MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTÉ : DES SCIENCES
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : MATHEMATIQUES
OPTION : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE ET OPTIMISATION

Présentée par :
M^{elle} **Karima FAHEM**

Sujet :

**Conditions d'Existence des Équilibres dans les Jeux Multicritères.
Approche par l'Élément Maximal**

Devant le jury d'examen composé de :

Mr. Mohamed Aidène	Professeur	U.M.M.T.O	Président
Mr. Mohammed Said Radjef	Professeur	U.A.M.B	Rapporteur
Mr. Mohamed Morsli	Professeur	U.M.M.T.O	Examinateur
Mr. Meziane Aider	Professeur	U.S.T.H.B	Examinateur
Mr. Abdelhafid Berrachedi	Professeur	U.S.T.H.B	Examinateur

Soutenu le 02 Mai 2016

Remerciements

Je tiens à exprimer en premier lieu ma profonde gratitude à mon directeur de thèse le Professeur Mohammed Said Radjef, qui m'a accompagnée dans la réalisation de cette thèse. Son exigence et son sens du détail m'ont obligée à travailler et à travailler encore les résultats obtenus. Je le remercie pour sa disponibilité, son engagement et son soutien.

Je tiens ensuite à remercier le Professeur Mohamed Aidène, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être Président du jury de ma thèse, ainsi que les Professeurs Mohamed Morsli, Méziane Aider et Abdelhafid Berrachedi pour avoir accepter le rôle d'examinateurs. Je les remercie vivement d'avoir accepté de passer du temps à étudier mon travail.

Mes remerciements vont à ma famille : mes parents, mes soeurs, mon frère, ma belle soeur et mon grand père pour leur soutien inconditionnel.

Je remercie également mes amies et tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

Je dédie ce modeste travail à la mémoire de ma grand mère.

Table des matières

Introduction

On ne saurait dire combien les jeux,
renferment d'enseignements précieux
pour l'art d'inventer.

Leibniz

C'est quoi la théorie des jeux ?

DAns la littérature, on rencontre différents avis sur la définition exacte et la classification de la théorie des jeux. Il y a ceux qui la considèrent comme une discipline mathématique et d'autres qui ne voient les mathématiques qu'un outil qui véhicule cette théorie. Cela est peut être dû à son application à plusieurs et différentes disciplines et à sa faculté de modéliser des problèmes réels de différentes natures et leur donne une forme mathématique.

La théorie des jeux est, d'après Osborne[1] et Rubinstein[2] [62], une sacoche d'outils analytiques conçus pour nous aider à comprendre les phénomènes que nous observons lorsque les décideurs interactent. Les suppositions fondatrices de la théorie des jeux sont que les décideurs poursuivent des objectifs exogènes bien définis (ils sont rationnels) et qu'ils prennent en compte leurs connaissances ou attentes du comportement des autres décideurs (ils raisonnent stratégiquement). En fait, la théorie des jeux n'utilise les mathématiques que comme un outil de communication, telle une langue universelle, pour formaliser l'expression

1. Martin J. Osborne est professeur d'économie à l'Univesité McMaster, Hamilton, Canada.
2. Ariel Rubinstein est professeur d'économie à l'Université de Tel Aviv, Israel, et à l'Université de Princeton (USA)

d'intuitions, d'idées et de concepts et pour explorer les implications de suppositions et d'hypothèses, mais ne constitue en aucun cas une branche propre des sciences mathématiques, pour eux les résultats mathématiques n'ont d'intérêt que si l'intuition les confirme. Osborne et Rubinstein (1994) vont même jusqu'à définir la théorie des jeux comme une science sociale dont l'objectif est de comprendre le comportement de décideurs interactifs.
N. Eber [3] [34] a relevé que la théorie des jeux a été considéré comme une branche des mathématiques, philosophie des sciences sociales, outil incontournable de l'analyse moderne de l'évolution des espèces, noyau dur de la science économique, arme stratégique dans les conflits militaires ou encore, selon ses détracteurs, instrument machiavélique destiné à justifier des comportements cyniques et immoraux.

Un peu d'histoire

Historiquement, les premières idées de la théorie des jeux remontent au 18ème siècle. En 1713, dans une lettre à Pierre Rémonds de Montmort, James Waldgrave fit part d'une solution minmax en stratégies mixtes pour le jeu de cartes le Her [4] à deux personnes mais le résultat est resté sans aucune généralisation à d'autres jeux. Un siècle après, une autre apparition de la théorie. Dans "Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses " (1838), Augustin Cournot utilise un concept qui est un cas particulier de l'équilibre de Nash. En 1913, Zermelo montra le premier théorème de la théorie des jeux, d'après lequel il existe une stratégie optimale pour chacun des joueurs dans le jeu d'échec. Entre 1921 et 1927 Emile Borel fournit la nouvelle formulation en stratégies mixtes du théorème de Zermelo pour un jeu à deux personnes à trois ou quatre stratégies et considéra le problème ouvert au-delà. Une année plus tard, John von Neumann prouva enfin le théorème minmax tel qu'il est connu aujourd'hui. Cependant le travail décisif dans le développement de la théorie des jeux, fut l'ouvrage "Game Theory and Economic Behavior" du mathématicien John von Neumann et l'économiste Ernest Morgenstern en 1944, qui permettra l'adoption rapide de cette théorie en Économie. A partir des années 50, la théorie explose, et chaque année marque son lot d'avancées, à commencer par les travaux de John.F. Nash, qui, entre 1950 et 1953, publia quatre articles fondamentaux pour la théorie des jeux non-coopératifs et la théorie de négociation. Il prouva l'existence d'un équilibre stratégique pour les jeux non-

3. Professeur de sciences économiques à l'institut d'Etudes Politiques de Strasbourg.
4. Le Her est un jeu de cartes, de la famille des « jeux de poules » lesquels nécessitent un nombre relativement important de joueurs dont seul l'un d'entre-eux gagnera les mises de tous les autres. De la sorte, les pertes sont généralement minimes tandis qu'un seul joueur emporte une somme relativement importante.

coopératifs, qui porte son nom. Dans la même période, Shapley étudia les jeux coopératifs et proposa la notion du coeur ainsi qu'un concept de solution connu maintenant sous le nom de valeur de Shapley. A partir des années 70, le champ d'application de la théorie des jeux s'élargit à d'autres disciplines, comme par exemple la biologie évolutionnaire, autres disciplines d'économies, sciences sociales, sciences politiques, et même en informatique.

Elle a été récompensée à plusieurs reprises par le prix Nobel d'économie, en 1994 c'est Nash, Selten et Harsanyi qui se sont vus attribués le prix pour leurs travaux sur les jeux non coopératifs ; en 2005 c'est le tour de Thomas Schelling et Robert Aumann. En 2007, Eric Maskin, Roger Meyerson, Leonid Hurwicz ont partagé le prix pour leurs travaux appliqués aux enchères. Plus récemment, le prix Nobel 2012 est encore accordé à des théoriciens des jeux Alvin Roth et Lloyd Shapley pour leurs travaux sur les marchés et la façon d'ajuster leurs agents économiques.

Théorie des jeux multicritères, pourquoi ?

L'approche, qui consiste à considérer un seul critère qu'un joueur souhaite maximiser, n'est souvent pas suffisante pour décrire les besoins et le comportement des participants au jeu comme l'explique l'exemple de Borm [16]. Supposons que nous avons une entreprise qui doit décider de l'emplacement d'une nouvelle installation. Cette décision impliquera plusieurs objectifs : coûts d'achat du terrain, des difficultés à obtenir un permis de construction, les coûts de construction, l'emplacement (accessibilité, la proximité du consommateur, la distance aux industries d'approvisionnement), l'intérêt public (travail, la pollution etc,...), la réputation. Nous supposons aussi qu'il y a une entreprise concurrente ayant des intentions similaires. Pour chacune des entreprises, certains des objectifs cités seront dépendant de l'emplacement de la nouvelle installation de l'autre firme. C'est pourquoi nous sommes face à un jeu dans lequel il sera difficile pour les entreprises à trouver un compromis entre les divers objectifs qui pourraient servir de fonction de gain dans ce jeu.
Une autre raison de considérer des modèles multiobjectifs est la difficulté de définir a priori un (ou l'absence d'un) "compromis" entre les différents objectifs. Il faut donc prendre compte de toutes les informations dont on dispose qui permettent d'explorer l'éventail des possibilités.

La théorie des jeux multicritères est donc une rencontre de deux théories de prise de décisions, à savoir la théorie des jeux classiques et l'optimisation multicritère. Le premier à introduire cette classe de jeux est Blackwell [13] en 1956 qui a étudié l'extension du théorème minmax de Von Neumann au cas des jeux à deux personnes multicritères à somme nulle.

Les solutions proposées pour les jeux multicritères sont issues des solutions pour un jeu classique (monocritère) en utilisant les concepts de solutions pour un problème multicritère. Cependant le premier concept d'équilibre a été introduit et étudié par Shapley en 1959 [72] qu'on appellera ici équilibre efficace. C'est une généralisation de l'équilibre de Nash en utilisant le concept de solution efficace de Pareto pour un problème d'optimisation multicritère. Il a été initialement proposé pour un jeu à deux personnes à somme nulle.
Comme pour les jeux classiques, les jeux multicritères ont suivi le même ordre d'évolution, les premiers cas considérés sont les jeux à deux personnes à somme nulle. Différentes solutions ont été définies et étudiées, telles que le point selle, stratégies de sécurité, maxmin et minmax, voir [39, 42, 41, 72, 84]. Ces dernières années, cette classe de jeux est même considérée dans le cas d'ensembles de stratégies flous et/ou fonctions objectifs floues [95].
A partir des années 90, les chercheurs commencent à s'intéresser d'avantage au jeux multicritères à somme non nulle sous ses différents aspects ; coopératifs [39, 38, 65, 79], non-coopératifs, forme normale et forme extensive [49, 61], sans contraintes et avec contraintes [48, 29, 30, 32]. L'existence des équilibres est l'une des importantes questions la plus étudiée sous différentes hypothèses de convexité, de compacité, de continuité et dans différents espaces et par différentes approches.
L'outil mathématique utilisé en théorie des jeux est l'analyse non linéaire, chacun interagissant sur l'autre, les développements mathématiques trouvant des applications dans les sciences économiques et la théorie de l'équilibre en général, celle-ci motivant de nouvelles recherches, jetant de nouveaux défis aux mathématiciens.

Bien que le problème d'équilibre économique a été posé en 1874 par Léon Walras, il a fallu attendre la naissance de l'analyse non linéaire en 1910 avec le théorème du point fixe de Brouwer qui a permis à John Von Neumann dans les années vingt et trente de construire les fondements mathématiques de la théorie des jeux pour qu'ensuite suivent dans les années cinquante les travaux de Nash, Debreux, Aumann, Shapley,... pour démontrer l'existence des équilibres économiques.

En 1961, Ky Fan démontra un lemme qui donna naissance à un autre concept d'analyse non linéaire appelé élément maximal pour une correspondance. Il a été développé et appliqué par Sonneschein (1971), Shafer (1974) et d'autres, pour établir l'existence d'un équilibre dans un jeu généralisé.

But de la thèse

Dans l'étude mathématique de la théorie des jeux, une question très importante à laquelle on s'intéresse le plus souvent est l'étude des conditions d'existence des concepts de solutions. La présente thèse s'articule essentiellement autour de deux concepts de solutions ; équilibre idéal et équilibre proprement efficace, qu'on se proposera d'étudier pour différentes classes des jeux multicritères, à savoir, les jeux multicritères à somme nulle, à somme non nulle et les jeux avec contraintes.

La thèse est structurée sous forme de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons des notions de base sur un outil fondamental d'analyse non linéaire qui sont les correspondances, dites aussi fonctions multivoques, qui servent à répondre aux questions de l'existence d'équilibres. Le deuxième chapitre est consacré aux notions générales de l'optimisation multicritère notamment les différentes solutions utilisées et les définitions générales de la théorie des jeux classique. Au troisième chapitre, après une revue de la littérature sur le concept le plus étudié qui est l'équilibre efficace dans les jeux multicritères à somme non nulle, nous proposons d'étudier l'équilibre proprement efficace et l'équilibre idéal. En se basant sur des résultats de l'optimisation multicrirère, nous établirons certaines propriétés et des conditions suffisantes d'existence. Au chapitre quatre, notre intérêt se porte sur les jeux à somme nulle. Nous présentons d'abord les concepts de solutions les plus connus et plus étudiés, on s'intéressera ensuite à l'équilibre proprement efficace et l'équilibre idéal, certaines caractérisations seront données et des conditions d'existence seront établies. Le dernier chapitre traite des jeux multicritères avec contraintes. Après une synthèse sur les travaux effectués pour cette classe de jeux concernant l'équilibre efficace, nous proposons d'étudier l'équilibre idéal pour lequel des conditions d'existence seront données.

Liste des travaux scientifiques

Revues Internationales

1. K. Fahem and M.S. Radjef. Properly Efficient Nash Equilibrium in Multicriteria Noncooperative Games. Mathematical Methods of Operations Research : 82 (2015) 175-193.
2. M.S. Radjef and K. Fahem. A Note on ideal Nash equilibrium in multicriteria games. Applied Mathematics Letters : 21 (2008) 1105-1111.

Actes de conférences internationales

1. K. Fahem, M.S. Radjef. Équilibre Proprement Efficace dans un Jeu Multicritère Fini à Somme Nulle. ROADEF 13-15 février 2013, Univ. Troyes, France.
2. K. Fahem, M.S. Radjef. Équilibre de Nash Proprement Efficace dans un Jeu Non-coopératif Multicritère sous Forme Stratégique, International Conference on Pure and Applied Mathematics, " ICPAM'12 " Univ. de Guelma 28-30 Mai 2012.
3. K. Fahem, M.S. Radjef. Équilibre Proprement Efficace dans un Jeu Multicritère Fini à Somme Nulle, JSLAROMAD, Univ. de Tizi-Ouzou 28, 29 et 30 Novembre 2011.
4. M.S. Radjef, K. Fahem. Ideal Social Equilibrium in Noncooperative Multiobjective Games. Seventh International Workshop of the International Society of Dynamic Games, Djerba, Tunisia, 1-3 July 2009.
5. M.S. Radjef, K. Fahem. Equilibre idéal de Berge dans les jeux multicritères non-coopératifs. RAMA 6 Tizi-Ouzou (2008).

Notations

Les notations suivantes seront utilisées dans ce mémoire.
Si X est un ensemble, on note par

2^X : l'ensemble des parties de X.
$intX$: l'intérieur de l'ensemble X.
$co(X)$: l'enveloppe convexe de X.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}/x \geqq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

$\mathbb{R}_+^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m/x_i \geqq 0,\ \forall\ i = 1, ..., m\}$ l'orthant non négatif de $\mathbb{R}^m$,

$int\ \mathbb{R}_+^m = \{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_j > 0$ pour $j = 1, ..., m\}$,

$\Delta_m = \{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}_+^m : \sum\limits_{j=1}^{m} x_j = 1\}$ le simplexe de $\mathbb{R}^m$.

$int\ \Delta_m = \{x = (x_1, ..., x_m) \in int\ \mathbb{R}_+^m : \sum\limits_{j=1}^{m} x_j = 1\}$.

Si $x = (x_1, ..., x_m),\ y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, on notera les inégalités vectorielles :

$x = y \Longleftrightarrow x_i = y_i,\ i = 1, ..., m.$
$x < y \Longleftrightarrow x_i < y_i,\ i = 1, ..., m.$
$x \leqq y \Longleftrightarrow x_i \leqq y_i,\ i = 1, ..., m.$
$x \leq y \Longleftrightarrow x \leqq y\ et\ x \neq y.$

On notera par $x \ngeqq y$ (respectivement $x \ngeq y,\ x \ngtr y$) la négation des relations $x \geqq y$ (respectivement $x \geq y,\ x > y$).

1 Sur les correspondances et les fonctions vectorielles

Comment se fait-il que la mathématique,
qui est le produit de la pensée humaine
et indépendante de toute expérience,
s'adapte d'une si admirable manière
aux objets de la réalité ?

Albert Einstein

Introduction

Les fonctions multivoques, dites aussi correspondances, sont utilisées dans différentes disciplines telles que la théorie du contrôle, jeux différentiels, économie mathématique, biomathématique, théorie des jeux. Leur utilisation en économie mathématique et théorie des jeux a commencé lorsque Von Neumann cherchait une extension du théorème du point fixe de Brouwer aux fonctions multivoques pour montrer l'existence d'un équilibre dans un jeu noncoopératif à n-personnes. Le but fut atteint dans les années quarante avec le théorème du point fixe de Kakutani. Ce dernier a été utilisé par Arrow et Debreu au début des années cinquante pour montrer l'existence de l'équilibre Walrasien, une preuve tant attendue vu que le problème a été posé par Léon Walras en 1874. Ces résultats ont rendu les fonctions multivoques populaires auprès des économistes mathématiciens.

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques éléments de base sur les correspondances dont nous aurons besoin dans ce document, comme la continuité, point fixe, élément maximal.

1.1 Généralités et définitions

Soient E et F deux espaces topologiques.

Définition 1.1. [8] On dit que $C : E \longrightarrow 2^F$ est une correspondance définie de E dans 2^F, si pour tout $x \in E,\ C(x)$ est une partie de F. On note $C(x) \in 2^F$.
C(x) est appelé image ou valeur de C en x.
On appelle graphe de C le sous-ensemble $Gr(C)$ de $E \times F$ défini par :

$$Gr(C) = \{(x,\ y)\ \in E \times F \text{ tels que } y \in C(x)\}.$$

Une correspondance est dite non triviale si son graphe est non vide, i.e., s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $C(x)$ est non vide.
On dit que C est stricte si toutes les images $C(x)$ sont non vides.
Le domaine de C est l'ensemble des éléments $x \in X$ tel que $C(x)$ est non vide.

$$Dom(C) = \{x \in X,\ C(x) \neq \emptyset\}.$$

L'image de C est l'union de toutes les images (ou valeurs) $C(x)$, lorsque x parcourt X.

$$Im(C) = \bigcup_{x \in X} C(x).$$

L'inverse C^{-1} de C est la correspondance définie de F dans 2^E comme suit :

$$x \in C^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in C(x) \Longleftrightarrow (x,\ y) \in Gr(C).$$

Soit $\mathcal{P}$ une propriété d'un sous-ensemble (convexe, compact,...). On dit qu'une correspondance vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si son graphe la satisfait.
Si les images de la correspondance C sont fermées (respectivement convexes, bornées, compactes), on dit que C est à valeurs fermées (respectivement convexes, bornées, compactes).

Si $\star$ désigne une opération sur les ensembles, on utilise la même notation pour les opérations sur les correspondances. Soient $C_1, C_2 : E \longrightarrow 2^F$. Alors $C_1 \star C_2 : E \longrightarrow 2^F$ est la correspondance définie par

$$(C_1 \star C_2)(x) = C_1(x) \star C_2(x)$$

On définit par exemple $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cup C_2$, $C_1 + C_2$ (dans des espaces vectoriels) par

$$\begin{aligned}
(C_1 \cap C_2)(x) &= C_1(x) \cap C_2(x) \\
(C_1 \cup C_2)(x) &= C_1(x) \cup C_2(x) \\
(C_1 + C_2)(x) &= C_1(x) + C_2(x)
\end{aligned}$$

On a aussi

$$C_1 \subset C_2 \Longleftrightarrow Gr(C_1) \subset Gr(C_2).$$

On dit que C_2 est une extension de C_1.
Soient K, K_1, K_2 des sous-ensembles de E. On a les propriétés élémentaires suivantes

$$\begin{array}{rcl} C(K_1 \cup K_2) & = & C(K_1) \cup C(K_2), \\ C(K_1 \cap K_2) & \subset & C(K_1) \cap C(K_2), \\ C(E \setminus K) & \supset & Im(C) \setminus C(K), \\ K_1 \subset K_2 & \Longrightarrow & C(K_1) \subset C(K_2). \end{array}$$

Définition 1.2. [8] Soit la correspondance $C : E \longrightarrow 2^F$.

1. On appelle image réciproque de $K \subset F$ par C l'ensemble :

$$C^{-1}(K) = \{x \in E \ tel \ que : C(x) \bigcap K \neq \phi\}.$$

2. On appelle coeur de $K \subset F$ par C, l'ensemble :

$$C^{+1}(K) = \{x \in E \ tel \ que : C(x) \subset K\}.$$

Définition 1.3. [8] Soient E, F, G trois ensembles et

$$C : E \longrightarrow 2^F, \ D : F \longrightarrow 2^G$$

deux correspondances.
La composition $D \circ C : E \longrightarrow 2^G$ de D et C en x est définie par

$$(D \circ C)(x) = \bigcup_{y \in C(x)} D(y)$$

Comme pour les fonctions univoques, on a les relations suivantes : soient $M \subset G$ et $z \in G$,

$$\begin{array}{rcl} (D \circ C)^{-1}(z) & = & C^{-1}(D^{-1}(z)) = (C^{-1} \circ D^{-1})(z) \\ (D \circ C)^{-1}(M) & = & C^{-1}(D^{-1}(M)) \end{array}$$

1.2 Continuité

Soient E, F deux espaces métriques et B la boule unité de F.
Rappelons que pour une application univoque C de E dans F, les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} a)\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N(x_0)\ \text{ tel que, } \forall\ x \in\ N(x_0),\ C(x) \in\ C(x_0) + \varepsilon B, \\ b)\ \text{pour toute suite } x_n \text{ convergeant vers } x_0,\ C(x_n) \text{ converge vers } C(x_0). \end{cases}$$

Lorsque C est une correspondance de E dans F, la notion de semi-continuité supérieure est la généralisation naturelle de la condition a).
La généralisation de la condition b) conduit à la définition de la semi-continuité inférieure.

Définition 1.4. [10] Une correspondance $C : E \longrightarrow 2^F$ est semi-continue supérieurement en $x_0 \in E$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $N(x_0)$ de x_0 tel que

$$C(x) \subset C(x_0) + \varepsilon B \text{ pour tout } x \in N(x_0).$$

Elle est semi-continue supérieurement sur E, si elle l'est en tout point $x_0 \in E$.

Définition 1.5. [10] Une correspondance $C : E \longrightarrow 2^F$ est semi-continue inférieurement en $x_0 \in E$, si pour toute suite $\{x_n\} \subset E$ convergeant vers $x_0 \in E$, pour tout $y_0 \in C(x_0)$, il existe une suite $\{y_n\} \subset F$ avec $y_n \in C(x_n)$ convergeant vers y_0.

Définition 1.6. [10] Une correspondance C de E dans 2^F est continue en x_0, si elle est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en x_0.

Dans le cas où C est une correspondance définie sur des espaces topologiques on a les définitions suivantes :

Définition 1.7. [10] Soient E et F deux espaces topologiques et $C : E \longrightarrow 2^F$ une correspondance.

- C est semi-continue supérieurement en un point $x_0 \in E$ si pour tout ouvert V de F contenant $C(x_0)$ il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow C(x)) \subset V.$$

- C est semi-continue inférieurement en un point $x_0 \in E$ si pour tout ouvert V de F vérifiant $V \cap C(x_0) \neq \emptyset$, il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow C(x) \cap V \neq \emptyset.$$

Définition 1.8. [10] Une correspondance $C : E \longrightarrow 2^F$ est dite fermée si, pour toute suite $\{x_n\}$ convergeant vers x_* et $\{y_n\}$ convergeant vers y_* tel que pour tout λ, $y_\lambda \in C(x_\lambda)$, alors $y_* \in C(x_*)$.

Remarque 1.1. [10]

1) Toute correspondance semi-continue supérieurement à valeurs compactes est fermée.
2) Si F est compact, alors $C : E \longrightarrow 2^F$ est fermée si et seulement si elle est semi-continue supérieurement.

Définition 1.9. [94] Soient E et F deux espaces topologiques, On dit que la correspondance $C : E \longrightarrow 2^F$ est

1. semi-continue supérieurement sur E, si pour tout fermé A de F, $C^{-1}(A)$ est fermé dans E.
2. semi-continue inférieurement sur E, si pour tout ouvert B de F, $C^{-1}(B)$ est ouvert dans E.

Proposition 1.1. [7] Soit C une correspondance semi-continue supérieurement à valeurs compactes d'un espace compact E sur un espace F. Alors $C(E)$ est compact.

1.3 Point fixe

Rappelons d'abord le théorème du point fixe de Brouwer pour une fonction univoque.

Théorème 1.1. [18] [Théorème de Brouwer]. Soit X un convexe compact non-vide de $\mathbb{R}^k$ et $f : X \longrightarrow X$ continue, alors f admet un point fixe, i.e.

$$\exists\, x \in X \text{ tel que } x = f(x).$$

Le théorème de Brouwer a été généralisé aux correspondances par Kakutani (1941) [47] dans les espaces vectoriels de dimension finie et par Glicksberg (1952) dans les espaces vectoriels topologiques.

Définition 1.10. On dit que $x \in E$ est un point fixe de la correspondance $C : E \longrightarrow 2^E$ si $x \in C(x)$.

Théorème 1.2. [47] Soit E un sous-ensemble non vide convexe et compact d'un espace euclidien et $C : E \longrightarrow 2^E$ une correspondance semi-continue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées. Alors, C admet au moins un point fixe.

Ce théorème trouve ses applications non seulement en mathématiques, mais également dans d'autres disciplines comme la théorie des jeux, l'économie mathématique. Sa popularité auprès des mathématiciens et économistes, la doit à John Forbes Nash [58] qui l'a utilisé pour montrer un théorème majeur de la théorie des jeux et qui lui a valu le prix Nobel d'économie en 1994, selon lequel tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes. En théorie économique, Arrow et Debreu [5] et McKenzie [53] ont suivi l'idée de Nash. En utilisant le théorème de Kakutani, ils ont enfin démontré l'existence de l'équilibre général, puisque le problème a été posé un siècle auparavant par Léon Walras [87].

On trouve également d'autres formes de théorèmes de point fixe faisant intervenir les sections inférieures et/ou supérieures, dont le théorème de Browder.

Théorème 1.3. [19] [Browder (1968)] Soit E un convexe compact de $\mathbb{R}^m$ et soit $C : E \longrightarrow 2^E$ une correspondance à valeurs non vides convexes et telle que $C^{-1}(y)$ est ouvert pour tout $y \in E$. Alors C possède un point fixe.

Théorème 1.4. [33] Soit $C : E \longrightarrow 2^E$ une correspondance définie sur un espace topologique E. Si C est à graphe fermé, alors l'ensemble des points fixes de C est fermé.

1.4 Élément maximal

Si le point fixe d'une correspondance n'est qu'une généralisation simple et naturelle d'un point fixe pour une fonction univoque, la notion d'élément maximal tient ses origines d'élément maximal d'une relation binaire. Elle n'a donc un sens que lorsque la correspondance C représente un ordre strict ou une relation de préférence non reflexive sur un ensemble X. Dans ce cas, elle associe à tout $x \in X$ un sous-ensemble $C(x) \subset X$ qui peut être interprété comme l'ensemble des éléments de X qui sont meilleurs, préférés à x. La conclusion $C(\bar{x})$ est vide signifie qu'il n'existe pas d'éléments préférés à $\bar{x}$ et cet élément est donc maximal pour C dans X.
Dans cette section, nous tenterons d'expliquer l'origine de l'élément maximal d'une correspondance, en partant d'une relation binaire et en passant par les relations de préférences utilisées dans la théorie de la décision.

1.4.1 Relations binaires et propriétés

La notion de relation binaire est introduite pour la première fois par De Morgan [55], elle prend la forme actuelle comme un ensemble de paires ordonnées dans les travaux de Peirce [63].

Définition 1.11. Soit X un espace topologique.
Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur X est un sous-ensemble de $X \times X$. On écrit $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$ et

on dit que x est en relation avec y. Dans le cas contraire, on écrit $(x, y) \notin \mathcal{R}$ ou $x\neg\mathcal{R}y$.

Un certain nombre de propriétés que les relations binaires peuvent (ou non) vérifier sont généralement considérées comme importantes. Nous allons en donner une liste non exhaustive.

Définition 1.12. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est :

- *réflexive* si : $\forall\ x \in X \quad x\mathcal{R}x$,
- *irréflexive* si : $\forall\ x \in X \quad x\neg\mathcal{R}x$,
- *totale* ou *complète* si : $\forall\ (x, y) \in X^2\ x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$,
- *connexe* si : $\forall\ (x, y) \in X^2 \quad x \neq y \Longrightarrow x\mathcal{R}y$ et/ou $y\mathcal{R}x$,
- *symétrique* si : $\forall\ (x, y) \in X^2 \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$,
- *asymétrique* si : $\forall\ (x, y) \in X^2 \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\neg\mathcal{R}x$,
- *antisymétrique* si : $\forall\ (x, y) \in X^2 \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$,
- *transitive* si : $\forall\ (x, y,\ z) \in X^3 \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$,
- *négativement transitive* si : $\forall\ (x, y,\ z) \in X^3 \quad x\neg\mathcal{R}y$ et $y\neg\mathcal{R}z \Longrightarrow x\neg\mathcal{R}z$,
- *acyclique* si : pour tout entier $k \quad x_1\mathcal{R}x_2\mathcal{R}\ldots\mathcal{R}x_k \Longrightarrow x_1 \neq x_k$.

Les propriétés des relations binaires citées ci-dessus ne sont pas indépendantes. On pourra, par exemple, montrer que :

- une relation est asymétrique ssi elle est irréflexive et antisymétrique,
- une relation est complète ssi elle est connexe et réflexive,
- une relation asymétrique et négativement transitive est transitive,
- une relation complète et transitive est négativement transitive,
- une relation acyclique est asymétrique et une relation asymétrique est irréflexive.

Différentes classes de relations binaires sont définies.

Définition 1.13. On dira qu'une relation binaire est une relation :

- *de préordre (ou quasi-ordre)*, si elle est réflexive et transitive,
- *d'ordre*, si elle est réflexive, transitive et complète,
- *d'ordre partiel*, si elle est réflexive, transitive et antisymétrique,
- *d'ordre partiel strict*, si elle est transitive et asymétrique.

Définition 1.14. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble X et S un sous-ensemble de X. Un élément $x \in S$ est maximal pour la relation $\mathcal{R}$ dans S, si

$$\nexists\ y \in S \text{ tel que } y\mathcal{R}x.$$

Remarque 1.2. [69] Si X est fini, alors $\mathcal{R}$ est acyclique si et seulement si pour tout sous-ensemble fini S de X, $\mathcal{R}$ admet au moins un élément maximal sur S.

Les relations d'ordre sont à la base des relations de préférence et donc de la théorie de la décision.

Relations de préférence

Les relations de préférence sont largement utilisées en économie, particulièrement en théorie du consommateur où l'individu est confronté à choisir ou classer des biens selon ses goûts sur l'ensemble de ses alternatives ou l'ensemble de décisions X. Elle sont formulées par des relations binaires vérifiant certaines des propriétés citées ci-dessus. Deux relations de préférence sont souvent utilisées, une relation de préférence "stricte" qui modélise le cas où si l'individu a à choisir entre l'alternative a ou l'alternative b, il choisira a. La deuxième est la relation de préférence "faible" ou "large" qui formalise le cas où l'individu préfère l'alternative a à l'alternative b ou il est indifférent entre les deux.

L'utilisation des relations de préférence ne se limite pas au domaine économique, on les applique également en science sociale, science politique, théorie d'aide à la décision, ...

Définition 1.15. [2]

1. Une relation de préférence stricte (ou forte) sur un ensemble X est une relation binaire asymétrique.
2. Une relation de préférence large (ou faible) est une relation binaire reflexive et qui est souvent supposée complète.

Notations

- Une relation de préférence stricte est notée $\succ$, $x \succ y$ est interprétée "x est strictement préféré à y".
- Une relation de préférence large est notée $\succeq$, $x \succeq y$ est interprétée "x est faiblement préféré à y".

On a

$$x \succ y \Longleftrightarrow x \succeq y \text{ mais } \neg y \succeq x.$$

On écrira $x \not\succeq y$ (resp. $x \not\succ y$) pour dire que x n'est pas faiblement préféré à y (resp. x n'est pas strictement préféré à y, ce qui n'implique pas que y est faiblement préféré à x (resp. y n'est pas strictement préféré à x).

Dans la théorie de la décision, on parle aussi de relation d'indifférence notée $\sim$ définie par

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \succeq y \text{ et } y \succeq x$$

et on dira que "x et y sont indifférents ".

Les relations de préférences sont parfois représentées par des fonctions d'utilités (des fonctions numériques), comme les fonctions de gains en théorie des jeux ou fonctions objectifs en optimisation.

Le présent document ne traite pas de relations de préférences, ni ne les utilise autant qu'un outil. Notre but est d'expliquer les origines d'un élément maximal pour une correspondance qui a des apports importants dans les théorèmes d'existence d'équilibre aussi bien en économie qu'en théorie des jeux. Nous nous limiterons donc aux notions présentées ci haut sur les relations de préférences, le lecteur désirant s'approfondir pourra se référer par exemple à [2].

1.4.2 D'une relation de préférence à une correspondance

Dans le besoin d'utiliser des résultats d'analyse non linéaire pour montrer l'existence d'équilibre, on associe une correspondance à une relation de préférence.
Soit X un sous-ensemble d'un espace topologique E.
Pour tout $x \in X$, on note par $U(x)$ le sous-ensemble des éléments de X qui sont préférés à x (par les relations de préférence $\succeq$ ou $\succ$), appelé contour (ou section) supérieur de x. Plus précisément, on note

- $U_w(x) = \{y \in X : y \succeq x\}$ section supérieure faible de x,
- $L_w(x) = \{y \in X : x \succeq y\}$ section inférieure faible de x,
- $U_s(x) = \{y \in X : y \succ x\}$ section supérieure stricte de x,
- $L_s(x) = \{y \in X : x \succ y\}$ section inférieure stricte de x.

Définition 1.16. [81] Une relation de préférence faible $\succeq$ définie sur X admet un ***plus grand élément*** s'il existe un élément $x^* \in X$ tel que

$$x^* \succeq x \quad \forall x \in X \text{ ce qui est équivalent à } \bigcap_{x \in X} [U_w(x)] \neq \emptyset.$$

Définition 1.17. [81] Une relation binaire stricte $\succ$ admet un ***élément maximal*** sur X s'il existe un élément $x^* \in X$ tel que

$$\nexists\, x \in X : x \succ x^* \text{ ce qui est équivalent à } U_s(x^*) = \emptyset.$$

Une relation de préférence $\mathcal{R}$ (stricte ou faible) peut être représentée par une correspondance (une fonction multivoque) $C : X \longrightarrow 2^X$ qui à tout $x \in X$ fait correspondre

$$C(x) = \{y \in X : y\mathcal{R}x\} \subset X.$$

Par la suite, on notera par

$$\begin{aligned} C(x) &= \{y \in X : y\mathcal{R}x\} \text{ section supérieure de } x, \\ C^{-1}(x) &= \{y \in X : x \in C(y)\} = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}, \text{ section inférieure de } x, \\ Gr(C) &= \{(x,\ y) \in X \times X : y \in C(x)\} \text{ le graphe de } C. \end{aligned}$$

Les définitions 1.16 et 1.17 deviennent alors :

Définition 1.18. Une correspondance $C : X \longrightarrow 2^X$ admet un plus grand élément si

$$\bigcap_{x \in X} C(x) \neq \emptyset.$$

Définition 1.19. Une correspondance $C : X \longrightarrow 2^X$ admet un élément maximal s'il existe $x^* \in X$ tel que $C(x^*) = \emptyset$.

Remarque 1.3. Certaines des propriétés de la Définition 1.12 deviennent

- $\mathcal{R}$ est reflexive si $\forall\, x \in X,\ x \in C(x)$,
- $\mathcal{R}$ est irreflexive si $\forall\, x \in X,\ x \notin C(x)$,
- $\mathcal{R}$ est acyclique si pour tout sous-ensemble $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ de X, $x^2 \in C(x^1)$, $x^3 \in C(x^2), ..., x^n \in C(x^{n-1})$ alors $x^1 \notin C(x^n)$.

Proposition 1.2. [90] Si pour tout $y \in X$, $C^{-1}(y)$ est ouvert dans X, alors C est s.c.i.

Corollaire 1.1. [90] Si le graphe de C est ouvert dans $X \times X$, alors pour tout $x \in X$, $C(x)$ est ouvert dans X et C est s.c.i.

Théorème 1.5. [12] Si C est à graphe ouvert, alors les sections de C sont ouvertes.

Théorème 1.6. [12] Si X est l'orthant non négatif de $\mathbb{R}^n$ (muni de la topologie usuelle) et $C(x)$ est convexe pour tout $x \in X$ (ou $C^{-1}(x)$ est convexe pour tout $x \in X$), alors le graphe de C est ouvert si et ssi les sections de C sont ouvertes.

1.4.3 Existence d'élément maximal

La question de l'existence d'élément maximal pour une relation de préférence non transitive [1] a été abordée par deux approches. La première se base sur la notion de convexité, et la deuxième utilise la notion d'acyclicité.
Pour la première, Ky Fan [37] a démontré en 1961 un lemme important qui donne des conditions suffisantes d'existence d'un élément maximal pour une relation de préférence vérifiant certaines conditions sur un ensemble convexe et compact, mais qui n'est pas formulé comme tel. Parallèlement, et indépendamment, un résultat analogue fut démontré par Sonnenschein (1971) [76] en relaxant certaines hypothèses de Fan. On cite également Shafer (1974)[70]. Ces résultats ont été appliqués pour établir l'existence d'un équilibre dans un jeu généralisé.
Soit $C : X \longrightarrow 2^X$ une correspondance représentant une relation de préférence.

Théorème 1.7. [37] Soit X un sous-ensemble compact et convexe d'un espace vectoriel topologique et C une relation de préférence sur X vérifiant les conditions suivantes :

1. pour tout $x \in X$, $x \notin C(x)$,
2. pour tout $x \in X$, $C(x)$ est convexe,
3. le graphe de C est ouvert dans $X \times X$.

Alors l'ensemble des éléments maximaux est non vide et compact.

La formulation originale de ce théorème est la suivante

Théorème 1.8. [37] Soit X un sous-ensemble compact et convexe d'un espace vectoriel topologique. Soit $K \subset X \times X$ un sous-ensemble fermé et supposons que

1. Pourquoi non transitive ? La transitivité d'une relation de préférence a été critiquée, précisément la transitivité de la relation d'indifférence qui s'avère peu réaliste. On peut être indifférent entre 100 et 101 grains de sucre dans son café, indifférent entre 101 et 102,...et indifférent entre 4999 et 5000. Si l'indifférence est transitive, on serait indifférent entre 100 et 5000 grains, ce qui est improbable.

(i) $(x,x)\in K$ pour tout $x\in X$,

(ii) pour tout $y\in X$, $\{x\in X:\ (x,\ y)\notin K\}$ est convexe (peut être vide).

Alors l'ensemble des points $\bar{y}\in X$ tels que $X\times\{\bar{y}\}\subset K$ est non vide et compact.

Montrons l'équivalence des deux théorèmes. On démontrera que l'un implique l'autre.

i) Théorème 1.7 $\Longrightarrow$ Théorème 1.8. Par l'absurde, supposons que la conclusion du Théorème 1.8 est fausse, c.à.d pour tout $y\in X$, $X\times\{y\}\nsubseteq K$. Donc

$$\forall\ y\in X,\ \exists\ x\in X\ t.q\ (x,y)\notin K. \tag{1.1}$$

Posons $\mathcal{R}$ la relation définie par $x\mathcal{R}y\Longleftrightarrow(x,y)\notin K$ et la correspondance associée

$$\begin{array}{rcl} C:X & \longrightarrow & 2^X \\ y & \longmapsto & C(y)=\{x\in X:\ (x,\ y)\notin K\}. \end{array}$$

Alors, d'après (1.1), on a :

$$\forall\ y\in X:\ C(y)\neq\emptyset. \tag{1.2}$$

En vertu de l'hypothèse (ii) du Théorème 1.8, $C(y)$ est un ensemble convexe pour tout $y\in X$. D'après l'hypothèse (i) du même Théorème, $\forall\ y\in X\ \ (y,\ y)\in K$, on en déduit donc que $y\notin C(y)$.

Le graphe de la correspondance C est par définition l'ensemble

$$\begin{array}{rcl} Gr(C) & = & \{(y,\ x)\in X\times X:\ x\in C(y)\} \\ & = & \bar{K}(\text{ complémentaire de K}), \end{array}$$

d'où le graphe de C est ouvert comme étant le complémentaire d'un fermé.

Ainsi toutes les conditions du Théorème 1.7 sont vérifiées, il existe donc $\tilde{y}\in K$ tel que $C(\tilde{y})=\emptyset$ ce qui contredit (1.2).

ii) Théorème1.8 $\Longrightarrow$ Théorème 1.7. De la même manière, supposons que la conclusion du Théorème 1.7 est fausse, donc $\forall\ x\in X,\ C(x)\neq\emptyset$. Par conséquent

$$\forall\ x\in X,\ \exists\ y\in X \text{ tel que } y\in C(x). \tag{1.3}$$

Posons

$$K=\{(x,y)\in X\times X:y\notin C(x)\}.$$

D'après la condition 1 du Théorème 1.7, on a pour tout $x\in X$, $x\notin C(x)$, donc $(x,\ x)\in K$.

Soit $y \in X$, $\{x \in X : (x, y) \notin K\} = \{x \in X, (x, y) \in Gr(C))\} = C(y)$ qui est convexe en vertu de l'hypothèse 2. du Théorème 1.7.
D'autre part on a

$$K = \{(x, y) \in X \times X : y \notin C(x)\} = \{(x, y) \in X \times X : (x, y) \notin Gr(C)\}$$

qui est donc fermé étant le complémentaire du graphe de C qui est ouvert.
Toutes les conditions du Théorème 1.8 sont satisfaites, il existe donc $\tilde{y} \in X$ tel que

$$X \times \{\tilde{y}\} \subset K,$$

ce qui veut dire $\forall\, x \in X,\ (x, \tilde{y}) \in K$, en d'autre termes

$$\forall\, x \in X,\ \tilde{y} \notin C(x)$$

en particulier $\tilde{y} \notin C(\tilde{y})$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 1. ■

En remplaçant la condition de l'ouverture du graphe de la correspondance par la condition de l'ouverture de ses sections inférieures (qui est une condition plus faible), et en regroupant les conditions de l'irreflexivité et la convexité des sections supérieures, Sonnenshein a obtenu le Théorème suivant qui généralise le Théorème de Fan.

Théorème 1.9. [76] Sous les conditions suivantes :

1. X est compact et convexe dans $\mathbb{R}^m$,
2. $x \notin coC(x)$ pour tout $x \in X$,
3. pour tout $y \in C^{-1}(x)$, il existe $x' \in X$ (possible $x = x'$) tel que $y \in intC^{-1}(x')$,

l'ensemble des éléments maximaux de C est non vide et compact.

Ces résultats ont été généralisés à des espaces vectoriels topologiques par Yannelis et Prabhakar en 1983.

Théorème 1.10. [90] Sous les conditions suivantes :

1. X est compact et convexe d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff E,
2. $x \notin coC(x)$ pour tout $x \in X$,
3. $C^{-1}(y) = \{x \in X : y \in C(x)\}$ est ouvert dans X pour tout $y \in X$ [2],

2. Cette propriété est appelée *continuité inférieure* de C. Dans le cas où E est un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ alors cette condition peut être remplacée par la semi-continuité inférieure de C [90].

il existe $x^* \in X$ tel que $C(x^*) = \emptyset$.

Différentes généralisations de ces résultats ont été obtenues par plusieurs auteurs. Dans [22] la condition de la compacité a été affaiblie en supposant l'existence d'un sous-ensemble compact sur lequel la correspondance vérifie une certaine condition de coercivité. Dans [26] des théorèmes d'existence d'élément maximal ont été démontrés pour des correspondances dites majorées. D'autres généralisations ont été faites dans différents espaces topologiques plus généraux n'ayant pas la propriété de convexité (condition vérifiée par les espaces vectoriels) comme H-espaces, espaces G-convexes, FC-espaces, voir [31, 44, 43, 46, 89]. Ces théorèmes sont souvent suivis d'une application à l'existence d'équilibre pour un jeu ou une économie abstraite (ou jeu généralisé).

Pour la deuxième approche basée sur l'acyclicité, le résultat suivant est le premier théorème démontré par plusieurs auteurs indépendamment : Brown (1973) [20], Bergstrom (1975) [11], Walker (1977) [86].

Théorème 1.11. [Brown(1973), Bergstrom (1975), Walker (1977)]

Soit X un sous-ensemble compact d'un espace topologique, C une relation sur X satisfaisant les conditions suivantes

1. C est acyclique,
2. $C^{-1}(x)$ est ouvert pour tout $x \in X$.

Alors l'ensemble des éléments maximaux est non vide et compact.

Remarque 1.4. D'autres auteurs ont généralisé ces résultats sous des conditions faibles de continuité inférieure ou de compacité . Par exemple, Campbell et Walker (1990) [21] ont obtenu des résultats d'existence en remplaçant la condition de continuité inférieure par la continuité inférieure faible, mais en supposant une condition plus forte que l'acyclicité qu'ils ont appelée l'extratransitivité (i.e. $x' \succ x \succeq y' \succ y \Longrightarrow x' \succ y$). Peris et Subiza (1994) [64], sous la condition d'irréflexivité et en gardant la condition de la continuité inférieure et de la compacité, ont établi des conditions d'existence d'élément maximal d'une relation de préférence qui n'est ni transitive, ni acyclique. En 2002, Alcantud [1] a généralisé les théorèmes de Bergstrom-Walker (Théorème 1.11) et de Peris et al [64] en relaxant l'hypothèse de compacité. Plus récemment, Salonen [83] a établi des conditions suffisantes d'existence d'élément maximal d'une relation binaire acyclique $\mathcal{R}$ sans les conditions topologiques, il suppose qu'il existe un point x_0 tel que toute suite de dominance commençant du point x_0 est réductible, c.à.d ; toute sous-suite est aussi une suite de dominance.(Une suite $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ est une suite de dominance de point initial x_0, si pour tout segment $\{x_0, \ldots, x_k\}, k > 0$ est un chemin de dominance, i.e $x_0 \mathcal{R} x_1 \mathcal{R} \ldots \mathcal{R} x_k$).

Dans ce document, on traitera des jeux, où les préférences des joueurs sont représentées par des fonctions d'utilités (fonctions de gains), donc $C(x)$ pourra s'écrire $C(x) = \{y \in X : u(y) > u(x)\}$. Ceci justifie l'utilisation de la théorie de l'élément maximal pour établir l'existence des équilibres.

1.4.4 Relation entre point fixe et élément maximal

Tout théorème d'existence de point fixe possède une version équivalente d'existence d'élément maximal. Par exemple, le théorème suivant est équivalent au Théorème 1.10

Théorème 1.12. [Browder (1968)[19], Yannelis (1983)[90]] Soit X un sous-ensemble non vide convexe et compact d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff et $C : X \longrightarrow 2^X$ une correspondance vérifiant les conditions suivantes

1. $C(x)$ est non vide et convexe pour tout $x \in X$;
2. $C^{-1}(y)$ est ouvert dans X pour tout $y \in X$.

Alors il existe $x^* \in X$ tel que $x^* \in C(x^*)$.

1.4.5 Élément maximal pour une famille de correspondances

Soit I un ensemble d'indices, pour tout $i \in I$ X_i est un ensemble et $C_i : X = \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow 2^{X_i}$, $i \in I$ une famille de correspondances.

Définition 1.20. $x^* \in X$ est un élément maximal pour la famille $\{C_i\}_{i \in I}$, si

$$C_i(x^*) = \emptyset, \quad \forall\, i \in I.$$

Pour établir des conditions d'existence d'un tel élément, on se ramène à l'existence d'un élément maximal d'une correspondance.
Pour tout $i \in I$, on définit $C_i' : X \longrightarrow 2^X$ par

$$C_i'(x) = \prod_{j \in I, j \neq i} X_j \otimes C_i(x), \; \forall\, x \in X$$

et soit $C : X \longrightarrow 2^X$ définie par

$$C(x) = \begin{cases} \bigcap\limits_{i\in I(x)} C_i'(x), & \text{si } I(x) = \{i \in I : C_i(x) \neq \emptyset\} \neq \emptyset; \\ \emptyset, & \text{si } I(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Si on démontre l'existence d'un $x^* \in X$ tel que $C(x^*) = \emptyset$, alors $C_i(x^*) = \emptyset$ pour tout $i \in I$.

Théorème 1.13. [26] Soient $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles non vides, convexes où tout X_i est dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff E_i et I un ensemble quelconque d'indices. Soit $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ et $C_i : X \longrightarrow 2^{X_i}, i \in I$ une famille de correspondances telles que

a) C_i est à valeurs convexes ;

b) $y_i \notin C_i(y)$, pour tout $y \in X$;

c) $C_i^{-1}(y_i) = \{x \in X : y_i \in C_i(x)\}$ est ouvert dans X, pour tout $y_i \in X_i$.

d) $\bigcup\limits_{i\in I}\{x \in X : C_i(x) \neq \phi\} = \bigcup\limits_{i\in I} int\{x \in X : C_i(x) \neq \phi\}$.

e) il existe un sous-ensemble non vide compact K de X et des sous-ensembles non vides convexes et compacts D_i de X_i pour tout $i \in I$, tels que, pour tout $x \in X\backslash K$, il existe $i \in I$ tel que $C_i(x) \cap D_i \neq \phi$.

Alors il existe $x \in K$ tel que $C_i(x) = \phi$ pour tout $i \in I$.

Remarque 1.5. La condition *e*) est une condition de *coercivité*. Elle relaxe la condition de compacité des ensembles X_i. De ce fait, si les ensembles $X_i,\ i \in I$ sont compacts, l'hypothèse *e*) est satisfaite.

1.5 Les fonctions vectorielles

1.5.1 Fonctions réelles convexes/concaves

Soit X un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel E et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.21. On dit que f est :
1) concave sur X si : $\forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in [0,\ 1],\ \alpha\ f(x) + (1-\alpha)\ f(y)\ \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y)$;
2) quasi-concave sur X si : $\forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in [0,\ 1],\ \min\{f(x),\ f(y)\}\ \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y)$;
3) convexe sur X si : $\forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in [0,\ 1],\ \alpha\ f(x) + (1-\alpha)\ f(y)\ \geq f(\alpha x + (1-\alpha)y)$;
4) quasi-convexe sur X si : $\forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \alpha \in [0,\ 1],\ \max\{f(x),\ f(y)\}\ \geq f(\alpha x + (1-\alpha)y)$.

Remarque 1.6. Si f est concave (resp. convexe), alors f est quasi-concave (resp. quasi-convexe).

Dans le cas où X et Y sont des sous-ensembles non vides n'ayant pas la structure de linéarité, Ky Fan [36] a introduit les concepts de fonctions convexelike, concavelike qui généralisent la convexité et la concavité respectivement.

Définition 1.22. [36] $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexelike sur X, si pour tout $x_1,\ x_2 \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$, il existe $x_0 \in X$ tels que

$$f(x_0,\ y) \leqq \lambda f(x_1, y) + (1 - \lambda) f(x_2, y) \qquad \text{pour tout } y \in Y;$$

et f est concavelike si $(-f)$ est convexelike.

1.5.2 Cône convexité des fonctions vectorielles

Définition 1.23. Un sous-ensemble K d'un espace vectoriel E est appelé cône s'il est stable pour la multiplication par un scalaire positif ie :

$$\lambda x \in K,\ \forall\ x \in K\ et\ \lambda > 0.$$

Si $E = \mathbb{R}^n$, alors le cône K est l'union de demi droites émanant de l'origine, qui peut ne pas être inclus.

Soit X, Y deux espaces vectoriels normés, $K \subseteq Y$ un cône solide (i.e. à intérieur non vide) pointé (i.e. $K \cap (-K) = \{0\}$). On définit la relation d'ordre partiel induite sur Y par : $\forall\ y_1,\ y_2 \in Y$ on a

$$y_1 \leq_K y_2 \quad \text{si et ssi} \quad y_2 - y_1 \in K$$
$$y_1 <_K y_2 \quad \text{si et ssi} \quad y_2 - y_1 \in int(K).$$

Soit X_0 un sous-ensemble non vide et convexe de X, $f : X \longrightarrow Y$ une fonction vectorielle, son épigraphe est défini par

$$epi_C f = \{(x, r) : x \in X,\ f(x) \leq_K r\} \subseteq X \times Y.$$

Définition 1.24. [78] $f : X_0 \longrightarrow Y$ est

- $K-$convexe si pour tout $x_1, x_2 \in X_0$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \in f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) + K,$$

qui peut également s'écrire

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq_C \alpha f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

- K-quasiconvexe si pour tout $x_1,\ x_2 \in X_0$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$(f(x_1) + K) \cap (f(x_2) + K) \subseteq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K,$$

- K-convexlike si pour tout $x_1,\ x_2 \in X_0$ et $\lambda \in [0,1]$, il existe $x \in X_0$ tel que

$$f(x) \leq_C \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

On a les propriétés suivantes

Proposition 1.3. [78]

1. Si f est $K-$convexe alors elle est $K-$convexelike.
2. f est $K-$convexe si et ssi son épigraphe est convexe.
3. f est $K-$convexelike si et ssi l'ensemble $f(X) + K$ est convexe.

Définition 1.25. f est dite $K-$quasiconcavelike, si pour tout $x_1,\ x_2 \in X$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in f(x_1) + K$$

ou

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in f(x_2) + K.$$

1.6 Élément maximal et économie abstraite

Une économie abstraite a été définie par Debreu (1952) comme une forme généralisée d'un jeu sous forme normale où l'ensemble des stratégies d'un joueur dépend des choix des stratégies des autres. Debreu a démontré l'existence d'un équilibre dans une économie abstraite où le nombre d'agents est fini, les ensembles des stratégies sont des sous-ensembles d'un espace de dimension finie et les fonctions d'utilité sont quasi-concaves. Depuis, le résultat de Debreu a été généralisé dans différentes directions. Par exemple, dans le cas d'un nombre fini d'agents et espaces de stratégies de dimension finie, Shafer et Sonnenshein [71], Borglin et Kiding [15] ont étendu le résultat de Debreu à une économie abstraite à préférence non ordonnées. Yannelis et Prabhakar (1983)[90], Toussaint (1984) [82], Khan et Vohra (1984) [48] ont établi des conditions d'existence dans le cas des espaces de stratégies compacts de dimension infinie avec un nombre infini d'agents. Quant à Tian [80], il a considéré toujours le cas d'un nombre infini d'agents, des espaces de stratégies de dimension infinie mais non compacts.

1.6.1 Représentation

Une économie abstraite est représentée par

$$\Gamma = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (C_i)_{i\in I}, (P_i)_{i\in I}\rangle, \tag{1.4}$$

où

$I = \{1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des joueurs (ou agents économiques),

X_i est l'ensemble des actions de l'agent i,

$C_i : X = \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow 2^{X_i}$ correspondance des contraintes de l'agent i,

$P_i : X = \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow 2^{X_i}$ correspondance des préférences de l'agent i.

1.6.2 Concept d'équilibre et conditions d'existence

Définition 1.26. Un point $x^* \in X$ est un équilibre pour l'économie abstraite (1.4), si pour tout $i \in I$

(*i*) $x_i^* \in C_i(x^*)$;

(*ii*) $C_i(x^*) \cap P_i(x^*) = \emptyset$.

Nous avons choisi deux théorèmes d'existence, l'un avec l'hypothèse de compacité des ensembles des stratégies et l'autre sans. Ils nous serviront dans le cinquième chapitre pour démontrer l'existence d'un équilibre social idéal dans un jeu multicritère avec contraintes.

Théorème 1.14. [71] Soit l'économie abstraite (1.4) satisfaisant pour tout $i \in I$

(a) X_i est un sous-ensemble non vide convexe et compact de $\mathbb{R}^l$;

(b) $C_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$ est continue,

(c) pour tout $x \in X$, $C_i(x)$ est un sous-ensemble non vide et convexe de X_i,

(d) P_i est à graphe ouvert dans $X \times X_i$,

(e) pour tout $x \in X$, $x_i \notin co(P_i(x))$.

Alors Γ admet un équilibre.

Dans le cas où les ensembles des stratégies des joueurs ne sont pas nécessairement compacts, nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème 1.15. [27] Soit une économie abstraite (1.4), où satisfaisant pour tout $i \in I$

1. X_i est un sous-ensemble non vide convexe d'un espace vectoriel topologique ;
2. pour tout $x \in X$, $C_i(x)$ est un sous-ensemble non vide et convexe de X_i ;

3. pour tout $y_i \in X_i$, $C_i^{-1}(y_i)$ et $P_i^{-1}(y_i)$ sont compactement ouverts ;
4. pour tout $x \in X$, $x_i \notin co(P_i(x))$;
5. l'ensemble $D_i = \{x \in X : x_i \in C_i(x)\}$ est compactement fermé dans X ;
6. il existe un sous-ensemble non vide et compact K de X, un sous-ensemble convexe et compact B_i de X_i tels que pour tout $x \in X \setminus K$, il existe $i \in I$ et $y_i \in B_i$ tels que, si $x \in D_i$ alors $y_i \in C_i(x) \cap P_i(x)$ et si $x \notin D_i$, alors $y_i \in C_i(x)$.

Alors il existe $x^* \in X$ tel que $x_i^* \in C_i(x^*)$ et $C_i(x^*) \cap P_i(x^*) = \emptyset$.

2 Sur la théorie des jeux et l'optimisation multicritère

"Il est nécessaire que les points de contact entre les mathématiques
et la vie soient mis en évidence pour tous : c'est le seul moyen
d'empêcher que les mathématiques soient un jour supprimées
comme inutiles par voie d'économie budgétaire,
économie qui coûterait très cher à la
nation qui le ferait."

Emile Borel

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnerons quelques rappels sur l'optimisation multicritère et les notions d'optimalité étudiées dans la littérature. Par la suite, nous rappellerons quelques concepts de base sur la théorie des jeux.

2.2 Optimisation multicritère

L'optimisation multicritère est une branche de la recherche opérationnelle qui s'intéresse aux problèmes de prise de décision en présence de critères multiples souvent conflictuels et exprimés dans des unités différentes. Dans un tel cas, il n'y a habituellement pas de solution unique, mais un ensemble de solutions avec différents compromis, appelées solutions Pareto optimales, ou solutions non-dominées. Malgré l'existence de plusieurs solutions Pareto optimales, dans la pratique, le plus souvent une seule de ces solutions doit être choisie. Ainsi, par rapport à des problèmes d'optimisation mono-objectif, dans l'optimisation multi-objectif, il y a au moins deux tâches importantes :

1. une tâche d'optimisation pour trouver des solutions Pareto optimales,
2. une tâche de prise de décision pour le choix d'une seule solution. Celle-ci nécessite généralement la connaissance des préférences du preneur de décisions.

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux différentes solutions proposées pour résoudre un problème multi-objectif, et on rappellera certains résultats théoriques dont on aura besoin par la suite pour étudier l'existence de certains équilibres dans un jeu multicritère.

2.2.1 Modèle et notations

On considérera les problèmes multicritères pouvant être représenté par le couple

$$(P) \qquad \langle Z,\ h(z)\rangle, \tag{2.1}$$

où $Z \subset \mathbb{R}^m$ est un ensemble de décisions et $h(\cdot) : Z \to \mathbb{R}^k$ une fonction vectorielle. La problématique consiste à choisir une décision $z \in Z$ engendrant les plus grandes valeurs possibles pour chacune des fonctions objectif $h_i(\cdot) : Z \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{K} = \{1, \cdots, k\}$. On notera par $h(Z) = \{h(z) \in \mathbb{R}^k,\ z \in Z\}$ l'image de l'ensemble des décisions par la fonction vectorielle $h(\cdot)$.

2.2.2 Notions d'optimalité

La difficulté lorsqu'on cherche à résoudre un problème multicritère est qu'il n'existe généralement pas de solution qui optimise tous les critères en même temps. La première référence à traiter de tels problèmes est souvent attribué à Vilfredo Pareto [1] qui a mis en évidence la notion dite *optimum de Pareto*, dite aussi *maximum d'ophélimité*. Elle décrit un état économique dans lequel il n'est plus possible d'améliorer la situation d'un individu sans dégrader celle d'un autre au moins. Toute situation qui améliore le sort d'au moins un individu sans détériorer celle des autres peut être qualifiée d'amélioration au sens de Pareto. Cette situation rapportée au problème (2.1) donne les définitions d'optimalité suivantes :

1. Vilfredo Pareto (1848–1923) est un économiste et sociologue italien. Il doit sa notoriété dans le domaine des sciences économiques à sa théorie sur l'Optimum (de Pareto) et à son apport aux statistiques avec la loi de Pareto.

Définition 2.1. [67, 66](***Optimalité de Slater***)
On dit que $z^* \in Z$ est une décision maximale de Slater (faiblement efficace) dans le problème (2.1), s'il n'existe pas de décision $z \in Z$ qui vérifie le système d'inégalités

$$h(z) > h(z^*). \tag{2.2}$$

Définition 2.2. [67, 66](***Optimalité de Pareto***)
Une décision $z^* \in Z$ est dite maximale de Pareto (efficace) dans le problème (2.1), s'il n'existe pas de décision $z \in Z$ qui vérifie le système d'inégalités

$$h(z) \geq h(z^*). \tag{2.3}$$

Dans une solution efficace (ou solution de Pareto) pour un problème multicritère, l'amélioration d'un certain critère i peut entraîner une perte relativement importante d'au moins un autre critère j. Le rapport de l'amélioration du critère i par la détérioration du critère j peut être non bornée, ce qui n'intéresserait pas un décideur. Pour remédier à cette anomalie, Kuhn et Tucker [51], ensuite Geoffrion [40], ont proposé un autre concept appelé solution proprement efficace.

Définition 2.3. [67, 66](***Optimalité de Geoffrion***)
Un vecteur $x^* \in X$ est appelé décision maximale de Geoffrion (proprement efficace au sens de Geoffrion) dans le problème (2.1), si :

1. x^* est une décision maximale de Pareto ;
2. il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'inégalité

$$h_i(z) - h_i(z^*) \leqq M[h_j(z^*) - h_j(z)], \tag{2.4}$$

   est vérifiée pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ et $z \in Z$ tels que $h_i(z) > h_i(z^*)$, et pour un certain $j \in \{1, ..., k\}$ tel que $h_j(z) < h_j(z^*)$.

