

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

OPTION: METHODES ET MODELES DE DECISIONS

Présenté par

M^r D.SIMOHAMMED et M^r A.HOUARI

Dirigé par

M^{me} Rabia

Sujet:

**Application de la méthode de bisection au
problème du risque minimal multi-objectifs**

Devant le jury d'examen composé de :

M ^r AOUANE Mohouhand	Maître assistante A	UMMTO	Président
M ^{me} RABIA Fatima	Maître de conférence A	UMMTO	Rapporteur
M ^r KASDI Kamal	Maître assistante A	UMMTO	Examineur

Soutenu le : 06 /10 /2014

Remerciements

Nous remercions, avant tout, Dieu pour nous avoir donné la force de mener ce travail à terme.

Nous tenons également à remercier nos parents pour leurs encouragements.

Nos remerciements vont aussi à Madame RABIA qui a dirigé notre mémoire.

Enfin, nous remercions les membres du jury d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail à:

- Nos parents
- Nos frères et soeurs
- Nos ami(e)s.

Ahcene et Djamal

Contents

1	Eléments de la théorie des probabilités	8
1.1	Introduction	8
1.2	Concepts de base	8
1.2.1	Expérience aléatoire	8
1.2.2	Ensemble des possibles	8
1.2.3	Tribu ou σ -algèbre	8
1.2.4	Espace probabilisable	9
1.2.5	Mesure de probabilité	9
1.2.6	Indépendance	9
1.2.7	Variable aléatoire	9
1.2.8	Fonction de répartition	10
1.2.9	Fonction de masse	10
1.2.10	Densité de probabilité	10
1.2.11	Espérance mathématique, variance	11
1.3	Lois de probabilités discrètes	13
1.3.1	Loi de Bernoulli	13
1.3.2	Loi Binomiale	13
1.3.3	Loi de Poisson	14
1.4	Les principales lois continues	14
1.4.1	Loi uniforme	14
1.4.2	Loi normale	14
1.4.3	Loi exponentielle	15
1.5	Théorème de la limite centrale (T.C.L)	15
1.6	Inégalité de Tchebychev	16
2	Etat de l'art de l'optimisation stochastique	17
2.1	Introduction	17
2.2	Transformation en problème déterministe	17
2.2.1	Cas des objectifs stochastiques	18

2.2.2	Cas des contraintes stochastiques	22
2.3	Conclusion	29
3	Etat de l'art de l'optimisation linéaire multi-objectifs	30
3.1	Introduction	30
3.2	Dominance et efficacité	31
3.3	Autres définitions utiles	31
3.3.1	Point idéal	31
3.3.2	Matrice des gains	32
3.3.3	Point nadir ou anti-idéal	32
3.3.4	Les poids	32
3.3.5	Point de référence	32
3.3.6	Taux de substitution marginal	32
3.4	Méthodes de résolution	33
3.4.1	Méthodes scalaires	33
3.4.2	Méthodes non scalaires	34
3.4.3	Méthodes heuristiques	36
3.4.4	Méthodes interactives	37
3.5	Conclusion	39
4	Etat de l'art de l'optimisation linéaire multi-objectifs stochastique	41
4.1	Introduction	41
4.2	Approche multicritère	42
4.3	Approche stochastique	44
4.3.1	Somme pondérée	45
4.4	Comparaison des deux approches	45
4.4.1	Critère espérance	45
4.4.2	Critère variance	46
4.4.3	Critère de risque minimal	46
4.4.4	Critère de type Kataoka	47
4.5	Méthodes de résolution	48
4.5.1	Méthodes interactives	48
4.5.2	Exemple numérique :	55
4.6	Conclusion	57
5	Problème du risque minimal multi-objectifs	58
5.1	Etude du problème de risque minimal multi-objectifs	58

5.2	Caractérisation des solutions efficaces	59
5.3	Construction de la relaxation	61
5.4	Méthode de résolution	62
5.5	Exemple d'application	63
Bibliographie		67

Introduction générale

La programmation linéaire multi-objectifs stochastique constitue le meilleur outil pour traiter des problèmes de prise de décision dans un environnement incertain et en cas de conflit. La résolution d'un problème de programmation linéaire multi-objectifs stochastique dépend en grande partie de la nature de l'information disponible au sujet des paramètres aléatoires de ce problème. Les méthodes développées jusqu'à ce jour constituent des généralisations des méthodes utilisées dans le cadre déterministe.

De façon générale, on cherche à se ramener à un problème déterministe mono-critère équivalent. On peut distinguer deux approches permettant cette transformation du problème initial, l'approche stochastique et l'approche multicritère. La première vise à transformer le problème multi-objectifs stochastique de départ en un problème mono-objectif stochastique qui est traité par la programmation stochastique vue au chapitre 2 (à savoir l'application des critères espérance, espérance-variance, risque minimal et Kataoka pour les fonctions objectives ainsi que les concepts de seuils de probabilité sur les contraintes ou de recours dans le cas de contraintes stochastiques). L'autre approche consiste à transformer le problème multi-objectifs stochastique en un problème multi-objectifs déterministe qui est à son tour résolu par l'une des méthodes exposées dans le chapitre 3.

Dans ce mémoire nous ferons une synthèse sur la transformation des problèmes stochastiques en problèmes déterministes. Nous exposerons les deux approches, puis nous nous intéresserons particulièrement à la résolution du problème de risque minimal multi-objectifs.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres

Quelques notions de base de la théorie des probabilités sont données dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre traite les diverses techniques utilisées en programmation linéaire stochastique. Ce chapitre est fondamental pour la compréhension des divers sujets de la programmation linéaire stochastique multi-objectifs.

Un état de l'art de la programmation linéaire multi-objectifs est donné au troisième chapitre. Nous y avons exposé le principe de dominance et efficacité ainsi que les principales méthodes interactives permettant de résoudre des problèmes linéaires multi-objectifs déterministes.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse des deux conceptions de la programmation linéaire stochastique multi-objectifs qualifiées d'approche multicritère et d'approche stochastique. Ces deux approches consistent en la généralisation des formulations classiques des problèmes multi-objectifs déterministes au cas stochastique.

Enfin, le dernier chapitre comporte notre modeste contribution concernant l'adaptation de la méthode de bisection à la résolution du problème du risque minimal multi-objectifs. Un programme MATLAB a été élaboré. Notons, par ailleurs, que cette méthode peut s'appliquer au problème de portefeuille avec des scénarios multiples. Ce dernier problème est un cas particulier du problème de risque minimal.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et les principales références bibliographiques.

Chapter 1

Eléments de la théorie des probabilités

1.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à un bref rappel de quelques notions de probabilités que nous utiliserons dans les chapitres à venir de ce mémoire. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter Leujeune [22].

1.2 Concepts de base

1.2.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une épreuve dont l'issue dépend du hasard. En principe, on admet que cette expérience peut être répétée indéfiniment dans des conditions identiques. Son résultat peut donc varier d'une réalisation à une autre, de plus, il est impossible de le prévoir à l'avance.

1.2.2 Ensemble des possibles

On appelle ensemble des évènements possibles (ou ensembles des possibles, ou univers des possibles), l'espace de toutes les réalisations possibles d'une expérience. Nous notons cet espace par Ω . Un élément de Ω est un *évènement*.

1.2.3 Tribu ou σ -algèbre

On appelle tribu ou σ -algèbre d'évènements sur Ω , toute famille que l'on notera par \mathcal{F} telle que:

1. $\Omega \in \mathbf{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$ (où \bar{A} complémentaire de A).
3. Si $A_i \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

1.2.4 Espace probabilisable

On appelle espace probabilisable, le couple (Ω, \mathcal{F}) où Ω est l'ensemble des évènements possibles et \mathcal{F} une σ -algèbre.

1.2.5 Mesure de probabilité

Soit (Ω, \mathbf{F}) un espace probabilisable. On appelle mesure de probabilité toute application $P : \mathbf{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que:

1. $P(A) \geq 0. \quad \forall A \in \mathcal{F}$
2. si $(A_n) \in \mathcal{F}$ est une suite de parties 2 à 2 disjointes alors $P(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} P(A_n)$.

L'espace (Ω, \mathcal{F}, P) est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

1.2.6 Indépendance

Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

1.2.7 Variable aléatoire

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et (Ω', \mathcal{F}') un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire une application mesurable X définie sur (Ω, \mathcal{F}) à valeur dans (Ω', \mathcal{F}') telle que: $\forall A' \in \mathcal{F}', \quad X^{-1}(A') \in \mathcal{F}$
où $X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$

Une variable aléatoire X est dite continue si $X(\Omega)$ est un intervalle de \mathbb{R} . Elle est dite discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou infini dénombrable.

1.2.8 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue. On appelle fonction de répartition de X , la fonction F_X définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(]-\infty, x]) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$$

On la note par:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Proposition 1.1 *La fonction F_X est une fonction croissante et continue et on a:*

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
3. $0 \leq F_x(x) \leq 1.$

1.2.9 Fonction de masse

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de masse la probabilité $P(X = x)$

1.2.10 Densité de probabilité

Soit f une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . f est dite densité de probabilité (fonction de densité) si elle vérifie les propriétés suivantes:

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$
2. f est intégrable,
3. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$

1.2.11 Espérance mathématique, variance

L'**espérance mathématique** est la "somme" des valeurs possibles de la loi de probabilité pondérée par la probabilité de chaque point. Elle est définie pour les variables aléatoires discrètes et pour les variables aléatoires continues.

La **variance** d'une variable aléatoire X notée $Var(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire Y définie par $Y = X - E(X)$.

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum (X - \mu)^2$$

L'**écart-type** de la variable aléatoire X est la racine carrée de la variance de X .

NB:

- La variance et l'écart type mesurent la dispersion autour de la moyenne. On note souvent par σ^2 la variance et par σ l'écart type.
- L'espérance est à valeurs dans \mathbf{R} . La variance et l'écart type, par contre, sont à valeurs dans \mathbf{R}^+ .

Cas d'une variable aléatoire discrète

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X , l'espérance est donnée par:

$$E(X) = \sum_{x \in \Omega} xP(X = x).$$

Exemple

Lancer d'un dé à six faces. Les faces sont équiprobables, donc $P(i) = P(X = i) = \frac{1}{6}$ pour $i = 1, \dots, 6$. Soit X la variable aléatoire "résultat du lancer". L'espérance mathématique de X est donc:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in \Omega} xP(X = x) \\ &= 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) + \dots + 6.P(X = 6) \\ &= (1 + 2 + \dots + 6) \cdot \frac{1}{6} \\ &= 21/6 = 3.5 \end{aligned}$$

Pour calculer la variance, nous utiliserons la formule

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Il nous faut donc calculer $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x \in \Omega} x^2 P(X = x) \\ &= 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) + \dots + 6^2 \cdot P(X = 6) \\ &= (1 + 2^2 + \dots + 6^2) \cdot 1/6 \\ &= 91/6 \end{aligned}$$

Par conséquent, $Var(X) = 91/6 - (21/6)^2 = 105/36 \simeq 2.92$, et $\sigma_X \simeq 1.71$.

Cas d'une variable aléatoire continue

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X , est donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité $f(x)$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance mathématique de X est donnée par:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \theta \int_0^{+\infty} x e^{-\theta x} dx \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \theta \left(-\frac{1}{\theta} [xe^{-\theta x}]_0^{+\infty} + \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx \\
 &= -\frac{1}{\theta} [e^{-\theta x}]_0^{+\infty} \\
 &= -\frac{1}{\theta} (0 - 1) = \frac{1}{\theta}
 \end{aligned}$$

Pour calculer la variance, on procède de la même façon que dans le cas discret, il faut donc calculer $E(X^2)$, qui est donnée par:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \theta \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x} dx$$

que l'on intègre par parties pour obtenir finalement $Var(X) = \frac{1}{2}$.

1.3 Lois de probabilités discrètes

1.3.1 Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p lorsqu'elle peut prendre les valeurs 1 ou 0 (succès ou échec) avec les probabilités respectives p et $1 - p$ i.e. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$.

La loi de Bernoulli décrit par exemple l'issue du jet d'une pièce de monnaie, avec dans ce cas $p = 0.5$.

