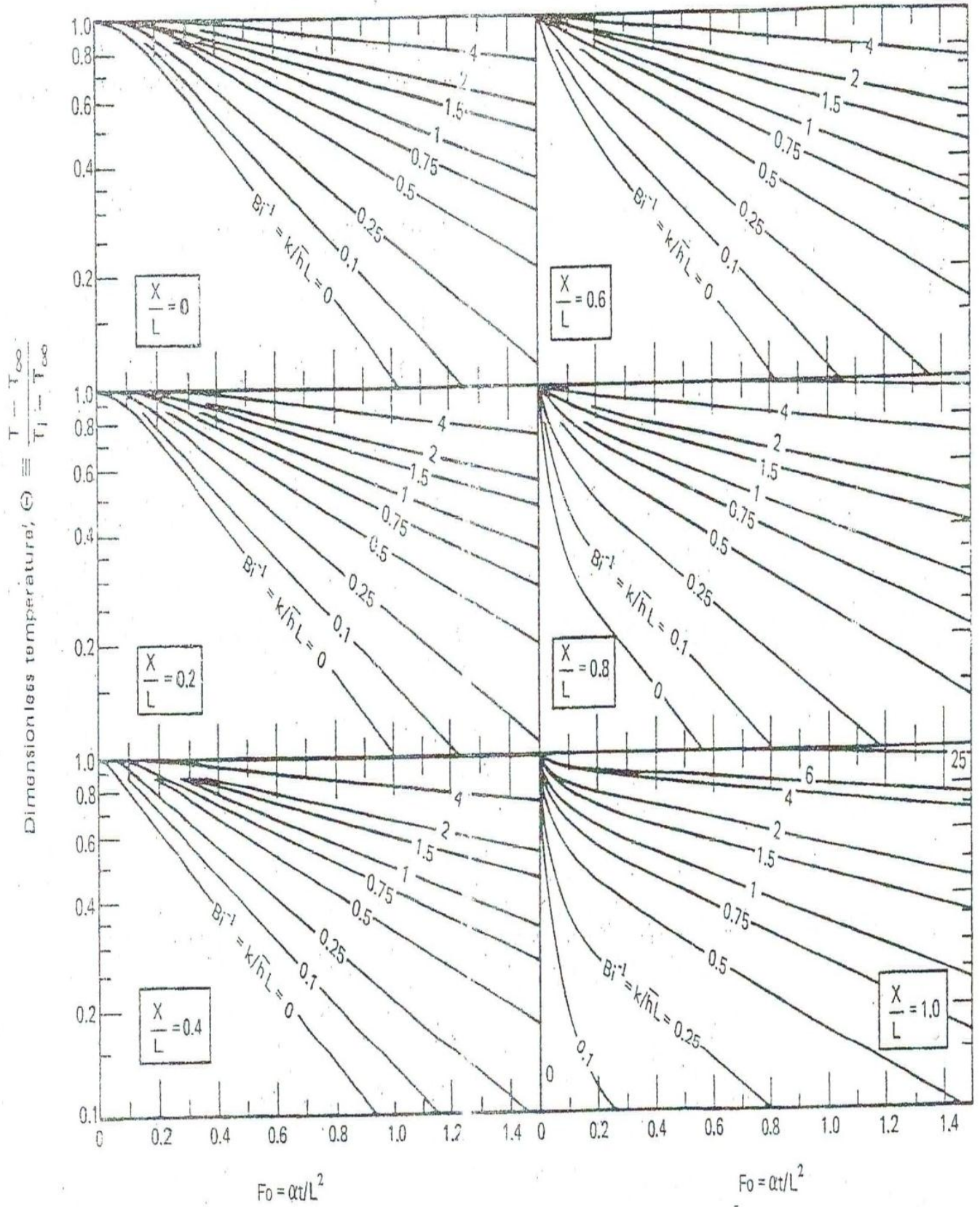


Figure II.14 : Distribution de la température dans une dalle, en régime transitoire, du centre ($x/L = 0$) à la limite extérieure ($x/L = 1$), pour six positions.

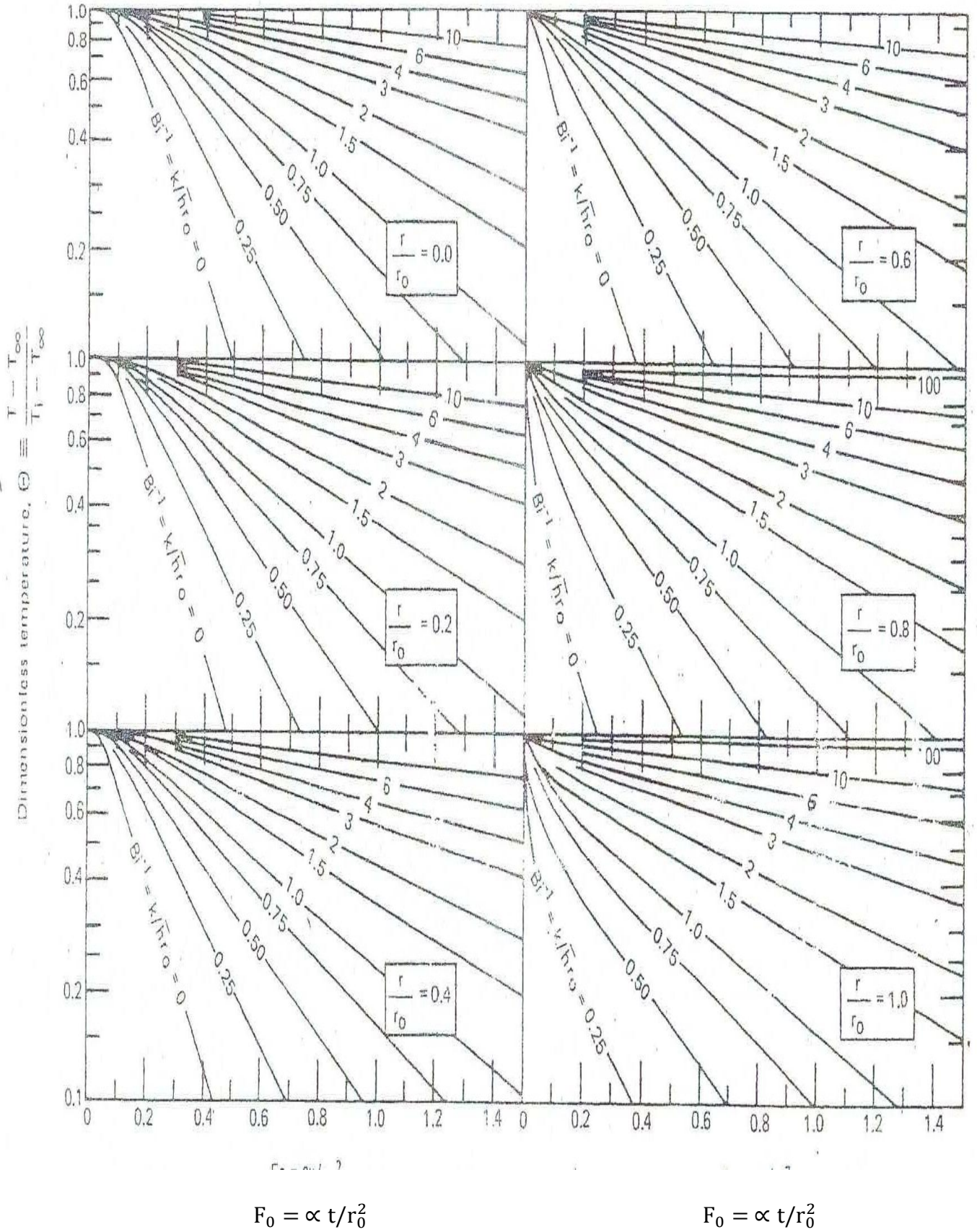
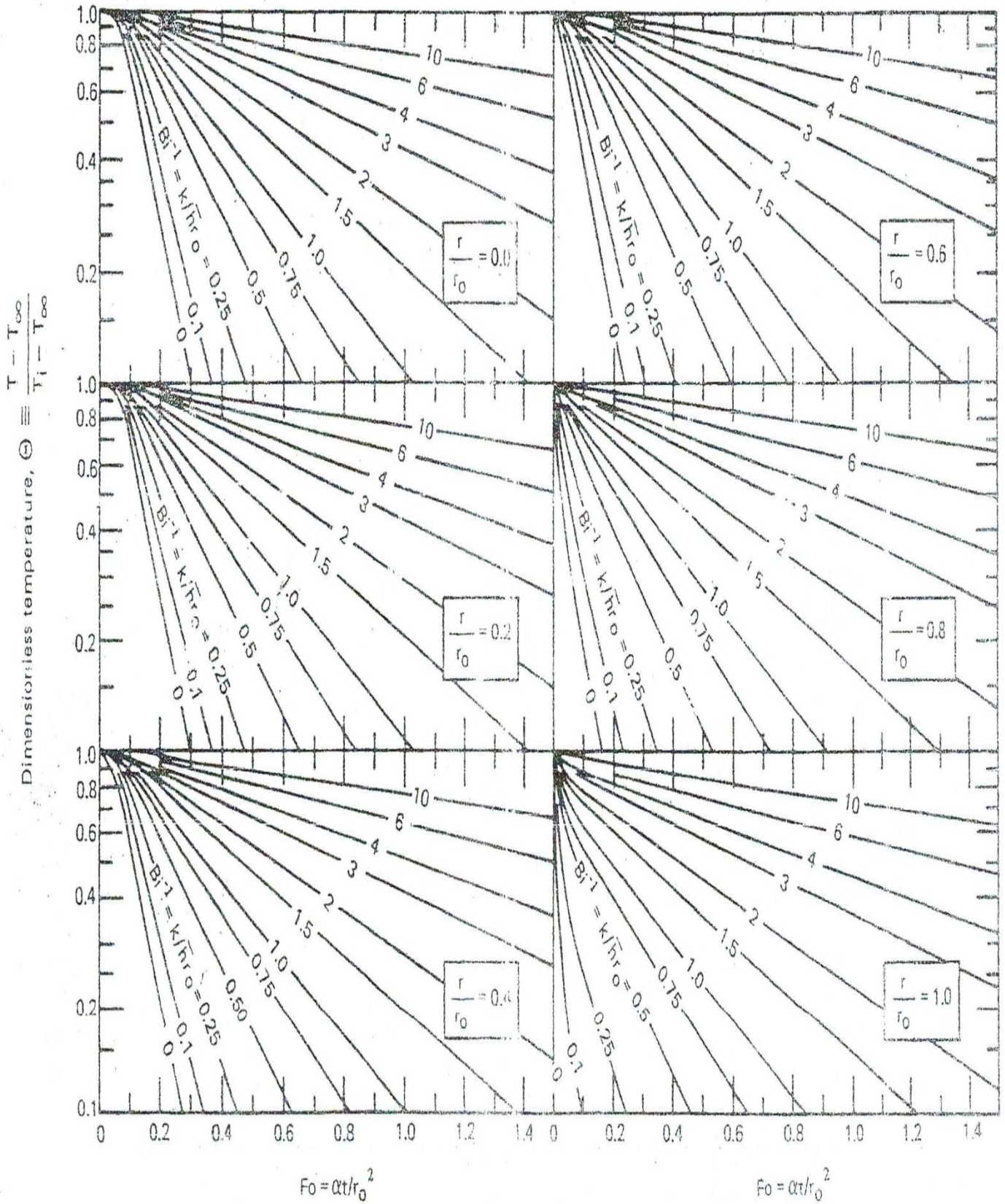


Figure II.15 : Distribution de la température dans un long cylindre rayon, r_0 , en régime transitoire, pour six positions, de la ligne médiane ($r/r_0 = 0$) à la limite extérieure. ($r/r_0 = 1$).



II.16: Distribution de la température dans un une sphère rayon, r_0 , en régime transitoire, pour six positions, de la ligne médiane ($r/r_0 = 0$) à la limite extérieure $r/r_0 = 1$.

