

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L' INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE

Par :

AMOURA KARIMA

THÈME

CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE DE CONTRÔLEURS
FRACTIONNAIRES D'ORDRE RÉDUIT POUR LA COMMANDE
DES SYSTÈMES DE GRANDE DIMENSION

DEVANT LE JURY :

| | | |
|---------------|-----------------|--|
| Président | Saïd DJENNOUNE | <i>Professeur, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou</i> |
| Rapporteur | Rachid MANSOURI | <i>Professeur, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou</i> |
| Co-Rapporteur | Maâmar BETTAYEB | <i>Professeur, Université de Sharjah (EAU)</i> |
| Examineurs | Mohamed TADJINE | <i>Professeur, Ecole Nationale Polytechnique, Alger</i> |
| | Samir LADACI | <i>Professeur, Ecole Nationale Polytechnique, Constantine</i> |
| | Amar SI AMMOUR | <i>Maître de conférences A, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou</i> |

ANNÉE : 2018

A mes très chers parents

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens à remercier, en premier lieu, Monsieur Rachid Mansouri, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Directeur de ma thèse, à qui j'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour son encadrement, ses conseils et sa disponibilité tout au long de ces années de doctorat.

Je témoigne toute ma gratitude à Monsieur Maâmar Bettayeb, Professeur à l'université de Sharjah (Emirats Arabes Unies), co-encadrant de ma thèse, pour son aide, ses conseils et pour ses grandes valeurs humaines.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Said Djennoune, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je remercie également Messieurs Mohamed Tadjine, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Samir Ladaci, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique de Constantine, Amar SI AMMOUR, Maître de conférences à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements s'adressent à tous les membres du Laboratoire MIPS à l'université de Haute Alsace, en particulier Djaffar Ould Abdeslam, Maître de conférences, HDR, de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je souhaite remercier l'ensemble de mes collègues du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créé.

Bien sûr, je n'oublierai pas de remercier ma famille et mes proches pour leurs encouragements et leur soutien durant ces longues années.

| | |
|----------------------|---|
| b : | gain statique |
| $C(s)$: | contrôleur |
| E_α : | fonction Mittag-Leffler |
| $f(s)$: | filtre d'ordre entier |
| $F(s)$: | filtre d'ordre non entier |
| $G(s)$: | fonction de transfert du système |
| $G_{app}(s)$: | fonction de transfert approximée du système |
| $G_m(s)$: | fonction de transfert du modèle |
| $G_r(s)$: | fonction de transfert d'ordre réduit du système |
| $G_{ref}(s)$: | modèle de référence |
| K_c : | gain du contrôleur |
| K_{c0} : | gain du contrôleur proportionnel |
| $L(s)$: | fonction de transfert idéale de Bode |
| \mathcal{L}^{-1} : | symbole de la transformation de Laplace inverse |
| M_s : | inverse de la marge de module |
| M_p : | dépassement |
| Q_{ra} : | facteur de résonance en asservissement |
| