

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Automatique et Informatique Industrielle**

Présenté par
Kamelia SADOUN

Mémoire proposé et dirigé par **Mr Ahmed MAIDI**

Thème

**Simulation des systèmes à paramètres
distribués par la méthode des lignes
adaptative**

Mémoire soutenu publiquement le 27 juin 2018 devant le jury composé de :

M Mohand Achour TOUAT
Grade, UMMTO, Président

M Ahmed MAIDI
Professeur, UMMTO, Rapporteur

M Said GUERMAH
Grade, UMMTO, Examineur

M Redouane KARA
Grade, UMMTO, Examineur

Table des matières

Introduction générale	5
1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles	7
1.1 Introduction	7
1.2 Définition	7
1.3 Classification	8
1.3.1 EDP linéaires	8
1.3.2 EDP non linéaires	9
1.3.3 EDP homogènes et non homogènes	9
1.4 Conditions aux limites	10
1.4.1 Condition au bord de Dirichlet	11
1.4.2 Condition au bord de Neumann	11
1.4.3 Condition de Robin (mixtes)	11
1.5 Représentation des systèmes à paramètres distribués	12
1.6 Types de commandes d'un SPD	13
1.7 Types d'observations d'un SPD	13
1.8 Exemple d'un système à paramètres distribués	16
1.9 Conclusion	17
2 Interpolation polynomiale	18
2.1 Introduction	18
2.2 Définition	18
2.3 Méthodes d'interpolation	19
2.3.1 Matrice de Vander monde	19
2.3.2 Polynôme de Newton	20
2.3.3 Polynôme de Lagrange	21
2.4 Erreur d'interpolation	24
2.5 Définition de l'approximation	24
2.5.1 Application pour l'approximation des dérivées	25
2.6 Conclusion	28

3	Méthode des lignes	29
3.1	Introduction	29
3.2	Méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles	29
3.2.1	Méthodes analytiques	29
3.2.1.1	Méthode de séparation des variables	29
3.2.1.2	Méthode des caractéristiques	32
3.2.2	Méthodes numériques	33
3.2.2.1	Méthode des différences finies	33
3.2.2.2	Méthode des lignes (semi discrétisation)	34
3.3	Conclusion	40
4	Méthode des lignes adaptative	41
4.1	Introduction	41
4.2	Principe de la méthode des lignes adaptative	41
4.3	Équation de la chaleur	42
4.3.1	Problème de Dirichlet	42
4.3.2	Problème de Neumann	45
4.4	Équation de la chaleur avec une source externe	48
4.4.1	Problème de Dirichlet	48
4.4.2	Problème de Neumann	51
4.5	Équation convection-diffusion-réaction	54
4.5.1	Problème de Dirichlet	54
4.5.2	Problème de Neumann	57
4.6	Conclusion	60
	Conclusion générale	61

Table des figures

1.1	Classification des équations aux dérivées partielles.	10
1.2	Types de commandes et d'observations d'un SPD.	15
1.3	Mouvement d'une corde vibrante.	16
2.1	Polynôme de Lagrange de degré 1.	22
2.2	Polynôme de Lagrange de degré 2.	23
2.3	Dérivée première de la fonction sinus	26
2.4	Dérivée seconde de la fonction sinus.	28
3.1	Schémas d'un maillage uniforme.	34
3.2	Solution numérique de l'équation de la chaleur avec les conditions de Dirichlet.	37
3.3	Solution numérique de l'équation de la chaleur (conditions de Neumann).	40
4.1	Schéma de simulation.	41
4.2	Solution numérique de l'équation de la chaleur (conditions de Dirichlet).	44
4.3	Solution numérique de l'équation de la chaleur (condition de Neumann).	47
4.4	Solution de l'équation de la chaleur avec une source externe (conditions de Dirichlet).	50
4.5	Solution de l'équation de la chaleur avec une source externe (condition de Neumann).	53
4.6	Solution de l'équation convection-diffusion-réaction (conditions de Dirichlet).	56
4.7	Solution de l'équation convection-diffusion-réaction (conditions de Neumann).	59

Liste des tableaux

2.1	Table des différences divisées.	21
-----	---	----

Introduction générale

L'automatique, en tant que science, a évolué au cours des dernières années vers l'étude et la maîtrise des systèmes de plus en plus complexes. La plupart de ces systèmes sont des systèmes à paramètres distribués dits aussi systèmes à paramètres répartis. Ces systèmes particuliers sont définis dans un espace de dimension infinie et décrits par des équations aux dérivées partielles qui modélisent un grand nombre de phénomènes physiques comme la propagation des ondes, la diffusion de la chaleur, l'électromagnétisme.

Très souvent la plupart des systèmes réels sont très complexes pour les évaluer analytiquement. Pour cela, il est nécessaire de procéder de manière numérique via une simulation afin d'estimer les caractéristiques du système.

Pour la simulation des systèmes à paramètres distribués, il existe plusieurs méthodes numériques. La méthode des lignes consiste à discrétiser le domaine spatial en un nombre fini de points pour se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires. Quand le nombre de point est petit, on risque de perdre la précision, et pour un nombre de point grand on aura besoin d'une grande capacité de calcul, alors le choix de nombre de point de discrétisation est très important afin d'assurer la précision de la solution avec moins d'effort de calcul.

L'objectif de ce travail est l'étude de la méthode des lignes adaptative et son application sur des exemples physiques comme l'équation de la chaleur, l'équation de la chaleur avec une source externe et le système convection-diffusion-réaction.

Le mémoire est structuré de la façon suivante :

Le premier chapitre est dédié aux généralités sur les équations aux dérivées partielles contenant la définition, la classification et les conditions aux limites. En suite la représentation mathématique des systèmes à paramètres distribués est présentée tout en respectant les types de commande et d'observation. La fin du chapitre présente un exemple illustratif d'un système à paramètres distribués.

Le second chapitre est consacré à l'interpolation polynomiale où on présente quelques méthodes d'interpolation comme la méthode de Newton, la matrice de Vander mode et la méthode de Lagrange. Le chapitre se termine par une application pour l'approximation numériques des dérivées.

Le troisième chapitre étudie quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles. En premier lieu, les méthodes analytiques la méthode de séparation des variables et la méthode des courbes caractéristique. En suite les méthodes numériques (la méthode des différences finies et la méthode des lignes (semi discrétisation) expliquées dans le cas des conditions aux limites de types Dirichlet et Neumann.

Le dernier chapitre présente la méthode des lignes adaptative où on fait varier le nombre de points de discrétisation après chaque intervalle de temps. Trois systèmes différents seront simulés avec cette méthode : l'équation de la chaleur, l'équation de la chaleur avec une source externe et le système convection-diffusion-réaction.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont très utilisées dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques.

Ce premier chapitre est consacré à des généralités sur les EDP portant sur la définition, la classification, les conditions aux limites. En suite on s'intéresse à la représentation mathématique des systèmes distribués, aux types de commandes et d'observations. A la fin l'exemple du cas du déplacement d'une corde vibrante est présenté.

1.2 Définition

Une équation aux dérivées partielles est une équation qui met en relation des dérivées partielles. Elles sont utilisées dans la modélisation des phénomènes physiques comme les propagations des ondes, diffusion de chaleur, électromagnétisme...etc.

Si u est une fonction à deux variables $x, y \in \Omega$ où Ω est un domaine ouvert dans R^2 donc une EDP est une relation de la forme

$$f\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (1.1)$$

L'ordre d'une EDP est le plus grand degré de dérivation présent dans l'équation.

Un exemple d'une EDP du premier ordre est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Un autre exemple d'EDP du second ordre est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.3)$$

La dimension d'une EDP est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u .

La résolution d'une EDP consiste à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω tout en respectant certaines conditions (conditions aux limites et conditions initiales).

La différence entre les équations aux dérivées partielles (EDP) et les équations différentielles ordinaires (EDO) est que la solution d'une EDP est une fonction à plusieurs variables et la solution d'une EDO est une fonction à une seule variable [1].

1.3 Classification

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées comme équations linéaires, non linéaires, homogènes et non homogènes [4].

1.3.1 EDP linéaires

Une équation aux dérivées partielles est dite linéaire si :

1. La puissance des variables indépendantes et de chaque dérivée partielle de cette équation est égale à un.
2. Les coefficients des variables indépendantes et de chaque dérivée partielle de cette équation sont constants.

Par exemple, l'équation suivante :

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

est linéaire.

Parmi les équations aux dérivées partielles linéaires, on peut citer :

— L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

— L'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

— L'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.7)$$

— L'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.8)$$

où $i = \sqrt{-1}$

Cette équation admet une solution avec un caractère oscillatoire.

1.3.2 EDP non linéaires

Une EDP est dite non linéaire si elle ne vérifie pas les conditions citées précédemment. Parmi les équations aux dérivées partielles non linéaires, on trouve :

— L'équation d'avection

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad (1.9)$$

— L'équation sinus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \sin u \quad (1.10)$$

— L'équation sinus hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \sinh u \quad (1.11)$$

— L'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \exp \pm u \quad (1.12)$$

— L'équation non linéaire de Schrödinger

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (1.13)$$

1.3.3 EDP homogènes et non homogènes

Une EDP d'ordre quelconque est homogène si tous les termes de l'équation contiennent la variable indépendante u ou sa dérivée, dans le cas contraire l'équation est non homogène.

Exemples

Une EDP homogène linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.14)$$

Une EDP non homogène linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \quad (1.15)$$

Une EDP non linéaire non homogène

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{u} = x \quad (1.16)$$

L'EDP linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme suivante :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = G \quad (1.17)$$

si $G = 0$, l'équation est homogène

Cette équation peut être :

— Parabolique

Si $a^2 - 4ac = 0$, alors l'équation (1.17) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.18)$$

Cette équation est dite aussi de la chaleur ou de diffusion.

— Hyperbolique

Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation (1.17) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.19)$$

Cette équation est appelée aussi équation des ondes.

— Elliptique

Si $b^2 - 4ac < 0$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.20)$$

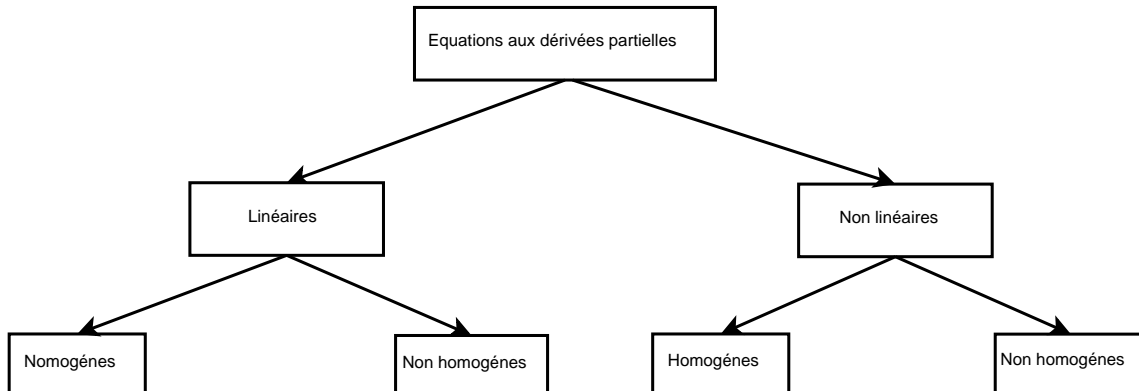


FIGURE 1.1 – Classification des équations aux dérivées partielles.

1.4 Conditions aux limites

La résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) consiste à chercher la solution homogène et la solution particulière. La solution générale est la somme des deux solutions.

La détermination de la solution particulière nécessite la prise en considération de

certaines conditions concernant ces dérivées partielles ce qu'on appelle les conditions aux limites ou les conditions aux bords qui sont :

1.4.1 Condition au bord de Dirichlet

On appelle une condition au bord de Dirichlet où on impose la valeur de la fonction u recherchée sur le bord $\partial\Omega$, c'est à dire :

$$\left\{ u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \partial\Omega \right. \quad (1.21)$$

Si $f(x, t) = 0$ la condition au bord est dite homogène.

1.4.2 Condition au bord de Neumann

On appelle condition au bord de Neumann une condition où on impose la valeur de la dérivée de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$ ($\Omega \in \mathbb{R}^N$)

$$\left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = g(x) \quad x \in \partial\Omega \right. \quad (1.22)$$

Où $g(x)$ est une fonction donnée.

Si $g(x) = 0$ la condition au bord est dite homogène.

1.4.3 Condition de Robin (mixtes)

Une condition au bord de Robin est une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée et de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$ ($\Omega \in \mathbb{R}^N$)

La condition de Robin est :

$$\left\{ \alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x) \quad x \in \partial\Omega \right. \quad (1.23)$$

Si $f(x) = 0$ la condition est dite homogène.

Les conditions citées précédemment sont des conditions aux limites homogènes, mais il existe d'autres qui peuvent être non homogènes (c'est-à-dire que la commande est appliquée aux frontières). Dans ce cas on peut ramener le problème au cas homogène en utilisant certaines transformations comme le changement de fonction ou la fonction de Dirac.

1.5 Représentation des systèmes à paramètres distribués

Un système est un ensemble d'éléments interconnectés pour réaliser une fonction. Il existe plusieurs types de systèmes dont les systèmes localisés notés SPL et les systèmes à paramètres distribués notés également SPD appelé aussi systèmes à paramètres répartis.

On peut définir les systèmes distribués comme des systèmes complexes particuliers définis dans un espace de dimension infinie, c'est-à-dire que le nombre de variables caractérisant l'état du système est infinie. Les modèles utilisés pour leur description sont des équations aux dérivées partielles qui mettent en jeu des variables d'espace et de temps lorsque il s'agit d'un phénomène d'évolution.