Remarque 2.1. Dans le cas d'un problème de minimisation, on définit d'une manière analogue les décisions minimales faiblement efficaces, efficaces et proprement efficaces ; il suffit d'inverser le sens des inégalités.

Propriété 2.1. [96] Si l'on note respectivement par Z^{FE}, Z^E *et* Z^{PE} les ensembles des décisions faiblement efficaces, efficaces, proprement efficaces, alors on a la chaîne d'inclusions suivante :

$$Z^{PE} \subseteq Z^E \subseteq Z^{FE}.$$

Propriété 2.2. [67] Si Z est convexe et h est strictement quasi-concave, alors $Z^E = Z^{FE}$.

Définition 2.4 (***Point idéal***)**.** Les coordonnées d'un point idéal $h^* = (h_1^*, \dots, h_k^*)$ sont obtenues en optimisant chaque fonction objectif séparément, *i.e.*
Une décision $z^* \in Z$ est une solution idéal pour le problème (2.1) si,

$$h_i(z^*) = \max_{z \in Z} h_i(z) = h_i^* \quad \forall\ i = 1, \dots, k. \tag{2.5}$$

Notons que la solution idéale z^* existe rarement. Alors le vecteur idéal $h^* = (h_1^*, ..., h_k^*)$ dont les composantes sont définies par (2.5), est utilisé dans beaucoup de méthodes d'optimisation comme point de référence.

2.2.3 Conditions d'existence

Pour étudier le problème (2.1), on a souvent recours à la scalarisation, qui consiste à agréger toutes les fonctions objectifs du décideur moyennant une fonction d'utilité pour obtenir une fonction objectif scalaire. L'une des fonctions d'utilité la plus utilisée est la pondération qui affecte des poids aux différents critères selon leur importance du point de vue du décideur. Ainsi le problème multicritère est transformé en un problème d'optimisation mono-objectif classique.

Dans ce paragraphe, on rappellera quelques résultats sur les conditions d'existence de solutions pour un problème multicritère qui nous serviront par la suite pour établir des conditions d'existence des équilibres pour un jeu multicritère.

Définition 2.5. [66] Une fonction $U : Y \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, représentant les préférences du décideur sur l'ensemble des valeurs du critère vectoriel sera appelée fonction d'utilité.

Les fonctions d'utilité constituent un instrument mathématique conçu pour simplifier des situations, où la relation de préférence pour un décideur est difficile à décrire sur un ensemble de choix ou d'alternatives.

Définition 2.6. Soit une fonction $U : Y \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$.

- U est croissante (respectivement strictement croissante) sur Y par rapport à la relation $\geq$, si pour tout $y, y' \in Y$, on a :

$$y \geq y' \Longrightarrow U(y) \geqq U(y') \quad (\textit{resp. } U(y) > U(y')).$$

- U est croissante (resp. strictement croissante) sur Y par rapport à la relation $>$, si pour tout $y, y' \in Y$, on a :

$$y > y' \Longrightarrow U(y) \geqq U(y') \quad (\textit{resp. } U(y) > U(y')).$$

Pour une fonction U définie sur $Y = h(X) = \{h(x),\ x \in X\}$ la Définition 2.6 prendra la forme suivante.

Définition 2.7. [66, 67] Soit $U : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'utilité et $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$

- ◇ Si à la réalisation du système d'inégalités $h(x) \geq h(x')$ correspond la relation $U(h(x)) > U(h(x'))$ (respectivement la relation $U(h(x)) \geqq U(h(x')))$ alors, U est dite strictement croissante (respectivement croissante) par rapport à la relation " $\geq$ " sur $h(X)$.
- ◇ Si à la réalisation du système d'inégalités $h(x) > h(x')$ correspond la relation $U(h(x)) > U(h(x'))$ (respectivement la relation $U(h(x)) \geqq U(h(x)))$ alors, U est dite strictement croissante (respectivement croissante) par rapport à la relation " $>$ " sur $h(X)$.

Remarque 2.2.

- ◇ Si la fonction $U : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante par rapport à l'inégalité "$\geq$", alors elle est strictement croissante par rapport à l'inégalité "$>$".
- ◇ Si la fonction $U : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante par rapport à l'inégalité " $\geq$ ", alors elle est croissante par rapport à l'inégalité "$>$".

Exemple 2.1. La fonction donnée par

$$U(y_1, y_2, .., y_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \text{ où } \alpha_i \geq 0,\ \forall\ i = 1, ..., k \text{ et } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \tag{2.6}$$

est strictement croissante par rapport à "$>$" sur $Y = h(Z)$, mais n'est pas strictement croissante par rapport à "$\geq$" sur $Y = h(Z)$.

Exemple 2.2. La fonction

$$U(y_1, y_2, ..., y_k) = [\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i^l\ ]^{1/l}, \tag{2.7}$$

où $\alpha_i > 0$, $\forall\ i = 1, ..., k$; $k > 0$, est strictement croissante par rapport à "$\geq$" sur $Y = h(Z)$, si $h_i(z) > 0$ pour tout $z \in Z$, pour tout $i \in K$ et par conséquent, elle est strictement croissante par rapport à "$>$" sur $h(Z)$, si $h_i(z) > 0$ pour tout $z \in Z$, et tout $i = 1, ..., k$.
Si $l < 0$, $\alpha_i > 0$, $h_i(z) > 0$, pour tout $z \in Z$, et tout $i = 1, ..., k$, alors la fonction U est strictement croissante par rapport à "$\geq$" sur $Y = h(Z)$.
En pratique, on utilise souvent le cas particulier où $l = 1$, *i.e*

$$U(y_1, y_2, ..., y_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \quad \text{avec } \alpha_i > 0,\ \forall\ i = 1, ..., k, \tag{2.8}$$

qui est strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $Y = h(Z)$

A présent, nous présenterons quelques résultats sur les conditions d'existence des solutions citées précédemment.

Théorème 2.1. [66, 67] Soit $U(\cdot) : Y = h(Z) \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $h(Z)$. Alors pour qu'une décision $z^* \in Z$ soit solution efficace dans le problème (2.1), il est suffisant qu'on ait

$$\max_{z \in Z} U(h(z)) = U(h(z^*)). \tag{2.9}$$

Preuve. Supposons que la condition (2.9) est vérifiée, et que la décision z^* n'est pas efficace dans le problème (2.1). Par définition, il existe une décision $z \in Z$, $z \neq z^*$ telle que $h(z) \geq h(z^*)$.
Comme la fonction $U(\cdot)$ est strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $h(Z)$, alors on obtient l'inégalité

$$U(h(z)) > U(h(z^*)),$$

qui contredit l'hypothèse que z^* est le point maximum de la fonction $U(h(z))$ sur Z.

Pour une décision proprement efficace, on rappelle en premier lieu le théorème de Géoffrion, qui établit une relation entre une décision proprement efficace et une solution optimale dans le problème pondéré obtenu en affectant des coefficients de pondération aux différents objectifs.

Théorème 2.2. [40] Soit $\lambda = (\lambda_i)_{i=1,\ldots,k}$ tel que $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Si z^* est optimal pour le problème

$$(P_\lambda) \qquad \langle Z, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(z) \rangle, \tag{2.10}$$

alors z^* est proprement efficace pour le problème multicritère (P).

Podinovsky et Noghin ont généralisé le théorème de Geoffrion au cas général d'une fonction d'utilité.

Théorème 2.3. [67] Soient les fonctions $U(\cdot) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\lambda_i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et les nombres $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$, vérifiant, pour tout z', $z'' \in Z$, les relations :

$$\begin{aligned} b_i &\geqq \lambda_i(z', z'') \geqq a_i > 0, \quad i \in \mathcal{K}, & (2.11) \\ U(h(z')) - U(h(z'')) &\geqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(z', z'')(h_i(z') - h_i(z'')). & (2.12) \end{aligned}$$

Chaque point maximum $z^* \in Z$ de la fonction composée $U \circ h$ sur Z est une solution proprement efficace du problème multicritère (2.1).

Preuve. Soient $z', z'' \in Z$ tels que $h(z') \geq h(z'')$, alors, de (2.11), (2.12), on déduit $U(h(z')) > U(h(z''))$. Par conséquent, U est strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $h(Z)$. Donc, si z^0 est un point maximum de $U(h(z))$ sur Z, alors, d'après le Théorème 2.1, z^0 est une solution efficace du problème multicritère (2.1).
Montrons que z^0 est une solution proprement efficace du problème (2.1). Posons

$$M = (k-1)\frac{b}{a}, \quad \text{avec} \quad b = \max_{i \in \mathcal{K}} b_i, \quad a = \min_{i \in \mathcal{K}} a_i.$$

Supposons le contraire : z^0 n'est pas une solution proprement efficace. Alors, il existe un $i \in \mathcal{K}$, $z \in Z$, vérifiant

$$h_i(z) > h_i(z^0)$$

tel que pour tout $j \in \mathcal{K}$ pour lequel

$$h_j(z) < h_j(z^0)$$

on aurait

$$\frac{h_i(z) - h_i(z^0)}{h_j(z^0) - h_j(z)} > M.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathcal{K}$, $j \neq i$, on a $h_i(z) - h_i(z^0) > M(h_j(z^0) - h_j(z))$. Comme on a toujours

$$M \geq (k-1)\frac{\lambda_j(z, z^0)}{\lambda_i(z, z^0)},$$

alors

$$\frac{1}{k-1}\lambda_i(z, z^0)(h_i(z) - h_i(z^0)) > \lambda_j(z, z^0)(h_j(z^0) - h_j(z)), \ \forall\, j \in \mathcal{K}, \ j \neq i.$$

En sommant les dernières $(k-1)$ inégalités, correspondantes aux différents $j \neq i$, et après un certain nombre de transformations, on obtient

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(z, z^0)(h_j(z) - h_j(z^0)) > 0.$$

En tenant compte de (2.12), on déduit $U(h(z)) > U(h(z^0))$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que z^0 est un point maximum de $U(h(z))$ sur Z.

Pour les conditions nécessaires et suffisantes, on se réfère toujours au résultats de Geoffrion (Théorème 2 [40]) dans le cas d'une fonction de pondération.

Théorème 2.4. [40] Si Z est convexe et h_i est concave pour tout $i \in K$, alors $z^* \in Z$ est une solution proprement efficace pour le problème (2.1), si et seulement s'il existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k,\ \lambda_i > 0,\ \forall i \in K$ tel que z^* est une solution optimale pour le problème d'optimisation

$$\max_{z \in Z} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(z).$$

Théorème 2.5. [66, 67](Condition nécessaire et suffisante) Supposons que l'ensemble Z est convexe et la fonction vectorielle $h(\cdot) : Z \to \mathbb{R}^k$ est concave.

Une décision $z^* \in Z$ est proprement efficace pour le problème multicritère (2.1) si et seulement s'il existe une fonction $U(\cdot) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ vérifiant (2.11)-(2.12) et telle que

$$\sup_{z \in Z} U(h(z)) = U(h(z^*)). \tag{2.13}$$

Preuve. La condition suffisante se déduit directement du Théorème 2.3. Pour la preuve de la condition nécessaire, le Théorème 2.4 garantit l'existence d'un $\alpha^* \in int(\Delta_k)$ tel que

$$\sup_{z \in Z} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* h_i(z) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* h_i(z^*).$$

Il suffit de poser $U(y) =< \alpha^*, y >$ et $\lambda_i = \alpha_i^*$, $b_i = 1$, $a_i = \min\{\alpha_i^*, i = 1, \ldots, k\}$, $i = 1, \ldots, k$.

2.2.4 Lien entre solution proprement efficace et solution faiblement efficace

Les résultats précédents permettent de ramener la recherche d'une solution proprement efficace dans un problème d'optimisation multicritère à la recherche d'une solution optimale d'un certain problème d'optimisation monocritère. Tout en gardant l'aspect multicritère, Podinovsky et Noghin ont construit un autre problème multicritère sur la base du problème de départ de telle manière que l'ensemble des solutions proprement efficaces du problème initial coincide avec l'ensemble des solutions faiblement efficaces du problème multicritère auxiliaire construit.

Théorème 2.6. [66, 67] Une décision $z^* \in Z$ est proprement efficace pour le problème multicritère (2.1) si et seulement s'il existe un réel positif $\varepsilon > 0$ tel que z^* soit une solution faiblement efficace pour le problème d'optimisation vectorielle

$$\langle Z, \phi(z) \rangle, \tag{2.14}$$

où $\phi(z) = (\phi_1(z), \ldots, \phi_k(z))$ avec $\phi_i(z) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^i h_j(z)$,

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } j \in \{1, ..., k\}, j \neq i, \\ 1 - (k-1)\varepsilon & \text{si } j = i, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, k \; .$$

2.2.5 Problème d'optimisation multicritère linéaire

Considérons un problème multiobjectif linéaire noté par

$$(P_l) \qquad \langle X, Cx \rangle; \tag{2.15}$$

où C est une matrice $k \times n$ et $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geqq 0\}$ est l'ensemble de décisions avec A une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.
Le problème consiste à chercher une décision $x^* \in X$ engendrant les plus grandes valeurs des fonctions objectifs $h_i(x) = C_i^t x$, où $C_i^t, \; i = 1, \ldots, k$ sont les vecteurs lignes de la matrice C. Les définitions des notions d'optimalité pour le problème (2.15) restent les mêmes que pour le problème (2.1), il suffit de remplacer $h(z)$ par Cx. Quant aux résultats d'existence, Isermann [45] a obtenu des résultats analogues aux Théorèmes 2.2 et 2.4 de Geoffrion [40] pour le problème multicritère linéaire (2.15).

Théorème 2.7. [45] Une décision $x^* \in X$ est une solution efficace pour le problème (2.15) si et seulement s'il existe un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^k, \; \lambda_i > 0, \forall \; i = 1, ..., k$ tel

$$\lambda^t C x^0 \geqq \; \lambda^t C x, \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

Comme conséquence du Théorème 2.7 et du Théorème 2.2, Isermann a démontré l'équivalence entre une solution proprement efficace et une solution efficace pour un problème d'optimisation multicritère linéaire. Ce résultat sera utilisé dans les chapitres qui suivent pour étudier l'existence d'un équilibre proprement efficace dans un jeu multicritère fini à somme nulle.

Théorème 2.8. [45] Si une décision $x^* \in X$ est une solution efficace dans le problème (2.15), alors x^* est une solution proprement efficace pour le même problème.

2.3 État de l'art de la théorie des jeux

2.3.1 Qu'est ce qu'un jeu

Selon l'acception courante, un jeu est une situation où des individus "les joueurs" sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles appelées "stratégies", où chaque stratégie est une description complète de la façon dont un joueur entend jouer du début à la fin du jeu et dans un cadre défini à l'avance par "les règles du jeu" [75]. Le résultat de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associé un gain positif ou négatif, pour chacun des participants.

2.3.2 Jeux monocritères

Forme de description des jeux

Les jeux sont décrits sous deux formes souvent équivalentes : la forme "extensive" et la forme "stratégique" dite aussi forme normale.

La forme extensive

Dans ce cas, le jeu se déroule en plusieurs coups ; les joueurs peuvent intervenir plusieurs fois. On détaille chaque coup possible et l'état d'information durant le déroulement du jeu. Les premières méthodes formelles d'ordre général pour décrire des jeux sous cette forme sont celles de Von Neumann et Morgenstern (1944)[59] et de Kuhn [50, 52]. L'une utilise une approche fondée sur des ensembles et des partitions, tandis que l'autre s'appuie beaucoup plus sur des graphes ou des diagrammes ; elles sont néanmoins presque équivalentes. Toutes deux s'intéressent uniquement aux jeux finis, c'est à dire aux jeux pour lesquels le nombre de joueurs, le nombre de choix à chaque point de décision, le nombre de positions finales et intermédiaires accessibles et le nombre de coups pour chaque déroulement du jeu sont finis.

La forme stratégique ou normale

Cette forme est la plus appropriée lorsque le jeu est à un seul coup et lorsque les coups sont simultanés. Dans la forme stratégique, toute la structure coups et information, ce qu'on appelle habituellement les règles du jeu, est perdue de vue. On se contente donc d'une énumération de toutes les stratégies avec les issues et les gains qu'elles engendrent. Les résultats ou les gains peuvent alors être donnés par des formules mathématiques qui peuvent ne rien révéler sur les règles de la forme extensive initiale.

Classification

Selon le comportement des joueurs, on peut distinguer deux types de jeux.

Jeux coopératifs

On dit que le jeu est coopératif, si les joueurs peuvent se grouper dans des coalitions, où le choix de leurs stratégies est décidé en commun, afin d'améliorer les gains de tous les joueurs coalisés. Notons que les coalitions sont formées ou définies au début du jeu, ainsi donc on ne parlera pas de coalitions se formant durant le jeu, ou devenant interdites. Les jeux coopératifs se divisent en deux catégories : les jeux sans paiements latéraux et les jeux avec paiements latéraux.

Jeux non coopératifs

On appelle jeu non coopératif, un jeu où les joueurs ne peuvent pas former de coalitions, par contre ils peuvent communiquer entre eux et échanger les informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter d'accord contraignant. Les raisons essentielles d'un tel comportement peuvent être l'impossibilité de communication, les intérêts des joueurs sont opposés, la perte de confiance entre les joueurs, ou bien il y a interdiction de former des coalitions.

Selon l'information dont dispose les joueurs, on distingue également deux classe de jeux, jeux à information parfaite et imparfaite.

Jeux à Information complète, information parfaite

On dit qu'un jeu est à information complète si chaque joueur connaît lors de la prise de décision : " ses possibilités d'action", les possibilités d'action des autres joueurs " les gains résultants de ces actions", les motivations des autres joueurs. Par ailleurs, on parle de jeu à information parfaite dans le cas de jeu à mécanisme séquentiel, où chaque joueur a connaissance en détail de toutes les actions effectuées avant son choix. Le jeu des échecs est à information complète et parfaite. Du fait de l'incertitude sur les gains (cartes de l'adversaire cachées), le poker est à information incomplète. La phase d'enchères vérifie les propriétés d'information parfaite, mais en assimilant le tirage des cartes à l'action d'un joueur fictif (souvent appelé Nature), la théorie des jeux exclut en général le poker des jeux à information parfaite. Les situations réelles sont rarement en information complète, et ce cas ne sert souvent qu'aux approximations confiantes. Les jeux en information incomplète sont des situations stratégiques où l'une des conditions n'est pas vérifiée. Ça peut être par l'intervention du hasard au cours du jeu (cas fréquent dans les jeux de société), ou parce qu'une des motivations d'un acteur est cachée (domaine important pour l'application de la théorie des jeux à l'économie). Les jeux en information à la fois imparfaite et incomplète sont de loin les plus complexes. Dans ces jeux certains joueurs peuvent disposer d'informations propres sur la manière dont le hasard va intervenir dans l'issue du jeu (une meilleure connaissance des probabilités d'occurrence de tel ou tel événement qui va affecter le cours du jeu, par exemple). Les jeux de guerre (war games) relèvent typiquement de cette catégorie, l'aléa sur la réussite d'un engagement entre corps de troupes dépendant d'informations non partagées par les adversaires sur les rapports de force entre ces troupes.

Concepts de solutions pour les jeux stratégiques non coopératifs

La recherche d'une théorie unique et unifiée de la solution à appliquer à tous les jeux ressemble à la recherche de la pierre philosophale. Il est intuitivement peu vraisemblable qu'un tel concept engendre une solution unique qui satisfasse toutes les propriétés considérées comme souhaitables pour une solution.

Notations

Notons par :

$$J = \langle I,\ X,\ f(x)\rangle \tag{2.16}$$

un jeu noncoopératif sous forme normale où :

$I = \{1, 2, ..., n\}$ l'ensemble des joueurs.

X_i est l'ensemble des stratégies du i^{eme} joueur et $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est l'ensemble des issues du jeu.

$f = (f_i)_{i\in I}$ où $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction gain du i^{eme} joueur.

$X_{-i} = \prod_{j\in I-i} X_j$ pour $i \in I$ et $x_{-i} = (x_1,\ x_2, ..., x_{i-1},\ x_{i+1}, ..., x_n)$ un élément de X_{-i}

Stratégie prudente

Définition 2.8. On appelle "*stratégie prudente*" du i^{eme} joueur, une stratégie $\overline{x}_i \in X_i$ définie par :

$$\inf_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(\bar{x}_i,\ x_{-i}) = \sup_{x_i\in X_i} \inf_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i\ ,\ x_{-i}).$$

Elle est aussi appelée "*stratégie maximin*" ou encore "*stratégie de sécurité*".

Le paiement $\alpha_i = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i\ ,\ x_{-i})$ est le paiement minimal garanti du joueur i. Autrement dit c'est le niveau d'utilité qu'il peut obtenir quel que soit le comportement des autres joueurs ; il est aussi appelé *niveau de sécurité*.

Définition 2.9. Toute issue $\overline{x} \in X$ vérifiant :

$$\forall\ i \in I,\ f_i(\overline{x}) \geqq \alpha_i,$$

est appelée "issue individuellement rationnelle".

Proposition 2.1. [56] Si les ensembles X_i sont compacts et les fonctions f_i continues, alors chaque joueur possède, au moins, une stratégie prudente.

Définition 2.10. Une issue $\overline{x} \in X$ du jeu est appelée optimale de Pareto s'il n'existe pas une autre issue $y \in X$ telle que :

$$f_i(\overline{x}) \leqq f_i(y), \quad \forall\ i \in I,$$

avec, au moins, une inégalité stricte.
On dit que l'issue $\overline{x}$ vérifie "*la rationalité collective*".

Le concept fondamental de solution pour les jeux à n personnes avec un nombre fini de stratégies a été proposé par John Nash [58] dans sa thèse de doctorat, même si de nombreux exemples de ce type de solutions sont présents dans la littérature économique depuis Augustin Cournot (1838)[24].

Équilibre de Nash

Définition 2.11. Une issue $x \in X$ est un équilibre de Nash du jeu (2.16), si elle vérifie :

$$\forall\ i \in I,\ \forall\ y_i \in X_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i}) \leqq f_i(x). \tag{2.17}$$

On l'appelle aussi "équilibre non coopératif".
Dans le cas d'un jeu à deux personnes à somme nulle, elle est aussi dite "point-selle".

Interpretation

1. L'inégalité (2.17) de la Définition 2.11 exprime que la décision x_i est meilleure, pour le joueur i, que toute autre décision $y_i \in X_i$ tant que x_{-i} reste fixée, ce qui traduit la stabilité de l'équilibre.
2. L'équilibre de Nash est une issue individuellement rationnelle.

L'idéal serait qu'il existe des équilibres non coopératifs qui soient Pareto optimaux. Malheureusement, il y a peu d'exemples de tels équilibres et aucun théorème général n'est connu [6].

Critiques de l'équilibre de Nash

- Le problème d'existence de l'équilibre de Nash.
- La non unicité de l'équilibre de Nash, dans ce cas lequel choisir ?
- L'équilibre de Nash n'est pas toujours Pareto optimal, et donc n'est pas collectivement rationnel.

2.3.3 Jeux multicritères

Les jeux multicritères (ou jeux avec vecteurs de paiement) sont une généralisation des jeux monocritères. Ils modélisent des situations de prise de décision par plusieurs agents évoluant dans un environnement commun, ayant chacun plus d'un objectif à atteindre. Ces jeux sont plus adaptés pour modéliser de nombreuses situations de prise de décision dans les problèmes pratiques. C'est Blackwell [13] qui a été le premier à aborder en 1956 cette classe de jeux. Il a étudié l'extension du théorème minmax de Von Neumann au cas des jeux multicritères matriciels. Cependant le premier concept d'équilibre a été donné et étudié par Shapley en 1959 qu'on appellera ici équilibre Pareto efficace. Avant 1990, presque tous les travaux de recherche ayant porté sur les jeux multicritères sont consacrés aux jeux non coopératifs matriciels. Par la suite, l'intérêt aux jeux multicritères s'agrandit. Des études dans différents espaces, par différentes approches, pour plusieurs joueurs, à somme nulle et à somme non nulle, ne cessent d'apparaître.

Classification des jeux multicritères

La différence entre un jeu monocritère et un jeu multicritère réside dans la fonction d'utilité des joueurs. Dans le premier, les joueurs n'ont qu'un seul critère ou objectif à optimiser, tandis que dans le deuxième chaque joueur peut avoir plus d'un critère. A cet effet, la classification des jeux ne change pas.

Dans le souci d'éviter la répétition, on se contentera donc de citer quelques références bibliographiques et plus de détails dans les chapitres qui suivent.

Jeux coopératifs et non coopératifs

Contrairement aux jeux multicritères non coopératifs, les jeux multicritères coopératifs n'ont pas reçu assez d'attention en littérature, et comme c'est le cas également dans ce document, on se contentera de citer quelques travaux traitant cette classe de jeux.
Dans [38], les auteurs ont généralisé les concepts de coeurs dans un jeu multicritère coopératif à utilités transférables. Pieri et Pusillo [65] ont considéré un jeu multicritère coopératif où la valeur des coalitions est un vecteur d'intervalles et ils ont étudié le concept de coeur approximatif (approximate core). Tanino [79] quant à lui a étendu les jeux coopératifs avec restrictions des coalitions où on définit des coalitions admissibles aux cas multiobjectifs, il a défini le jeu restreint et discuté ses propriétés et a étudié le concept de coeur pour le jeu restreint.

Jeux à somme nulle et non nulle

L'intérêt pour les jeux multicritères s'est porté initialement aux jeux à somme nulle, peut être pour leur simplicité. Ainsi, le premier travail sur les jeux multicritères fut celui de Blackwell [13], généralisant le fameux théorème minimax de von Neumann. Le premier concept d'équilibre pour les jeux multicritères a été introduit par L. Shapley [1] sous forme d'une généralisation de l'équilibre de Nash pour un jeu multicritère fini à somme nulle. D'autres travaux ont suivi traitant d'autres notions de solutions, comme par exemple les stratégies de sécurité Pareto optimales [16, 84, 42, 9], l'équilibre idéal [85, 68].
Ces deux classes de jeux seront exposées aux troisième et quatrième chapitre avec plus de détails.

Représentation d'un jeu multicritère

Un jeu multicritère non-coopératif peut être représenté également de deux manières différentes : stratégique (ou normale) et extensive.

1. Lloyd Shapley, fils de l'astronome américain Harlow Shapley. Il a passé un an à la RAND Corporation, centre de réflexion de Santa Monica qui tentait d'appliquer la théorie des jeux à la stratégie militaire avant de rejoindre Princeton en 1949, où il a rencontré J. Nash. Connu pour son perfectionnisme extrême qui l'a d'ailleurs empêché de publier une bonne partie de ses recherches [57] mais lui a fait valoir le prix Nobel d'économie de l'année 2012.

Si les jeux multicritères sous forme normales sont plus étudiés, on en trouve peu de travaux sur les jeux sous forme extensive. A notre connaissance, le premier travail sur cette classe de jeux n'est apparu qu'en 2003 [49], où Krieger a montré que tout jeu multicritère sous forme extensive à information parfaite admet un équilibre Pareto efficace parfait en sous-jeux en stratégies pures. Ce résultat est une généralisation de celui connu dans les jeux monocritères selon lequel tout jeu fini à information parfaite possède au moins un équilibre de Nash parfait en sous-jeux en stratégies pures. Nishizaki et Notsu [61] ont étendu le concept d'équilibre non dominé (en utilisant les cônes de dominance) dans les jeux multicritères à deux personnes à somme non nulle sous forme extensive et ils ont formulé un problème d'optimisation mathématique dont les solutions optimales correspondent aux équilibres non dominés du jeu considéré.

3

Jeux multicritères à somme non nulle

La science a eu de merveilleuses applications,
mais la science qui n'aurait en vue que les
applications ne serait plus de la science,
elle ne serait plus que de la cuisine.

Henri Poincaré

Introduction

UN jeu à somme non nulle se présente comme une opportunité que les participants soient tous gagnants, il se base sur le principe "gagnant-gagnant". Cela favorise les échanges et contribue au développement économique contrairement aux jeux à somme nulle comme disait l'économiste américain Friedman dans La liberté du choix 1980 "*Si un échange entre deux parties est volontaire, il n'aura lieu que si les deux parties croient en tirer un profit. La plupart des erreurs et des illusions économiques viennent du fait qu'on néglige cette idée toute simple. On a trop tendance à croire que l'on a affaire à un gâteau de taille déterminée et qu'une des parties ne peut gagner qu'aux dépens de l'autre*". De ce point de vue, les jeux à somme non nulle sont plus importants mais moins évidents que les jeux à somme nulle. Même si la résolution des jeux à somme nulle a été élaborée vers 1928 par Von Neumann, la solution des jeux à somme non nulle n'est arrivée que vers les années cinquante par Nash qui définissait une situation d'équilibre où aucun participant n'a intérêt à dévier unilatéralement. C'est une situation de non regret dite *équilibre de Nash*. Très appliqué par les économistes, généralisé par la suite à la biologie et bien d'autres disciplines, ce concept d'équilibre et ses applications a valu à John Forbes Nash le prix Nobel d'économie en 1994.

Dans ce chapitre, on considère un jeu multicritère non coopératif à somme non nulle. Les solutions proposées pour cette classe de jeux sont une combinaison de l'équilibre de Nash pour un jeu classique (jeu monocritère) et les solutions optimales d'un problème multicritère exposées au chapitre précédent qu'on appellera ici équilibre de Nash efficace et faiblement efficace qui feront l'objet de la première partie de ce chapitre. Nous proposerons par la suite d'étudier l'existence de l'équilibre de Nash proprement efficace et l'équilibre de Nash idéal.

3.1 Notations

Notons un jeu multicritère stratégique sous forme normale par

$$G = \langle I,\ (X_i)_{i\in I},\ (f_i)_{i\in I}\rangle, \tag{3.1}$$

où : $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ est l'ensemble des joueurs ; pour tout $i \in I,\ X_i \subset R^{l_i}$, est l'ensemble des stratégies pures du joueur i, $l_i \in \mathbb{N}$; $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ l'ensemble des issues du jeu ; et pour tout $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r(i)}$ est la fonction vectorielle de gains du joueur i, où $r(i) \in \mathbb{N}$ est le nombre de ses fonctions objectifs. Nous utiliserons aussi la notation $X_{-i} = \prod_{j\in I, j\neq i} X_j$ et $x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ la projection de x sur X_{-i}, on peut alors écrire $x = (x_i, x_{-i})$.

3.2 Concepts de solutions

Les concepts de solutions pour ces jeux sont une généralisation des concepts de solutions des jeux monocritères en utilisant les notions d'optimalité de l'optimisation multicritère. L'équilibre de Nash efficace qui est une généralisation du point-selle défini par Shapley, qui est aussi une généralisation de l'équilibre de Nash, est le plus étudié en littérature des jeux multicritères. Son existence est l'un des problème fondamentaux pour cette classe de jeux. Il est étudié par différentes approches et dans différents espaces [88, 92, 93].

