



Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté du génie de la construction
Département de génie mécanique

MÉMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Master Académique
En Génie Mécanique option construction mécanique

Présenté par :

Mr. Yanis RASSOUL
Mr. Mohamed MAKHLOUF

Étude comparative des méthodes de calcul en plasticité appliquées à la mise en forme

Devant le jury composé de :

Mr : M. OULD OUALI
Mr : A. DJEBBAR
Mr : M ALMANSBA

Président
Encadreur
Examineur

Session de «2016/ 2017 »

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Dieu qui nous a guidés et donnés la force et la volonté de réaliser ce travail. Au terme de ce travail, nous exprimons toute notre gratitude, notre reconnaissance et nos très vifs remerciements à Monsieur DJEBBAR Arezki. Professeur au département de génie mécanique de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour avoir accepté de diriger ce travail. L'attention, les conseils avisés, et surtout la grande disponibilité dont il a fait preuve nous ont beaucoup aidés.

Nous tenons également à remercier l'ensemble des membres du jury Pour avoir accepté d'examiner ce travail, d'y avoir consacré une partie de leur temps si précieux.

Sommaire

Introduction général	1
Chapitre I : Les lois de comportement	2
I.1. Introduction	3
I. 2 Généralités :.....	3
I.3. Les essais mécaniques	4
I.3.1. L'essai de traction	5
I.3.1.1 Charge monotone.....	6
I.3.1.2 Charge-décharge	9
I.3.1.3. Sensibilité à la vitesse de déformation	10
I.4. La rhéologie	13
I.4.1. Les modèles rhéologiques:.....	13
I.4.2. Plasticité uniaxiale	17
I.4.2.1 Modèle élastique – parfaitement plastique	17
I.4.2.2 Modèle de Prager (écrouissage cinématique) :	18
I.4.2.3. Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale	20
I.4.3. Viscoélasticité uniaxiale	23
I.4.3.1 Un exemple de modèle rhéologique	23
I.5. Lois de Comportement des milieux continus	26
I.5.1. Convention d'écriture.....	26
I.5.2. Matériau isotrope	27
I.5.3. Matériau anisotrope.....	28
I.5.3.1. Matériau orthotrope	28
I.5.3.2. Matériau isotrope transverse.....	29

Chapitre II : Plasticité	32
II.1. Introduction	33
II.2. Le comportement plastique.....	33
II.3. Frontière d'Écoulement	33
II.4. Chargement Limite.....	34
II.5. Les critères de plasticité	34
II.5.1. Critères isotropes	37
II.5.1.1 Critère de Von Mises	37
II.5.1.2 Critère de Tresca	38
II.5.1.3. Comparaison des critères de Tresca et Von Mises.....	38
II.5.2. Critère anisotrope	39
II.5.2.1 Critère de Hill quadratique	40
Chapitre III : Les méthodes de calcul en mise en forme	42
III.1. Introduction	43
III.2. Méthode des tranches	43
III.2.1. Présentation générale de la méthode	43
III.2.1.1. Hypothèse	43
III. 2.1.2. Schéma de calcul	44
III.2.1.3 Utilisation de la loi d'écoulement	45
III.3. Méthodes d'encadrement	46
III.3.1. Méthode de la borne supérieure MBS	47
III.3.2. Méthode de la borne inférieure MBI	49
III.4. Méthode des lignes de glissement	50

III.4.1 Hypothèses et conséquences	50
III.4.2 Equations du problème	51
III.4.3 Etude du champ des contraintes	52
III.4.4. Etude du champ des vitesses	61
Chapitre IV : Application des méthodes à la mise en forme.....	69
IV.1. Procédé du forgeage	70
IV.1.1. Méthode des tranches	70
IV.1.2. Méthodes d'encadrement	74
IV.1.2.1. Méthode de la borne supérieure "MBS"	74
IV.1.2.2. Méthode de la borne inférieure "BMI"	78
IV.1. 3. Méthode de lignes de glissement	80
IV.2. Le procédé du Filage.....	83
IV.2.1. Méthodes d'encadrement.....	84
IV.2.1.1. Méthode de la borne inférieure.....	84
IV.2.1.2. Méthode de la borne supérieure	86
IV.2.2. Méthode des lignes de glissement	87
IV.2.3. Comparaison des résultats fournis par les différentes approches.....	92
Conclusion et perspectives	93
Bibliographie.	

Liste des figures

Figure I. 1 : mise en évidence de la perte de linéarité dans le comportement.....	6
Figure I.2 : caractère durcissant ou adoucissant du comportement	7
Figure I.3 : matériau élastique-fragile.....	7
Figure I.4 : courbe de traction réelle d'un acier doux, mettant en évidence un plateau plastique	8
Figure I.5 : idéalisation de la courbe précédente par un comportement élastique parfaitement plastique	8
Figure I.6 : comportement anélastique	9
Figure I.7 : effet Bauschinger	10
Figure I.8 : mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement	10
Figure I.9 : Relaxation des contraintes (pointilles : matériau de type fluide)	11
Figure I.10 : Fluage (traits pleins : matériau de type solide)	11
Figure I.11 : loi de Hollomon	12
Figure I.12 : loi de Ludwik	13
Figure I.13 : Les « briques de base » pour la représentation des comportements	14
Figure I.14 : comportement d'un ressort	14
Figure I.15 : comportement d'un patin	15
Figure I.16 : Associations en série de patin et ressort	16
Figure I.17 : comportement de patin ressort en série	16
Figure I.18 : Associations en parallèle de patin et ressort	18
Figure I.19 : comportement de patin ressort en parallèle	19
Figure I.20 : écrouissage cinématique	21
Figure I.21 : l'écrouissage isotrope	22
Figure I.22 : Fonctionnement des modèles de Maxwell et Voigt	24

Figure II.1 : évolution de la frontière d'écoulement au cours de chargement	33
Figure II.2 : Etats de contraintes caractéristiques dans le plan déviateur	37
Figure II.3 : Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de Von Mises (traits pleins)	39
Figure II.4 : Comportement rigide parfaitement plastique	41
Figure III 1.a : frottement couche limite	44
Figure III.1.b : Tranche pour un lopin cylindrique	45
Figure III.2 : Les lignes de glissement dans un point M	53
Figure III.3 : Cercle de Mohr	54
Figure III.4 : Couple de lignes de glissement	56
Figure III.5 : Réseau de lignes de glissement	57
Figure III.6 : Intersection de deux cordes de lignes de glissement	58
Figure III. 7 : Le réseau de lignes de glissement pour le deuxième exemple	59
Figure III. 8 : Cercle de Mohr	60
Figure III. 9 : Champ semi-homogène	61
Figure III. 10 : Champ de vitesses	62
Figure III. 11 : Points d'intersection	64
Figure III. 12 : Hodographe	65
Figure IV. 1. Découpage de la barre en tranches.	70
Figure IV. 2 : Colline de frottement	72
Figure IV.3 : Mode d'écoulement sous un poinçon	74
Figure IV.4 : Plan physique d'écoulement par blocs rigides pour le poinçonnement	75
Figure IV.5 : Hodographe	76
Figure IV.6 : Champ statique admissible	78

<i>Figure IV.7.a : Construction d'une ligne de glissement d'une barre de forgeage</i>	<i>80</i>
<i>Figure IV.7.b : Utilisation des lignes de glissement en 2 points distincts (S) et (P)</i>	<i>80</i>
<i>Figure IV.8 : Définition des axes en P</i>	<i>81</i>
<i>Figure IV.9: Définition des axes en B</i>	<i>81</i>
<i>Figure IV.10 : Représentation schématique d'un filage</i>	<i>83</i>
<i>Figure IV.11 : Borne supérieure</i>	<i>84</i>
<i>Figure IV.12 : Plan d'écoulement</i>	<i>86</i>
<i>Figure IV.13 : Hodographe</i>	<i>86</i>
<i>Figure IV.14 : Champ de ligne de glissement et hodographe</i>	<i>88</i>

Symboles

$\bar{\sigma}$: Tenseur des contraintes

$\bar{\varepsilon}$: Tenseur des déformations

$\bar{D}$: Partie déviatorique des contraintes

$\bar{S}$: Partie sphérique des contraintes

$\bar{I}$: Matrice identité

$\vec{u}$: Vecteur déplacement

$\vec{f}$: Vecteur force

$\vec{\gamma}$: Vecteur accélération

$\bar{\omega}$: Tenseur des rotations

σ : La contrainte

σ_n : La contrainte nominale

ε : La déformation

ε_e : déformation élastique

ε_p : Déformation plastique

$\dot{\varepsilon}$: Vitesse de déformation

R_m : Résistance à la traction

σ_m : Contrainte moyenne

τ_{oct} : Contrainte octaédrale

m : La masse

F : La force

E : Module d'Young

G : modules de cisaillement

η : Coefficient de viscosité

μ, λ : Coefficient de lamé

t : Temps

R : coefficient d'anisotropie

τ : cission

L : Longueur

h : Hauteur

e : épaisseur

a : Largeur

V : volume

s : surface

$\dot{W}_e$: La puissance des forces motrices extérieures

$\dot{W}_i^*$: La puissance dissipée par déformation plastique

$\dot{W}_s^*$: La puissance dissipée par unité de surface

$\dot{W}_u^*$: La puissance dissipée par unité de volume

P_m : La pression moyenne

$|\Delta \vec{u}|$: Le module de la discontinuité de la vitesse.

v : vitesse

ω : Vitesse de rotation

C : Couple

$\bar{m}$: Caractéristique des conditions de frottement

$\vec{T}^*$: Le vecteur contrainte

α et β : Lignes de glissement

❖ Introduction générale

Le domaine de la mise en forme des matériaux (emboutissage de tôles minces, hydroformage des tubes et plaques, forgeage de matériaux massifs, découpage, filage, etc.) fait l'objet de travaux de recherche et est sujet de différents cours dédiés aux ingénieurs et aux universitaires (dans le cadre des masters et d'écoles doctorales). Cet intérêt est dû aux demandes croissantes des industriels pour les diplômés ayant l'expérience de ces disciplines.

Dans l'industrie (automobile, aéronautique, etc.), la mise en forme des matériaux constitue, au cours du processus de fabrication, une phase déterminante dans la qualité et le coût du produit final.

Ce mémoire présente les différentes méthodes de calcul de mise en forme utilisées en industrie, forgeage et filage, et propose une modélisation de ces derniers en donnant les avancées théoriques pour chaque méthode en passant par la modélisation des lois de comportement des métaux et quelques critères de plasticité.

Le présent mémoire est réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre, présente les aspects liés au comportement des matériaux, les différents essais mécaniques et les modèles rhéologiques.

Le deuxième chapitre, comporte le comportement plastique et les critères de plasticité utilisés lors d'un calcul de mise en forme des matériaux isotropes et anisotropes.

Le troisième chapitre, traduit théoriquement les différentes méthodes d'approche de calcul de mise en forme et la méthode exacte qui est celle des lignes de glissement.

Le quatrième chapitre est une application des différentes méthodes sur quelques procédés de mise en forme (forgeage et filage).

Une conclusion vers la fin donnera la précision de ces différentes méthodes d'approche par rapport à celle exacte.

Chapitre I

Les lois de comportement

I.1. Introduction

Dans le cas des matériaux métalliques, l'existence simultanée de trois domaines, que sont l'élasticité (mécanisme réversible), la plasticité (mécanisme irréversible) et la viscosité (dépendance vis-à-vis de la vitesse de déformation, fluage et relaxation) est clairement mise en évidence par de nombreuses études expérimentales.

Ce chapitre présente les différents essais mécaniques, utilisés pour la modélisation par les modèles rhéologiques, et on termine avec les hypothèses des matériaux isotropes et anisotropes.

I.2. Généralités

Pour la modélisation des lois de comportement il est nécessaire de déterminer les champs de contraintes ou de déplacements. D'après le constat effectué, les équations générales de la physique (I. 1) et (I. 2) (conservation de la masse, principe fondamental de la mécanique, principes de la thermodynamique ...) ne suffisent pas [1]. Le raisonnement est le suivant:

Les Inconnues :

- | | |
|--|-------------|
| • tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ | 6 inconnues |
| • tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ | 6 inconnues |
| • champ de déplacement $\vec{U}$ | 3 inconnues |

Les équations :

- relations déformations-déplacements :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{Grad} \vec{U}} + \overline{\text{Grad} \vec{U}^T} \right) \quad 6 \text{ équations} \quad (\text{I. 1})$$

System de Cauchy :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T \quad (\text{I. 2.a})$$

Equations d'équilibre :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad (\text{I. 2.b})$$

Un déficit du nombre d'équations vis à vis du nombre d'inconnues apparaît. Il est donc nécessaire d'employer des relations expérimentales pour compléter la modélisation. On obtient ainsi les lois de comportement. Ces dernières relient les contraintes aux déformations et permettent d'avoir suffisamment d'équations pour solutionner le problème.

Deux remarques peuvent se faire à ce niveau d'étude :

- Les équations précédentes étant des équations différentielles, il est nécessaire de bien préciser les conditions aux limites pour pouvoir définir les constantes d'intégrations. Suivant la nature du problème posé, il peut être parfois indispensable de se donner aussi des conditions initiales.
- Les 6 équations de compatibilité $\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \right)$, dont la forme développée (I. 3), ne sont pas des équations supplémentaires. Elles ne sont utilisées que pour vérifier l'intégrabilité du champ des déformations.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (I. 3)$$

Pour identifier le comportement d'un matériau, on ne peut que tester des éprouvettes. Il faut donc noter que les informations dont on dispose concernent une structure particulière (l'éprouvette) et que les mesures sont globales. En définitive la loi de comportement élaborée n'est vérifiée que globalement.

I.3. Les essais mécaniques

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simple à température ambiante. L'éprouvette est soumise à une sollicitation uniaxiale. La forme de l'éprouvette est choisie de telle sorte que l'on obtienne un état de contrainte ou de déformation uniforme dans le volume utile. Il existe plusieurs façons de piloter l'essai.

I.3.1. L'essai de traction

L'essai de traction consiste à appliquer sur une éprouvette normalisée du matériau d'étude un effort ΔF et à mesurer l'allongement correspondant Δl , ou inversement imposer l'allongement Δl et à mesurer l'effort F [2].

Δl et F sont des grandeurs physiques liées à la structure ici à l'éprouvette. Afin de les interpréter et ainsi de caractériser le matériau, on introduit des variables relatives au matériau : la contrainte σ et la déformation ε .

La contrainte σ associée à la force F est définie par (I. 4)

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (\text{I. 4})$$

Avec S la section de l'éprouvette. Cette grandeur σ est à distinguer de la contrainte nominale (ou conventionnelle) σ_n liée à la structure. La contrainte nominale est le rapport entre la force et la surface initiale de l'échantillon S_0 (I. 5) :

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0} \quad (\text{I. 5})$$

La déformation ε dite déformation vraie, est égale au cumul des déformations, équation (I. 6).

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (\text{I. 6})$$

Cette grandeur ε est à distinguer de la déformation nominale ε_n liée à la structure. La déformation nominale (ou allongement relatif) est le rapport entre l'allongement Δl et la longueur initiale l_0 (I. 7)

$$\varepsilon_n = \Delta l / l_0 \quad (\text{I. 7})$$

l_0 désigne la longueur initiale de l'éprouvette

L'essai peut être piloté en contrainte (on impose une valeur à la force F donc à la contrainte σ) ou en déformation (on applique un déplacement aux têtes d'éprouvette de façon à atteindre une déformation prescrite ε dans la zone utile de l'éprouvette) [3]. Une histoire de chargement (en contrainte ou en déformation) est appliquée à l'éprouvette et les résultats des mesures sont portés dans un diagramme (σ, ε) . Différents types de chargement permettent de mettre en évidence différents aspects du comportement des matériaux testés.

I.3.1.1. Charge monotone

On augmente progressivement la contrainte σ (ou la déformation ϵ si l'essai est piloté en déformation) et on mesure la déformation qui en résulte (ou la contrainte). Cet essai permet de mettre en évidence plus précisément les phénomènes suivants

a) La non linéarité

L'essai met en évidence un domaine (en contrainte ou en déformation) à l'intérieur duquel le comportement (c'est-à-dire la relation σ, ϵ) (figure I.1) est linéaire et à l'extérieur duquel il devient non linéaire.

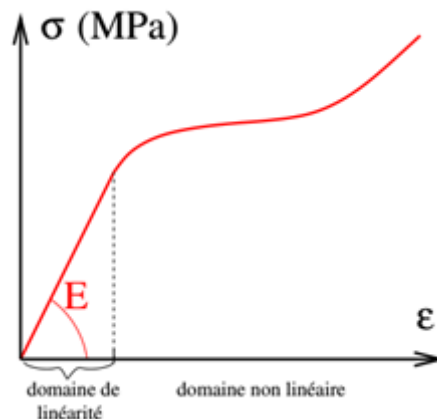


Figure I. 1 : Mise en évidence de la perte de linéarité dans le comportement [3].

b) Le durcissement ou l'instabilité

Le durcissement correspond au cas d'une courbe (σ, ϵ) croissante (Figure I.2) (toute augmentation de déformation requiert une augmentation de contrainte), tandis que l'instabilité correspond à une courbe (σ, ϵ) décroissante (la contrainte diminue alors que la déformation augmente), dans la figure (I.2) l'instabilité présente une courbe convexe, si cette dernière est concave il s'agit de l'adoucissement. Pour détecter correctement l'adoucissement il est nécessaire de contrôler l'essai en déformation (le pilotage en contrainte ne peut se poursuivre au-delà de la contrainte maximale et provoque une instabilité de l'essai).

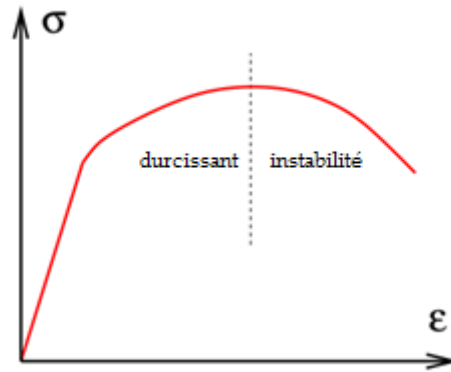


Figure I.2 : Caractère durcissant ou instabilité du comportement.

c) La ductilité du matériau

Certains matériaux se rompent très rapidement après avoir dépassé leur domaine de linéarité. Lorsque la rupture intervient en même temps que la perte de linéarité, le matériau est dit élastique fragile (Figure I.3).

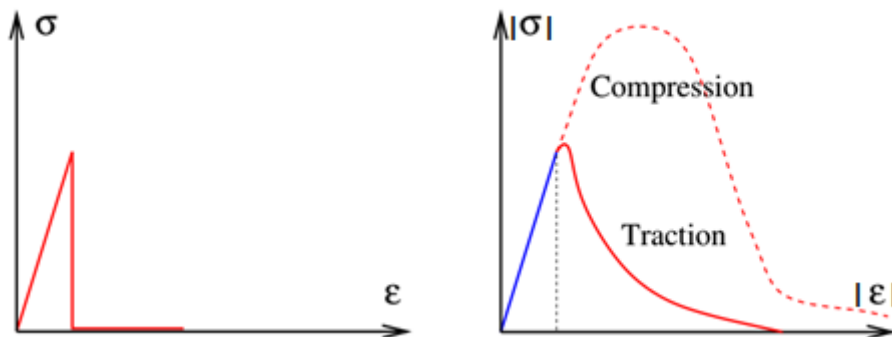


Figure I.3 : Matériau élastique-fragile [3].

A l'inverse certains matériaux se déforment beaucoup avant de se rompre (caoutchoucs, polymères, certains métaux à chaud). Ils sont dits ductiles et la déformation à rupture est une mesure de la ductilité du matériau. La figure (I.4) présente la courbe de traction typique d'un acier doux. On note que sitôt après la

perte de linéarité cette courbe présente un plateau avant de se redresser pour des déformations plus importantes.

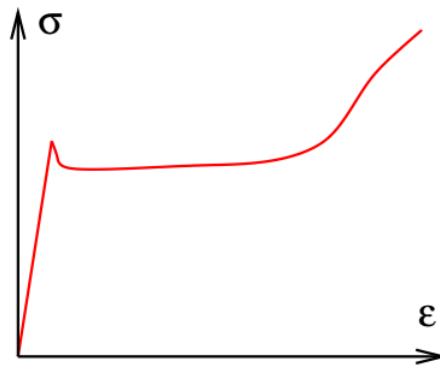


Figure I.4 : Courbe de traction réelle d'un acier doux, mettant en évidence un plateau plastique [3].

On représente souvent ce type de comportement par un modèle de plasticité parfaite (Figure I.5) qui consiste en une montée élastique linéaire suivie d'un plateau à contrainte constante.

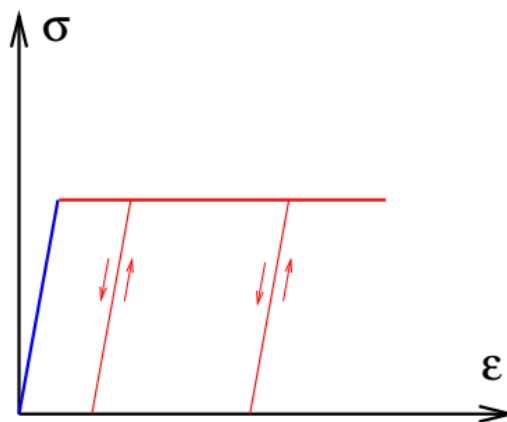


Figure I.5 : Idéalisation de la courbe précédente par un comportement élastique parfaitement plastique [3].

d) La viscosité du matériau

L'essai est contrôlé en déformation et effectué à différentes vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$. Si l'on obtient des courbes (σ, ϵ) différentes, le matériau testé présente une viscosité, c'est-à-dire une sensibilité à la vitesse de sollicitation. C'est typiquement le cas des polymères ou des métaux à chaud (et même des céramiques à haute température) [3].

I.3.1.2. Charge-décharge.