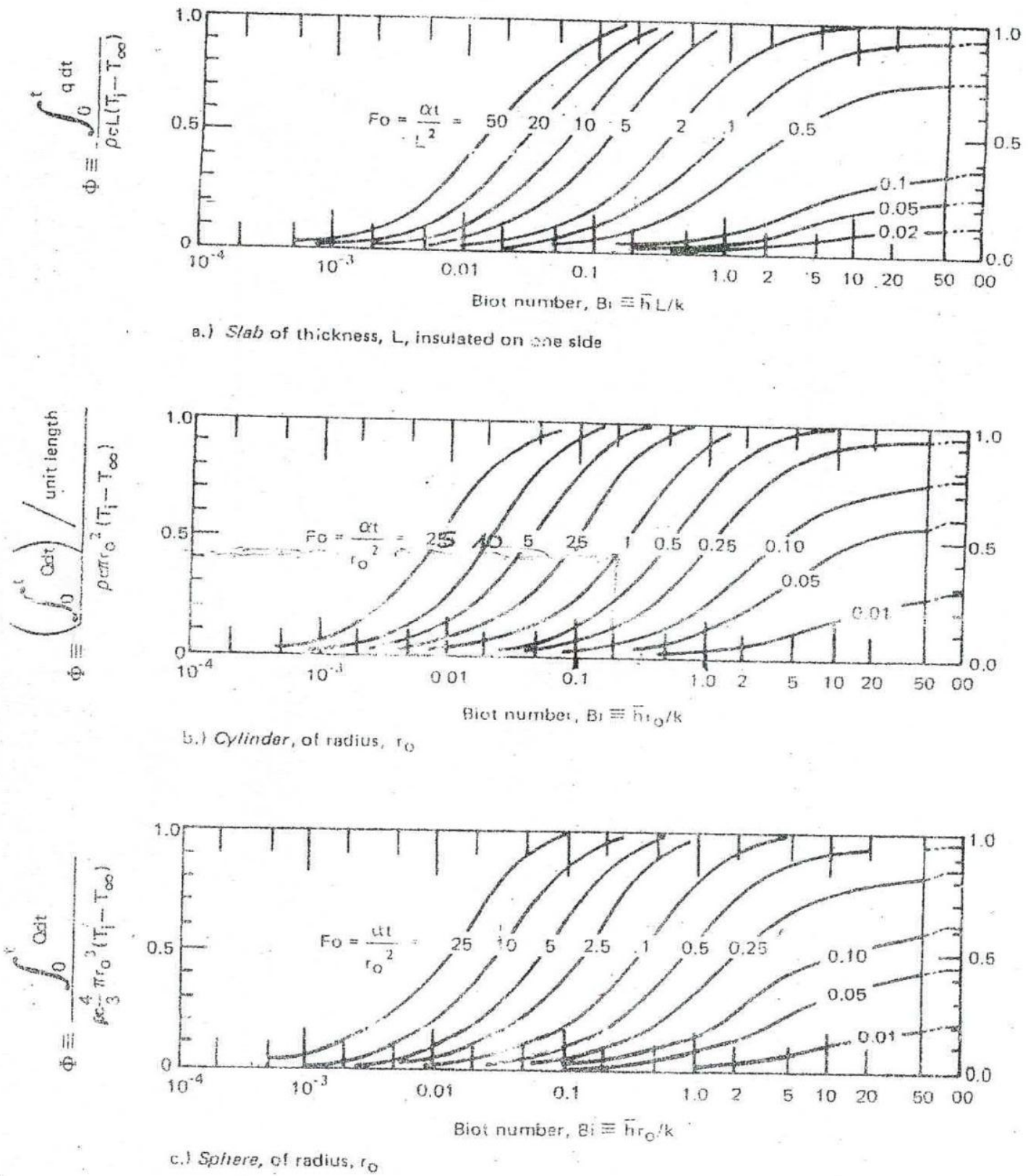


Figure II.17 : L'évacuation de la chaleur des corps refroidis instantanément en fonction de h et du temps.

II.9 Exercices d'application

Exercice 1

Le mur d'un four comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres :

- Une couche de briques réfractaires ($\lambda = 1.21 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$);
- Une couche de revêtement calorifuge ($\lambda = 0.08 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$);
- Une couche de briques ($\lambda = 0.69 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$).

Chaque couche a une épaisseur de 10 cm. La température est de 872°C à l'intérieur du four et de 32°C à l'extérieur.

1. Si la surface du mur est de 42 m^2 , calculer la perte calorifique par conduction pendant 24 heures.
2. Quelle est la température T_m au milieu du revêtement ?

Exercice 2

Le mur d'une maison est formé d'une couche de brique ($\lambda_1 = 0.7 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$) de 10 cm d'épaisseur suivie d'une couche de plâtre ($\lambda_2 = 0.48 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$) de 5 cm d'épaisseur. Quelle serait l'épaisseur de la couche d'isolant ($\lambda_3 = 0.065 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$) qu'il faudrait ajouter afin de réduire les pertes thermiques de 80 %.

Note : On supposera la différence de température est constante entre les parois interne et externe du mur avec ou sans isolant.

Exercice 3

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air sec immobile d'épaisseur de 12 mm. L'épaisseur de chaque vitre est de 3,5 mm, les conductivités thermiques sont : $\lambda_v = 0,7 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ et $\lambda_a = 0,024 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$. Pour une chute de température de 5°C entre les 2 faces extrêmes du double vitrage.

1. Calculer les pertes thermiques pour une vitre de 1 m^2 , en négligeant l'effet du coefficient de convection de part et d'autre de chaque vitre.
2. Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur égale à 3,5 mm.

Exercice 4

La figure (a) montre une plaque constituée de différentes sections de hauteur, épaisseur et conductivité thermique différentes. Pour ce mur composite de longueur L et en supposant le transfert de chaleur unidirectionnel, déterminer la quantité de chaleur par unité de temps le traversant de gauche à droite ($T_1 > T_2$). Comparer cette quantité de chaleur à celle correspondant à un mur simple de même longueur, d'épaisseur $3e$, de hauteur $3a$ et de conductivité λ (figure (b)).

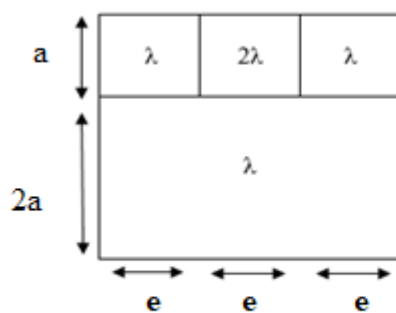


Figure (a)

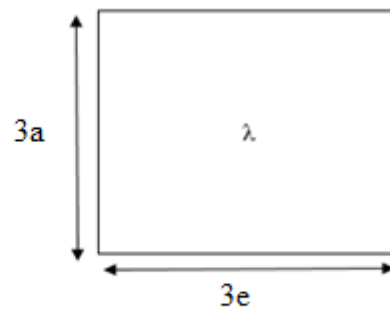


Figure (b)

Exercice 5

Prouvez que si la conductivité thermique d'une paroi est une fonction linéaire de la température, alors la quantité de chaleur transmise en régime permanent, à travers cette paroi, peut être exprimée en utilisant la conductivité thermique évaluée à la température moyenne de la paroi.

Exercice 6

Un tube en chrome ($\lambda_c = 19 \text{ kcal/h. m. }^\circ\text{C}$) de diamètres intérieur et extérieur 2.5 cm et 5 cm respectivement, est recouvert d'une couche d'amiante ($\lambda_a = 0.071 \text{ kcal/h. m. }^\circ\text{C}$) de 5 cm d'épaisseur. Sachant que la température interne du tube est de 260°C et que celle de l'amiante est de 38°C , calculer les pertes calorifiques en w/m et la résistance équivalente du système considéré pour un mètre de longueur.

Exercice 7

Soit une sphère en acier de rayon intérieur 10 cm et de rayon extérieur 15 cm dont la température de la paroi interne est $T_{in} = 119^\circ \text{C}$ et celle de la paroi externe, $T_{ex} = 100^\circ \text{C}$. Sachant que la conductivité thermique de l'acier vaut $46 \text{ W/m. }^\circ\text{C}$, calculer :

1. La résistance thermique.
2. Le flux de chaleur, correspondant.

Exercice 8

Une boule métallique ($\lambda = 35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$), $C_p = 0.46 \text{ kg/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) de 5 cm de diamètre, initialement à 450°C , est subitement plongée dans un fluide ayant une température de 100°C . sachant que le coefficient de transfert de coefficient de transfert de chaleur est de $10 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Trouver le temps nécessaire à la boule pour atteindre une température de 150°C . On négligera le transfert par rayonnement de la boule.

Exercice 9

Déterminer les profils de température en fonction du temps d'un fil de cuivre 0.8 mm de diamètre initialement à 150°C puis brusquement plongé dans :

- L'eau ($h = 85 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$) à 38°C
- L'air ($h = 11 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$) à 38°C

Pour le cuivre $\lambda = 373 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $C_p = 0.38 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ et $\rho = 8940 \text{ kg/m}^3$

Exercice 10

Une plaque d'aluminium de 20 cm d'épaisseur, initialement à 200°C est brusquement plongée dans un milieu à 70°C . Le coefficient de convection h étant à $525 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Déterminer le temps nécessaire pour que la température à 4 de la surface de chacune des deux faces principales de la plaque atteigne 175°C . En déduire la quantité de chaleur échangée par mètre carré de surface.

On prendra pour l'aluminium : $\lambda = 215 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $C_p = 905 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$; $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$; $\alpha = 8.4 \text{ m}^2/\text{s}$

Chapitre III : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

III.1 Généralités

Lorsque le transfert de chaleur s'accompagne d'un transfert de masse, il est appelé transfert par convection. L'étude de transfert de chaleur par convection permet de terminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi. Le flux de chaleur échange dépend de plusieurs paramètres. Parmi ces paramètres :

- La différence de température entre la paroi et le fluide
- La vitesse du fluide
- La surface d'échange

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide ; on distingue :

- La convection naturelle.
- La convection forcée.

En convection naturelle ou libre, le fluide est mis en mouvement sous l'effet :

- Des différences de masse volumiques résultant des différences de températures sur les frontières.
- D'un champ de forces extérieures (pesanteur)

Par contre, en convection forcée, le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur...)

Pour cela, il est nécessaire de considérer la nature du régime d'écoulement, on distingue :

- Ecoulement en régime turbulent
- Ecoulement en régime laminaire.

III.2 Loi de Newton- coefficient d'échange par convection

Soit en convection libre ou forcée et soit le régime d'écoulement du fluide laminaire ou turbulent, le flux de chaleur transmis est donné par la relation suivante :

$$\phi = \frac{dq}{dt} = h S (T_p - T_\infty) \quad (\text{III.1})$$

ϕ : Flux de chaleur (W) (J/s)

h : Coefficient d'échange de chaleur par convection ($W/m^2 \cdot K$)

S : Surface d'échange (m^2)

$T_p - T_\infty$: Différence de température entre le solide et le fluide (K) ou ($^\circ C$)

Avant de calculer le flux de chaleur, il est nécessaire de déterminer h qui dépend de nombreux paramètres :

- Caractéristique du fluide.
- Nature d'écoulement
- La température

Selon la nature de la convection libre ou forcée, l'ordre de grandeur du coefficient de convection h est donné par le tableau suivant :

Tableau III.I : Ordre de grandeur du coefficient de convection de certains fluides selon la nature de la convection

Nature de la convection	Ordre de grandeur de h ($W/ m^2 \cdot K$)
Libre (air)	5-25
Libre (eau)	100-900
Forcée (air)	10-500
Forcée (eau)	100-15 000
Forcée (huile)	50-2000
Forcée (eau bouillante)	2500-25000

III.3 Convection naturelle

La particule chaude se met en mouvement et assure directement le transfert de la chaleur vers le milieu le plus froid par la poussée d'Archimède. Le régime devient convectif et c'est le phénomène de convection naturelle.