3.2.1 Équilibre de Nash efficace

Définition 3.1. [72] Une issue $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$ est dite :
• Équilibre de Nash faiblement efficace pour le jeu (3.1), si pour tout joueur $i \in I$, il n'existe pas $x_i \in X_i$ tel que :

$$f_i(x_i,\ x_{-i}^*) > f_i(x_i^*,\ x_{-i}^*); \tag{3.2}$$

• Équilibre de Nash efficace pour le jeu (3.1), si pour tout joueur $i \in I$, il n'existe pas $x_i \in X_i$ tel que :

$$f_i(x_i,\ x^*_{-i}) \geq f_i(x^*_i,\ x^*_{-i}). \tag{3.3}$$

Remarque 3.1. Rappelons que les inégalités (3.2) et (3.3) sont vectorielles telles qu'elles étaient définies dans la page des notations.

La littérature sur l'étude des conditions d'existence des équilibres dans les jeux multicritères peut être réparties en deux grandes classes : les approches consistant à ramener le jeu multicritère à un jeu monocritère équivalent par rapport au concept d'équilibre étudié voir par exemple [16, 88, 92]. La méthode la plus utilisée consiste à associer à chaque joueur un vecteur poids qui agrègent ses différents critères. La seconde classe d'approches utilise directement les hypothèses du jeu multicritère en utilisant des théorèmes sur l'existence d'un élément maximal d'une famille de correspondances [4, 68].

Pour la première approche, nous exposons ici le premier travail élaboré par Wang [88]. Pour établir ses résultats, l'auteur a défini l'équilibre de Nash pondéré.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_+^{r(i)} \setminus \{0\},\ \lambda_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ir(i)}),\ i = 1, \ldots, n$ et la fonction $S_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S_i(x) = \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x).$$

Le jeu

$$J_\lambda = \langle I,\ (X_i)_{i\in I},\ S_i(.)\rangle \tag{3.4}$$

sera appelé le jeu non coopératif pondéré par le vecteur λ.

Définition 3.2. [88] Une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash pondéré s'il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_+^{r(i)} \setminus \{0\}$ tel que x^* est un équilibre de Nash pour le jeu pondéré (3.4). Si de plus $\lambda_i \in int\Delta_{r(i)}, i = 1, \ldots, n$, alors x^* sera un équilibre de Nash pondéré normalisé.

Lemme 3.1. [88] Tout équilibre de Nash pondéré normalisé $x^* \in X$ avec $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \prod_{i\in I} \Delta_{r(i)}$ (resp. $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \prod_{i\in I} int\Delta_{r(i)}$) est un équilibre faiblement efficace (resp. efficace) pour le jeu (3.1).

Soit $S_\lambda : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S_\lambda(x, y) = \sum_{i\in I} \lambda_i.f_i(y_i, x_{-i}) = \sum_{i\in I} S_i(y_i, x_{-i}) \tag{3.5}$$

Théorème 3.1. [88] Supposons que pour tout $i \in I$ X_i est un sous-ensemble non vide convexe et compact d'un espace vectoriel normé et qu'il existe un vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^{r(i)} \setminus \{0\},\ i = 1, \dots, n$ tels que la fonction $S_\lambda(.,.)$ est continue sur $X \times X$ et $S_\lambda(x,.)$ est quasi-concave sur X pour tout x fixé dans X.
Alors le jeu (3.1) admet un équilibre de Nash pondéré.

En vertu du Lemme 3.1 et du Théorème 3.1, on obtient :

Théorème 3.2. [88] Supposons que pour tout $i \in I$

1. X_i est un sous-ensemble non vide convexe et compact d'un espace vectoriel normé ;
2. il existe un vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^{r(i)} \setminus \{0\},\ i = 1, \dots, n$ tel que
   - la fonction $S_\lambda(.,.)$ est continue sur $X \times X$;
   - la fonction $S_\lambda(x,.)$ est quasi-concave sur X pour tout x fixé dans X.

Alors, le jeu (3.1) admet un équilibre de Nash faiblement efficace. Si, de plus, $\lambda_i \in int\Delta_{r(i)}$, pour tout $i \in I$, alors le jeu (3.1) admet un équilibre de Nash efficace.

A l'instar du point fixe, on utilise l'élément maximal en théorie des jeux pour démontrer l'existence d'équilibre. On détermine une famille de correspondances pour laquelle l'élément maximal est l'équilibre étudié.
Pour tout $i \in I$, soit la correspondance $A_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$, définie par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i : f_i(x) < f_i(y_i,\ x_{-i})\}, \tag{3.6}$$

On peut montrer sans difficultés la proposition suivante, qui permettra de ramener la recherche d'un équilibre faiblement efficace à la recherche d'un élément maximal d'une famille de correspondances.

Proposition 3.1. Une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash faiblement efficace pour le jeu multicritère (3.1) si et seulement si x^* est un élément maximal pour la famille de correspondances définies par (3.6).

En utilisant un théorème d'existence d'un élément maximal dû à Deguire [26], Ansari et al [4] ont établi des conditions d'existence d'un équilibre faiblement efficace du jeu (3.1).

Théorème 3.3. [4] Supposons que pour tout $i \in I$, on a

1. l'ensemble X_i est non vide et convexe ;
2. la fonction $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r(i)}$ est continue ;

3. pour tout $x \in X$, la fonction $y_i \longmapsto f_i(y_i,\ x_{-i})$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-concave-like ;
4. il existe un sous-ensemble non vide compact K de X et des sous-ensembles non vides convexes et compacts D_i de X_i pour tout $i \in I$, tels que, pour tout $x \in X \backslash K$, il existe $i \in I$ et $\tilde{y}_i \in D_i$ tels que $f_i(x) - f_i(\tilde{y}_i, x_{-i}) < 0$.

Alors le jeu (3.1) admet un équilibre de Nash faiblement efficace.

Remarque 3.2. La condition 3 peut être affaiblie, en supposant que pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$ la fonction $y_i \longrightarrow f_{ik}(y_i,\ x_{-i})$ est quasi-concave pour tout $i \in I$ et tout $k = \overline{1, r(i)}$.

Dans la littérature traitant des jeux multicritères non coopératifs sous forme normale, l'existence de l'équilibre de Nash efficace ou faiblement efficace a été abordée avec différentes approches dans le but d'affaiblir surtout les conditions de compacité des ensembles de stratégies, la convexité et la linéarité des espaces, la continuité et la concavité (convexité) des fonctions de gains des joueurs.
Yuan et Tarafdar [93, 28, 73] ont obtenu des conditions d'existence sans la condition de compacité, Hai-shu [74] a étudié les conditions d'existence d'équilibre de Nash efficace dans un espace topologique général (sans la condition de linéarité ou de convexité).

3.2.2 Équilibre proprement efficace

Dans cette section, nous nous intéresserons au concept d'équilibre de Nash proprement efficace qui est un raffinement des concepts précédemment exposés. Ce concept a été défini sur le même principe que les précédents en combinant le concept d'équilibre de Nash, défini pour les jeux non coopératifs monocritères sous forme normale et le concept de solution proprement efficace au sens de Geoffrion utilisé en optimisation multicritère.

Les résultats de cette section ont fait l'objet d'une publication internationale [35].

Définition 3.3. [35] Une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace du jeu multicritère (3.1), si

1. x^* est un équilibre de Nash efficace ;
2. il existe des constantes $M_i > 0,\ i \in I,$ telles que si pour un certain $i \in I, x_i \in X_i$ et un $j \in \{1, ..., r(i)\}$, on a $f_{ij}(x_i, x^*_{-i}) > f_{ij}(x^*)$, alors
$$\frac{f_{ij}(x_i, x^*_{-i}) - f_{ij}(x^*)}{f_{ik}(x^*) - f_{ik}(x_i, x^*_{-i})} \leq M_i$$
pour un certain $k \in \{1, \ldots, r(i)\},\ k \neq j$ tel que $f_{ik}(x_i, x^*_{-i}) < f_{ik}(x^*)$.

Si on note par X^{NE} (X^{NFE} et X^{NPE} respectivement) les ensembles des équilibres de Nash efficaces (faiblement efficaces et proprement efficaces) du jeu multicritère (3.1), on aura la chaîne d'inclusions :

$$X^{NPE} \subseteq X^{NE} \subseteq X^{NFE}. \tag{3.7}$$

Le concept de NPE-équilibre est bien un raffinement du NE-équilibre. En effet, la condition d'efficience met chaque joueur dans une situation où tout changement unilatéral de stratégie qui lui permettrait d'améliorer la valeur d'une de ses fonctions objectifs (f_{ij}) entraînerait nécessairement une perte de gains sur, au moins, une autre fonction objectif f_{ik}. De plus, le rapport entre ce qu'il gagne sur une fonction objectif (f_{ij}) sur ce qu'il perd sur une autre f_{ik} (qui existe toujours) ne peut dépasser une certaine valeur limitée par une constante M_i. Dans certains cas, ce rapport peut ne pas être borné, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 3.1. Considérons le jeu à deux personnes bi-critères suivant :

$$G = \langle I = \{1, 2\}, X_1, X_2,\ f_1,\ f_2\rangle,$$

où $X_1 = X_2 = [-1,\ 1]$ sont les ensembles des stratégies des joueurs 1 et 2 respectivement ;
$f_1 : X_1 \times X_2 :\longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $f_1(x_1, x_2) = (-x_1^2 + x_2^2,\ 2x_1 + x_2)$ la fonction bicritère de gain du joueur 1 ;
$f_2 : X_1 \times X_2 :\longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $f_2(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2,\ x_1 + 2x_2)$ la fonction bicritère de gain du joueur 2.
L'ensemble des équilibres de Nash efficaces est $(X_1 \times X_2)^{NE} = [0, 1] \times [0, 1]$. On peut montrer que les équilibres de Nash efficaces où un joueur choisit la stratégie 0 ne sont pas proprement efficaces. En effet, considérons par exemple, un équilibre $(0, x_2)$ avec $x_2 \in [0, 1]$. Supposons que le joueur 1 dévie vers $\epsilon \in]0, 1]$. Alors, le critère f_{11} décroît et le critère f_{12} s'améliore, mais

$$\frac{f_{12}(\varepsilon,\ x_2) - f_{12}(0, x_2)}{f_{11}(0,\ x_2) - f_{11}(\varepsilon,\ x_2)} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2} \longrightarrow +\infty, \quad \text{si } \varepsilon \longrightarrow 0^+.$$

Cet exemple nous montre que d'une manière générale $X^{NPE} \neq X^{NE}$.

Dans le but d'étudier l'existence de l'équilibre de Nash proprement efficace et de déterminer ses relations avec l'équilibre de Nash efficace et l'équilibre de Nash via l'optimisation multicritère, la proposition ci-après nous donne une autre formulation de ces équilibres.

Proposition 3.2. Une issue x^* est un équilibre de Nash efficace (resp. faiblement efficace, proprement efficace) de jeu (3.1) si et ssi pour tout $i \in I$, x_i^* est une solution efficace (resp.

faiblement efficace, proprement efficace) pour le problème de maximisation multicritère

$$\langle X_i,\ \psi_i(.)\rangle, \tag{3.8}$$

où $\psi_i(x_i) = f_i(x_i, x^*_{-i}),\ \forall\ x_i \in X_i$.

Relation entre l'équilibre de Nash proprement efficace et l'équilibre de Nash

Dans ce paragraphe, on montrera, que sous certaines hypothèses, l'existence d'un équilibre de Nash proprement efficace du jeu multicritère (3.1) est équivalente à l'existence de fonctions de préférences des joueurs et d'un équilibre de Nash d'un jeu (monocritère) sous forme normale, obtenu en agrégeant les critères avec les fonctions de préférences des joueurs.

Considérons le jeu multicritère (3.1) et supposons que chaque joueur $i \in I$ est en mesure de définir sa fonction de préférence $\phi_i\ :\ f_i(X)\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des valeurs admissibles de ses gains vectoriels. Considérons alors le jeu

$$G = \langle I,\ (X_i)_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle, \tag{3.9}$$

où

$$F_i(.) = \Phi_i \circ f_i(.) : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_i(x) = \Phi_i(f_i(x)), \forall x \in X, \forall i \in I. \tag{3.10}$$

Notons que le jeu (3.9) est un jeu noncoopératif classique (monocritère) sous forme normale auquel on peut appliquer le concept d'équilibre de Nash classique. On peut interpréter le jeu (3.9), comme un jeu sous forme normale, où les fonctions des gains des joueurs sont des composés des deux fonctions $f_i(\cdot)$ et $\Phi_i(\cdot)$, $i \in I$.

En s'inspirant du Théorème 2.3, on démontrera le théorème suivant.

Théorème 3.4. [35] Soit $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions définies par (3.10), satisfaisant, pour tout $i \in I$ et $x',\ x'' \in X$, les relations :

$$\phi_i(f_i(x')) - \phi_i(f_i(x'')) \geq \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik}(x', x'')(f_{ik}(x') - f_{ik}(x'')), \tag{3.11}$$

où les fonctions $\lambda^i_k(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifient les conditions :

$$b^i_k \geq \lambda_{ik}(x', x'') \geq a^i_k > 0, \quad k = 1, \ldots, r(i),\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{3.12}$$

avec $a^i_k, b^i_k \in \mathbb{R}$, pour tout $k = 1, \ldots, r(i)$, $i \in I$.
Si une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash pour le jeu monocritère (3.9), alors x^* est un équilibre de Nash proprement efficace du jeu multicritère (3.1).

Preuve. Soit $x^* \in X$ un équilibre de Nash du jeu scalarisé (3.9). Alors, pour tout $i \in I$, on a

$$\sup_{x_i \in X_i} \phi_i(f_i(x_i, x^*_{-i})) = \phi_i(f_i(x^*_i, x^*_{-i})). \tag{3.13}$$

D'après le Théorème 2.3, pour tout $i \in I$, la décision $x^*_i \in X_i$ est une solution proprement efficace du problème multicritère (3.8) et, par suite, d'après la Proposition 3.2, x^* est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu multicritère (3.1).

Le théorème suivant établit un autre lien entre l'équilibre de Nash proprement efficace du jeu noncoopératif multicritère (3.1) et l'équilibre de Nash d'un jeu noncoopératif monocritère du type (3.9).

Théorème 3.5. [35] Supposons que pour tout $i \in I$:

1. l'ensemble X_i est convexe ;
2. pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, la fonction $x_i \longmapsto f_{ik}(x_i, x_{-i})$ est concave sur l'ensemble X_i, pour tout $k \in \{1, \ldots, r(i)\}$.

Alors une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu multicritère (3.1) si et seulement si, pour tout $i \in I$, il existe une fonction $\Phi_i(.) : f_i(X) \to \mathbb{R}$ et une fonction $\lambda_{ik}(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, r(i)$, vérifiant les relations (3.11) et (3.12), telles que x^* soit un équilibre de Nash pour le jeu scalarisé (3.9).

Preuve.

$x^* \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu (3.1)	$\overset{\text{Proposition 3.2}}{\Longleftrightarrow}$	$\forall\ i \in I,\ x^*_i$ est une solution proprement efficace pour le problème de maximisation vectorielle (3.8)
	$\overset{\text{Théorème 2.5}}{\Longleftrightarrow}$	$\forall\ i \in I, \exists\ \Phi_i, \lambda_{ik}, k = 1, \ldots, r(i)$ satisfaisant les relations (3.11)-(3.12) telles que x^*_i est une solution du problème de maximisation $\sup_{x_i \in X_i} \phi_i(f_i(x_i, x^*_{-i}))$
	$\Longleftrightarrow$	x^* est un équilibre de Nash pour le jeu(3.9).

Le théorème suivant établit également un lien entre l'équilibre de Nash proprement efficace du jeu noncoopératif multicritère (3.1) et l'équilibre de Nash du jeu noncoopératif monocritère (3.9). Ce théorème est fondamentalement basé sur le Théorème 2.4 de Geoffrion.

Théorème 3.6. [35] Supposons que pour tout $i \in I$

1. l'ensemble X_i est convexe ;
2. pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, la fonction $x_i \longmapsto f_{ik}(x_i, x_{-i})$ est concave sur X_i, pour tout $k \in \{1, \ldots, r(i)\}$.

Alors $x^* \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu multicritère (3.1) si et seulement s'il existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \prod_{i=1}^{n} int(\Delta_{r(i)})$ tel que x^* soit un équilibre de Nash pour le jeu scalarisé

$$G(\lambda) = \langle I,\ (X_i)_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle, \tag{3.14}$$

où

$$F_i(x) =< \lambda_i, f_i(x) >= \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ij}(x), \quad \forall i \in I. \tag{3.15}$$

Preuve.

$x^* \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu multicritère (3.1) $\overset{\text{Proposition 3.2}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\ i \in I,\ x_i^*$ est une solution proprement efficace pour le problème d'optimisation multicritère (3.8)

$\overset{\text{Théorème 2.4}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\ i \in I, \exists \lambda_i \in int(\Delta_{r(i)})$ tel que x_i^* est une solution optimale du problème d'optimisation $\sup_{x_i \in X_i} \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x_i, x_{-i}^*)$

$\Longleftrightarrow$ x^*est un équilibre de Nash du jeu (3.14).

Remarque 3.3. Notons que les conditions nécessaires des deux Théorèmes 3.5 et 3.6 sont équivalentes. Par contre, la condition suffisante du Théorème 3.6 peut être perçue comme un cas particulier du Théorème 3.5.

Relation entre équilibre de Nash proprement efficace et faiblement efficace

En se basant sur les liens entre les solutions proprement efficaces et faiblement efficaces dans un problème multicritère donnés à la section 2.2.4, nous montrerons comment ramener la recherche d'un équilibre de Nash proprement efficace dans un jeu multicritère (3.1) à la recherche d'un équilibre de Nash faiblement efficace d'un autre jeu multicritère que nous construirons à partir du jeu initial (3.1).

Théorème 3.7. [35] Une issue $x^* \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace du jeu multicritère (3.1) si et seulement si, il existe $\varepsilon_i > 0$, $i \in I$ tels que x^* est un équilibre de Nash faiblement efficace du jeu multicritère

$$\langle I,\ (X_i)_{i\in I}, (H_i)_{i\in I}\rangle, \tag{3.16}$$

où $H_i(x) = (<\alpha_i^1,\ f_i(x)>, <\alpha_i^2,\ f_i(x)>, ..., <\alpha_i^{r(i)},\ f_i(x)>)$ et $\alpha_i^k \in\ int(\Delta_{r(i)})$, $i = 1,\dots,n$ sont définis par :

$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{si } j \in \{1,...,r(i)\}, j \neq k, \\ 1-(r(i)-1)\varepsilon_i, & \text{si } j = k, \end{cases} \qquad k = 1,\dots,r(i);\ i = 1,\dots,n\ . \tag{3.17}$$

Preuve. Une issue $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*) \in X$ est un équilibre de Nash proprement efficace du jeu multicritère (3.1)

$$\Updownarrow \text{ Proposition 3.2}$$

$\forall i \in I$, $x_i^* \in X_i$ est une solution proprement efficace du problème multicritère

$$\langle X_i, \psi_i(x_i)\rangle, \quad \text{où } \psi_i(x_i) = f_i(x_i, x_{-i}^*) \tag{3.18}$$

$$\Updownarrow \text{ Théorème 2.6}$$

$\forall\ i \in I, \exists \varepsilon_i > 0$ tel que x_i^* est une solution faiblement efficace du problème multicritère

$$\langle X_i, H_i(\cdot, x_{-i}^*)\rangle, \tag{3.19}$$

où

$$H_i(x_i, x_{-i}^*) = (<\alpha_i^1,\ f_i(x_i, x_{-i}^*)>, ..., <\alpha_i^{r(i)},\ f_i(x_i, x_{-i}^*)>), \tag{3.20}$$

$H_{ij}(x_i, x_{-i}^*) = \sum\limits_{j=1}^{r(i)} \alpha_i^j f_i(x_i,\ x_{-i}^*)$, $j = 1,\dots,r(i)$ et les composantes du vecteur $\alpha_i^k \in\ int(\Delta_{r(i)})$ sont définies par :

$$\alpha_{ij}^k = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{si } j \in \{1,...,r(i)\}, j \neq k, \\ 1-(r(i)-1)\varepsilon_i, & \text{si } j = k, \end{cases} \qquad k = 1,\dots,r(i);\ i = 1,\dots,n\ .$$

$\Updownarrow$ Proposition 3.2

Il existe des $\varepsilon_i > 0,\ i \in I$ tels que x^* est un équilibre de Nash faiblement efficace du jeu multicritère (3.16).

Remarque 3.4. D'après la définition des α_{ij}^k par la relation (3.17) et la preuve du théorème 2.6, on déduit que les ε_i sont tels que $0 < \varepsilon_i < \dfrac{1}{r(i)-1}$ pour tout $i \in I$.

Conditions d'existence d'un équilibre de Nash proprement efficace

Le Théorème 3.7 permet ainsi de ramener la recherche d'un équilibre de Nash proprement efficace d'un jeu multicritère (3.1) à la recherche d'un équilibre de Nash faiblement efficace d'un autre jeu multicritère (3.16).

Théorème 3.8. [35] Supposons que pour tout $i \in I$,

1. X_i est non vide et convexe ;
2. les fonctions f_i sont continues ;
3. il existe $\varepsilon_i > 0$, et les $\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^{r(i)} \in\ int\Delta_{r(i)}$ correspondants définis par la relation (3.17), tels que la fonction $y_i \longrightarrow < \alpha_i^k,\ f_i(y_i,\ x_{-i}) >$ est quasi-concave pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, et $k = 1, ..., r(i)$;
4. il existe un sous-ensemble non vide compact K de X et des sous-ensembles non vides convexes et compacts D_i de X_i, $i \in I$, tels que, pour tout $x \in X \backslash K$, il existe $i \in I$ et $\tilde{y}_i \in D_i$ tels que $f_i(x) - f_i(\tilde{y}_i, x_{-i}) < 0$.

Alors le jeu (3.1), admet un équilibre proprement efficace.

Preuve. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n),\ \varepsilon_i > 0$ pour tout $i \in I$. Considérons les fonctions

$$H_i(x) = \Big(< \alpha_i^1,\ f_i(x) >,\ < \alpha_i^2,\ f_i(x) >, ...,\ < \alpha_i^{r(i)},\ f_i(x) > \Big),\quad i \in I, \tag{3.21}$$

où les composantes du vecteur α_i^k sont définies par les relations (3.17).
Pour chaque $i \in I$, posons $A_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$ la correspondance définie par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i,\ H_i(x) - H_i(y_i,\ x_{-i}) <\ 0\}.$$

Par définition de A_i, $\forall\ x = (x_i,\ x_{-i}) \in X,\ x_i \notin A_i(x),\ \forall\ i \in I$.
Pour $i \in I$, et $x \in X_i$ soient $y_i, z_i \in A_i(x)$. Par hypothèse 3, la fonction

$$t_i \longrightarrow H_{ik}(t_i,\ x_{-i}) = < \alpha_i^k,\ f_i(t_i,\ x_{-i}) >$$

est quasi-concave, alors pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$

$$H_{ik}(x)-H_{ik}(\lambda y_i+(1-\lambda)z_i,\ x_{-i}) \leq H_{ik}(x)-\min\{H_{ik}(y_i,\ x_{-i}),\ H_{ik}(z_i,\ x_{-i})\} < 0 \quad \forall k=\overline{1,r(i)}.$$

Il s'ensuit que $H_i(x) - H_i(\lambda y_i + (1-\lambda)z_i,\ x_{-i}) <\ 0$, donc $\lambda y_i + (1-\lambda)z_i \in A_i(x)$, et $A_i(x)$ est alors convexe.

Pour tout $y_i \in X_i$ et $i \in I$, l'ensemble $A_i^{-1}(y_i) = \{x \in X :\ \ H_i(x) - H_i(y_i,\ x_{-i}) < 0\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $(-\infty,\ 0)$ par la fonction continue $x \mapsto H_i(x) - H_i(y_i,\ x_{-i})$, il est donc ouvert.

Pour tout $i \in I$ soit $\mathcal{A}_i$ l'ensemble $\{x \in X : A_i(x) \neq \phi\}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i &= \{x \in X : A_i(x) \neq \phi\} \\
&= \{x \in X \ /\ \exists\ y_i \in X_i,\ H_i(x) - H_i(y_i,\ x_{-i})\ < 0\} \\
&= \bigcup_{y_i \in X_i} \{x \in X : H_i(x) - H_i(y_i,\ x_{-i})\ < 0\} \\
&= \bigcup_{y_i \in X_i} A_i^{-1}(y_i)
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{A}_i$ est ouvert comme union d'ensembles ouverts, et donc la condition $d)$ du Théorème 1.13 est bien vérifiée.

Pour l'hypothèse $e)$, on a pour tout $x \in X \setminus K$ il existe $i \in I$ et $\tilde{y}_i \in D_i \subset X_i$ tels que $f_i(x) - f_i(\tilde{y},\ x_{-i}) < 0$. Puisque $\alpha_i^k \in int\Delta_{r(i)}$ alors, $H_i(x) - H_i(\tilde{y},\ x_{-i}) < 0$ ce qui implique $\tilde{y}_i \in A_i(x)$ et $A_i(x) \cap D_i \neq \phi$.

Ainsi toutes les conditions du Théorème 1.13 sont satisfaites, il existe donc $\bar{x} \in X$ tel que $A_i(\bar{x}) = \phi$ pour tout $i \in I$, c-à-d $\bar{x} \in X$ est un élément maximal de la famille des correspondances $\{A_i\}_{i\in I},\ A_i : X \longrightarrow 2^{X_i},\ i \in I$. Alors, d'après la Proposition 3.1 $\bar{x}$ est un équilibre de Nash faiblement efficace pour le jeu (3.16), et d'après le Théorème 3.7, $\bar{x}$ est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu (3.1).

Illustrons ce résultat par un exemple numérique.

Exemple 3.2. Soit G le jeu bi-critère à deux personnes défini par

$$G = \langle I = \{1,2\},\ X,\ Y,\ f_1 = (f_{11},\ f_{12}),\ f_2 = (f_{21},\ f_{22})\rangle, \tag{3.22}$$

où $x \in X =]0,\ 1]$, $y \in Y = [0,\ 1]$ et les fonctions de gains sont données par

$$f_{11}(x,\ y) = x^2 + y^2, \qquad f_{12}(x,\ y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } 0 < x \leqq \frac{1}{3} \\ y^2 + \frac{1}{9}, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqq \frac{2}{3} \\ -x^2 + y^2 + \frac{5}{9} & \text{si } \frac{2}{3} < x \leqq 1 \end{cases}$$

et $\quad f_{21}(x,\ y) = xy^2 \quad , \quad f_{22}(x,\ y) = -x(y - \frac{1}{2})^2.$
Les deux fonction f_1 et f_2 sont continues sur $X \times Y$.
Soit $K = [\frac{1}{3},\ 1] \times [0,\ 1]$ un sous-ensemble compact sur $X \times Y$ et $D_1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subset X =]0,\ 1]$ et $D_2 = [\frac{2}{3},\ 1]$ des sous-ensembles convexes compacts dans X et Y respectivement. Alors pour tout $(x, y) \in (X \times Y) \setminus K =]0,\ \frac{1}{3}[\times[0, 1]$, il existe $i = 1$, $\forall\ \tilde{x} \in D_1$

$$\begin{aligned} f_{11}(x, y) - f_{11}(\tilde{x}, y) &= (x - \tilde{x})(x + \tilde{x}) < 0, \\ f_{12}(x, y) - f_{12}(\tilde{x}, y) &= (x^2 + y^2) - (y^2 + \frac{1}{9}) = x^2 - \frac{1}{9} < 0. \end{aligned}$$

Soient

$$H_1 = (< \alpha_1^1, f_1 >, < \alpha_1^2, f_1 >),\ H_2 = (< \alpha_2^1, f_2 >, < \alpha_2^2, f_2 >)$$

avec $\quad \alpha_1^1 = (\alpha_{11}^1, \alpha_{12}^1) = (1 - \varepsilon_1, \varepsilon_1) \quad$ et $\quad \alpha_1^2 = (\alpha_{11}^2, \alpha_{12}^2) = (\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_1)$
$\qquad \alpha_2^1 = (\alpha_{21}^1, \alpha_{22}^1) = (1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2) \quad$ et $\quad \alpha_2^2 = (\alpha_{21}^2, \alpha_{22}^2) = (\varepsilon_2, 1 - \varepsilon_2)$
on obtient

$$H_{11}(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } 0 < x \leqq \frac{1}{3}, \\ (1 - \varepsilon_1)x^2 + y^2 + \frac{1}{9}\varepsilon_1, & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqq \frac{2}{3} \\ (1 - 2\varepsilon_1)x^2 + y^2 + \frac{5}{9}\varepsilon_1 & \text{si } \frac{2}{3} < x \leqq 1. \end{cases},$$

$$H_{12}(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } 0 < x \leqq \frac{1}{3}, \\ \varepsilon_1 x^2 + y^2 + \frac{1}{9}(1 - \varepsilon_1), & \text{si } \frac{1}{3} < x \leqq \frac{2}{3} \\ (2\varepsilon_1 - 1)x^2 + y^2 + \frac{5}{9}(1 - \varepsilon_1) & \text{si } \frac{2}{3} < x \leqq 1. \end{cases},$$

$$H_{21}(x, y) = (1 - 2\varepsilon_2)xy^2 + \varepsilon_2 xy - \frac{1}{4}\varepsilon_2 x, \quad H_{22}(x, y) = (2\varepsilon_2 - 1)xy^2 + (1 - \varepsilon_2)xy - \frac{1}{4}(1 - \varepsilon_2)x.$$

i) Monotonie de H_{11} par rapport à x

- Pour tout $\varepsilon_1 \in]0, 1[$ la fonction $H_{11}(x, y)$ est croissante par rapport à x sur l'intervalle $]0, \frac{2}{3}]$.
- Pour $\frac{2}{3} < x \leq 1$, H_{11} est croissante pour tout $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$, décroissante pour tout $\frac{1}{2} < \varepsilon_1 < 1$ et constante si $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$

ii) Monotonie de H_{12} par rapport à x

- Pour $0 < x \leq \frac{2}{3}$, H_{12} est croissante pour tout $0 < \varepsilon_1 < 1$.

- Pour $\frac{2}{3} < x \leq 1$, H_{12} est décroissante pour tout $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$, croissante pour tout $\frac{1}{2} < \varepsilon_1 < 1$ et constante si $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$.

Ainsi donc

- $arg\max_x H_{11}(x,y) = 1$ et $arg\max_x H_{12}(x,y) = 2/3$ si $0 < \varepsilon_1 < 1/2$,
- $arg\max_x H_{11}(x,y) = 2/3$ et $arg\max_x H_{12}(x,y) = 1$ si $1/2 < \varepsilon_1 < 1$,
- $arg\max_x H_{11}(x,y) = [2/3, 1] = arg\max_x H_{12}(x,y)$ si $\varepsilon_1 = 1/2$.

iii) Monotonie de H_{21} par rapport à y

On a $\frac{\partial H_{21}}{\partial y}(x,y) = 2(1-2\varepsilon_2)xy + \varepsilon_2 x$

- Si $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ alors $\frac{\partial H_{21}}{\partial y}(x,y) > 0$ donc H_{21} est croissante et $\frac{\partial^2 H_{21}}{\partial y^2}(x,y) > 0$ donc la fonction est quasi-concave et non concave.