On augmente la contrainte σ supérieure à la limite élastique puis on décharge à 0 (figure I.6). Cet essai permet de mettre en particulier en évidence certains phénomènes anélastiques:

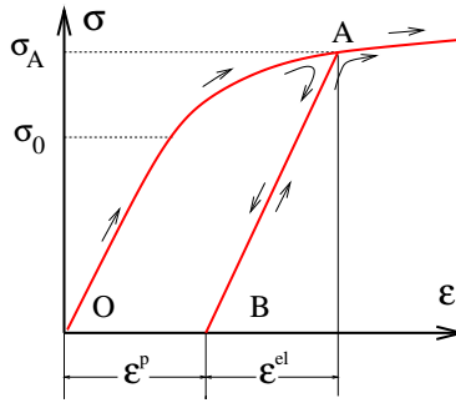


Figure I.6 : Comportement anélastique [3].

Si les courbes de charge-décharge coïncident, le domaine est élastique. Dans le cas contraire il est anélastique. Après décharge complète, il subsiste une déformation résiduelle. Cette déformation résiduelle peut s'effacer avec le temps, signe d'une viscosité du matériau. Dans les matériaux insensibles à la vitesse de chargement (métaux à froid par exemple), cette déformation résiduelle est permanente, tant que l'application d'une contrainte ne vient pas la perturber. La déformation au point A se décompose (figure I.6) donc en une partie ϵ^{el} récupérable par décharge (d'où le nom de partie élastique de la déformation) et une partie ϵ^p qui subsiste après décharge (c'est la partie plastique, ou plus généralement anélastique) l'équation de la déformation s'écrit en (I. 8) :

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^p \quad (\text{I. 8})$$

L'anélasticité ne se manifeste que lorsque la force atteint un certain seuil, qui est la limite d'élasticité du matériau. Initialement ce seuil est σ_0 (voir figure I.6).

On effectue une décharge de A à B puis on recharge en B . Dans la plupart des métaux la charge se fait à nouveau le long du trajet AB et de façon élastique (le trajet AB est réversible). La limite d'élasticité pour une charge à partir de B est donc σ_A . Si la limite d'élasticité est fixe ($\sigma_A = \sigma_0$ pour tout A), le milieu est parfaitement plastique. Si la limite d'élasticité varie ($\sigma_A \neq \sigma_0$), le matériau est écrouissable. L'écrouissage est positif s'il y a durcissement (le seuil augmente avec la déformation), il est négatif s'il y a adoucissement.

Quand on effectue un essai de compression à partir de l'état naturel sans contrainte (à partir du point O), on observe en général un seuil σ_0 identique en traction et en compression. En revanche si l'on déforme le matériau plastiquement puis qu'on le décharge (à partir du point A) et que l'on prolonge la décharge par application d'une contrainte négative (compression), on observe souvent une dissymétrie du seuil d'élasticité en compression par rapport à sa valeur en traction (figure I.7): c'est l'effet Bauschinger ($\sigma_C \neq \sigma_A$) [3].

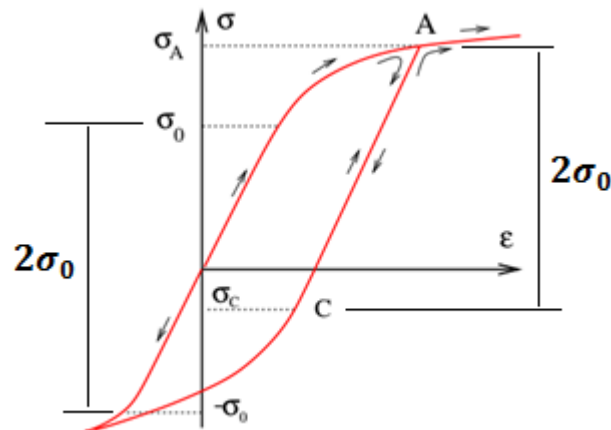


Figure I.7 : L'effet Bauschinger.

I.3.1.3. Sensibilité à la vitesse de déformation.

La sensibilité des matériaux à la vitesse de déformation a deux conséquences pour la tenue de ces matériaux dans le temps qui sont le fluage et la relaxation (figure I.8).

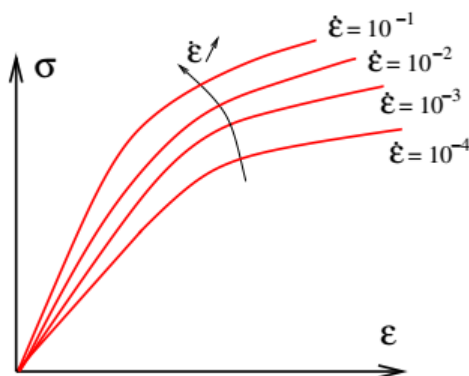


Figure I.8 : Mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement [3].

a) Relaxation des contraintes.

La relaxation des contraintes est mise en évidence par le test suivant : on impose en $t = 0$ une déformation ε que l'on maintient constante dans le temps. La contrainte prend tout d'abord une valeur donnée par l'élasticité du matériau $\sigma = E\varepsilon$, puis on constate généralement qu'elle se relâche au cours du temps : c'est la relaxation (figure I.9). Si la relaxation est totale, on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de type fluide : au bout d'un temps (qui peut être long), le matériau « oublie » la déformation qui lui a été imposée en effaçant toutes les contraintes créées.

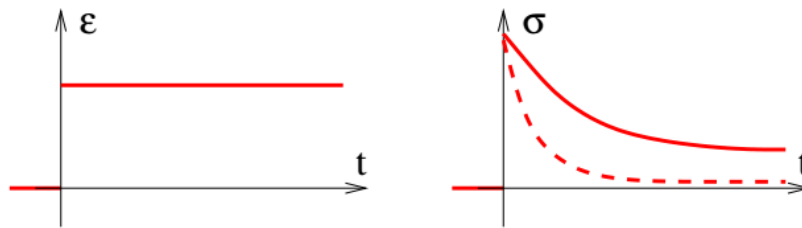


Figure I.9 : Relaxation des contraintes (pointilles : matériau de type fluide) [3].

b) Fluage.

C'est le phénomène dual du précédent. On impose brusquement une contrainte σ qu'on maintient constante au cours du temps. Il en résulte une déformation initiale élastique $\varepsilon = \sigma/E$ puis généralement la déformation augmente avec le temps : c'est le fluage (figure I.10). Si la déformation de fluage reste limitée lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a coutume de dire que le milieu étudié a un comportement de type solide.

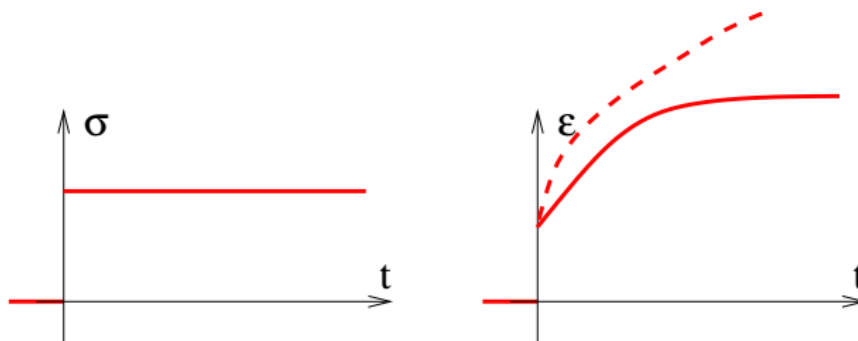


Figure I.10 : Fluage (traits pleins : matériau de type solide) [3].

Le principal objectif des essais mécaniques est la mise en place d'une loi destinée à être utilisée pour la prévision du comportement du matériau. Cette loi de comportement pourra par exemple être appliquée lors de la mise en forme d'une pièce, pour calculer les efforts nécessaires (choix des outillages et de la presse), pour évaluer l'aptitude du matériau à cette mise en forme (remplissage des formes).

Pour ce type d'application, il n'est parfois pas nécessaire de faire appel à des lois compliquées. On se contente alors de relations simples, qui servent simplement à décrire le comportement du matériau dans un cas particulier [4].

En pratique, pour beaucoup de matériaux (dont la plupart des métaux), la partie élastique de la déformation est très faible devant la partie plastique lors d'une opération de mise en forme. Il est donc fréquent, dans une approche phénoménologique, de négliger ϵ_e , et donc de confondre ϵ et ϵ_p .

Les principales lois de comportement phénoménologiques utilisées sont les suivantes :

– **La loi de Hollomon ou loi puissance** : décrite sur la figure (I.11), où la contrainte est donnée sous la forme (I. 9) (K et n sont deux paramètres) :

$$\sigma = K\epsilon^n \quad (\text{I. 9})$$

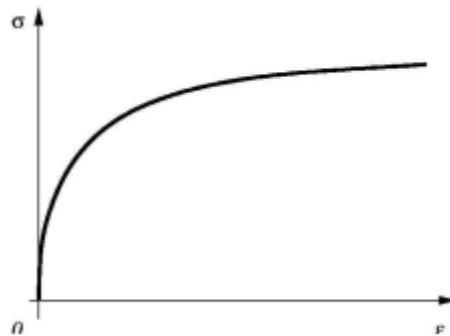


Figure I.11 : Loi de Hollomon [4].

Pour identifier les paramètres K et n , on transforme la courbe en $\ln(\sigma) - \ln(\epsilon)$, qui devient linéaire. La pente de cette courbe donne le coefficient $n = \frac{d\ln(\sigma)}{d\ln(\epsilon)}$, appelé *coefficient d'écrouissage*.

– **La loi de Ludwik** : décrite sur la figure (I.12), qui a la forme (I. 10) (σ_e , K et n sont des paramètres) :

$$\sigma = \sigma_e + K\epsilon^n \quad (\text{I. 10})$$

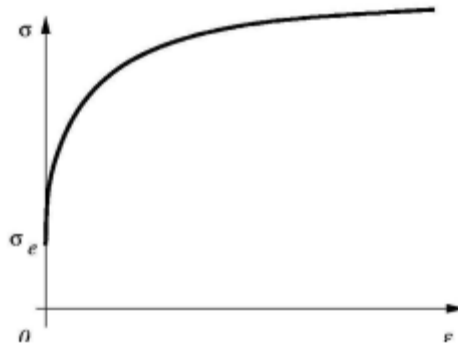


Figure I.12 : Loi de Ludwik [4].

Pour obtenir les paramètres σ_e , K et n , il faut dans ce cas tout d'abord identifier σ_e qui est en fait la limite d'élasticité du matériau, puis transformer la courbe en $\ln(\sigma - \sigma_e) - \ln(\varepsilon)$ pour obtenir les deux autres paramètres. Il faut signaler ici que le paramètre n n'est pas ici le coefficient d'écrouissage du matériau [4].

I.4. La rhéologie

I.4.1. Les modèles rhéologiques

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements «de base», qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont reportés en figure (I.13) [5].

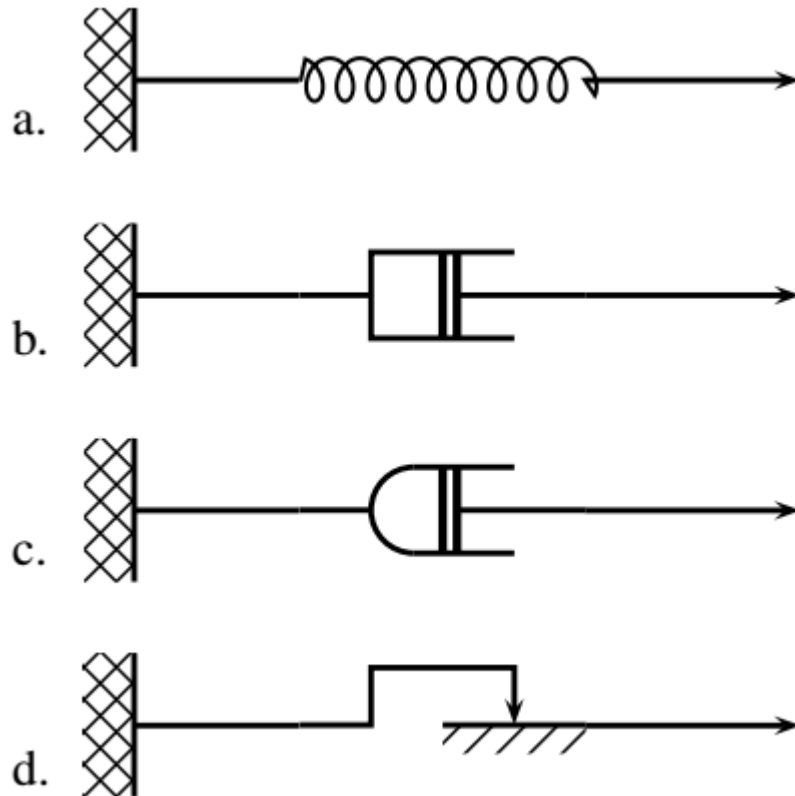


Figure I.13 : Les « briques de base » pour la représentation des comportements [5].

a) Le ressort

Symbolise l'élasticité linéaire parfaite (figure I.13.a), pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (I. 11).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{I. 11})$$

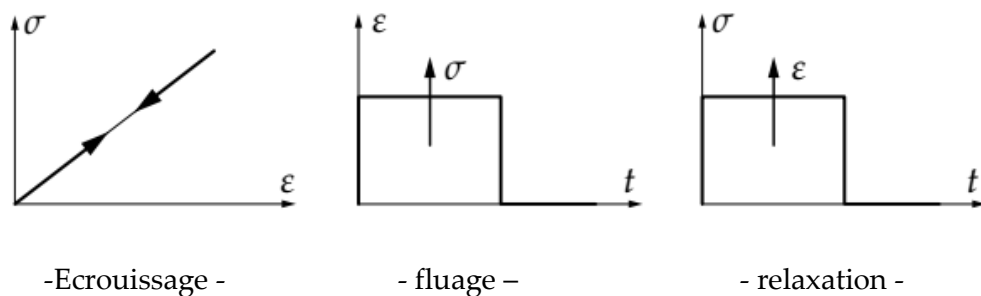


Figure I.14 : Le comportement d'un ressort.

b) L'amortisseur

La viscosité, linéaire (figure I.13.b) ou non-linéaire (figure I.13.c) dont le comportement est illustré en figure (I.15). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement, relation (I.12) et (I.13). Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.

$$\text{Linéaire} \quad \sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (\text{I. 12})$$

$$\text{non-linéaire} \quad \sigma = \dot{\epsilon}^{1/N} \quad (\text{I. 13})$$

η : coefficient de viscosité

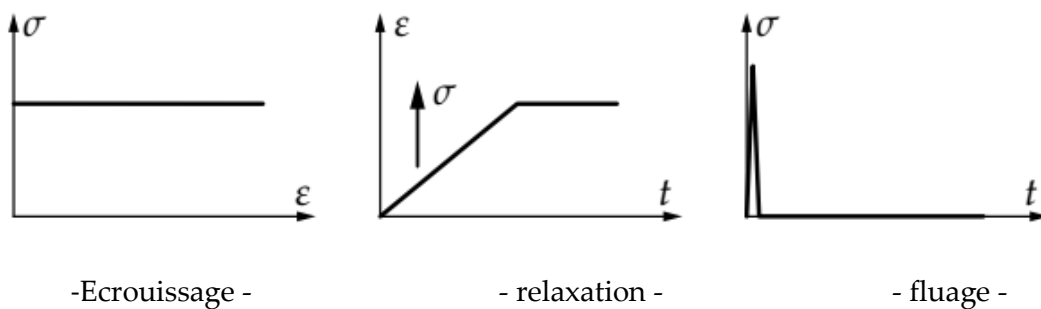


Figure I.15 : comportement d'un amortisseur linéaire.

c) Le patin

Le patin modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (figure I.13.d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique, (I. 14) est l'équation du patin.

$$-\sigma_y \leq \sigma \leq \sigma_y \quad (\text{I. 14})$$

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en aucun cas leur accorder une très grande

importance pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. Ils sont néanmoins brièvement présentés ici, car ils permettent de comprendre la nature des relations à introduire pour chaque type de comportement, en pratiquant par exemple l'exercice qui consiste à combiner deux à deux les modèles élémentaires.

En fonction du type de chargement imposé, la réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents :

- plan déformation – contrainte, $(\epsilon - \sigma)$ pour l'essai de traction simple, ou d'écrouissage, augmentation monotone de la charge ou de la déformation ;
- plan temps – déformation, $(t - \epsilon)$ pour l'essai de fluage, sous charge constante ;
- plan temps – contrainte, $(t - \sigma)$ pour l'essai de relaxation, sous déformation constante [5].

Dans cette association en distincte deux règle de calcul :

Dans une association en série la déformation totale est la somme des déformations des éléments mais la contrainte supportée est la même dans tous les éléments, relation (I.14'.a).

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_i \\ \epsilon = \sum_i^n \epsilon_i \end{cases} \quad (\text{I.14'.a})$$

n : nombre d'éléments associés.

Dans une association en parallèle la contrainte imposée à l'ensemble est la somme de toutes les contraintes supportées par tous les éléments et la déformation est la même, relation (I.14'.b).

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_i \\ \sigma = \sum_i^n \sigma_i \end{cases} \quad (\text{I.14'.b})$$

I.4.2. Plasticité uniaxiale

I.4.2.1. Modèle élastique – parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (figure I.16) produit un comportement élastique parfaitement plastique, modélisé en (figure I.17). Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que σ_y .

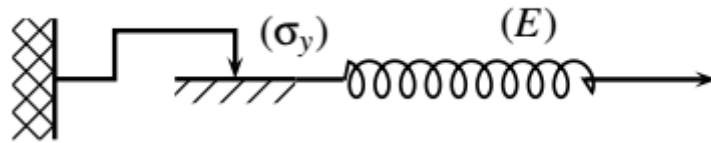


Figure I.16 : Association en série de patin et ressort [5].

Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une fonction de charge f (I.15) dépendant de la seule variables σ .

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (\text{I. 15})$$

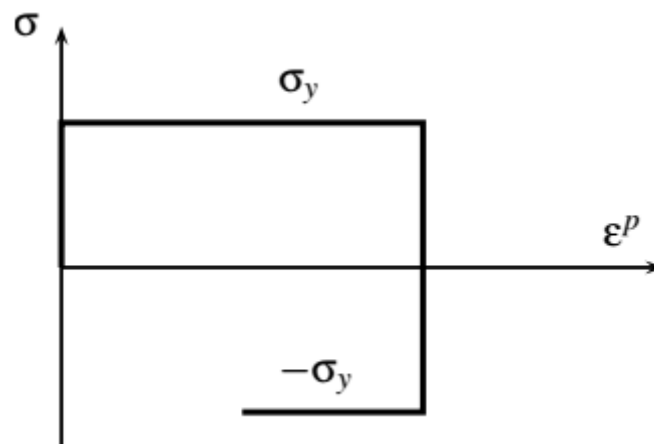


Figure I.17 : comportement de patin ressort en série [5].

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de f , et le comportement du système se résume alors aux équations (I.16).

$$\begin{cases} \text{domaine d'élasticité si : } f < 0 & (\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E) \\ \text{décharge élastique si : } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 & (\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}) \\ \text{écoulement plastique : } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 & (\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p) \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle, la vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote.

Le modèle est sans écrouissage, puisque le niveau de contrainte ne varie plus à la sortie du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive [5].

I.4.2.2. Modèle de Prager (écrouissage cinématique)

L'association en parallèle de patin et ressort illustrée en (figure I.18) correspond au comportement illustré en figure (I.19).

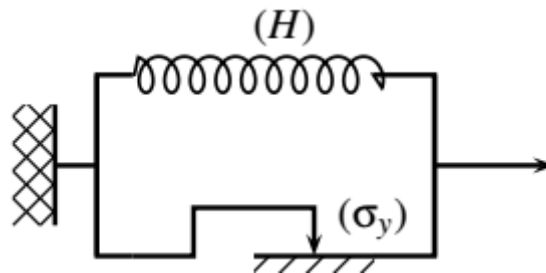


Figure I.18 : Association en parallèle de patin et ressort [5].

Dans ce cas, le modèle présente de l'écrouissage. Il est dit cinématique linéaire, car dépendant linéairement de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élasto-plastique si l'on rajoute un ressort en série.

La forme de la courbe dans le plan $(\sigma - \epsilon^p)$ est :

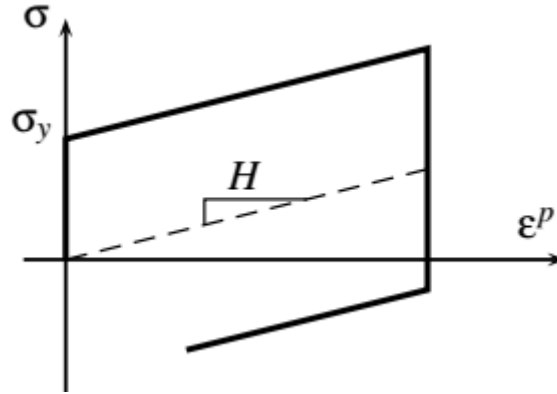


Figure I.19 : Comportement de patin ressort en parallèle [5].

De la courbe (figure I.19) on constate que lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort est (I. 17).

$$X = H\epsilon^p \quad (\text{I. 17})$$

Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit (I. 18).

$$|\sigma - H\epsilon^p| = \sigma_y \quad (\text{I. 18})$$

Pour une déformation donnée, cette contrainte X est une contrainte interne qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge (I. 19) dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne.

$$f(\sigma; X) = |\sigma - X| - \sigma_y \quad (\text{I. 19})$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois $f = 0$ et $\dot{f} = 0$. Ceci conduit à la condition (I. 20)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0 \\ \text{signe}(\sigma - X) \dot{\sigma} + \text{signe}(\sigma - X) \dot{X} = 0 \\ \dot{\sigma} = \dot{X}, \text{ et finalement : } \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{H} \end{cases} \quad (\text{I. 20})$$

Dans ce cas, la contrainte augmente au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression (I. 21) de la vitesse de déformation plastique.