La différence entre les systèmes localisés et les systèmes distribués est que les systèmes localisés sont représentés par des équations différentielles ordinaires EDO dans un espace de dimension finie contrairement aux systèmes distribués qui sont représentés par des EDP. D'autre part la notion des systèmes localisés est issue d'une approximation conceptuelle consistant à ignorer la dépendance des paramètres par rapport à la géométrie des éléments. Une telle approximation n'est pas toujours acceptable soit parce que l'objectif de l'étude est contraire aux hypothèses déjà posées soit parce que la nature des systèmes et la géométrie sont essentielles dans la modélisation. Dans ce cas, il faut prendre en considération la nature distribuée des phénomènes [2].

En résumé, on peut obtenir deux modèles différents pour le même système soit avec des EDP (système à paramètres distribués) soit avec des EDO (système à paramètres localisés) en fonction des objectifs et des hypothèses [2].

D'une façon générale, un SPD linéaire à deux variables indépendantes, variable temporelle et une variable d'espace dans le cas mono dimensionnel désignées respectivement t, x est décrit par les données suivantes :

- Un domaine spatial borné de \mathbb{R} , $\Omega = [0, L]$ et de frontière $\partial\Omega = \{0, L\}$
- Un domaine temporel $T = [0, +\infty[$
- Une équation d'état (ou d'évolution) à l'intérieur du domaine $\Omega \times T$

$$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = A(X(x, t)) + B(u(x, t)) \quad (1.24)$$

Avec $t \in T$ et $0 < x < L$

- Une équation de sortie sur $\Omega \times T$

$$y(x, t) = C(X(x, t)) \quad (1.25)$$

- Des conditions sur la frontière $\partial\Omega$ appelées conditions aux limites :

$$\mathcal{L}(X(x, t)) = u(x, t) \quad (1.26)$$

$x \in \partial\Omega$

- Des conditions initiales ($t = 0$) sur Ω

$$\mathcal{H}(X(x, 0)) = 0 \quad (1.27)$$

$A, B, C, \mathcal{L}, \mathcal{H}$ sont des matrices d'opérateurs différentiels spatiaux bornés ne comportent que des dérivées par rapport à la variable d'espace x .

A, B, C désignent respectivement l'opérateur d'état, l'opérateur de commande et l'opérateur de sortie (ou d'observation) [3].

1.6 Types de commandes d'un SPD

La commande est une notion très importante dans la définition des systèmes, elle se traduit par la détermination d'une loi $u(t)$ qui assure la réalisation d'un objectif pour lequel le système a été conçu.

Les commandes qu'on peut appliquer sur les systèmes à paramètres distribués à l'intérieur du domaine Ω sont :

- La commande distribuée interne décrite sur $\Omega \times T$ par :

$$u(x, t) = b(x)u_d(t) \quad (1.28)$$

- La commande de type localisée (commande par zone)

Cette commande est définie sur un sous-ensemble de $\Omega_i \times T$ si la commande est appliqué sur p zones, on a la forme suivante :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^p b_i(x)u_{d_i}(t) \quad (1.29)$$

Où $b(x)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneur.

$u_{d_i}(t)$: le signal d'entrée relatif à la zone i

- La commande ponctuelle :

Agissant sur un ou plusieurs points de Ω .

- La commande aux frontières :

Cette commande est définie sur la frontière $\partial\Omega$ peut aussi apparaitre sous forme zone ou ponctuelle.

- La commande par balayage :

Pour laquelle la zone ou/et points d'action sont mobiles dans Ω [3].

1.7 Types d'observations d'un SPD

L'observabilité prend en considération l'équation de sortie.

Les types d'observation des systèmes distribués sont :

- L'observation distribuée : sur $\Omega \times T$ ou sur un sous-ensemble de $\Omega \times T$

- l'observation ponctuelle : agissant sur un ou plusieurs points x_i de Ω ou / et de $\partial\Omega$ (observation aux frontières).

$$y_i(t) = y(x_i, t) = \int_{\Omega} \delta(x - x_i)z(x, t)dz \quad (1.30)$$

- L'observation par balayage :

Pour laquelle les points d'observations (système de capteurs) sont mobiles dans Ω

- L'observation par moyennage spatial : elle est définie par l'intégrale suivante :

$$y(t) = \int_{\Omega} c(x)z(x, t)dx \quad (1.31)$$

Où $c(x)$ caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs [3].

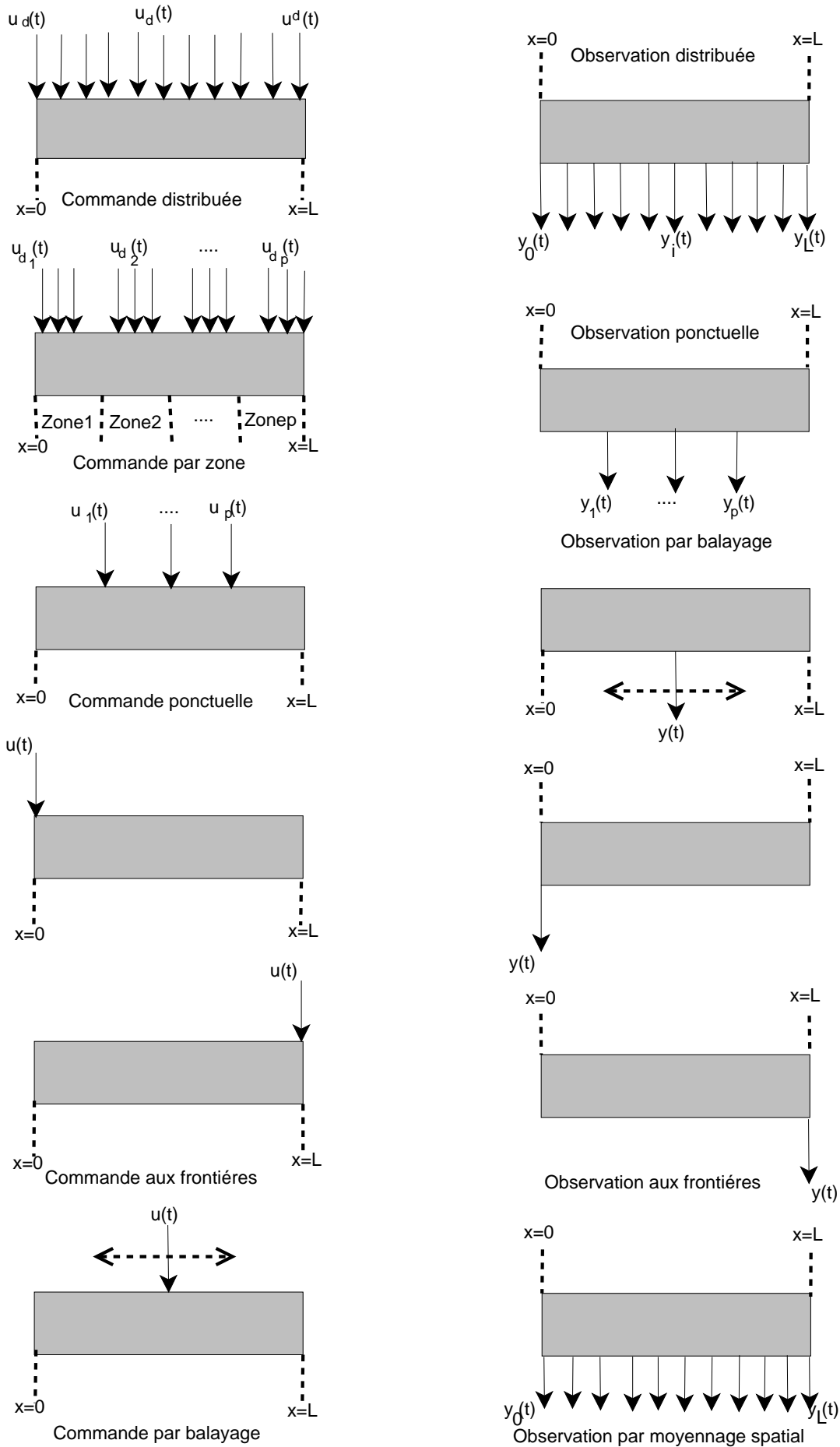


FIGURE 1.2 – Types de commandes et d’observations d’un SPD.

1.8 Exemple d'un système à paramètres distribués

Comme exemple d'un système à paramètres distribués on considère le problème de déplacement d'une corde vibrante [3].

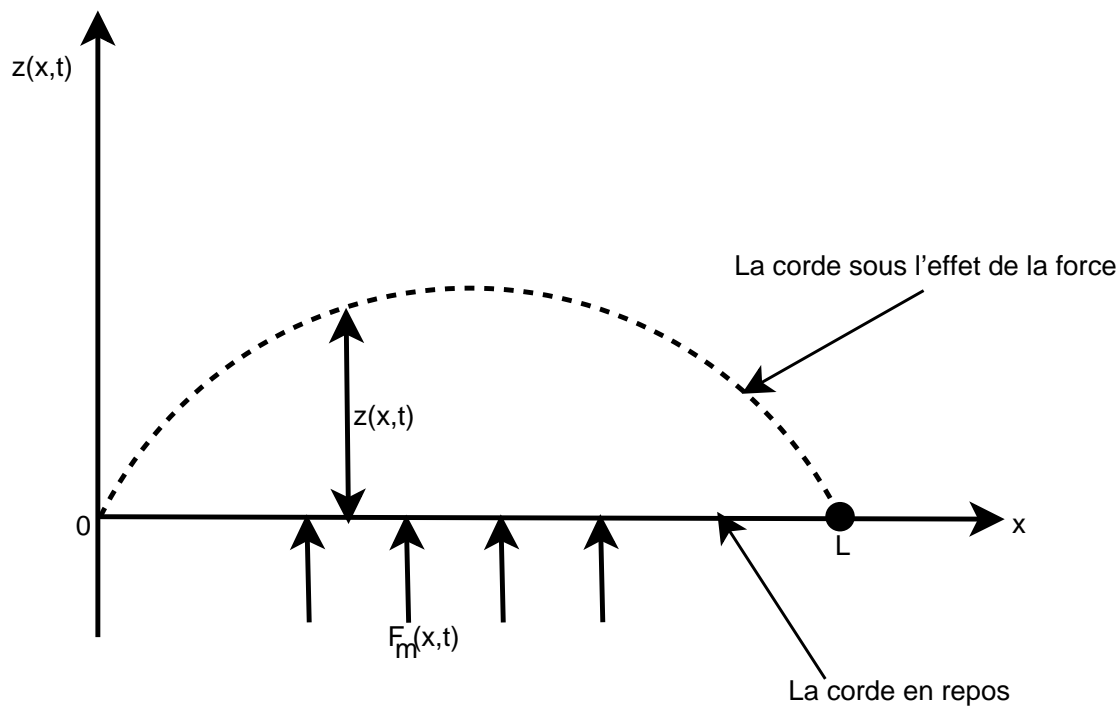


FIGURE 1.3 – Mouvement d'une corde vibrante.

La figure 1.3 représente le mouvement d'une corde vibrante uniforme de longueur L et d'une densité massique ρ_m exprimée en unité de masse par unité de longueur.

Cette corde est fixée à ses extrémités $x = 0$ et $x = L$ d'une manière tendue, par conséquent les conditions aux limites imposées sont les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} z(0, t) = 0 \\ z(L, t) = 0 \end{cases}$$

On suppose que la tension Γ reste constante pour des déplacements faibles et la force de gravité est trop petite (négligeable par rapport à la tension Γ). Par conséquent, la corde se déplace juste par l'effet de la force $F_m(x, t)$ qui est supposée maximale au milieu de la corde et son action décroît en s'approchant de ses extrémités et deviendra nulle en ces points ce qui fait $F_m(0, t) = F_m(L, t) = 0$.

Si $F_m(x, t) = 0$ veut dire que la corde est en repos, ce qui correspond aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} z(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial z(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

L'équation d'onde [3] qui décrit le déplacement de la corde $z(x, t)$ est comme suit :

$$\rho_m \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = \Gamma \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} + F_m(x, t) \quad (1.32)$$

1.9 Conclusion

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées comme des EDP linéaires, homogènes, non linéaires et non homogènes. La résolution de ces équations nécessite d'imposer des conditions dites conditions aux limites qui peuvent être de type Dirichlet, Neumann ou mixtes.

Les systèmes physiques peuvent avoir des modèles mathématiques différents. Soit des équations différentielles ordinaires ou bien des équations aux dérivées partielles tout dépend des objectifs et des hypothèses.

Nous concluons que plusieurs types de commande et d'observation existent dans le cas d'un système à paramètres distribués.

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

2.1 Introduction

En analyse numérique, on rencontre souvent des difficultés pour dériver ou intégrer des fonctions. Pour cela, on utilise généralement un polynôme d'interpolation afin d'approximer ces fonctions.

Il existe différentes méthodes d'interpolation à savoir la méthode de Vander mode, la méthode de Newton ainsi que le polynôme de Lagrange. Dans les sections qui suivent nous allons présenter et illustrer ces méthodes avec des exemples. Puis une application pour l'approximation des dérivées première et seconde sera présentée dans le cas du polynôme de Lagrange.

2.2 Définition

L'interpolation est une opération mathématique qui permet de construire une courbe à partir d'un nombre fini de points (résultats expérimentaux), autrement dit trouver un modèle mathématique (polynomiale, trigonométrique, exponentiel) à fin de décrire les données au moyen d'une expression mathématique utilisable c'est à dire calculable, dérivable et intégrable.

L'interpolation polynomiale consiste à approcher une fonction f dont on connaît n points par un polynôme.