  Par conséquent $arg\max_y H_{21}(x,\ y) = 1$

- Si $\frac{1}{2} < \varepsilon_2 < 1$ on a $\frac{\partial H_{21}}{\partial y}(x,y) \begin{cases} = 0, & \text{si } y = \dfrac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ < 0, & \text{si } y > \dfrac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ > 0, & \text{si } y < \dfrac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)}. \end{cases}$

Mais

$$y = \frac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)} \begin{cases} \leqq 1 \text{ si } \dfrac{2}{3} \leqq \varepsilon_2 < 1, \\ > 1 \text{ si } \dfrac{1}{2} < \varepsilon_2 < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

D'où

- Si $\frac{2}{3} \leqq \varepsilon_2 < 1$ on a $\frac{\partial^2 H_{21}}{\partial y^2}(x,y) < 0$ alors la fonction H_{21} est concave et $arg\max_y H_{21}(x,y) = \dfrac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)}$.
- Si $\frac{1}{2} < \varepsilon_2 < \frac{2}{3}$ alors $y = \dfrac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)} > 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{21}}{\partial y}(x,y) &= 2(1-2\varepsilon_2)xy + \varepsilon_2 x > 0 \text{ si } y < \frac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2 - 1)}, \\ \frac{\partial^2 H_{21}}{\partial y^2}(x,y) &= 2x(1-2\varepsilon_2) < 0 \end{aligned}$$

  alors $arg\max_y H_{21}(x,y) = 1$

iv) Monotonie de H_{22} par rapport à y

On a $\frac{\partial H_{22}}{\partial y}(x,y) = 2(2\varepsilon_2 - 1)xy + (1-\varepsilon_2)x$

- Si $\frac{1}{2} \leqq \varepsilon_2 < 1$ alors $\frac{\partial H_{22}}{\partial y}(x,y) > 0$ donc H_{22} est croissante et $\frac{\partial^2 H_{22}}{\partial y^2}(x,y) > 0$ donc la fonction est quasi-concave et non concave.
  Par conséquent $arg\max_y H_{22}(x,\ y) = 1$

- Si $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ on a $\frac{\partial H_{22}}{\partial y}(x,y) \begin{cases} = 0, & \text{si } y = \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}, \\ < 0, & \text{si } y > \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}, \\ > 0, & \text{si } y < \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}. \end{cases}$

Mais

$$y = \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)} \begin{cases} \leqq 1 \text{ si } 0 < \varepsilon_2 \leqq \frac{1}{3}, \\ > 1 \text{ si } \frac{1}{3} < \varepsilon_2 < 1. \end{cases}$$

D'où

- si $0 < \varepsilon_2 \leqq \frac{1}{3}$ on a $\frac{\partial H_{22}}{\partial y}(x,\ y) = 2xy(2\varepsilon_2 - 1) + (1-\varepsilon_2)x > 0$ et $\frac{\partial H_{22}}{\partial y}(x,\ y) < 0$.
  Il s'ensuit que $arg\max_y H_{22}(x,y) = \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}$
- si $\frac{1}{3} < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ on a $\frac{\partial H_{22}}{\partial y}(x,\ y) > 0$ donc $arg\max_y H_{21}(x,y) = 1$. (Dans ce cas H_{22} est quasi-concave, non concave).

Ainsi, toutes les conditions du Théorème 3.8 sont satisfaites. Le jeu (3.22) admet donc un équilibre de Nash proprement efficace. Pour le déterminer, il suffit de trouver l'équilibre faiblement efficace du jeu suivant pour un certain $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in [0,1]^2$:

$$G_\varepsilon = \langle X, Y, H_1, H_2 \rangle. \tag{3.23}$$

On a les éléments de l'ensemble E défini par

$$\begin{aligned} E &= \{(\bar{x},\ \bar{y}) \in X \times Y : \text{ t.q } H_1(\bar{x},\ \bar{y}) \not< H_1(x,\ \bar{y})\ \forall\ x \in X\ et\ H_2(\bar{x},\ \bar{y}) \not< H_2(\bar{x},\ y)\ \forall\ y \in Y\} \\ &= \{(\bar{x},\ \bar{y}) \in X \times Y : \text{ t.q } \bar{x} = arg\max_x H_{11}\ et\ \bar{y} = arg\max_y H_{21}\} \\ &\bigcup \{(\bar{x},\ \bar{y}) \in X \times Y : \text{ t.q } \bar{x} = arg\max_x H_{11}\ et\ \bar{y} = arg\max_y H_{22}\} \\ &\bigcup \{(\bar{x},\ \bar{y}) \in X \times Y : \text{ t.q } \bar{x} = arg\max_x H_{12}\ et\ \bar{y} = arg\max_y H_{21}\} \\ &\bigcup \{(\bar{x},\ \bar{y}) \in X \times Y : \text{ t.q } \bar{x} = arg\max_x H_{12}\ et\ \bar{y} = arg\max_y H_{22}\} \end{aligned}$$

sont des équilibres de Nash faiblement efficaces du jeu (3.23).

D'après l'étude précédente des fonctions H_1 et H_2, on trouve

$$\begin{aligned}
E &= \left\{(1,\ 1),\ (1,\ \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}),\ (2/3,\ 1),\ (2/3,\ \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}), \varepsilon_2 \in]0,\ 1/3]\right\} \\
&\bigcup\ \{(1,\ 1),\ (2/3,\ 1), \varepsilon_1 \in]0,\ 1[,\quad \varepsilon_2 \in]1/3,\ 2/3]\} \\
&\bigcup\ \left\{(1,\ \frac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2-1)}),\ (1,1),\ (2/3,\ \frac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2-1)}),\ (2/3,\ 1),\ \varepsilon_2 \in]2/3,\ 1[\right\} \\
&\bigcup\ \left\{(x,\ 1),\ (x,\ \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}),\ x \in [2/3,\ 1],\ \varepsilon_2 \in]0,\ 1/3[\right\} \\
&\bigcup\ \{(x,\ 1),\ x \in [2/3,\ 1],\ \varepsilon_2 \in]1/3,\ 2/3]\} \\
&\bigcup\ \left\{(x,\ \frac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2-1)}),\ (x,\ 1),\ x \in [2/3,\ 1],\ \varepsilon_2 \in]2/3,\ 1[\right\}.
\end{aligned}$$

En simplifiant, on aura

$$\begin{aligned}
E &= \left\{(x,\ 1),\ (x,\ \frac{1-\varepsilon_2}{2(1-2\varepsilon_2)}),\ x \in [\frac{2}{3},\ 1],\ \varepsilon_2 \in]0,\ \frac{1}{3}[\right\} \\
&\bigcup\ \left\{(x,\ \frac{\varepsilon_2}{2(2\varepsilon_2-1)}),\ x \in [\frac{2}{3}, 1],\ \varepsilon_2 \in]\frac{2}{3},\ 1[\right\}.
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{3}[$, $y(\varepsilon) = \dfrac{1-\varepsilon}{2(1-2\varepsilon)} \in]\dfrac{1}{2}, 1[$, pour $\varepsilon \in]\frac{2}{3}, 1[$ $y(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2(2\varepsilon-1)} \in]\dfrac{1}{2}, 1[$.

On déduit donc que $E = [\dfrac{2}{3}, 1] \times]\dfrac{1}{2}, 1]$ est l'ensemble des équilibres de Nash faiblement efficaces pour le jeu (3.23), qui est au même temps l'ensemble des équilibres de Nash proprement efficaces pour le jeu (3.22).

Cependant, l'ensemble des équilibres de Nash efficaces ne coincide pas avec l'ensemble des équilibres de Nash proprement efficaces. On peut montrer que tous les équilibre de Nash efficaces $(x, \dfrac{1}{2}), x \in [2/3, 1]$ pour le jeu (3.22) ne sont pas proprement efficaces. En effet, si le second joueur change sa stratégie et choisit $y = \frac{1}{2} + \delta,\ \delta \in]0, \frac{1}{2}]$, alors

$$\frac{f_{21}(x, \frac{1}{2}+\delta) - f_{21}(x, \frac{1}{2})}{f_{22}(x, \frac{1}{2}) - f_{22}(x, \frac{1}{2}+\delta)} = \frac{\delta+\delta^2}{\delta^2} \longrightarrow +\infty, \quad \text{quand } \delta \longrightarrow 0.$$

3.2.3 Equilibre de Nash idéal

En 2000, M. Voorneveld *et al.* [85] ont proposé un autre concept d'équilibre pour les jeux multicritères, qu'on appellera ici équilibre idéal de Nash, qui est robuste (stable) contre toute déviation unilatérale des joueurs. Cet équilibre ne prend pas en compte l'importance accordée aux critères. Les auteurs ont proposé une axiomatisation du concept et ont construit une classe de jeux bicritères à partir d'un jeu ordinal potentiel [54, 84] où l'existence de l'équilibre

est garantie.
Dans cette partie, on propose d'étudier son existence dans un jeu multicritère noncoopératif sous forme stratégique.

Définitions et caractérisation

Définition 3.4. [85] Une issue $x \in X$ est dite équilibre idéal de Nash pour le jeu (3.1), si pour tout joueur $i \in I$ et tout $y_i \in X_i$,

$$f_i(x) = f_i(x_i,\ x_{-i}) \geqq f_i(y_i,\ x_{-i}).$$

Notons par $X^{IN}(G)$ l'ensemble des équilibres idéaux de Nash du jeu (3.1).

Remarque 3.5.

1. Il est facile de voir que $X^{IN}(G) \subseteq X^{NPE}(G) \subseteq X^{NFE}(G)$.
2. Si tout joueur a un seul critère, l'équilibre idéal de Nash, l'équilibre proprement efficace, l'équilibre efficace et l'équilibre faiblement efficace coincident avec l'équilibre de Nash.

Rationalité individuelle

L'une des propriétés désirables d'un équilibre en théorie des jeux est la rationalité individuelle. Dans un jeu monocritère, une issue $\bar{x} \in X$ est dite individuellement rationnelle si elle satisfait :

$$f_i(\bar{x}) \geqq \alpha_i = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i,\ x_{-i}), \quad \forall\ i \in I. \tag{3.24}$$

Cependant, l'extension du concept de rationalité individuelle aux jeux multicritères ne peut se faire d'une manière unique en raison de la dimension multicritère des fonctions de gains des joueurs. Ainsi, différentes extensions ont été introduites dans la littérature [9].

Définition 3.5. Une issue $\bar{x} \in X$ satisfait la rationalité individuelle dans le jeu (3.1), si

$$f_{ik}(\bar{x}) \geqq\ \alpha_{ik} = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_{ik}(x_i,\ x_{-i}), \quad \forall\ k \in \{1, \ldots, r(i)\}, \quad \forall\ i \in I.$$

Proposition 3.3. L'équilibre idéal de Nash est individuellement rationnel.

Preuve. Soit $x^* \in X$ un équilibre idéal de Nash. Alors, pour tout $i \in I$ et tout $k \in \{1, \ldots, r(i)\}$, on a

$$f_{ik}(x^*) = \sup_{x_i \in X_i} f_{ik}(x_i,\ x^*_{-i}).$$

Comme

$$f_{ik}(x_i,\ x^*_{-i}) \geqq \inf_{x_-i \in X_{-i}} f_{ik}(x_i,\ x_{-i}), \quad \forall\ x_i \in X_i,$$

alors

$$\sup_{x_i \in X_i} f_{ik}(x_i,\ x^*_{-i}) = f_{ik}(x^*) \geqq \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_{ik}(x_i,\ x_{-i}).$$

Remarque 3.6. Les équilibres de Nash efficaces et faiblement efficaces ne vérifient pas toujours cette propriété.

Interprétation de l'équilibre idéal de Nash

Dans [85], le jeu multicritère (3.1) est interprété comme suit : chaque joueur $i \in I$ est considéré comme étant une organisation contenant $r(i)$ membres ; chaque membre $k \in \{1, \ldots, r(i)\}$ de la i^{eme} organisation possède une fonction de gain $f_{ik} : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Le choix d'une stratégie $x_i \in X_i$ de l'organisation i est supposé prise par consentement de tous les membres dans le but de maximiser le critère de chacun, en prenant en considération que le gain de chaque membre dépend aussi des choix de stratégies $x_j \in X_j$ des autres organisations $j \in I \setminus \{i\}$.

Caractérisation

Définition 3.6. [85] Une collection $\Lambda \subset \prod_{i \in I} \Delta_{r(i)}$ de vecteurs poids est dite représentative pour le jeu G, si pour toute organisation $i \in I$ et tout membre $k \in \{1, \ldots, r(i)\}$, il existe un vecteur poids dans Λ assignant un poids unité aux membres de cette organisation

$$\forall\ i \in I,\ \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, r(i)\},\ \exists\ \lambda = (\lambda_j)_{j \in I} \in \Lambda,\ \text{avec}\ \ \lambda_i = e_k \in \Delta_{r(i)},$$

où e_k est le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{r(i)}$.

Proposition 3.4. [85] Considérons le jeu multicritère (3.1). La plus petite collection représentative pour G a $\max_{i \in I} r(i)$ éléments. Ainsi, $\max_{i \in I} r(i)$ scalarisations suffisent pour déterminer l'ensemble $X^{IN}(G)$ des équilibre idéaux de Nash .

Preuve. La collection Λ est construite par $\max_{i \in I} r(i)$ éléments en définissant le k^{eme} élément, $k \in \{1, ..., \max\ \ r(i)\}$, par $\lambda \in \prod_{i \in I} \Delta_{r(i)}$ avec pour tout $i \in I$: $\lambda_i = e_{1+[(k-1) mod\ \ r(i)]}$.

Exemple 3.3. [85]
Dans un jeu multicritère à deux joueurs, où $r(1) = 3,\ \ r(2) = 7$, la collection représentative comme mentionnée dans la preuve de la Proposition 3.4, est donnée par

$$\Lambda = \{(e_1,\ e_2),\ (e_2,\ e_2),\ (e_3,\ e_3),\ (e_1,\ e_4),\ (e_2,\ e_5),\ (e_3,\ e_6),\ (e_1,\ e_7)\}.$$

Soit la fonction vectorielle $\psi_i, \quad i \in I$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : X_{-i} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{r(i)} \\ x_{-i} & \longrightarrow & \psi_i(x_{-i}) = (\psi_{i1}(x_{-i}),\ \psi_{i2}(x_{-i}),\ ...\ \psi_{ir(i)}(x_{-i})), \end{array}$$

où $\psi_{ik}(x_{-i}) = \sup\limits_{y_i \in X_i} f_{ik}(y_i,\ x_{-i}),\ \forall\ k = 1, \ldots, r(i),\ \forall\ i \in I.$

Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} \Delta_{r(i)}$, soit le jeu scalarisé

$$G_\lambda = \langle I,\ (X_i)_{i\in I},\ (g_i)_{i\in I}\rangle \tag{3.25}$$

associé au jeu multicritère (3.1), où les ensembles des stratégies des joueurs sont les mêmes que dans le jeu (3.1), pour tout joueur $i \in I$, $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_i(x) = \langle \lambda_i, f_i(x)\rangle = \sum\limits_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x)$ est la fonction de gain pondérée du $i$ème joueur.

On a le théorème suivant qui donne une caractérisation de l'équilibre idéal de Nash.

Théorème 3.9. [85] Soit G un jeu multicritère défini par (3.1) et Λ une collection représentative pour G. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $x \in X^{IN}(G)$;

b) $\forall\ i \in I,\ f_i(x) = \psi_i(x_{-i})$;

c) $x \in \bigcap\limits_{\lambda \in \prod\limits_{i\in I} \Delta_{r(i)}} X^N(G_\lambda)$;

d) $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} X^N(G_\lambda)$,

où $X^N(G_\lambda)$ est l'ensemble des équilibres de Nash pour le jeu (G_λ) défini par (3.25).

Conditions d'existence d'un équilibre idéal de Nash

Dans cette section, nous proposons d'étudier l'existence d'un équilibre idéal de Nash dans un jeu multicritère noncoopératif sous forme normale. Notre étude se base sur l'élément maximal d'une famille de correspondances et la caractérisation de cet équilibre. Les résultats obtenus ont fait l'objet d'une publication internationale [68].

Soit Λ une collection représentative pour le jeu (3.1). Par le Théorème 3.9, on a

$$x \in X^{IN}(G) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X^N(G_\lambda). \tag{3.26}$$

En d'autres termes, $x \in X$ est un équilibre idéal de Nash si et ssi pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $i \in I$

$$\langle \lambda_i,\ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i}) \rangle\ \geqq 0, \qquad \forall\ y_i \in X_i.$$

Pour tout $i \in I$, on définit la fonction multivoque $A_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$ par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i /\ \exists\ \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \langle \lambda_i,\ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i}) \rangle\ < 0\}. \tag{3.27}$$

La proposition suivante montre que l'existence d'un équilibre idéal de Nash pour le jeu (3.1) est équivalente à l'existence d'un élément maximal pour la famille de correspondances définies dans la relation (3.27).

Proposition 3.5. [68] Une issue $x^* \in X$ est un équilibre idéal de Nash pour le jeu (3.1) si et seulement si $x^* \in X$ est un élément maximal pour la famille de correspondances définies par (3.27).

Preuve. En utilisant le Théorème 3.9, la définition d'un équilibre idéal de Nash et (3.27), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x^* \in X^{IN}(G) \quad &\Leftrightarrow \quad x^* \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X^N(G_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall i \in I,\ \forall y_i \in X_i : \langle \lambda_i,\ f_i(x*) \rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x^*_{-i}) \rangle \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in I : \quad A_i(x^*) = \phi. \end{aligned}$$

En se basant sur le Théorème 1.13 sur l'existence d'un élément maximal pour une famille de correspondances et la Proposition 3.5, on démontre le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.10. [68] Pour le jeu (3.1), supposons que pour tout $i \in I$,

1. X_i est non vide et convexe ;
2. la fonction f_i est continue sur X;
3. pour tout $x \in X$, la fonction $y_i \in X_i \longmapsto f_i(y_i,\ x_{-i})$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-concave-like ;
4. il existe un sous-ensemble non vide compact K de X et un sous-ensemble non vide convexe et compact D_i de X_i pour tout $i \in I$, tels que pour tout $x \in X \backslash K$, il existe $i \in I$ et $\tilde{y}_i \in D_i$ tel que $f_i(x) - f_i(\tilde{y}_i, x_{-i}) < 0$.

Alors, il existe un équilibre idéal de Nash pour le jeu multicritères (3.1).

Preuve. Soit Λ une collection représentative pour le jeu (3.1) et les correspondance $A_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$, $i \in I$, définies par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i / \ \exists \ \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \langle \lambda_i, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i, \ f_i(y_i, \ x_{-i}) \rangle \ < 0\}.$$

On doit montrer que la famille de correspondances $\{A_i\}_{i \in I}$ satisfait toutes les conditions du Théorème 1.13.

• pour tout $x \in X$, $i \in I$ et $\lambda \in \Lambda$, on a $\langle \lambda_i, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i, \ f_i(x_i, \ x_{-i}) \rangle = 0$, ainsi $x_i \notin A_i(x)$,

• pour tout $x \in X$ et $i \in I$, $A_i(x)$ est convexe. En effet, soit $y_i^1, \ y_i^2 \in A_i(x)$. Alors, il existe $\lambda^1, \ \lambda^2 \in \Lambda$ tels que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^1, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i^1, \ f_i(y_i^1, \ x_{-i}) \rangle &< 0; \\ \langle \lambda_i^2, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i^2, \ f_i(y_i^2, \ x_{-i}) \rangle &< 0. \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in [0, \ 1]$. Par l'hypothèse 3, f_i est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-concave-like sur X_i, alors $-f$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-convex-like, et on a soit

$$-f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \ x_{-i}) = -f_i(y_i^1, \ x_{-i}) - \beta^1, \quad \beta^1 \in \mathbb{R}_+^{r(i)},$$

soit

$$-f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \ x_{-i}) = -f_i(y_i^2, \ x_{-i}) - \beta^2, \quad \beta^2 \in \mathbb{R}_+^{r(i)}.$$

Il s'ensuit que, soit

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^1, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i^1, \ f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \ x_{-i}) \rangle &= \\ \langle \lambda_i^1, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i^1, \ f_i(y_i^1, \ x_{-i}) \rangle - \langle \lambda_i^1, \ \beta^1 \rangle &< 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ou

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^2, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i^2, \ f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \ x_{-i}) \rangle &= \\ \langle \lambda_i^2, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i^2, \ f_i(y_i^2, \ x_{-i}) \rangle - \langle \lambda_i^2, \ \beta^2 \rangle &< 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

ce qui implique dans les deux cas

$$\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2 \in A_i(x),$$

d'où $A_i(x)$ est convexe.

• Montrons que pour tout $y_i \in X_i$ et $i \in N$, l'ensemble $A_i^{-1}(y_i)$ est ouvert dans X.
Par l'hypothèse 2, on a :

$$A_i^{-1}(y_i) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{x \in X / \langle \lambda_i, \ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i, \ f_i(y_i, \ x_{-i}) \rangle \ < 0\}$$

qui est une réunion finie d'images réciproques d'ouverts $(-\infty,\ 0)$ par les fonctions continues $x \mapsto \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i})\rangle$, est donc ouvert.

• Montrons que l'ensemble $A_i = \{x \in X : A_i(x) \neq \phi\}$ est ouvert pour tout $i \in I$. On a

$$A_i = \{x \in X, \ \ \text{tel que} \ \exists\ y_i \in X_i,\ \exists\ \lambda \in \Lambda,\ \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i})\rangle \ < 0\},$$

et l'ensemble

$$B_i = \{x \in X, \ \ \text{tel que} \ \forall\ \lambda \in \Lambda,\ \forall\ y_i \in X_i, \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i})\rangle \ \geqq 0\}$$

qui est le complémentaire de A_i dans X.

Il est facile de voir que $B_i = \bigcap\limits_{y_i \in X_i} B_i(y_i)$, où

$$B_i(y_i) = \{x \in X/ \ \forall\ \lambda \in \Lambda,\ \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i})\rangle \ \geqq 0\}. \qquad (3.30)$$

est le complémentaire de $A_i^{-1}(y_i)$ dans X. Par conséquent, B_i est fermé, comme intersection de fermés. D'où l'ensemble A_i est ouvert.

• De l'hypothèse 4 du théorème 3.10, pour tout $x \in X \setminus K$ il existe $i \in I$ et $\tilde{y}_i \in D_i \subset X_i$ tels que $f_i(x) - f_i(\tilde{y},\ x_{-i}) < 0$.

Puisque Λ est une collection représentative, alors pour tout $i \in N$ et $k \in \{1, ...,\ r(i)\}$ il existe $\lambda = (\lambda_j)_{j \in I}/\lambda_i = e_k$. Il s'ensuite que

$$f_{ik}(x) - f_{ik}(\tilde{y}_i,\ x_{-i}) = \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(\tilde{y}_i,\ x_{-i})\rangle \ < 0,$$

ainsi $\tilde{y}_i \in A_i(x)$ et $A_i(x) \cap D_i \neq \phi$.

Toutes les conditions du théorème 1.13 sont satisfaites, alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $A_i(\bar{x}) = \phi$ pour tout $i \in I$ et d'après la proposition 3.5, $\bar{x}$ est un équilibre idéal de Nash.

Remarque 3.7. Si pour tout $i \in I,\ X_i$ est compact, alors la conclusion du Théorème 3.10 reste vrai sans l'hypothèse 4.

Nous illustrons les résultats du Théorème 3.10 par un exemple numérique.

Exemple 3.4. Considérons le jeu

$$G = \langle I,\ (X_i)_{i \in I},\ (f_i)_{i \in I}\rangle, \qquad (3.31)$$

où $I = \{1,\ 2\},\ r(1) = r(2) = 2, \ \ X_1 =]-1, 1[,\ X_2 = [0, 1]$ et pour tout $i \in I,\ f_i$ est définie comme suit

$$\begin{aligned} f_1:\ X = X_1 \times X_2 \ &\longrightarrow\ \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \ &\longrightarrow\ f_1(x_1, x_2) = (f_{11}(x_1, x_2), f_{12}(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} f_{11}(x_1,x_2) & = & -x_1^2+x_2^2 \\ f_{12}(x_1,x_2) & = & x_2\cos\dfrac{\pi}{2}x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_2:\ X=X_1\times X_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \longrightarrow & f_2(x_1,x_2)=(f_{21}(x_1,x_2),f_{22}(x_1,x_2)) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} f_{21}(x_1,x_2) & = & \begin{cases} 2x_1^2x_2, & \text{if } x_2\in[0,\frac{1}{2}],\ x_1\in X_1 \\ -2(x_2-1)x_1^2, & \text{if } x_2\in[\frac{1}{2},1],\ x_1\in X_1 \end{cases} \\ f_{22}(x_1,x_2) & = & (x_1+1)\sin\pi x_2, \end{array}$$

$*$ Pour tout $i\in I=\{1,2\}$, X_i est convexe.
$*$ Pour montrer que la fonction $y_1\longrightarrow f_1(y_1,x_2)$ est $\mathbb{R}^2_+$-quasi-concave-like, on doit montrer que pour tout $\lambda\in[0,1]$ et $y_1,z_1\in X_1$ on a

$$\begin{cases} \text{soit} & f_1(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_1(y_1,x_2)+\epsilon \\ \text{ou} & f_1(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_1(z_1,x_2)+\epsilon \end{cases},\qquad \text{où } \epsilon\in\mathbb{R}^2_+$$

Si $|y_1|>|z_1|$, alors

$$\begin{cases} f_{11}(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_{11}(y_1,x_2)+\epsilon_1, & \epsilon_1\in\mathbb{R}_+ \\ f_{12}(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_{12}(y_1,x_2)+\epsilon_2, & \epsilon_2\in\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_1(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_1(y_1,x_2)+\epsilon,\ \epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2)\in\mathbb{R}^2_+$$

Si $|y_1|\leq|z_1|$, alors

$$\begin{cases} f_{11}(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_{11}(z_1,x_2)+\epsilon_1 \\ f_{12}(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_{12}(z_1,x_2)+\epsilon_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_1(\lambda y_1+(1-\lambda)z_1,x_2)=f_1(z_1,x_2)+\epsilon,\ \epsilon\in(\epsilon_1,\epsilon_2)\in\mathbb{R}^2_+.$$

$*$ De la même manière, pour montrer que la fonction $y_2\longrightarrow f_2(x_1,y_2)$ est $\mathbb{R}^2_+$-quasi-concave-like, on doit montrer que pour tout $\lambda\in[0,\ 1]$ et $y_2,\ z_2\in X_2$, on a

$$\begin{cases} \text{soit } f_2(x_1,\lambda y_2+(1-\lambda)z_2)=f_2(x_1,y_2)+\epsilon \\ \text{ou } f_2(x_1,\lambda y_2+(1-\lambda)z_2)=f_2(x_1,z_2)+\epsilon \end{cases}$$

avec $\epsilon\in\mathbb{R}^2_+$.
Soit $y_2,\ z_2\in X_2,\ \lambda\in[0,1]$,

Si $|y_2 - \frac{1}{2}| \geqq |z_2 - \frac{1}{2}|$ alors on a

$$f_{21}(x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) = f_{21}(x_1, y_2) + \epsilon_1, \quad \epsilon_1 \in \mathbb{R}_+. \tag{3.32}$$

Si $|y_2 - \frac{1}{2}| \leqq |z_2 - \frac{1}{2}|$ alors

$$f_{21}(x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) = f_{21}(x_1, z_2) + \epsilon_1, \quad \epsilon_1 \in \mathbb{R}_+. \tag{3.33}$$

Si $|y_2 - \frac{1}{2}| \leqq |z_2 - \frac{1}{2}|$ alors

$$f_{22}(x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) = f_{22}(x_1, z_2) + \epsilon_2, \quad \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+. \tag{3.34}$$

Si $|y_2 - \frac{1}{2}| \geqq |z_2 - \frac{1}{2}|$ alors

$$f_{22}(x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) = f_{22}(x_1, y_2) + \epsilon_2, \quad \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+. \tag{3.35}$$

On conclut que :
Si $|y_2 - \frac{1}{2}| \geqq |z_2 - \frac{1}{2}|$, alors par la relation (3.32) et (3.35) on a

$$f_2(x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) = f_2(x_1, y_2) + \epsilon, \ \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2).$$

Si $|y_2 - \frac{1}{2}| \leqq |z_2 - \frac{1}{2}|$ alors par (3.33) et (3.34), on a

$$f_2(x_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) = f_2(x_1, z_2) + \epsilon.$$

Ce qui implique que la fonction $y_2 \longrightarrow f_2(x_1, y_2)$ est $\mathbb{R}^2_+$-quasi-concave-like.

Pour vérifier la dernière condition, on pose $K = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0,1], \ D_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \ D_2 = [\frac{1}{2}, \ 1]$.
a) $\forall \ \tilde{x} \in X \setminus K = \big(]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\big) \times [0,1]$, avec $\tilde{x}_2 \neq 0 \ \exists \ i \in I, \ i = 1, \ \exists \ \tilde{y}_1 \in D_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que

$$f_{11}(\tilde{x}) - f_{11}(\tilde{y}_1, \tilde{x}_2) = -\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2 = \tilde{y}_1^2 - \tilde{x}_1^2.$$

Puisque $\tilde{y}_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $\tilde{x}_1 \in]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$ alors,

$$f_{11}(\tilde{x}) - f_{11}(\tilde{y}_1, \tilde{x}_2) < 0,$$

et

$$f_{12}(\tilde{x}) - f_{12}(\tilde{y}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_2(\cos\frac{\pi}{2}\tilde{x}_1 - \cos\frac{\pi}{2}\tilde{y}_1) < 0.$$

b) $\forall \ \tilde{x} \in X \setminus K, \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ 0), \ \exists i = 2, \ \exists \tilde{y}_2 \in D_2 = [\frac{1}{2}, \ 1], \ \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}$ tel que

$$f_{21}(\tilde{x}) - f_{21}(\tilde{x}_1, \ \tilde{y}_2) = -\tilde{x}_1^2 < 0$$

et

$$f_{22}(\tilde{x}) - f_{22}(\tilde{x}_1,\ \tilde{y}_2) = -(\tilde{x}_1 + 1) < 0$$

Toutes les hypothèses du Théorème 3.10 sont vérifiées, il existe alors un équilibre idéal de Nash $\bar{x} \in X$. Pour trouver $\bar{x}$, on suivra la preuve du Théorème 3.10

Soit $\Lambda = \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}$,
$A_1(\bar{x}) = \{y_1 \in X_1 / \ \exists \lambda \in \Lambda / \ \langle \lambda_1, f_1(\bar{x})\rangle - \langle \lambda_1, f_1(y_1, \bar{x}_2)\rangle < 0\}$

$$\begin{aligned}
A_1(\bar{x}) = \emptyset &\iff \forall y_1 \in X_1,\ \forall \lambda \in \Lambda \quad \langle \lambda_1, f_1(\bar{x})\rangle - \langle \lambda_1, f_1(y_1, \bar{x}_2)\rangle \geqq 0 \\
&\iff \forall y_1 \in X_1, \begin{cases} \langle e_1, f_1(\bar{x})\rangle - \langle e_1, f_1(y_1, \bar{x}_2)\rangle \geqq 0; \\ \langle e_2, f_1(\bar{x})\rangle - \langle e_2, f_2(y_1, \bar{x}_2)\rangle \geqq 0. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} f_{11}(\bar{x}) - f_{11}(y_1, \bar{x}_2) \geqq 0 \quad \forall\ y_1 \in X_1; \\ f_{12}(\bar{x}) - f_{12}(y_1, \bar{x}_2) \geqq 0 \quad \forall\ y_1 \in X_1. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (-\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) - (-y_1^2 + \bar{x}_2^2) \geqq 0\ \forall y_1 \in X_1; \\ \bar{x}_2 \cos\frac{\pi}{2}\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \cos\frac{\pi}{2} y_1 \geqq 0,\ \forall y_1 \in X_1. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (y_1^2 - \bar{x}_1^2) & \geqq 0,\ \forall y_1 \in X_1; \qquad (1) \\ \bar{x}_2(\cos\frac{\pi}{2}\bar{x}_1 - \cos\frac{\pi}{2} y_1) & \geqq 0,\ \forall y_1 \in X_1. \qquad (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &\implies \bar{x}_1 = 0 \qquad (3) \\
(2) &\implies \bar{x}_2(1 - \cos\frac{\pi}{2} y_1) \geqq 0,\ \forall y_1 \in X_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\bar{x}) = \emptyset &\iff \forall\ y_2 \in X_2,\ \forall\ \lambda \in \Lambda\ \ \langle \lambda_2, f_2(\bar{x})\rangle - \langle \lambda_2, f_2(\bar{x}_1, y_2)\rangle \geqq 0 \\
&\iff \forall\ y_2 \in X_2 \begin{cases} \langle e_1, f_2(\bar{x})\rangle - \langle e_1, f_2(\bar{x}_1, y_2)\rangle \geqq 0 \\ \langle e_2, f_2(\bar{x})\rangle - \langle e_2, f_2(\bar{x}_1, y_2)\rangle \geqq 0 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} f_{21}(\bar{x}) - f_{21}(\bar{x}_1, y_2) \geqq 0,\ \forall y_2 \in X_2 \\ f_{22}(\bar{x}) - f_{22}(\bar{x}_1, y_2) \geqq 0,\ \forall y_2 \in X_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $\bar{x}_1 = 0$ on déduit que $f_{21}(\bar{x}) = f_{21}(\bar{x}_1, y_2) = 0$ et

$$\begin{aligned}
f_{22}(\bar{x}) - f_{22}(\bar{x}_1, y_2) \geqq 0 &\implies (\sin \bar{x}_2\pi - \sin y_2\pi) \geqq 0,\ \forall y_2 \in [0, 1], \\
&\implies \bar{x}_2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\bar{x} = (0, \frac{1}{2})$ est un équilibre idéal de Nash.