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{E}{E+H} \dot{\epsilon} \quad (\text{I. 21})$$

le cas où $H = 0$ redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique.

Il est remarquable de noter que le calcul de l'énergie dissipée au cours d'un cycle produit exactement le même résultat que pour le premier montage, ce qui indique que, pour ce type de comportement, une partie de l'énergie est temporairement stockée dans le matériau (ici, dans le ressort), et entièrement restituée à la décharge [5].

I.4.2.3. Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge – décharge» s'expriment avec les relations (I. 22) :

$$\begin{cases} \text{domaine d'élasticité si : } f(\sigma, A_i) < 0 & (\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}) \\ \text{décharge élastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \dot{f}(\sigma, A_i) < 0 & (\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}) \\ \text{écoulement plastique si : } f(\sigma, A_i) = 0 \quad \dot{f}(\sigma, A_i) = 0 & (\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E + \dot{\epsilon}^p}) \end{cases} \quad (\text{I. 22})$$

Dans le cas général, le module H dépend de la déformation et/ou des variables d'écrouissage. La valeur du module plastique au point $(\sigma; A_i)$ s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle (I. 23) s'appelle la condition de cohérence.

$$\dot{f}(\sigma; A_i) = 0 \quad (\text{I. 23})$$

Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d'écrouissage, le second fait intervenir une variable X qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général. Comme indiqué le type d'écrouissage correspondant s'appelle écrouissage cinématique (figure I.20).

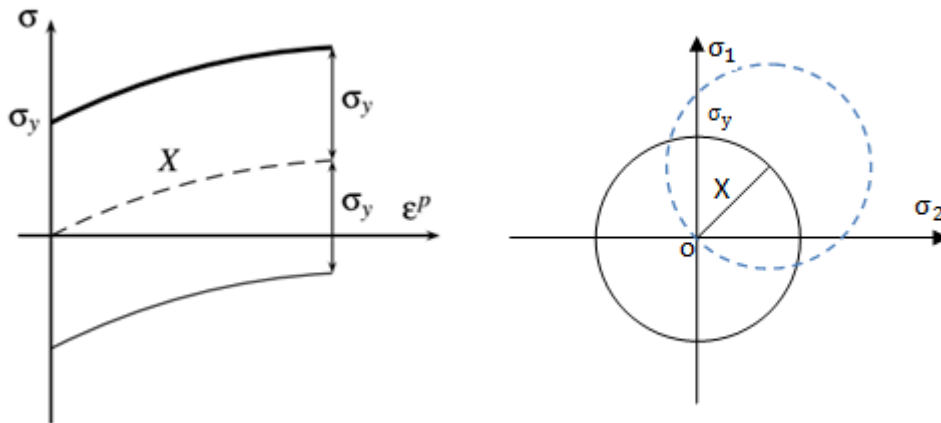


Figure I.20 : Ecrouissage cinématique.

Une autre évolution élémentaire que peut subir le domaine d'élasticité est l'expansion. Cet autre cas (figure I.21) correspond à un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine : il s'agit de l'écrouissage isotrope.

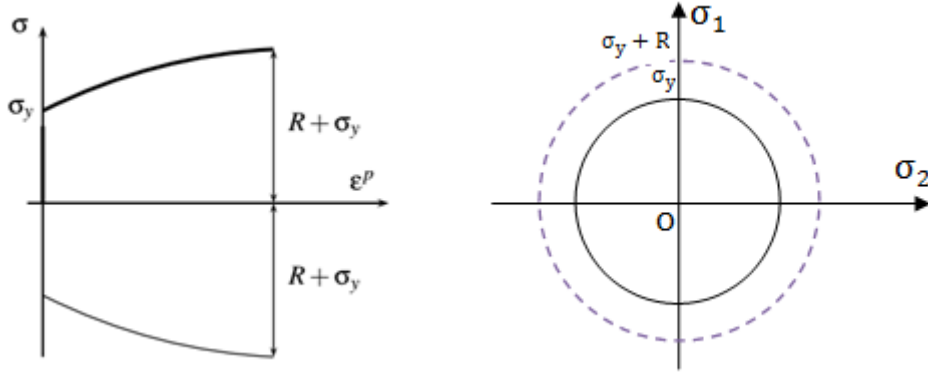


Figure I.21 : Ecrouissage isotrope

La variable d'écrouissage qui intervient dans f est la dimension du domaine d'élasticité, notée R comme l'indique l'équation (I. 23)

$$f(\sigma; R) = |\sigma| - R - \sigma_y \quad (\text{I. 23})$$

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}^p$. Elle s'exprimera donc en fonction de la déformation plastique cumulée, p variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique (I. 24)

$$\dot{p} = |\dot{\epsilon}^p| \quad (\text{I. 24})$$

Bien entendu, il n'y a pas de différence entre p et ϵ^p tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité.

Pour l'écrouissage cinématique, (I. 25) :

$$\sigma = X + \sigma_y \quad (\text{I. 25})$$

et (I. 26) pour l'écrouissage isotrope :

$$\sigma = R + \sigma_y \quad (\text{I. 26})$$

Cela signifie donc que c'est la loi d'évolution de la variable d'écrouissage qui détermine exactement la forme de la courbe de traction. Les deux modèles rhéologiques invoqués donnent des courbes linéaires, avec des modules plastiques nuls ou constants. Il est souvent plus réaliste de considérer une courbe qui se sature en fonction de la déformation, soit par exemple une fonction puissance (loi de Ramberg – Osgood (I.27), avec deux coefficients matériaux K et m) ou une exponentielle (I.28), cette dernière formulation offrant l'avantage d'introduire une contrainte ultime σ_u supportable par le matériau (deux coefficients matériau, σ_u et b en plus de σ_y) :

$$\sigma = \sigma_y + K(\varepsilon^p)^m \quad (\text{I. 27})$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u)\exp(-b\varepsilon^p) \quad (\text{I. 28})$$

Dans bien des cas, les utilisateurs ne prennent pas la peine de définir une forme explicite de la loi de comportement, et décrivent la courbe de traction point par point. Cela revient implicitement à considérer un écrouissage isotrope. Ce type d'écrouissage est prédominant pour les déformations importantes (au-delà de 10%). Cependant, l'écrouissage cinématique continue de jouer un rôle important lors de décharges, même pour les grandes déformations, et c'est lui qui est prépondérant pour les faibles déformations et les chargements cycliques. Il permet en particulier de simuler correctement l'effet Bauschinger, c'est-à-dire le fait que la contrainte d'élasticité en compression décroît par rapport à la contrainte initiale à la suite d'un préécrouissage en traction. Il est néanmoins moins souvent utilisé que l'écrouissage isotrope, car son traitement numérique est plus délicat [5].

I.4.3. Viscoélasticité uniaxiale

I.4.3.1. Un exemple de modèle rhéologique

Le modèle de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (figure I.22.a), celui de Voigt un amortisseur et un ressort en parallèle (figure I.22.b). (I. 29), (I. 30) et (I. 31) sont leurs équations respectives.

$$\text{Maxwell : } \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{I.29})$$

$$\text{Voigt : } \sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (\text{I.30})$$

$$\text{ou encore } \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - H\varepsilon}{\eta} \quad (\text{I.31})$$

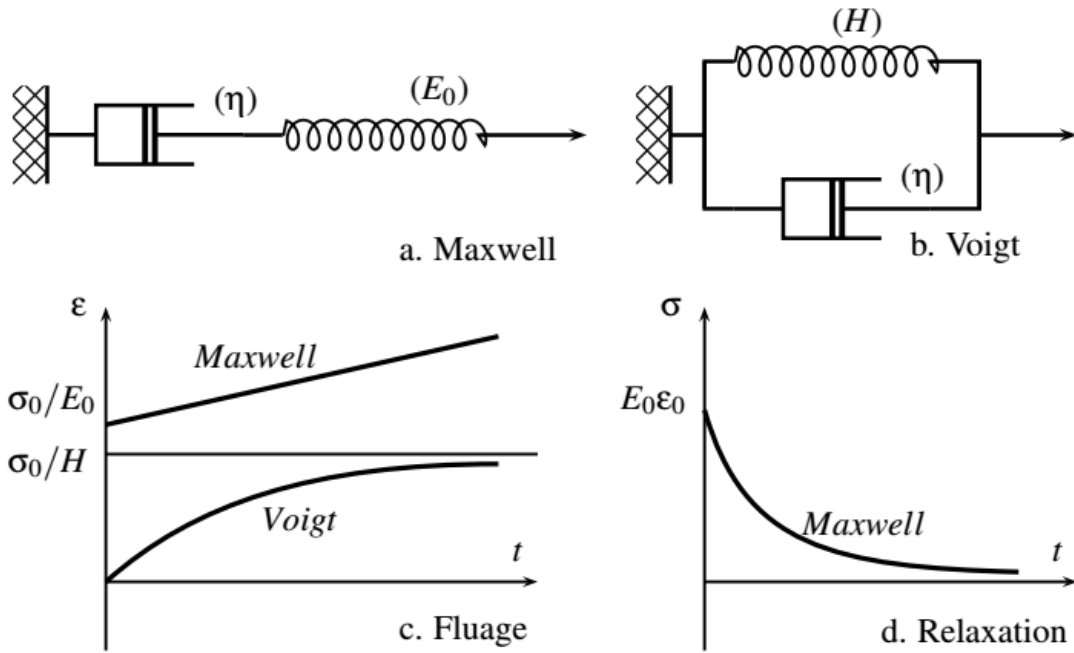


Figure I.22 : Représentations des modèles de Maxwell et Voigt [5]

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable par morceaux, avec un saut fini à l'origine :

L'application d'un saut de déformation en $t = 0$ produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort en série pour effectuer des calculs de structure.

Sous l'effet d'une contrainte σ_0 constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique σ_0/H , le fluage est donc limité (figure I.22.c). Par ailleurs, si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur ϵ_0 , la contrainte asymptotique sera $H \epsilon_0$. Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de la contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (figure I.22.c), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (figure I.22.d).

Dans le cas de modèles et de chargement aussi simples, la réponse est obtenue instantanément par intégration directe des équations différentielles. Les formules obtenues sont (I. 32) et (I. 33) pour le modèle de Maxwell et (I. 34) pour le modèle de Voigt.

-fluage sous une contrainte σ_0 :
$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0 t}{\eta} \quad (\text{I. 32})$$

-relaxation à la déformation ϵ_0 :
$$\sigma = E_0 \epsilon_0 e^{-t/\tau} \quad (\text{I. 33})$$

▪ Modèle de Voigt :

-fluage sous une contrainte σ_0 :
$$\epsilon = \left(\frac{\sigma_0}{H} \right) (1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}) \quad (\text{I. 34})$$

Les constantes $\tau = \frac{\eta}{E_0}$ et $\tau' = \frac{\eta}{H}$ sont homogènes à un temps, τ désignant le temps de relaxation du modèle de Maxwell [5].

I.5. Lois de Comportement des milieux continus

I.5.1. Convention d'écriture

Le tenseur de raideur est un tenseur d'ordre 4. Il est donc particulièrement délicat à expliciter. Les formules développées sont relativement lourdes. Il convient donc de trouver une méthode qui permet une simplification d'écriture [6].

La solution réside en des applications linéaires. L'une va nous permettre de passer de l'espace vectoriel de dimension 2 associé aux tenseurs d'ordre 2 vers un espace vectoriel de dimension 1 auquel on associera des tenseurs d'ordre 1. Pour le tenseur des contraintes, cette application se présente sous la forme (I. 35).

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{I. 35})$$

Par contre pour le tenseur des déformations, on préfère utiliser l'application définie par (I. 36).

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix} \quad (\text{I. 36})$$

Ces transformations sur les tenseurs des contraintes et des déformations induisent l'existence d'une application (I.37) linéaire de l'espace vectoriel de dimension 4 (associée au tenseur de raideur) vers un espace vectoriel de dimension 2:

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{K}} \bar{\otimes} \bar{\varepsilon} \rightarrow \hat{\sigma} = \hat{C} \hat{\varepsilon} \quad (\text{I. 37})$$

La nouvelle forme du tenseur de raideur (I. 38) permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{I. 38})$$

I.5.2. Matériau isotrope :

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base.

Cela revient à dire que trois axes indépendants sont des axes d'isotropie transverse.

Cela nous donne alors les relations (I. 39).

$$\begin{cases} E_2 = E_3; \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{31}}{E_3}; G_{12} = G_{31}; 2G_{23} = \frac{E_2}{1+\nu_{13}} & \text{si } \vec{e}_1 \text{ est l'axe de l'isotropie} \\ E_1 = E_3; \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_3}; G_{23} = G_{31}; 2G_{23} = \frac{E_3}{1+\nu_{31}} & \text{si } \vec{e}_2 \text{ est l'axe de l'isotropie} \\ E_1 = E_2; \frac{\nu_{13}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_2}; G_{23} = G_{31}; 2G_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}} & \text{si } \vec{e}_3 \text{ est l'axe de l'isotropie} \end{cases} \quad (\text{I. 39})$$

ν_{ij} : coefficient de Poisson dans les directions i et j

Compte tenu de toutes ces relations, la loi de comportement se présente sous la forme (I. 40).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{I. 40})$$

On constate alors que la seule forme possible du tenseur d'élasticité est (I. 41).

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{I. 41})$$

On obtient ainsi la loi de comportement (I. 42) faisant apparaître les coefficients de Lamé.

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{I. 42})$$

Avec cette forme de relation, on constate que les directions principales de contraintes sont confondues avec les directions principales de déformations [6].

I.5.3. Matériau anisotrope

I.5.3.1. Matériau orthotrope

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux.

On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour le bois (dans certains cas), les composites unidirectionnels et les produits métalliques laminés [6].

Supposons que nous ayons une symétrie par rapport au plan de coordonnée $x_3 = 0$. La matrice de changement de base traduisant cette symétrie est (I. 43)

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I. 43})$$

La relation d'indépendance du tenseur de raideur $\mathbf{A}$ dans ce changement va se traduire par le fait que toutes les composantes K_{ijkl} ayant un nombre impair d'indice 3 sont nulles. Ainsi pour la matrice $\mathbf{C}$ on obtient :

$$c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{64} = c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{65} = 0$$

Le tenseur de raideur n'a plus que 13 coefficients indépendants.

Il nous reste maintenant à traduire la condition de symétrie par rapport à un plan orthogonal, par exemple celui de coordonnée $x_1 = 0$.

On aura donc :

$$(c_{15}) = c_{16} = (c_{25}) = c_{26} = (c_{35}) = c_{36} = c_{45} = (c_{46}) = 0$$

Il ne reste donc que 9 coefficients indépendants pour traduire le comportement de notre matériau.

Dans le repère principal d'orthotropie, la loi peut se mettre sous la forme (I. 44)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{I. 44})$$

Les conditions de symétrie se traduisent par les relations (I. 45)

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} ; \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} ; \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (\text{I. 45})$$

Le matériau est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

- * 3 modules d'élasticité longitudinale $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ dans les directions de l'orthotropie.
- * 3 modules de cisaillement $\mathbf{G}_{12}, \mathbf{G}_{23}$ et $\mathbf{G}_{31}$.
- * 3 coefficients de poisson ν_{12}, ν_{23} et ν_{31} .

I.5.3.2. Matériau isotrope transverse

Un milieu est dit isotrope transverse pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par rotation autour d'un axe privilégié. Dans ce cas, tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie. Nous pouvons donc remarquer que le milieu est déjà orthotrope [6]. Imaginons par exemple que l'axe $\vec{\mathbf{E}}_3$ soit l'axe d'isotropie. Il est donc nécessaire d'avoir une invariance de la loi de comportement pour toute rotation définie par (I. 46).

$$(P) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I. 46})$$

On conçoit facilement qu'en plus des relations du cas orthotrope, on obtient de nouvelles relations entre les coefficients élastiques du tenseur de raideur. On aura par exemple :

$$K_{1212} = -\sin \alpha \cos \alpha A_{1p} A_{2q} K_{11pq} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) A_{1p} A_{2q} K_{12pq} \\ + \sin \alpha \cos \alpha A_{1p} A_{2q} K_{22pq}$$

$$K_{1212} = -\sin \alpha \cos \alpha (-\sin \alpha \cos \alpha K_{1111} + \sin \alpha \cos \alpha K_{1122}) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 K_{1212} \\ + \sin \alpha \cos \alpha (-\sin \alpha \cos \alpha K_{2211} + \sin \alpha \cos \alpha K_{2222})$$

Ce qui nous donnera :

$$c_{66} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 c_{66}$$

$$4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha c_{66} = 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (c_{11} - c_{12}) \quad \text{car} \quad c_{11} = c_{22}$$

D'où la relation (I. 47).

$$c_{66} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \quad (\text{I. 47})$$

En définitive on retrouvera 4 nouvelles équations (dont $c_{22} = c_{11}$). Il n'y a donc plus que 5 composantes indépendantes. Ce qui donne l'équation (I. 48).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{I. 48})$$

Les 4 relations supplémentaires étant définies en (I. 49).

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \\ G_{23} = G_{31} \\ 2G_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}} \end{cases} \quad (\text{I. 49})$$

Dans ce premier chapitre on s'est contenté de présenter les lois générales de comportement des matériaux, or le but de ce mémoire est de présenter les différentes méthodes de calcul en plasticité appliquées à la mise en forme. Pour cela la connaissance de certains critères de plasticité est de rigueur.

Le second chapitre est une présentation générale de ces différents critères utilisés lors de ces calculs, que se soit isotrope (Von Mises et Trésca) ou anisotrope (Hill).

Chapitre II

Plasticité

II.1. Introduction

Lorsqu'un matériau est sollicité jusqu'à rupture, les essais montrent que la contrainte de rupture σ_R est une grandeur présentant de fortes fluctuations et que le mode de ruine dépend de la nature du matériau. Ainsi la rupture peut intervenir brutalement quasi sans déformation préalable pour les matériaux qualifiés de fragiles, tandis qu'elle n'intervient qu'après une étape de grande déformation permanente pour les matériaux ductiles. Nous savons maintenant que les matériaux fragiles rompent brutalement au-delà d'une certaine tension, tandis que les matériaux ductiles s'écoulent plastiquement avant de rompre sous cisaillement. Si la rupture est toujours l'étape ultime de la ruine des structures, elle est précédée d'une étape de plastification pour les matériaux ductiles.

II.2. Le comportement plastique

Le comportement plastique est celui d'un corps solide qui prend des déformations permanentes sans se fissurer. On admet généralement que ces déformations permanentes se produisent au-delà d'un seuil de contrainte appelé seuil de plasticité ou limite d'élasticité.

II.3. Frontière d'Écoulement

Tout matériau admet une limite de résistance au-delà de laquelle la déformation plastique ne peut plus être contenue. Ce seuil d'écoulement est fonction de l'état de contrainte appliquée dans l'espace des contraintes le long d'un trajet de chargement.

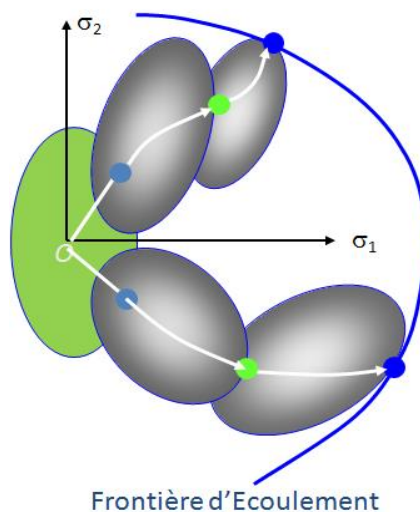


Figure II.1 : L'évolution de la frontière d'écoulement au cours du chargement

Point de Plastification Naissante

- Frontière Élastique Initiale : $f(\bar{\sigma}) = 0$

Cette frontière peut être entraînée par l'écrouissage

- Frontière élastique écrouie : $f(\bar{\sigma}, \alpha) = 0$

Point d'écoulement plastique libre :

- Limite de résistance

La Frontière d'écoulement (figure II.1) est la surface enveloppe de toutes les frontières écrouies ayant atteint le seuil d'écoulement plastique libre.

II.4. Chargement Limite

Toute structure admet un chargement limite. Pour une répartition inhomogène de contrainte la plastification (même parfaite) envahit progressivement la structure.

Tant qu'il reste des zones élastiques, elles contiennent l'écoulement des zones en déformation plastique

Lorsque toute la structure est plastifiée l'écoulement plastique devient libre, la structure atteint son chargement limite.

II.5. Les critères de plasticité

Le cas du chargement uniaxial étudié jusqu'à présent fait apparaître un domaine d'élasticité au travers de deux valeurs de contrainte, l'une en traction, l'autre en compression, pour lesquelles se produit l'écoulement plastique. Ainsi dans le cas du modèle de Prager (figure I.18).

- le domaine d'élasticité initial est le segment : $[-\sigma_y, \sigma_y]$
- sa position pour une déformation plastique ϵ^p est : $[-\sigma_y + X; \sigma_y + X]$

avec : $\mathbf{X} = H\boldsymbol{\varepsilon}^p$

Il est décrit par la fonction de charge (définie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$)

$$f: (\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{X}) \rightarrow f(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{X})$$

Pour définir ce même domaine en présence de chargements multiaxiaux, la fonction f devient une fonction du tenseur de contrainte, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et du tenseur $\bar{\mathbf{X}} = H\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, (de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$) telle que :

- si $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{X}}) < 0$, l'état de contraintes est élastique
- si $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{X}}) = 0$, le point de fonctionnement est sur la frontière
- la condition $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{X}}) > 0$ définissant l'extérieur du domaine

Dans le cas général, l'ensemble de départ contiendra les contraintes et toutes les variables d'écrouissage, scalaires ou tensorielles, il faut donc définir $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{A}_i)$ [5].

On va dans un premier temps limiter la présentation à la définition du domaine d'élasticité initial, pour lequel on supposera que les variables $\mathbf{A}_i$ sont nulles, si bien qu'on se contentera d'écrire les restrictions des fonctions f dans l'espace des contraintes.