Exemple de transfert de chaleur par convection naturelle,

- Chauffage d'une maison par des radiateurs.
- Formation des vents dans l'atmosphère

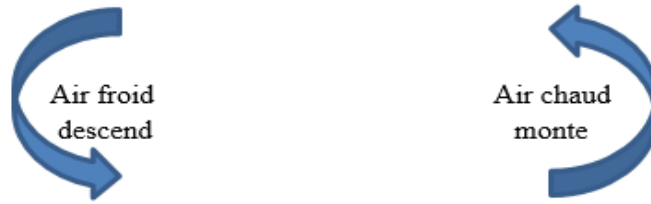


Figure III.1 : Exemple de transfert de chaleur par convection libre

III.4 Convection forcée (étude de phénomène de convection)

Plusieurs points sont considérés afin d'étudier la convection forcée. Parmi ces points nous pouvons citer :

III.4.1 Couches limites

L'étude de l'écoulement au voisinage des parois est nécessaire pour la détermination des échanges thermique par convection entre un solide et le fluide qui l'entoure.

Soit un fluide qui s'écoule au travers d'une surface S . u voisinage de la surface, se développent les couches limites (de quelques mm d'épaisseur δ) hydrodynamiques et thermiques dans lesquelles on observe les variations de vitesse et de température du fluide.

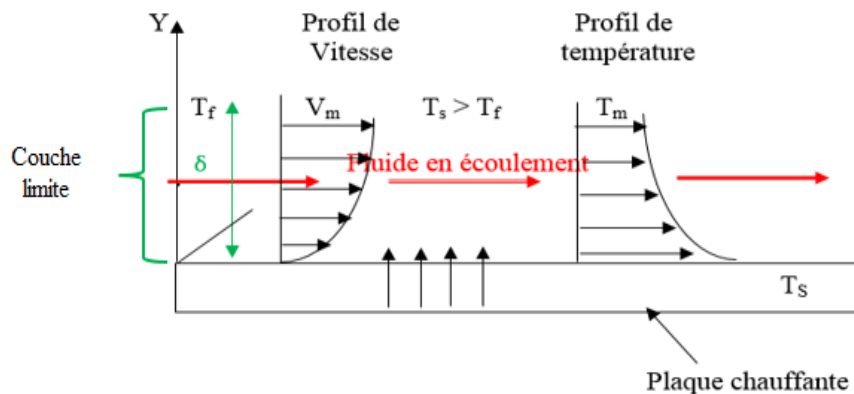


Figure III.2 : Développement de la couche limite de l'écoulement (vitesse V) et la couche limite thermique sur une surface plane

Le transfert de chaleur de la plaque vers le fluide résulte de deux mécanismes.

- Au voisinage immédiat de la surface, le transfert se fait par conduction.

- Loin de la surface, le transfert résulte aussi du déplacement du fluide.

Dans la couche limite, le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction ; nous pouvons donc écrire :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT_s}{dx}, \text{ le flux de chaleur à travers la surface (s).}$$

$$\phi = -\lambda S \frac{dT_f}{dx}, \text{ le flux de chaleur à travers la couche limite d'épaisseur } \delta.$$

T_s : Température de la surface du solide.

T_f : Température moyenne du fluide assez loin de la paroi.

T_f et T_s ne sont pas connus pour déterminer le flux de chaleur à partir des deux équations précédentes. La loi de Newton permet de contourner cette difficulté en utilisant la différence de température ($T_s - T_f$).

$$\phi = h S (T_p - T_f) = h S (T_p - T_\infty) \quad (\text{III.2})$$

III.4.2 Coefficient de convection h

Le coefficient h dépend de plusieurs paramètres. L'échange de chaleur est grand, lorsque la vitesse d'écoulement du fluide, sa masse volumique, sa chaleur spécifique C_p , sa conductivité thermique (λ) sont importante et sa viscosité cinématique ν est plus faible.

- h dépend également des dimensions de la paroi, de sa nature et de sa forme, donc $h = f(V, D, C_p, \lambda, \rho, \mu)$.
- La nature d'écoulement du fluide laminaire ou turbulent a beaucoup d'importance sur le transfert de chaleur.

Le grand nombre de facteur influents le transfert de chaleur par convection explique la difficulté de toute étude théorique, voire expérimentale. Par contre la méthode utilisant l'analyse dimensionnelle semble être plus facile dans la mise en œuvre, pour la détermination de l'expression du coefficient de convection h. Cependant, la résolution des équations fait apparaître des nombres sans dimensions très utiles dans plusieurs études et en particuliers dans les phénomènes convectifs.

Ces nombres adimensionnels sont en particulier :

- Le nombre de Reynolds (Re)
- Le nombre de Nusselt (Nu)
- Le nombre de Grashof. (Gr)
- Le nombre de Prandtl (Pr)

III.4.2.1 Nombre de Reynolds

Le régime d'écoulement d'un fluide peut être laminaire ou turbulent. Le passage d'un régime à un autre est caractérisé par le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (\text{III.3})$$

ρ : Masse volumique du fluide (Kg/m^3)

V : Vitesse moyenne du fluide (m/s)

μ : Viscosité dynamique du fluide ($\text{kg/m} \cdot \text{s}$)

ν : Viscosité cinématique du fluide (m^2/s)

D : Diamètre de la conduite (m)

Pour $\text{Re} \leq 2200$, le régime d'écoulement du fluide est laminaire.

Pour $2200 < \text{Re} < 10^4$, le régime d'écoulement du fluide est transitoire.

Pour $\text{Re} \geq 10^4$, le régime d'écoulement du fluide est turbulent.

III.4.2.2 Nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt est un nombre adimensionnel utilisé pour caractériser les transferts convectifs entre un fluide et une paroi. Il détermine l'importance de la convection par rapport à la conduction.

Nu est une fonction directe du h , sa connaissance permet de déterminer la valeur de h .

$$\text{Nu} = \frac{h S \Delta T}{\lambda S \frac{\Delta T}{L}} = \frac{h L}{\lambda} \quad (\text{III.4})$$

h : Coefficient de transfert convectif ($\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$)

L : Longueur caractéristique (m)

λ : Conductivité thermique du fluide ($\text{W/m} \cdot \text{K}$)

III.4.2.3 Nombre de Grashof

Le nombre de Grashof quantifie l'importance des forces d'Archimède par rapport aux forces visqueuses en convection naturelle. Il caractérise la force de viscosité du fluide.

$$\text{Gr} = \frac{g \beta L^3 \Delta T}{\nu^2} = \frac{g \beta L^3 \Delta T \rho^2}{\mu^2} \quad (\text{III.5})$$

g : Accélération de la pesanteur (m/s)

β : Coefficient de dilatation du fluide

ΔT : Différence de température (K)

L : Longueur caractéristique, peut être le diamètre de la conduite ou une surface plane

ρ : Masse volumique de fluide (kg/m³)

ν : Viscosité cinématique (m²/s)

μ : Viscosité dynamique du fluide (kg/m. s)

III.4.2.4 Nombre de Prandtl

Il détermine le rapport entre diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) et la diffusivité thermique (celle de la chaleur).

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu}{\rho \frac{\lambda}{\rho c_p}} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (\text{III.6})$$

ν : Viscosité cinématique (m²/s)

μ : Viscosité dynamique du fluide (kg/m. s)

ρ : Masse volumique de fluide (kg/m³)

α : Diffusivité thermique (m²/s)

C_p : Capacité calorifique à pression constante (en J/ kg. K)

III.5 Méthode de calcul du coefficient de convection h

Avant de procéder au calcul de h , il est nécessaire de savoir :

- Si le fluide est liquide ou gaz
- L'intervalle de température du fluide.
- S'il s'agit d'une convection naturelle ou forcée.
- Si le régime d'écoulement est laminaire ou turbulent
- Si le fluide est en contact avec une surface plane ou circule dans un tube et ou circule entre deux surfaces planes....etc.

La détermination du nombre de Reynold est importante car il nous renseigne sur la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent).

A partir de nombre de Reynolds, Graschof et Prandtl, le nombre de Nusselt est calculé.

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr})$$

Le coefficient de convection h est calculé à partir du nombre de Nusselt, $h = f(\text{Nu})$.

Plusieurs corrélations empiriques ont été proposées par de nombreux auteurs afin de calculer le nombre de Nusselt.

III.5.1 Quelques corrélations empiriques utilisées en convection naturelle.

III.5.1.1 Ecoulement du fluide à l'intérieur des conduites

Considérons une conduite cylindrique de diamètre D traversée par un fluide :

- Régime d'écoulement laminaire, $Re \leq 2200$



$$D = D_H = \frac{4A_{\perp}}{P} \quad (\text{III.7})$$

D_H : Diamètre hydraulique

A_{\perp} : Surface perpendiculaire à l'écoulement du fluide

P : Périmètre mouillé

D : Diamètre de la conduite

➤ HAUSSEN (1943)

$$Nu = 3.66 + \frac{0.0668 Re_D Pr \frac{D}{L}}{1 + 0.04 (Re_D Pr \frac{D}{L})^{2/3}} \quad (\text{III.8})$$

- $\frac{D}{L} > 0.04 Re_D$
- $T_p = \text{cste}$
- Propriétés physiques à T_p

➤ SIEDER et TATE

$$Nu = 1.86 (Re_D Pr \frac{D}{L})^{1/3} (\frac{\mu_{\infty}}{\mu_p})^{0.14} \quad (\text{III.9})$$

- $0.48 < Pr < 16700$
- $Re_D Pr \frac{D}{L} \geq 16700$
- Propriétés physiques à T_{∞} sauf μ_p

III.5.1.2 Ecoulement du fluide sur un plan

- Régime d'écoulement laminaire, $Re < 3.10^5$

$$Nu = 0,479 Gr^{1/4} \quad (III.10)$$

- Régime d'écoulement turbulent, $Re > 3.10^5$

$$Nu = 0,13 (Gr \cdot Pr)^{1/3} \quad (III.11)$$

III.5.2 Quelques corrélations empiriques utilisées en convection forcée

III.5.2.1 Ecoulement du fluide à l'intérieur des conduites

- Ecoulement du fluide dans des conduites, $Re > 10^4$



➤ DITTUS – BOELTER

$$Nu = 0.023 Re_D^{0.8} Pr^n \quad (III.12)$$

- $0,7 < Pr < 100$
- $\frac{L}{D} > 60$
- $n = 0.4$, chauffage du fluide
- $n = 0.3$, refroidissement du fluide
- Propriétés physiques à T_∞

➤ SIEDER et TATE (1936)

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right)^{0.14} \quad (III.13)$$

- $0,7 < Pr < 16700$
- $\frac{L}{D} > 60$
- $(T_p - T_\infty) > 10 \text{ }^\circ\text{C}$ pour les liquides
- $(T_p - T_\infty) > 100 \text{ }^\circ\text{C}$ pour les gaz
- Propriétés physiques à T_∞ sauf μ_p à T_p

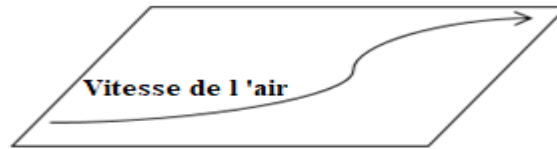
➤ **NUSSELT (1931)**

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{0.055} \quad (III.14)$$

- $10 < \frac{L}{D} < 400$
- Propriétés physiques à T_∞

III.5.2.2 Ecoulement sur un plan

Considérons une surface plane à travers laquelle circule de l'air à une vitesse V .