1.3.2 Loi Binomiale

Une loi binomiale de paramètre (n, p) est la somme de n variables de Bernoulli de paramètre p . Elle modélise le nombre de succès parmi n épreuves indépendantes (tirage au sort avec remise). On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

1.3.3 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ si:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Elle est utile par exemple dans le domaine biomédical pour décrire l'apparition de phénomènes accidentels tels que les mutations.

Le tableau suivant donne la fonction de masse ainsi que l'espérance mathématique et la variance de chacune des lois discrètes décrites ci-dessus

Dénomination	Lois de probabilités	Moyenne	Variance
Bernoulli $B(p)$	$P(X = x_1) = p$ et $P(X = x_2) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $B(n, p)$	$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Loi de Poisson $\lambda > 0$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

1.4 Les principales lois continues

1.4.1 Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire X est uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si sa fonction de densité $f(x)$ s'écrit comme suit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.4.2 Loi normale

La loi normale, ou loi de Laplace-Gauss est une loi fondamentale dans le calcul des probabilités et dans les statistiques.

On dit que X suit la loi normale de paramètres μ et σ ($\sigma > 0$), $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si sa densité de probabilité s'écrit :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2} ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.4.1 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres (μ, σ^2) , alors la variable aléatoire

$$Y = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ suit une loi normale centrée réduite. on note } Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

1.4.3 Loi exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre θ si sa densité de probabilité s'écrit :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La loi exponentielle est souvent utilisée pour décrire des probabilités qui vont aller en diminuant avec le temps. L'exemple le plus connu est le temps d'attente d'un bus. Dans le domaine biomédical, son application la plus connue est l'étude de données de survie.

Le tableau suivant donne la fonction de densité ainsi que l'espérance mathématique et la variance de chacune des lois continues décrites ci-dessus

Dénomination	Lois de probabilités	Moyenne	Variance
Uniforme	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2
Exponentielle (θ)	$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{\theta^2}$

1.5 Théorème de la limite centrale (T.C.L)

Ce théorème concerne le comportement asymptotique d'une somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Théorème 1.5.1 Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec $E(X_i) = m$ et $V(X_i) = \sigma_i^2$ alors, $\sqrt{n} \frac{(\bar{x}-m)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

où \bar{x} est la moyenne donnée par $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

1.6 Inégalité de Tchebychev

L'inégalité de Tchebychev donne un moyen d'évaluer la distance entre les valeurs prises par une variable aléatoire X et son espérance. Plus précisément, elle donne une majoration de la probabilité que l'écart soit grand.

Théorème 1.6.1 *Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu(E(X) = \mu)$ et de variance σ^2 finies alors, pour tout réel $k > 0$ on a: $P[|X - E(X)| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$*

Chapter 2

Etat de l'art de l'optimisation stochastique

2.1 Introduction

L'hypothèse de la connaissance parfaite de tous les éléments du modèle de la Programmation linéaire limite son utilité quand il s'agit de planifier en présence d'incertitude. Dans plusieurs situations pratiques, les coefficients a_{ij} , b_i et c_j de la matrice technologique, du vecteur ressources et du vecteur coût respectivement, ne sont pas connus avec certitude, mais nous connaissons seulement leur distribution de probabilité. Quand un ou plusieurs éléments d'un programme linéaire sont représentés par des variables aléatoires, un programme linéaire stochastique se découle. Il est important de noter qu'un problème linéaire stochastique est un problème « mal posé » du point de vue mathématique et qu'il est donc essentiel de lui donner un sens en lui associant un problème (déterministe) équivalent. L'utilisation des équivalents déterministes est liée à leurs propriétés de linéarité ou de convexité. Ce point est important en pratique, c'est en effet pour les problèmes linéaires ou convexes que nous connaissons ou nous pouvons facilement développer des algorithmes de résolution efficaces.

2.2 Transformation en problème déterministe

Le modèle général de programmation linéaire stochastique est le suivant:

$$\begin{cases} \min & Z(x, w) = C^t(w)x \\ \text{s.c} & \\ & x \in S(w) = \{x \in \mathbb{R}^n / A(w)x \leq b(w), x \geq 0\} \end{cases} \quad (2.1)$$

- $A(w)$ est une matrice ($m \times n$) dont les termes sont des variables aléatoires,
- $C(w)$ et $b(w)$ sont des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m respectivement,
- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de décision.

Les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) donné et de distributions connues.

Afin de simplifier la présentation de ce chapitre, nous étudierons d'abord le cas où les objectifs sont stochastiques et les contraintes sont déterministes puis le cas où les contraintes sont stochastiques et les objectifs sont déterministes.

2.2.1 Cas des objectifs stochastiques

Soit le problème suivant:

$$\min_{x \in S} Z(x, w) \quad (2.2)$$

Où $S = \{ x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0 \}$ est un compact. A et b sont déterministes.

On distingue plusieurs critères qui puissent transformer un problème stochastique en problème déterministe équivalent :

A- Le critère de Bayes (E-modèle)

Ce critère qui est introduit par Charnes et Cooper [9]. Il concerne la minimisation de l'espérance mathématique de l'objectif:

$$\min_{x \in S} \bar{Z}(x) = E[C^t(w)]x = \bar{C}^t x \quad (2.3)$$

Ce modèle n'est efficace que dans le cas où les variances des variables aléatoires sont très petites, c'est-à-dire, que les données sont peu dispersées. Ceci peut être justifié par l'inégalité de Tchebychev.

B- Le critère de la variance (V-modèle)

Ce modèle consiste à minimiser la variance de l'objectif $Z(x, w)$:

$$\min_{x \in S} \sigma^2(x) = x^t V x \quad (2.4)$$

Où V est la matrice de variance-covariance du vecteur $C(w)$.

C- Le critère espérance variance (E-V modèle)

Ce modèle consiste à minimiser la variance de $Z(x, w)$ tout en réalisant un rendement minimum Z_0 préalablement fixé par le décideur.

Le modèle est le suivant:

$$\begin{cases} \min_{x \in S} \sigma^2(x) = x^t V x \\ \bar{C}^t x \geq Z_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Les trois critères cités précédemment sont utilisés dans de nombreuses applications. En effet, ils nécessitent une information minimale sur la variable aléatoire qui est facilement estimée à partir des données acquises.

D- Le critère de l'espérance mathématique de la fonction d'utilité

Dans ce modèle, nous prenons en considération la notion du risque. Nous construisons une fonction U qui à chaque niveau de gain associe un nombre appelé "utilité", représentant l'importance qui lui est accordée. Lorsque nous connaissons U , l'interprétation de (2,1) est:

$$\min_{x \in S} E[U(C^t(w)x)] \quad (2.6)$$

Les inconvénients de cette approche sont:

- la construction de U .
- La difficulté de résolution du programme déterministe (2,6).

Exemple

Evaluons, en utilisant le critère (2,6), la fonction objectif dans le cas où $C(w)$ suit une loi normale et la fonction d'utilité est exponentielle:

$U(r) = 1 - e^{-\alpha r}$ où r est la valeur de l'objectif et $\alpha \geq 0$ est le coefficient de risque encouru (α grand correspond à une attitude prudente).

Si $r \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors:

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\alpha r}) \frac{e^{-(r-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{dr}{\sigma} = 1 - e^{\frac{\sigma^2\alpha^2}{2} - \mu\alpha}$$

Minimiser $E(U)$ revient à minimiser $\mu - \frac{\sigma^2\alpha}{2}$

Dans notre cas $\mu = \bar{C}^t$ et $\sigma^2 = x^t V x$ où V est la matrice de variance-covariance du vecteur $C(w)$

Nous obtenons donc un problème quadratique de la forme:

$$\min_{x \in S} (\bar{C}^t x - \frac{\alpha}{2} x^t V x) \quad (2.7)$$

E- Le critère du risque minimum(P-modèle)

Bereanu a donné ce modèle en 1964 [5]

$$\max_{x \in S} P(C^t(w)x \leq u) \quad (2.8)$$

u est un seuil fixé par le décideur.

Dans ce modèle, le décideur doit choisir un vecteur d'activité x dans l'ensemble de décision S . S'il réalise une efficacité inférieure ou égale à u , il sera récompensé et s'il dépasse le seuil il sera pénalisé.

D'autre part s'il ne connaît pas au préalable la distribution de $C(w)$, il est obligé de minimiser le risque de ne pas avoir sa récompense (risque minimal) donc il va maximiser la chance d'avoir cette dernière.

Dans le cas où $C(w)$ suit une loi normale de moyenne \bar{C} et de matrice de covariance V , la probabilité $P(C^t(w)x \leq u)$ s'écrira comme suit:

$$P[C^t(w)x \leq u] = P\left(\frac{C^t(w)x - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}} \leq \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \Phi\left(\frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right), \text{ pour } x \neq 0$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Maximiser $P(C^t(w)x \leq u)$ revient à maximiser $\Phi\left(\frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right)$

Sachant que Φ est une fonction croissante, nous maximisons $f(x) = \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}$ ou minimisons $g(x) = -f(x)$
 Donc le problème (2,8) se transforme en problème fractionnaire:

$$\min_{x \in S} g(x) = \frac{\bar{C}^t x - u}{\sqrt{x^t V x}} \quad (2.9)$$

F- Le critère de type K (KATAOKA [19])

Ce programme minimise l'objectif $Z(x, w)$ avec une probabilité égale à α ($0 < \alpha < 1$).

$$\begin{cases} \min & u \\ \text{sc} & P(C^t(w)x \leq u) = \alpha \\ & x \in S \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour $C(w)$ qui suit une loi normale de moyenne \bar{C} et de variance $\sigma^2 = x^t V x$, la contrainte $P[C^t(w)x \leq u] = \alpha$ s'écrira:

$$\begin{aligned} P(C^t(w)x \leq u) = \alpha &\Leftrightarrow P\left(\frac{C^t(w)x - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}} \leq \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}} = \Phi^{-1}(\alpha) \\ &\Leftrightarrow u(x) = \bar{C}^t x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x} \end{aligned}$$

Le programme équivalent à (2,10) s'écrira:

$$\min_{x \in S} u(x) = \bar{C}^t x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$$

Dans le cas où $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$ et $\bar{C}^t x$ sont convexes, la fonction $u(x)$ est aussi convexe.

En effet, la fonction $\bar{C}^t x$ est linéaire donc convexe. V est une matrice semi-définie positive donc $\sqrt{x^t V x}$ convexe. Par conséquent, $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$ est convexe si et seulement si $\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0$ c'est à dire $\alpha \geq \frac{1}{2}$ voir [17]. Ainsi, lorsque $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la fonction $u(x)$ est convexe.

2.2.2 Cas des contraintes stochastiques

Dans ce cas, nous supposons que l'objectif est soit déjà transformé en équivalent déterministe par l'un des critères précédents soit qu'il est déterministe à l'origine.

le modèle est le suivant:

$$\begin{cases} \min Z(x) = C^t x \\ \text{s.c } A(w)x \leq b(w) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Il existe deux modèles déterministes équivalents à (2,11)

a- Le modèle avec seuil de probabilité sur les contraintes

$$\begin{cases} \min Z(x) = C^t x \\ \text{s.c } P[A(w)x \leq b(w)] \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ce cas, le décideur fixe α ($0 < \alpha < 1$) et pour que la contrainte soit satisfaite dans les α pourcent des cas, il faut que $P[A(w)x \leq b(w)] \geq \alpha$

Un autre problème équivalent à (2,12) est celui où le décideur fixe un seuil α_i pour chacune des contraintes

$$\begin{cases} \min Z(x) = C^t x \\ \text{s.c } P[A_i(w)x \leq b_i(w)] \geq \alpha_i, i = 1 \dots m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans ce modèle, la question qui se pose est de savoir si les ensembles:

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \{x \in \mathbb{R}^n | P[A(w)x \leq b(w)] \geq \alpha\} \\ S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n | P[A_i(w)x \leq b_i(w)] \geq \alpha_i, i = 1 \dots m\} \end{aligned}$$

qui dépendent des distributions de A et de b ainsi des seuils α et α_i sont convexes ou non.

Théorème 2.2.1 (Kall [18]): $S(0)$ et $S(1)$ sont convexes quelque soient les distributions de A et de b .