L'expérience montre que, pour la plupart des matériaux, le domaine d'élasticité initial est convexe (c'est en particulier vrai pour les métaux qui se déforment par glissement cristallographique). La fonction de charge doit donc elle-même être convexe en $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ce qui implique, pour tout réel λ compris entre 0 et 1, et pour un couple $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2)$ quelconque de la frontière, la relation est (II. 1).

$$f(\lambda\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 + (1 - \lambda)\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2) \leq \lambda f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1) + (1 - \lambda)f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2) \quad (\text{II. 1})$$

Comme dans le cas de l'étude du tenseur d'élasticité, il faut ici encore respecter les symétries matérielles. Ceci implique en particulier dans le cas d'un matériau isotrope que f soit une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore, ce qui est équivalent, des invariants du tenseur des contraintes dont la définition provient du polynôme caractéristique (II. 2).

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace}(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} \\ I_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \text{trace}(\bar{\sigma}^2) = \left(\frac{1}{2}\right) \sigma_{ij} \sigma_{ji} \\ I_3 = \left(\frac{1}{3}\right) \text{trace}(\bar{\sigma}^3) = \left(\frac{1}{3}\right) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \end{cases} \quad (\text{II. 2})$$

L'expérience montre que la déformation plastique d'un grand nombre de matériaux est indépendante de la pression hydrostatique [5]. Ceci amène à considérer comme variable critique à faire figurer dans la définition du critère non plus le tenseur de contraintes lui-même, mais son déviateur $\bar{\mathbf{S}}$ relation (II. 3), défini en enlevant à $\bar{\sigma}$ la pression hydrostatique, et ses invariants (II. 4) [8].

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\sigma} - \left(\frac{I_1}{3}\right) \bar{\mathbf{I}} \quad (\text{II. 3})$$

$$\begin{cases} J_1 = \text{trace}(\bar{\mathbf{S}}) = 0 \\ J_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \text{trace}(\bar{\mathbf{S}}^2) = \left(\frac{1}{2}\right) s_{ij} s_{ji} \\ J_3 = \left(\frac{1}{3}\right) \text{trace}(\bar{\mathbf{S}}^3) = \left(\frac{1}{3}\right) s_{ij} s_{jk} s_{ki} \end{cases} \quad (\text{II. 4})$$

Il est commode, en vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de f sont homogènes à des contraintes, c'est ce qui amène par exemple à utiliser à la place de J_2 l'invariant J (II. 5), qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ou de la contrainte σ dans le cas d'un état de traction simple :

$$J = \left(\left(\frac{3}{2}\right) s_{ij} s_{ji}\right)^{1/2} = \left(\left(\frac{3}{2}\right) ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)\right)^{1/2} = |\sigma| \quad (\text{II. 5})$$

La valeur précédente est à rapprocher de celle de la contrainte de cisaillement octaédral. Les plans octaédraux sont ceux dont le vecteur normal est de type $\{1, 1, 1\}$ dans l'espace des contraintes principales. Il est aisé de montrer que le vecteur contrainte évalué sur le plan $(1, 1, 1)$ à partir des valeurs de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a pour composantes normale σ_{oct} et tangentielle τ_{oct} relation (II. 6).

$$\begin{cases} \sigma_{oct} = \left(\frac{1}{3}\right) I_1 \\ \tau_{oct} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) J \end{cases} \quad (\text{II. 6})$$

La valeur de J définit donc le cisaillement dans les plans octaédraux. Les remarques précédentes indiquent que le plan de normale $(1, 1, 1)$ va être un plan privilégié pour la représentation des critères. En effet, tous les points représentant des états de contrainte qui ne diffèrent que par un tenseur sphérique (donc qui sont équivalents vis-à-vis d'un critère qui ne fait pas intervenir la pression hydrostatique) s'y projettent sur le même point. La figure (II.2) montre ce plan, dans lequel les projections des axes principaux déterminent des angles de $2\pi/3$, et qui a comme équation (II. 7) [5].

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -I_1/3 \quad (\text{II. 7})$$

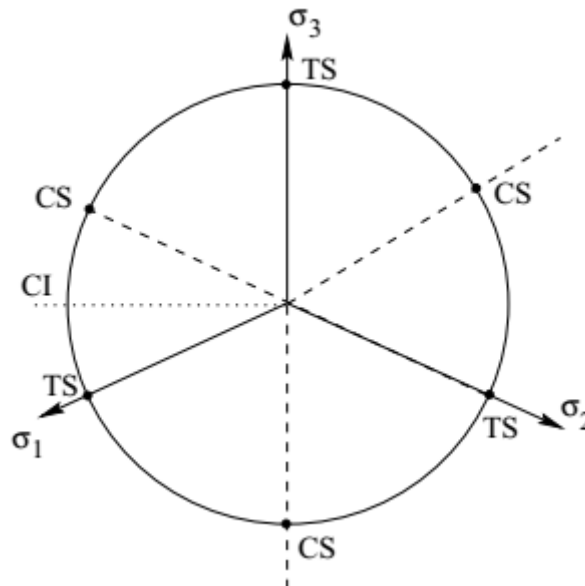


Figure II.2 : États de contraintes caractéristiques dans le plan déviateur [5].

TS : désigne les points qui peuvent se ramener à de la traction simple,

CS : ceux qui peuvent se ramener à la compression simple

(par exemple un chargement biaxial, car un état où les seules contraintes non nulles sont $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ est équivalent à $\sigma_3 = -\sigma$),

CI un état de cisaillement

II.5.1. Critères isotropes

II.5.1.1. Critère de Von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur des contraintes, ou encore J . Ceci correspond à un ellipsoïde dans l'espace des tenseurs $\bar{\mathbf{S}}$ symétriques (expression quadratique des composantes S_{ij} , qui sont toutes équivalentes), soit, si σ_y est la limite d'élasticité en traction la fonction sera (II. 8) [4].

$$f(\bar{\sigma}) = J - \sigma_y \quad (\text{II. 8})$$

II.5.1.2. Critère de Tresca

L'expression du critère de Von Mises fait intervenir les cisaillements maximaux dans chaque plan principal, représentés par les quantités $(\sigma_i - \sigma_j)$. La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d'entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au cas précédent, cette expression (II. 9) ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux) [5].

$$f(\bar{\sigma}) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_y \quad (\text{II. 9})$$

II.5.1.3. Comparaison des critères de Tresca et Von Mises

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent :

– Dans le plan traction–cisaillement (figure II.3.a), lorsque seules les composantes $\sigma = \sigma_{11}$ et $\tau = \sigma_{12}$ sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à (II. 10) et (II. 11).

$$\circ \quad \text{Von Mises :} \quad f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y \quad (\text{II. 10})$$

$$\circ \quad \text{Tresca :} \quad f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y \quad (\text{II. 11})$$

– Dans le plan des contraintes principales ($\sigma_1; \sigma_2$) (figure II.3.b), lorsque la troisième contrainte principale σ_3 est nulle les expressions sont (II. 12) et (II. 13)

○ **Von Mises** : $f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y$ (II. 12)

○ **Tresca** : $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y$ si $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$
 $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y$ si $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ (II. 13)
 $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y$ si $\sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$

(symétrie par rapport à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2$)

– Dans le plan déviateur (figure II.2), le critère de Von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédral, le critère de Tresca par un hexagone ;

– Dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice $(1, 1, 1)$, qui s'appuie sur les courbes définies dans le plan déviateur.

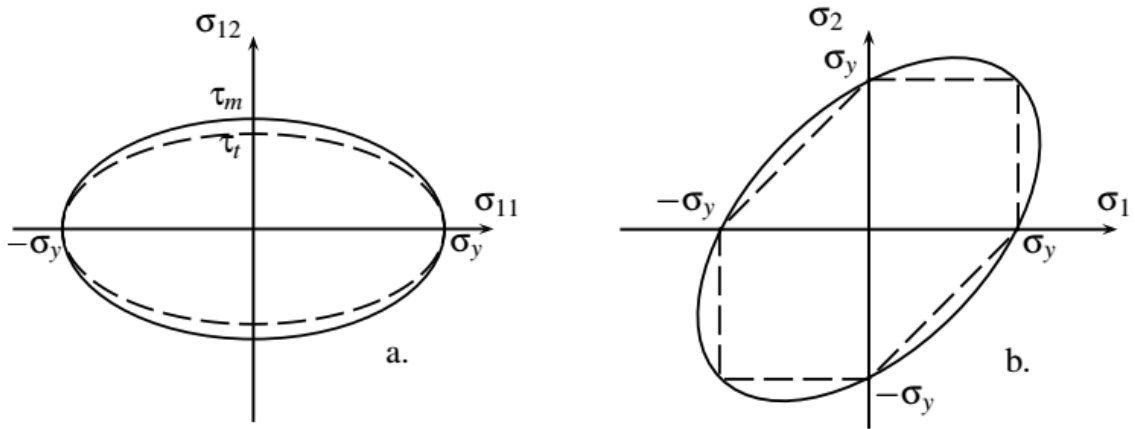


Figure II.3 : Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de Von Mises (traits pleins) [5].

(a) En traction-cisaillement (Von Mises : $\tau_m = \sigma_y/\sqrt{3}$,Tresca : $\tau_t = \sigma_y/2$).

(b) En traction biaxiale

II.5.2. Critère anisotrope :

Les équations qui modélisent le phénomène réel de déformation doivent aussi contenir les mesures qui caractérisent le degré d'anisotropie. La mesure la plus utilisée pour la caractérisation du degré d'anisotropie est le coefficient d'anisotropie R . Ce coefficient est défini par la relation (II. 14).

$$R = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \quad (\text{II. 14})$$

- ε_2 est la déformation dans la direction de la largeur d'une éprouvette à section rectangulaire.

- ε_3 est la déformation dans la direction d'épaisseur.

La détermination du coefficient d'anisotropie se fait par l'essai de traction d'une éprouvette de tôle. Des matériaux avec des valeurs de R différentes pour différentes directions de traction dans le plan de la tôle (cas général) est un matériau à anisotropie transverse ou plane. Des matériaux avec un coefficient R différent de 1 mais ne variant pas dans le plan de la tôle sont des matériaux à isotropie transverse ou anisotropie normale [7].

II.5.2.1. Critère de Hill quadratique

Ce critère s'exprime dans le système des axes d'orthotropie (x, y, z) en fonction de six paramètres relation (II.15) F, G, H, L, M, N qui caractérisent l'anisotropie du matériau.

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (\text{II. 15})$$

Dans le cas d'un état de contrainte plane $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ dans le plan principal (x, y) le critère devient (II. 16).

$$2f(\sigma_{ij}) = (G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + N\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (\text{II. 16})$$

Les coefficients du matériau peuvent être déterminés en partant de l'essai de traction sur l'éprouvette coupée à $0^\circ, 90^\circ$ et 45° par rapport à la direction de laminage.

Dans le cas de l'isotropie transverse (anisotropie normale), le critère de Hill peut être exprimé en fonction des contraintes principales σ_1 et σ_2 relation (II. 17) et (II. 18).

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + R(\sigma_1 - \sigma_2)R_c^2 \quad (\text{II. 17})$$

ou:

$$(1 + 2R) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{R_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R_c} \right)^2 = 2(1 + R) \quad (\text{II. 18})$$

Les relations (II. 17) et (II. 18) représentent les équations d'ellipses dont les longueurs d'axes dépendent du coefficient d'anisotropie [7].

Modèles parfaits

Pour le calcul des procédés de mise en forme que nous allons voir dans le chapitre III, on utilise généralement le modèle rigide parfaitement plastique illustré en figure (II.4).

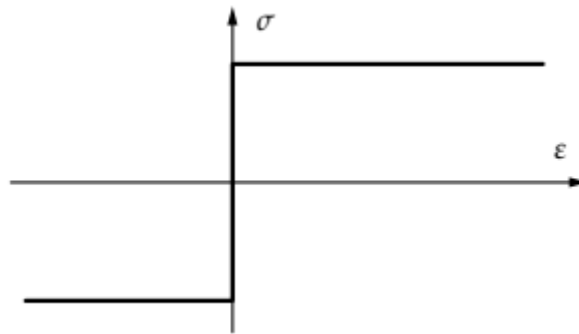


Figure II.4 : Comportement rigide parfaitement plastique

Le modèle rigide plastique parfait est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites. Pour ce modèle, au-delà d'une valeur limite du chargement il y aura écoulement libre du matériau et perte d'équilibre [11].

Chapitre III

Les méthodes de calcul en mise en forme

III.1. Introduction :

Face à un procédé de mise en forme, l'ingénieur a besoin de savoir rapidement si son matériel peut fournir la puissance et supporter les efforts nécessaires pour effectuer l'opération.

Les trois méthodes exposées dans ce chapitre fournissent des éléments de réponse à cette question.

III.2. Méthode des tranches :

La méthode des tranches, affine les ordres de grandeur en tenant compte des frottements sur l'outil et fournit une distribution approchée des contraintes

Cette méthode permet de calculer une valeur approximative des efforts moteurs.

III.2.1. Présentation générale de la méthode :

Nous allons dégager les traits généraux de la méthode, pour pouvoir l'appliquer à différents procédés.

III.2.1.1. Hypothèse :

On découpe par la pensée le matériau en tranches respectant la symétrie du problème. Ces tranches peuvent être des parallélépipèdes, des disques, des anneaux, etc. ; elles sont infiniment minces selon une direction : Ox pour fixer les idées.

On suppose alors que :

- a- Dans tout le volume déformé les directions principales des contraintes sont Ox et les deux directions perpendiculaires (parallèles aux arêtes, axes radial, ...)
- b- Les contraintes principales sont constantes dans une tranche (c'est-à-dire ne dépendent que de x)
- c- Les forces appliquées à la tranche résultent d'une part de ces contraintes, d'autre part d'une cisssion créée par le frottement de l'outil à la surface de la tranche. (la présence de cette cisssion ne modifie pas la seconde hypothèse).

III. 2.1.2. Schéma de calcul :

Faire le compte de l'ensemble des forces appliquées à une tranche et en déduire l'équation d'équilibre.

Une hypothèse sur le modèle de frottement donne une valeur de la cission, éventuellement en fonction de la contrainte normale, dans le cas du frottement de la couche limite figure (III.1.a), équation (III.1).

$$\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (\text{III.1})$$

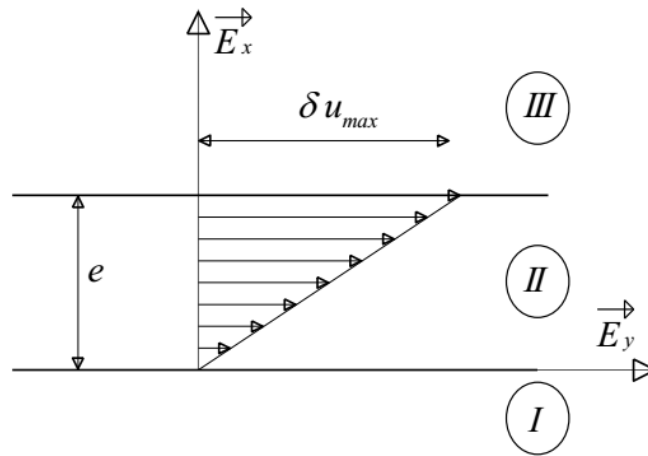


Figure III .1 .a : Frottement couche limite

Le critère de la plasticité, écrit dans le cadre de l'hypothèse b, fournit une relation entre les contraintes principales (III.2) (critère de Von Mises en déformation plane).

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0\right)^2 \quad (\text{III.2})$$

L'application de la loi d'écoulement au mode simplifié de déformation donne une deuxième relation entre contraintes.

L'équation d'équilibre se ramène alors à une équation différentielle en x pour une des contraintes principales ; une condition à la limite, par exemple une surface libre, permet d'obtenir par intégration la distribution des contraintes.

Les efforts moteurs se calculent alors par intégration des contraintes sur les surfaces de contact [10].

III.2.1.3. Utilisation de la loi d'écoulement :

- En déformation plane nous avons la loi d'écoulement (III.3).

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \text{avec: } \mu = 0.5 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

- Déformation d'un corps plein symétrique cylindrique

Exemple : *forgeage d'un lopin*.

Les tranches sont des anneaux d'épaisseur dr , (figure III.1.b)

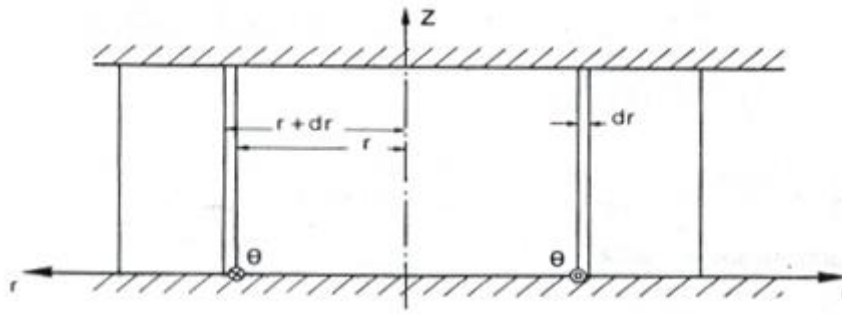


Figure III.1.b : Tranches pour un lopin cylindrique [10].

Le cylindre se déforme en restant un cylindre (III.4) (homogénéité de déformations).

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \\ \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III. 4})$$

Incompressibilité donne (III.5).

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{III. 5})$$

Or par hypothèse d'homogénéité de la déformation :

$\dot{\epsilon}_{zz}$ ne dépend pas de r (le cylindre reste un cylindre)

$\dot{\epsilon}_{rr}$ et $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$ ne dépendent pas de z (une tranche est homogène).

Donc $\dot{\epsilon}_{zz}$ et $(\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta})$ sont des constantes exprimées en (III.6).

$$\begin{cases} \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = \alpha \\ u_r = \frac{\alpha}{2} r + \frac{\beta}{r} \end{cases} \quad (\text{III. 6})$$

Les vitesses ne peuvent être infinies au centre du lopin (III.7).

$$\begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \frac{du_r}{dr} = \frac{u_r}{r} \\ \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{zz} \end{cases} \quad (\text{III. 7})$$

la loi d'écoulement devient (III.8).

$$\begin{cases} \frac{S_{rr}}{\dot{\epsilon}_{rr}} = \frac{S_{\theta\theta}}{\dot{\epsilon}_{\theta\theta}} \Rightarrow S_{rr} = S_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} \end{cases} \quad (\text{III. 8})$$

Dans de nombreux problème à symétrie cylindrique, les hypothèses de la méthode des tranches entraînent $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$.

Remarque : si le corps est creux (anneau) nous pouvons avoir $\beta \neq 0$, dans ce cas $\sigma_{rr} \neq \sigma_{\theta\theta}$.

III.3. Méthodes d'encadrement

Calculer un procédé de mise en forme, c'est d'abord obtenir une valeur approchée des principales grandeurs technologiques (couple de laminage, force de filage ou de poinçonnement, etc.)

Les méthodes d'encadrement conduisent à deux approximations, l'une par excès (méthode de la borne supérieure), l'autre par défaut (méthode de la borne inférieure).

Enfin il est intéressant de prévoir le type d'écoulement obtenu, la création de certains défauts..., dans certaine mesure, la méthode de la borne supérieure permet de telles prévisions.

Utiliser ces méthodes avec succès demande un peu d'habitude et fait appel au sens physique. En cela elles sont particulièrement utiles.

III.3.1. Méthode de la borne supérieure :

Elle comporte toujours les étapes suivantes :

a) Calcul de la puissance des forces motrices extérieures $\dot{W}_e$

Les forces extérieures motrices s'exercent par l'intermédiaire d'outils se déplaçant (translation d'un poinçon, d'une matrice, rotation d'un cylindre...). La puissance de ces forces extérieures se met sous la forme du produit de deux grandeurs :

- La "force"
- La "vitesse de déplacement"

Exemple : poinçon $F v_0$

Cylindre $C \omega$

ω = vitesse de rotation

C = couple de laminage

a) Calcul approché de la puissance dissipée par déformation plastique $\dot{W}_i^*$
(à l'intérieur de la matière)

- Expression d'un champ de vitesses incompressibles $\vec{u}^*$, vérifiant les conditions aux limites sur les vitesses, est destinée à approcher l'écoulement réel.
- Calcul de la puissance dissipée par unité de volume s'effectue par la relation (III.9).

$$\dot{W}_u^* = \sigma_0 \dot{\epsilon}^* \quad (\text{III.9})$$

En tout point où la vitesse est continue et de la puissance dissipée par unité de surface en tout point des surfaces de discontinuité est (III.10).

$$\dot{W}_s^* = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |\Delta \vec{u}| \quad (\text{III.10})$$

- Intégration de $\dot{W}_u^*$ dans tout le volume et de $\dot{W}_s^*$ sur toutes les surfaces de discontinuité (III.11) donne la puissance dissipée par déformation plastique $\dot{W}_i^*$.

$$\dot{W}_i^* = \iiint_V \dot{W}_u^* dV + \iint_{\Sigma} \dot{W}_s^* d\Sigma \quad (\text{III.11})$$

- b) Calcul approché de la puissance dissipée par le frottement $\dot{W}_f^*$
(aux interfaces outil-matière)

- Calcul approché de la puissance dissipée par unité de surface se fait par (III.12)

$$\dot{W}_s^* = \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |\delta \vec{u}| \quad (\text{III.12})$$

$\delta \vec{u}^*$ étant la vitesse relative de l'outil et de la matière dans son mouvement fictif $\vec{u}^*$.

$\bar{m}$ caractéristique des conditions de frottement ($0 \leq \bar{m} \leq 1$).