Cas particulier d'un jeu monocritère

Lorsque le jeu (3.1) est monocritère ($r(i) = 1,\ \forall i \in I$), l'équilibre idéal de Nash coincide avec l'équilibre de Nash (voir Remarque 3.5). Alors, on déduit le théorème d'existence d'un équilibre de Nash suivant, qui peut être considéré comme une généralisation de celui de Nash [6] au cas de non compacité des ensembles de stratégies.

Théorème 3.11. Supposons que pour tout $i \in I$,

1. l'ensemble X_i est non vide et convexe ;
2. la fonction gain $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur X ;
3. pour tout $x \in X$, la fonction $y_i \in X_i \longmapsto f_i(x_{-i},\ y_i)$ est quasi-concave ;
4. il existe un sous-ensemble non vide et compact K de X et un sous-ensemble non vide convexe et compact D_i de X_i pour tout $i \in I$, tel que pour tout $x \in X \backslash K$, il existe $i \in I$ et $\tilde{y}_i \in D_i$ tel que $f_i(x) < f_i(\tilde{y}_i, x_{-i})$.

Alors, il existe un équilibre de Nash dans le jeu monocritère (3.1).

Exemple 3.5. Considérons le jeu monocritère à deux personnes suivant

$$G = \langle I = \{1, 2\},\ \{X_i\}_{i\in I},\ \{h_i\}_{i\in I}\ \rangle, \tag{3.36}$$

où

$$\begin{cases} h_1 = f_{12}; \\ h_2 = f_{21}, \end{cases}$$

et $X_1,\ X_2,\ f_{12},\ f_{22}$ sont définies comme dans l'Exemple 3.4.
On a déjà montré dans l'Exemple 3.4, que la fonction h satisfait toutes les hypothèses du Théorème 3.11 qui garantissent l'existence de l'équilibre de Nash. En procédant comme dans l'exemple précédant on trouve l'ensemble des équilibres de Nash

$$X^N(G) = \{\bar{x} = (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2) \in]-1,\ 1[\times[0,\ 1] \ \text{ tel que } \ \bar{x}_1 = 0\}.$$

3.3 Cas d'un jeu fini à deux personnes

Dans cette section, nous présenterons le cas particulier des jeux non coopératifs à deux personnes à somme non nulle.

Un jeu bimatriciel est représenté par les deux matrices $m \times n$ A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ A_{m1} & A_{m2} & ... & A_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & ... & B_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ B_{m1} & B_{m2} & ... & B_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

où chaque élément A_{ij} de la matrice A (resp. B_{ij} de la matrice B) est un vecteur à r (resp. s) composantes qui représente les gains du joueur 1 (resp. du joueur 2) lorsqu'il choisit sa stratégie i et le joueur 2 choisit sa stratégie j.

$$A_{ij} = (a^1_{ij}, \dots a^r_{ij})^t, \tag{3.38}$$

$$B_{ij} = (b^1_{ij}, \dots b^s_{ij})^t. \tag{3.39}$$

Dans ce jeu, le joueur 1 jouant en lignes, possède m stratégies pures et r objectifs, et le joueur 2, jouant en colonnes, possède n stratégies pures et s objectifs.
Considérons les ensembles des stratégies mixtes Δ_m et Δ_n du joueur 1 et du joueur 2 respectivement. Les éléments de ces ensembles sont des distributions de probabilités sur les ensembles des stratégies pures. Ainsi donc Δ_m et Δ_n sont définis par

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)^t \in \mathbb{R}^m : \alpha_i \geq 0,\ \forall i = 1, \dots, m; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}, \\ \Delta_n &= \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \geq 0,\ \forall i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\} \end{aligned}$$

Les stratégies pures des joueurs sont des points extrêmes de Δ_m et Δ_n respectivement.
Pour tout choix $(\alpha, \beta) \in \Delta_m \times \Delta_n$ de stratégies mixtes par les deux joueurs, les vecteurs des gains espérés sont

$$\begin{aligned} E_1(\alpha, \beta) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a^k_{ij} \beta_j \right)_{k=1,\dots,r} \\ &= \left(E^1_1(\alpha, \beta), \dots, E^r_1(\alpha, \beta) \right)^t. \end{aligned}$$

pour le joueur 1, et

$$\begin{aligned} E_2(\alpha, \beta) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i b^k_{ij} \beta_j \right)_{k=1,\dots,s} \\ &= \left(E^1_2(\alpha, \beta), \dots, E^s_2(\alpha, \beta) \right)^t, \end{aligned}$$

pour le joueur 2.

Notons par

$$\langle \Delta_m,\ \Delta_n, A,\ B\rangle, \tag{3.40}$$

l'extension mixte du jeu bimatriciel (A, B).

Définition 3.7. Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est dite

(i) Un équilibre de Nash efficace pour le jeu (3.40) si

$$\begin{array}{lll} E_1(\alpha^*, \beta^*) & \nleq & E_1(\alpha, \beta^*) \quad \forall\, \alpha \in \Delta_m, \\ E_2(\alpha^*, \beta^*) & \nleq & E_2(\alpha^*, \beta) \quad \forall\, \beta \in \Delta_n. \end{array}$$

(ii) Un équilibre de Nash faiblement efficace pour le jeu (3.40) si

$$\begin{array}{lll} E_1(\alpha^*, \beta^*) & \nless & E_1(\alpha, \beta^*) \quad \forall\, \alpha \in \Delta_m, \\ E_2(\alpha^*, \beta^*) & \nless & E_2(\alpha^*, \beta) \quad \forall\, \beta \in \Delta_n. \end{array}$$

Définition 3.8. Une paire de stratégies mixtes $(\alpha^*,\ \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un équilibre de Nash proprement efficace du jeu multicritère bimatriciel (3.40), si

1. $(\alpha^*,\ \beta^*)$ est un un équilibre de Nash efficace du jeu (3.40) ;
2. il existe une constante $M_1 > 0$ telle que :
   – pour toute stratégie $\alpha \in \Delta_m$ et pour tout $k \in K_1 = \{1, \ldots, r\}$ tel que :

$$E_1^k(\alpha, \beta^*) > E_1^k(\alpha^*,\ \beta^*), \tag{3.41}$$

   on a $\dfrac{E_1^k(\alpha, \beta^*) - E_1^k(\alpha^*,\ \beta^*)}{E_1^l(\alpha^*, \beta^*) - E_1^l(\alpha, \beta^*)} \leq M_1$ pour un certain $l \in K_1$ (qui existe du fait que $(\alpha^*,\ \beta^*)$ est un équilibre de Nash efficace) tel que

$$E_1^l(\alpha^*, \beta^*) > E_1^l(\alpha, \beta^*); \tag{3.42}$$

3. il existe une constante $M_2 > 0$ telle que :
   – pour toute stratégie $\beta \in \Delta_n$ et pour tout $k \in K_2 = \{1, \ldots, s\}$ tel que :

$$E_2^k(\alpha^*, \beta) > E_2^k(\alpha^*,\ \beta^*), \tag{3.43}$$

   on a $\dfrac{E_2^k(\alpha^*, \beta) - E_2^k(\alpha^*,\ \beta^*)}{E_2^l(\alpha^*, \beta^*) - E_2^l(\alpha^*, \beta)} \leq M_2$ pour un certain $l \in K_2$ tel que

$$E_2^l(\alpha^*, \beta^*) > E_2^l(\alpha^*, \beta); \tag{3.44}$$

Pour $\widetilde{\alpha} \in \Delta_m$ et $\widetilde{\beta} \in \Delta_n$, considérons les deux problèmes multicritères

$$(P1)(\widetilde{\beta}) \begin{cases} \text{"}\max_{\alpha}\text{"}\alpha^t A\widetilde{\beta} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geqq 0, i = 1, ..., m \end{cases} \Leftrightarrow \text{"}\max_{\alpha \in \Delta_m}\text{"}\alpha^t A\widetilde{\beta} \tag{3.45}$$

et

$$(P2)(\tilde{\alpha}) \begin{cases} \text{"}\max_{\beta}\text{"}\widetilde{\alpha}t(B)\beta \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1 \\ \beta_j \geqq 0, j = 1, ..., n \end{cases} \Leftrightarrow \text{"}\max_{\beta \in \Delta_n}\text{"}\widetilde{\alpha}^t(B)\beta. \tag{3.46}$$

La Proposition 3.2 prend ici la forme suivante, qui permettra de ramener la recherche d'un équilibre efficace (resp. proprement efficace) du jeu (3.40) à la recherche de solutions efficaces (resp. proprement efficaces) des deux problèmes multicritères (3.45) et (3.46).

Proposition 3.6. Une paire de stratégies mixtes $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est dite :

1. équilibre de Nash efficace pour le jeu (3.40) si et seulement si α^* est une solution efficace pour le problème d'optimisation multicritère $(P1)(\beta^*)$ et β^* est une solution efficace de $(P2)(\alpha^*)$;
2. équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu (3.40) si et seulement si α^* est une solution proprement efficace pour le problème d'optimisation multicritère $(P1)(\beta^*)$ et β^* est une solution proprement efficace de $(P2)(\alpha^*)$.

En utilisant les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker pour un problème d'optimisation mono-objectif non linéaire [1], la Proposition 3.6 et le Théorème 2.7, Corley [23]

1.

Théorème. Soit $f, g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment différentiables et considérons le problème d'optimisation mono-objectif suivant

$$\min\{f(x) : g_j(x) \leqq 0, j = 1, ..., m\}. \tag{3.47}$$

Soit $\chi = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leqq 0, j = 1, ..., m\}$ l'ensemble des solutions réalisables.

- Si $\hat{x} \in \chi$ est solution optimale (locale) du problème (3.47), il existe $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ tel que

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} \hat{\mu}_j \nabla g_j(\hat{x}) = 0, \tag{3.48}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \hat{\mu}_j g_j(\hat{x}) = 0. \tag{3.49}$$

a montré que l'existence d'un équilibre de Nash efficace est équivalent à la résolution d'un problème paramétrique linéaire de complémentarité.

Théorème 3.12. [23] Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un équilibre de Nash efficace pour le jeu (3.40) si et seulement s'il existe $\lambda_1 = (\lambda_1^1, ..., \lambda_1^r) \in int\Delta_r, \lambda_2 = (\lambda_2^1, ..., \lambda_2^s) \in int\Delta_s, \mu_1, ..., \mu_m, \theta_1, ..., \theta_n,\ \gamma,\ \delta$ vérifiant

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \lambda_1^k a_{ij}^k \beta_j + \mu_i &= \gamma, \qquad i = 1, ..., m && (3.50)\\
\sum_{i=1}^{m} \alpha_i &= 1 && (3.51)\\
\mu_i \alpha_i &= 0, \qquad i = 1, ..., m && (3.52)\\
\alpha, \mu_i, \alpha_i &\geqq 0, \qquad i = 1, ..., m && (3.53)\\
\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m} \lambda_2^k a_{ij}^k \alpha_i + \delta &= \theta_j, \qquad j = 1, ..., n && (3.54)\\
\sum_{j=1}^{n} \beta_j &= 1 && (3.55)\\
\theta_j \beta_j &= 0, \qquad j = 1, ..., n && (3.56)\\
\beta, \theta_j, \beta_j &\geqq 0, \qquad j = 1, ..., n && (3.57)
\end{aligned}$$

Le théorème suivant établit la coincidence des équilibres de Nash proprement efficaces et des équilibres de Nash efficaces en stratégies mixtes dans un jeu fini multicritère à deux joueurs.

Théorème 3.13. [35] Une paire de stratégies mixtes $(\alpha^*,\ \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu (3.40) si et seulement si $(\alpha^*,\ \beta^*)$ est un équilibre de Nash efficace pour le même jeu.

Preuve. La condition nécessaire découle directement de la Définition 3.8. Inversement, soit $(\alpha^*,\ \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ un équilibre de Nash efficace pour le jeu (3.40), alors, d'après la Proposition 3.6, α^* (resp. β^*) est une solution efficace pour le problème d'optimisation multicritère $(P1)(\beta^*)$ (resp. $(P2)(\alpha^*)$). D'après le Théorème 2.8, α^* (resp. β^*) est une solution proprement efficace dans $(P1)(\beta^*)$ (resp. $(P2)(\alpha^*)$). Par conséquent, d'après la Proposition 3.6, (α^*, β^*) est un équilibre de Nash proprement efficace pour le jeu (3.40).

- Si f, g_j sont convexes et il existe $\hat{x} \in \chi$ et $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ tels que (3.48) et (3.49) sont vérifiées, alors $\hat{x}$ est une solution optimale locale du problème (3.47).

Remarque 3.8. Étant donnée l'équivalence entre l'équilibre de Nash efficace et l'équilibre de Nash proprement efficace en stratégies mixtes, le Théorème 3.12 reste donc valable également pour l'équilibre de Nash proprement efficace.

Les jeux multicritères à deux personnes ont été traité par d'autres chercheurs. Citons par exemple Borm et al [17] qui se sont intéressés à la structure de l'ensemble des équilibres de Nash efficace pour cette classe de jeux. Ils ont montré que pour que l'ensemble de ces équilibres soit union finie de polytopes (propriété des jeux bimatriciels monocritères), il est nécessaire qu'au moins un des deux joueurs ait exactement deux stratégies.

3.4 Conclusion

L'équilibre de Nash efficace est le plus étudié dans la littérature des jeux multicritères depuis qu'il a été défini par Shapley [72] en 1959. Son existence a fait l'objet de plusieurs études [4, 16, 88, 92]. Voorneveld *et al.* ont défini un autre concept qui est l'équilibre idéal. Ils ont caractérisé cet équilibre et l'ont axiomatisé. Dans ce chapitre, nous avons étudié son existence dans un jeu multicritère noncoopératif sous forme normale. Les résultats obtenus nous ont permis de déduire des généralisation du théorème de Nash pour l'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu monocritère lorsque les ensembles des stratégies des joueurs sont non compacts. Nous avons également étudié l'équilibre de Nash proprement efficace, qui est un raffinement de l'équilibre de Nash efficace.

4

Jeux multicritères finis à somme nulle

Une bonne partie des mathématiques devenues utiles se sont développées sans aucun désir d'être utiles, dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quels domaines elles deviendraient utiles. Il n'y avait aucune indication qu'elles deviendraient utiles.

John Von Neumann

Introduction

Inspirés des jeux de société le poker et les jeux d'échec, le mathématicien Von Neumann et l'économiste Morgenstern ont donné les fondements de la théorie des jeux dans leur oeuvre phare "Theory of games and economic behavior" [59] qui a donné naissance à la théorie des jeux telle qu'elle est connue aujourd'hui. Leur travail concerne essentiellement les jeux à somme nulle où les joueurs sont complètement antagonistes (ce que gagne l'un, l'autre le perd). Ils ont démontré que tout jeu à n personnes à somme non nulle peut se ramener à un jeu à somme nulle pour $n + 1$ personnes, la $n + 1$-ième personne est un joueur fictif représentant le gain ou la perte globale. Même si les jeux à somme nulle ne représentent pas toutes les situations réelles, ils occupent néanmoins une grande partie de la théorie des jeux. Dans ce chapitre, on s'intéressera aux jeux à somme nulle à multiples objectifs. Nous commencerons par présenter les différentes solutions étudiées en littérature, par la suite, nous proposons d'étendre le concept d'équilibre proprement efficace et d'établir des conditions de son existence.

4.1 Représentation

Un jeu multicritère à deux joueurs à somme nulle peut être entièrement caractérisé par une matrice A à m lignes et n colonnes, si on suppose que le premier joueur I dispose de m stratégies pures et le second joueur II de n stratégies pures. On considère que l'objectif du joueur I est de choisir une de ses stratégies pures (représentées en lignes de la matrice A) qui engendrerait les plus grandes valeurs possibles pour les p composantes d'une fonction vectorielle, tandis que le second joueur choisira une parmi ses n stratégies qui engendrerait les plus petites valeurs possibles pour chacune des p composantes de la même fonction vectorielle. Un élément A_{ij} de la matrice A est un vecteur à p composantes a_{ij}^k, représentant le gain du joueur I, s'il joue sa i-ème stratégie pure et le joueur II sa j-ème stratégie pure : $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, $j \in J = \{1, \ldots, n\}$, $k \in K = \{1, \ldots, p\}$.

La matrice des gains est alors représentée par

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^1 \\ a_{11}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{11}^P \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12}^1 \\ a_{12}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{12}^P \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} a_{1n}^1 \\ a_{1n}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{1n}^P \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21}^1 \\ a_{21}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{21}^P \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{22}^1 \\ a_{22}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{22}^P \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} a_{2n}^1 \\ a_{2n}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{2n}^P \end{pmatrix} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \begin{pmatrix} a_{m1}^1 \\ a_{m1}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}^P \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{m2}^1 \\ a_{m2}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2}^P \end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix} a_{mn}^1 \\ a_{mn}^2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn}^P \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

et

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & . & . & . & a_{1n}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & . & . & . & a_{2n}^k \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1}^k & a_{m2}^k & . & . & . & a_{mn}^k \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

représente la matrice des gains du joueur I relatif à la k^{eme} fonction objectif. On étudiera l'extension de ce jeu au cas où les joueurs utilisent leurs stratégies mixtes qui correspondent aux probabilités affectées au différentes stratégies. A cet effet, si on note par

$$\Delta_q = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_q)^t \in \mathbb{R}^q : \alpha_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, q; \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1\},$$

alors Δ_m (respectivement Δ_n) sera l'ensemble des stratégies mixtes du joueur I (respectivement du joueur II). Les stratégies pures des joueurs sont des points extrêmes de Δ_m et Δ_n respectivement.
Pour tout choix $(\alpha, \beta) \in \Delta_m \times \Delta_n$ de stratégies mixtes par les deux joueurs, le p-vecteur des gains espérés est donné par

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_{ij}^k \beta_j \right)_{k=\overline{1,p}} \\ &= \left(\alpha^t A^1 \beta,\ \alpha^t A^2 \beta, \ldots, \alpha^t A^p \beta \right)^t \\ &= \left(E^1(\alpha, \beta), \ldots, E^p(\alpha, \beta) \right)^t. \end{aligned}$$

Ainsi, le jeu fini multicritère à deux joueurs à somme nulle en stratégies mixtes peut s'écrire sous la forme normale (3.1), où

$$N = \{1, 2\},\ X_1 = \Delta_m,\ X_2 = \Delta_n, f_1(\alpha, \beta) = -f_2(\alpha, \beta) = E(\alpha,\ \beta)$$

ou encore sous la forme

$$J = \langle \Delta_m,\ \Delta_n, A \rangle \tag{4.3}$$

d'où l'appellation de jeu matriciel multicritère en stratégies mixtes.
Par la suite, on notera le jeu à deux joueurs en stratégies mixtes par (4.3).

Pour tout vecteur poids $\lambda \in \Delta_p$, on associe le jeu matriciel scalarisé

$$J_\lambda = \langle \Delta_m, \Delta_n, A_\lambda \rangle, \tag{4.4}$$

où les ensembles des stratégies mixtes restent les mêmes que dans le jeu (4.3) et dont la matrice des gains est donnée par $A_\lambda = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k A^k$. L'espérance mathématique des gains $E(\lambda,\ \alpha,\ \beta)$ que le joueur I maximise avec ses stratégies $\alpha \in \Delta_m$ et que le second joueur II minimise avec ses stratégies $\beta \in \Delta_n$ s'écrit

$$E(\lambda,\ \alpha,\ \beta) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_k \alpha_i A_{ij}^k \beta_j = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k E^k(\alpha,\ \beta).$$

4.2 Concepts de solutions

Les concepts de solutions proposés pour les jeux multicritères sont une généralisation de ceux définis pour un jeu monocritère en utilisant les notions d'optimalité connues en optimisation multicitère. Dans ce paragraphe, nous exposerons les concepts les plus étudiés. Shapley [72] fut le premier à définir un équilibre pour un jeu multicritère à deux joueurs à somme nulle appelé ici point selle efficace.

4.2.1 Point-selle

Définition 4.1. [72] Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un point-selle efficace du jeu matriciel multicritère (4.3) si

$$\alpha^t A\beta^* \ngeq \alpha^{*t} A\beta^* \ngeq \alpha^{*t} A\beta, \quad \forall\ \alpha \in \Delta_m, \forall\ \beta \in \Delta_n.$$

Si $k = 1$ ce concept correspond au point-selle dans les jeux monocritères.
Il est à noter que dans les jeux monocritères, le point-selle est équivalent aux $\max\min$ et $\min\max$, cependant pour les jeux multicritères, la généralisation de ces derniers concepts donnent des résultats différents [60].

4.2.2 Équilibre meilleures réponses (MR)

Pour déterminer l'ensemble des équilibres Pareto efficaces, une définition équivalente de cet équilibre a été proposée par le moyen des stratégie meilleures réponses. C'est une notion qui a été introduite par Nash [58] pour montrer l'existence de l'équilibre qui porte son nom dans un jeu monocritère non coopératif et qui a été généralisée aux cas des jeux multicritères.

Définition 4.2. [42](***Stratégie meilleure réponse***)

– Une stratégie $\alpha^* \in \Delta_m$ est dite meilleure réponse (SMR) du joueur I contre la stratégie $\beta \in \Delta_n$ du joueur II, si pour tout $\alpha \in \Delta_m$

$$E(\alpha, \beta) \geqq E(\alpha^*, \beta) \Longrightarrow E(\alpha, \beta) = E(\alpha^*, \beta).$$

– Une stratégie $\beta^* \in \Delta_n$ est dite meilleure réponse du joueur II contre la stratégie $\alpha \in \Delta_m$ du joueur I, si pour tout $\beta \in \Delta_n$

$$E(\alpha, \beta) \leqq E(\alpha, \beta^*) \Longrightarrow E(\alpha, \beta) = E(\alpha, \beta^*).$$

Notons par $\Delta_{mr}(\beta) = \{\alpha \in \Delta_m : \alpha \text{ est SMR } \text{ à } \beta\}$ l'ensemble des stratégies meilleures réponses du joueur I contre la stratégie β du joueur II, et par $\Delta_{mr}(\alpha) = \{\beta \in \Delta_n : \beta \text{ est SMR } \text{ à } \alpha\}$ l'ensemble des stratégies meilleures réponses du joueur II contre la stratégie α du joueur I.

Définition 4.3. [42](***Équilibre meilleure réponse***)
Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un équilibre meilleure réponse si

$$\beta^* \in \Delta_{mr}(\alpha^*) \text{ et } \alpha^* \in \Delta_{mr}(\beta^*) \tag{4.5}$$

Remarque 4.1. Cette définition est équivalente à la Définition 4.1 du point-selle de Shapley.

Pour illustrer les différentes définitions, on développe l'Exemple 4.1 proposé par Ghose *et al*, où le joueur ligne est maximiseur et le joueur colonne est minimiseur.

Exemple 4.1. Considérons le jeu matriciel suivant

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^t$ (resp. $\beta = (\beta_1, \beta_2)^t$) les stratégies mixtes du joueur 1 (resp. du joueur 2).
on aura

$$E(\alpha, \beta) = \alpha^t A \beta = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 - \beta_1 + 3\alpha_1\beta_1 \\ -3\alpha_1\beta_1 + 2\beta_1 + \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\arg\min_{\beta_1} \alpha^t E^1 \beta = \arg\min_{\beta_1} \ \beta_1(3\alpha_1 - 1) - 2\alpha_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_1 < \frac{1}{3} \\ 0, & \text{si } \alpha_1 > \frac{1}{3} \\ [0,\, 1], & \text{si } \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\arg\min_{\beta_1} \alpha^t E^2 \beta = \arg\min_{\beta_1} \ \beta_1(2 - 3\alpha_1) + \alpha_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_1 > \frac{2}{3} \\ 0, & \text{si } \alpha_1 < \frac{2}{3} \\ [0,\, 1], & \text{si } \alpha_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc, le joueur II (joueur colonne),

· choisira certainement la première stratégie (i.e. $\beta = e_1 = (1,0)$), si celle-ci minimisera les deux critères. En d'autres termes $\beta = e_1$ si $\alpha_1 < \frac{1}{3}$ et $\alpha_1 > \frac{2}{3}$ (ce qui est impossible),

· choisira certainement la deuxième stratégie (i.e. $\beta = e_2 = (0,1)$) si celle-ci minimisera les deux critères. En d'autres termes $\beta = e_2$ si $\frac{1}{3} < \alpha_1 < \frac{2}{3}$,

· il sera indifférent si l'une et l'autre ne minimisera qu'un seul critère,ou, $\beta_1 \in [0,1]$ si $\alpha_1 < \frac{1}{3}$ ou $\alpha_1 > \frac{2}{3}$.

De sa part, le joueur I

· choisira certainement sa première stratégie, si celle-ci lui maximisera les deux critères, ou, $\alpha = e_1 = (1,0)$ si $\frac{1}{3} < \beta_1 < \frac{2}{3}$,

· choisira certainement sa deuxième stratégie, si celle-ci lui maximisera les deux critères, ou, $\alpha = e_2 = (0,1)$ si $\frac{2}{3} < \beta_1$ et $\beta_1 < \frac{1}{3}$, (ce qui est impossible),

· il sera indifférent entre les deux si chacune ne maximisera qu'un seul critère, ou, $\alpha_1 \in [0,1]$ si $\beta_1 < \frac{1}{3}$ ou $\beta_1 > \frac{2}{3}$.

On a donc la correspondance de meilleures réponses MR_1 du joueur I qui prendra l'expression suivante

$$MR_1(\beta) = \begin{cases} e_2, & \text{si } \dfrac{1}{3} \leq \beta_1 \leq \dfrac{2}{3} \\ \Delta_2 = [0,1] \times [0,1], & \text{si } \beta_1 < \dfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \beta_1 > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

et celle du joueur II

$$MR_2(\alpha) = \begin{cases} e_2, & \text{si } \dfrac{1}{3} \leq \alpha_1 \leq \dfrac{2}{3} \\ \Delta_2 = [0,1] \times [0,1], & \text{si } \alpha_1 < \dfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

L'intersection des graphes des deux correspondances représente l'ensemble des équilibres (points selles) efficaces, donné par l'ensemble E représenté par la partie hachurée sur la figure 4.1.

$$\begin{aligned} E = & \left\{ (\alpha,\beta), 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{3},\ \alpha_2 = 1-\alpha_1,\ 0 \leq \beta_1 \leq \frac{1}{3},\ \beta_2 = 1-\beta_1 \right\} \\ & \cup \left\{ (\alpha,\beta),\ 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{3},\ \alpha_2 = 1-\alpha_1,\ \frac{2}{3} < \beta_1 \leq 1,\ \beta_2 = 1-\beta_1 \right\} \\ & \cup \left\{ (\alpha,\beta),\ \frac{2}{3} < \alpha_1 \leq 1,\ \alpha_2 = 1-\alpha_1,\ 0 \leq \beta_1 \leq \frac{1}{3},\ \beta_2 = 1-\beta_1 \right\} \\ & \cup \left\{ (\alpha,\beta),\ \frac{2}{3} < \alpha_1 \leq 1,\ \alpha_2 = 1-\alpha_1,\ \frac{2}{3} < \beta_1 \leq 1,\ \beta_2 = 1-\beta_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\cup \left\{ (\alpha, \beta),\ \frac{1}{3} \leq \alpha_1 \leq \frac{2}{3},\ \alpha_2 = 1 - \alpha_1, \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1 \right\}$$
$$\cup \left\{ (\alpha, \beta),\ \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1,\ \frac{1}{3} \leq \beta_1 \leq \frac{2}{3},\ \beta_2 = 1 - \beta_1 \right\}$$

Vérifions par exemple que tout $(\alpha^*, \beta^*) \in ([0, \frac{1}{3}[\times[\frac{2}{3}, 1]) \times ([0, \frac{1}{3}[\times[\frac{2}{3}, 1])$ est un équilibre

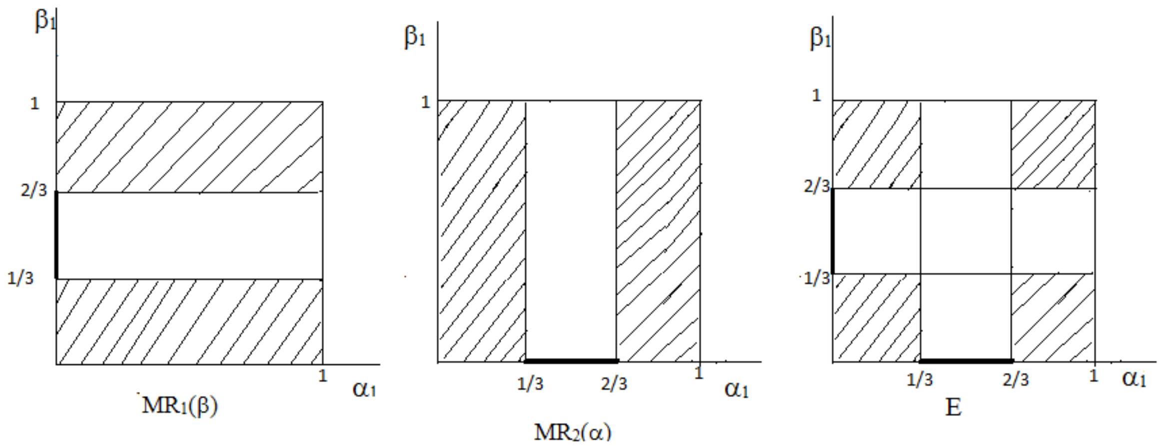

FIGURE 4.1 –

efficace.
On a $\alpha^* = (\alpha_1^*, 1 - \alpha_1^*)$ avec $\alpha_1^* \in [0, \frac{1}{3}[$ et $\beta^* = (\beta_1^*, 1 - \beta_1^*)$ avec $\beta_1^* \in [0, \frac{1}{3}[$.
Soit $\alpha = (\alpha_1, 1 - \alpha_1)$ avec $\alpha_1 \in]0, \frac{1}{3}[$.
Si $\alpha_1 < \alpha_1^*$ et du fait que $0 < \beta_1 < \frac{1}{3}$, on obtient

$$(3\beta_1^* - 2)\alpha_1 > (3\beta_1^* - 2)\alpha_1^*, \tag{4.6}$$
$$\alpha_1(1 - 3\beta_1^*) < \alpha_1^*(1 - 3\beta_1^*). \tag{4.7}$$

Par conséquent

$$E^1(\alpha_1, \beta_1^*) > E^1(\alpha_1^*, \beta_1^*), \tag{4.8}$$
$$E^2(\alpha_1, \beta_1^*) < E^2(\alpha_1^*, \beta_1^*). \tag{4.9}$$

Ainsi donc, en choisissant α_1, le joueur 1 améliore son gain sur le critère E^1 et le détériore sur son critère E^2.