Dans ce qui suit nous citons quelques cas de convexité de $S(\alpha_i)$ ou $S(\alpha)$

Cas où A est déterministe et b aléatoire

C'est le cas le plus facile où si F_i est la fonction de répartition de b_i on a:

$$\begin{aligned} S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n | P[A_i x \leq b_i(w)] \geq \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | P[b_i(w) \leq A_i x] \leq 1 - \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | A_i x \leq F_i^{-1}(1 - \alpha_i)\} \end{aligned}$$

$S(\alpha_i)$ est un ensemble de contraintes linéaires en x , donc il est convexe. D'où le théorème suivant:

Théorème 2.2.2 (Kall [18]): si A est déterministe et b est aléatoire alors le domaine $S(\alpha_i)$ est convexe pour toute distribution de b_i .

Cas où A et b sont des variables aléatoires normales

1- A et b non indépendantes

Dans ce cas, on suppose que (A_i, b_i) est un vecteur normalement distribué de moyenne $\mu_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ et de matrice des covariances V_i . En vertu de la théorie des probabilités $t_i(x) = A_i x - b_i$ a une distribution normale de moyenne

$$m_i(x) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - \mu_{in+1}$$

et de variance $\sigma_i^2(x) = Z^t V Z$ avec $Z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t$ et $\sigma_i(x) > 0, \forall x$ car $x_{n+1} = -1$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid P\left(\frac{t_i - m_i x}{\sigma_i x} \leq \frac{-m_i x}{\sigma_i x}\right) \geq \alpha_i\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi\left(\frac{-m_i(x)}{\sigma_i x}\right) \geq \alpha_i\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid -m_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0\}
 \end{aligned}$$

$S(\alpha_i)$ est convexe si et seulement si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

2- A et b indépendantes

On suppose que $\alpha_{ij} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_{ij}, v_{ij}^2)$ et $b_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ alors, la variable $A_i x - b_i$ suit la loi normale:

$$\mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - m_i, \sum_{j=1}^n v_{ij}^2 x_j^2 + \sigma_i^2\right)$$

Ainsi,

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - m_i + \Phi^{-1}(\alpha_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n v_{ij}^2 x_j^2 + \sigma_i^2} \geq 0\}$$

$S(\alpha_i)$ est convexe si et seulement si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

b- Modèle avec recours

Dans ce modèle on dispose de la possibilité de remédier à une stratégie où à la décision déjà prise est éventuellement trop optimiste. Par conséquent on aura à mettre en oeuvre des actions correctives représentées par le vecteur $y(K \times 1)$. Une fonction de pénalité $q^t(w)y$ est alors introduite pour compenser la violation des contraintes.

$q^t(w)$ désigne le vecteur coût de violation des contraintes et y le vecteur des pénalités.

La minimisation de la fonction de pénalité conduit au problème suivant:

$$\begin{cases} Q(x, w) = \min q^t(w)y \\ \text{s.c} \\ W(w)y = b(w) - A(w)x \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Où $W(m \times k)$ est la matrice de recours

L'objectif de ce problème est de minimiser sur les variables $x \in S$ tout en veillant à ce que les coûts au second niveau soient minimaux en moyenne.

Le modèle correspondant est alors:

$$\begin{cases} \min_{x \in S} E[C^t x + \min_y q^t(w)y] \\ s.c \ A(w)x + W(w)y = b(w) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Ce qui est aussi équivalent à:

$$\min_{x \in S} C^t x + E(Q(x, w))$$

où

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall \omega \in \Omega, \exists y \geq 0 / A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega), x \geq 0\}$$

Dans le problème précédent (2.15), les décisions x sont prises de telle sorte que S soit non vide c'est à dire que la variable x est telle que le problème (2.14) soit fini pour tout w , ($Q(x, w) < \infty \forall \omega \in \Omega$).

Wets [28] a montré que S est un ensemble convexe et que la fonction ($Q(x, w)$) est convexe aussi.

On distingue différents types de recours:

1- Le recours fixe

Un recours est fixe si les coefficients de la matrice de recours $W(w)$ sont fixes ,c'est-à-dire $W(w) = W$.

2- Le recours fixe complet

Un recours fixe est dit complet si:
 $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists y \geq 0$ tel que $Q(x, w) \leq \infty, \forall w \in \Omega$.

3- Le recours relativement complet

Le recours est relativement complet si:

$$\forall x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \exists y \geq 0 \text{ tel que } Q(x, w) \leq \infty, \forall w \in \Omega.$$

On remarque que la différence entre le recours complet et le recours relativement complet se porte sur l'ensemble des x pour lesquels il existe une solution de second niveau. Si cet ensemble est le domaine de définition de x à la première étape, le recours est relativement complet et dans le cas où le domaine de définition de x est \mathbb{R}^n , alors le recours est complet.

4- Le recours simple

Un recours fixe est simple si la matrice de recours est de la forme $W(I, -I)$ où I est la matrice identité d'ordre m .

Dans ce cas, le vecteur y est décomposé en deux parties:

1. $y^+(m \times 1)$: variables d'écart par excès.
2. $y^-(m \times 1)$: variables d'écart par défaut.

Le vecteur de pénalité $q(w)$ peut se décomposer comme suit:
 $q^+(w) = b(w) - A(w)x$ si $b(w) - A(w)x \geq 0$
 $q^-(w) = A(w)x - b(w)$ si $b(w) - A(w)x \leq 0$

Avec cette décomposition, le problème (2,14) s'écrit:

$$\begin{cases} Q(x, w) = \min_{x \in S} [q^+(w)y^+ + q^-(w)y^-] \\ y^+ + y^- = b(w) - A(w)x \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Par conséquent le problème (2,15) est équivalent à:

$$\begin{cases} \min_{x \in S} [C^t x + E(\min_y (q^+(w)y^+ + q^-(w)y^-))] \\ y^+ + y^- = b(w) - A(w)x \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Théorème 2.2.3 (Kall [18])

$Q(x, w)$ est fini si et seulement si $(q^+(w)y^+ + q^-(w)y^- \geq 0$ avec probabilité 1.

Dans ce qui suit, nous détaillerons le modèle avec seuil de probabilité et le modèle avec recours sur un exemple.

Exemple:

Considérons le problème suivant:

$$(P) \begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ s.c \quad x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0, 5x_1 + 0, 3x_2 \geq b(w) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Où b suit une loi uniforme sur l'intervale [1.2,1.6].

Ce problème correspond à la recherche du coût minimal pour une opération de fusion de deux types de minerai. La firme utilise cette interprétation si elle n'a pas de capacité de stockage et souhaite maintenir le nombre de clients satisfaits. La demande est aléatoire et uniforme et un problème de capacité limite l'opération à 4 unités.

*** En premier lieu, nous remplaçons la demande par son espérance $E(b(w)) = 1.4$

La solution du problème:

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0, 5x_1 + 0, 3x_2 \geq 1.4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

sest $x_1^* = 1$, $x_2^* = 3$. La valeur optimale $Z^* = 5$. La probabilité pour que cette solution soit admissible est:

$$P(b|1 + 3 \leq 4, 0.5 * 1 + 0.3 * 3 \geq b(w)) = P[1.4 \geq b(w)] = \frac{1}{2}$$

*** Pour l'interprétation avec seuil sur les contraintes, choisissons $\alpha = 0.9$.

Elle doit être en mesure d'assurer les livraisons à 90%.

Dans ce cas la contrainte devient:

$$P(0, 5x_1 + 0, 3x_2 \geq b(w)) \geq 0.9$$

Soit F la fonction de répartition de $b(w)$, alors:

$$P(0, 5x_1 + 0, 3x_2 \geq b(w)) \geq 0.9 \Leftrightarrow 0, 5x_1 + 0, 3x_2 \geq F^{-1}(0.9)$$

Or $F^{-1}(0.9) = 1.56$.

Le problème avec seuil de probabilité sur les contraintes stochastiques s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0, 5x_1 + 0, 3x_2 \geq 1.56 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution est $x_1^* = 1.8$, $x_2^* = 2.2$ et la valeur optimale $Z^* = 5.8$

*** Considérons maintenant un problème avec recours.

Supposons que la firme ait un contrat stipulant que la demande doit être satisfaite et qu'elle doit commander le minerai à l'avance. Si elle produit trop, elle peut écouler l'exédent chez d'autres clients à 2 unités monétaires au dessous du taux fixé. Si elle produit trop peu, elle peut acheter sur le marché le complément à 4 unités monétaires au dessus du taux fixé. Les coûts supplémentaires sont:

$$\begin{cases} 2(0, 5x_1 + 0, 3x_2 - b(w)) & \text{si } 0, 5x_1 + 0, 3x_2 - b(w) \geq 0 \\ 4(b(w) - 0, 5x_1 - 0, 3x_2) & \text{si } 0, 5x_1 + 0, 3x_2 - b(w) \leq 0 \end{cases}$$

Soit $Q(x_1, x_2, w)$ ce coût supplémentaire, c'est aussi la pénalité que l'on doit ajouter à la fonction économique d'origine. le problème avec recours revient à résoudre :

$$\begin{cases} \min[2x_1 + x_2 + E(Q(x_1, x_2, w))] \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit:

$$E(Q(x_1, x_2, w)) = \frac{1}{0.4} \int_{1.2}^{0,5x_1+0,3x_2} 2(0,5x_1+0,3x_2-t)dt + \frac{1}{0.4} \int_{1.2}^{0,5x_1+0,3x_2} 4(t-0,5x_1-$$

$$E(Q(x_1, x_2, w)) = \frac{15}{2}(0,5x_1 + 0,3x_2)^2 - 22(0,5x_1 + 0,3x_2) + \frac{82}{5}$$

On obtient un problème quadratique :

$$\begin{cases} \min \frac{15}{2}(0,5x_1 + 0,3x_2)^2 - 9x_1 - 5.6x_2 + \frac{82}{5} \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est $x_1^* = 0, x_2^* = 4$ et la valeur optimale $Z^* = 4.8$.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les différents critères permettant de transformer les problèmes stochastiques en problèmes déterministes. Nous remarquons que cette transformation dépend de l'information que nous avons sur les variables aléatoires.

Chapter 3

Etat de l'art de l'optimisation linéaire multi-objectifs

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons des problèmes de décision caractérisés par des objectifs linéaires, multiples et conflictuels qui doivent être optimisés sous certaines contraintes linéaires qui délimitent l'ensemble de décision. De tels problèmes ont beaucoup d'applications dans divers domaines comme l'économie, la gestion de la production, le transport, ...

Mathématiquement, le problème linéaire multi-objectifs (PLMO) se formule comme suit:

$$\begin{cases} \text{'' min '' } Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_p(x)) \\ \text{s.c } x \in S \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $Z_k(x) = C_k^t x$, $\forall k = 1, \dots, p$, $C_k \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.
L'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ où A est une matrice $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$ est supposé non vide.

Le symbole " " signifie que (3.1) est mathématiquement mal posé c'est-à-dire qu'il n'existe aucune solution qui satisfait simultanément tous les objectifs car ceux-ci sont souvent conflictuels. Dans ce cas, la notion d'optimalité sera remplacée par la notion d'efficacité ou de dominance.

3.2 Dominance et efficacité

Comme nous l'avons déjà mentionné, il existe souvent des conflits entre les fonctions objectifs du (PLMO). C'est pour cela, qu'au *XIX^{ème}* siècle Vilfredo Pareto, un économiste italien, a défini un équilibre tel que l'on ne peut améliorer la valeur d'un objectif sans détériorer la valeur d'au moins un des autres objectifs. Cet équilibre s'appelle solution Pareto optimale ou solution efficace ou encore solution non dominée. Par conséquent, une solution Pareto optimale est définie comme suit:

Définition 3.2.1 : *Un point $x \in S$ est dit Pareto optimal ou efficace s'il n'existe aucun $x' \in S$ tel que*

$$\begin{aligned} Z_k(x') &\leq Z_k(x), \quad \forall k \\ Z_k(x') &< Z_k(x), \quad \text{pour au moins un } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{aligned}$$

Définition 3.2.2 *Un point $Z(x) \in Z(S)$ est dit non dominé s'il n'existe aucun autre point $Z(x) \in Z(S)$ tel que*

$$\begin{aligned} Z_k(x') &\leq Z_k(x), \quad \forall k \\ Z_k(x') &< Z_k(x), \quad \text{pour au moins un } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{aligned}$$

Définition 3.2.3 *Un point $x \in S$ est faiblement efficace s'il n'existe aucun autre point $x' \in S$ tel que $Z_k(x') < Z_k(x)$, $\forall k$*

Définition 3.2.4 *Un point $Z(x) \in Z(S)$ est faiblement non dominé s'il n'existe aucun autre point $Z(x') \in Z(S)$ tel que $Z_k(x') < Z_k(x)$, $\forall k$*

3.3 Autres définitions utiles

Dans ce paragraphe, nous allons définir brièvement quelques éléments auxquels nous ferons référence dans la suite de ce document. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à Hwang [16].