- Si $\bar{m} = 0$ conditions de lubrification parfaite (glissement sans résistance)
 - Si $\bar{m} = 1$ conditions extrêmes de frottement. La contrainte de cisaillement a atteint son maximum
 - Si $1 < \bar{m} < 1$ condition intermédiaire
- Intégration de $\dot{W}_s^*$ sur les interfaces de S (III.13).

$$\dot{W}_f^* = \iint_S \dot{W}_s^* dS \quad (\text{III.13})$$

- c) Bilan approché de l'énergie :

$$\dot{W}_e \leq \dot{W}_i^* + \dot{W}_f^* \quad (\text{III.14})$$

Le membre de droite sur la relation (III.14) est calculé.

Le membre de gauche contient la grandeur technologique inconnue, dont l'intégralité (III.14) fournit l'approximation par excès [10].

III.3.2. Méthode de la borne inférieure MBI

- a) Calcul de la puissance des forces motrices extérieures $\dot{W}_e$ en fonction des grandeurs technologiques.
- b) Expression d'un champ de contraintes $[\sigma^*]$.
 - En équilibre avec les conditions aux limites sur le vecteur contrainte.
 - Admissible (c'est-à-dire vérifiant partout $f(\sigma^*) \leq 0$).
- c) Calcul sur l'interface d'une valeur approchée de la puissance des forces extérieures.

Sur un élément d'interface outil-matière la vitesse de l'outil est imposée $\vec{u}$.

Sur cet élément s'applique le vecteur contrainte approché (III.15).

$$\vec{T}^* = [\sigma^*] \cdot \vec{n}. \quad (\text{III. 15})$$

La puissance approchée des forces extérieures est l'intégrale sur l'interface S des puissances élémentaires $\vec{T}^* \cdot \vec{u} \cdot dS$ est sur (III.16)

$$\dot{W}_e^* = \iint_S \vec{T}^* \cdot \vec{u} \cdot dS \quad (\text{III.16})$$

$$\text{d) Enfin :} \quad \dot{W}_e \geq \dot{W}_e^* \quad (\text{III.17})$$

$\dot{W}_e^*$ est calculée. $\dot{W}_e$ contient la grandeur technologique inconnue dont l'inégalité (III.17) fournit l'approximation par défaut [10].

Remarque :

La méthode de la borne inférieure est moins souvent utilisée que la méthode de la borne supérieure pour deux raisons :

- Il est plus difficile d'imaginer un champ virtuel de contraintes $[\sigma^*]$ qu'un champ virtuel de vitesses $\vec{u}^*$

- Il est plus intéressant pour l'ingénieur de mise en forme d'avoir un majorant des grandeurs technologiques nécessaires qu'un minorant, car il doit prendre toujours un coefficient de sécurité.

III.4. Méthode des lignes de glissement :

Cette méthode s'applique au cas du matériau rigide, parfaitement plastique (RPP) en déformation plane. Elle permet de calculer les contraintes et les vitesses, c'est-à-dire d'intégrer les équations aux dérivées partielles du problème.

Cette méthode est difficile, mais puissante. Elle fournit des procédés de calculs numériques approchés qui sont abordable (les réseaux peuvent être construits à la main). Elle s'applique à un grand nombre de cas du formage des métaux. Elle permet de traiter le cas du matériau non homogène.

III.4.1. Hypothèses et conséquences :

On étudie un matériau rigide, parfaitement plastique, homogène et isotrope (obéissant au principe du travail maximal), en déformation plane. Ce dernier point signifie que si on prend des axes orthonormés $\mathbf{Oxyz}$ dont $\mathbf{Ox}$ et $\mathbf{Oy}$ sont dans le plan de la déformation, alors les composantes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de la vitesse sont à chaque instant en (III.18).

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{III. 18})$$

C'est-à-dire que l'état du corps est le même le long de toute parallèle à $\mathbf{Oz}$ et les vitesses sont toutes parallèles au plan $\mathbf{Oxy}$. Le problème est donc « bidimensionnel ».

Le tenseur des vitesses de déformation est alors dans les axes $\mathbf{Oxyz}$ (III.19)

$$[\dot{\epsilon}_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 19})$$

Remarque

C'est un problème d'écoulement libre. Il faut donc tenir compte des changements de géométrie du corps. A cause de cette difficulté, les problèmes résolus sont :

- Des problèmes d'écoulement libre commençant : c'est le problème de la charge limite.
- Des problèmes d'écoulement libre permanent (par exemple dans une filière).
- Des filières d'écoulement libre pseudo-permanent, c'est-à-dire dans lesquels tout se transforme par homothétie au cours du temps.

Il apparaît donc que l'axe **Oz** est direction principale du tenseur $[\dot{\epsilon}_{ij}]$ et donc aussi du tenseur $[\sigma_{ij}]$, puis à cause de l'isotropie ces deux tenseurs ont même directions principales. $\sigma_{zz} = \sigma_{III}$ est donc une contrainte principale. Nous appellerons σ_I et σ_{II} les autres contraintes principales, qui sont dans le plan **Oxy**. Le tenseur $[\sigma_{ij}]$ est alors, dans les axes **Oxyz**, de la forme (III.20).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

III.4.2. Equations du problème :

Les inconnues $[\sigma], \vec{u}, \lambda$, ($\lambda \geq 0$) sont solution du système suivant, pour le critère de Von Mises, en déformation plane.

$$\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 = k^2 \quad \text{où} \quad k^2 = \frac{\sigma_0^2}{3} \quad (\text{Von Mises}) \quad (\text{III.21})$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{4\sigma_{xy}} = \frac{\lambda}{2} \quad (\text{loi d'écoulement}) \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \\ \mu = 0.5 \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Les équations (III.21) et (III.22) sont plus générales que cela, en ce sens qu'elles ne sont pas seulement relatives au critère de Von Mises, mais à tout critère de plasticité qui ne dépend pas de la contrainte moyenne (III.24).

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (\text{III. 24})$$

Si on prend un critère quelconque qui ne dépend pas de σ_m , ce qui équivaut à dire qu'il ne dépend que du déviateur des contraintes, ce qui équivaut également à dire que la déformation plastique se fait sans variation de volume, et c'est le cas en général pour les métaux, on obtient les mêmes équations (III.21) et (III.22).

Les contraintes doivent également vérifier les équations d'équilibre (III.25).

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Il faut également se donner, sur le contour du corps, des conditions à la limite, qui pourront porter soit sur les contraintes, soit sur les vitesses, soit sur les deux.

III.4.3. Etude du champ des contraintes

a) Position du problème.

En déformation plane, il n'y a pour le tenseur des contraintes que quatre inconnues :

1°) $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ que l'on met sous la forme (III.26).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 26})$$

et qu'on appelle « tenseur des contraintes dans le plan Oxy »,

2°) σ_{zz} .

L'équation (III.23), permet de calculer σ_{zz} en fonction de $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$. Il ne reste donc que trois inconnues σ_{xx}, σ_{xy} et σ_{yy} . Mais, de plus dans les zones où le critère est atteint, l'équation (III.21) fournit une relation entre σ_{xx}, σ_{xy} et σ_{yy} . Donc on peut calculer une de ces trois inconnues, par exemple σ_{xy} , en fonction des deux autres σ_{xx} et σ_{yy} , et finalement il n'y a que deux inconnues indépendantes σ_{xx} et σ_{yy} .

Or il y a justement deux équations reliant ces deux inconnues : ce sont les deux équations d'équilibre (III.25) (où l'on remplace σ_{xy} par son expression en fonction de σ_{xx} et σ_{yy}).

Remarque : si les conditions à la limite s'y prêtent, alors on pourra déterminer le champ des contraintes sans avoir à parler des vitesses.

b) Transformation des équations d'équilibre :

Pour ne pas faire jouer un rôle particulier à σ_{xx} et σ_{yy} ou σ_{xy} , on prend pour les deux fonctions inconnues du problème en contraintes (III.27).

$$\begin{cases} p = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} = -\frac{\sigma_I+\sigma_{II}}{2} \\ \theta = (\overrightarrow{M_x}, \overrightarrow{M_{\sigma I}}) \end{cases} \quad (\text{III. 27})$$

$\overrightarrow{\sigma_I}$ étant la direction de la plus grande traction principale, (Figure III.2). L'autre direction principale $\overrightarrow{\sigma_{II}}$, qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{\sigma_I}$, est, par convention, orientée de façon que (III.28).

$$(\overrightarrow{M_{\sigma I}}, \overrightarrow{M_{\sigma_{II}}}) = +\frac{\pi}{2} \quad (\text{III. 28})$$

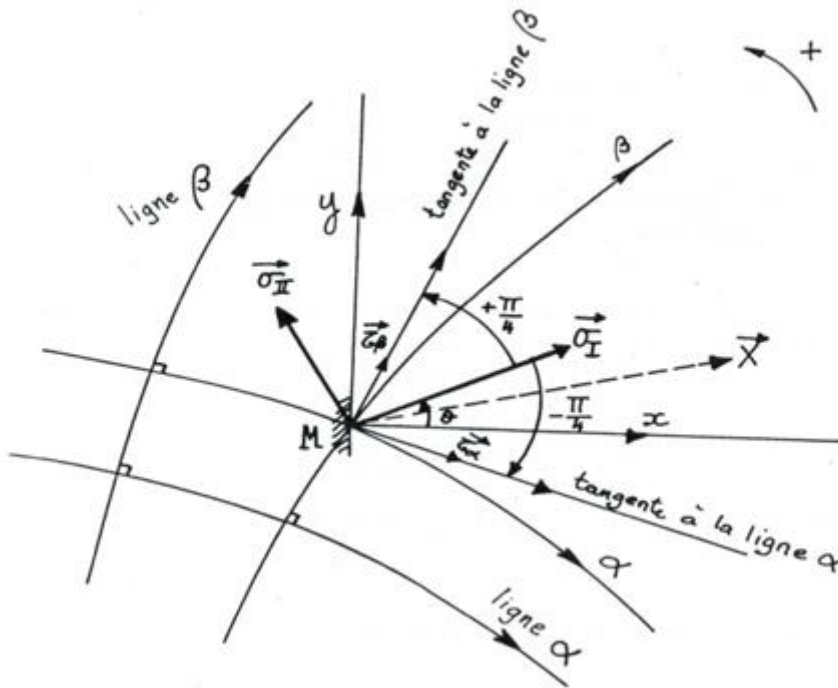


Figure III.2 : Les lignes de glissement dans un point M [10].

$\sigma_I > \sigma_{II}$. $\overrightarrow{\tau_\alpha}$ et $\overrightarrow{\tau_\beta}$ sont les vecteurs unitaires tangents aux lignes α et β en M.

Remarque : les contraintes positives sont les tractions.

L'examen du cercle de *Mohr* (Figure III.3) correspond au plan Oxy (facettes tournant autour de Mz) montre que (III.29).

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p + k \cos 2\theta \\ \sigma_{yy} = -p - k \cos 2\theta \\ \sigma_{xy} = k \sin 2\theta \end{cases} \quad (III.29)$$

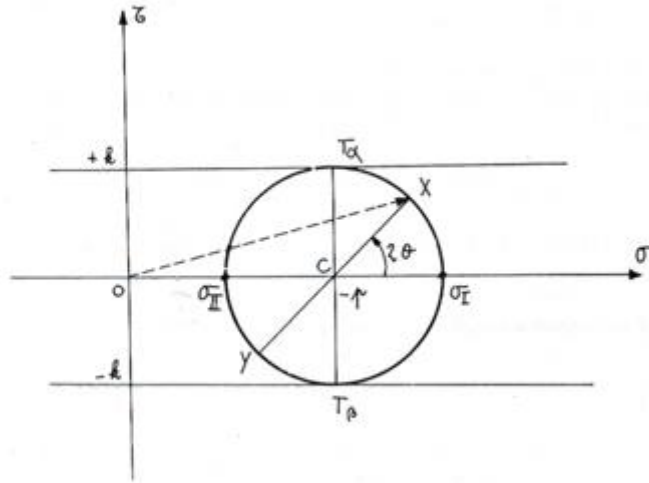


Figure III. 3 : Cercle de Mohr

En effet le vecteur contrainte $\overrightarrow{OX}$ correspondant à la facette perpendiculaire à $\vec{x}$ a son extrémité X sur le cercle de diamètre (σ_{II}, σ_I) et $(C\overrightarrow{\sigma_I}, C\overrightarrow{X}) = -2 (\overrightarrow{M\sigma_I}, \overrightarrow{M\vec{x}}) = 2\theta$, montre que le rayon de ce cercle est $k = Cte$.

On reporte les expressions (III.29) dans les équations d'équilibre (III.25) et on obtient (III. 30).

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} - 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (III. 30)$$

C'est un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux fonctions inconnues $p(x, y)$ et $\theta(x, y)$ de deux variables x et y .

c) Résultats de la théorie : lignes de glissement et relations de Hencky.

Du point de vue mathématique, la théorie des équations (III.30), n'utilise que la notion de dérivée dans une direction donnée, et elle conduit aux résultats suivants :

1°) Il existe deux réseaux de ligne orthogonales, les lignes α et les lignes β , appelées lignes de glissement, qui en tout point bissectant l'angle des contraintes principales σ_I et σ_{II} (Figure III.2).

Par convention, les orientations sont dans (III.31).

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_{\sigma_I}}, \overrightarrow{M_{\alpha}}) = -\frac{\pi}{4} \\ (\overrightarrow{M_{\sigma_I}}, \overrightarrow{M_{\beta}}) = +\frac{\pi}{4} \Rightarrow (\overrightarrow{M_{\alpha}}, \overrightarrow{M_{\beta}}) = +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{III. 31})$$

Où $\overrightarrow{M_{\alpha}}$ et $\overrightarrow{M_{\beta}}$ désignent les tangentes en M aux lignes α et β .

Considérons les facettes de normales $\overrightarrow{M_{\alpha}}$ et $\overrightarrow{M_{\beta}}$. Les vecteurs contraintes correspondants sont $\overrightarrow{OT_{\alpha}}$ et $\overrightarrow{OT_{\beta}}$ (Figure III.3) d'après les propriétés du cercle de Mohr. Donc on voit que les lignes de glissement sont les lignes de cisaillement maximal k .

2°) Le long de ces lignes α et β , on a les relations suivantes entre les deux fonctions inconnues $p(x, y)$ et $\theta(x, y)$, relations dites de Hencky (III.32).

$$\text{Relations de Hencky} : \begin{cases} p + 2k\theta = Cte & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ p - 2k\theta = Cte & \text{le long d'une ligne } \beta \end{cases} \quad (\text{III. 32})$$

d) Utilisation des relations de Hencky

Si on se donne le réseau des lignes de glissement, on connaît θ partout avec (III.33).

$$\theta = (\overrightarrow{M_x}, \overrightarrow{M_{\sigma_I}}) = (\overrightarrow{M_x}, \overrightarrow{M_{\alpha}}) + \frac{\pi}{4} \quad (\text{III. 33})$$

Donc si on se donne p en un point M , p est aussitôt connu tout le long des lignes α et β qui passent par M .

e) Propriété géométrique du réseau des lignes de glissement.

Théorème de Hencky.

Prenons un couple quelconque de ligne α et un couple quelconque de lignes β . Elles se coupent $MNPQ$ (Figure III.4).

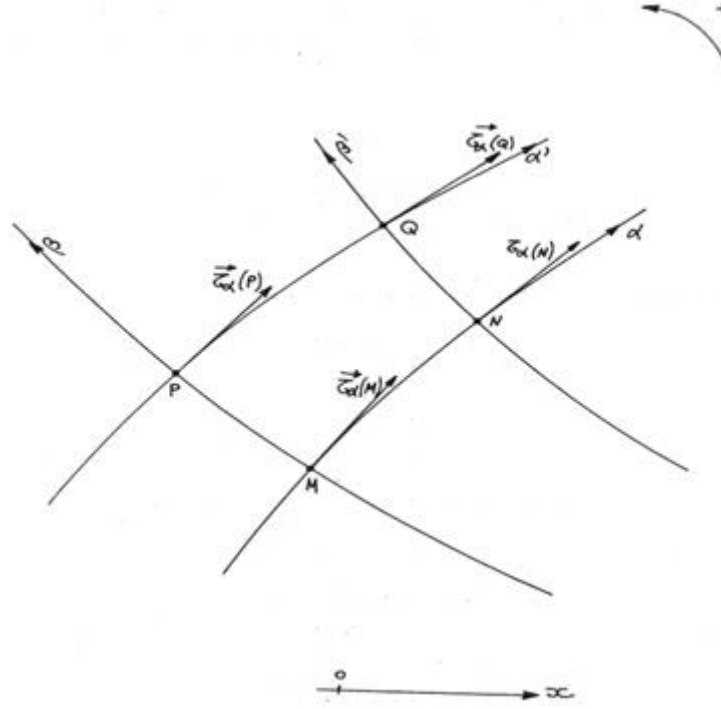


Figure III.4 : Couple de lignes de glissement [10]

En écrivant les équations (III.32) aux quatre points $MNPQ$ et en éliminant les valeurs de p , on trouve (III.34).

$$\theta(N) - \theta(M) = \theta(Q) - \theta(P) \quad \leftrightarrow \quad (\bar{\tau}_\alpha(M), \bar{\tau}_\alpha(N) = \bar{\tau}_\alpha(P), \bar{\tau}_\alpha(Q)) \quad (\text{III.34})$$

C'est-à-dire que l'on a le "théorème de Hencky" :

L'angle dont tourne la tangente à une ligne α entre deux lignes β données, est le même quelle que soit la ligne α envisagée. On peut permuter les rôles de α et de β .

Un tel réseau de courbes est dit réseau de Hencky. Une conséquence immédiate est que si MN est un segment de droite, il en est de même de tous les arcs de lignes α (PQ , par exemple) compris entre β et β' .

f) Construction du réseau des lignes de glissement :

On peut construire ce réseau par une méthode numérique ou graphique approchée et calculer la solution p et θ sur ce réseau par les relations de *Hencky*.

Premier exemple : il est souvent appelé "premier problème aux limites".

On se donne deux arcs de lignes de glissement OA et OB (Figure III.5). Le champ des lignes de glissement est alors parfaitement déterminé dans le rectangle curviligne $OACB$. On peut calculer ce champ de façon approchée de la manière suivante :

On découpe OA et OB en petits arcs tels que OP , PT , etc. et OQ , QW , etc. Les lignes α et β passant par ces points de subdivision donnent un quadrillage de $OACB$.

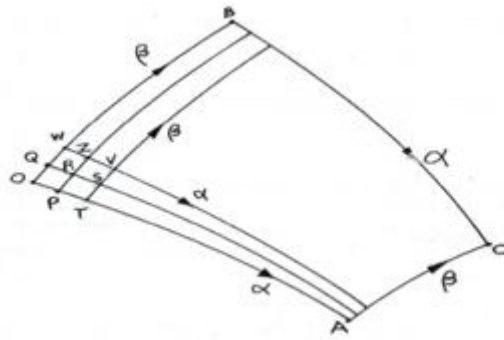


Figure III.5 : Réseau de lignes de glissement [10].

Or le théorème de *Hencky* nous permet de calculer immédiatement les valeurs de θ en tous les points R , S , V , Z ... du quadrillage (remarquons que la position des points n'est pas encore connue), car on a, par exemple (III.35).

$$\theta(R) - \theta(Q) = \theta(P) - \theta(O) \quad (\text{III.35})$$

d'où $\theta(R)$ puisque θ est connu le long de OA et de OB .

On détermine alors la position du point R de la façon suivante :

On construit R comme intersection des deux cordes QR et PR (Figure III.6) et on assimile les petits arcs de ligne α et β $\widehat{QR}$ et $\widehat{PR}$ à des arcs de cercle ; ce qui permet d'écrire (III.36).

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{QR}) = \frac{(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{R\alpha}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Q\beta})}{2} \quad (\text{III. 36})$$

où $\overrightarrow{R\alpha}$ et $\overrightarrow{Q\alpha}$ sont les tangentes en R et Q à la ligne α . Donc (III.37).

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{QR}) = \frac{\theta(R) + \theta(Q)}{2} - \frac{\pi}{4} = \text{quantité connue} \quad (\text{III. 37})$$

Donc on peut construire les deux droites QR et PR , d'où R à leur intersection.

De proche en proche, on peut construire tous les points du quadrillage, donc le réseau de lignes α et β dans $OACB$.

Si maintenant on connaît la valeur de p en O , on calcule p le long de OA et OB grâce aux relations de Hencky et ensuite on calcule de même p dans tout le réseau $OACB$.

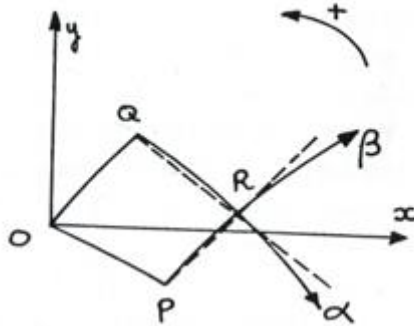


Figure III.6 : Intersection de deux cordes de lignes de glissement [10].

Deuxième exemple : il est souvent appelé "deuxième problème aux limites".

On suppose connues les valeurs de p et θ , par exemple à l'aide des conditions aux limites (voir remarque ci-dessous) le long d'un arc de courbure AB , qui n'est pas une ligne de glissement.

Alors le réseau des lignes de glissement est parfaitement déterminé dans le triangle curviligne ABM , construit avec les deux lignes de glissement issues de A et B qui convergent du côté voulu de AB . Pour cette raison, ce triangle s'appelle le "domaine de dépendance" de AB .

On peut construire le réseau de façon approchée par une méthode tout à fait semblable à la précédente :

On découpe **AB** en petits arcs tels que **CD**, ce qui produit un quadrillage du triangle **ABM**. En tout point de ce quadrillage on connaît la valeur de θ grâce aux relations de Hencky et aux données sur **AB**. Par exemple pour **R** (Figure III.7) on a (III.38).

$$\begin{cases} p(R) + 2k\theta(R) = p(C) - 2K\theta(C) \\ p(R) - 2k\theta(R) = p(D) + 2k\theta(D) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Système de deux équations linéaires à deux inconnus $p(R)$ et $\theta(R)$, que l'on résout.