- Régime d'écoulement laminaire, $Re < 3.10^5$

$$Nu = 0.66 Pr^{1/3} Re^{1/2} \quad (III.15)$$

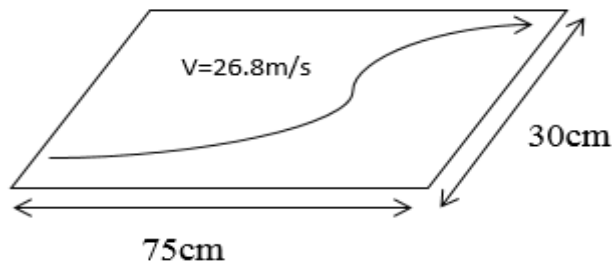
- Régime d'écoulement turbulent, $Re > 3.10^5$

$$Nu = 0.036 Pr^{1/3} Re^{4/5} \quad (III.16)$$

III.6 Exercices d'application

Exercice 1

De l'air à 5°C circule sur une surface plane de 75cm de long et 30 cm de large à la température 71°C , avec une vitesse moyenne de 26.8 m/s. Calculer la chaleur échangée entre l'air et la surface.



Données

Température de l'air : $T_{\text{air}} = 5^{\circ}\text{C}$

Masse volumique de l'air : $\rho = 1.136 \text{ kg/m}^3$

Chaleur spécifique isobare de l'air : $C_p = 1 \text{ kJ /g. K}$

Viscosité dynamique de l'air : $\mu = 1.91 \cdot 10^{-5}$ poiseuille (kg/m. s)

Conductivité de l'air : $\lambda = 0.027 \text{ W/m. K}$

Exercice 2

De la vapeur d'eau circule à 100°C sous 1 atm dans une conduite cylindrique de longueur

10 m et de diamètre intérieur 0.05 m avec un débit de $0.012 \text{ m}^3/\text{s}$.

1. Evaluer le coefficient de convection h et la quantité de chaleur par unité de temps échangée entre les parois de la conduite et le fluide si la température de ces parois est maintenue à 204°C (utiliser la corrélation de SIEDER et TATE)
2. Que devient cet échange de chaleur si le diamètre de la conduite est multiplié par 10 tout en conservant le même débit de vapeur ?

Données

Les propriétés physiques de la vapeur à 100°C sont :

Viscosité cinématique : $\nu = 2.1310^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Viscosité dynamique à la paroi : $\mu_p = 1.614 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m. s}$

Viscosité dynamique du fluide : $\mu_{\infty} = 1,228 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m. s}$

Conductivité thermique : $\lambda = 0,0237 \text{ W/m. K}$

$Pr = 1,052$

Exercice 3

Dans une conduite longue de section rectangulaire, de 200 et 300 mm de côté s'écoule de l'air avec une vitesse de 15 m/s. Calculez le coefficient de transfert de chaleur de l'air vers les parois si la température moyenne de l'air est de 40°C

On donne pour l'air

T (°C)	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)	λ (W/m. °C)	Pr
20	1.218	$1.504 \cdot 10^{-5}$	0.056	0.713
30	1.173	$1.596 \cdot 10^{-5}$	0.0264	0.710
40	1.138	$1.695 \cdot 10^{-5}$	0.0271	0.709

Exercice 4

Dans un cylindre de 2.5 cm de diamètre et de 3 m de long circule de l'air à la température de 196°C. Le cylindre maintenu à la température de 25°C, reçoit un flux de chaleur égal à 5500 W.

1. Déterminer le coefficient d'échange de chaleur par convection (h).
2. Déduire le nombre de Nusselt, sachant que $\lambda = 0.026 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$
3. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement en admettant que $\text{Nu} = 0.023 \text{ Re}^{0.8} \text{ Pr}^{0.4}$; si le nombre de Prandtl est égal à 0.73.

CHAPITRE IV : TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

IV.1 Généralités

Tout corps solide, liquide ou gaz dont la température est supérieure à 0 K émet de l'énergie par rayonnement (Radiation). L'intensité de la chaleur émise dépend de la température du corps.

En 1800 William Herschell a permis de mettre en évidence l'existence du rayonnement infrarouge d'où le rayonnement thermique. Une onde électromagnétique est caractérisée par sa fréquence ν et sa longueur d'onde λ reliée par.

$$\nu = \frac{C}{\lambda} \quad (\text{IV.1})$$

C : Vitesse de la lumière (m/s)

λ : Longueur d'onde (m)

- Le flux d'énergie est autant plus grand que la fréquence est élevée et la longueur d'onde faible
- Divers rayonnements électromagnétiques classés selon leur longueur d'ondes sont regroupés dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Le spectre électromagnétique

Nature de la radiation	Longueur d'onde (λ)
Rayon gamma (γ)	< 10 pm
Rayon X	100 pm - 10 nm
Ultra-violet UV	10 nm - 1 μ m
Visible	390 nm - 740 μ m
Infrarouge IR	1 μ m - 1 00 μ m
Tétrahertz - submillimétrique	1 nm - 1 mm
Micro-ondes	1cm - 1m
Onde-radio	1 m - 100 m

IV.2 Réception du rayonnement par un solide

Considérons un corps à la température T , recevant un flux de rayonnement thermique incident ϕ_i (en watt). Une partie $\phi_i \alpha$ de l'énergie est réfléchiée par la surface S , une autre partie $\phi_i \beta$ est absorbée par le corps et le reste $\phi_i \gamma$ est transmis.

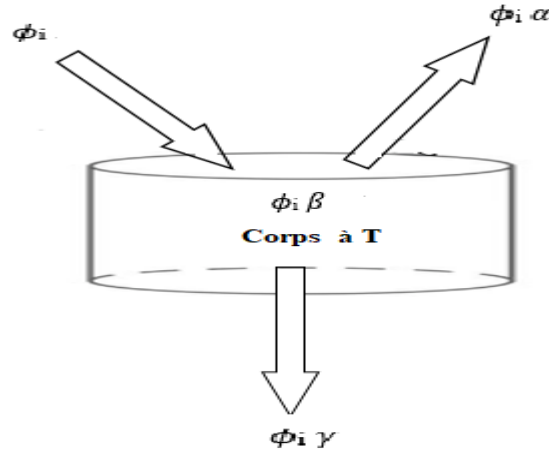


Figure IV.1 : Répartition d'un flux incident par rayonnement sur un solide

$$\phi_i = \phi_r + \phi_a + \phi_t \quad (\text{IV.2})$$

Où

ϕ_i : Flux incident

ϕ_r : Flux réfléchi

ϕ_a : Flux absorbé

ϕ_t : Flux transmis

$$\phi_i = \phi_i \alpha + \phi_i \beta + \phi_i \gamma \quad (\text{IV.3})$$

$$\phi_i = \phi_i (\alpha + \beta + \gamma) \quad (\text{IV.4})$$

$$1 = \alpha + \beta + \gamma \quad (\text{IV.5})$$

α : Pouvoir monochromatique réfléchi

β : Pouvoir monochromatique absorbé

γ : Pouvoir monochromatique de transmis

Ces pouvoirs monochromatiques dépendent de la nature du corps, de son épaisseur de sa température, de la longueur d'onde λ , du rayonnement incident et de l'angle incident.

- Pour un corps transparent

$$\phi_i = \phi_t \Rightarrow \phi_r = \phi_a = 0 \quad (\text{IV.6})$$

- Pour un corps opaque

$$\phi_t = 0 \Rightarrow \phi_i = \phi_r + \phi_a \quad (\text{IV.7})$$

IV.3 Définition d'un corps noir

Le corps noir est un corps qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit indépendamment de son épaisseur, de sa température et de l'angle incident. Il est défini par une émissivité $\varepsilon = 1$.

L'émissivité correspond au flux radiatif du rayonnement thermique émis par un élément de surface à température donnée, rapporté à la valeur de référence qu'est le flux émis par un corps noir à cette même température. Cette dernière valeur étant maximale possible, l'émissivité est un nombre inférieur ou égal à l'unité.

IV.4 Loi de rayonnement ou loi de Stefan-Boltzmann

Un corps noir porté à une température T, émet une quantité d'énergie évaluée par l'équation suivante :

$$\phi = \sigma S T^4 \quad (\varepsilon = 1) \quad (\text{IV.8})$$

ϕ : Appelé pouvoir émissif du corps

σ : Constante de Stefan- Boltzmann égale à $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}^4$

Dans le cas d'un corps non noir, l'énergie rayonnée est donnée par l'équation suivante :

$$\phi = \sigma \varepsilon S T^4 \quad (\text{IV.9})$$

ε : Emissivité du corps compris entre 0 et 1

$$\varepsilon = \frac{\text{Pouvoir émissif du corps reel}}{\text{Pouvoir émissif du corps noir}} \quad \text{à la même température} \quad (\text{IV.10})$$

IV.4.1 Cas de deux plaques infinies noires

Soient deux plaques infinies noires représentées par le schéma suivant :

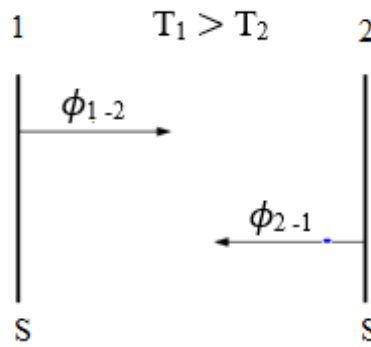


Figure IV. 2 : Flux thermique par rayonnement pour deux plaques noires infinies

Le flux de chaleur émis par rayonnement est donné par la relation suivante :

$$\phi = \sigma S (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.11})$$

Pour deux corps de dimension finie et non noirs, le facteur géométrique F_G et le facteur de correction F_ϵ , apparaissent et l'équation (IV.11) s'écrit :

$$\phi = \sigma S F_G F_\epsilon (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.12})$$

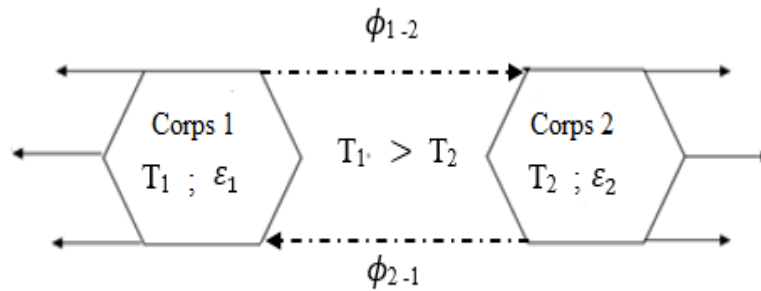


Figure IV. 3 : Deux corps de dimension finie et non noirs

IV.4.2 Cas de deux plaques infinies non noires

Considérons deux plaques infinies non noires d'émissivités différentes définies par le schéma suivant :

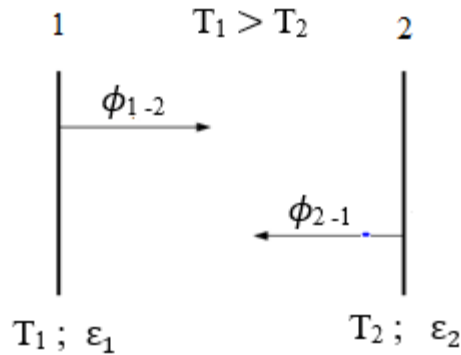


Figure IV. 4 : Flux de chaleur de deux corps de dimension finie et non noirs

Nous avons $F_G = 1$

$$F_\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (\text{IV.13})$$

Le flux de chaleur s'écrit :

$$\phi = \sigma S \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.14})$$

Le tableau IV.2 donne l'émissivité de certains matériaux à différentes températures.

Tableau IV.2 : L'émissivité de quelques corps

Matériaux	Température (°C)	ε (émissivité)
Aluminium, poli, 98 % pureté	200 – 600	0.04 – 0.06
Aluminium commercial	90	0.09
Acier inox	230 – 900	0.5– 0.7
Brique rouge	40	0.093
Brique réfractaire	1040	0.59
Verre	40	0.94
Peinture blanche	40	0.89 – 0.97
Papier blanc	40	0.95 – 0.98

IV.5 L'effet d'écran

Pour minimiser les pertes thermiques par rayonnement, il est nécessaire d'utiliser un ou plusieurs écrans. En effet, l'utilisation d'un écran limite les échanges radiatifs.

Exemple : Afin de maintenir les fluides cryogéniques (H_2 , N_2 , O_2, \dots) à de très basses températures, il est très important d'utiliser des bacs de stockage isolés à l'aide de plusieurs écrans en inox en plus d'une isolation secondaire en perlite.