3.3.1 Point idéal

C'est le vecteur $M = (M_1, \dots, M_p)$ dont les coordonnées $M_k; k = 1, \dots, p$ sont données par

$$M_k = \min_{x \in S} Z_k(x)$$

3.3.2 Matrice des gains

Soit $\bar{x}^{(l)}$ la solution optimale associée à $Z_l(x)$. La matrice carrée d'ordre p formée par les éléments $Z_k(\bar{x}^{(l)})$ est appelée matrice des gains et on a :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} M_1 & Z_1(\bar{x}^{(2)}) & \dots & Z_1(\bar{x}^{(k)}) & \dots & Z_1(\bar{x}^{(p)}) \\ Z_2(\bar{x}^{(1)}) & M_2 & \dots & \dots & \dots & Z_2(\bar{x}^{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & M_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_p(\bar{x}^{(1)}) & Z_p(\bar{x}^{(2)}) & \dots & Z_p(\bar{x}^{(k)}) & \dots & M_p \end{pmatrix}$$

3.3.3 Point nadir ou anti-ideal

C'est le vecteur $m = (m_1, \dots, m_k, \dots, m_p)$ dont les coordonnées m_k $k = 1, \dots, p$ sont données par

$$m_k = \max_{x \in S} Z_k(x)$$

3.3.4 Les poids

Ce sont des nombres $\lambda_k, k = 1, \dots, p$ associés aux objectifs Z_k et qui désignent l'importance accordée à ces objectifs. Ils sont en général normalisés, c'est-à-dire que,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0$$

3.3.5 Point de référence

C'est un vecteur $\bar{Z} = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_p)$ dont les coordonnées sont les valeurs souhaitables que l'on doit atteindre.

3.3.6 Taux de substitution marginal

C'est la quantité dont la valeur d'un objectif est diminuée pour compenser un gain sur un autre objectif alors que les valeurs de tous les autres objectifs restent inchangées.

3.4 Méthodes de résolution

Confronté à un problème de programmation linéaire multi-objectifs, l'objectif du décideur est de choisir parmi toutes les solutions efficaces celle qu'il estime être (la plus) satisfaisante. Dans ce qui suit, nous allons décrire les méthodes les plus utilisées pour la détermination d'un tel "meilleur compromis".

3.4.1 Méthodes scalaires

a) Utilisation d'une fonction d'utilité

Le décideur minimise une fonction $U = U(Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_p(x))$ qui combine tous les objectifs dite fonction d'utilité. Deux modèles sont généralement utilisés:

- **Modèle additif**

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p U_k(Z_k(x)) \quad (3.2)$$

- **Modèle multiplicatif**

$$\min_{x \in S} \prod_{k=1}^p U_k(Z_k(x)) \quad (3.3)$$

Cette méthode exige que les objectifs soient compatibles.

b) Somme pondérée

Le décideur affecte un poids λ_k à chaque objectif $Z_k(x)$ puis minimise la somme pondérée des objectifs

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x) \\ \text{s.c. } & x \in S \\ & \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0\}$ est l'ensemble des poids.

Cette méthode est très simple à utiliser mais présente des problèmes de comparabilité et de compensation.

Afin d'éviter le problème de compensation, on impose des seuils $\alpha_k \geq 0$ aux objectifs. Dans ce cas, le problème (3.4) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x) \\ Z_k(x) \leq \alpha_k, \quad k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \\ \alpha_k \geq 0; \quad \lambda_k \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Théorème 3.4.1 *Théorème de Geoffrion [12]*

1. Si $x \in S$ est optimal pour (3.4) ou (3.5) alors, x est efficace pour le problème (3.1).
2. Si $x \in S$ est efficace pour (3.1) et S convexe alors, il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ de Λ tel que x est optimal pour (3.4) ou (3.5).

c) Goal programming

Le décideur fixe un but $\bar{Z} = (\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_p)$ (ou un point de référence) puis cherche la solution la plus proche de \bar{Z} .

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p |Z_k(x) - \bar{Z}_k| \quad (3.6)$$

ou

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k| \quad (3.7)$$

3.4.2 Méthodes non scalaires

a) Méthode lexicographique

Elle consiste à ordonner les objectifs selon leur importance et ensuite optimiser le plus important, puis le second ainsi de suite...

Supposons que

$$Z_1(x) \underset{\text{important}}{>}^{\text{plus}} Z_2(x) > \dots > Z_p(x)$$

On résout le problème suivant:

$$\min_{x \in S} Z_1(x)$$

Soit x_1^* sa solution optimale avec $Z_1(x_1^*) = Z_1^*$
puis on résout:

$$\begin{cases} \min_{x \in S} Z_2(x) \\ Z_1(x) = Z_1^* \end{cases}$$

Par la suite :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} Z_2(x) \\ Z_1(x) = Z_1^* \\ Z_2(x) = Z_2^* \end{cases}$$

À la $k^{\text{ième}}$ itération on résout:

$$\begin{cases} \min_{x \in S} Z_2(x) \\ Z_1(x) = Z_1^* \\ Z_2(x) = Z_2^* \\ \vdots \\ Z_{k-1}(x) = Z_{k-1}^* \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution optimale du dernier problème (3.8) est efficace pour le problème (3.1).

b) Méthode min-max

Elle utilise la norme de Tchebychev (norme infinie) qui consiste à maximiser le plus grand écart entre $Z(x)$ et un point de référence \bar{Z}

$$\|Z(x) - \bar{Z}\|_{\infty} = \max_{k=1, \dots, p} \|Z_k(x) - \bar{Z}_k\|$$

Ainsi le problème (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\min_{x \in S} \max_{k=1, p} |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \alpha \\ \text{s.c} \\ |Z_k(x) - \bar{Z}_k| \leq \alpha \\ x \in S, \alpha \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Théorème 3.4.2 Théorème de Bowman [6]

1. Toute solution optimale de (3.9) est efficace pour (3.1).
2. Toute solution efficace pour (3.1) est optimale pour (3.9).

Plusieurs versions de la norme de Tchebychev peuvent être considérées.

- **La norme de Tchebychev pondérée**

$$\min_{x \in S} \max_{k=1,p} \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

- **La norme augmentée de Tchebychev**

$$\min_{x \in S} \max_{k=1,p} |Z_k(x) - \bar{Z}_k| + \rho \sum_{k=1}^p |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

- **La norme augmentée et pondérée de Tchebychev**

$$\min_{x \in S} \max_{k=1,p} \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k| + \rho \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

$\rho > 0$ et très petit, $\lambda_k > 0$.

3.4.3 Méthodes heuristiques

Pour certains problèmes multi-objectifs, l'ensemble des solutions Pareto optimales peut être très grand. C'est pour cela que les chercheurs recourent aux méthodes heuristiques pour donner une estimation de l'ensemble efficace. Nous ne parlerons pas de ces méthodes dans le cadre de ce mémoire. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Evans [11].

3.4.4 Méthodes interactives

Une méthode interactive consiste en une série d'étapes de calcul et de dialogue avec le décideur. L'étape de calcul fournit une première solution. Celle-ci est présentée au décideur qui réagit en apportant des informations supplémentaires sur ses préférences (étape de dialogue). Cette information, une fois injectée dans le modèle utilisé, permet de construire une nouvelle solution.

Dans cette classe de méthodes, le décideur intervient dans chaque étape de résolution du problème donné. Les processus de calcul et de dialogue sont alternés.

Dans ce qui suit, nous donnerons les grandes lignes des méthodes interactives qui seront exploitées dans le prochain chapitre, à savoir, la méthode STEM de Benayoun [4], la méthode de Geoffrion-Deyer-Feinberg [13] et la méthode de Nakayama [24].

1) Méthode STEM de Benayoun

Il s'agit d'une des premières méthodes de programmation linéaire multi-objectifs. Elle repose sur les éléments suivants:

- Le point idéal $M = (M_1, \dots, M_p)$
- La matrice des gains d'éléments z_{kj} , $k = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$.
- Le point nadir $m = (m_1, \dots, m_p)$.
- L'estimation de l'intervalle de variation de Z_k sur l'ensemble des solutions efficaces $[M_k, m_k]$
- Les coefficients de variation normalisés ou poids techniques:

$$\pi_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^p \alpha_k}$$

avec

$$\alpha_k = \frac{m_k - M_k}{|m_k|}$$

L'utilisation de la norme pondérée et augmentée de Tchebychev permet de transformer le problème (3.1) au problème déterministe suivant:

$$\min_{x \in S} \left[\max_{k=1, \dots, p} (\pi_k(C_k x - \bar{Z}_k) + \rho \sum_{k=1}^p \pi_k(C_k x - \bar{Z}_k)) \right]$$

En vertu de la technique "big M" [10], ce dernier problème s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \min M\delta - \sum_{k=1}^p \xi_k \\ \pi_k(C_k x - \bar{Z}_k) \leq \delta - \xi_k \\ x \in S \\ \delta \geq 0, \quad \xi_k \geq 0 \end{cases}$$

2) Méthode de Geoffrion, Deyer et Feinberg

Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonction d'utilité définie de manière implicite par le décideur [13].

A chaque itération, une approximation linéaire de la fonction d'utilité est générée et minimisée. La minimisation se fait par la méthode du gradient.

Le problème à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} \min U(x) = U(Z_1(x), \dots, Z_k(x)) \\ s.c \quad x \in S \end{cases} \quad (3.10)$$

L'idée principale de cette méthode est la suivante:
Soit $x^h \in S$ un point réalisable, alors au lieu de la fonction d'utilité U nous optimisons son approximation au point x^h . Si la solution est y^h , alors $d^h = y^h - x^h$ est une bonne direction dans laquelle on cherche une amélioration de la fonction objectif U .

En tout point réalisable x^h , l'approximation linéaire est:
 $y \rightarrow U(y)$ et $U(x^h) + \nabla_x U(x^h)^t (y - x^h)$

Après la minimisation de l'approximation linéaire, le problème (3.10) devient:

$$\min \sum_{k=1}^p -l_k^h \nabla_x Z_k(x^h)^t y \quad (3.11)$$

Avec

$$l_k = (dU(Z(x^k))/dZ_k)/(dU(Z(x^k))/dZ_p)$$

où l_k est le taux de substitution marginal de Z_k et Z_p .

3) Méthode de Nakayama [24]

Cette méthode utilise la norme infinie et un niveau d'aspiration r donné par le décideur à chaque itération.

Le problème à résoudre est le suivant:

$$\min_{x \in S} \max_{1 \leq k \leq p} \lambda_k |r_k - Z_k(x)| \quad (3.12)$$

Où $\lambda_k = \frac{1}{r - M_k}$ est le poids affecté au k -ième objectif, M est le point idéal et S est la région réalisable.

Après avoir obtenu la solution du problème (3.12), nous la présentons au décideur. Ce dernier classe les fonctions objectifs en trois classes:

- (1) la classe des objectifs qu'il désire améliorer.
- (2) la classe des objectifs qu'il accepte de relaxer.
- (3) la classe des objectifs qu'il ne souhaite pas changer.

Le nouveau niveau d'aspiration pour les fonctions objectifs de la classe 1 et 2 sera donné par le décideur. Pour la classe 3, nous gardons le niveau d'aspiration précédent.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une vue panoramique des principales méthodes de résolution des problèmes linéaires multi-objectifs.

Certaines d'entre elles, peuvent être utilisées ou combinées avec d'autres méthodes pour résoudre des problèmes non linéaires multi-objectifs.