Étant donné une suite finie d'abscisses x_i ($0 \leq i \leq n$) et une suite finie de valeurs réelles f_i ($0 \leq i \leq n$) que prend une certaine fonction en ces points, on peut trouver un polynôme p_n de degré n tel que

$$p_n(x_i) = f_i \tag{2.1}$$

pour tout $0 \leq i \leq n$

L'unicité du polynôme :

La forme générale d'un polynôme de degré n est :

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.2)$$

On suppose l'existence de deux polynômes de degré n : $p(x)$ et $q(x)$ qui passent par les $(n + 1)$ points d'interpolation, on considère en suite la différence

$$P(x) = p(x) - q(x) \quad (2.3)$$

$$P(x_i) = p(x_i) - q(x_i)$$

$$P(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

Pour i allant de 0 à n le polynôme $P(x)$ posséderait donc $n + 1$ racines, donc il est impossible d'avoir plus d'un polynôme.

Alors, pour $(n + 1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, \dots, n$ on fait correspondre qu'un seul polynôme de degré n . Le polynôme d'interpolation est unique.

2.3 Méthodes d'interpolation

Il existe plusieurs méthodes pour assurer l'existence du polynôme d'interpolation passant par les $(n + 1)$ points.

2.3.1 Matrice de Vander monde

Soit $p(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, n$:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = f(x_i)$$

C'est un système linéaire de $(n + 1)$ équations en $(n + 1)$ inconnus qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Une fois la forme matricielle est obtenue, il reste à déterminer les a_i par résolution de ce système linéaire, qui forment le polynôme recherché [5].

Exemple

Soient les points suivants :

$(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$, $(3, 28)$.

La forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Les coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 obtenus après résolution du systèmes d'équations linéaires sont :

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$$

D'où le polynôme d'interpolation :

$$p(x) = 1 + x^3$$

La matrice de Vandermode augmente avec la taille du système. Pour cette raison, cette méthode est rarement utilisée.

2.3.2 Polynôme de Newton

La méthode de Newton [5] utilise un polynôme sous la forme suivante :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (2.4)$$

Avec les coefficients a_i sont les différences divisées, tel que $a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$

Les différences divisées se calculent comme suit :

— La première différences divisées

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.5)$$

— La n^{es} différences divisées

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{(x_n - x_0)} \quad (2.6)$$

Exemple

Soient les points d'interpolation suivants :

$$(0, 2), (2, 4), (4, 18), (6, 36)$$

La table suivante est la table des différences divisées qui permet de calculer les coefficients a_i du polynôme.

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})$
0	2			
		1		
2	4		$3/2$	
		7		$-1/6$
4	18		$1/2$	
		9		
6	36			

TABLE 2.1 – Table des différences divisées.

A partir de la table des différences divisées, on obtient les coefficients a_i qui sont sur la diagonale tel que :

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 3/2, a_3 = -1/6$$

D'où le polynôme de Newton :

$$P(x) = 2 + 1(x - x_0) + \frac{3}{2}(x - x_0)(x - x_1) - \frac{1}{6}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{15}{6}x^2 - \frac{10}{3}x + 2 \quad (2.7)$$

2.3.3 Polynôme de Lagrange

La méthode de Lagrange est une façon simple de construire un polynôme d'interpolation à partir d'un nombre fini de points.

Étant donné $(n + 1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $(i = 0, \dots, n)$, on peut construire $(n + 1)$ polynômes $L_i(x)$ de degré n satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \end{cases}$$

C'est dire que $L_i(x)$ prend la valeur de 1 en x_i et s'annule en tout autres points.

Polynôme de degré 1

Le polynôme de Lagrange de degré 1 est une droite qui passe par les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$

Dans ce cas, il faut déterminer le polynôme de degré n qui vérifie :

$$\begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1(x_1) = 1 \\ L_1(x_0) = 0 \end{cases}$$

Pour s'assurer de la valeur 1 en $x = x_0$ et $x = x_1$ on effectue les divisions suivantes :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

De même pour

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Alors, le polynôme de Lagrange de degré 1 est :

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \quad (2.8)$$

Exemple

Soient les points suivants : $(2, 3)$, $(5, -6)$

L'équation de la droite qui passe par ces deux points est un polynôme de Lagrange de degré 1 tel que :

$$P(x) = 3 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} - 6 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$P(x) = 3 \frac{(x - 5)}{(2 - 5)} - 6 \frac{(x - 2)}{(5 - 2)}$$

D'où l'équation de la droite ou le polynôme de Lagrange de degré 1 est :

$$P(x) = -3x + 9$$

La figure 2.1 montre la courbe du polynôme $P(x)$

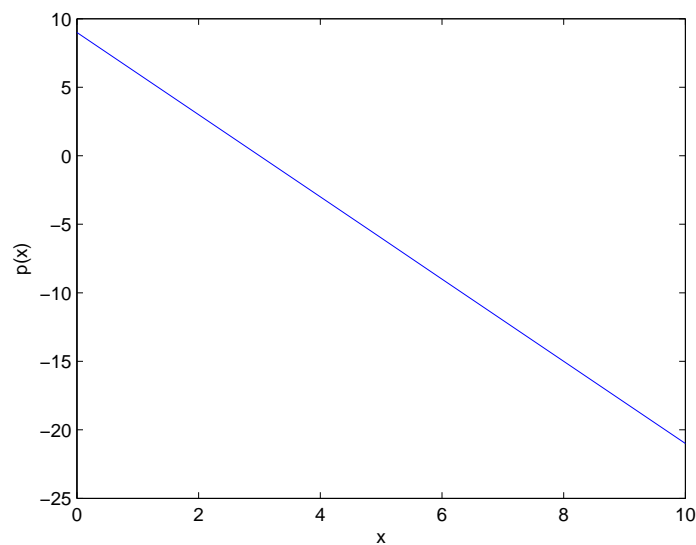


FIGURE 2.1 – Polynôme de Lagrange de degré 1.

Polynôme de degré 2

Le polynôme de Lagrange degré 2 est un polynôme qui passe par 3 points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$

Avec la même procédure, on construit les 3 fonctions $L_i(x)$ tel que

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Alors, le polynôme de Lagrange de degré 2 est sous la forme suivante :

$$p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \quad (2.9)$$

Exemple

Soient les points suivants : $(2, 4)$, $(6, 14)$ et $(8, -2)$

$$p_2(x) = 4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + 14 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} - 2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Après le calcul on obtient :

$$p_2(x) = -20x^2 - 20x + 168$$

Le polynôme de Lagrange de degré 2 est illustré par la figure 2.2

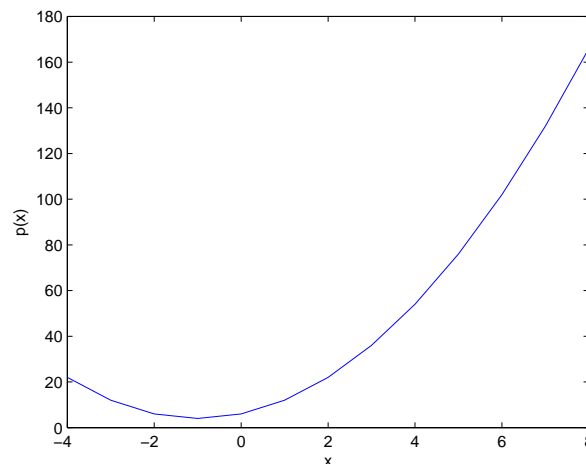


FIGURE 2.2 – Polynôme de Lagrange de degré 2.

Polynôme de degré n

Dans le cas où le nombre de points est supérieur à 3, c'est-à-dire on a n points d'interpolation, donc on doit déterminer la fonction $L_i(x)$ tel que

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Donc la forme générale du polynôme de Lagrange [5] de degré n est :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad (2.10)$$

Exemple

Soient les points suivants :

$(0, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 6)$ et $(5, 8)$

Le polynôme de Lagrange est :

$$P(x) = f(x_1) \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + f(x_2) \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} +$$

$$f(x_3) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + f(x_4) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

2.4 Erreur d'interpolation

Les points d'interpolation peuvent ne pas être exacts, c'est à dire entachés des erreurs de mesure pour cela on parle de l'erreur d'interpolation exprimée de la façon suivante :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (2.11)$$

tel que $f(x)$ est la fonction à approximer en tout points x .

$E_n(x)$ est l'erreur.

$p_n(x)$ est la polynôme d'interpolation.

Si $E(x_i) = 0$ pour i allant de 0 à n donc l'erreur est nulle au points d'interpolation, c'est-à-dire que le polynôme passe exactement par ces points [5].

2.5 Définition de l'approximation

L'approximation est une technique d'approcher une fonction $f(x)$ connue en un nombre fini de points x_0, x_1, \dots, x_n par une fonction $p(x)$ plus simple et facilement calculable. En terme mathématique, l'approximation consiste à minimiser la distance qui sépare la

fonction $f(x)$ et $p(x)$, et l'interpolation impose que les fonctions $f(x)$ et $p(x)$ coïncident aux points x_i .

L'approximation polynomiale est la plus utilisée, car elle permet facilement de minimiser l'erreur d'approximation en augmentant le degré du polynôme [6].

2.5.1 Application pour l'approximation des dérivées

— Première dérivée :

Soient les points suivants :

$(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ et $(x_3, f(x_3))$.

Le polynôme de Lagrange qui passe par ces points est :

$$P(x) = f(x_1) \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2) \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (2.12)$$

Ainsi la dérivée de $f(x)$ peut être approximée par $P'(x)$ comme suit :

$$\begin{aligned} P'(x) = f'(x) = & f(x_1) \frac{(x-x_1-2\Delta x)}{2\Delta x^2} + f(x_2) \frac{(x-x_1-\Delta x)}{2\Delta x^2} + f(x_3) \frac{(x-x_1-2\Delta x)}{\Delta x^2} \\ & + f(x_2) \frac{(x_1-x)}{\Delta x^2} + f(x_3) \frac{(x-x_1-\Delta x)}{2\Delta x^2} + f(x_3) \frac{(x-x_1)}{2\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La dérivée au point x_1

$$f'(x_1) = \frac{-3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)}{2\Delta x} \quad (2.14)$$

La dérivée au points x_2

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2\Delta x} \quad (2.15)$$

La dérivée au point x_3

$$f'(x_3) = \frac{f(x_1) - 4f(x_2) + 3f(x_3)}{2\Delta x} \quad (2.16)$$

A partir de ces dérivées, on peut déduire les formes générales de la première dérivée comme suit :

Pour $i = 1$ (différence avant)

$$f'(x_1) = \frac{-3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)}{2\Delta x} \quad (2.17)$$

Pour $2 \leq i \leq n-1$ (différence centrée)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} \tag{2.18}$$

Pour $i = n$ (différence arrière)

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n-2}) - 4f(x_{n-1}) + 3f(x_n))}{2\Delta x} \tag{2.19}$$

La figure 2.3 représente l'approximation numérique de la fonction cosinus.

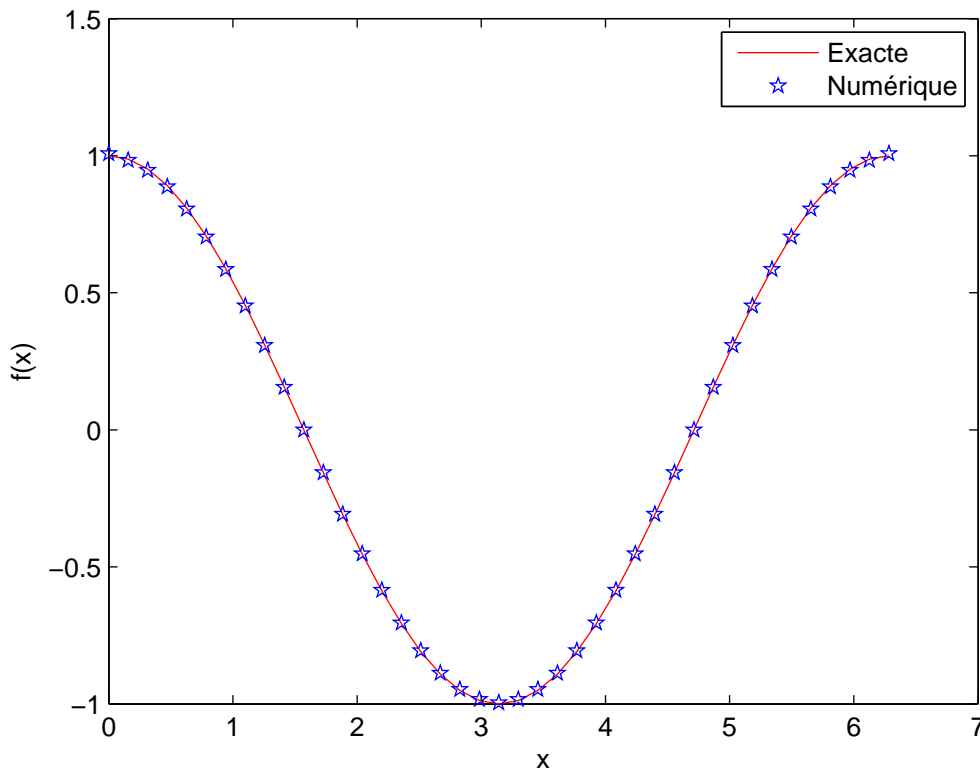


FIGURE 2.3 – Dérivée première de la fonction sinus .