Si $\alpha_1 < \alpha_1^*$, on obtient :

$$E^1(\alpha_1, \beta_1^*) < E^1(\alpha_1^*, \beta_1^*), \tag{4.10}$$

$$E^2(\alpha_1, \beta_1^*) > E^2(\alpha_1^*, \beta_1^*). \tag{4.11}$$

D'où, α_1 ainsi choisi améliore E^2 mais détériore E^1.
On peut donc écrire

$$E(\alpha^*, \beta^*) \nleq (\alpha, \beta^*), \quad \forall\ \alpha \in]0, \frac{1}{3}[. \tag{4.12}$$

On vérifie également que pour tout $\beta \in]0, \frac{1}{3}[$ on a

$$E(\alpha^*, \beta^*) \ngeq (\alpha^*, \beta).$$

Par conséquent, on déduit que (α^*, β^*) est bien un équilibre efficace.
De la même manière, on vérifie pour les autres points de l'ensemble E.

4.2.3 Stratégies de sécurité Pareto optimales

Contrairement aux jeux monocritères, l'équilibre efficace dans un jeu multicritère ne possède pas la propriété de sécurité. Pour cette raison, Ghose et Prasad [42] ont introduit le concept de stratégies de sécurité Pareto optimales qui ne constitue évidemment pas un équilibre.
Pour toute stratégie $\alpha \in \Delta_m$ du joueur I et $\beta \in \Delta_n$ du joueur II, il existe un niveau de sécurité en chacun de leurs critères $E^j,\ j = \overline{1,k}$ qu'on notera

$$\underline{v}_k(\alpha) = \min_{\beta \in \Delta_n} E^k(\alpha, \beta) \quad k = \overline{1,p} \tag{4.13}$$

$$\overline{v}_k(\beta) = \max_{\alpha \in \Delta_m} E^k(\alpha, \beta) \quad k = \overline{1,p} \tag{4.14}$$

On obtient donc le vecteur des niveaux de sécurité des joueurs relativement à une stratégie

$$\underline{v}(\alpha) = (\underline{v}_1(\alpha), \underline{v}_2(\alpha) ..., \underline{v}_p(\alpha)) \tag{4.15}$$

$$\overline{v}(\beta) = (\overline{v}_1(\beta), \overline{v}_2(\beta), ..., \overline{v}_p(\beta)) \tag{4.16}$$

Les relations s'écrivent sous forme d'un problème de programmation linéaire de la manière suivante

$$\underline{v}_k(\alpha) = \min_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_{ij}^k \quad k = \overline{1,p} \tag{4.17}$$

$$\overline{v}_k(\beta) = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} \beta_j A_{ij}^k \quad k = \overline{1,p} \tag{4.18}$$

Définition 4.4. (**Stratégies de sécurité Pareto optimales (SSPO)**)

– Une stratégie $\alpha^* \in \Delta_m$ est dite stratégie de sécurité Pareto optimale (SSPO) pour le joueur I, si pour tout $\alpha \in \Delta_m$

$$\underline{v}(\alpha) \geqq \underline{v}(\alpha^*) \Longrightarrow \underline{v}(\alpha) = \underline{v}(\alpha^*).$$

– Une stratégie $\beta^* \in \Delta_n$ est dite stratégie de sécurité Pareto optimale (SSPO) pour le joueur II, si pour tout $\beta \in \Delta_n$

$$\overline{v}(\beta) \leqq \overline{v}(\beta^*) \Longrightarrow \overline{v}(\beta) = \overline{v}(\beta^*).$$

L'ensemble des stratégies de sécurité Pareto optimales pour le joueur I sera noté par

$$\Delta_m^{sp} = \{\alpha \in \Delta_m : \alpha \text{ est une SSPO } \}$$

et pour le joueur II par

$$\Delta_n^{sp} = \{\beta \in \Delta_n : \beta \text{ est une SSPO } \}.$$

Remarque 4.2. Si $k = 1$ les stratégies définies ci-dessus coincident avec les stratégies de sécurité pour un jeu monocritère.

Lemme 4.1. [42] Pour tout $\alpha \in \Delta_m^{sp},\ \beta \in \Delta_n^{sp}$ on a $\underline{v}(\alpha) \leqq \overline{v}(\beta)$.

Exemple 4.2. L'ensemble des stratégies de sécurité Pareto optimales du joueur II dans l'Exemple 4.1 est donné par

$$\Delta_m^{sp} = \{\alpha \in \Delta_m : \frac{1}{3} \leq \alpha_1 \leq \frac{2}{3}, \alpha_2 = 1 - \alpha_1\}.$$

Détermination de stratégies de sécurité Pareto optimales

La détermination des stratégies de sécurité Pareto optimales a été le centre d'intérêt de beaucoup de chercheurs, on cite par exemple Fernandez *et al.* [39] qui ont transformé le problème à la résolution d'un problème d'optimisation linéaire multicritère.
Ils considèrent le problème de programmation linéaire multicritère pour le joueur I.

$$(PPLM) \qquad \begin{array}{lrcl} & \max & v_1, ..., v_p & \\ \text{t.q} & (v_k, ..., v_k) & \leq & \alpha A^k, \quad k = 1, ..., p \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i & = & 1 \\ & \alpha_i & \geq & 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Théorème 4.1. [39] Une stratégie $\alpha^* \in \Delta_m$ est une stratégie de sécurité Pareto optimale pour le joueur I et $v^* = (v_1^*, ..., v_p^*)$ son niveau de sécurité, si et ssi (v^*, α^*) est une solution Pareto efficace pour le problème d'optimisation multicritère (PPLM).

Pour déterminer toutes les stratégies de sécurité Pareto optimales pour le joueur I, il suffit de trouver les solutions Pareto efficaces extrêmes pour le problème (PPLM) en utilisant par exemple le programme ADBASE [77] basé sur l'algorithme du simplex pour un problème de programmation multicritère linéaire.

Une autre méthode pour déterminer les stratégies de sécurité Pareto efficaces est la scalarisation. Ceci se fait en affectant des poids aux différents critères des joueurs qui peuvent être interprétés comme l'importance accordée aux critères par les joueurs.
La première scalarisation considérée dans [39] est en fait la scalarisation du problème (PPLM) précédent, ce qui donne le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{llcl}
(P(\lambda)) & \max \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k v_k, & & \\
\text{t.q} & (v_k, ..., v_k) & \leq & \alpha A^k, \quad k = 1, ..., p \\
& \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i & = & 1 \\
& \alpha & \geq & 0 \\
& \lambda \in \Delta_p & = & \{\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p) \in \mathbb{R}^p : \delta_k \geq 0, k = 1, \ldots, p \ et \ \sum\limits_{k=1}^{p} \delta_k = 1\}.
\end{array}$$

Théorème 4.2. [39] Une stratégie $\alpha^* \in \Delta_m$ est une stratégie de sécurité Pareto efficace pour le joueur I et v^* est le niveau de sécurité qui lui correspond si et seulement s'il existe $\lambda \in int\Delta_p$ tels que (α^*, v^*) est une solution optimale pour le problème $(P(\lambda))$.

Une autre manière de scalarisation donnée par Ghose et Prasad [42, 39] est de considérer pour le joueur I le jeu monocritère

$$J(\lambda) = \langle \Delta_m, (\Delta_n)^p, E(\alpha, \beta, \lambda) \rangle$$

et le joueur II choisit p différentes stratégies $(\beta^1, ..., \beta^p)^t$ dans Δ_n et la fonction de gain est donnée par

$$E(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \alpha^t A^k \beta, \qquad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in int\Delta_p. \tag{4.19}$$

Théorème 4.3. [39] Une stratégie $\alpha^* \in \Delta_m$ est une stratégie de sécurité Pareto efficace pour le joueur I, si et seulement s'il existe $\lambda \in int\Delta_p$ tel que α^* est une solution $\max\min$ pour $J(\lambda)$.

Le lecteur pourra également consulter les références [42, 84] qui traitent le même problème.

4.2.4 Équilibre Pareto efficace avec niveau de sécurité

On sait que dans un jeu matriciel monocritère, un point-selle coincide avec $\min\max$ et $\max\min$ et l'équilibre de Nash, contrairement à un jeu multicritère où ces trois concepts sont complètement différents. De ce fait, on peut donc également définir une solution qui est à la fois un équilibre Pareto efficace et garantit la notion de stratégies de sécurité et un point-selle idéal.

Définition 4.5. [42] Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in X_{sp} \times Y_{sp}$ est un équilibre avec niveau de sécurité si (α^*, β^*) satisfait la relation (4.5).

4.2.5 Point-selle proprement efficace

Pour le cas d'un jeu matriciel multicritère en stratégies mixtes, la Définition 3.3 prend la forme suivante :

Définition 4.6. Une paire de stratégies mixtes $(\alpha^*,\ \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un point-selle proprement efficace du jeu multicritère matriciel (4.3), si

1. $(\alpha^*,\ \beta^*)$ est un point-selle efficace du jeu (4.3) ;
2. il existe une constante $M_1 > 0$ telle que :
   – pour toute stratégie $\alpha \in \Delta_m$ et pour tout $k \in K = \{1, \ldots, p\}$ tel que :
   $$E^k(\alpha, \beta^*) > E^k(\alpha^*,\ \beta^*), \tag{4.20}$$
   on a $\dfrac{E^k(\alpha, \beta^*) - E^k(\alpha^*,\ \beta^*)}{E^l(\alpha^*, \beta^*) - E^l(\alpha, \beta^*)} \leq M_1$ pour un certain $l \in K$ (qui existe du fait que $(\alpha^*,\ \beta^*)$ est un point-selle efficace) tel que
   $$E^l(\alpha^*, \beta^*) > E^l(\alpha, \beta^*); \tag{4.21}$$
3. il existe une constante $M_2 > 0$ telle que :

– pour toute stratégie $\beta \in \Delta_n$ pour tout $k \in K$ satisfaisant

$$E^k(\alpha^*, \beta^*) > E^k(\alpha^*, \beta), \tag{4.22}$$

on a $\dfrac{E^k(\alpha^*, \beta^*) - E^k(\alpha^*,\ \beta)}{E^l(\alpha^*, \beta) - E^l(\alpha^*, \beta^*)} \leq M_2$ pour un certain $l \in K$ tel que

$$E^l(\alpha^*, \beta) > E^l(\alpha^*, \beta^*). \tag{4.23}$$

En posant $B = -A$ dans le jeu bimatriciel (3.40) du Chapitre 3, tous les résultats obtenus pour l'équilibre de Nash proprement efficace restent vérifiés pour le point-selle proprement efficace. Dans le souci d'éviter une répétition, on omet donc volontairement de reprendre l'étude de cet équilibre.

4.2.6 Point-selle idéal

Définition 4.7. [42, 60] Une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ est un point-selle idéal pour le jeu (4.3) si

$$\underline{v}(\alpha^*) = \overline{v}(\beta^*)$$

où $\underline{v}(\alpha^*)$ et $\overline{v}(\beta^*)$ sont définis par les relations (4.15) et (4.16).

Théorème 4.4. [42] S'il existe une paire de stratégies $(\alpha^*, \beta^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ qui est un point-selle idéal, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E(\alpha, \beta^*) \leqq E(\alpha^*, \beta^*) \leqq E(\alpha^*, \beta),\ \forall\ \alpha \in \Delta_m,\ \forall\ \beta \in \Delta_n$;

(ii) (α^*, β^*) est un point-selle pour les jeux matriciels monocritères donnés par les matrices A^k, $k = 1, ..., p$;

(iii) $\alpha^* \in \Delta_{sp}$, $\beta \in \Delta_{sp}$ et $\underline{v}(\alpha^*) = \overline{v}(\beta^*)$.

Le Théorème 4.4 est équivalent au Corollaire 3.1 dans [39].

Pour les conditions d'existence, du fait que les ensembles des stratégies mixtes sont convexes et compacts alors du Théorème 3.10 nous déduisons les conditions suffisantes suivantes

Corollaire 4.1. Si pour tout $\beta \in \Delta_n$ l'espérence des gains $\alpha \longrightarrow E(\alpha,\ \beta)$ est $\mathbb{R}^p_+$-quasi-concave-like sur Δ_m et pour tout $\alpha \in \Delta_m$, $\beta \longrightarrow E(\alpha,\ \beta)$ est $\mathbb{R}^p_+$-quasi-convexe-like sur Δ_n alors le jeu (4.3) admet un point-selle idéal.

4.3 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux jeux multicritères finis à deux personnes à somme nulle. Après avoir présenté les différents concepts de solutions étudiés dans la littérature, nous avons étudié les conditions suffisantes d'existence d'un équilibre proprement efficace qui s'est avéré équivalent à l'équilibre efficace en stratégies mixtes dû à la linéarité de la fonction espérance de gains. En considérant le point selle idéal comme cas particulier d'un équilibre idéal dans le cas général, nous en avons déduit également des conditions suffisantes de son existence.

5

Jeux multicritères avec contraintes

Dans tout travail scientifique, la parole est
toujours, pour commencer, à l'intuition ;
le raisonnement rigoureux qui s'élabore
ensuite n'est autre chose que
l'intuition contrôlée.

Jacques Hadamard

5.1 Introduction

Les jeux avec contraintes est une classe de jeux qui modélisent des situations où le choix des joueurs ne peut être fait d'une manière indépendante. Un simple exemple donné par K. Border [14] pour justifier la définition de cette classe de jeux est celui d'une exploitation commune par plusieurs producteurs d'un champ de pétrole. Chaque producteur choisit une quantité x_i à explorer et vendre par la suite, le prix dépend de la quantité totale mise sur le marché. Ainsi, chaque producteur a un contrôle partiel sur les prix et donc sur leurs profits. Mais la quantité x_i ne peut être choisie d'une manière indépendante, car la somme des quantités ne peut dépasser les besoins du marché.

Cette classe de jeux, appelée aussi méta-jeux, jeux généralisés ou encore "abstract economy" a été introduite par Debreu [25] en 1952. Il définit l'équilibre social qui est une généralisation de l'équilibre de Nash pour ces jeux et étudia son existence. Depuis, plusieurs études ne cessent d'apparaître. Certaines considèrent les jeux généralisés ou abstract economy, où les préférences des joueurs sont représentées par des correspondances. Dans ce cas, on utilise les théorèmes d'existence du point fixe ou d'élément maximal d'une correspondance pour étudier l'existence d'équilibre, voir par exemple [14, 15, 25, 30, 71, 80]. D'autres traitent ces situations de jeux en représentant les préférences des joueurs simplement avec leurs fonctions gains ou fonctions pertes voir [6]. Dans ce cas, on utilise l'appellation jeux avec contraintes ou méta-jeux, qu'on peut ramener à un jeu généralisé en définissant les correspondances des contraintes moyennant les fonctions gains (ou pertes).

Avec l'apparition des jeux avec vecteurs de paiements, on a également introduit l'aspect multicritère aux jeux avec contraintes. Ding [29] fut le premier à généraliser l'équilibre Pareto efficace pour un jeu multicritère avec contraintes. Par la suite, d'autres travaux ont suivi dont [48, 29, 30, 32, 91].

Dans ce chapitre, nous exposerons en premier lieu quelques résultats de base pour cette classe de jeux. Par la suite, nous proposons d'étendre le concept d'équilibre idéal pour les jeux multicritères avec contraintes et d'étudier son existence.

5.2 Notations

Un jeu multicitère avec contraintes sous forme normale sera noté par

$$G = \langle I, X_i, C_i, f_i \rangle \tag{5.1}$$

où $I = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble des joueurs, et pour tout joueur $i \in I$, X_i est l'ensemble de ses stratégies pures, $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{ir(i)}) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{r(i)}$ sa fonction multicritère avec $r(i)$ critères et $r(i) \in \mathbb{N}^*$, $r(i) > 1$, $C_i : X_{-i} \longrightarrow 2^{X_i}$ sa correspondance des contraintes qui restreint les strategies du joueur i au sous ensemble $C_i(x_{-i}) \subset X_i$ lorsque le reste des joueurs choisissent leurs stratégies dans X_{-i}. On notera $C : X \longrightarrow 2^X$ la correspondance définie par $C(x) = \prod\limits_{i \in I} C_i(x_{-i})$ pour tout $x \in X$

Si pour tout $i \in I$ et tout $x_{-i} \in X_{-i}$, $C_i(x_{-i}) = X_i$, alors le jeu multicritère avec contraintes (5.1) se réduit à un jeu multicritère habituel étudié au chapitre précédent. Si pour tout joueur $i \in I$, la fonction objectif f_i est scalaire *i.e.* $r(i) = 1$, alors le jeu multicritère avec contraintes se réduit au jeu avec contraintes dit aussi méta-jeu étudié par Aubin [6] et Ding [27].

5.3 Concepts d'équilibres

5.3.1 Équilibre social efficace

Comme pour les autres classes de jeux multicritères que nous avons déjà traités, les jeux multicritères avec contraintes ne feront pas l'exception, l'équilibre efficace et faiblement efficace sont les premiers concepts de solutions introduits et les plus étudiés. Ding [29] fut le premier à les introduire. Il a étudié leur existence dans un H-espace [1] en démontrant en premier lieu l'existence d'un équilibre social pondéré dans le jeu scalarisé moyennant des vecteurs poids que nous rappellerons ci-après.

Définition 5.1. [29] Une multistratégie $\bar{x} \in X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est dite équilibre social efficace (resp. faiblement efficace) pour le jeu multicritère avec contraintes (5.1), si :

a) pour tout $i \in I$, $\bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$; et

b) il n'existe pas de stratégie $y_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$ telle que $f_i(y_i,\ \bar{x}_{-i}) \geq f_i(\bar{x})$ $\big($resp. $f_i(y_i,\ \bar{x}_{-i}) > f_i(\bar{x})\big)$.

Dans le but d'étudier l'existence d'un équilibre social efficace pour un jeu multicritère avec contraintes, Ding [29] a introduit la définition d'un équilibre pondéré.

Définition 5.2. Une multistratégie $x^* \in X$ est dite équilibre social pondéré par rapport au vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ pour le jeu multicritère avec contraintes (5.1), si pour tout joueur $i \in I$, on a

(i) $x_i^* \in C_i(x_{-i}^*)$;

(ii) $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^{r(i)} \setminus \{0\}$;

(iii) $\sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x^*) \geqq \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x_i, x_{-i}^*)$, pour tout $x_i \in C_i(x_{-i}^*)$.

En particulier, si $\lambda_i \in \Delta_{r(i)}$ pour tout $i \in I$ alors $x^* \in X$ est dit équilibre social normalisé.

Remarque 5.1. Nous avons préféré utiliser dans la Définition 5.1 la terminologie "équilibre social faiblement efficace" pour, d'une part, avoir une cohérence avec la terminologie utilisée dans le reste de cette thèse. D'autre part, le terme "équilibre social" est celui utilisé dans le livre de Jean Pierre Aubin [6], ainsi que par Debreu dans son papier [25].
Dans [29], Ding a utilisé le terme d'équilibre de Nash pondéré.

1. $(X, \{\Gamma_A\})$ est un H-espace si X est un espace topologique et $\{\Gamma_A\}_{A \in 2^X}$ est une famille de sous-ensembles contractiles de 2^X vérifiant $\Gamma_A \subset \Gamma_{A'}$ pour $A \subset A'$.
Tout espace vectoriel topologique est ses sous-ensembles convexes sont des H-espaces en posant $\Gamma_A = co(A)$

Lemme 5.1. [29] Tout équilibre social normalisé $x^* \in X$ par rapport au vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \prod_{i \in I} \Delta_{r(i)}$ (resp. $\lambda \in \prod_{i \in I} int\Delta_{r(i)}$) pour le jeu multicritère (5.1) est un équilibre social faiblement efficace (resp. efficace) pour le jeu (5.1).

Ding a établi des conditions suffisantes d'existence de l'équilibre social faiblement efficace dans un jeu multicritère avec contraintes, dont les ensembles de stratégies sont des sous-ensembles d'un H-espace. Dans ce document, nous donnerons un théorème d'existence établi par Ansari [3] dans un espace vectoriel topologique.

Théorème 5.1. [3] Supposons que pour tout $i \in I$, X_i est un sous-ensemble non vide convexe fermé d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff localement convexe, et supposons qu'il existe un vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n),\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+^{r(i)} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $i \in I$:

1. la correspondance C_i est à valeurs non vides et convexes ;
2. pour tout $y_i \in X_i$, $C_i^{-1}(y_i)$ est compactement ouvert dans X_{-i} ;
3. l'ensemble $D = \{x \in X : x \in C(x)\}$ est compactement fermé [2] dans X ;
4. la fonction $(x, y) \in X \times X \longmapsto \sum_{i \in I} \langle \lambda_i, f_i(y_i, x_{-i}) \rangle$ est conjointement semi-continue inférieurement sur tout sous-ensemble compact de $X \times X$;
5. pour tout $y \in X$, la fonction $y \longmapsto \sum_{i \in I} \langle \lambda_i, f_i(y_i, x_{-i}) \rangle$ est quasi-concave sur X.

Alors le jeu (5.1) admet un équilibre social faiblement efficace. Si, de plus, pour tout $i \in I, \lambda_i \in int\Delta_{r(i)}$, alors le jeu (5.1) admet un équilibre social efficace.

D'autres résultats sont obtenus sous des hypothèses affaiblies que ce soit sur les espaces, ou sur les fonctions des gains ou encore sur les ensembles des stratégies. Par exemple, dans [91], Yu a obtenu des résultats d'existence d'un équilibre social faiblement efficace avec la méthode de scalarisation en affaiblissant les conditions de continuité et de convexité des fonctions gains des joueurs. Ding [30, 31, 32] a étudié l'existence de cet équilibre dans des espaces non linéaires en utilisant différentes formes de convexité généralisé.

5.3.2 Équilibre social idéal

Notre but dans ce paragraphe est d'étendre aux jeux multicritères avec contraintes, le concept d'équilibre de Nash idéal introduit dans le Chapitre 4 pour les jeux multicritères sans contraintes. Nous donnerons quelques propriétés et étudierons son existence.

Considérons le jeu multicitère avec contraintes sous sa forme normale (5.1).

2. Un sous-ensemble D d'un espace topologique E est dit compactement fermé (resp. compactement ouvert) si pour tout sous-ensemble compact K de E, on a $D \cap K$ est fermé (resp. ouvert) dans E.

Définition 5.3. Une multistratégie $\bar{x} \in X$ est dite équilibre social idéal pour le jeu (5.1), si pour tout $i \in I$, on a :

1. $\bar{x}_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$ et
2. $f_i(\bar{x}) \geqq f_i(y_i,\ \bar{x}_{-i}) \qquad \forall\ y_i \in C_i(\bar{x}_{-i})$.

On notera par $X^{IS}(G)$ l'ensemble des équilibres sociaux idéaux du jeu (5.1).

Remarque 5.2. Si les fonctions des gains des joueurs sont monocritères alors l'équilibre social idéal coincide avec l'équilibre social pour un jeu monocritère avec contraintes.

Remarque 5.3. Il est clair que tout équilibre social idéal est efficace, et tout équilibre social efficace est faiblement efficace.

Caractérisation de l'équilibre social idéal

Nous suivrons la même démarche que dans la Section 3.2.3 pour caractériser l'équilibre social idéal.

Remarque 5.4. Sans perte de généralités et pour des commodités techniques, on considérera les correspondances des contraintes $\tilde{C}_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$ définies par $\tilde{C}_i(x) = C_i(x_{-i})$ au lieu de $C_i : X_{-i} \longrightarrow 2^{X_i}$.

Soit le vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ \lambda_i \in \Delta_{r(i)},\ i = 1, \ldots, n$ et

$$G_\lambda = \langle I,\ (X_i)_{i\in I}, (C_i)_{i\in I}\ (g_i)_{i\in I}\rangle \tag{5.2}$$

le jeu pondéré associé au jeu multicritère (5.1), où chaque joueur a le même ensemble de stratégies que dans G et $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{r(i)} \lambda_{ik} f_{ik}(x) = \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle, \qquad \lambda_i \in \Delta_{r(i)}.$$

En considérant les joueurs comme étant des organisations, où chacune comprend $r(i)$ membres qui cherchent à optimiser leurs fonctions des gains simultanément, on définit : $\psi_i : X_{-i} \longrightarrow \mathbb{R}^{r(i)}$, telle que : $\psi_i(x_{-i}) = (\psi_{i1}(x_{-i}), \ldots, \psi_{ir(i)}(x_{-i}))$ et

$$\psi_{ik}(x_{-i}) = \max_{y_i \in C_i(x_{-i})} f_{ik}(y_i,\ x_{-i}),\ \forall\ k = 1, \ldots, r(i),\ \forall\ i \in I.$$

Sans changements majeurs par rapport à [85], on peut démontrer le théorème suivant qui nous donne une caractérisation de l'équilibre social idéal.

Théorème 5.2. Soit (G) le jeu multicritère (5.1). Une multistratégie $x \in X$ et Λ une collection de vecteurs poids représentative pour (G).
Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $x \in X^{IS}(G)$

b) $\forall i \in I,\ f_i(x) = \psi_i(x_{-i})$ et $x_i \in \tilde{C}_i(x_{-i})$

c) $x \in \bigcap_{\lambda \in \prod\limits_{i \in I} \Delta_{r(i)}} X^S(G_\lambda)$

d) $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X^S(G_\lambda)$,

où $X^{IS}(G)$ est l'ensemble des équilibres sociaux idéaux du jeu (G) et $X^S(G_\lambda)$ est l'ensemble des équilibres sociaux du jeu scalarisé (G_λ)

Existence de l'équilibre social idéal

Considérons les correspondances $A_i : X \to 2^{X_i},\ i = 1, \ldots, n$ définies par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i,\ \exists \lambda \in \Lambda : \langle \lambda_i,\ f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i}) \rangle\ < 0\}. \tag{5.3}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 5.1. Une multistratégie $\bar{x} \in X$ est un équilibre social idéal pour le jeu (G) si et ssi

$$\begin{cases} \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}) \quad \forall i \in I, \text{et} \,; \\ C_i(\bar{x}) \cap A_i(\bar{x}) = \emptyset, \quad \forall i \in I. \end{cases}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\bar{x} \in X^{IS}(G) \quad & \overset{\text{Théorème 5.2}}{\Longleftrightarrow} \quad \bar{x} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X^S(G_\lambda) \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall \lambda \in \Lambda,\ \bar{x} \in X^S(G_\lambda) \\
& \overset{\text{Définition 5.2}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \lambda \in \Lambda, \forall\ i \in I\ \bar{x}_i \in C_i(\bar{x}) \text{ et} \\
& \qquad\quad \langle \lambda_i,\ f_i(\bar{x}) \rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ \bar{x}_{-i}) \rangle \geqq 0 \quad \forall\ y_i \in C_i(\bar{x}) \\
& \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I,\ \bar{x}_i \in C_i(\bar{x})\ et :\ \ C_i(\bar{x}) \cap A_i(\bar{x}) = \phi,
\end{aligned}$$

Pour établir les conditions d'existence de l'équilibre social idéal, nous utiliserons le Théorème 1.14 sur l'existence d'un équilibre dans une économie abstraite dû à Shafer et Sonnenschein [71].

Théorème 5.3. Soit (G) le jeu multicritère (5.1). Supposons que pour tout $i \in I$:

1. X_i est un sous-ensemble non vide convexe et compact de $\mathbb{R}^{l_i}$;
2. la correspondance des contraintes C_i est continue sur X_{-i} ;
3. pour tout $x \in X$, $C_i(x_{-i})$ est un sous-ensemble convexe et compacte de X_i ;
4. la fonction des gains f_i est continue sur X ;
5. la fonction $y_i \in X_i \longmapsto f_i(y_i,\ x_{-i})$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-concave-like.

Alors, le jeu multicritère avec contraintes (5.1) admet un équilibre social idéal.

Preuve. Soit $\overline{Gr}(A_i) = \{(x, y_i) \in X \times X_i : \forall\lambda \in \Lambda, \langle \lambda_i, f_i(x) - f_i(y_i, x_{-i})\rangle \geqq 0\}$ le complémentaire du graphe $Gr(A_i)$ de la correspondance A_i et soit $(x^n, y_i^n) \in \overline{Gr}(A_i)$ une suite d'éléments convergeant vers (x^0, y_i^0). Alors $\forall\lambda \in \Lambda, \langle \lambda_i, f_i(x^n) - f_i(y_i^n, x_{-i}^n)\rangle \geqq 0$ par la continuité de la fonction f_i on aura $\forall\lambda \in \Lambda, \langle \lambda_i, f_i(x^0) - f_i(y_i^0, x_{-i}^0)\rangle \geqq 0$, donc $(x^0, y_i^0) \in \overline{Gr}(A_i)$. D'où la fermeture de $\overline{Gr}(A_i)$ dans $X \times X_i$ et donc l'ouverture du graphe $Gr(A_i)$ de A_i.