La connaissance de $\theta(R)$ permet de déterminer comme précédemment la position du point **R**. d'où le réseau de lignes α et β . La connaissance de p pour le réseau est déjà acquise par la résolution du système (III.38)

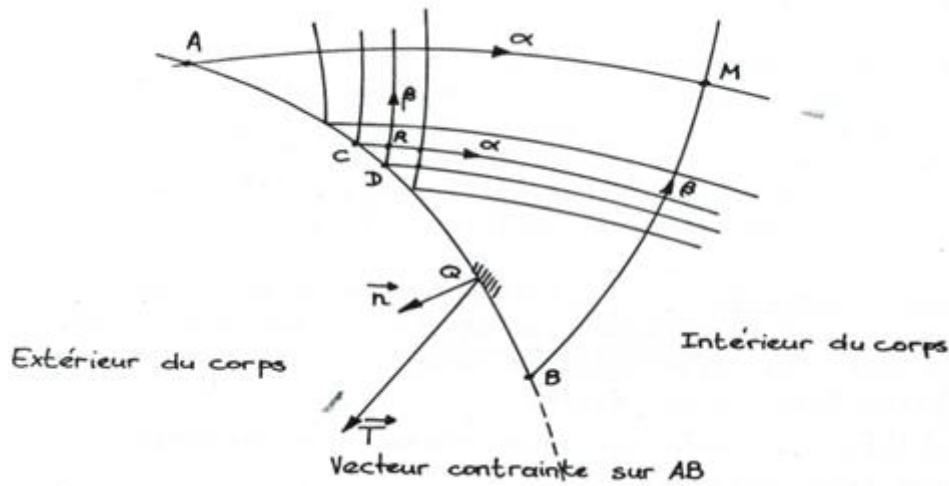


Figure III. 7 : Le réseau de lignes de glissement pour le deuxième exemple [10].

Remarque (Figure III.7) :

Si **AB** est un arc du contour du corps, sur lequel on connaît les forces exercées, alors on peut calculer p et θ sur **AB**. En effet on connaît le vecteur contrainte $\vec{T}$ en **Q** sur **AB** et, si on construit le cercle de Mohr au point **Q** (qui doit être de rayon k si le corps est plastifié), il doit passer par le point **T** (Figure III.8).

On voit donc qu'on obtient en réalité deux couples possibles (p, θ) et (p', θ') . Seul l'examen du champ des vitesses et de la condition $\lambda \geq 0$, dite "condition de positivité de la puissance dissipée", permet de trancher entre ces deux possibilités.

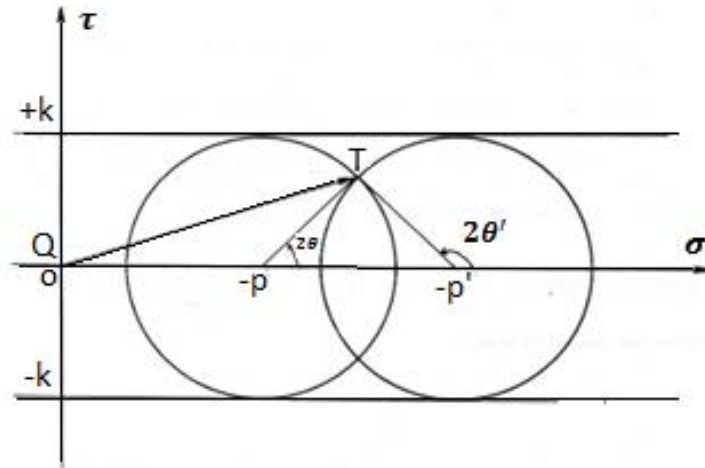


Figure III. 8 : Cercle de Mohr

g) Deux réseaux de lignes de glissement particulières :

- 1) Champ homogène : les lignes α et les lignes β sont des droites orthogonales. Alors θ est constant partout, donc p aussi. Le champ des contraintes est homogène.
- 2) Champ semi-homogène : une famille de lignes de glissement, α par exemple, est une famille de portions de droites.

Les lignes β sont leurs "trajectoires orthogonales". Par exemple l'éventail de *Prandtl* où les lignes α sont de rayons issus d'un point O (qui est un point singulier), et les lignes β sont des cercles de centre O (Figure III.9).

Remarque importante : si on connaît un champ de lignes de glissement dans deux régions du plan et si ces deux champs se raccordent de façon continue, alors ils se raccordent le long d'une ligne de glissement.

Conséquence : un champ homogène ne peut être raccordé qu'à un champ semi-homogène.

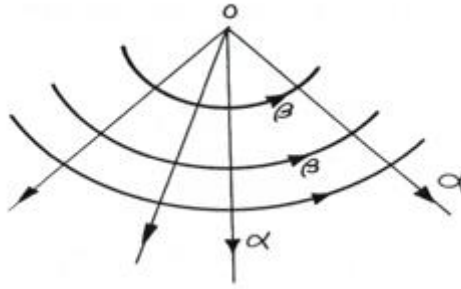


Figure III. 9 : Champ semi-homogène [10].

III.4.4. Etude du champ des vitesses

a) Equation de Geirgner. Propriété des lignes de glissement du point de vue des vitesses.

On suppose que l'on connaît le champ des contraintes et son réseau de lignes de glissement α et β .

Les équations pour les vitesses sont alors les équations (III.22) qui traduisent la loi de comportement du matériau.

On a vu déjà que les lignes de glissement α et β jouent un rôle tout à fait particulier. Pour cette raison on est convenu de repérer le vecteur vitesse $\vec{u}$ au point M par ses composantes V_α et V_β sur les tangentes aux lignes α et β passant par M (Figure III.10) (et non pas ses composantes u et v sur les axes Ox et Oy).

Pour cela on change d'axes et on prend comme nouveaux axes MX et MY orthogonaux, portés par les tangentes orientées en M aux lignes α et β (Figure III.10).

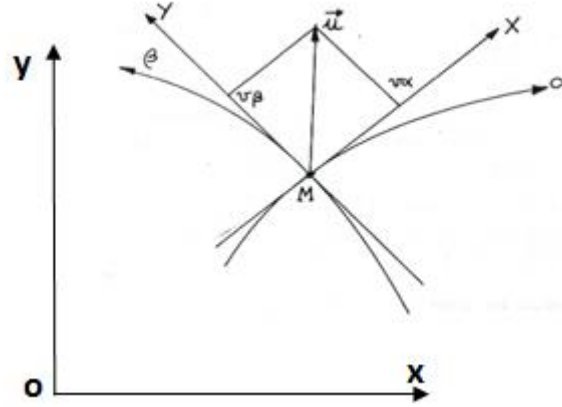


Figure III. 10 : Champ de vitesses

Dans ces nouveaux axes $\mathbf{MX}$, $\mathbf{MY}$, le tenseur des contraintes devient (en faisant $\theta = \overrightarrow{\mathbf{MX}}, \overrightarrow{\mathbf{M}\sigma_I} = \frac{\pi}{4}$ dans les relations (III.22) du cercle de Mohr (Figure III.4) (III.39)).

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P & k \\ k & -p \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

donc $\sigma_{XX} - \sigma_{YY} = 0$, et les relations (III.22) donnent pour le tenseur des vitesses de déformation $[\dot{\epsilon}]$, toujours dans les axes $\mathbf{MX}$, $\mathbf{MY}$ (III.40).

$$[\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{XX} & \dot{\epsilon}_{XY} \\ \dot{\epsilon}_{XY} & \dot{\epsilon}_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda k \\ \lambda k & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

Donc $\dot{\epsilon}_{XX}$ et $\dot{\epsilon}_{YY}$ qui sont les vitesses de dilatation dans les directions $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, c'est-à-dire dans les directions α et β , sont nulles.

Cette propriété est remarquable :

La vitesse de dilatation (également appelée : taux d'allongement relatif), le long d'une ligne de glissement, est nulle.

Par ailleurs la condition $\lambda \geq 0$ se traduit ici par : $\dot{\epsilon}_{XY} \geq 0$.

Il est commode d'exprimer $\dot{\epsilon}_{XX}$, $\dot{\epsilon}_{XY}$ et $\dot{\epsilon}_{YY}$ à l'aide des composantes de la vitesse V_α et V_β , sur les axes X et Y en chaque point.

Néanmoins le calcul fait intervenir la notion de dérivée dans une direction donnée. Les valeurs trouvées pour $\dot{\epsilon}_{XX}$, $\dot{\epsilon}_{XY}$ et $\dot{\epsilon}_{YY}$, donnent immédiatement les équations qui permettent de résoudre le problème des vitesses et qu'on appelle équation de *Geiringer* (III.44).

$$\dot{\epsilon}_{XX} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial \tau_\alpha} - V_\beta \frac{\partial \theta}{\partial \tau_\alpha} = 0 \quad (\text{III.41})$$

$$\dot{\epsilon}_{YY} = \frac{\partial V_\beta}{\partial \tau_\beta} + V_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \tau_\beta} = 0 \quad (\text{III.42})$$

$$\dot{\epsilon}_{XY} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial \tau_\beta} - V_\beta \frac{\partial \theta}{\partial \tau_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial \tau_\alpha} + V_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \tau_\alpha} \right) \geq 0 \quad (\text{III.43})$$

Les équations (III.41) et (III.42) sont des équations différentielles ordinaires le long des lignes α et β :

Equation de Geiringer :

$$\begin{cases} dV_\alpha - V_\beta d\theta = 0 & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ dV_\beta - V_\alpha d\theta = 0 & \text{le long d'une ligne } \beta \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

et l'inégalité (III.43) est la "condition de puissance dissipée positive".

b) Utilisation des équations de Geiringer.

Si le réseau des lignes de glissement α et β est connu, ces équations permettent de calculer les vitesses à partir des conditions à la limite.

Dans les deux exemples cités (1^{er} et 2^{ème} problème aux limites) il ne s'agit plus de construire le quadrillage des lignes de glissement qu'on suppose ici connu ; mais le principe du calcul des valeurs V_α et V_β de proche en proche en tous les points du maillage est sensiblement le même. Les équations de *Geiringer* (III.44) remplacent ici les équations de *Hencky* (III.32), discrétisées (où les dérivées sont remplacées par les différences finies). Le principe de la méthode (voir par exemple le 2^{ème} problème aux limites) est de calculer la valeur de V_α et de V_β au point R connaissant ces valeurs aux points voisins P et Q (Figure III.11).

Ceci se fait grâce aux équations (III.44) discrétisées :

$$\begin{cases} V_{\alpha}(R) - V_{\alpha}(P) - V_{\beta}(P)(\theta(R) - \theta(P)) = 0 \\ V_{\beta}(R) - V_{\beta}(P) - V_{\alpha}(Q)(\theta(R) - \theta(Q)) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

C'est un système de deux équations linéaires à deux inconnues $V_{\alpha}(R)$ et $V_{\beta}(R)$, système qu'on résout.

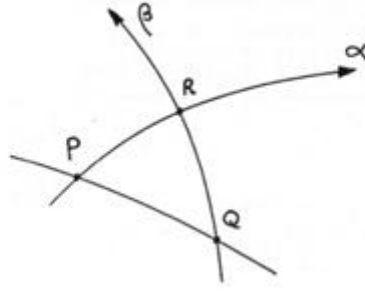


Figure III. 11 : Points d'intersection

c) **Hodographe :**

Le plan de l'hodographe est un plan rapporté par exemple aux axes $\overrightarrow{\Omega u}$ et $\overrightarrow{\Omega v}$, où on porte à partir de l'origine Ω un vecteur $\overrightarrow{\Omega m}$ égal au vecteur vitesse $\vec{u}$ en M (M est un point du matériau, appartenant à ce qu'on appelle le plan physique). Son extrémité est m (Figure III.12).

Quand M décrit une ligne α , m décrit une ligne $\tilde{\alpha}$

Quand M décrit une ligne β , m décrit une ligne $\tilde{\beta}$

Comme la vitesse de dilatation le long d'une ligne de glissement est nulle, les directions de $\tilde{\alpha}$ et de β aux points m et M sont les mêmes, (car elles sont toutes deux orthogonales à la direction α). Il en est de même pour les directions $\tilde{\beta}$ et α . Par contre les orientations peuvent être différentes.

Donc le réseau $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ est aussi un réseau de Hencky.

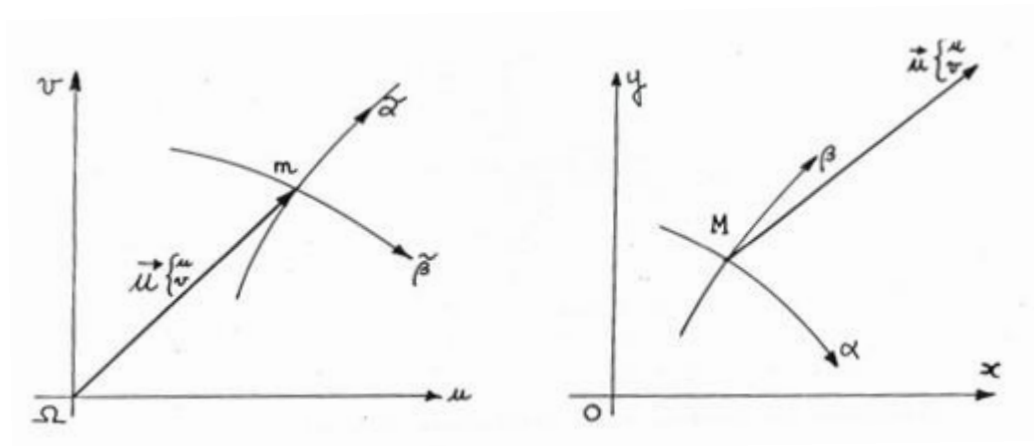


Figure III. 12 : Hodographe

d) Lignes de discontinuité de vitesse.

Ce sont des lignes à travers lesquelles le vecteur vitesse est discontinu. On en rencontrera souvent. Donnons leurs propriétés :

- Ce sont nécessairement des lignes de glissement
- La composante normale de la vitesse est continue (du fait de l'incompressibilité de la déformation plastique)
- Donc si la ligne de discontinuité est une ligne α , on a $[V_\beta] = 0$.

De plus les équations (III.44) donnent $[V_\alpha] = \text{Cte}$ le long de la ligne α , et la condition de puissance dissipée (III.43) donne $[V_\alpha] \geq 0$ si on traverse dans le sens de β .

On peut permuter les rôles de α et de β . Le symbole $[V_\beta]$ représente la discontinuité de V_β .

e) Synthèse sur l'utilisation de la méthode des lignes de glissement.

Dans la pratique, la méthode du champ des lignes de glissement s'utilise souvent de la façon suivante :

A partir des conditions à limite sur les contraintes, on construit, un champ de lignes de glissement et on calcule le champ des contraintes correspondant.

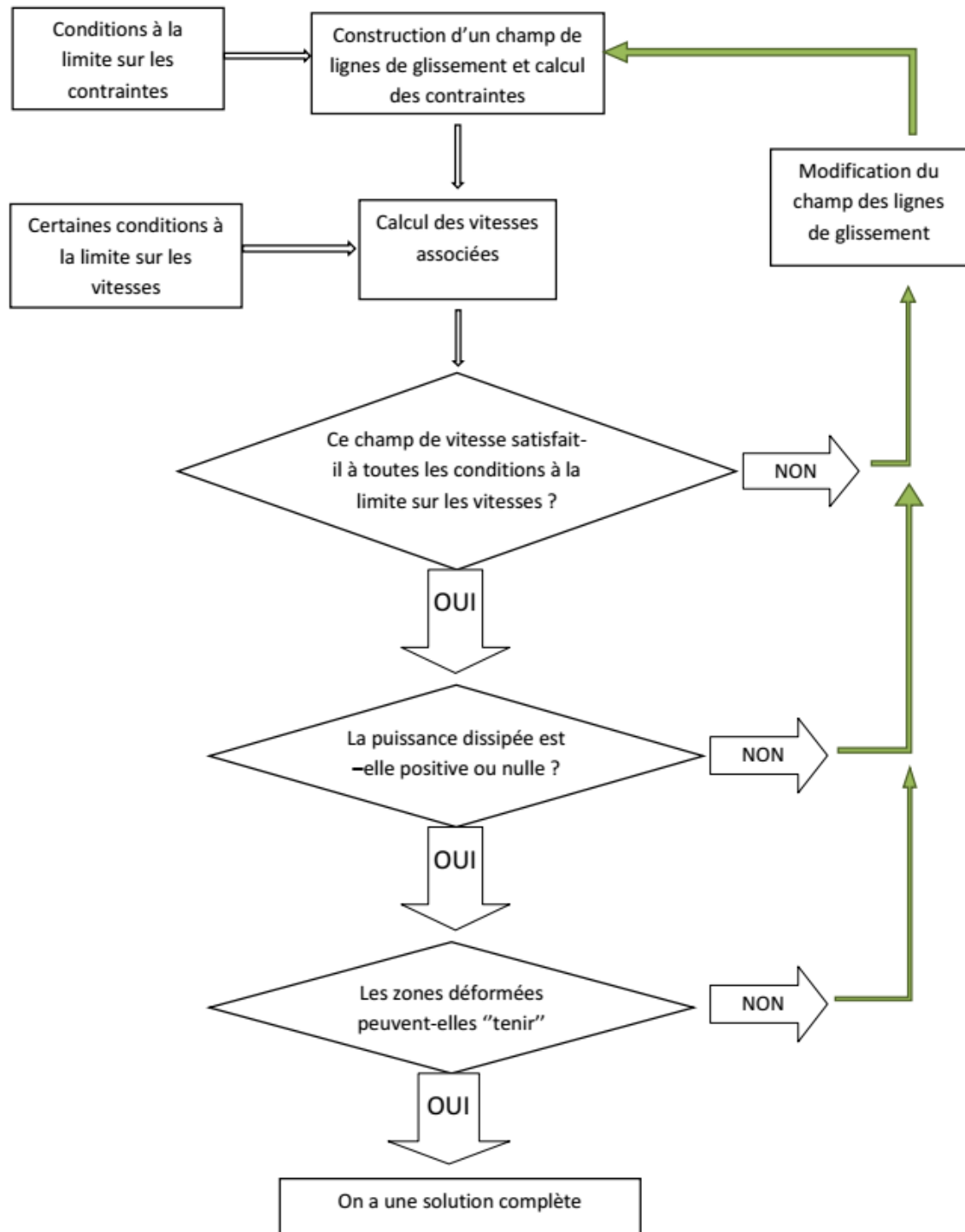
Dans la construction de ce champ, on dispose en général d'un certain arbitraire (par exemple la forme d'une ligne de glissement "initiale"). Puis, à partir de certaines conditions à la limite sur les vitesses, on calcule, sur le champ de lignes de glissement, un champ de vitesses. Et on regarde si ce champ de vitesses calculé satisfait à toutes les conditions à la limite sur les vitesses.

Si ce n'est pas le cas, on modifie le champ des lignes de glissement et on recommence jusqu'à ce que ce soit le cas.

Alors on vérifie que la puissance dissipée est partout positive ou nulle (III.43). Puis on vérifie que les zones déformées peuvent "tenir", c'est-à-dire que l'on peut trouver dans ces zones un champ de contraintes satisfaisant aux équations d'équilibre, aux conditions à la limite, équilibrant les forces exercées par les zones déformées sur ces zones non déformées, et ne violant nulle part le critère de plasticité (c'est pourquoi on dit que la zone non déformée "tient").

On dit alors qu'on a une solution complète. Sinon, on a une solution incomplète et il faut modifier le champ des lignes de glissement. [10].

Ces opérations sont résumées dans l'organigramme suivant :



Organigramme de synthèse sur l'utilisation de la méthode du Champ des Lignes de Glissement [10].

N.B : quand on n'a pas une solution complète, il faut interpréter séparément le champ des contraintes et le champ des vitesses par la théorie des charges limites : méthode de la borne supérieure et méthode de la borne inférieure.

Chapitre IV

Application des méthodes à la mise en forme

IV.1. Procédé du forgeage :

IV.1.1. Méthode des tranches :

L'objectif de cette méthode est de calculer, en tenant compte des frottements, une valeur approchée des efforts moteurs et de la distribution de pression au contact outil-pièce.

❖ Forgeage d'une barre (déformation plane).

- Découpons la barre en tranches (figure IV.1.a) d'épaisseur dx selon l'axe Ox

Supposons que :

- Les axes principaux des contraintes sont dans toute la barre Ox , Oy et Oz .
- Les contraintes principales ainsi définies σ_x , σ_y et σ_z ne dépendent que de x , c'est-à-dire sont constantes dans une tranche infiniment mince.
- Le frottement de l'outil se traduit par un cisaillement τ sur les bords de la tranche. Ce cisaillement ne perturbe pas les contraintes dans les tranches.
- Examinons la moitié du lopin $x > 0$: les hypothèses sur les contraintes assurent l'équilibre selon Oy et Oz .

Ecrivons alors l'équilibre de la tranche (figure IV.1.b) comprise entre x et $x + dx$.

Elle est soumise, selon Ox , aux forces suivantes :

- Sur la face x $-hL \sigma_x(x)$
- Sur la face $x + dx$ $+hL \sigma_x(x + dx)$
- Sur chaque face horizontale $-\tau L dx$ $\tau \geq 0$

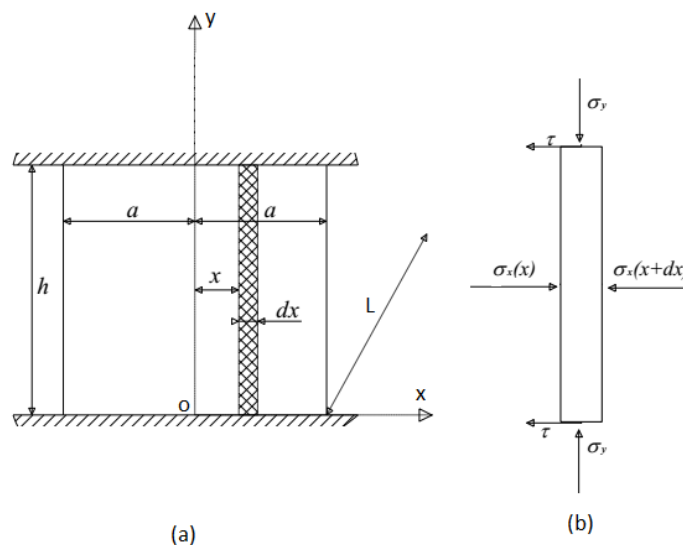


Figure IV. 1. Découpage de la barre en tranches.