— Deuxième dérivée :

Pour la deuxième dérivée, on utilise le polynôme de Lagrange d'ordre 4 suivant :

$$\begin{aligned}
 P(x) = & f(x_1) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} + f(x_2) \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \\
 & + f(x_3) \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + f(x_4) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x)$ peut être approximée par $P'(x)$ comme suit :

$$f'(x) = P'(x) = \frac{2\Delta x f(x_1) + 5\Delta x f(x_2) + 4\Delta x f(x_3) - \Delta x f(x_4) - x f(x_1) + 3x f(x_2)}{\Delta x^3} + \frac{x_1 f(x_1) - 3x f(x_3) - 3x_1 f(x_2) + x f(x_4) + 3x_1 f(x_3) - x_1 f(x_4)}{\Delta x^3} \quad (2.21)$$

La dérivée au point x_1

$$f''(x_1) = \frac{2f(x_1) - 5f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4)}{(\Delta x)^2} \quad (2.22)$$

La dérivée au point x_2

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{(\Delta x)^2} \quad (2.23)$$

La dérivée au point x_3

$$f''(x_3) = \frac{f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2)}{(\Delta x)^2} \quad (2.24)$$

La dérivée au point x_4

$$f''(x_4) = \frac{4f(x_2) - f(x_1) - 5f(x_3) + 2f(x_4)}{(\Delta x)^2} \quad (2.25)$$

A partir de ces dérivées on obtient les formes générales de la deuxième dérivée comme suit :

Pour $i = 1$

$$f''(x_1) = \frac{2f(x_1) - 5f(x_2) + 4f(x_3) - f(x_4)}{(\Delta x)^2} \quad (2.26)$$

Pour $2 \leq i \leq n - 1$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2} \quad (2.27)$$

Pour $i = n$

$$f''(x_n) = \frac{4f(x_{n-2}) - f(x_{n-3}) - 5f(x_{n-1}) + 2f(x_n)}{(\Delta x)^2} \quad (2.28)$$

L'approximation numérique de la deuxième dérivée de la fonction sinus est donnée par la figure 2.4

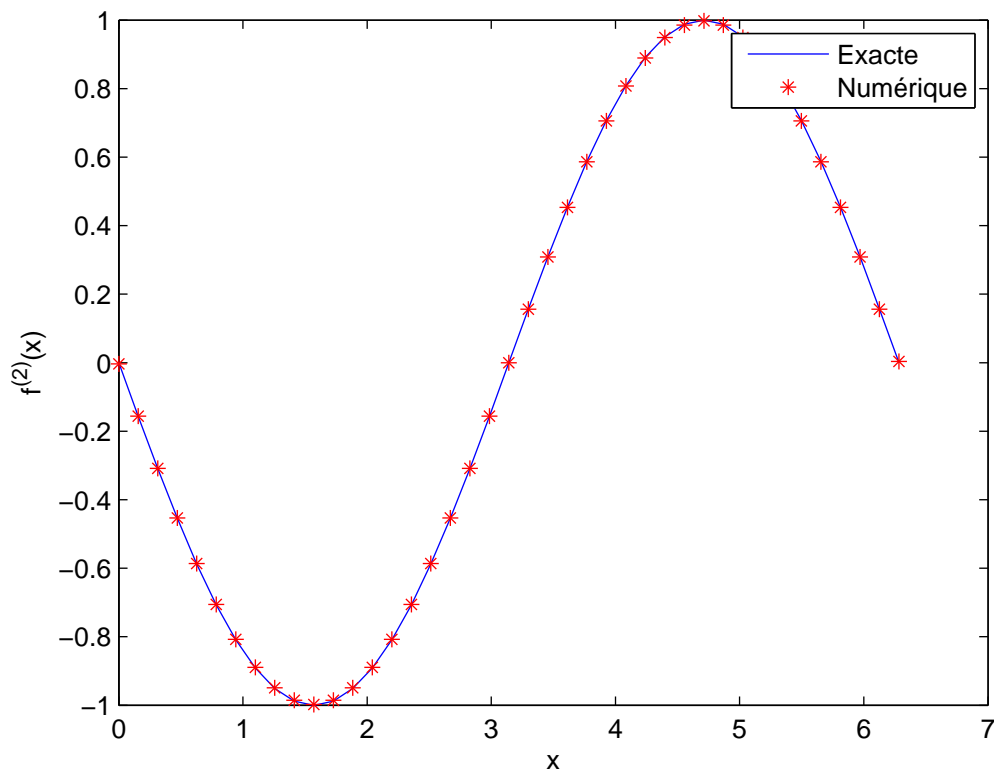


FIGURE 2.4 – Dérivée seconde de la fonction sinus.

2.6 Conclusion

Après avoir présenté les différentes méthodes d'interpolation, nous avons constaté qu'on peut construire des formules d'approximation de f' et f'' en dérivant le polynôme d'interpolation. Les méthodes d'interpolation se limitent pas aux méthodes citées dans ce chapitre, on peut rencontrer aussi d'autres méthodes comme le polynôme d'Hermite ou le polynôme de Chebyshev...etc.

Les formules obtenues par l'approximation des dérivées vont être utilisées dans la discrétisation spatiale des EDP, qui fera l'objet dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Méthode des lignes

3.1 Introduction

De nombreux problèmes scientifiques et techniques nécessitent des calculs numériques, car la solution analytique n'est pas toujours évidente. Ce présent chapitre a pour objectif de présenter quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles. On présente deux méthodes analytiques en l'occurrence la méthode de séparation de variables, la méthodes des caractéristiques et une méthodes numériques à savoir la méthode des lignes (semi discrétisation) basée sur les différences finies. Cette méthode sera appliquée pour résoudre l'équation de la chaleur.

3.2 Méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles

Après la définition et la classification des équations aux dérivées partielles, on passe maintenant à leur résolution. Dans cette section, on développe deux méthodes de résolution : méthodes analytiques et méthodes numériques.

3.2.1 Méthodes analytiques

3.2.1.1 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables représente la technique standard pour résoudre des problèmes aux conditions aux bords et au condition initiale sur un domaine borné.

L'idée est de chercher une solution dite séparée de la forme :

$$u(x, t) = \Phi(x)\Psi(t) \tag{3.1}$$

Exemple

Soit l'équation de la chaleur suivante :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t \geq 0, x \in [0, L] \right. \quad (3.2)$$

Avec les conditions suivantes :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.4)$$

On pose $u(x, t) = \Phi(x)\Psi(t)$

L'équation (3.2) devient :

$$\Psi'(t)\Phi(x) = \alpha \Phi''(x)\Psi(t) \quad (3.5)$$

On divise par $\Phi(x)\Psi(t)$ pour obtenir une équation de la forme :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} \quad (3.6)$$

Le membre de droite dépend de x et le membre de gauche dépend de t , on déduit qu'ils sont constants, c'est à dire qu'il existe un λ dans \mathbb{R} tel que :

$$\Psi'(t) = \lambda \alpha \Psi(t) \quad (3.7)$$

$$\Phi''(x) = \lambda \Phi(x) \quad (3.8)$$

On a obtenu deux équations à variables séparées.

Cherchons la solution non nulle de l'équation (3.8) en $\Phi(x)$

$$\Phi''(x) = \lambda \Phi(x) \quad (3.9)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\Phi(0) = \Phi(L) = 0 \quad (3.10)$$

La solution dépend de λ pour cela on a 3 cas :

— Si $\lambda > 0$ alors la solution est :

$$\Phi(x) = A \exp(\sqrt{\lambda}x) + B \exp(-\sqrt{\lambda}x) \quad (3.11)$$

Si on tient compte des conditions aux limites, on aura :

$$\Phi(0) = 0 \implies A + B = 0$$

$$\Phi(L) = 0 \implies A(\exp(\sqrt{\lambda}x) - \exp(-\sqrt{\lambda}x))$$

$$A = B = 0$$

On a pas de solution non nulle dans ce cas, alors il est exclu.

— Si $\lambda = 0$ alors la solution est :

$$\Phi(x) = Ax + B \quad (3.12)$$

Prenons en considération les conditions aux limites pour obtenir :

$$\Phi(0) = 0 \implies B = 0$$

$$\Phi(L) = 0 \implies AL = 0 \implies A = 0$$

Dans ce cas aussi il n'y a pas de solution non nulle.

— Si $\lambda < 0$ alors la solution est :

$$\Phi(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x) \quad (3.13)$$

Avec les conditions aux limites, on obtient :

$$\Phi(0) = 0 \implies B = 0$$

$$\Phi(L) = 0 \implies A\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

Soit $A = 0$ ou bien $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$

Dans ce cas, il existe des solutions non nulles qui sont :

$$\Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} \quad (3.14)$$

Avec $n \geq 0$, associées aux valeurs de $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$

Au total on a obtenu une suite infinies de solutions associées chacune à une valeur λ tel que :

$\Phi_n(x)$: fonctions propres du problème.

λ_n : valeurs propres associées.

Résolution de l'équation (3.7) en $\Psi(t)$ pour les valeurs λ_n trouvées précédemment

$$\Psi'(t) = \lambda_n \alpha \Psi(t) \quad (3.15)$$

Cette équation admet la solution suivante :

$$\Psi(t) = C_n \exp(\alpha \lambda_n t) = C_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \quad (3.16)$$

L'équation étant linéaire donc la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation, alors la solution $u(x, t)$ peut s'écrire comme somme de toutes les solution élémentaires.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n(x) \Psi_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3.17)$$

Il reste à déterminer les coefficients C_n pour que la solution vérifie la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$

Ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n(x) \Psi_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \Phi_n(x) = u_0 \quad (3.18)$$

Alors

$$C_n = \frac{u_0(x) \Phi_n(x)}{\Phi_n(x) \Phi_n(x)} = \frac{2}{L} \int_{\Omega} u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3.19)$$

On obtient donc une solution sous forme d'une série, ici il s'agit d'une série de Fourier où seule les composantes en $\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ sont présentes puisque on a imposé $u(0) = u(L) = 0$

3.2.1.2 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une méthode qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles, en particulier les problèmes de transport. Cette méthode est purement analytique mais elle peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique dans des cas complexes particuliers.

Le principe de cette méthode est de chercher une courbe caractéristique qui réduit l'équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire, et la solution de l'équation différentielle ordinaire le long de la caractéristique permet de trouver la solution de l'équation originale.

Exemple

Soit l'équation de transport (équation hyperbolique) du premier ordre suivante :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R} \right. \quad (3.20)$$

L'idée est de chercher la ligne caractéristique $(x(s), t(s))$ le long de laquelle cette équation se réduit à une équation différentielle ordinaire.

La dérivée de u le long d'une telle courbe :

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = \frac{d}{ds}x(s)\frac{\partial u}{\partial x}(x(s), t(s)) + \frac{d}{ds}t(s)\frac{\partial u}{\partial t}(x(s), t(s)) \quad (3.21)$$

On remarque que : $\frac{dt(s)}{ds} = 1$ et $\frac{dx(s)}{ds} = C$ et on obtient :

$$\frac{du}{ds} = C\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3.22)$$

On a obtenu donc 3 équations différentielles à résoudre tel que :

$$\frac{dt(s)}{ds} = 1 \quad (3.23)$$

avec $t(0) = 0 \implies t(s) = s$

$$\frac{dx(s)}{ds} = C \quad (3.24)$$

avec $x(0) = x_0 \implies x(s) = cs + x_0 = ct + x_0$

$$\frac{du}{ds} = 0 \implies u(s) = u(0) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) \quad (3.25)$$

En remplaçant x_0 par son expression on trouve la solution finale du problème qui est :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad (3.26)$$

3.2.2 Méthodes numériques

La solution analytique n'est pas toujours possible, surtout quand il s'agit des équations non linéaires. Ainsi plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour la résolution de ces dernières.

3.2.2.1 Méthode des différences finies

Une différence finie est une expression de la forme $f(x + b) - f(x + a)$ où f est une fonction numérique. L'approximation des dérivées par des différences finies joue un rôle important dans les méthodes utilisées pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. En d'autres termes, les différences finies est une technique de discrétisation du domaine spatial, et du domaine temporel, pour remplacer les dérivées partielles aux points de maillage.

Le maillage est un ensemble de points du domaine de définition sur lequel la méthode des différences finies est appliquée. Le maillage peut être uniforme ou non uniforme.

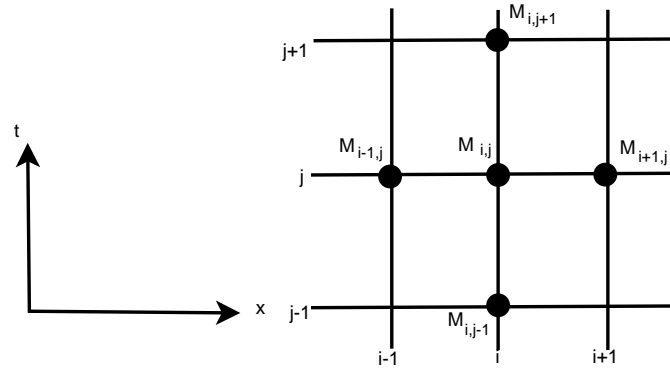


FIGURE 3.1 – Schémas d'un maillage uniforme.

Exemple

On considère l'équation de la chaleur définie dans l'intervalle $[0, L]$ et $t > 0$ tel que :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.27)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(0, t) = U_0 \\ u(L, t) = U_L \end{cases}$$

Et la condition initiale :

$$u(x, 0) = \Phi(x)$$

On considère un maillage uniforme tel que Δx le pas en espace et Δt le pas en temps.

En utilisant les différences finies, on obtient :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.29)$$

Ou le schéma centré suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.30)$$

Tous ces schémas sont cohérents avec l'équation de la chaleur.

3.2.2.2 Méthode des lignes (semi discrétisation)

La méthode des lignes est une technique numérique de résolution des équations aux dérivées partielles. Cette méthode est utilisée dans plusieurs domaines pour résoudre des

problèmes de la physique.

Le principe générale de cette méthode est basé sur la discrétisation du domaine spatial par approximation, afin d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires.