Chapter 4

Etat de l'art de l'optimisation linéaire multi-objectifs stochastique

4.1 Introduction

Un problème linéaire multi-objectifs stochastique se définit comme suit:

$$\min_{x \in S(w)} (Z_1(x, w), Z_2(x, w), \dots, Z_p(x, w)) \quad (4.1)$$

où $S(w) = \{x \in \mathbb{R}^n / A(w)x \leq b(w), x \geq 0\}$ et $Z_k(x, w) = C_k^t(w)x$
 $A(w) = (a_{ij}(w)), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ est une matrice aléatoire.
 $b(w) = (b_i(w)), 1 \leq i \leq m$ et $C_k(w), 1 \leq k \leq p$ sont des vecteurs aléatoires.

Les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ et leurs distributions sont supposées connues.

Les méthodes de résolution des problèmes multi-objectifs stochastiques passent par deux transformations qui ne peuvent être considérées simultanément. Ben Abdelaziz [2, 3] qualifie ces deux transformations d'approche multicritère et d'approche stochastique. La première, transforme le problème multi-objectifs stochastique en un problème multi-objectifs déterministe. La deuxième ramène le problème multi-objectifs stochastique à un problème stochastique mono-objectif.

4.2 Approche multicritère

Dans cette approche, les objectifs stochastiques sont transformés en leurs équivalents déterministes en utilisant les critères de la programmation linéaire stochastique mono-objectif (E-modèle, V-modèle, E.V-modèle, K-modèle et le P-modèle). A partir de là, un concept d'efficacité est défini pour chaque critère.

Définition 4.2.1 (*efficacité au sens de l'espérance mathématique, White [29]*)

$x \in S$ est une solution efficace au sens de l'espérance mathématique pour (3.1) si elle est pareto efficace pour le problème multi-objectifs.

$$\min_{x \in S} (\bar{C}_1^t x, \bar{C}_2^t x, \dots, \bar{C}_p^t x) \quad (4.2)$$

Où \bar{C}_k est l'espérance mathématique du vecteur aléatoire $C_k(w)$.

L'utilisation de la variance donne lieu au concept suivant:

Définition 4.2.2 (*efficacité au sens de variance, White [29]*)

$x \in S$ est une solution efficace de variance minimale pour (3.1) si elle est pareto efficace pour le problème multi-objectifs

$$\min_{x \in S} (\sigma_1^2(x), \sigma_2^2(x), \dots, \sigma_p^2(x)) \quad (4.3)$$

Définition 4.2.3 (*efficacité au sens de l'espérance-variance*)

$x \in S$ est une solution espérance-variance efficace pour (4.1) si elle est pareto efficace pour le problème multi-objectifs

$$\begin{cases} \min_{x \in S} (\bar{C}_1^t x, \bar{C}_2^t x, \dots, \bar{C}_p^t x) \\ \min_{x \in S} (\sigma_1^2(x), \sigma_2^2(x), \dots, \sigma_p^2(x)) \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans le cas où les $C_k(w)$ sont des variables aléatoires normales (4.3) et (4.4) sont des problèmes multi-objectifs quadratiques.

Pour appliquer le critère du risque minimal au problème(4.1), le décideur doit fixer un niveau d'aspiration u_k pour chaque objectif stochastique et trouver le vecteur de décision x pour lequel la probabilité que le k-ième objectif ne dépasse pas le seuil u_k soit maximum. Dans ce cas, nous définissons le concept d'efficacité suivant:

Définition 4.2.4 (*Risque minimal-efficacité, Stancu-Minasian et Tigan[25]*)
 $x \in S$ est une solution efficace de risque minimum et de seuils u_1, \dots, u_p
 pour (4.1) si elle est pareto efficace pour le problème.

$$\max_{x \in S} (P(C_1^t(w)x \leq u_1), \dots, P(C_p^t(w)x \leq u_p)) \quad (4.5)$$

Pour résoudre ce problème, les auteurs proposent une méthode sequentielle sous les hypothèses suivantes:

- $\overline{C}_k^t x < \infty, k = 1, 2, \dots, p$
- $\mu_k > T_k = \min_{x \in S} (\overline{C}_k^t x)$
- 0 n'appartient pas à S

Le décideur ordonne les objectifs selon l'ordre d'importance croissante et résout le problème

$$\max_{x \in S_0} (P(C_1^t(w)x \leq u_1))$$

Avec $S_0 = S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$. En tenant compte de sa valeur optimale p_1 , il résout

$$\max_{x \in S_1} (P(C_2^t(w)x \leq u_2))$$

Avec $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | P(C_1^t(w)x \leq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1\}, \epsilon_1 > 0$.
 Soit p_2 sa valeur optimale.

La solution finale est donnée par le problème:

$$\max_{x \in S_{p-1}} (P(C_p^t(w)x \leq u_p))$$

Avec $S_{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \in S_{p-2}, P(C_{p-1}^t(w)x \leq u_{p-1}) \geq P_{p-1} - \epsilon_{p-1}\}$
 et $\epsilon_{p-1} > 0$

Enfin, le dernier critère que nous pouvons appliquer au problème (4.1) est celui de Kataoka.

Définition 4.2.5 (*Solution efficace avec probabilités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$*)
 $x \in S$ est une solution efficace avec probabilités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ou α -
 efficace pour le problème (3.1) s'il existe $u \in \mathbb{R}^p$ tel que (x, u) soit

pareto efficace pour le problème.

$$\begin{cases} \min_{x,u} (u_1, u_2, \dots, u_p) \\ sc \ P(C_k^t(w)x \leq u_k) = \alpha_k, k = 1, \dots, p \\ x \in S \end{cases} \quad (4.6)$$

Remarque 1 Toutes ces définitions sont associées au même problème multi-objectifs stochastique (4.1). Une des principales préoccupations des chercheurs est d'établir des relations entre les différents concepts d'efficacité. L'une de ces relations est présentée dans Caballero et al[7]. Elle se rapporte spécialement au concepts d'efficacité au sens du risque minimal et à l'efficacité avec seuils de probabilités comme le montre le théorème et corollaire suivants:

Théorème 4.2.1 (Caballero et al [7]) Si la fonction de distribution de la variable aléatoire $C_k(w)$ est continue et strictement croissante alors, $x \in S$ est une solution efficace pour le problème (4.5) si et seulement si (x, u) est une solution efficace du problème (4.6) avec u et α tels que:

$$P(C_k^t(w)x \leq u_k) = \alpha_k, \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

Corollaire 4.2.1 (caballero et al.[7]) Soit $E_{MR}(u)$ respectivement $E_K(\alpha)$ l'ensemble des solutions efficaces du problème (4.5) respectivement (4.6) alors,

$$\bigcup_{u \in \mathbb{R}^p} E_{MR}(u) = \bigcup_{\alpha \in B} E_K(\alpha)$$

Avec $B = \{\alpha \in \mathbb{R}^p | \alpha_k \in (0,1), k = 1, \dots, p\}$

4.3 Approche stochastique

Cette approche consiste à appliquer l'une des techniques d'obtention des solutions efficaces de la programmation linéaire multi-objectifs déterministe qui conduisent généralement à la résolution d'un programme mono-objectif.

La technique la plus utilisée est la somme pondérée.

4.3.1 Somme pondérée

Le problème stochastique associé au problème (4.1) par cette technique est:

$$\min_{x \in S} Z(x, \omega) = \sum_{k=1}^p \lambda_k C_t^k(\omega)x \quad (4.7)$$

où les λ_k sont des poids affectés aux objectifs tels que: $\lambda_k > 0$ et $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$

L'application des critères (Espérance, Variance, Espérance-Variance, Risque Minimal et Kataoka) conduisent à de différents programmes déterministes dont les solutions optimales sont efficaces pour (4.1).

La comparaison entre les deux approches permettra de dire si une solution efficace de l'approche multicritère est aussi une solution efficace pour l'approche stochastique.

4.4 Comparaison des deux approches

Caballero et al. [7] ont comparé les solutions efficaces obtenues par l'approche stochastique avec celles obtenues par l'approche muticritère dans le cas où les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires continues. Il ont supposé que l'ensemble S est déterministe ou qu'il a été transformé en équivalent déterministe en utilisant le modèle avec seuils de probabilité sur les contraintes ou le modèle avec recours vu au chapitre 2.

Pour la comparaison, nous résolvons le problème (4.7) avec les critères cités ci-dessus. Dans chaque cas, nous comparons

4.4.1 Critère espérance

L'application du critère espérance sur le problème (4.7) donne

$$\min_{x \in S} \bar{Z}(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t x \quad (4.8)$$

La relation qui existe entre (4.8) et (4.2) est la même que celle qui existe entre n'importe quel problème multi-objectifs avec son problème associé (avec des poids)(voir le théorème Geoffrion).

4.4.2 Critère variance

La variable aléatoire $Z(x, \omega) = \sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x$ est une combinaison linéaire des variables aléatoires $Z_k(x, \omega)$ pour que $k = 1, \dots, p$, sa variance dépend des variances des variables $Z_k(x, \omega)$ ainsi que de leurs covariances (voir Hogg et Graig [15]). Dans ce cas

$$\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \sigma_k^2 x + 2 \sum_{k,s=1, k < s}^p \lambda_k \lambda_s \sigma_{ks}(x)$$

Où $\sigma_{ks}(x)$ est la covariance de la variable $Z_k(x, \omega)$ et $Z_s(x, \omega)$. L'application du critère de la variance conduit donc au problème

$$\min_{x \in S} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \sigma_k^2 x + 2 \sum_{k,s=1, k < s}^p \lambda_k \lambda_s \sigma_{ks}(x) \quad (4.9)$$

Si les covariances des fonctions objectifs sont nulles, autrement dit si $\sigma_{ks}(x) = 0, \forall k, s \in \{1, \dots, p\}, k \neq s$ et $\forall x \in S$ alors

$$\min_{x \in S} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \sigma_k^2 x$$

4.4.3 Critère de risque minimal

Le critère déterministe généré par le critère de risque minimum appliqué au problème (4.7) est

$$\max_{x \in S} P\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t(\omega)x \leq u\right)$$

Le niveau d'aspiration u est fixé pour la fonction $\sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t(\omega)x$ qui n'est pas un objectif du problème d'origine. Pour que le critère du risque minimal soit correctement appliqué à la somme pondérée, il faut que u soit une combinaison linéaire des niveaux d'aspiration fixés pour les objectifs $Z_k(x, \omega)$, autrement dit,

$$u = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

Ainsi nous obtenons le problème suivant:

$$\max_{x \in S} P\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t(\omega)x \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k\right)$$

4.4.4 Critère de type Kataoka

L'application du critère de Kataoka à la somme pondérée n'est possible que si la probabilité pour laquelle la fonction $Z(x, \omega) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t(\omega)x$ ne dépasse pas le seuil u est donné par $\alpha = \sum_{k=1}^p \lambda_k \alpha_k$, où les α_k sont les probabilités fixées pour les objectifs $Z_k(x, \omega)$. (Les poids λ_k doivent être normalisés). Il en résulte le problème déterministe suivant:

$$\begin{cases} \min_{x \in S} u \\ sc \quad P(\sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t(\omega)x \leq u) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \alpha_k \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour ces deux derniers critères, il est impossible d'établir une quelconque relation entre les solutions obtenues par les deux approches sans tenir compte de la nature des variables aléatoires $C_k(x, \omega)$.

Exemple

Si $C(\omega) = (C_1(\omega), C_2(\omega), \dots, C_p(\omega))$ est un vecteur aléatoire multinormal d'espérance $\bar{C} = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_p)$ et de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 & V_{12} & \dots & V_{1s} & \dots & V_{1p} \\ V_{21} & V_2 & \dots & V_{2s} & \dots & V_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{k1} & V_{k2} & \dots & V_{ks} & \dots & V_{kp} \\ V_{p1} & V_{p2} & \dots & V_{ps} & \dots & V_p \end{pmatrix}$$

Le critère de Kataoka donne le problème suivant:

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{k,s=1, k < s}^p \lambda_k \lambda_s x^t V_{ks} x}$$

Ou bien

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k x + \beta \sigma(x) \quad (4.11)$$

avec $\beta = \Phi^{-1}(\alpha)$ et

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{k,s=1, k < s}^p \lambda_k \lambda_s x^t V_{ks} x}$$

Si les covariances des objectifs sont nulles (les variables aléatoires sont indépendantes), on peut dire que'il y a une relation entre les solutions du problème de la somme pondérée et les solutions du problème de Kataoka. Donc, dans le cas où existe une dépendance entre les objectifs, ce qui est souvent le cas dans les problèmes pratiques, l'approche stochastique est plus appropriée que l'approche multicritère pour la résolution des problèmes multi-objectifs stochastiques.