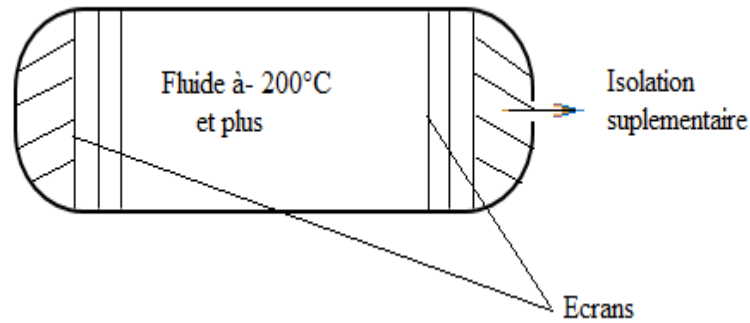


Figure IV. 5 : Bacs de stockage des fluides cryogéniques avec plusieurs écrans

IV.5.1 Cas sans écran

Soient deux plaques parallèles et infinies de surface S et d'émissivités différentes. Le flux de chaleur émit par rayonnement est donné par la relation suivante :

$$\phi = \sigma S \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{avec } F_G=1 \quad (\text{IV.15})$$

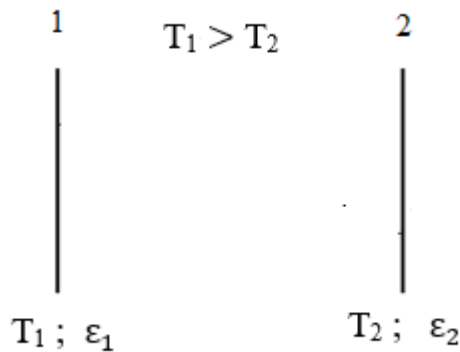


Figure IV. 6 : Deux plaques parallèles et infinies sans écran

Si $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ l'équation (IV.15) devient :

$$\phi = \sigma S \frac{1}{\frac{2}{\epsilon} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.16})$$

IV.5.2 Cas avec écran

Soient deux plaques parallèles, infinies de surface S , séparées par un écran et de même émissivité. Le flux de chaleur émit par rayonnement s'écrit :

$$\phi_{1-3} = \sigma S \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} (T_1^4 - T_3^4) \quad (\text{IV.17})$$

$$\phi_{3-2} = \sigma S \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} (T_3^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.18})$$

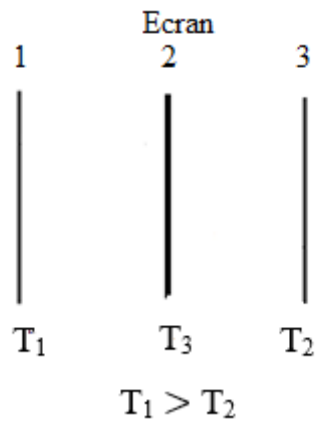


Figure IV. 7 : Deux plaques parallèles et infinies séparées par un écran

En régime permanent

$$\phi_{1-3} = \phi_{3-2} = \phi \quad \text{donc} \quad T_1^4 - T_3^4 = T_3^4 - T_2^4 \Rightarrow T_3^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

On remplace T_3 par sa valeur dans l'une des équations, on aura :

$$\phi_{a\epsilon} = \phi_{1-3} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \sigma S \left[T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right] \quad (\text{IV.19})$$

$$\phi_{a\epsilon} = \phi_{1-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \sigma S (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.20})$$

La comparaison des équations sans at avec écran donne :

$$\phi_{se} = \sigma S \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.16})$$

$$\phi_{ae} = \phi_{1-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \sigma S (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.20})$$

$$\phi_{ae} = \frac{1}{2} \phi_{se} \quad (\text{IV.21})$$

Donc

$$\phi_{1e} = \frac{1}{2} \phi_{0e} \quad (\text{IV.22})$$

IV.5.3 Généralisation pour n écrans

Considérons deux plaques parallèles et infinies de surface S, séparées par n écran. L'équation de flux de chaleur émit par rayonnement est donnée par :

$$\phi_{ne} = \frac{1}{n+1} \phi_{0e} \quad (\text{IV.23})$$

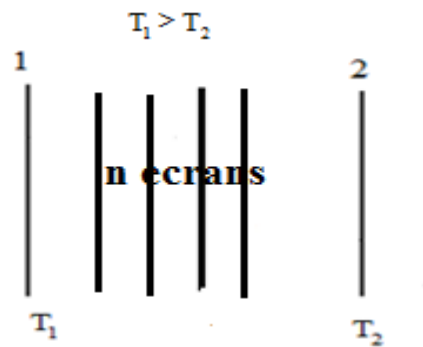


Figure IV. 8 : Deux plaques parallèles et infinies séparées par n écrans

IV.6 Coefficient de transfert de chaleur par rayonnement

Le coefficient de transfert de chaleur par rayonnement hr de la loi de Newton en conformité avec la loi de rayonnement donne :

$$\phi = hr S (T_1 - T_2) = \sigma S \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{IV.24})$$

Et par identification

$$hr = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{(T_1 - T_2)} \quad (\text{IV.25})$$

IV.7 Exercices d'application

Exercice 1

Un tube cylindrique en cuivre de 75 cm de longueur, de 1,5 cm de diamètre et de (1/8) mm d'épaisseur ($R_e - R_i = e$; $R_e + R_i = D$), dissipe une puissance par effet joule de 42,336 W. Cette énergie rayonne par la surface extérieure du tube à la température 683 K. Calculer le facteur d'émissivité du cuivre, sachant que la constante de Stefan-Boltzmann est de $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Exercice 2

Le Soleil peut être considéré comme une sphère de rayon $R_S = 700\,000 \text{ km}$, à la température $T_S = 5\,800 \text{ K}$. On assimile le Soleil à un corps noir.

1. Calculer la puissance totale émise par le Soleil.
2. En déduire le flux surfacique incident au niveau de l'orbite terrestre. La distance Terre-Soleil vaut $D = 150$ millions de km.

Exercice 3

Afin de réduire l'échange thermique entre deux plaques parallèles de température et émissivités : $T_1 = 120 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varepsilon_1 = 0.9$ et $T_2 = 70 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varepsilon_2 = 0.4$ on installe un écran, dont $\varepsilon_3 = 0.06$. Déterminer la température de l'écran et le flux de chaleur échangée par unité de surface.

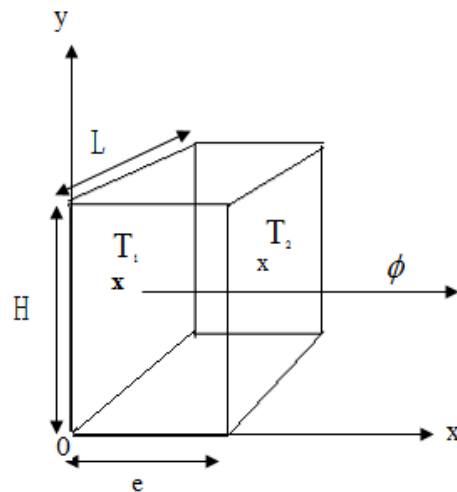
Annexe

Corrigé des exercices

Chapitre I

Exercice 1

$e = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$; $H = 4 \text{ m}$; $L = 2 \text{ m}$; $T_1 = 35^\circ\text{C}$; $T_2 = 3^\circ\text{C}$ et $\lambda = 0.69 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$



1- La perte calorifique est donnée par :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\phi = \frac{\Delta T}{\frac{e}{\lambda S}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda L H}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

$$\phi = \frac{(35-3)}{0.08} \times 0.69 \times (2 \times 4) = 2208 \text{ W}$$

2- La densité de flux de chaleur échangée entre les deux faces est :

$$\phi = \frac{\phi}{S}$$

$$\phi = \frac{2208}{4 \times 2} = 276 \text{ W/m}^2$$

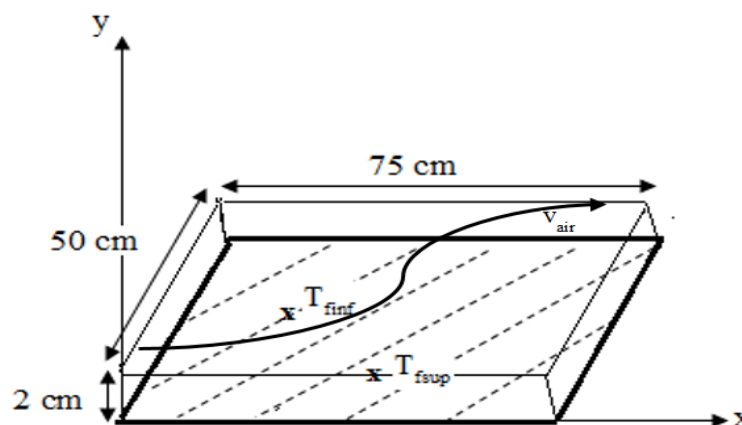
La résistance thermique s'écrit :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda S}}$$

$$R_{th} = \frac{35-3}{2208} = 0,0145 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{w}$$

Exercice 2

$T_\infty = 20^\circ\text{C}$; $V = 2.5 \text{ m/s}$; $T_{fs} = 250^\circ\text{C}$; $T_{finf} = 250^\circ\text{C}$; $h = 25 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ et
 $\lambda = 43 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$



- 1- La quantité de chaleur échangée entre la plaque et l'air est évaluée à l'aide de l'équation

$$\phi = h S (T_p - T_\infty)$$

$$\phi = 25 \times (50 \cdot 10^{-2} \times 75 \cdot 10^{-2}) (250 - 20) = 2156.25 \text{ W}$$

- 2- La température de la face inférieure de la plaque, si en plus des effets de convection, l'énergie perdue, par radiation est de 300 W.

$$\phi_{conduction} = \phi_{convection} + \phi_{radiation}$$

$$\phi_{conduction} = 2156.25 + 300 = 2456.25 \text{ W}$$

$$\phi_{\text{conduction}} = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\int_0^e \phi_{\text{conduction}} dx = -\lambda S \int_{T_{\text{finf}}}^{T_{\text{fsup}}} dT$$

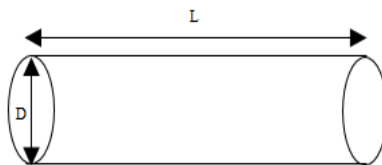
$$\phi_{\text{conduction}} e = \lambda S (T_{\text{finf}} - T_{\text{fsup}})$$

$$T_{\text{finf}} = T_{\text{fsup}} + \frac{\phi_{\text{conduction}} e}{\lambda S}$$

$$T_{\text{finf}} = 250 + \frac{2456.25 \times 2 \cdot 10^{-2}}{43 \times 50 \cdot 10^{-2} \times 75 \cdot 10^{-2}} = 253.046 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Exercice 3

$$D = 2 \text{ cm} ; L = 0.5 \text{ m} ; \phi = 1 \text{ kW}$$



La température du radiateur si :

- On néglige la chaleur absorbée par celui-ci.

$$\phi = \sigma S \varepsilon T^4$$

Le radiateur est considéré comme un corps noir donc $\varepsilon = 1$

$$\phi = \sigma S T^4$$

$$T = \left(\frac{\phi}{\sigma S} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$S = \Pi D L$$

$$T = \left(\frac{1000}{5.67 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^{-2} \times \Pi \times 0.5} \right)^{\frac{1}{4}} = 865.71 \text{ K} = 592.56 \text{ } ^\circ\text{C}$$

- On ne néglige pas la chaleur absorbée par le radiateur sachant que la température de la pièce est de $293 \text{ } ^\circ\text{K}$.