La méthode des lignes a les propriétés [7] d'utilisation suivantes :

- Efficacité de calcul : La formulation du problème mène à un algorithme simple, et à des résultats exacts avec moins d'effort.
- Réduction du temps de calcul : Le temps de calcul est petit puisque la méthode n'exige pas un grand système d'équations à résoudre, car une petite quantité de lignes de discrétisation suffit pour la résolution.
- Stabilité numérique : La méthode des lignes assure la stabilité et la convergence facilement.
- Réduction de l'effort de programmation : En utilisant des révolvers de problèmes d'EDO, l'effort de programmation peut être réduit.

Les étapes d'utilisation [7] de la méthode des lignes sont :

- Discrétisation de l'équation.
- Transformation de l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires.
- Résolution du système d'équations obtenu.

Application pour la résolution de l'équation de la chaleur

1^{er} cas : Problème de Dirichlet

Considérons le problème monodimensionnel de l'évolution de la température dans une barre de longueur 1m. La température $T(x, t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.31)$$

α : est la diffusivité thermique.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} T(0, t) = T_0 \\ T(L, t) = T_L \end{cases}$$

Avec $L = 1$.

La condition initiale :

$$T(x, 0) = T^*(x)$$

L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en N points régulièrement espacés d'un pas $\Delta x = \frac{1}{N+1}$.

Dans ce cas, la discrétisation est juste sur le domaine spatial. En remplaçant $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ par la formule suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.32)$$

l'équation (3.31) devient :

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (3.33)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_2 - 2T_1 + T_0) \quad (3.34)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (3.35)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) \quad (3.36)$$

La forme matricielle du système obtenu de N équations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta x^2} \end{bmatrix} T_L$$

Le système obtenu est sous la forme :

$$\dot{T} = AT + BT_0 + ET_L \quad (3.37)$$

La solution numérique de ce système pour $N = 100$ est donnée par la figure 3.2.

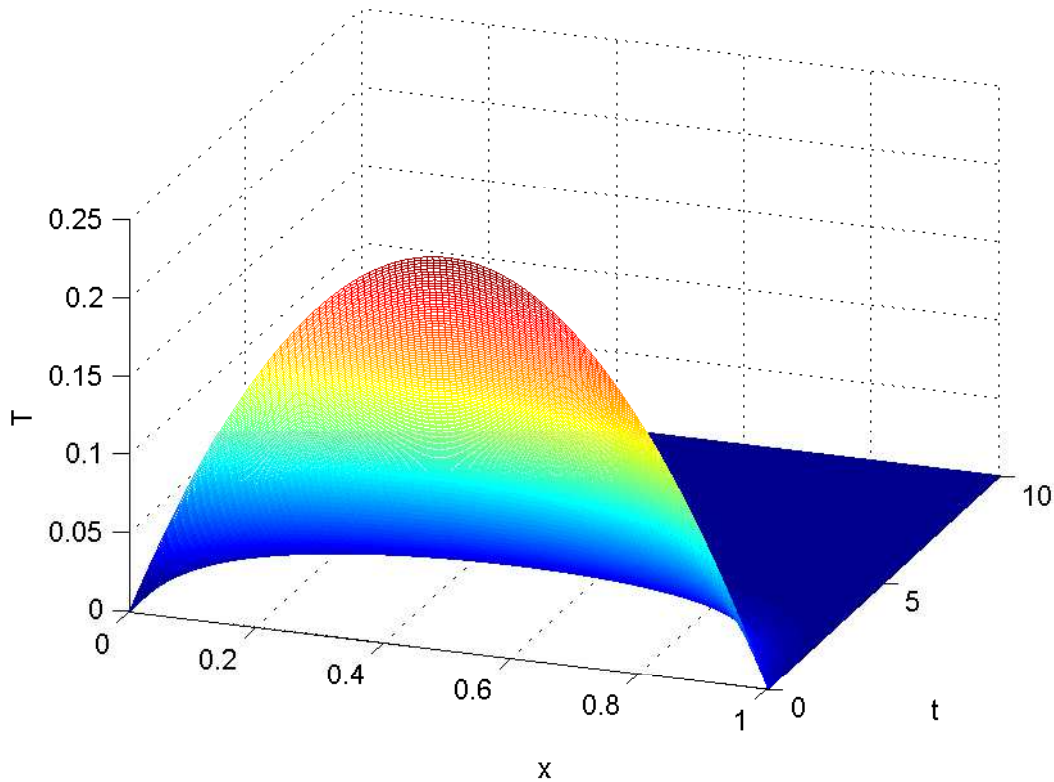


FIGURE 3.2 – Solution numérique de l'équation de la chaleur avec les conditions de Dirichlet.

Les extrémités 0 et L de la barre sont maintenues à une température 0. La distribution initiale de la température est donnée par $T^*(x)$. Le domaine $[0, 1]$ est discrétisé en $N = 100$ points avec un pas de discrétisation $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ et $\alpha = 0.01$ (paramètre de la diffusivité thermique). Nous observons que la solution $T(x, t)$ pour $t > 0$ et $x \in [0, 1]$ se refroidit rapidement indépendamment de la répartition de la température initiale car aucune source de chaleur n'alimente la barre.

2^{eme} cas : Problème de Neumann

Dans ce cas, les conditions aux limites sont imposées sur la dérivées de la température.

Considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.38)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = z_0 \\ \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = z_L \end{cases}$$

Et la condition initiale tel que

$$T(x, 0) = T^*(x)$$

En discrétisant l'équation (3.38) avec le schéma suivant :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation (3.38) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \Rightarrow \dot{T}_i = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_2 - 2T_1 + T_0) \quad (3.39)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (3.40)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) \quad (3.41)$$

Puisque les conditions aux limites sont imposées sur la dérivées de la température, donc T_0 et T_{N+1} sont inconnus. Pour cela on va discrétiser les conditions aux limites de la manière suivante :

Pour $x = 0$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = z_0 \Rightarrow \frac{T_2 - T_0}{2\Delta x} = z_0$$

D'où

$$T_0 = T_2 - 2z_0\Delta x \quad (3.42)$$

Pour $x = L$

$$\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = z_L \Rightarrow \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{2\Delta x} = z_L$$

D'où

$$T_{N+1} = 2z_L\Delta x + T_{N-1} \quad (3.43)$$

En remplaçant respectivement les équations (3.42) et (3.43) dans les formules (3.39), (3.40) et (3.41) on obtient :

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(2T_2 - 2T_1 - 2z_0\Delta x) \quad (3.44)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (3.45)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(2T_{N-1} - 2T_N + 2z_L\Delta x) \quad (3.46)$$

La forme matricielle de ce système d'équations est :

$$\dot{T} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & . & 0 \\ . & . & 1 & -2 & 1 & 0 \\ . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & . & . & . & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z_0\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2z_L\Delta x \end{bmatrix}$$

Le système est sous la forme :

$$\dot{T} = AT + B \quad (3.47)$$

La solution du problème de Neumann est donnée par la figure 3.3.

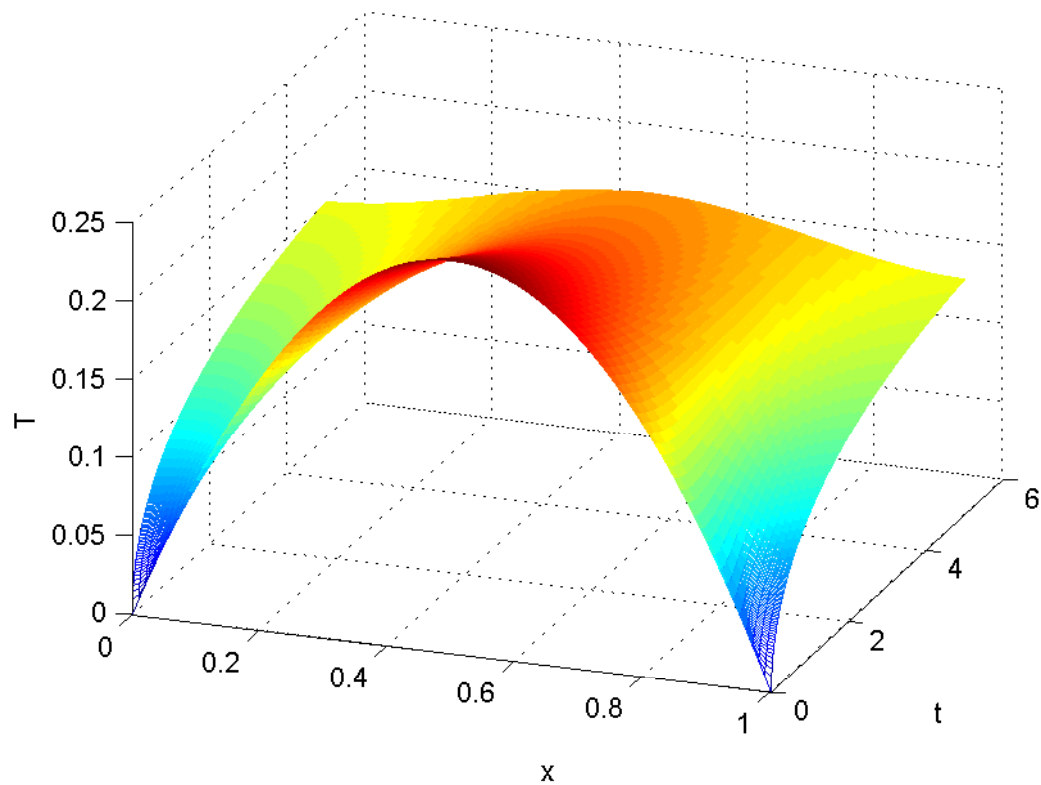


FIGURE 3.3 – Solution numérique de l'équation de la chaleur (conditions de Neumann).

3.3 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la résolution des équations aux dérivées partielles. Les méthodes de résolution peuvent être analytiques ou numériques. Les méthodes analytiques ne peuvent être appliquées que pour la résolution des équations simples contrairement aux méthodes numériques qui peuvent être appliquées même pour les équations complexes.

La méthode numérique développée dans ce chapitre est la méthode des lignes (semi discrétisation), qui consiste à discrétiser le domaine spatial pour obtenir un système d'équations différentielles ordinaires. Cette méthode a été appliquée pour la résolution de l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann.

Chapitre 4

Méthode des lignes adaptative

4.1 Introduction

Ce chapitre est réservé à l'application de la méthode des lignes adaptative pour la simulation des systèmes physiques décrits par l'équation de la chaleur, l'équation de la chaleur avec une source externe et le système convection-diffusion-réaction. Les deux cas de conditions aux limites de Dirichlet et Neumann sont considérés.

4.2 Principe de la méthode des lignes adaptative

Le principe de la méthode des lignes adaptative consiste à appliquer la méthode des lignes standard sur un intervalle de temps en considérant un certain nombre de points de discrétisation. Ensuite, on augmente ce nombre à chaque intervalle.

Le problème se pose à l'initialisation de la simulation au début de chaque intervalle comme est illustré par le schéma suivant :

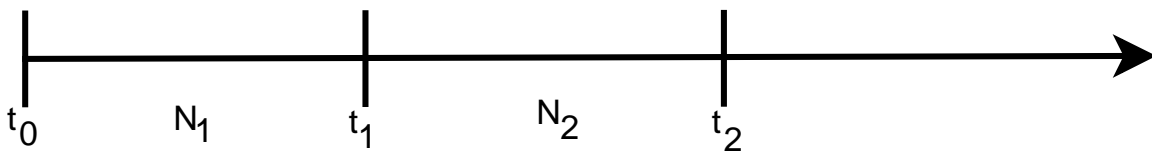


FIGURE 4.1 – Schéma de simulation.

$$N_2 > N_1$$

Pour $t \in [t_0, t_1]$, on utilise N_1 points de discrétisation, puis pour $t \in [t_1, t_2]$, on utilise N_2 points.

Au démarrage de la simulation à t_0 , le vecteur de condition initiale est de dimension N_1 , par contre le nouveau système à simuler à partir de l'instant t_1 est de dimension N_2 .

Ainsi on doit adapter la dimension du deuxième système en calculant son initialisation par interpolation de l'état obtenu à t_1 .

L'algorithme de la méthode des lignes est comme suit :

1. Choix de N_i à t_i
2. Simulation du système de dimension N_i par la méthode des lignes standard.
3. A t_{i+1} réaliser l'interpolation de N_i points précédents.
4. Déterminer l'initialisation de N_{i+1} en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange obtenu en 3.
5. Simuler le nouveau système de dimension N_{i+1} .