4.5 Méthodes de résolution

Un problème déterministe qui résulte du problème stochastique (4.1) est soit multi-objectifs linéaire ou non linéaire, s'il s'agit de l'approche multicritère soit mono-objectif linéaire ou non linéaire, s'il s'agit de l'approche stochastique. Par conséquent, toutes les méthodes connues de l'optimisation mono-objectif ou multi-objectifs peuvent être exploitées dans les deux cas pour générer l'ensemble complet ou partiel des solutions efficaces du problème (4.1). Le lecteur intéressé par plus de détails peut consulter la référence [8]. Par contre, nous exposerons ci-dessous quelques méthodes particulières dites *interactives*.

4.5.1 Méthodes interactives

Pour différents contextes d'information sur l'incertitude, il existe dans la littérature, les méthodes PROTRADE [14], STRANGE [27] et Belhacene [1].

1. Méthode PROTRADE

PROTRADE (Probabilistic Trade-off Development Method) a été établie par Goicoechea Dukstein et Bulfin. Inspirée du modèle STEM de Benayoun [4], elle s'applique aux problèmes ayant des objectifs stochastiques et des contraintes non linéaires déterministes. Cependant, son utilisation pour la résolution des problèmes pratiques est très difficile, car elle nécessite l'introduction d'une fonction d'utilité. Son champ d'application est donc très limité. Par conséquent, nous n'exposons pas ici les détails cette méthode.

2. Méthode STRANGE

STRANGE (STRategy for Nuclear Generation of Electricity) a été développée dans le but de résoudre des applications concrètes de planification d'investissements soumises par la société Belge d'ingénierie dans le domaine énergétique. (Pour plus de détails sur ces applications, le lecteur peut consulter les documents suivants : Teghem et Kunsch [26], Kunsch et Teghem [20], Kunsch [21]).

Le problème considéré dans [27] est le suivant :

$$\begin{cases} \min Z_k(x) = C_k x & k = 1, \dots, p \\ x \in S = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Où x et C_k^t sont des vecteurs de R^n , A est une matrice (m, n) et b est un vecteur de R^m . De plus C_k et $(A; b)$ sont des variables aléatoires discrètes.

Chaque objectif Z_k dépend d'un ensemble de scénarios s_k ; $s_k = 1, \dots, S^k$, tels que :

$$P(C_k = C_{ks_k}) = p_{ks_k}; \quad \sum_{s_k=1}^{S^k} p_{ks_k} = 1$$

De même, soient $(A_r; b_r)$; $r = 1, \dots, R$ les diverses réalisations envisagées pour les coefficients de $(A; b)$ et q_r les probabilités subjectives leur correspondant

$$P(A = A_r, b = b_r) = q_r, \quad \sum_{r=1}^R q_r = 1$$

Le problème déterministe associé à (4.14):

Chaque objectif est démultiplié pour chaque scénario de façon à obtenir $\sum_{k=1}^p S^k$ nouveaux objectifs tels que :

$$Z_{ks_k} = C_{ks_k}x; \quad k = 1, \dots, p; \quad s_k = 1, \dots, S^k.$$

Un recours simple est ensuite introduit dans les contraintes de telle sorte que :

$$A_r x + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r; \quad r = 1, \dots, R;$$

Ainsi, l'incertitude au niveau des contraintes se mesure à l'aide d'une fonction de pénalité représentée par l'objectif supplémentaire

$$Z_{p+1} = \sum_{r=1}^R q_r \beta^{(r)} y^{(r)-}$$

où $\beta^{(r)}$ est un m-vecteur de pénalités éventuelles permettant de discriminer différemment les violations des contraintes pour chaque réalisation r .

Ainsi le problème déterministe associé s'écrit :

$$\begin{cases} \min Z_{ks_k}(x) = C_{ks_k}x & k = 1, \dots, p \quad s_k = 1, \dots, S^k \\ \text{s.c } (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^0. \end{cases}$$

Où S^0 est défini par:

$$S^0 = \{(x, y^{(r)+}, y^{(r)-}), r = 1, \dots, R | Ax + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r; x \geq 0, y^{(r)+} \geq 0, y^{(r)-} \geq 0\}$$

Détermination du premier compromis:

Pour chaque objectif Z_{ks_k} ; $k = 1, \dots, p + 1$; $s_k = 1, \dots, S^k$ et pour chaque scénario r ; $r = 1, \dots, R$, le problème mono-objectif suivant est résolu :

$$\begin{cases} \min Z_{ks_k}(x) \\ A_r x + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r \\ x \geq 0, y^{(r)+} \geq 0, y^{(r)-} \geq 0. \end{cases}$$

Soit \tilde{x}_{ks_k} une solution optimale de ce problème, c'est-à-dire

$$Z_{ks_k}(\tilde{x}_{ks_k}) = \min_{r \in \{1, \dots, R\}} Z_{ks_k}(x_{ks_k}^{(r)})$$

D'une manière similaire à la méthode STEM, nous associons aux objectifs des poids techniques

$$\pi_{ks_k} = \frac{\alpha_{ks_k}}{\sum_{k=1}^{p+1} \sum_{s_k=1}^{S^k} \alpha_{ks_k}}$$

avec

$$\alpha_{ks_k} = \frac{m_{ks_k} - M_{ks_k}}{|m_{ks_k}|}$$

où M_{ks_k} et m_{ks_k} sont les composantes du point idéal et du point nadir respectivement.

Le premier compromis est donné par la résolution du problème mono-objectif

$$\begin{cases} \min M\delta - \sum_{k=1}^{p+1} \xi_k, & k = 1, \dots, p + 1 \\ \sum_{s_k=1}^{S^k} p_{ks_k} (C_{ks_k} x - M_{ks_k}) \pi_{ks_k} \leq \delta - \xi_k. \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^0, \quad \xi_k \geq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Phase interactive:

Pour chaque compromis $\tilde{x}^{(m)}$, le décideur reçoit trois types d'informations:

1) La principale information est relative à la valeur de chaque objectif Z_{ks_k} au point $\tilde{x}^{(m)}$, c'est-à-dire:

$$Z_{ks_k}^{(m)} = Z_{ks_k}(\tilde{x}^{(m)}), \quad k = 1, \dots, p + 1, \quad s_k = 1, \dots, S^k$$

2) Ensuite, le décideur peut être intéressé par la "valeur moyenne" pour chaque objectif

$$\bar{Z}_k^{(m)} = \sum_{s_k=1}^{S^k} p_{ks_k} Z_{ks_k}^{(m)}$$

3) Enfin, afin de fournir une mesure simple de la variation de la fonction objectif, cette information peut éventuellement être complétée par un "niveau de confiance" $1 - \alpha_k^m$ avec

$$\alpha_k^m = P(C_k x > \bar{Z}_k^{(m)}) = \sum_{s_k | Z_{ks_k}^{(m)} > \bar{Z}_k^{(m)}} p_{ks_k} Z_{ks_k}^{(m)}$$

La troisième information n'est utile que si le nombre de scénarios S^k est suffisamment grand.

Après avoir reçu les informations, le décideur doit alors indiquer s'il juge le compromis satisfaisant ou s'il désire tenter de déterminer un compromis qu'il ai d'avantage.

Dans le second cas, il doit alors désigner un objectif $Z_{(ks_k)^*}$, pour lequel il accepte une détérioration, donc une augmentation de la valeur $Z_{(ks_k)^*}^{(m)}$. Dans la mesure du possible, il lui est également demandé de fixer une borne supérieure $\Delta_{(ks_k)^*}$ de la valeur $Z_{(ks_k)^*}^{(m+1)}$ de sorte que cette valeur sera comprise dans l'intervalle $[Z_{(ks_k)^*}^{(m)} ; \Delta_{(ks_k)^*}]$

Phase de calcul

Celle-ci consiste à faire une analyse paramétrique qui explore de manière complète la voie indiquée par le décideur.

On pose :

$$\begin{aligned} M_{(ks_k)^*} + \underline{\lambda}(m_{(ks_k)^*} - M_{(ks_k)^*}) &= Z_{(ks_k)^*}^{(m)} \\ M_{(ks_k)^*} + \bar{\lambda}(m_{(ks_k)^*} - M_{(ks_k)^*}) &= \Delta_{(ks_k)^*}^{(m)} \end{aligned}$$

les valeurs possibles de $Z_{(ks_k)^*}^{(m+1)}$ qui correspondent aux valeurs $\lambda = [\underline{\lambda}; \bar{\lambda}]$ du paramètre λ . D'où le problème linéaire mono-objectif

paramétrique qui suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min M\delta - \sum_{k=1}^{p+1} \xi_k, \quad k = 1, \dots, p+1 \\ \sum_{s_k=1}^{S^k} p_{ks_k} (C_{ks_k} x - M_{ks_k}) \pi_{ks_k} \leq \delta - \xi_k. \\ C_{(ks_k)^*} x = M_{(ks_k)^*} + \lambda (m_{(ks_k)^*} - M_{(ks_k)^*}) \\ \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda} \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(m)}, \quad \xi_k \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Avec $S^{(m)} = S^{(m-1)} \cap \{x | Z_{(ks_k)^*}(x) \leq Z_{(ks_k)^*}(\tilde{x}^{(m)})\}$.

3. Méthode de Bellahcene

Dans [1] Bellahcene propose d'appliquer la méthode de Nakayama [24] au problème de Kataoka multi-objectifs. Le modèle considéré est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x \in S} (u_1, u_2, \dots, u_p) \\ s.c \quad P(C_k^t x \geq u_k = \beta_k), \quad k = 1, \dots, p \\ P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Où $C_k(\omega)$ est un vecteur aléatoire normal de moyenne \overline{C}_k et de matrice de covariance D_k ; $(A_i; b_i)$ est un vecteur aléatoire multi-normal de moyenne $\mu_i \in \mathbf{R}^{n+1}$ et de matrice de covariance V_i . β_k et α_i sont des seuils de probabilités fixés par le décideur.

Le programme (4.17) peut s'exprimer sous la forme d'un problème multi-objectifs non linéaire de la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max u_k(x) = \overline{C}_k x - \Phi^{-1}(\beta_k) \sqrt{x^t D_k x}, \quad k = 1, \dots, p \\ s.c \quad x \in S(\alpha_i), i = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Où $S(\alpha_i) = \{x \in \mathbf{R}^n | m_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i) \sigma_i(x) \leq 0, x \geq 0\}$

Avec $m_i = \sum_{j=1}^n \mu_i x_j - \mu_{i,n+1}$, $\sigma_i = \sqrt{Z^t V_i Z}$ et $Z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)$.

La fonction $u_k(x) = \bar{C}_k x - \Phi^{-1}(\beta_k) \sqrt{x^t D_k x}$ sont concave lorsque $\Phi^{-1}(\beta_k) \geq 0$ autrement dit lorsque $\beta_k \geq \frac{1}{2}$.

L'auteur suppose que la meilleure solution de compromis est la solution la plus proche (suivant la norme ∞) du point idéal $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*)^t$ où u_k^* est défini par $u_k^* = \max\{u_k(x) | x \in S(\alpha_i)\}$.

D'autre part, un point de référence $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p)^t$ tel que $\bar{u}_k < u_k^*$ est supposé donné par le décideur. Le problème à résoudre est:

$$\min_{x \in S(\alpha_i)} \max_{1 \leq k \leq P} \lambda_k (u_k^* - u_k(x))$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{cases} \min h \\ \text{s.c. } \lambda_k (u_k^* - u_k(x)) \leq h, \quad k = 1, \dots, p \\ x \in S(\alpha_i) \end{cases} \quad (4.17)$$

Les poids λ_k sont définis par $\lambda_k = \frac{1}{u_k^* - \bar{u}_k}$, $k = 1, \dots, p$

Algorithme

Étape 1

- Demander au décideur de fixer les seuils $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ et $\beta_k, k = 1, \dots, p$
- Construire les objectifs et les contraintes déterministes à partir des fonctions de distribution des paramètres aléatoires.
- Calculer le point idéal $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*)^t$ où u_k^* est donné par:

$$u_k^* = \max\{u_k(x) | x \in S(\alpha_i)\}$$

Cette valeur sera fixée tout au long du processus de résolution.