$$\phi = \sigma S (T_R^4 - T_p^4)$$

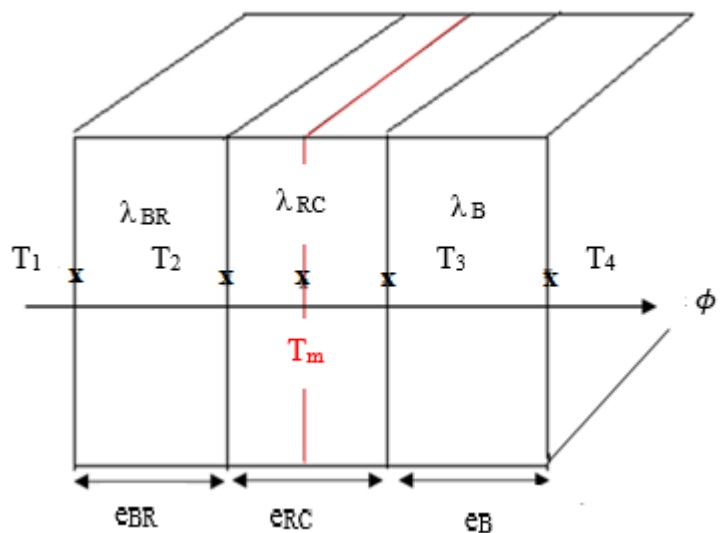
$$T_R = \left(T_p^4 + \frac{\phi}{\sigma S} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_R = \left((293)^4 + \frac{1000}{5.67 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^{-2} \times \pi \times 0.5} \right)^{\frac{1}{4}} = 868.50 \text{ K} = 595.35 \text{ °C}$$

Chapitre II

Exercice 1

$\lambda_{BR} = 1.21 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $\lambda_{RC} = 0.08 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $\lambda_B = 0.69 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $e_{BR} = e_{RC} = e_B = e = 10^{-2} \text{ m}$; $T_1 = 872 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_4 = 32 \text{ }^\circ\text{C}$; $S = 42 \text{ m}^2$



La conduction de chaleur se fait en régime permanent, donc ϕ est constant et la perte calorifique est :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\int_0^e \phi \, dx = -\lambda S \int_{T_1}^{T_2} dT \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda S}}$$

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_{BR}}{\lambda_{BR} S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_{RC}}{\lambda_{RC} S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_B}{\lambda_B S}}$$

On a

$$\phi = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_{BR}}{\lambda_{BR} S} + \frac{e_{RC}}{\lambda_{RC} S} + \frac{e_B}{\lambda_B S}}$$

$$\phi = \frac{872 - 32}{\frac{10^{-2}}{1.21 \times 42} + \frac{10^{-2}}{0.08 \times 42} + \frac{10^{-2}}{1.69 \times 42}} = 2545454 \text{ W} = 254,545 \text{ kW}$$

1. La perte calorifique par conduction pendant une journée

$$\phi_j = \phi \times 24 \times 3600 = 254545.4 \times 24 \times 3600 = 2.199 \cdot 10^{11} \text{ J} = 2.2 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

2. Température au milieu du revêtement

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= T_1 - \phi \frac{e_{BR}}{\lambda_{BR} S} \\ T_3 &= T_4 + \phi \frac{e_R}{\lambda_R S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_m = \frac{T_2 + T_3}{2}$$

$$T_2 = 872 - 254545.4 \frac{0.01}{1.21 \times 42} = 371.12 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 32 + 254545.4 \frac{0.01}{0.69 \times 42} = 450.18 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_m = \frac{371.12 + 450.18}{2} = 410.65 \text{ } ^\circ\text{C}$$

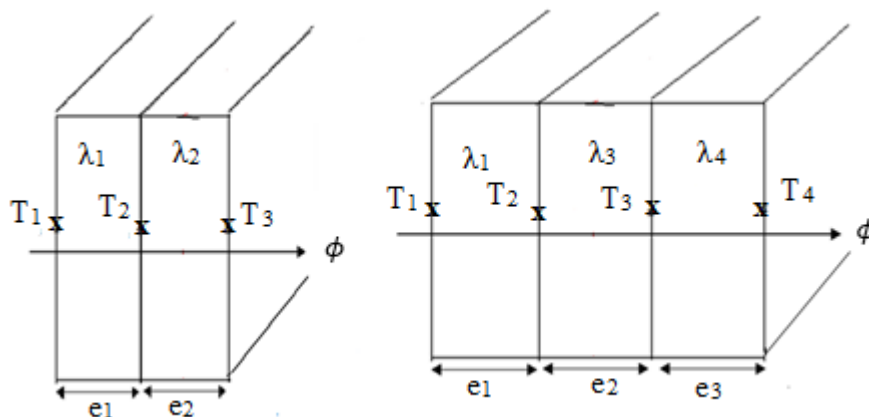
Exercice 2

$$\lambda_1 = 0.7 \text{ W/m } ^\circ\text{C} \text{ et } e_1 = 10 \text{ cm}$$

$$\lambda_2 = 0.48 \text{ W/m } ^\circ\text{C} \text{ et } e_2 = 4 \text{ cm}$$

L'épaisseur $e_1 = e_3 = ?$ de l'isolant qu'il faudrait ajouter pour réduire les pertes de 80 % et

$$\lambda_3 = 0.065 \text{ W/m } ^\circ\text{C}.$$



• Le flux de chaleur dans le cas général est donné par l'équation suivante :

$$\phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S}}$$

• Le flux de chaleur sans isolant (ϕ_{sis}) est exprimé par l'équation suivante :

$$\phi_{sis} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S}}$$

- Le flux de chaleur avec isolant (ϕ_{ais})

$$\phi_{ais} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

$$\frac{\phi_{sis} - \phi_{ais}}{\phi_{sis}} = 80\% = 0.8$$

$$\phi_{sis} - \phi_{ais} = 0.8 \phi_{sis} \Rightarrow 0.2 \phi_{sis} = \phi_{ais}$$

$$0.2 \times \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

D'après les données nous avons $(T_1 - T_3) = (T_1 - T_4)$

$$0.2 \left(\frac{e_3}{\lambda_3} \right) = 0.8 \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right) \Rightarrow e_3 = 4 \lambda_3 \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$$

$$e_3 = 4 \times 0.065 \left(\frac{10 \cdot 10^{-2}}{0.7} + \frac{5 \cdot 10^{-2}}{0.48} \right)$$

$$e_3 = 4 \times 0.065 \left(\frac{10 \cdot 10^{-2}}{0.7} + \frac{5 \cdot 10^{-2}}{0.48} \right) = 6.42 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 64.2 \text{ mm}$$

Exercice 3

$e_a = 12 \text{ mm}$; $e_v = 3.5 \text{ mm}$; $\lambda_v = 0.7 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $\lambda_a = 0.024 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

- Le flux de chaleur traversant le double vitrage est exprimé par l'équation

$$\phi_{dv} = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{\Delta T}{\left(\frac{2e_v}{\lambda_v S} + \frac{e_a}{\lambda_a S} \right)} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{S} \left(\frac{2e_v}{\lambda_v} + \frac{e_a}{\lambda_a} \right)}$$

$$\phi_{dv} = \frac{5}{\left(\frac{2 \times 3.5 \cdot 10^{-3}}{0.7} + \frac{12 \cdot 10^{-3}}{0.024} \right)} = 9.8 \text{ W}$$

- Le flux de chaleur traversant une seule vitre pour les mêmes conditions est :

$$\phi_{1v} = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{\Delta T}{\left(\frac{e_v}{\lambda_v S} \right)}$$

$$\phi_{1v} = \frac{5}{\left(\frac{3.5 \cdot 10^{-3}}{0.7} \right)} = 1000 \text{ w}$$

- Comparaison des deux flux

$$\frac{\phi_{1v}}{\phi_{dv}} = \frac{1000}{9.8} = 102,04 \approx 102$$

Le double vitrage permet de réduire, 102 fois les pertes thermiques à travers la vitre. Ceci est dû à la résistance thermique très élevée de la couche d'air laquelle possède une faible conductivité thermique.

Exercice 4

$$e_1 = e_2 = e_3 = e \quad ; \quad e_4 = 3e \quad ; \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda \quad ; \quad \lambda_2 = 2\lambda \quad ; \quad S_1 = S_2 = S_3 = S = aL$$

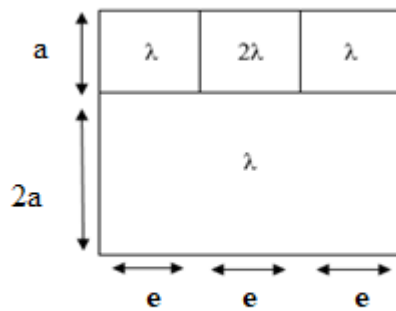


Figure (a)

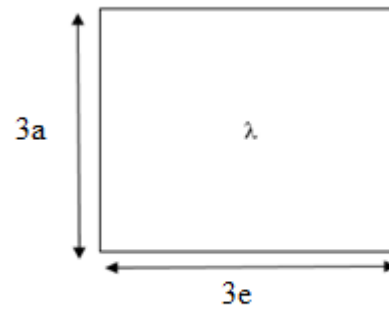


Figure (b)

$$\phi = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$$

q : Quantité de chaleur

t : Temps

R_{th} : Résistance thermique

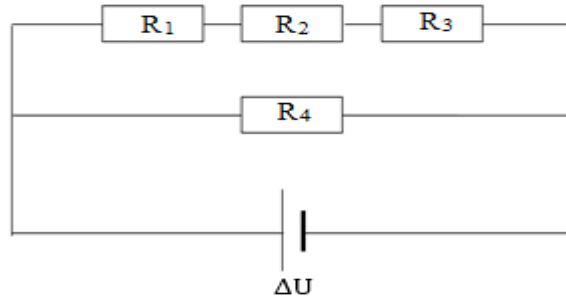
R_{eq} : Résistance équivalente

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1} + \frac{e_2}{\lambda_2 S_2} + \frac{e_3}{\lambda_3 S_3} = \frac{e}{\lambda a L} + \frac{e}{2\lambda a L} + \frac{e}{\lambda a L} = \frac{5e}{2\lambda a L}$$

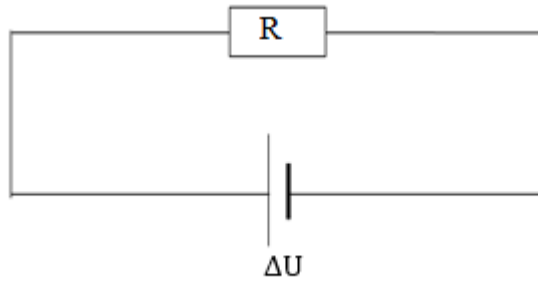
$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{\frac{5e}{2\lambda a L}} + \frac{1}{\frac{3e}{\lambda 2 a L}} = \frac{2\lambda a L}{5e} + \frac{2\lambda a L}{3e} = \frac{16\lambda a L}{15e}$$

Le schéma électrique équivalent pour la Figure a est :



$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \Delta T \frac{16\lambda a L}{15e}$$

Le schéma électrique équivalent pour la Figure b est :



$$\phi' = \frac{\Delta T}{R_{th}}$$

$$R_{th} = \frac{3e}{\lambda 3 a L} = \frac{e}{\lambda a L}$$

$$\phi' = \frac{\Delta T}{\frac{e}{\lambda a L}} = \Delta T \frac{\lambda a L}{e}$$

Comparaison

$$\frac{\phi}{\phi'} = \frac{16}{15} = 1.06$$

Exercice 5

$$\phi = \lambda(T_m) S \frac{dT}{dx}$$

D'après les données, si λ est une fonction linéaire de T donc, $\lambda = a T + b$ et l'équation du flux de chaleur s'écrit :

$$\phi = -\lambda(T_m) S \frac{dT}{dx} = -(aT + b) S \frac{dT}{dx}$$

$$-\frac{\phi}{S} \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{T_1}^{T_2} (aT + b) dT$$

$$-\frac{\phi}{S} (x_2 - x_1) = \frac{a}{2} (T_2^2 - T_1^2) + b(T_2 - T_1) = \frac{a}{2} (T_2 - T_1)(T_2 + T_1) + b(T_2 - T_1)$$

$$-\frac{\phi}{S} \frac{(x_2 - x_1)}{(T_2 - T_1)} = \frac{a}{2} (T_2 + T_1) + b$$