4.3 Équation de la chaleur

4.3.1 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet de l'équation de la chaleur est comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\Delta x^2} \\ T(0, t) = 0 \\ T(1, t) = 0 \\ T(x, 0) = T^*(x) \end{cases}$$

Avec $\alpha = 0.01$ (paramètre de diffusivité thermique)

$\Delta x = \frac{1}{N+1}$ (pas de discrétisation)

Discrétisation de l'équation de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \implies \dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (4.1)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_2 - 2T_1 + T_0) \quad (4.2)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad (4.3)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) \quad (4.4)$$

La forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta x^2} \end{bmatrix} T_L$$

Le système est sous la forme :

$$\dot{T} = AT + BT_0 + ET_L \quad (4.5)$$

Chaque sous système est simulé sur un intervalle de temps de 2.5 unités de temps. Les résultats obtenus sont donnés par la figure 4.2

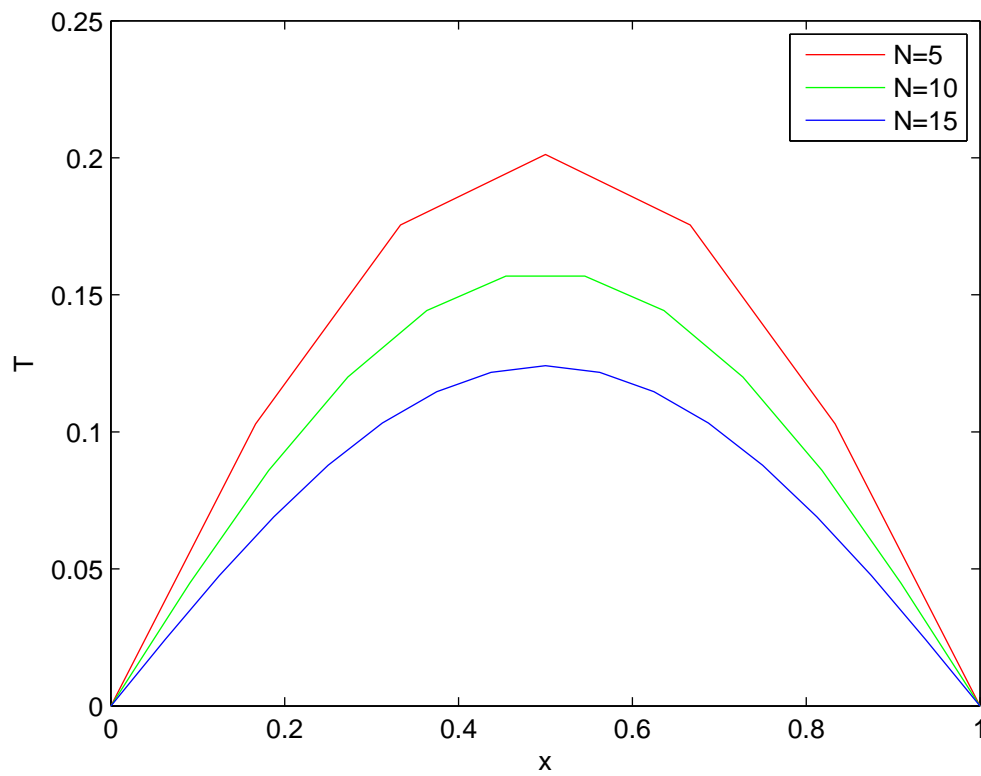
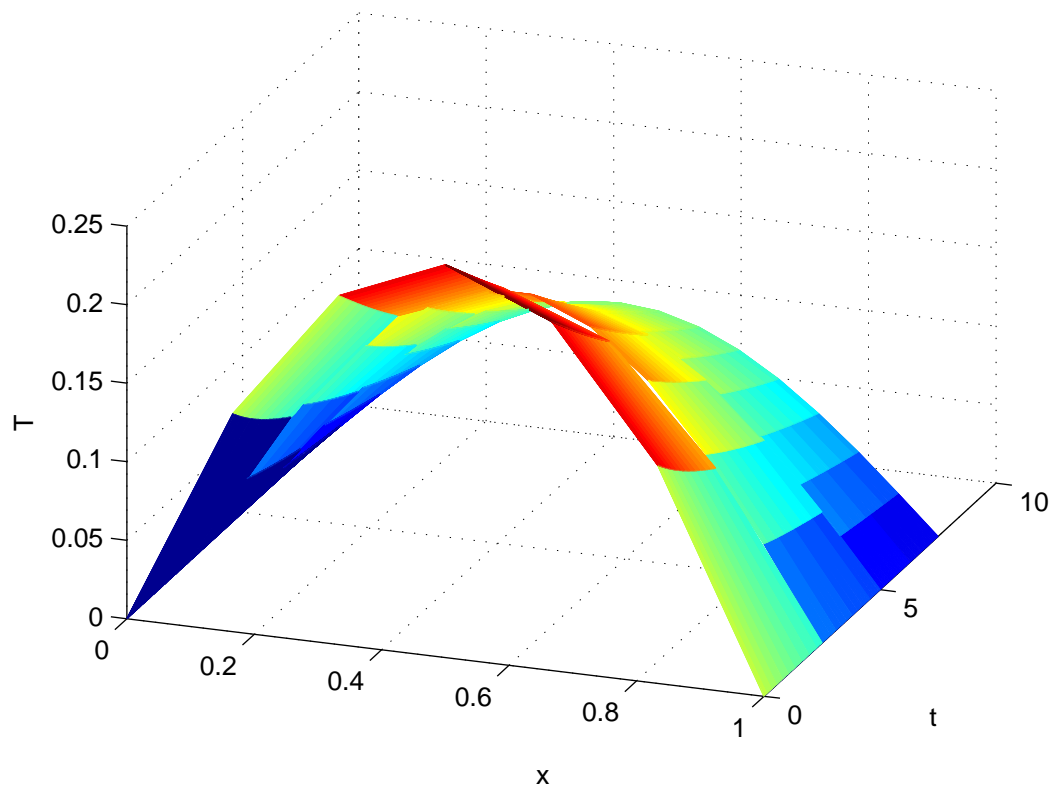


FIGURE 4.2 – Solution numérique de l'équation de la chaleur (conditions de Dirichlet).

4.3.2 Problème de Neumann

L'équation de la chaleur avec les conditions aux limites de Neumann est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = z_0 \\ \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = z_L \\ T(x,0) = T^*(x) \end{cases}$$

Avec $\alpha = 0.01$ et $L = 1$ (longueur de la barre)

Discretisation de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4.6)$$

$$\dot{T}_i = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4.7)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \alpha \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4.9)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \alpha \frac{T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

Discretisation des conditions aux limites

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = z_0 \Rightarrow \frac{T_2 - T_0}{2\Delta x} = z_0$$

D'où

$$T_0 = T_2 - 2z_0\Delta x \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = z_L \Rightarrow \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{2\Delta x} = z_L$$

D'où

$$T_{N+1} = 2z_L\Delta x + T_{N-1} \quad (4.12)$$

En remplaçant T_0 et T_{N+1} dans les équations précédentes on obtient :

Pour $i = 1$

$$\mathring{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(2T_2 - 2T_1 - 2z_0\Delta x) \quad (4.13)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\mathring{T}_2 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_3 - 2T_2 + T_1) \quad (4.14)$$

Pour $i = N$

$$\mathring{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(2T_{N-1} - 2T_N + 2z_L\Delta x) \quad (4.15)$$

La forme matricielle de ce système d'équations est :

$$\mathring{T} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & . & 0 \\ . & . & 1 & -2 & 1 & 0 \\ . & . & . & 1 & -2 & 1 \\ 0 & . & . & . & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z_0\Delta x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2z_L\Delta x \end{bmatrix}$$

Ce système s'écrit comme suit :

$$\mathring{T} = AT + B \quad (4.16)$$

Le résultat de simulation obtenu est donné par la figure 4.3

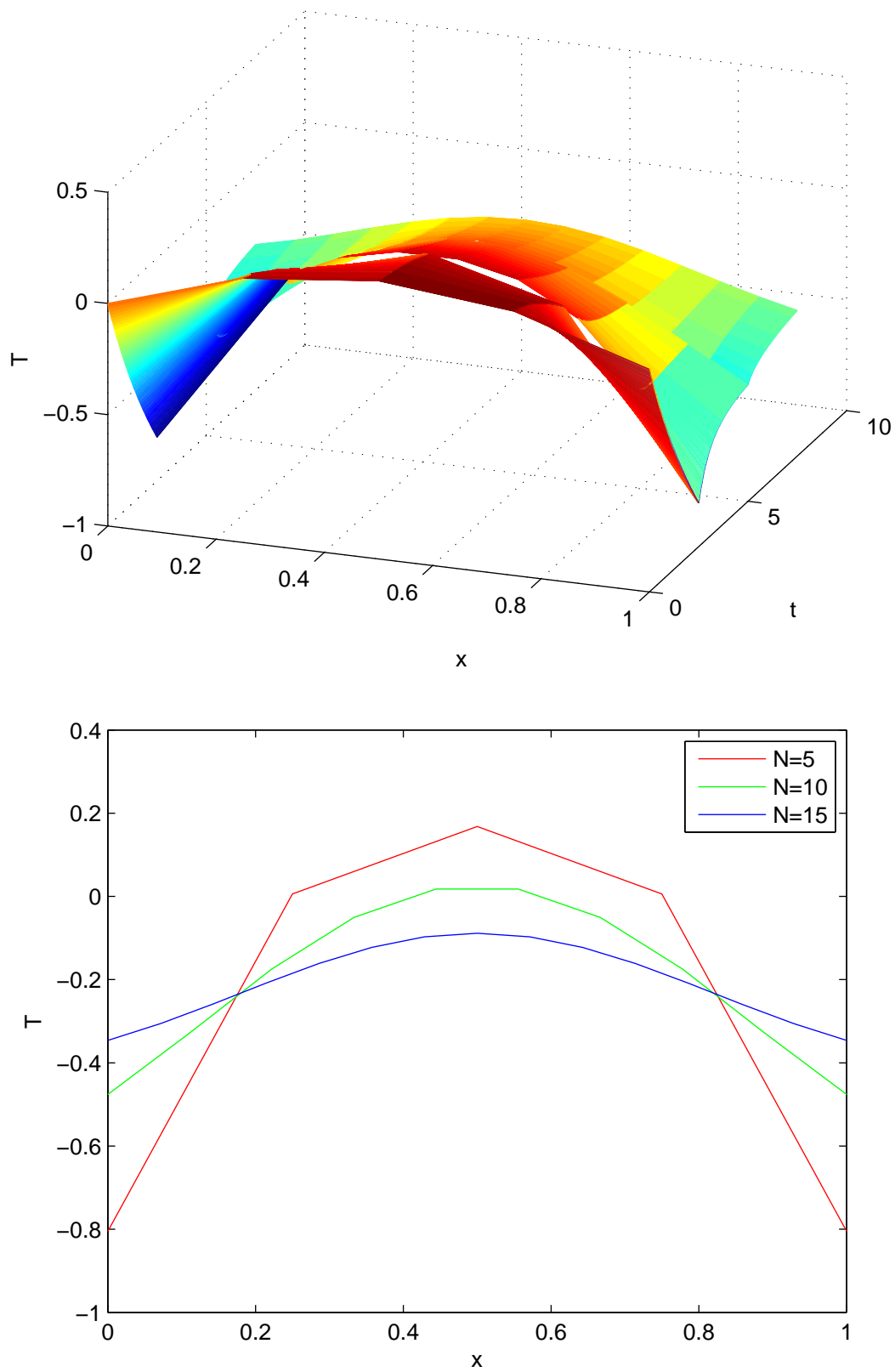


FIGURE 4.3 – Solution numérique de l'équation de la chaleur (condition de Neumann).

4.4 Équation de la chaleur avec une source externe

Le deuxième système est l'équation de la chaleur avec une source externe.

4.4.1 Problème de Dirichlet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\Delta x^2} + \lambda T \quad (4.17)$$

Avec $\alpha = 0.001$ et $\lambda = 0.1$ (paramètres de la barre)

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T(0, t) = 0 \\ T(L, t) = 0 \end{cases}$$

$L = 1$ (longueur de la barre)

Et la condition initiale suivante :

$$T(x, 0) = T^*(x)$$

En discrétisant l'équation (4.17) obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda T \quad (4.18)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\dot{T}_i = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda T_i \quad (4.19)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_2 - 2T_1 + T_0) + \lambda T_1 \quad (4.20)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \lambda T_i \quad (4.21)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) + \lambda T_N \quad (4.22)$$

Et la forme matricielle pour le système d'équation est comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta x^2} \end{bmatrix} T_{L+\lambda} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix}$$

Le système obtenu est sous la forme suivante :