Étape 2 $\forall r, r \geq 1$

Demander au décideur de fixer un point de référence $\bar{u}^{(r)}$ tel que $\bar{u}_k^{(r)} \leq u_k^*$.

Poser $r = 1$

Étape 3

Calculer les poids $\lambda_k^{(r)} = \frac{1}{u_k^* - \bar{u}_k^{(r)}}$, $k = 1, \dots, p$ et résoudre le problème (4.19). Soit $x^{(r)}$ la solution de compromis obtenue.

Étape 4

Compte tenu des valeurs $u_k(x^{(r)})$, $k = 1, \dots, p$ des fonctions objectifs u_k au point $x^{(r)}$, le décideur détermine trois classes d'objectifs

- (a) la classe des objectifs qu'il désire améliorer.
- (b) la classe des objectifs qu'il accepte de relaxer.
- (c) la classe des objectifs qu'il ne souhaite pas changer.

Ces classes sont représentées par les ensembles $I_A^{(r)}$, $I_R^{(r)}$, $I_C^{(r)}$ respectivement.

Si $I_A^{(r)} = \emptyset$, la procédure s'arrête. Sinon, le décideur doit fixer un autre niveau d'aspiration $\bar{u}_{(r)}$ pour les classes $I_R^{(r)}$ et $I_C^{(r)}$.

Pour $k \in I_A^{(r)}$, poser $\bar{u}_k^{(r)} = u_k(x^{(r)})$ et aller à l'étape 3.

4.5.2 Exemple numérique :

Soit le problème suivant donné dans \mathbf{R}^2

$$\begin{cases} \max Z_1 x = C_1(w)x \\ \max Z_2 x = C_2(w)x \\ sc \quad A_i(w)x \leq bi(w); i = 1, 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

où $C_1(w)$ et $C_2(w)$ sont des vecteurs aléatoires suivant des lois normales de moyennes respectives $\bar{C}_1 = (8, 4)^t$ et $\bar{C}_2 = (12, 5)^t$ et de matrices de covariances

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs (A_i, b_i) , $i = 1, 2$ sont multinormaux de moyennes respectives

$m_1(x) = 2x_2 - 8$ et $m_2(x) = x_1 - 10$ et de matrices de covariances

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Etape 1

Si les seuils de probabilité fixés par le décideur sont tels que

$$\alpha_1 = 0.933, \quad \alpha_2 = 0.936$$

$$\beta_1 = 0.841, \quad \beta_2 = 0.998$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_1) = 2.5, \quad \Phi^{-1}(\alpha_{12}) = 2.7$$

$$\Phi^{-1}(\beta_1) = 1, \quad \Phi^{-1}(\beta_2) = 2.9$$

Le problème multi-objectifs déterministe équivalent au problème donné est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max u_1(x) = 8x_1 + 4x_2 - \sqrt{0.5x_1^2 + 0.16x_2^2 + 2x_1x_2} \\ \max u_2(x) = 12x_1 + 5x_2 - 2.9\sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \\ sc \\ 2x_2 - 8 + 2.5\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \leq 0 \\ x_1 - 10 + 2.7\sqrt{x_2 + 2x_2^2 + 3} \leq 0 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Soit $(u_1^*, u_2^*) = (15.268, 12.302)$ le point idéal obtenu.

Etape 2

Soit $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)}) = (10 : 105; 11 : 216)$ un point de référence fixé par le décideur.

Etape 3

$$\lambda_1 = 0.193, \quad \lambda_2 = 0.920$$

La résolution du problème min-max avec les poids ci-dessus nous donne la première solution de compromis $(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) = (14.187, 15.984)$

Etape 4

Supposons que le décideur veuille améliorer la valeur du deuxième objectif

$(I_A^{(1)} = \{2\})$. Dans ce cas, il doit donner un nouveau point de référence lui permettant de calculer de nouveaux poids et trouver ainsi une autre solution.

4.6 Conclusion

L'information disponible sur les variables aléatoires contrôle la structure du problème déterministe équivalent associé à un problème multi-objectifs stochastique. La littérature fournit des méthodes de résolution si le modèle mathématique déterministe existe déjà sinon, il est indispensable de développer des méthodes de résolution spécifiques à la structure du problème.

Chapter 5

Problème du risque minimal multi-objectifs

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème du risque minimal multi-objectifs. Pour ce faire, nous transformerons d'abord le problème en question en un problème non linéaire puis nous adapterons la méthode de bisection à ce dernier pour trouver sa solution.

5.1 Etude du problème de risque minimal multi-objectifs

Considérons le problème du risque minimal multi-objectifs de seuils u_1, u_2, \dots, u_p décrit dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned} & \min P[C_1^t x \leq u_1] \\ & \min P[C_2^t x \leq u_2] \\ & \dots\dots\dots \\ & \min P[C_p^t x \leq u_p] \\ & \text{s.c} \\ & Ax \leq b, x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où x est un n -vecteur colonne, A est une matrice $m \times n$ à coefficients réels et b un m -vecteur-colonne. L'ensemble de décision $S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$. est un compact de \mathbb{R}^n . Ici, on suppose que chaque vecteur C_k suit une loi normale multivariée de moyenne \bar{C}_k et de matrice de covariance V_k .

Puisque chaque composante C_{kj} de C_k suit une loi normale, $C_k x$ suit aussi une loi normale de moyenne $\bar{C}_k x$ et de variance $x^t V_k x$. Dans ce cas

$\frac{C_k^t x - \overline{C_k^t} x}{\sqrt{x^t V_k x}}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite de moyenne 0 et de variance 1 .

Ainsi, chaque objectif dans (5,1) est transformé de la manière suivante

$$P_k = P[C_k^t x \leq u_k] = P\left[\frac{C_k^t x - \overline{C_k^t} x}{\sqrt{x^t V_k x}} \leq \frac{u_k - \overline{C_k^t} x}{\sqrt{x^t V_k x}}\right] = \Phi\left(\frac{u_k - \overline{C_k^t} x}{\sqrt{x^t V_k x}}\right) \quad (5.2)$$

Où Φ est la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite.

Sachant que Φ est une foction croissante, la minimisation des probabilités $P[C_k^t x \leq u_k]$, $k = 1, \dots, p$ se réduit à la minimisation des fonctions $\frac{u_k - \overline{C_k^t} x}{\sqrt{x^t V_k x}}$, $k = 1, \dots, p$ ou à la maximisation des fonctions $\frac{\overline{C_k^t} x - u_k}{\sqrt{x^t V_k x}}$, $k = 1, \dots, p$, donc le problème (5.1) se ramène au problème de programmation non linéaire fractionnaire multi-objectifs suivant:

$$\begin{aligned} \min f_k(x) &= \frac{\overline{C_k^t} x - u_k}{\sqrt{x^t V_k x}}, \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c. } x &\in S \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.2 Caractérisation des solutions efficaces

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la recherche des solutions efficaces du problème (5.2) au sens de la définition suivante:

Définition 5.2.1 $x^* \in S$ est efficace ou Pareto optimale pour le problème (5,2) si et seulement s'il n'existe aucun $x \in S$ tel que $f_k(x) \geq f_k(x^*) \forall k = 1, \dots, p$ et $f_k(x) > f_k(x^*)$ pour au moins un k .

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer les solutions efficaces des problèmes mulltiobjectifs déterministes (voir chapitre 2). L'une d'elle utilise une fonction de synthèse $\min_{k=1, \dots, p} \{f_k(x)\}$ et la maximise .

Dans ce cas, on obtient le problème suivant:

$$\max_{x \in S} \min_{k=1, \dots, p} \{f_k(x)\} \quad (5.4)$$

ou le problème équivalent

$$\begin{aligned}
 & \max h \\
 & f_k(x) \geq h, k = 1, \dots, p \\
 & x \in S \\
 & h \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

où h est une variables supplémentaire.

La condition $h \geq 0$ parait raisonable puisque nous nous intéressons à la politique qui garantit la réalisation des objectifs avec une probabilité supérieure ou égale $1/2$. Par conséquent, les inégalités suivantes donnent:

$$\begin{aligned}
 P[C_k^t x \geq u_k] \geq \frac{1}{2} & \iff P[C_k^t x \leq u_k] \leq \frac{1}{2} \\
 & \iff \forall k \quad \overline{C_k^t x} \geq u_k \\
 & \iff \overline{C_k^t x} - u_k \geq 0 \\
 & \iff h = \min_{k=1, \dots, p} \frac{\overline{C_k^t x} - u_k}{\sqrt{x^t V_k x}} \geq 0
 \end{aligned}$$

Théorème 5.2.1 *Toute solution optimale du problème (5,3) est pareto optimale pour le problème (5,2).*

Preuve: Supposons qu'aucune des solutions optimales du problème (5,3) est pareto optimale pour le problème (5,2). Soit $x^* \in S$ une solution optimale du problème (5,3). Puisque nous avons supposé qu'elle n'est pas pareto optimale pour le problème (5,2), il doit exister une solution $x \in S$ qui n'est pas optimale pour le problème (5,3) mais pour laquelle $f_k(x) \geq f_k(x^*)$ pour $k = 1, \dots, p$ et $f_k(x) > f_k(x^*)$ pour au moins un k et par la suite $\min_{k=1, \dots, p} \{f_k(x)\} \geq \min_{k=1, \dots, p} \{f_k(x^*)\}$.

Puisque x^* est une solution optimale pour le problème (5,3), x doit être aussi une solution optimale. Cette contradiction termine la démonstration du théorème.

Corollaire 5.2.1 *Si le problème (5.3) a une solution optimale unique, elle est Pareto optimale pour le problème (5.2).*

Dans la formulation (5.4), le paramètre h indique la valeur minimale de toutes les fonctions $f_k(x)$, *i.e.*

$$f_k(x) \geq h \iff \frac{\overline{C_k^t x} - u_k}{\sqrt{x^t V_k x}} \geq h \iff u_k - \overline{C_k^t x} + h \sqrt{x^t V_k x} \leq 0$$

Donc nous montrons que le problème (5,4) se ramène au problème suivant:

$$\begin{aligned} & \max h \\ \text{sc } & u_k - \overline{C}_k^t x + h\sqrt{x^t V_k x} \leq 0, k = 1, \dots, p \\ & x \in S \\ & h \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ce problème est non linéaire et non convexe, il est en général difficile de le résoudre. Cependant, si l'on fixe h à \bar{h} , résoudre le problème (5,5) revient à déterminer une solution réalisable $x_{\bar{h}}$ dans l'ensemble convexe

$$D = \left\{ \begin{array}{l} x \in R_+^n \\ \left| \begin{array}{l} u_k - \overline{C}_k^t x + \bar{h}\sqrt{x^t V_k x} \leq 0 \\ Ax \leq b \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

D'autre part, puisque D contient des contraintes non linéaires, nous l'approximons par un ensemble de demi-espaces fermés Dl contenant D dans le but de développer une méthode de résolution simple. Nous proposons donc une approximation qui utilise les valeurs propres de la matrice de covariance V_k .