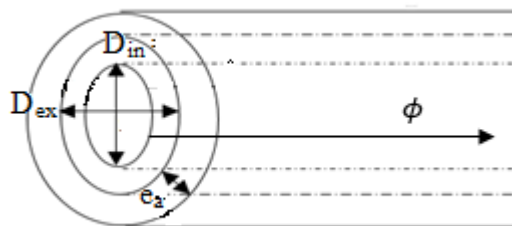
$$\phi = - \left[a \frac{(T_1 + T_2)}{2} + b \right] S \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda(T_m) S \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Avec,

$$\lambda(T_m) = a \frac{(T_1 + T_2)}{2} + b$$

Exercice 6

$\lambda_c = 19 \text{ kcal/h. m } ^\circ\text{C}$; $D_{in} = 2.5 \text{ cm}$; $D_{ex} = 5 \text{ cm}$; $\lambda_a = 0.071 \text{ kcal/h. m } ^\circ\text{C}$; $T_{in} = 260 \text{ } ^\circ\text{C}$;
 $T_{ex} = 38 \text{ } ^\circ\text{C}$; $e_a = 5 \text{ cm}$



- L'équation générale de flux de chaleur dans le cas d'un cylindre creux est donnée par :

$$\phi = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_{i+1}}\right)}{4 \pi \lambda_i}}$$

$$= \frac{(T_{in} - T_{ex})}{\frac{\text{Ln} \frac{R_{ex}}{R_{in}}}{2 \pi L \lambda_c} + \frac{\text{Ln} \frac{R_{ex} + e_a}{R_{ex}}}{2 \pi L \lambda_a}}$$

$$\phi = \frac{260 - 38}{\frac{\text{Ln} \frac{2.5 \cdot 10^{-2}}{1.25 \cdot 10^{-2}}}{2 \pi L \cdot 19} + \frac{\text{Ln} \frac{7.5 \cdot 10^{-2}}{2.5 \cdot 10^{-2}}}{2 \pi L \cdot 0.071}} = \frac{222}{\frac{0.633}{119.32L} + \frac{0.633}{0.445L}} = \frac{222 \times L}{2.47}$$

$$\frac{\phi}{L} = 89.71 \text{ kcal/h. m. } ^\circ\text{C}$$

1 cal équivaut à 4.18 J, donc $89.71 \cdot 10^3 \text{ cal} \rightarrow \frac{\phi}{L}$

$$\frac{\phi}{L} = \frac{4.18 \times 89.77}{3600} = 104.23 \text{ W/m}$$

- La résistance équivalente du système considéré pour une longueur de 1 m.

$$\phi = \frac{T_{in} - T_{ex}}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{T_{in} - T_{ex}}{\phi}$$

$$R_{eq} = \frac{260 - 38}{104.23} \approx 2.129 \text{ } ^\circ\text{C/W} = 2.13 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Exercice 7

$R_{in} = 10 \text{ cm}$; $R_{ex} = 15 \text{ cm}$; $T_{in} = 119 \text{ } ^\circ\text{C}$; $T_{ex} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$; $\lambda_a = 46 \text{ W/m. } ^\circ\text{C}$

- La résistance thermique de la sphère est exprimée par l'équation suivante :

$$R_{eq} = \frac{\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{ex}}\right)}{4 \pi \lambda_a}$$

$$R_{eq} = \frac{\left(\frac{1}{10 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{15 \cdot 10^{-2}}\right)}{4 \pi \cdot 46} = \frac{3.33}{4} = 5.76 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

- Le flux de chaleur dégagée

$$\phi = \frac{(T_{in} - T_{ex})}{\left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{R_{ex}}\right)} \cdot \frac{1}{4 \pi \lambda_a}$$

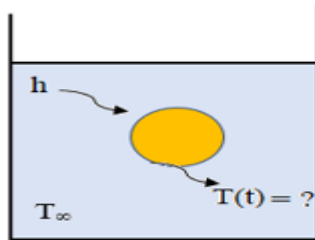
$$\phi = \frac{(T_{in} - T_{ex})}{R_{eq}}$$

$$\phi = \frac{(119 - 100)}{5.76 \cdot 10^{-3}} = 3298.61 \text{ W}$$

Exercice 8

$\lambda = 35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$; $C_p = 0.46 \text{ kg/kg} \cdot ^\circ\text{C}$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $D = 5 \text{ cm}$; $T_i = 450 \text{ } ^\circ\text{C}$;

$T_\infty = 450 \text{ } ^\circ\text{C}$; $h = 10 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$



Le temps nécessaire à la boule pour atteindre une température, $T = 150 \text{ } ^\circ\text{C}$ est :

On calcule le nombre de Biot (Bi) :

$$Bi = \frac{hL}{\lambda}$$

Dans ce cas $L = R = \text{rayon de la boule} = 2.5 \text{ cm}$

$$Bi = \frac{10 \times 2.5 \times 10^{-2}}{35} = 7.14 \cdot 10^{-3}$$

$Bi < 0.1$, donc la conductivité thermique de la boule est importante, par conséquent, la résistance interne est négligeable (il y a une uniformité de la température dans la boule métallique), la température dépend uniquement du temps, $T = f(t)$.

Comme il s'agit d'un refroidissement (la boule métallique perd de la chaleur) donc le bilan de chaleur s'écrit :

$$- m C_p \frac{dT}{dt} = h S (T - T_\infty)$$

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_\infty} = \frac{h S}{m C_p} \int_0^t dt$$

$$D'ou \quad \text{Ln} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = - \frac{h S}{m C_p} t$$

$$t = - \frac{m C_p}{h S} \text{Ln} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad \text{avec} \quad m = \rho V = \frac{4}{3} \Pi R^3 \quad \text{et} \quad S = 4 \Pi R^2$$

$$t = - \frac{\rho R C_p}{3 h} \text{Ln} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$t = - \frac{7800 \times 2.5 \cdot 10^{-2} \times 0.46 \cdot 10^3}{3 \times 10} \text{Ln} \frac{150 - 100}{450 - 100} = 5818,27 \text{ s} = 1 \text{ h} 37 \text{ min} 12 \text{ s}$$

Exercice 9

$D = 0.8 \text{ mm}$; $T_i = 150 \text{ }^\circ\text{C}$; $h_{\text{eau}} = 85 \text{ W/m}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C}$ à $38 \text{ }^\circ\text{C}$; $h_{\text{air}} = 11 \text{ W/m}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C}$ à $38 \text{ }^\circ\text{C}$
 $\lambda_c = 373 \text{ W/m} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$; $C_{p_c} = 0.38 \text{ kJ/kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$; $\rho_c = 8940 \text{ kg/m}^3$

Profil de température en fonction du temps est :

On assimile le fil de cuivre à un cylindre et on détermine le nombre de Biot :

$$\text{Bi} = \frac{hL}{\lambda}$$

$L = R = \text{rayon de fil de cuivre} = 0.8 \text{ mm}$

$$\text{Bi} = \frac{85 \times 0.8 \times 10^{-3}}{373} = 1.82 \cdot 10^{-4}$$

$\text{Bi} < 0.1$, la conductivité thermique du fil de cuivre est élevée, donc la résistance interne est négligeable (il y a une uniformité de la température dans le fil de cuivre), la température ne dépend pas de la position, dépend uniquement du temps, $T = f(t)$.

Le bilan énergétique donne

$$- m C_p \frac{dT}{dt} = h S (T - T_\infty)$$

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_\infty} = \frac{h S}{m C_p} \int_0^t dt$$

$$T = T_\infty + (T_i - T_\infty) \exp\left(-\frac{h S}{m C_p} t\right) \quad \text{avec} \quad m = \rho V = \Pi R^2 L \quad \text{et} \quad S = 2 \Pi R L$$

$$T(t) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty}) \exp\left(-\frac{2h}{\rho c R C_p} t\right)$$

$$T(t) = 38 + (150 - 38) \exp\left(-\frac{2 \times 85}{8940 \times 0.4 \times 10^{-3} \times 0.38 \times 10^3} t\right)$$

$$T(t) = 38 + 112 \exp(-0.125 t)$$

Cette équation donne le profil de température en fonction du temps lorsque le fils de cuivre est plongé brusquement dans l'eau.

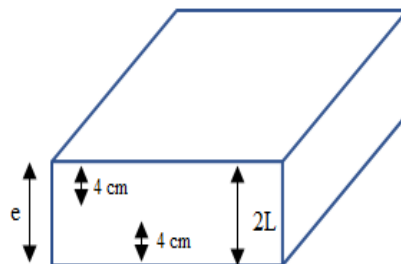
La même démarche est à suivre afin de calculer le profil de température en fonction du temps pour le fils de cuivre plongé dans l'air.

Exercice 10

$$e = 20 \text{ cm} ; T_i = 200 \text{ }^{\circ}\text{C} ; T_{\infty} = 70 \text{ }^{\circ}\text{C} ; h = 525 \text{ W/m}^2 \cdot \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\text{Pour l'aluminium : } \lambda = 215 \text{ W/m} \cdot \text{ }^{\circ}\text{C} ; C_p = 905 \text{ J/kg} \cdot \text{ }^{\circ}\text{C} ; \rho = 2700 \text{ kg/m}^3 ; \alpha = 8.4 \text{ m}^2/\text{s}$$

Le temps nécessaire pour que à $x = 4 \text{ cm}$ de la surface de chacune des deux faces principales de la plaque atteigne $T = 175 \text{ }^{\circ}\text{C}$ est :



Détermination du nombre de Biot :

$$Bi = \frac{hL}{\lambda}$$

$$L = 10 \text{ cm}$$

$$Bi = \frac{525 \times 0.1}{215} = 0.244$$

$Bi \geq 0.1$, la conductivité thermique de la plaque est faible, la résistance à la conduction est très grande donc la température dépend du temps et des variables d'espace, $T = f(x, y, z, t)$.

Le bilan de chaleur n'est plus applicable et par conséquent, on utilise les diagrammes (abaques) pour résoudre l'exercice.

On a

$$Bi^{-1} = (0.244)^{-1} = 4.09$$

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}$$

$$\theta = \frac{175 - 70}{200 - 70} = 0.808 \approx 0.81$$

$$\frac{x}{L} = \frac{10^{-4}}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Connaissant les valeurs Bi^{-1} , θ et x/L , on déduit Fo à partir des abaques de la Figure II.14.

$$Fo = 1.1$$

On a

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad \text{donc} \quad t = \frac{Fo L^2}{\alpha}$$

$$t = \frac{1.1 \times (0.1)^2}{8.4 \times 10^{-5}} = 130.95 \text{ s} \quad t = 2 \text{ min } 10 \text{ s}$$

La quantité de chaleur échangée est déduite à partir des abaques Figure II.17.

$$\Phi = \frac{\int_0^t q dt}{\rho c p L (T_i - T_{\infty})}$$

Connaissant Bi et Fo , on déduit Φ , $Bi = 0.24$ et $Fo = 1.1$ donc $\Phi = 0.2$

D'où

$$\int_0^t q dt = \Phi \times \rho c p L (T_i - T_{\infty})$$

$$\int_0^t q dt = 0.2 \times 2700 \times 905 \times 0.1 \times (200 - 70) = 6.35 \times 10^6 \text{ J/m}^2$$

Pour les deux faces de la plaque

$$\int_0^t q dt = 2 \times 6.35 \times 10^6 = 12.7 \times 10^6 \text{ J/m}^2$$

Chapitre III

Exercice 1

Température de la surface plane : $T_{s,p} = 71 \text{ }^\circ\text{C}$

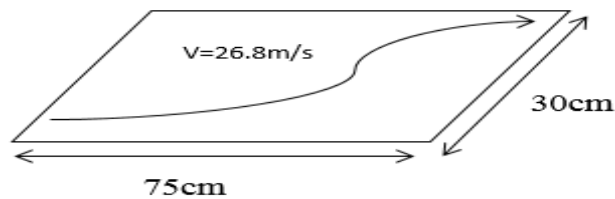
Température de l'air : $T_{\text{air}} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$