$$\dot{T} = AT + BT_0 + ET_L + \lambda T \quad (4.23)$$

La simulation de ce système conduit à la solution de la figure 4.4

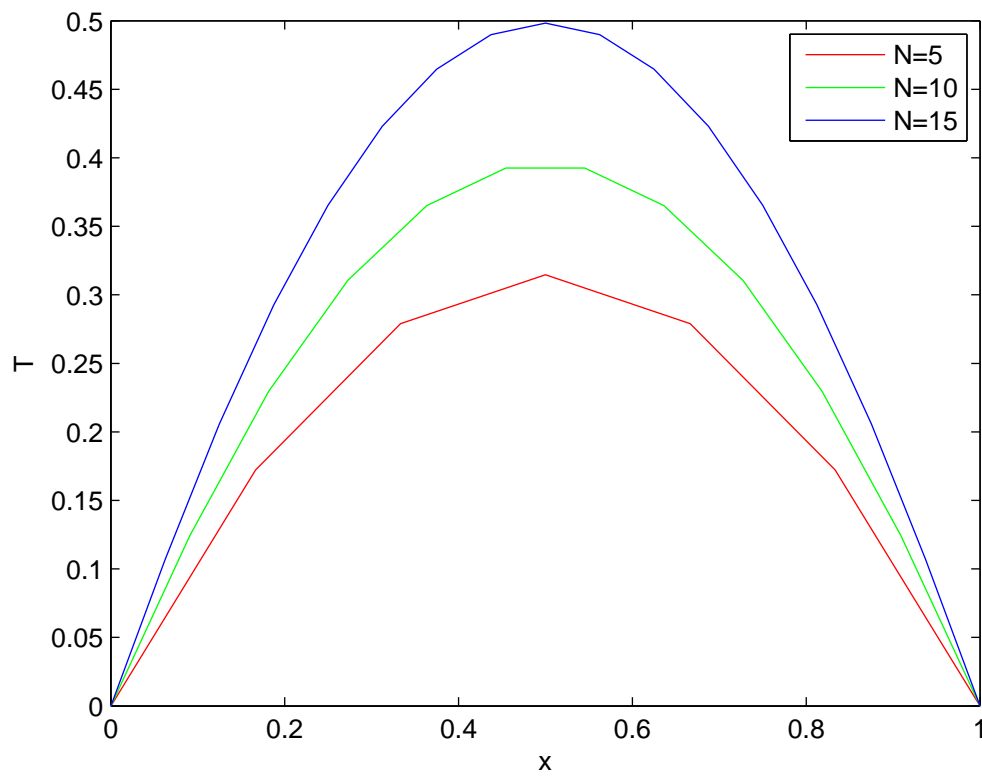
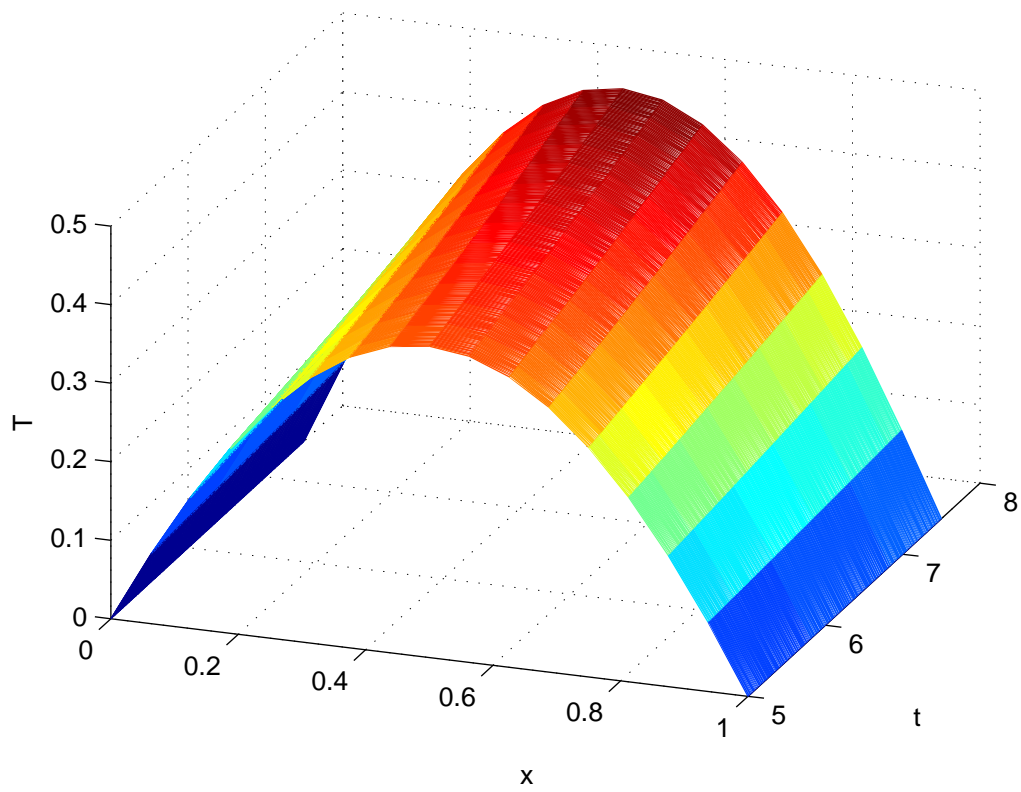


FIGURE 4.4 – Solution de l'équation de la chaleur avec une source externe (conditions de Dirichlet).

4.4.2 Problème de Neumann

Le problème de Neumann est posé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\Delta x^2} + \lambda T \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = z_0 \\ \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = z_L \\ T(x, 0) = T^*(x) \end{cases}$$

Avec $\alpha = 0.001$ et $\lambda = 1$ (paramètres de la barre)

Le schéma de discrétisation de l'équation est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda T \quad (4.24)$$

Où $\Delta x = \frac{L}{N-1}$

Ce qui est égale à :

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \lambda T_i \quad (4.25)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (2 - 2T_1 + T_0) + \lambda T_1 \quad (4.26)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \lambda T_i \quad (4.27)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) + \lambda T_N \quad (4.28)$$

Discrétisation des conditions aux limites :

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = z_0 \Rightarrow \frac{T_2 - T_0}{2\Delta x} = z_0$$

D'où

$$T_0 = T_2 - 2z_0\Delta x \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = z_L \Rightarrow \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{2\Delta x} = z_L$$

D'où

$$T_{N+1} = 2z_L \Delta x + T_{N-1} \quad (4.30)$$

En remplaçant dans les équations précédentes, on obtient :

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (2 - 2T_1 + T_2 - 2z_0 \Delta x) + \lambda T_1 \quad (4.31)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \lambda T_i \quad (4.32)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (2z_L \Delta x + T_{N-1} - 2T_N + T_{N-1}) + \lambda T_N \quad (4.33)$$

La forme matricielle de ce système d'équations est comme suit :

$$\dot{T} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z_0 \Delta x \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 2z_L \Delta x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix}$$

Ce système est sous la forme :

$$\dot{T} = AT + B + \lambda T \quad (4.34)$$

La solution de ce système est donnée par le figure 4.5

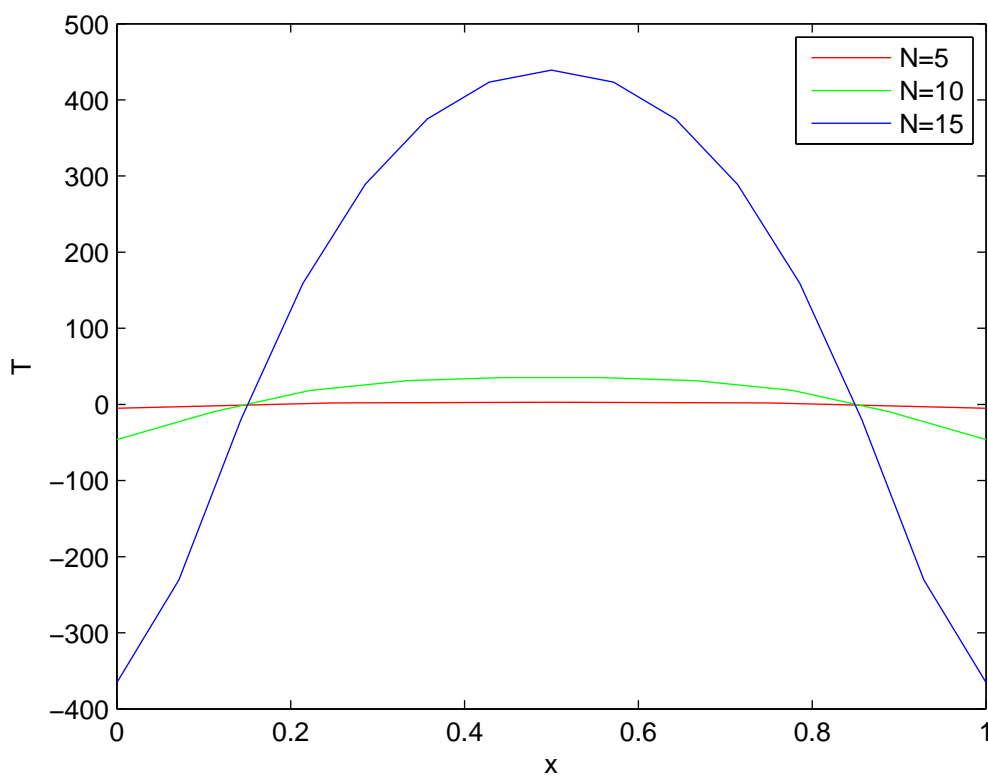
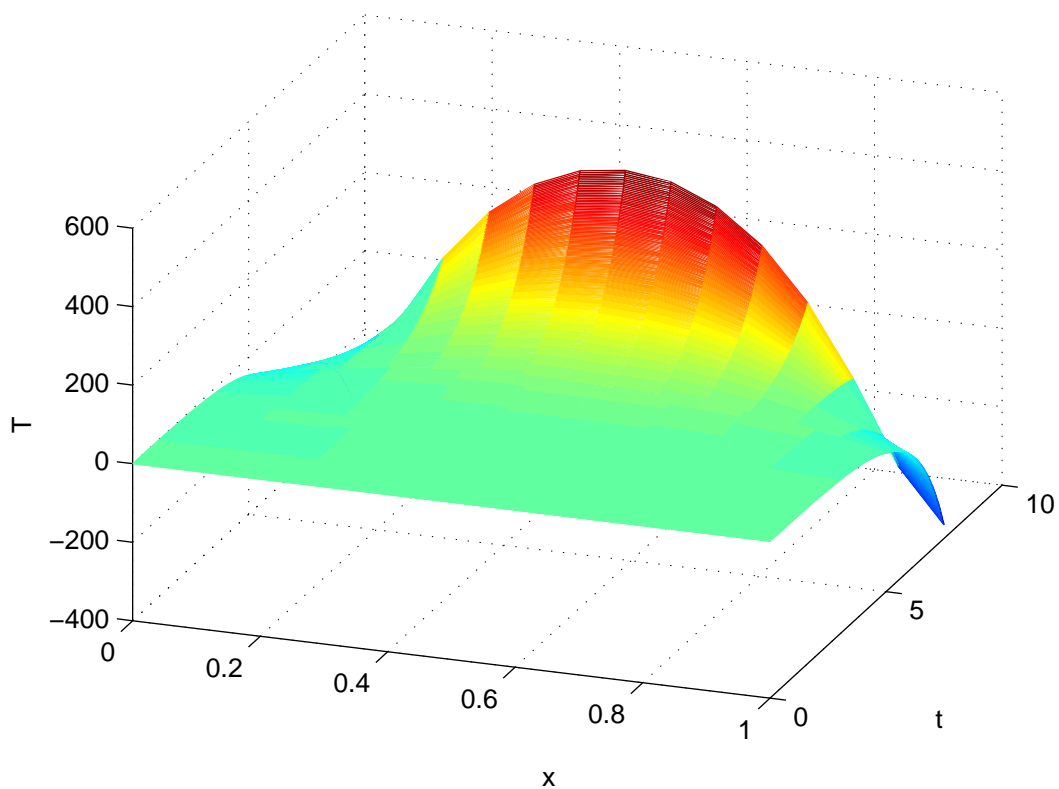


FIGURE 4.5 – Solution de l'équation de la chaleur avec une source externe (condition de Neumann).

4.5 Équation convection-diffusion-réaction

4.5.1 Problème de Dirichlet

Considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \gamma T(x,t) \quad (4.35)$$

α , β et γ représentent respectivement les coefficient de diffusion, convection et réaction. Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T(0,t) = 0 \\ T(L,t) = 0 \end{cases}$$

Et la condition initiale suivante :

$$T(x,0) = T^*(x)$$

Discretisons l'équation (4.35) pour obtenir l'équation suivante :

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{i+1} - T_{i-1}) + \gamma T_i \quad (4.36)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_2 - 2T_1 + T_0) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_2 - T_0) + \gamma T_1 \quad (4.37)$$

Pour $i = 2, \dots, N-1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{i+1} - T_{i-1}) + \gamma T_i \quad (4.38)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{N+1} - T_{N-1}) + \gamma T_N \quad (4.39)$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -2 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\Delta x^2} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{\alpha}{\Delta x^2} \end{bmatrix} T_L$$

$$+\frac{\beta}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . \\ -1 & 0 & 1 & . \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & . & -1 & .0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2\Delta x} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ \frac{\beta}{2\Delta x} \end{bmatrix} T_L + \gamma \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ T_N \end{bmatrix}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{T} = AT + BT_0 + CT_L + DT + ET_0 + FT_L + \gamma T \quad (4.40)$$