5.3 Construction de la relaxation

Afin de définir cette relaxation, nous donnons d'abord quelques résultats relatifs aux valeurs propres des matrices symétriques définies positives. Les preuves de ces résultats sont données dans [23]

Soient σ_1^k et σ_n^k la plus petite et la plus grande valeur de la matrice de covariance V_k respectivement, les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\sigma_1^k x^t x \leq x^t V x \leq \sigma_n^k x^t x \forall x \in R^n$$

Sachant que $\sqrt{x^t x} \geq x_j \forall j = 1, \dots, n$ et $(x \geq 0)$, $(\sigma_1^k)^{\frac{1}{2}} x_j$ peut être utilisé comme une borne inférieure pour le terme non linéaire $\sqrt{x^t V x}$:

$$\sqrt{x^t V_k x} \geq (\sigma_1^k)^{\frac{1}{2}} x_j \forall j = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, p$$

En vertu de cette inégalité, on obtient:

$$u_k - \overline{C}_k^t x + h(\sigma_1^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq u_k - \overline{C}_k^t x + h\sqrt{x^t V_k x} \leq 0$$

Par conséquent, l'ensemble de décision D du problème (5.5) est inclu dans l'ensemblle de décision D_l du problème (5.6)

$$\begin{aligned} & \max h \\ \text{s.c } & u_k - \overline{C}_k^t x + h(\sigma_1^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p \\ & x \in S \\ & h \geq 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

C'est à dire que pour h fixé, l'ensemble

$$D = \left\{ \begin{array}{l} x \in R_+^n \\ \left| \begin{array}{l} u_k - \overline{C}_k^t x + \bar{h} \sqrt{x^t V_k x} \leq 0 \\ Ax \leq b \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

est inclu dans l'ensemble

$$D = \left\{ \begin{array}{l} x \in R_+^n \\ \left| \begin{array}{l} u_k - \overline{C}_k^t x + \bar{h}(\sigma_1^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq 0 \\ Ax \leq b \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

5.4 Méthode de résolution

La méthode développée ici utilise la méthode de bisection.

Etape 1: Donnez les valeurs initiales $h_a = 0, h_b = hmax, epsbis$.

Etape 2: poser $h_t = \frac{h_a + h_b}{2}$

Etape 3: Résoudre le système linéaire de D_l :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k - \overline{C}_k^t x + h(\sigma_1^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq 0 \\ Ax \leq b, x \geq 0 \end{array} \right.$$

Etape 4: S'il n'existe pas de solution réalisable, poser $h_b = h_t$ et retourner à l'étape 2.

Etape 5: Si $|h_t - h_{t-1}| > epsbis$ poser $h_a = h_t$ et retourner à l'étape 2.

Etape 6: Soit (x_t, h_t) la solution optimale de (6).

-Calculer $P_l = phi(h_t)$

-Calculer $hnew = \min_{k=1, \dots, p} \frac{\overline{C}_k^t x_t - u_k}{\sqrt{x_t^t V_k x}}$

-Calculer $p = phi(hnew)$

-Calculer $eps = p_l - p$

-Pour $k = 1, \dots, p$, Calculer les valeurs moyennes des fonctions objectifs

$\overline{C}_k^t x_t$ -Pour $k = 1, \dots, p$, Calculer $P_k = \Phi \left(\frac{u_k - \overline{C}_k^t x}{\sqrt{x^t V_k x}} \right)$

Etape 7: Si le décideur est satisfait, le processeur prend fin, sinon demander au décideur de changer certains paramètres (comme le h_{max} ou les seuils u_k) et recommencer.

5.5 Exemple d'application

Une entreprise fabrique deux types de produits à base de maïs, de houblon et de malt. Le fabricant désire connaître les quantités x_1 et x_2 de produit de type 1 et 2 respectivement à fabriquer à n de maximiser son chiffre d'affaire et minimiser le coût de transport.

contrainte maïs : $2,5x_1 + 7,5x_2 \leq 240$

contrainte houblon : $0,125x_1 + 0,125x_2 \leq 5$

contrainte malt : $17,5x_1 + 10x_2 \leq 595$

Le décideur fixe aussi:

prix unitaire moyen produit 1:

prix unitaire moyen produit 2:

écart-type prix unitaire produit 1:

écart-type prix unitaire produit 2:

chiffre d'affaire minimal escompté:

cout de transport moyen produit 1:

cout de transport moyen produit 2:

écart-type cout de transport unitaire produit 1:

écart-type cout de transport unitaire produit 2:

cout maximal de transport escompté:

valeur de h_{max} : $h_{max} =$

Résultat de l'application

Programme d'un problème bi-objectif ($p = 2$) pour optimiser la quantité

de deux produits ($n = 2$), sous trois contraintes sur x ($m = 3$)

««« Problème qui consiste à minimiser le cout de transport et à maximiser le chiffre d'affaire »»»

***** Objectif numero 1 ::: Chiffre d'affaire :::*****

Prix unitaire moyen produit 1 = 410
 Prix unitaire moyen produit 2 = 420
 Ecart-type prix unitaire produit 1 = 14.14
 Ecart-type prix unitaire produit 2 = 14.14
 Chiffre d'affaire minimal escompté = 1700

***** Objectif numero 2 ::: Cout de transport :::*****

Cout de transport moyen produit 1 = 100
 Cout de transport moyen produit 2 = 100
 Ecart-type cout de transport unitaire produit 1 = 14.14
 Ecart-type cout de transport unitaire produit 2 = 28.28
 Cout maximal de transport escompté = 720

La valeur $hmax = 6$

La valeur optimale obtenue par la résolution du D1**** $ht = 3.8693$

la solution optimale du problème D1***** $X = (0.00027919 ; 4.6536)$
 $Pl = 0.99995$

La valeur de $hnew = 1.9347$

$P = 0.97349$

$eps = 0.026458$

Le chiffre d'affaire moyen est : 1954.6148

Le cout de transport moyen est : 465.3851

La probabilité que le chiffre d'affaire de x soit superieur à 1700 est
 0.99995

probabilité que le cout de transport de x soit inferieur à 720 est
0.97349

««««««<Les resultats sont ils satisfaisants ?

Taper 1 pour NON ::: 2 pour OUI 1

Taper 1 pour "*hmax*" ::: 2 pour "*u*" 2

Chiffre d'affaire minimal éscopté = 1232

Cout maximal de transport éscopté = 711

La valeur optimale obtenue par la résolution du $Dl^{***} ht = 5.9999$

la solution optimale du problème $Dl^{*****} X = (3.8005 ; 0.029903)$
 $Pl = 1$

La valeur de $hnew = 6.1021$

$P = 1$

$eps = -4.6384e - 010$

Le chiffre d'affaire moyen est : 1570.7555

Le cout de transport moyen est : 383.0382

La probabilité que le chiffre d'affaire de x soit superieur à 1232 est 1

probabilité que le cout de transport de x soit inferieur à 711 est 1

««««««<Les resultats sont ils satisfaisants ?

Taper 1 pour NON ::: 2 pour OUI 1

Taper 1 pour "*hmax*" ::: 2 pour "*u*" 1

La valeur $hmax = 7$

La valeur optimale obtenue par la résolution du DI**** $ht = 6.3849$

la solution optimale du problème DI***** $X = (0.00081313 ; 3.7357)$
 $Pl = 1$

La valeur de $hnew = 3.1931$

$P = 0.9993$

$eps = 0.00070368$

Le chiffre d'affaire moyen est : 1569.3445

Le cout de transport moyen est : 373.6554

La probabilité que le chiffre d'affaire de x soit superieur à 1232 est 1

probabilité que le cout de transport de x soit inferieur à 711 est 0.9993

«««««<Les resultats sont ils satisfaisants ?

Taper 1 pour NON ::: 2 pour OUI 2

Conclusion générale

Nous avons traité dans ce mémoire des programmes linéaires où les données sont des variables aléatoires et les objectifs sont multiples et conflictuels. Nous nous sommes intéressés particulièrement au modèle du risque minimal multi-objectifs. Nous avons conçu un algorithme permettant de résoudre ce problème. Son principe est semblable à celui de la méthode de bisection. Il utilise les divisions successives de l'intervalle de définition du paramètre h par deux et passe par la résolution d'un système d'équations linéaires.

Nous souhaitons généraliser cet algorithme au cas de plusieurs produits et aborder le problème du risque minimal multi-objectifs en variables entières.

Bibliography

- [1] Bellahcene F., Using Feasible Directions in an Interactive Reference Point Approach for Multiobjective Stochastic Problems, Quatrième Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle : Théorie et Applications, 23–26 mai (2005), Marrakech, Maroc.
- [2] Ben Abdelaziz F., L'efficacité en programmation multiobjectifs stochastique, Ph.D. Thesis, Université de Laval, Québec, (1992).
- [3] Ben Abdelaziz F., Land P., and Nadeau R., Dominance and efficiency in multicriteria decision under uncertainty, *Theory and Decision* 47, (1999), 191-211.
- [4] Benayoun R., de Montgolfier J., Tergny J., and Larichev O., Linear programming with multiple objective functions, Step method (STEM), *Mathematical Programming* 1, (1971), 366-373.
- [5] Bereanu B., Programme de risque minimal en programmation linéaire stochastique. *C.R Acad. SCI. Paris* 259, (1964), 1383-1386.
- [6] Bowman V. J., On the relationship of the Tchebychev norm and the efficient frontier of multicriteria objectives, in Thiriez, H. and Zionts, S. (eds), *Multiple Criteria Decision Making*, Berlin, Springer, (1976), 76-85.
- [7] Caballero R., Cerdá E., Muñoz M.M., and Rey L., Relations among every several efficiency concepts in stochastic multiple objective programming. In: *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making* Haimes, Y.Y., Steuer, R. (Eds.), *Lectures notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer- Verlag, Berlin, Germany, (2000), 57-68.
- [8] Chankong V. and Haimes Y.Y., *Multiobjective Decision Making Theory and Methodologie*, Elsevier Science, New york, (1983).

- [9] Charnes A., Cooper W. W., Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, New York: Wiley, (1961).
- [10] Dantzig G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N J, (1963).
- [11] Evans G.W., An overview of techniques for solving multiobjective mathematical programs , Management Science 30 (11), (1984), 1268-1282.
- [12] Geoffrion A., Proper efficiency and theory of vector maximisation, Journal of Mathematical Analysis and Applications 22, (1968), 618-630.
- [13] Geoffrion A., Dyer J. and Feinberg A., An Interactive Approach for multicriteria optimization with an application to the operation of an academic department, Management Science 19, (1972), 357-368.
- [14] Goicoechea A., Dukstein L., and Bulfin R.L., Multiobjective stochastic Programming the PROTRADE-Method, Operation Research Society of America, (1976).
- [15] Hogg R.V., and Graig A.T., Introduction to mathematical Statistics, Mac- Millan Publishing Co., New York, (1989).
- [16] Hwang C.L., and Masud A.S.M, Multiple objective decision making methods and applications, Berlin, Springer-Verlag, (1979).
- [17] Ishii H., Nishida T., and Nanbu Y., A generalized chance constrained programming problem, Journal of Operations Research Society of Japan 21(1), (1978).
- [18] Kall, P., Wallace, S.W., Stochastic Programming, Willey Inter-science Series in Systems and Optimzation, (1994).
- [19] Kataoka S., A stochastic programming model, Econometrics 31 (1963), 181-196.
- [20] Kunsch P.L., and Teghem J., Nuclear fuel cycle optimization, European Journal of Operational Research 31, (1987), 240-249

- [21] Kunsch P.L., Application of STRANGE to energy studies, in Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty, Kluwer Academic Publishers, (1990), 117-130.
- [22] Leujeune M., Statistique, La théorie et ses application, Springer-Verlag, (2004).
- [23] Minc H., and Marcus M., A suvery of matrix Theory and Matrix inequalities, Allyn and Bacon Inc., Boston, (1964).
- [24] Nakayama H.,and Sawaragi Y. Satisficing trade-off method for interactive multiobjective programming methods, In M. Grauer and A. P. Wierzbicki (eds.) Proceedings of an International Workshop on Interactive Decision Analysis and Interpretative Computer Intelligence, Springer, (1984), 113-122.
- [25] Stancu-Minasian I.M., and Tigan St., The vectoriel minimum risk problem. in: Proceedings of Colloqium on Approximation and Optimization, Cluj-Napoca, (1984), 321-328.
- [26] Teghem J., and Kunsch P. L., Multi-objective decision making under uncertainty: an example for power systems, in Haimes Y.Y. and Chankong V., (Eds), Decision Making with Multiple Objective, Springer, (1985), 443-456.
- [27] Teghem J., Dufrane D., Thauvoye M. and Kunsch P. L., STRANGE: Interactive method for multiobjective linear programming under uncertainty, European Journal of Operational Research 26(1), (1986), 65-82.
- [28] Wets R., Stochastic programming, the state of the art, Springer-Verlag, (1983), 566-603.
- [29] White D.J., Optimality and efficiency, John Wiley and Sons, Chichester, (1982).