Masse volumique de l'air : $\rho = 1.136 \text{ kg/m}^3$

Chaleur spécifique isobare de l'air : $C_p = 1 \text{ J/g.K}$

Viscosité dynamique de l'air : $\mu = 1.91 \cdot 10^{-5} \text{ poiseuille (kg/m. s)}$

Conductivité de l'air : $\lambda = 0.027 \text{ W/m.K}$



- Calcul de la chaleur échangée entre l'air et la surface

$$\phi_x = h S (T_p - T_\infty)$$

$$h = ?$$

$$\text{Nu} = \frac{h L}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{\text{Nu} \lambda}{L} \quad \text{et} \quad \text{Nu} = f(\text{Re})$$

$$\text{Re} = \frac{(v L)}{\nu} = \frac{(v L \rho)}{\mu}$$

$$\text{Re} = \frac{26.8 \times 0.75 \times 1.136}{(1.91 \cdot 10^{-5})} \approx 1.2 \cdot 10^6$$

$$\text{Re} > 3 \cdot 10^5 \Rightarrow \text{Régime d'écoulement est turbulent}$$

$$v = 26.8 \text{ m/s} \Rightarrow v = 96.48 \text{ km/h} \Rightarrow \text{la convection est forcée}$$

$$\text{Nu} = 0.036 \text{ Pr}^{1/3} \text{ Re}^{4/5}$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

$$\text{Pr} = \frac{(1.91 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3)}{0.027} = 0.707$$

$$\text{Nu} = 0.036 (0.711)^{1/3} (1.2 \cdot 10^6)^{4/5} = 2346$$

$$\phi = h S (T_p - T_\infty) = h S (T_{sp} - T_{air})$$

$$h = \frac{23460 \times 0.027}{0.75} = 84.5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\phi = 84.5 \times (0.75 \times 0.3) (71 - 5) = 1254,8 \text{ W}$$

Exercice 2

Les propriétés physiques de la vapeur d'eau à 100°C sous 1 atm sont :

Viscosité cinématique : $\nu = 2.13 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Viscosité dynamique à la paroi : $\mu_p = 1.614 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$

Viscosité dynamique du fluide : $\mu_\infty = 1,228 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$

Conductivité thermique $\lambda = 0.0237 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

$Pr = 1,052$; $L = 10 \text{ m}$; $D = 0.05 \text{ m}$; Φ : Débit volumique = $0.012 \text{ m}^3/\text{s}$; $T_p = 204 \text{ }^\circ\text{C}$

1. Evaluons le coefficient de convection h et la quantité de chaleur (ϕ) par unité de temps échangée entre les parois de la conduite et le fluide

$$Nu = \frac{h L}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{Nu \lambda}{L} \quad \text{et} \quad Nu = f(Re)$$

$$Re = \frac{v D_H}{\nu} = \frac{v D_H \rho}{\mu} \quad \text{avec} \quad D_H = \frac{4 S_\perp}{p_m}$$

Nous avons

$$\Phi = v S$$

$$v = \frac{0.012}{\pi \frac{(0.05)^2}{4}} = 6.11 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{6.11 \times 0.05}{2.13 \cdot 10^{-5}} = 1.43 \cdot 10^4 > 10^4 \Rightarrow \text{Le régime d'écoulement est turbulent}$$

- La corrélation de SIEDER et TATE est utilisée

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p} \right)^{0.14}$$

$$Nu = 0.027 (1.43 \cdot 10^4)^{0.8} (1.052)^{1/3} \left[\frac{1.228 \cdot 10^{-5}}{1.614 \cdot 10^{-5}} \right]^{0.14} = 55.61$$

$$h = \frac{55.61 \times 0.0237}{0.05} = 26.36 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\phi = h S \Delta T = h S (T_p - T_\infty) \text{ et } S = 2 \pi \frac{D}{2} L = \pi D L$$

$$\phi = 26.36 \times \pi \times 0.05 \times 10 (204 - 100) = 4304.06 \text{ W}$$

2. Si $D = 10 \times D \Rightarrow$ la vitesse du débit change \Rightarrow Re change

$$\phi = v S$$

$$v = \frac{0.012}{\pi \frac{(0.5)^2}{4}} = 0.061 \text{ m/s}$$

$$Re' = \frac{0.061 \times 0.05}{2.13 \cdot 10^{-5}} = 143.19 < 2200 \Rightarrow \text{Le régime d'écoulement est laminaire}$$

$$Re' = \frac{Re}{10}$$

- La corrélation de SIEDER et TATE est utilisée

$$Nu = 1.86 \left(Re_D Pr \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p} \right)^{0.14}$$

$$Nu = 1.86 \left[143.19 \times 1.052 \times \frac{0.5}{10} \right]^{1/3} \left[\frac{1.228 \cdot 10^{-5}}{1.614 \cdot 10^{-5}} \right]^{0.14} = 3.48$$

$$h = \frac{3.48 \times 0.0237}{0.5} = 0.165 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\phi = 0.164 \times \pi \times 0.5 \times 10 (204 - 100) = 269.412 \text{ W}$$

L'augmentation du diamètre de la conduit entraîne la diminution des pertes thermiques.

Exercice 3

$L = 300 \text{ mm}$; $l = 200 \text{ mm}$; $v = 15 \text{ m/s}$; $T_{\text{air}} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$; $\vartheta = 1.695 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $Pr = 0.709$

$\lambda = 0.0271 \text{ W/m} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$

- Le coefficient de transfert de chaleur de l'air vers la paroi

$$Re = \frac{v D_H}{\nu} \quad \text{avec} \quad D_H = \frac{4 S_{\perp}}{P_m}$$

$$D_H = \frac{4 (300 \cdot 10^{-3} \times 200 \cdot 10^{-3})}{2 (200 \cdot 10^{-3} + 300 \cdot 10^{-3})} = 0.24 \text{ m}$$

$$Re = \frac{15 \times 0.24}{(1.695 \cdot 10^{-5})} = 2.12 \cdot 10^5 > 10^4 \Rightarrow \text{le régime d'écoulement est turbulent}$$

On a

- $0.7 < Pr < 100$
- $\frac{L}{D} > 60$ (conduite longue)
- Refroidissement (l'air vers les parois) $n = 0.3$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$$

$$h = \frac{Nu \lambda}{D}$$

$$Nu = 0.023 (2.12 \cdot 10^5)^{0.8} (0.709)^{0.3} = 378.43$$

$$h = \frac{378.43 \times 0.0271}{0.24} = 42.73 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$$

Exercice 4

$D = 2.8 \text{ cm}$; $L = 3 \text{ m}$; $T = 195 \text{ °C}$; $T_p = 25 \text{ °C}$; $\phi = 5500 \text{ W}$; $\lambda = 0.026 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$;

$Pr = 0.73$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$

1. Evaluons le coefficient de flux de chaleur par convection

$$\phi = h S (T_f - T_p) \Rightarrow h = \frac{\phi}{S (T_f - T_p)} \quad \text{avec} \quad S = \pi D L$$

$$h = \frac{5500}{\pi \cdot 2.8 \cdot 10^{-2} \times 3 (196 - 25)} = 121.94 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$$

2. Le nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{h D}{\lambda}$$

$$\text{Nu} = \frac{121.94 \times 2.8 \cdot 10^{-2}}{0.026} = 131.32$$

3. Le nombre de Reynolds

$$\text{Nu} = 0.023 \text{ Re}^{0.8} \text{ Pr}^{0.4}$$

$$\text{Re} = \sqrt[0.8]{\frac{\text{Nu}}{0.023 \times \text{Pr}^{0.4}}}$$

$$\text{Re} = \sqrt[0.8]{\frac{131.32}{0.023 \times (0.73)^{0.4}}} = 58088.79$$

Chapitre IV

Exercice 1

$L = 75 \text{ cm}$; $D = 1,5$; $e = 1/8 \text{ mm}$; $\phi = 42,336 \text{ W}$; $T = 683 \text{ °K}$.

- le facteur d'émissivité du cuivre,

$$\phi = \sigma \varepsilon S T^4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\phi}{\sigma S T^4}$$

$$\phi = \sigma \varepsilon S T^4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{42,336}{5,67 \times 10^{-8} \times \pi \times 1,5 \times 10^{-2} \times 75 \times 10^{-2} \times 683^4} = 0,097 \approx 0,1$$

Exercice 2

$R_s = 700000 \text{ km}$; $T_s = 5800 \text{ K}$; $R_T = 6400 \text{ km}$

Distance Terre-Soleil = 150 millions de Km

- La puissance totale émise par le soleil est :

Le soleil est un corps noir, $\varepsilon = 1$

$$\phi_T = \sigma S_s T_s^4 \quad \text{avec} \quad S_s = 4 \pi R_s^2$$

$$\phi_T = 5,67 \cdot 10^{-8} \times 4 \pi (700000 \times 10^3)^2 (5800)^4 = 3,94 \cdot 10^{26} \text{ W} \approx 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

- Le flux surfacique incident au niveau de l'orbite terrestre :

$$\phi_i = \frac{\phi_T}{4 \pi D_{T-S}^2} = \frac{\sigma 4 \pi R_s^2 T_s^4}{4 \pi D_{T-S}^2} = \frac{R_s^2}{D_{T-S}^2} \sigma T_s^4$$

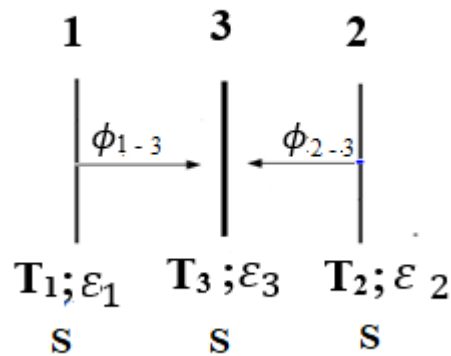
$$\phi_i = \frac{4 \cdot 10^{26}}{4 \pi (150000000 \times 10^3)^2} = 1394 \approx 1400 \text{ W/m}^2$$

ϕ_i est de l'ordre de grandeur du flux mesuré

Exercice 3

$T_1 = 120 \text{ °C}$, $\varepsilon_1 = 0,9$; $T_2 = 70 \text{ °C}$, $\varepsilon_2 = 0,4$ et $\varepsilon_3 = 0,06$.

- Température de l'écran.



$$\phi_{1-3} = \sigma S \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} (T_1^4 - T_3^4)$$

$$\phi_{3-2} = \sigma S \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} (T_3^4 - T_2^4)$$

En régime permanent

$$\phi_{1-2} = \phi_{3-2} = \phi$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} (T_1^4 - T_3^4) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} (T_3^4 - T_2^4)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.06} - 1} (120^4 - T_3^4) = \frac{1}{\frac{1}{0.06} + \frac{1}{0.4} - 1} (T_3^4 - 70^4)$$

$$T_3 = 103.67 \text{ } ^\circ\text{C}$$

- Flux de chaleur échangée par unité de surface

$$\frac{\phi}{S} = \frac{\phi_{1-3}}{S} = \sigma \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} (T_1^4 - T_3^4)$$

$$\frac{\phi}{S} = \frac{\phi_{1-3}}{S} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{1}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.06} - 1} (120^4 - 70^4) = 0.307 \text{ W/m}^2$$

Référence bibliographie

1. B. GRANDJEAN, Transfert de chaleur, Volume 1 (note de cours), 2013.
2. Y. JANNOT, Transfert thermique, Edition Edi livre, 2012.
3. J. H. LIENHARD IV et J. H. LIENHARD V, A Heat Transfer Textbook, Third Edition, Cambridge Massachusetts, U.S.A, 2008.
4. J. CRABOL, Transfert de chaleur, T1, T2, T3, Edition Masson. Paris, 1992.
5. J. OUIN, Transferts thermiques (Rappels de cours et applications), Editions Casteilla, 1998.