Pour tout $x \in X$ et $i \in I$, $A_i(x)$ est convexe. En effet, soit $y_i^1,\ y_i^2 \in A_i(x)$, alors il existe $\lambda^1,\ \lambda^2 \in \Lambda$ tels que

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_i^1,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i^1,\ f_i(y_i^1,\ x_{-i})\rangle &< 0;\\
\langle \lambda_i^2,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i^2,\ f_i(y_i^2,\ x_{-i})\rangle &< 0.
\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in [0,\ 1]$. De l'hypothèses 5, $(-f)$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-convexe-like, donc soit

$$-f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i}) = -f_i(y_i^1,\ x_{-i}) - \beta^1, \quad \beta^1 \in \mathbb{R}_+^{r(i)},$$

ou $$-f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i}) = -f_i(y_i^2,\ x_{-i}) - \beta^2, \quad \beta^2 \in \mathbb{R}_+^{r(i)}.$$

Il s'ensuit que, soit

$$\langle \lambda_i^1,\ f_i(x) - f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i})\rangle = \langle \lambda_i^1, f_i(x) - f_i(y_i^1,\ x_{-i})\rangle - \langle \lambda_i^1,\ \beta^1\rangle < 0$$

ou

$$\langle \lambda_i^2,\ f_i(x) - f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i})\rangle = \langle \lambda_i^2,\ f_i(x) - f_i(y_i^2,\ x_{-i})\rangle - \langle \lambda_i^2,\ \beta^2\rangle < 0$$

ce qui implique dans les deux cas

$$\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2 \in A_i(x),$$

d'où $A_i(x)$ est convexe dans X_i.

Par définition de A_i on a $x_i \notin A_i(x)$.
En vertu du Théorème 1.14, il existe $\bar{x} \in X$ tel que pour tout $i \in I$, $\bar{x}_i \in \tilde{C}_i(\bar{x})$ et $\tilde{C}_i(\bar{x}) \cap A_i(\bar{x}) = \emptyset$, et d'après la Proposition 5.1, $\bar{x}$ est un équilibre social idéal pour le jeu multicritère avec contraintes (5.1).

Exemple 5.1. Considérons le jeu bi-critères à deux personnes donné par

$$G = \langle I,\ (X_i)_{i\in I}, (C)_{i\in I},\ (f_i)_{i\in I}\rangle, \tag{5.4}$$

où
$I = \{1,\ 2\},\ r(1) = r(2) = 2,\quad X_1 = [-1,\ 1],\ X_2 = [0,\ 1]$ et pour $x = (x_1,\ x_2)$ on considère les mêmes fonctions que dans l'Exemple 3.4 :
$f_1(x) = (f_{11}(x),\ f_{12}(x)) = (-x_1^2 + x_2^2,\ x_2 \cos \frac{\pi}{2} x_1)$;
$f_2(x) = (f_{21}(x), f_{22}(x))$ où

$$\begin{array}{rcl} f_{21}(x_1, x_2) & = & \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1^2 x_2, & \text{si } x_2 \in [0, \frac{1}{2}]; \\ -2(x_2-1)x_1^2, & \text{si } x_2 \in [\frac{1}{2},\ 1] \end{array} \right. \\ f_{22}(x_1, x_2) & = & (x_1 + 1) \sin \pi x_2 \end{array}$$

Considérons les correspondances des contraintes :

$$\begin{array}{rcl} C_1(x_2) & = & \{x_1 \in X_1 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \\ C_2(x_1) & = & \{x_2 \in X_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}. \end{array}$$

Pour tout $i \in I$, X_i est convexe et compact, f_i est continue sur X.
D'après l'Exemple 3.4, pour tout $i \in I$, la fonction $y_i \longmapsto f_i(y_i,\ x_{-i})$ est $\mathbb{R}^2_+$-quasi-concave-like sur X_i pour tout $x \in X$.

D'un autre coté, C_1 et C_2 sont à valeurs non vides convexes et compactes à graphe fermé. D'après la Remarque 1.1, elles sont semi-continues supérieurement.
Vérifions que C_1 est semi continue inférieurement.
Soit V un sous-ensemble ouvert de $[-1, 1]$, montrons que

$$C_1^{-1}(V) = \{x_2 \in [0, 1] : C_1(x_2) \cap V \neq \emptyset\}$$

est ouvert dans $[0, 1]$.
V peut s'écrire sous forme $[-1, b[$, $]a, b[$ ou $]a, 1]$ où $a, b \in]-1, 1[$
i) Si $V = [-1, b[$ alors $C_1^{-1}(V) = \Big\{x_2 \in [0, 1] :\ [-\sqrt{1 - x_2^2},\ \sqrt{1 - x_2^2}] \cap [-1, b[\neq \emptyset\Big\}$.

- si $b < 0$ alors $[-\sqrt{1-x_2^2},\ \sqrt{1-x_2^2}] \cap [-1, b[\neq \emptyset$ si $b > -\sqrt{1-x_2^2}$ donc $x_2 < \sqrt{1-b^2}$ d'où $C_1^{-1}([-1, b[) =]0,\ \sqrt{1-b^2}]$ ouvert dans $[0, 1]$,
- si $b > 0$ alors $C_1^{-1}([-1, b[) = [0, 1]$ ouvert dans $[0, 1]$,
- si $b = 0$ alors $C_1^{-1}([-1, b[) = [0, 1[$ ouvert dans $[0, 1]$.

ii) Si $V =]a, b[$ alors on distingue aussi trois cas :
- si $b \leq 0$ alors $[-\sqrt{1-x_2^2},\ \sqrt{1-x_2^2}] \cap]a, b[\neq \emptyset$ si $b > -\sqrt{1-x_2^2}$ donc $x_2 < \sqrt{1-b^2}$ d'où $C_1^{-1}(]a, b[) = [0, \sqrt{1-b^2}[$ ouvert dans $[0, 1]$
- si $b > 0$ et $a < 0$ alors $\forall\ x_2 \in [0,\ 1]$, $[-\sqrt{1-x_2^2},\ \sqrt{1-x_2^2}] \cap]a, b[\neq \emptyset$. D'où $C_1^{-1}(]a, b[) = [0, 1]$ ouvert dans $[0, 1]$,
- si $a \geq 0$ alors $[-\sqrt{1-x_2^2},\ \sqrt{1-x_2^2}] \cap]a, b[\neq \emptyset$ si $a < \sqrt{1-x_2^2}$ ce qui donne $C_1^{-1}([a, b[) = [0, \sqrt{1-a^2}[$ ouvert dans $[0, 1]$.

iii) Si $V =]a, 1]$ alors on distingue deux cas
- pour $a < 0$, $C_1^{-1}(]a, 1]) = [0, 1]$ ouvert dans $[0, 1]$,
- pour $a \geq 0$, $C_1^{-1}(]a, 1]) = [0, \sqrt{1-a^2}[$ ouvert dans $[0, 1]$.

Vérifions que C_2 est semi-continue inférieurement.
Soit V un sous-ensemble ouvert de $X_2 = [0, 1]$, V est donc sous forme : $[0, b[$, $]a, b[$ ou $]a, 1]$.
On a $C_2^{-1}(V) = \{x_1 \in [-1, 1] :\ C_2(x_1) \cap V \neq \emptyset\}$ et comme
$C_2(x_1) = \{x_2 \in [0, 1] :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} = [0, \sqrt{1-x_1^2}]$ alors
$C_2^{-1}(V) = \{x_1 \in [-1, 1] :\ [0, \sqrt{1-x_1^2}] \cap V \neq \emptyset\}$. Ainsi donc

i) pour $V = [0, b[$, $C_2^{-1}(V) = [-1,\ 1]$ ouvert dans [-1, 1],

ii) pour $V =]a, b[$, $[0, \sqrt{1-x_1^2}] \cap V \neq \emptyset$ si $x_1^2 < 1 - a^2$,
donc $C_2^{-1}(V) =]-\sqrt{1-a^2},\ \sqrt{1-a^2}[$ ouvert dans [-1, 1],

iii) pour $V =]a, 1]$, $[0, \sqrt{1-x_1^2}] \cap V \neq \emptyset$ si $a < \sqrt{1-x_1^2}$, donc
$C_2^{-1}(V) =]-\sqrt{1-a^2},\ \sqrt{1-a^2}[$ ouvert dans [-1, 1],

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème 5.3 sont vérifiées, d'où l'existence d'un équilibre idéal pour le jeu considéré (5.4).

Pour la recherche de l'équilibre en question, on suivra les étapes de la preuve du Théorème 5.3.

Soit $\Lambda = \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}$, une collection représentative et soit $\bar{x}$ l'équilibre recherché, alors $\bar{x}$ est un élément maximal de la famille de correspondances définies par (5.3). Pour tout

$i \in \{1,2\},\ A_i(\bar{x}) \cap C_i(\bar{x}_{-i}) = \phi$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall\, \lambda \in \Lambda,\ \langle \lambda_1,\ f_1(\bar{x})\rangle - \langle \lambda_1,\ f_1(y_1,\ \bar{x}_2)\rangle\ \geqq 0,\ \ \forall\, y_1 \in C_1(\bar{x}_2), \\ \forall\, \lambda \in \Lambda,\ \langle \lambda_2,\ f_2(\bar{x})\rangle - \langle \lambda_2,\ f_2(\bar{x}_1,\ y_2)\rangle\ \geqq 0,\ \ \forall\, y_2 \in C_2(\bar{x}_1). \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle e_1,\ f_1(\bar{x})\rangle - \langle e_1,\ f_1(y_1,\ \bar{x}_2)\rangle\ \geqq 0,\ \ \forall\, y_1 \in [-\sqrt{1-\bar{x}_2^2}, \sqrt{1-\bar{x}_2^2}], \\ \langle e_2,\ f_1(\bar{x})\rangle - \langle e_2,\ f_1(y_1,\ \bar{x}_2)\rangle\ \geqq 0,\ \ \forall\, y_1 \in [-\sqrt{1-\bar{x}_2^2}, \sqrt{1-\bar{x}_2^2}], \\ \langle e_1,\ f_2(\bar{x})\rangle - \langle e_1,\ f_2(\bar{x}_1,\ y_2)\rangle\ \geqq 0,\ \ \forall\, y_2 \in [0, \sqrt{1-\bar{x}_1^2}], \\ \langle e_2,\ f_2(\bar{x})\rangle - \langle e_2,\ f_2(\bar{x}_1,\ y_2)\rangle\ \geqq 0,\ \ \forall\, y_2 \in [0, \sqrt{1-\bar{x}_1^2}]). \end{array} \right.$$

Les mêmes calculs que dans l'Exemple 3.4 donnent $\bar{x} = (0, \dfrac{1}{2})$ comme équilibre social idéal pour ce jeu.

Dans le cas où les ensembles des stratégies sont non compacts, on obtient le théorème d'existence suivant

Théorème 5.4. Supposons que pour tout $i \in I$

1. X_i est un sous ensemble non vide convexe d'un espace vectoriel topologique ;
2. pour tout $x \in X$, $\tilde{C}_i(x)$ est non vide et convexe ;
3. pour tout $y_i \in X_i$, $\tilde{C}_i^{-1}(y_i)$ est compactement ouvert dans X ;
4. la fonction f_i est continue sur X;
5. pour tout $x \in X$, la fonction $y_i \in X_i \longmapsto f_i(y_i,\ x_{-i})$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-concave-like ;
6. l'ensemble $D_i = \{x \in X : x_i \in \tilde{C}_i(x)\}$ est compactement fermé dans X ;
7. il existe un sous-ensemble non vide et compact K de X, il existe un sous-ensemble convexe et compact B_i de X_i tels que pour tout $x \in X \setminus K$, il existe $i \in I$ et $y_i \in B_i$ tels que, si $x \in D_i$ alors $y_i \in \tilde{C}_(x) \cap A_i(x)$; si $x \notin D_i$, alors $y_i \in \tilde{C}_i(x)$.

Alors il existe $x^* \in X$ tel que $x_i^* \in \tilde{C}_i(x^*)$ et $\tilde{C}_i(x^*) \cap A_i(x^*) = \emptyset$.

Preuve. Montrons que les correspondances $\tilde{C}_i$ et A_i vérifient les hypothèses du Théorème 1.15.

On a
$$A_i^{-1}(y_i) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{x \in X : \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i})\rangle\ < 0\}$$
qui est réunion d'images réciproques d'ouverts $(-\infty,\ 0)$ par la fonction continue $x \mapsto \langle \lambda_i,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i,\ f_i(y_i,\ x_{-i})\rangle$ et donc ouvert.

- Pour tout $x \in X$ et $i \in I$, $A_i(x)$ est convexe. En effet,

  soit $y_i^1,\ y_i^2 \in A_i(x)$. Alors, il existe $\lambda^1,\ \lambda^2 \in \Lambda$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^1,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i^1,\ f_i(y_i^1,\ x_{-i})\rangle &< 0; \\ \langle \lambda_i^2,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i^2,\ f_i(y_i^2,\ x_{-i})\rangle &< 0. \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in [0,\ 1]$. De l'hypothèse , f_i est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-concave-like sur X_i, donc $(-f)$ est $\mathbb{R}_+^{r(i)}$-quasi-convex-like, on a alors soit

$$-f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i}) = -f_i(y_i^1,\ x_{-i}) - \beta^1, \quad \beta^1 \in \mathbb{R}_+^{r(i)},$$

soit

$$-f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i}) = -f_i(y_i^2,\ x_{-i}) - \beta^2, \quad \beta^2 \in \mathbb{R}_+^{r(i)}.$$

Il s'ensuit que soit

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^1,\ f_i(x) - f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i})\rangle &= \\ \langle \lambda_i^1,\ f_i(x) - f_i(y_i^1,\ x_{-i})\rangle - \langle \lambda_i^1,\ \beta^1\rangle &< 0 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^2,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i^2,\ f_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2,\ x_{-i})\rangle &= \\ \langle \lambda_i^2,\ f_i(x)\rangle - \langle \lambda_i^2,\ f_i(y_i^2,\ x_{-i})\rangle - \langle \lambda_i^2,\ \beta^2\rangle &< 0 \end{aligned}$$

ce qui implique dans les deux cas

$$\alpha y_i^1 + (1-\alpha)y_i^2 \in A_i(x),$$

d'où $A_i(x)$ est convexe sur X_i.

Et d'après la définition de A_i on a $x_i \notin A_i(x)$.

Toutes les conditions du Théorème 1.15 sont vérifiées, il existe donc $\bar{x} \in X$ tel que pour tout $i \in I$, $\bar{x}_i \in \tilde{C}_i(\bar{x})$ et $\tilde{C}_i(\bar{x}) \cap A_i(\bar{x}) = \emptyset$ qui est, d'après la Proposition 5.1, un équilibre social idéal pour le jeu multicritère avec contraintes (5.1).

Si pour tout x_{-i}, $\tilde{C}_i(x_{-i}) = X_i$, on retrouve le Théorème 3.10 qui donne les conditions d'existence d'un équilibre de Nash idéal pour un jeu multicritère sans contraintes.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté les résultats de la littérature sur l'équilibre social efficace et les conditions de son existence, nous avons étendu la définition de l'équilibre idéal pour cette classe de jeux. Son existence se ramène à l'existence d'un équilibre pour une économie abstraite.

Conclusion

Ce que nous faisons, peut-être, est peu, mais possède un
certain caractère de permanence ; et avoir produit la
moindre chose d'un minuscule intérêt permanent,
que ce soit un recueil de vers ou un théorème
de géométrie, c'est avoir fait quelque chose
qui dépasse tout à fait les capacités
de la grande majorité.

Hardy

Dans cette thèse, l'intérêt est essentiellement porté sur la classe des jeux non coopératifs multicritères. Nous avons étudié les conditions d'existence de certains concepts d'équilibres pour différentes classes de ces jeux, notamment les jeux à somme non à nulle, les jeux à somme nulle et les jeux avec contraintes. L'approche utilisée est l'élément maximal d'une famille de correspondances. Ce qui nous a mené à présenter dans le premier chapitre des notions générales sur les fonctions multivoques, leur continuité, les points fixes, l'élément maximal et toutes les notions nécessaires à notre travail.
Comme la théorie des jeux multicritères est une confluence entre d'une part, la théorie des jeux classiques et d'autre part, l'optimisation multicritère, nous avons rappelé dans le deuxième chapitre les concepts de solutions d'un problème multicritère ainsi que les concepts d'équilibres étudiés en théorie des jeux stratégiques non coopératifs.

Le chapitre trois est consacré à la classe des jeux multicritères à somme non nulle. Après avoir rappelé les concepts d'équilibres étudiés dans la littérature, à savoir l'équilibre efficace et l'équilibre faiblement efficace, qui sont obtenus à base de l'équilibre de Nash connu pour un jeu noncoopératif monocritère et les notions d'optimalité forte et faible de Pareto. En utilisant la notion de solution proprement efficace pour un problème multicritère et l'équilibre de Nash, nous avons obtenu l'équilibre proprement efficace pour un jeu multicritère. Nous avons étudié certaines de ses propriétés et nous avons établi des conditions suffisantes de son existence. Par la suite, nous nous somme intéressés à un autre concept d'équilibre qui est l'équilibre idéal pour lequel nous avons également étudié son existence.

Dans le chapitre quatre, nous avons abordé les jeux multicritères à somme nulle, c'est la classe de jeux qui est la première étudiée que ce soit en monocritère ou en multicritère. Nous avons d'abord mis l'accent sur les différents équilibres étudiés dans la littérature, ensuite nous avons introduit le point selle proprement efficace. Nous avons montré qu'il coincide avec le point selle efficace en stratégies mixtes, étant donné que les fonctions de gains mixtes sont linéaires.

Le dernier chapitre est consacré aux jeux multicritères avec contraintes. Cette classe de jeux traite le cas où les ensembles des choix des joueurs sont restreints par des contraintes. Nous avons exposé en premier lieu l'essentiel des travaux effectués, ensuite nous nous sommes intéressés à l'équilibre idéal. Nous avons établi les conditions de son existence avec et sans l'hypothèse de compacité.

Les moyens utilisés dans notre étude, sont des résultats de l'analyse non linéaire, notamment des théorèmes d'existence d'élément maximal pour une famille de correspondances et des résultats concernant les différents concepts d'optimalité pour un problème multicritère. Notre choix pour l'élément maximal se justifie par le fait que, outre qu'il formalise d'une manière simple le concept d'équilibre, il nous permet de garder l'aspect multicritère du jeu.

Bibliographie

[1] J.C.R. Alcantud. Characterization of the existence of maximal elements of acyclic relations. *Economic Theory*, 19 :407–416, 2002.

[2] F. Aleskerov and B. Monjardet. *Utility Maximization, Choice and Preference.* Springer-Verlag, 2002.

[3] Q. H. Ansari and Z. Khan. On Existenxe of Pareto Equilibria for Constrained Multiobjective Games. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 27 :973–982, 2004.

[4] Q. H. Ansari, S. Schaible, and J. C. Yao. The system of generalized vector equilibrium problems with applications. *Journal of Global Optimization*, 22 :3–16, 2002.

[5] K.J. Arrow and G. Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22 :265–290, 1954.

[6] J. P. Aubin. *Mathematical Methods of Game Theory and Economic.* North-Holand, Amesterdam, 1982.

[7] J. P. Aubin and A. Celina. *Differential inclusions.* Springer, Heidelberg, 1984.

[8] J. P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser, Boston, 1990.

[9] S. Barka. Notions de stratégies et de gains garantis dans les jeux multicritères. mémoire de magister. Technical report, Univ. M. Mammeri.

[10] C. Berge. *Topological Spaces including a treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity.* Oliver & Boyd, Edinburgh/London, 1963.

[11] T. C. Bergstrom. Maximal elements of acyclic relations on compact sets. *J. Econ. Theog*, 10 :403–404, 1975.

[12] T. C. Bergstrom, R. Parks, and T. Rader. Preferences which have open graph. *Journal of Mathematical Economics*, 3 :265–268, 1976.

[13] D. Blackwell. An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, 1956.

[14] K. Border. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory.* Cambridge university press, 1999.

[15] A. Borglin and H. Keiding. Existence of Equilibrium Actions and of Equilibrium, A Note on the 'New' Existence Theorem. *Jour. Math. Econ*, 3 :313–316, 1976.

[16] P. E. Borm, S. H. Tijs, and J. Van Den Aarssen. Pareto Equilibrium in Multiobjective Games. *Methods of Operations Research*, 60 :303–312, 1990.

[17] P. E. Borm, D. Vermeulen, and M. Voorneveld. The structure of the set of equilibria for two person multicriteria games. *European Journal of Operational Research*, 148 :480–493, 2003.

[18] L.E.J. Brouwer. Uber abbildung von mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 71 :97–115, 1912.

[19] F.E. Browder. The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces. *Math. Ann.*, 177 :283–301, 1968.

[20] D.J. Brown. Acyclic choice. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, Discussion Paper N° 360, 1973.

[21] D.E. Campbell and M. Walker. Maximal elements of weakly continuous relations. *J. Econom. Theory*, 50 :449–464, 1990.

[22] S.-Y. Chang. Maximal elements in noncompact spaces with application to equilibria. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(2) :535–541, 2003.

[23] H. W. Corley. Games with Vector Payoffs. *Optim. Theo. Appl*, 47(4) :491–498, 1985.

[24] A. A. Cournot. *Researchs in Mathematical Principles of the Theory of Wealth (translated from French : original 1838).* Macmillan, New York, 1897.

[25] G. Debreu. A Social Equilibrium Existence Theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38 :886–893, 1952.

[26] P. Deguire, K. K. Tan, and G. X. Z. Yuan. The Study of Maximal Elements, Fixed Points for L_s-Majorized Mappings and their Applications to Minimax and Variational Inequalites in Product Topological Spaces. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 37 :933–951, 1999.

[27] X. P. Ding. Quasi-Variationel Inequalities and Social Equilibrium. *Applied Mathematics and Mechanic*, 12 :639–646, 1991.

[28] X. P. Ding. Pareto equilibria of multicriteria games without compactness, continuity and concavity. *Applied Mathematics and Mechanic*, 17 :847–854, 1996.

[29] X. P. Ding. Existence of Pareto Equilibria for Constrained Multiobjective Games in H-Spaces. *Comp. Math. Appl*, 39 :125–134, 2000.

[30] X. P. Ding. Weak Pareto Equilibria for Generalized Constrained Multiobjective Games in Locally FC-Spaces. *Nonlinear Analysis*, 65 :538–545, 2006.

[31] X. P. Ding and J. C. Yao. Maximal element theorems with applications to generalized games and systems of generalized vector quasi-equilibrium problems in g-convex spaces. *journal of optimization theory and applications*, 126(3) :571–588, 2005.

[32] X.P. Ding, J. Y. Park, and I. H. Jung. Pareto Equilibria for Constrained Multiobjective Games in L-Convex Spaces. *Comp. Math. Appl*, 46 :1589–1599, 2003.

[33] Irena Dominik. Some Fixed Points Theorems for Multivalued Maps. *Tatra Mountains, Mathematical Publications*, 35 :65–69, 2007.

[34] N. Eber. *Théorie des jeux*. Dunod, Paris, 2e edition, 2007.

[35] K. Fahem and M.S. Radjef. Properly efficient nash equilibrium in multicriteria noncooperative games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 82(2) :175–193, October 2015.

[36] Ky Fan. Minimax theorems. *Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A.*, 39 :4247, 1953.

[37] Ky Fan. A generalization of tychonoff's fixed point theorem. *Math Annalen*, 142 :305–310, 1961.

[38] F. R. Fernandez, M. A. Hinojosa, and J. Puerto. Core solutions in vector-valued games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 112(2) :331–360, 2002.

[39] F. R. Fernandez and J. Puerto. Vector Linear Programming in Zero-Sum Multicriteria Matrix Games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89(1) :115–127, April 1986.

[40] A. M. Geoffrion. Propper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22 :618–630, 1968.

[41] D. Ghose and U. R. Prasad. Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 69(3) :543–553, 1991.

[42] D. Ghose and U.R. Prasad. Solution Concepts in Two Person Multicriteria Games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 63 :167–189, 1989.

[43] R-H. He. Fixed points and existence theorems of maximal elements with applications in FC-spaces. *ISRN Applied Mathematics*, 2011 :1–12, 2011.

[44] R-H. He and Y. Zhang. Some maximal elements' theorems in FC-space. *Journal of Inequalities and Applications*, 2009 :1–12, 2009.

[45] H. Isermann. Propper efficiency and the linear vector maximum problem. *Operrational Research*, 22 :189–191, 1974.

[46] H. Jicheng and H. Wei. An existence theorem for maximal elements and its applications. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 22(2) :235–244, 2007.

[47] S. Kakutani. A generalization of brouwer's fixed point theorem. *Duke Math Journal*, 8 :457–459, 1941.

[48] M.A. Khan and R. Vobra. Equilibrium in abstract economies without ordered preferences and with a measure of agents. *Journal of Mathematical Economics*, 13 :133–142, 1984.

[49] T. Krieger. On pareto equilibria in vector valued extensive form games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 58 :449–458, 2003.

[50] Kuhn. *Extensive Games and the Problem of Information. In Contributions of the Theory of Games.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 1953.

[51] H. Kuhn and A. Tucker. Nonlinear programming. In J. Neyman, editor, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492, Berkeley, California, 1951. University of California Press.

[52] H. W. Kuhn. Extensive Games. *PNAS*, 36 :570–576, 1950.

[53] L.W. McKenzie. On equilibrium in graham's model of world trade and other competitive systems. *Econometrica*, 22 :147–161, 1954.

[54] D. Monderer and LS. Shapley. Potantial games. *Games and Economic Behavior*, 14 :124–143, 1996.

[55] A. De Morgan. On the symbol of logics. *Transactions of The Cambridge Philosophical Society*, 9 :78–127, 1864.

[56] H. Moulin. *Théorie des Jeux pour l'Economie et la Politique.* Hermann, Paris, 1981.

[57] S. Nasar. *A beutiful Mind.* Simon & schuster, 1998. (Traduction française, Olivier Desmond : Un homme d'exception, Calmann-Lévy, 2001).

[58] J. F. Nash. Equilibrium Point in n-Person Games. *PNAS*, 36 :48–49, 1950.

[59] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 1944 (2nd edition1947).

[60] J. W. Nieuwenhuis. Some Minimax Theorems in Vector-Valued Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 40(3) :463–475, 1983.

[61] I. Nishizaki and T. Notsu. Nondomionated equilibrium solutions of a multiobjective two-person nonzero-sum game in extensive form and the corresponding mathematical programming problem. In *MCDM 2006*, Chania, Greece, June 19-23, 2006.

[62] M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A Course in Game Theory.* The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02142, 1994.

[63] C.S Peirce. On the algebra of logic. *American Journal of Mathematics*, 3 :15–57, 1880.

[64] J.E. Peris and B. Subiza. Maximal elements of not necessarily acyclic relations. *Economics Letters*, 44 :385–388, 1994.

[65] G. Pieri and L. Pusillo. Interval values for multicriteria cooperative games. *AUCO Czech Economic Review*, 4 :189–200, 2010.

[66] V. V. Podinovski and V. D. Noghin. *Pareto-optimal Solutions of Multicriteria Problems.* Naouka, Moscou, 1982.

[67] M. S. Radjef. *Décisions Optimales dans les Problèmes Multicritères avec une Indétermination.* Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes, Université de Béjaia, 1995.

[68] M. S. Radjef and K. Fahem. A Note on Ideal Nash Equilibrium in Multicriteria Games. *Applied Mathematics Letters*, 2 :1105–1111, 2008.

[69] A. Sen. *Collective Choice and Social Welfare.* Holden Day, San Francisco, 1970.

[70] W. Shafer. The nontransitive consumer. *Econometrica*, 42 :913–919, 1974.

[71] W. Shafer and H. Sonnenschein. Equilibrium in Abstract Economies Without Ordered Preferences. *Journal of Mathematical Economics*, 2 :345–348, 1975.

[72] L. S. Shapley. Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs. *Naval Research Logistics Quaterly*, 6 :57–61, 1959.

[73] Y. Shiraishi and D. Kuroiwa. Existence of pareto equilibria for multiobjective games without compactness. *Mem. Gra. Sci. Eng. Shimane Univ*, 46 :15–21, 2013.

[74] L. H. Shu. The existence of pareto equilibrium for multiobjective games in general topological spaces. In *2008 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, volume 2, pages 776–780. IEEE Conference Publications, 2008.

[75] M. Shubik. *Théorie des Jeux et Sciences Sociales.* Massachussetts Institute of Technology, 1982 (Economica 1991 pour la traduction française).

[76] H. Sonnenschein. *Demand Theory Without Transitive Preference with Applications to the Theory of Competitive Equilibrium*, chapter 10 in Preferences, Utility and Demand. New York, Harcourt Brace Jovanovich, 1971.

[77] R. E. Steuer. *Multiple-Criteria Optimization : Theory, Computation, and Application.* New York, New York, 1986.

[78] T. Tanaka. Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorem for vector-valued functions. *J. Optimization Theory and Applications*, 81 :355–377, 1994.

[79] T. Tanino. Multiobjective cooperative games with restrictions on coalitions. In *7th Int. Conf. on Multi-Objective Programming and Goal Programming*, June 12-14, 2006.

[80] G. Tian. Equilibrium in abstract economies with a non-compact infinite dimensional strategy space, an infinite number of agents and without ordered preferences. *Economics Letters*, 33 :203–206, 1990.

[81] G. Tian. Necessary and sufficient conditions for maximization of a class of preference relations. *Review of Economic Studies*, 60 :949–958, 1993.

[82] S. Toussaint. On the existence of equilibria in economics with infinitely many commodities. *Journal of Economic Theory*, 33 :98–115., 1984.

[83] H. Vartiainen and H. Salonen. On the existence of undominated elements of acyclic relations. *Mathematical Social Sciences*, 60 :217–221, 2010.

[84] M. Voorneveld. Pareto-optimal Security Strategies as Minimax Strategies of a Standard Matrix Game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102 :203–210, 1999.

[85] M. Voorneveld, S. Grahn, and M. Dufwenberg. Ideal equilibria in non coopeartive multicriteria games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 52 :65–77, 2000.

[86] M. Walker. On the existence of maximal elements. *J. Econ. Theory*, 16 :470–474, 1977.

[87] L. Walrass. *Éléments d'Économie Politique Pure ; ou, Théorie de la Richesse Sociale.* L. Corbaz, Lausanne, 1874.

[88] S. Y. Wang. Existence of a Pareto Equilibrium. *Journal of Optimization Theory and Application*, 79 :373–384, 1993.

[89] X. Wu. New Existence Theorems for Maximal Elements in Noncompact H-space with Applications to Equilibrium of Games. *Computers and Mathematics with Applications*, 40 :1097–1106, 2000.

[90] N.C. Yannelis and N. D. Prabhakar. Existence of Maximal Elements and Equilibria in Linear Topological Spaces. *Journal of Mathematical Economics*, 12 :233–245, 1983.

[91] H. Yu. Weak Pareto Equilibria for Multiobjective Constrained Games. *Applied Mathematics Letters*, 16 :773–776, 2003.

[92] J. Yu and G. X. Z. Yuan. The Study of Equilibria for Multiobjective Games by Fixed Point and Ky Fan Minimax Inequality Methods. *Computers Math. Applic.*, 35(9) :17–24, 1998.

[93] X. Z. Yuan and E. Tarafdar. Noncompact Pareto Equilibria for Multiobjective Games. *J. Math. Anal Appl*, 204 :156–163, 1996.

[94] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications : Fixed-Points Theorems.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[95] X. Zhou, Y. Song, Q. Zhang, and X. Gao. Multiobjective matrix game with vague payoffs. *Fuzzy Information and Engineering*, 40 :543–550, 2007.

[96] V. I. Zhukovskii and M. E. Salukvadze. *The Vector-Valued Maxmin.* Academic Press, INC, 1994.