Au deuxième ordre près la relation (IV. 1).

$$\sigma_x(x + dx) = \sigma_x(x) + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \quad (\text{IV. 1})$$

L'équilibre s'écrit donc en (IV. 2)

$$-hL \sigma_x + hL \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) - 2 \tau L dx = 0 \quad (\text{IV. 2})$$

L'équilibre (IV. 2) donne la relation (IV. 3).

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = + \frac{2\tau}{h} \quad (\text{IV.3})$$

Prenons comme modèle du frottement un frottement de couche limite (IV. 4).

$$\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (\text{IV.4})$$

L'équation d'équilibre devient (IV. 5).

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \frac{m}{h} \quad (\text{IV. 5})$$

Qui s'intègre immédiatement en (IV. 6).

$$\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \frac{m}{h} (x - a) + \sigma_x(a) \quad (\text{IV. 6})$$

Or, pour $x = a$, nous avons une surface libre normale à $\mathbf{Ox}$, donc

$$\begin{cases} \vec{T}_{\mathbf{Ox}} = \vec{0} \Rightarrow \sigma_x(a) = 0 \\ \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \frac{m}{h} (x - a) \end{cases}$$

σ_x est négatif, c'est donc une contrainte de compression ; sous l'effet du frottement cette contrainte croît en valeur absolue depuis le bord libre jusqu'au centre.

Les relations (IV. 7.a) et (IV. 7.b) donne le critère de Von Mises (en déformation plane)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \right)^2 \quad (\text{IV. 7.a})$$

Soit

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \quad (\text{IV.7.b})$$

La différence des contraintes verticales et horizontales reste constante (IV. 8).

$$\sigma_y = + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left[+ \frac{m}{h} (x - a) - 1 \right] \quad (\text{IV.8})$$

Sous l'influence du frottement, la contrainte verticale de compression croît en valeur absolue du bord vers le centre, c'est la colline du frottement (Figure IV.2)

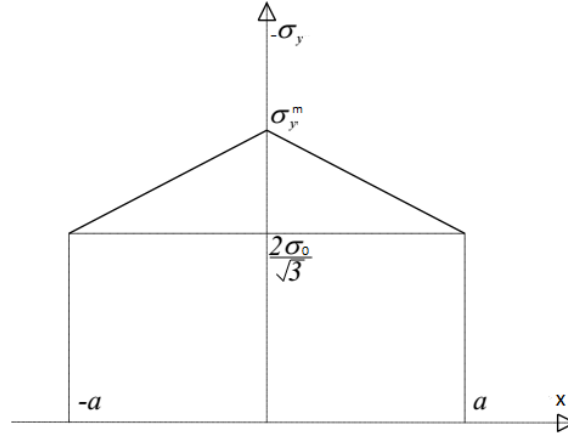


Figure IV. 2 : Colline de frottement

La contrainte maximale se calcule avec (IV.9).

$$\sigma_{y_{max}} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(m \frac{a}{h} + 1 \right) \quad (\text{IV.9})$$

Effort de forgeage est donné en (IV.10).

$$P = -2 L \int_0^a \sigma_y(x) dx$$

$$P = 2 L a \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + m \frac{a}{2h} \right) \quad (\text{IV.10})$$

Pression moyenne (IV.11) qui est par définition, l'effort de forgeage par unité de surface

$$P_m = \frac{2 \sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + m \frac{a}{2h} \right) \quad (\text{IV.11})$$

Pour ces trois quantités : $\sigma_{y_{max}}$, P , P_m , remarquons qu'à surface de contact égale (a et L constantes) :

- Elles croissent avec le frottement m
- Elles croissent avec l'aplatissement de la barre $\alpha = 2a/h$

Cette croissance est linéaire et l'on atteint rapidement des valeurs très élevées (IV.12).

$$\text{Si : } \begin{cases} m = 1 \\ \alpha = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\sigma_{y_{max}}| = 11 \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \\ P_m = 6 \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

La contrainte sur l'outillage peut atteindre localement des valeurs élevées. En effet si à largeur a constante, l'épaisseur h diminue, la surface de frottement reste constante mais le volume à travers lequel se répartissent les cisaillements diminue : le frottement prend une importance croissante par rapport à la déformation en masse.

Remarquons enfin que si le frottement est nul ($m = 0$), nous retrouvons (IV.13).

$$P_m = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{IV.13})$$

IV.1.2. Méthodes d'encadrement :

IV.1.2.1. Méthode de la borne supérieure "MBS"

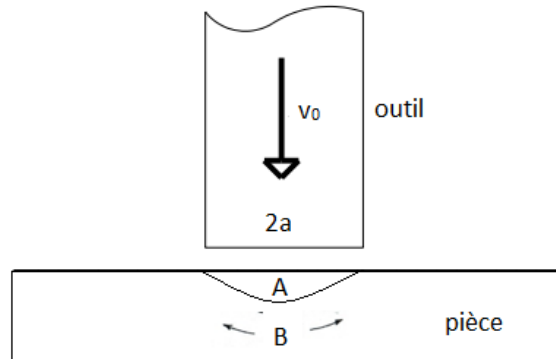


Figure IV.3 : Mode d'écoulement sous un poinçon

- On considère le poinçonnement d'un massif semi infini.
Cette opération s'apparente à l'essai de dureté ou au perçage d'une billette... mais pour simplifier cet exposé préliminaire, on se placera en déformation plane. On admettra que le matériau est rigide, parfaitement plastique et obéit au critère de Von Mises.
- On s'interroge sur l'effort nécessaire pour commencer le poinçonnement. Autrement dit on impose la pénétration du poinçon (à vitesse v_0) et l'on demande quel effort résistant F est enregistré.
- L'idée générale de la méthode est de calculer de façon approchée la puissance dissipée par la déformation plastique dans la matière et de l'identifier à la puissance des forces extérieures.
- Physiquement on a une certaine idée de l'écoulement commençant (Figure IV.3). Un matelas de matière, situé sous poinçon, est animé de la même vitesse que lui et demeure rigide. En-dessous, la matière s'écoule de part et d'autre dans une zone B. Au-delà, la matière reste rigide et n'est pas concernée par le poinçonnement.
- Pour faire tout calcul de puissance dissipée, il est nécessaire de traduire mathématiquement l'intuition que l'on a de l'écoulement, c'est-à-dire de décrire de façon approchée par un champ de vitesse $\vec{u}$.

La Figure (IV.4) décrit globalement un champ possible :

- La zone rigide du matelas (1)
- Une zone (2) (ou 2') d'écoulement latérale de ma matière

- Une zone (3) (ou 3') d'écoulement vers le haut refoulant au-dessus de la surface initiale un volume de matière équivalent à celui chassé par la pénétration.

Dans chaque zone la vitesse est uniforme. La déformation s'effectue par cisaillement intense le long des lignes frontières, qui sont des lignes de discontinuité pour les vitesses.

Parallèlement à la Figure (IV.4), il est commode d'utiliser un diagramme nommé hodographe, ou plan des vitesses.

Tout point matériel M y est représenté par un point homologue m dont les coordonnées sont celles de la vitesse de M .

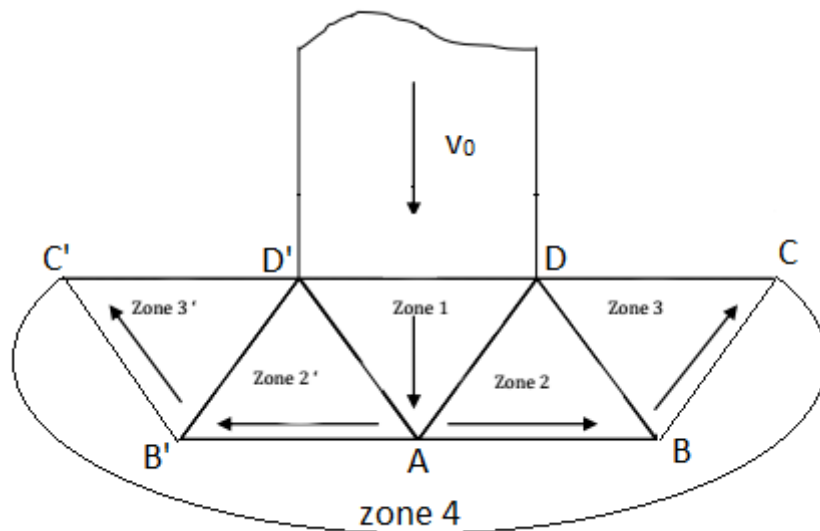


Figure IV.4 : Plan physique d'écoulement par blocs rigides pour le poinçonnement

Ici (Figure IV.5), chaque zone est représentée par un seul point dans l'hodographe (zone rigides)

(4) est à l'origine (vitesse nulle)

(1) est à la vitesse (négative) du poinçon

(2) et (2') sont horizontales

(3) et (3') sont inclinées à 45° et dirigées vers le haut

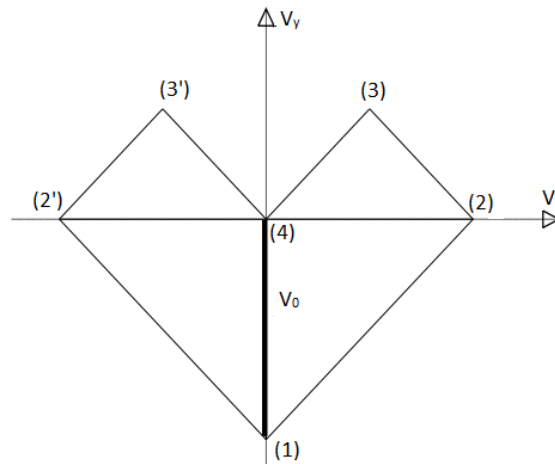


Figure IV.5 : Hodographe

L'incompressibilité de la déformation plastique impose des conditions sur les discontinuités. La composante normale à une ligne de discontinuité doit être continue (ce qui assure la continuité du débit de la matière à travers la ligne de discontinuité). Autrement dit, toute discontinuité de vitesse est tangente à la ligne de discontinuité.

Sur la figure (IV.5) :

- la discontinuité (1) (2) est parallèle à **AD**
- la discontinuité (2) (3) est parallèle à **BD**
- la discontinuité (3) (4) est parallèle à **BC**

Le champ des vitesses est donc totalement déterminé.

f) Le calcul de la puissance dissipée sur une ligne de discontinuité :

On considère une ligne de discontinuité comme la limite d'une couche de cisaillement continu quand l'épaisseur de la couche tend vers zéro. La puissance dissipée (IV.14) par unité de longueur de cette couche est indépendante de l'épaisseur.

$$\dot{W}_s = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |\Delta \vec{u}| \quad (\text{IV.14})$$

$\dot{W}_s$ est une puissance par unité de surface.

$\sigma_0/\sqrt{3}$ est la cission critique de cisaillement pour un corps de Von Mises.

$|\Delta \vec{u}|$ est le module de la discontinuité de la vitesse.

- g) La puissance dissipée par l'écoulement de la figure (IV.4) est la somme des puissances dissipées sur chaque ligne de discontinuité

Lignes	Longueur (Surface)	$\Delta \delta v_0 $	$(\sigma_0/\sqrt{3}) \dot{W}_s$
AD	$2a\sqrt{2}$	$v_0\sqrt{2}$	$4a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0$
AB	$4a$	v_0	$4a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0$
BD	$2a\sqrt{2}$	$\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	$2a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0$
BC	$2a\sqrt{2}$	$\frac{v_0}{\sqrt{2}}$	$2a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0$

$$\dot{W}^* = 12 a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \quad (\text{IV.15})$$

$\dot{W}^*$ calculé par (IV.15) est une valeur approchée de la puissance réellement dissipée au début du poinçonnement.

- h) En identifiant $\dot{W}^*$ à la puissance des forces extérieures $F v_0$, la vitesse s'élimine.

$$\dot{W}^* = F^* v_0 = 12 a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0$$

$$F^* = 12 a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{IV.16})$$

F^* calculé en (IV.16) est la force pour unité de longueur de l'outil.

$$P_m^* = \frac{F^*}{2a} = \frac{6}{\sqrt{3}} \sigma_0 = 3,46 \sigma_0 \quad (\text{IV.17})$$

De la relation (IV.17) on trouve pour la dureté P_m (ou pression moyenne de poinçonnement) une approximation P_m^* d'environ trois fois la contrainte d'écoulement.

IV.1.2.2. Méthode de la borne inférieure "BMI" :

- a) On considère le même problème que la borne supérieure.
- b) L'intuition est de nature bien différente : dans la méthode précédente, on imaginait que l'écoulement se produisait.

Maintenant, on imagine, au contraire, qu'on s'efforce de résister à l'écoulement.

- c) Imaginons (Figure IV.6.a) la colonne de matière située à l'aplomb du poinçon, en faisant abstraction de la matière qui l'entoure.

Cette colonne est capable de supporter une contrainte de compression : $-\sigma'_0$ ($\sigma'_0 = 2\sigma_0/\sqrt{3}$ est la contrainte limite de traction en déformation plane)

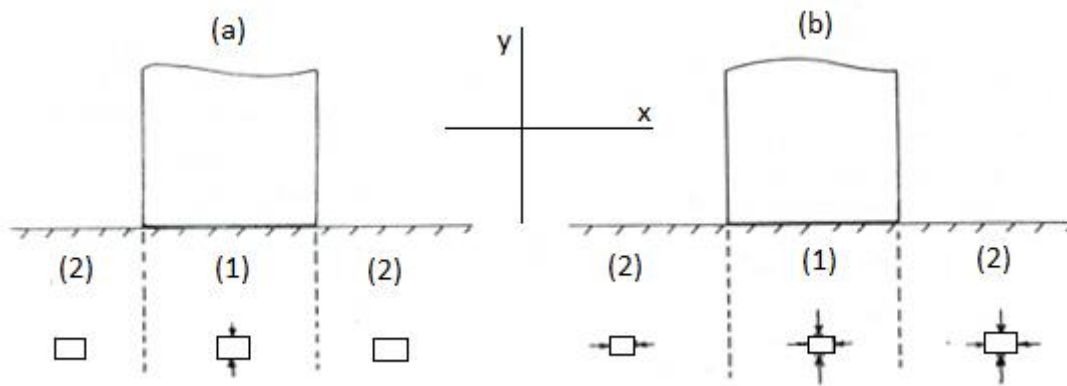


Figure IV.6 : Champ statique admissible

$$\text{Bloc (1.a)} : [\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma'_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bloc (2.a)} : [\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bloc (1.b)} : [\sigma] = \begin{pmatrix} -\sigma'_0 & 0 \\ 0 & -2\sigma'_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bloc (2.b)} : [\sigma] = \begin{pmatrix} -\sigma'_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- d) La colonne considérée peut même supporter plus que $-\sigma'_0$ à condition de transmettre par ses parois une pression latérale sur le milieu (2). La Figure (IV.6.b) représente le champ de contraintes limite de ce type.

Un tel champ est en équilibre et supporte la pression de poinçonnement $2\sigma'_0$.

La pression moyenne limite P_m est au moins égale à $2\sigma'_0$.

- e) On peut sans doute faire mieux et inventer des champs de contrainte en équilibre, ne violant nulle part le critère de plasticité, mais supportant des efforts de poinçonnement encore plus élevés. Le champ naturel observé à la limite d'écoulement, plus économe, donnera le meilleur résultat.

$$P_m \geq P_m^* = \frac{4\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{IV. 18})$$

- f) La méthode a fourni une approximation par défaut à 20% près.
- g) Si l'on ne connaissait pas la solution exacte, les calculs faits dans les deux méthodes seront encadrés (IV.18).

$$2,31\sigma_0 \leq P_m \leq 3,27\sigma_0 \quad (\text{IV.19})$$

Ce qui est assez remarquable compte tenu de la simplicité des calculs

IV.1.3. Méthode de lignes de glissement :

La construction des lignes de glissement est illustrée sur les figure (IV.7.a) et (IV.7.b) [9].

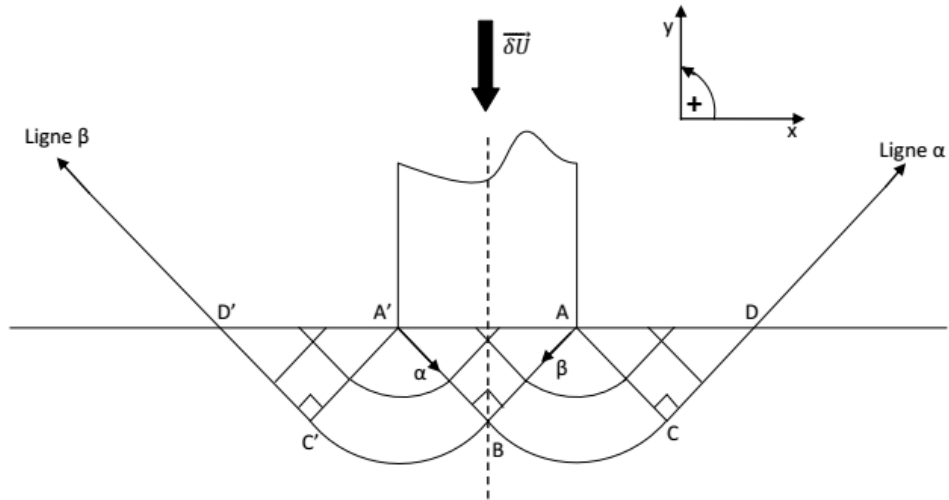


Figure IV.7.a : Construction d'une ligne de glissement d'une barre de forgeage

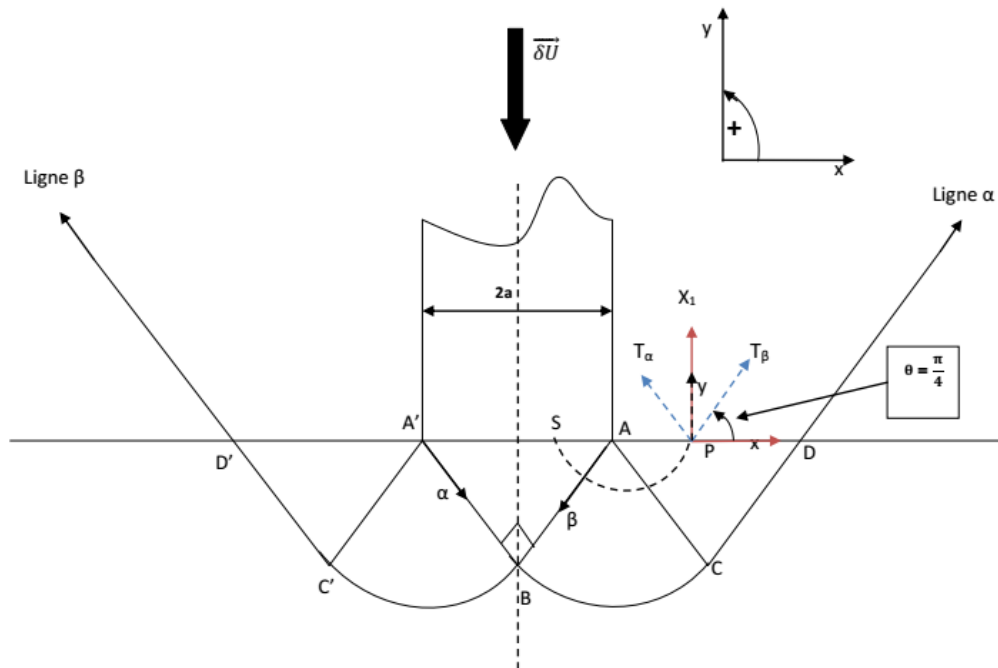


Figure IV.7.b : Utilisation des lignes de glissement en 2 points distincts (S) et (P)

En suivant la ligne de glissement qui va de (P) en (S) comme c'est montré en figure (IV.7.a) et (IV.7.b).

On peut déterminer la contrainte en (S) à partir de celle en (P).