Le résultat de simulation est donné par la figure 4.6

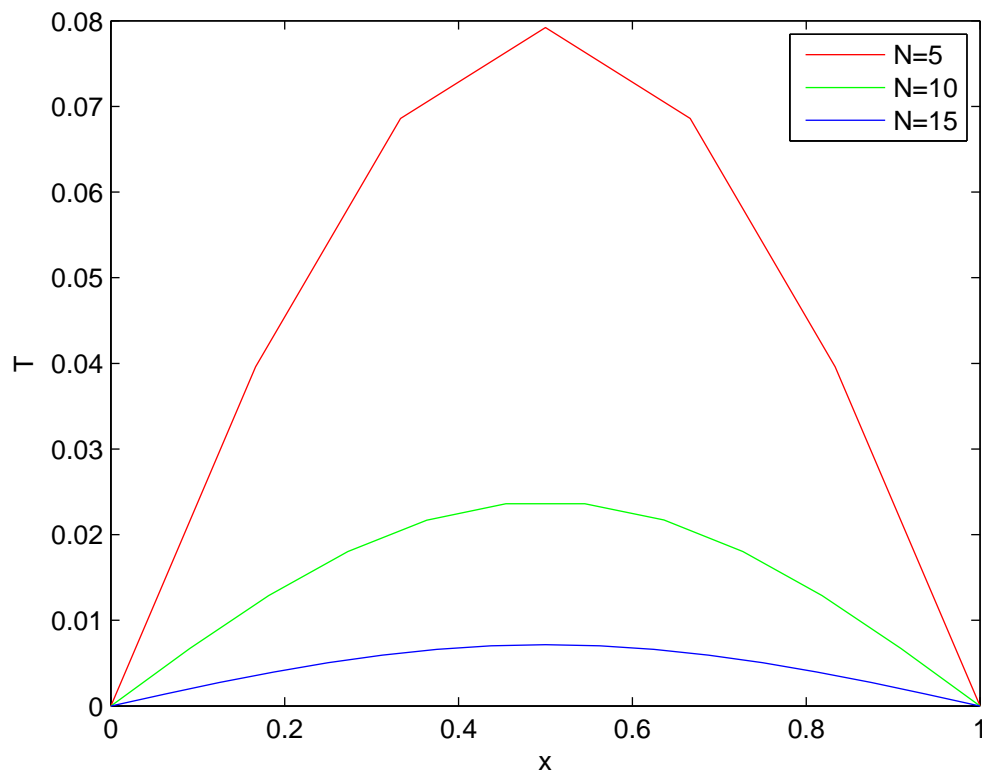
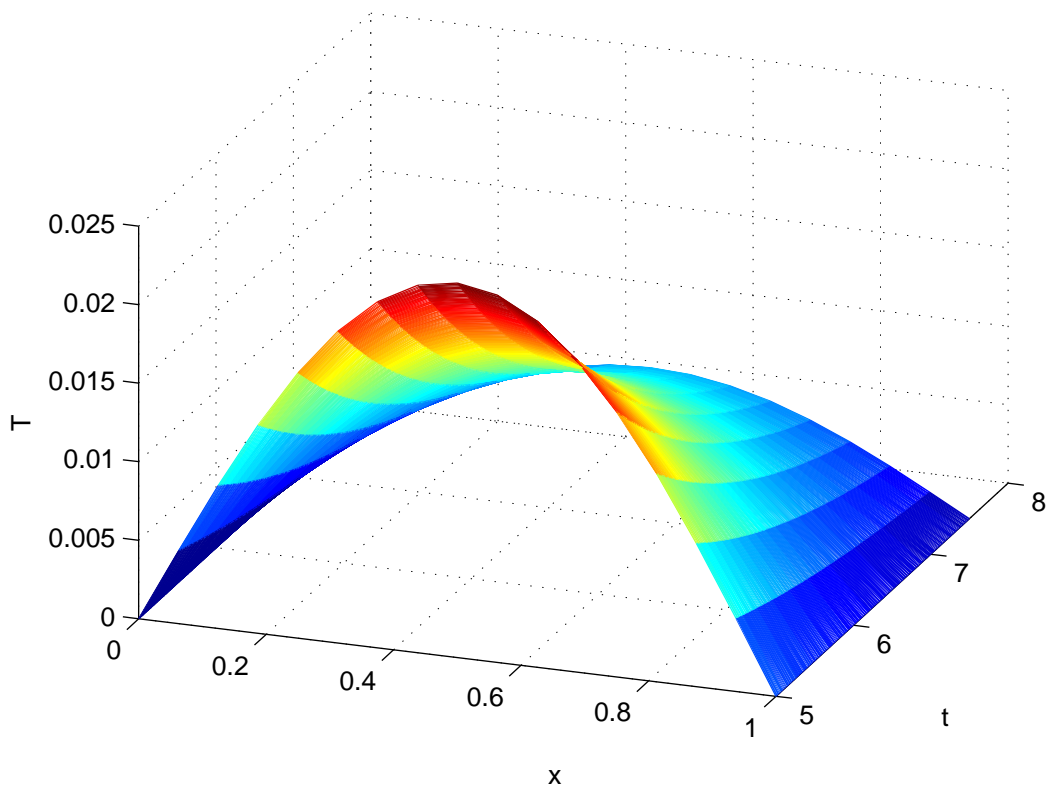


FIGURE 4.6 – Solution de l'équation convection-diffusion-réaction (conditions de Dirichlet).

4.5.2 Problème de Neumann

Le problème de Neumann du système précédent est donné comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \gamma T(x,t) \\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = z_0 \\ \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = z_L \\ T(x, 0) = T^*(x) \end{cases}$$

Discrétisation du système

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{i+1} - T_{i-1}) + \gamma T_i \quad (4.41)$$

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_2 - 2T_1 + T_0) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_2 - T_0) + \gamma T_1 \quad (4.42)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{i+1} - T_{i-1}) + \gamma T_i \quad (4.43)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{N+1} - T_{N-1}) + \gamma T_N \quad (4.44)$$

Discrétisation des conditions aux limites comme suit :

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = z_0 \implies \frac{T_2 - T_0}{2\Delta x} = z_0$$

D'où

$$T_0 = T_2 - 2z_0\Delta x \quad (4.45)$$

Et

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = z_L \implies \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{2\Delta x} = z_L$$

D'où

$$T_{N+1} = T_{N-1} + 2z_L\Delta x \quad (4.46)$$

En remplaçant T_0 et T_{N+1} dans les expressions précédentes, on obtient :

Pour $i = 1$

$$\dot{T}_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(2T_2 - 2T_1 - 2z_0\Delta x) + \frac{\beta}{2\Delta x}(2z_0\Delta x) + \gamma T_1 \quad (4.47)$$

Pour $i = 2, \dots, N - 1$

$$\dot{T}_i = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) + \frac{\beta}{2\Delta x}(T_{i+1} - T_{i-1}) + \gamma T_i \quad (4.48)$$

Pour $i = N$

$$\dot{T}_N = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(2T_{N-1} - 2T_N + 2z_L\Delta x) + \frac{\beta}{2\Delta x}(2z_L\Delta x) + \gamma T_N \quad (4.49)$$

Ce système d'équation peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} &= \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & \cdot & \cdot \\ 1 & -2 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z_0\Delta x \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2z_L\Delta x \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\beta}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z_0\Delta x \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2z_L\Delta x \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

le système est de la forme :

$$\dot{T} = AT + B + ET + F + \gamma T \quad (4.50)$$

Le résultat de simulation est donné par la figure 4.7

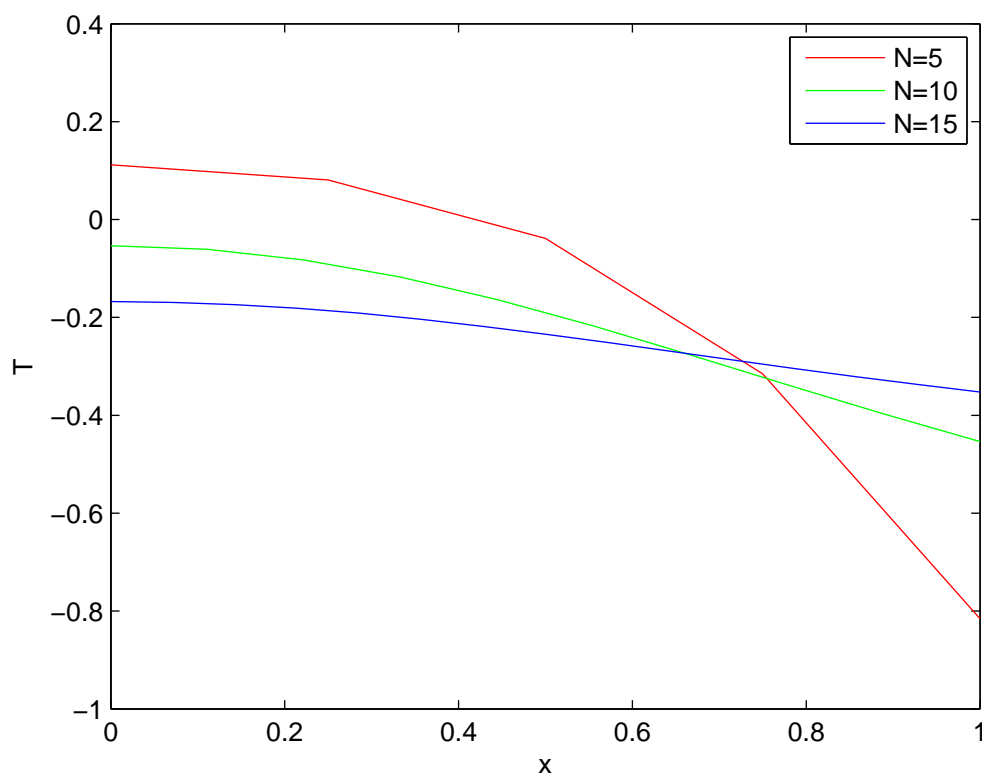
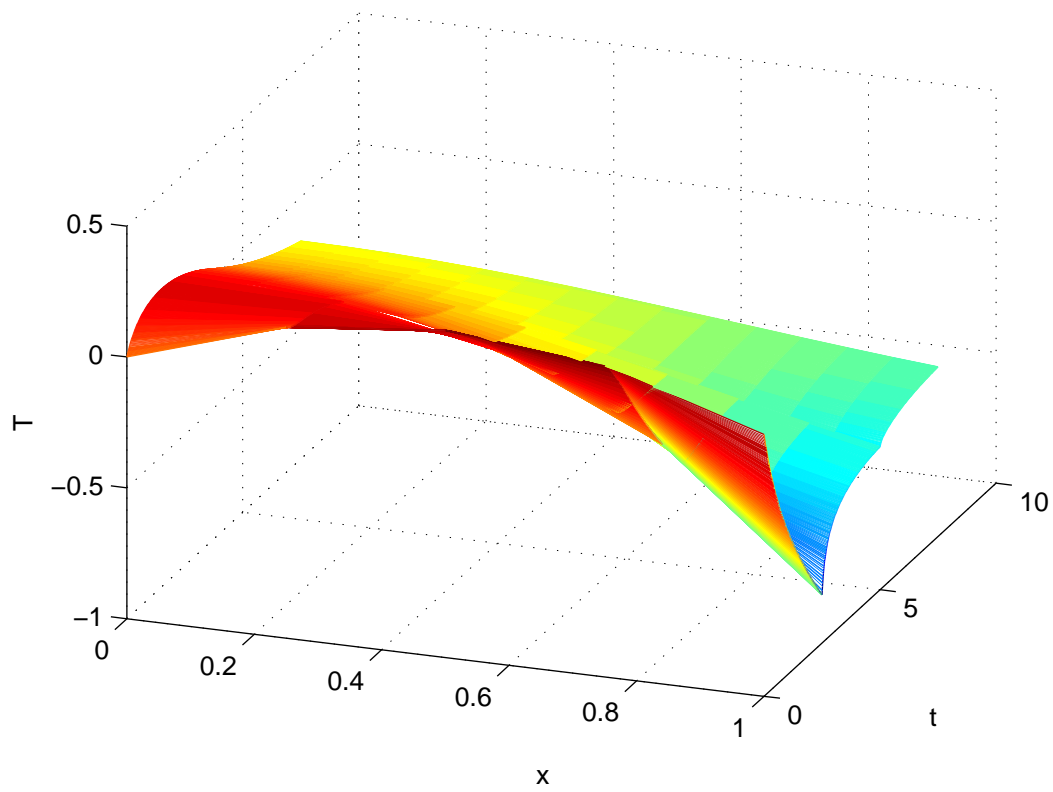


FIGURE 4.7 – Solution de l'équation convection-diffusion-réaction (conditions de Neumann).

Interprétation des résultats

Les résultats de simulation obtenus pour les trois systèmes, en discrétisant le domaine spatial x en N nombre de points qui varie après un intervalle de temps, donnent des courbes différentes en changeant le nombre de points. Pour $N = 5$ la courbe obtenue est d'une forme non lisse (polygonale). A partir de $N = 10$, la courbe devient lisse pour devenir plus lisse pour $N = 15$.

La solution s'est adaptée aux variations de nombre de points de discrétisation. On remarque que plus le nombre de point est suffisamment grand, c'est-à-dire le pas de discrétisation Δx est petit, plus la solution devient plus précise.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode des lignes adaptative a été appliquée pour la simulation de l'équation de la chaleur, l'équation de la chaleur avec une source externe et le système convection-diffusion-réaction. Pour chaque équation, on a considéré deux cas pour les conditions aux limites : cas de Dirichlet et cas de Neumann. Les résultats obtenus dépendent de ces conditions aux limites et la solution est plus précise lorsque le nombre de point devient plus grand.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la simulation des systèmes à paramètres distribués. L'objectif principal est l'étude de la méthode des lignes adaptative basée sur la semi discrétisation.

La méthode des lignes est une méthode numérique de résolution des équations aux dérivées partielles adaptée généralement à tout type de système. C'est une méthodes simple à mettre en œuvre.

Le choix de nombre de point de discrétisation est primordial pour assurer la précision de la solution avec moins d'efforts de calcul.

Après avoir présenté des généralités sur les équations aux dérivées partielles et sur l'approximation des dérivées en utilisant le polynôme de Lagrange, nous avons présenté le principe de la méthode des lignes. Puis cette méthode a été utilisée pour résoudre certaines équations différentielles ordinaires. A la fin, nous avons présenté la méthode des lignes adaptative illustrées par des exemples d'application.

La méthode des lignes adaptative s'adapte aux variations de nombre de points de discrétisation. Ainsi pour un nombre de point petit, on perd la précision, et pour un nombre plus grand nous obtenons une solution plus précise mais avec un grand effort de calcul.

On a constaté que la solution numérique devient précise et se rapproche de la solution exacte lorsque le nombre de points de discrétisation est suffisamment grand.

La méthode des lignes adaptatives présente l'avantage de l'adaptation du maillage, ainsi il est intéressant de l'appliquer pour d'autres systèmes présentant des variations spatiales fortes.

Bibliographie

- [1] David CLAIRE, Pierre GOSSELET. Équations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés. DUNOD, Paris, 2015.
- [2] Abdelhaq El Jai, Marcel Amouroux. Automatique des systèmes distribués. Hermès, Paris, 1990.
- [3] Ahmed MAIDI. Thèse de doctorat. Commande des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Université Mouloud MAMMERY, Tizi Ouzou, 2008.
- [4] Samir HAMDI, William. E. SCHIESSER, Graham.W. GRIFFITHS. Method of lines. Scholapedia, 2(7) ; 2859.2009.
- [5] André FORTIN. Analyse numérique pour ingénieurs. École polytechnique, Montréal, 1995.
- [6] Frank JEDRZEJEWSKI. Introduction aux méthodes numériques. Springer-verlag, Paris, 2006.
- [7] W. E. SHIESSER. The numerical method of lines. Academic press, San Diego, 1991.