Si l'on isole ces deux points (figure IV.8) et (figure IV.9), on peut formuler les expressions suivantes :

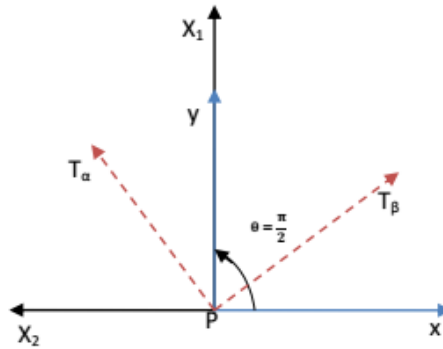


Figure IV.8 : Définition des axes en P

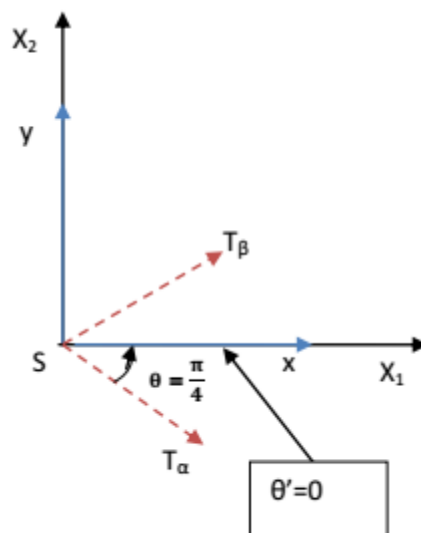


Figure IV.9: Définition des axes en B

Au point (P) $\sigma_{yy} = \sigma_1 = 0$ et l'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne la relation (IV. 20).

$$\sigma_{yy} = -p + [-k \cos 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)] \quad (\text{IV. 20})$$

$$\sigma_{yy} = -p - k = 0$$

D'où :

$$p = k$$

On a donc en (P)

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ p = k \end{cases} \quad (\text{IV. 21})$$

Pour déterminer la contrainte (p') en (S), on utilise (IV. 21) la relation de *HENCKY* le long d'une ligne α (IV. 22).

$$p + 2K\theta = p' + 2K\theta' \quad (\text{IV. 22})$$

Au point (S) l'angle $\theta' = 0$, ce qui donne la relation (IV. 23)

$$p' = p + k \pi \quad (\text{IV. 23})$$

$$p' = k + k \pi = k(1 + \pi)$$

Ce qui nous permet d'écrire en (IV. 24)

$$\sigma_{xx} = -p' + k \cos 2\theta' \quad (\text{IV. 24})$$

D'où :

$$\sigma_{xx} = -k\pi$$

$$\sigma_{yy} = -p' - k \cos 2\theta'$$

$$\sigma_{yy} = -k(1 + \pi) - k = -k(2 + \pi) = -\frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(2 + \pi) < 0 \quad [\text{compression}] \quad (\text{IV. 25})$$

Alors :

$$P_{moy} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(2 + \pi) \approx 2,97 \sigma_e \quad (\text{IV. 26})$$

$$F_{yy} = \sigma_{yy} \cdot S = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(2 + \pi) \cdot 2a \cdot e \approx 5,94 \sigma_e \cdot a \cdot e \quad (\text{IV. 27})$$

IV.2. Le procédé du Filage

a) Paramètre du filage :

- Section initiale S_1 et finale S_2 du produit
- Angle α de la filière
- Longueur à filer L
- Vitesse de filage u_1
- Nature du frottement sur l'outillage
- Caractéristiques mécaniques et thermiques du matériau filé

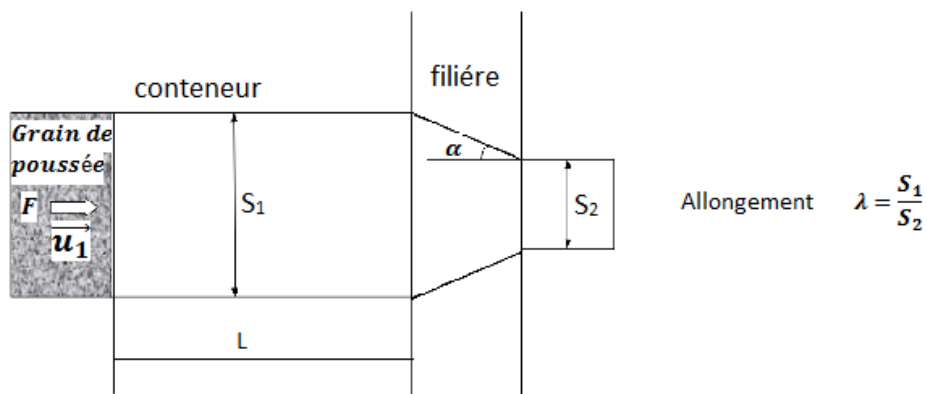


Figure IV.10 : Représentation schématique d'un filage

b) Problème immédiats :

- Calcul de l'effort de filage
- Nature de l'écoulement (par les bords, central...)
- Hétérogénéité de déformation et de température dans le produit en sortie.

c) Approche qualitative :

Le caractère compressif des contraintes en filage permet d'obtenir en pratique des allongements élevés (30 à 80 est courant pour l'acier à chaud).

Une hétérogénéité de déformation peut alors entraîner une forte hétérogénéité de propriétés dans le produit de sortie. Or nous avons vu que le frottement par exemple joue un rôle important dans la détermination du type d'écoulement, donc de l'homogénéité de la déformation.

Il peut y avoir formation d'une "zone morte" en amont de la filière ; cette zone joue un rôle analogue à celui d'une filière inclinée (en pratique les filières sont très souvent plates : $\alpha = 90^\circ$).

d) Filage plan de rapport 2

Cet exemple simple permet de développer les différentes méthodes de calcul de l'effort de filage et de les comparer. Dans toutes les méthodes, nous supposons que le métal s'écoule en déformation plane, en régime stationnaire et sans forces de masse ; nous supposons de plus que filière et conteneur sont parfaitement lubrifiés.

IV.2.1. Méthodes d'encadrement

IV.2.1.1. Méthode de la borne inférieure : (Figure IV.11)

Posons $\sigma'_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0$. Si nous recherchons un champ de contraintes en équilibre simple, il est assez naturel de diviser l'écoulement en deux zones de contraintes homogènes.

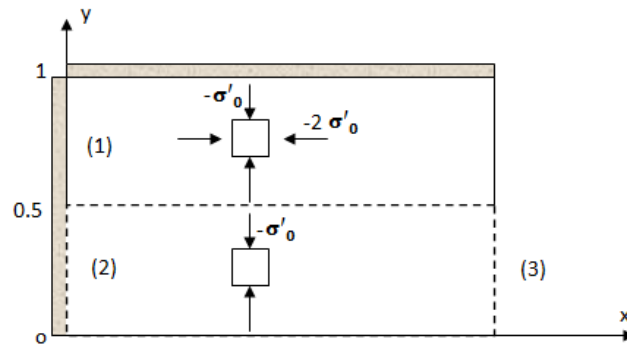


Figure IV.11 : Borne supérieure

Examinons la zone (2) : il ne peut y avoir de discontinuité du vecteur contrainte $\vec{T}_x$ à la frontière (2)-(3). Or la zone de sortie (3) est rigide (IV.28).

$$\begin{cases} \vec{T}_x = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV. 28})$$

Donc

Cette zone ne violant pas le critère de plasticité, supporte au mieux $\sigma = -\sigma'_0$

La continuité du vecteur contrainte à la frontière (1)-(2) s'écrit (IV.29)

$$\begin{cases} \vec{T}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} \\ [\sigma_1] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma'_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV. 29})$$

Soit pour la zone (1), le critère de plasticité s'écrit donc (IV.30).

$$|\sigma + \sigma'_0| = \sigma'_0 \quad (\text{IV. 30})$$

puisque σ est également compressif (IV.31).

$$\sigma = -2 \sigma'_0 \quad \Rightarrow \quad [\sigma_1] = \begin{pmatrix} -2\sigma'_0 & 0 \\ 0 & -\sigma'_0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV. 31})$$

D'où une pression de filage p^* estimé par défaut (IV.32).

$$\begin{cases} p^* = \frac{F^*}{1} = \int_0^{1/2} [\sigma_1] \vec{n} dy + \int_{1/2}^1 [\sigma_2] \vec{n} dy = \sigma'_0 \leq p_{réelle} \\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV. 32})$$

IV.2.1.2. Méthode de la borne supérieure :

- a) champ élémentaire : le découpage par bloc rigides de la Figure (IV.12) est un des plus simples possible.

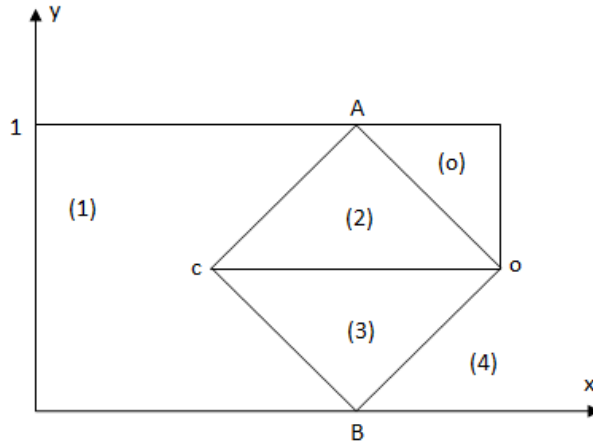


Figure IV.12 : Plan d'écoulement

Il comporte entre les zones d'entrée (1) et de sortie (4) une zone morte (0) et deux blocs symétriques (2) et (3).

La zone morte joue un rôle équivalent à celui d'une filière à 45° non lubrifiée.

L'admissibilité de ce découpage doit être vérifiée en construisant l'hodographe de la Figure (IV.13) :

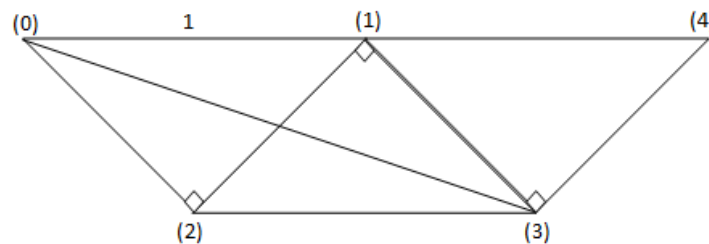


Figure IV.13 : Hodographe

Les point (0) (vitesse nulle) et (1) (vitesse initiale horizontale) sont connus ; les discontinuités de vitesse (12) et (02) doivent, pour respecter l'incompressibilité, être parallèle respectivement à **AC** et **OA** : ceci détermine la vitesse (2). De même, les discontinuités (23) et (13) sont parallèles à **OC** et **BC** d'où le point (3).

Enfin (34) est parallèle à **OB**. La vitesse (4) doit être à la fois horizontale et de module double de la vitesse d'entrée, ce qui est effectivement obtenu par construction.

Le calcul de la puissance $\dot{W}^*$ associée à ce champ se résume dans le tableau ci-dessous

Longueur	Discontinuité	Produit
$AC = 1/\sqrt{2}$	$(12) = 1/\sqrt{2}$	1/2
$OA = 1/\sqrt{2}$	$(02) = 1/\sqrt{2}$	1/2
$OC = 1$	$(23) = 1$	1
$BC = 1/\sqrt{2}$	$(13) = 1/\sqrt{2}$	1/2
$OB = 1/\sqrt{2}$	$(34) = 1/\sqrt{2}$	1/2
		$\frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \dot{W}^* = 3$

$$p^* = \frac{\dot{W}^*}{u_1} = \dot{W}^* = \sigma_0 \sqrt{3} \quad (\text{IV. 33})$$

$$p^* \simeq 1,73 \sigma_0 \geq P_{réelle} \quad (\text{IV. 34})$$

IV.2.2. Méthode des lignes de glissement

Comme il n'y a pas de frottement sur les parois, **OX** et **OY** sont directions principales pour les contraintes sur les parois. Il en est de même sur l'axe **OX** par raison de symétrie. Donc si les zones déformées contiennent des points sur l'axe ou sur les parois, en ces points les lignes de glissement seront à **45°** sur **OX** et **OY**.

C'est ce qui conduit à considérer le champ représenté sur la Figure (IV.14) les deux seules zones déformées sont les deux éventails de Prandtl **AOB** et **A'OB'**.

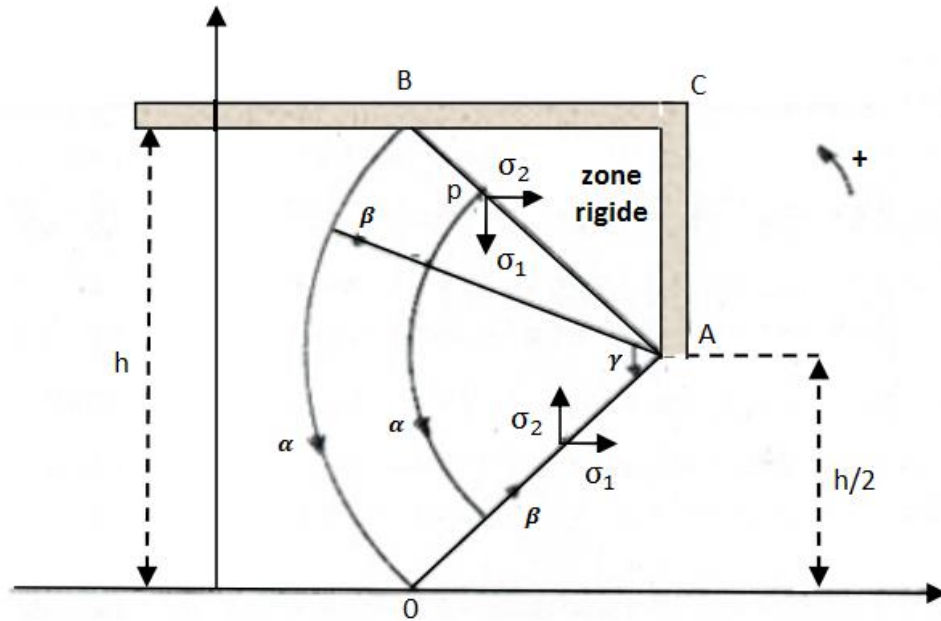


Figure IV.14 : Champ de ligne de glissement et hodographe

a) Champ des contraintes :

On part de $\mathbf{AO}$ qui est une ligne de glissement β rectiligne. La relation de *Hencky* correspondante donne : $d\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Donc $\begin{cases} \sigma_1 = \text{constante} \\ \sigma_2 = \sigma_1 - 2k \end{cases}$ le long de $\mathbf{AO}$ (IV. 35)

Et σ_1 est horizontale.

Le vecteur contrainte en M sur la facette AO (force exercée par le bloc de droite sur le bloc de gauche) est donc, dans les axes XOY

$$\begin{cases} T_x = \sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ T_y = -\sigma_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{IV. 36})$$

Par raison de symétrie, la résultante de toutes les forces exercées par le bloc de droite sur ***OA*** est horizontale et vaut :

$$\mathbf{F}_X = \sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathbf{OA} \cdot 2 \quad (\text{par unité de longueur du produit}). \quad (\text{IV. 38})$$

Mais il faut maintenant tenir compte du fait que le bloc de droite est libre de contraintes sur sa surface et qu'il est en équilibre : cela implique $F_X = 0 \rightarrow \sigma_1 = 0$ sur OA .

Donc $\sigma_2 = -2k$ et $p = k$

A partir de là on calcule les contraintes dans l'éventail de *Prandtl* AOB à l'aide de la relation de *Hencky* le long des lignes α et on trouve en P :

$$\begin{cases} p' = k(1 + 2\gamma) \\ \theta' = -\gamma \end{cases} \quad \text{où } \gamma = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AO}) \quad (\text{IV. 39})$$

Donc sur AB
$$\begin{cases} p' = k(1 + \pi) \\ \theta' = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc $\sigma'_2 = -k - p' = -k(2 + \pi)$ et σ'_2 est horizontale.

On a donc déterminé le champ des contraintes dans les zones déformées.

Calculons les forces qui s'exercent sur AB et $A'B'$ de la droite sur la gauche, le vecteur contrainte correspondant en Q est :

$$\begin{cases} T'_x = \sigma'_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ T'_y = \sigma'_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{IV. 40})$$

Et, par raison de symétrie, la résultante des forces est horizontale et vaut :

$$F'_x = \sigma'_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB \cdot 2 = \sigma'_2 \cdot h = -k(2 + \pi) \cdot h \quad (\text{IV. 41})$$

En écrivant l'équilibre du bloc $DBAEE'A'B'D'$, on trouve :

$$F = -F'_x = k(2 + \pi) \cdot h \quad (\text{IV. 42})$$

Donc la pression moyenne d'extrusion est :

$$P_m = \frac{F}{2h} = k \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{IV. 43})$$

Ou
$$P_m = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \sim 1,48 \sigma_0$$

b) Champ de vitesse :

On part du bloc rigide **DBOB'D'** qui glisse vers la droite avec la vitesse **U**.

La ligne **BO** est une ligne de discontinuité de vitesse, le long de laquelle on a donc $[u_\beta] = 0$ et $[u_\alpha] = Cte \geq 0$.

Le long de **BO**, à l'intérieur de l'éventail **ABO**, on a donc :

$$\begin{cases} u_\alpha = U \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) + C \\ u_\beta = U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) \end{cases} \quad (IV. 44)$$

C est une constante ≥ 0 .

D'autre part le bloc **BCA** est rigide et immobile. La ligne **BA** est une ligne de discontinuité de vitesse, le long de laquelle on a donc (du côté intérieur de l'éventail **ABO**) :

$$\begin{cases} u_\alpha = 0 \\ u_\beta = Cst \quad D \geq 0 \end{cases} \quad (IV. 45)$$

Rapprochons les deux résultats précédents au point **B**, on trouve que :

$$\begin{aligned} - \text{ Le long de } \mathbf{BO} \quad & \begin{cases} u_\alpha = U \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ u_\beta = U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) \end{cases} \quad (C = U \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (IV. 46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{ Le long de } \mathbf{BA} \quad & \begin{cases} u_\alpha = 0 \\ u_\beta = U \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (D = U \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad (IV. 47) \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les relations de *Geiringer* pour calculer les vitesses à l'intérieur de l'éventail, au point courant **P** :

$$\begin{cases} \text{Le long des lignes (rectilignes)} : du_\beta = 0 & \text{donc} & u_\beta = U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) \\ \text{Le long des lignes} : du_\alpha - u_\beta d\theta = 0 & \text{ou} & du_\alpha = -u_\beta d\gamma \end{cases} \quad (IV. 48)$$

$$(\theta = -\gamma)$$

La relation (IV.49) connaissant u_β s'intègre immédiatement en

$$\begin{cases} u_\alpha = U \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) + Cte \text{ que l'on détermine sur } BA : \\ u_\alpha = U \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) + U \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (IV.49)$$

Le bloc sort avec la vitesse uniforme $2U$ d'après l'incompressibilité. Voyons si cela est compatible avec les conditions de discontinuité de vitesse à la traversée de la ligne βOA :

$$\begin{cases} [u_\alpha] = 2U \frac{\sqrt{2}}{2} - \left[U \cdot \cos\frac{\pi}{4} + U \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0 \\ [u_\alpha] = 2U \frac{\sqrt{2}}{2} - U \cdot \sin\frac{\pi}{4} = U \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = Cte \geq 0 \end{cases} \quad (IV.50)$$

Il reste à vérifier que la puissance dissipée est positive dans AOB :

$$p = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{\tau}_\beta} - u_\beta \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\tau}_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{\tau}_\beta} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\tau}_\alpha} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d \left[U \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) \right]}{d\gamma} + \frac{u_\alpha}{r} \quad (IV.51)$$

Soit :

$$p = -\frac{U}{r} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) + \frac{U}{r} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) + \frac{U}{r} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{U}{r} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$

IV.2.3. Comparaison des résultats fournis par les différentes approches :

- Méthode de la borne inférieure $p_m^* = 1,15 \sigma_0$
- Méthode de la borne supérieure $p_m^* = 1,73 \sigma_0$
- Méthode des lignes de glissement $p_m^* = 1,48 \sigma_0$

❖ Conclusion et perspectives

De ces exemples d'applications nous pouvons tirer des remarques sur la précision des différentes méthodes. Ces remarques peuvent s'appliquer à des cas plus complexes.

La méthode de la borne inférieure (MBI) est assez éloignée du résultat et ceci est dû à la difficulté de concevoir des champs de contraintes en équilibre non élémentaires.

Au contraire la méthode de la borne supérieure (MBS) donne un résultat à environs 3% au prix de calcul algébrique élémentaire : il est plus facile d'imaginer un champ de vitesse

La méthode des lignes de glissement est la plus coûteuse en calculs mais elle fournit une solution complète.

Les méthodes de calcul en plasticité ont profondément évolué ces dernières années, à partir des travaux des pionniers en viscoplasticité et en élastoplasticité. Les méthodes utilisées jusque-là (méthode des tranches, méthodes d'encadrement, méthode des lignes de glissement), sont difficiles à appliquer dans des situations où la géométrie, les conditions aux limites, ou le comportement sont complexes.

Ces méthodes dites classique sont progressivement remplacées par la méthode des éléments finis dont la puissance et la souplesse permettent de prendre en compte des géométries complexes, des comportements de plus en plus réalistes, et de développer des codes de calcul utilisables dans l'industrie. Ces changements ont été rendus possibles par l'augmentation spectaculaire des performances des ordinateurs de coût abordable par une entreprise moyenne, et par l'apparition des stations de travail comportant un terminal graphique évolué. Néanmoins les anciennes méthodes, montres leur intérêt historique, conservent un intérêt pédagogique indéniable et leur application intelligente à des problèmes complexes, en simplifiant au maximum les conditions physiques, permet d'obtenir des ordres de grandeur utiles, qu'il est souvent intéressant de comparer aux modèles sophistiqués dans lesquels une erreur de donnée est possible, et parfois difficile à détecter.

Références bibliographiques

- [1] M.MAYA. Plasticité. Mise en forme. Centre de CLUNY.2008
- [2] S. CANTOURNET. Bases Physiques Quantitatives Des Lois De Comportement Mécanique. ParisTech. 2012
- [3] Pierre SUQUET. Rupture et plasticité. Ecole polytechnique.2007
- [4] Roland FORTUNIE. Comportement Mécanique des Matériaux. Ecole Nationale Supérieure des Mines. Saint-Etienne
- [5] G. CAILLETAUD, M. TIJANI ; S. CANTOURNET, L. CORTE ; S. EL AREM, S. FOREST ; E. HERVE-LUANCO, M. MAZIERE ; H. PROUDHON, D. RYCKELYNCK. Mécanique des matériaux solides. ParisTech. 2011
- [6] Michel MAYA. Mécanique des Milieux continus. Centre d'enseignement et de recherche de Cluny. 2014
- [7] Monica IORDACHE. Contribution à la simulation du processus de déformation plastique à froid des tôles. Université de Metz. 2007
- [8] François SIDOROFF. Mécanique des milieux continus. Ecole Centrale de Lyon. 2010
- [9] BEN BACHIR Madjid ; BOURKACHE Yacine. Application de la plasticité à la mise en forme. Université MOULOUD MAMMERI de Tizi-Ouzou. 2016
- [10] Pierre BAQUE. ; Eric FELDER. ; Jérôme HYAFIL. ; Yannick DESCATHA. Mise en forme des métaux. Calcul par la plasticité. Dunod. 1978.
- [11] Hervé Oudin, Introduction à la plasticité. École Centrale de Nantes. 2009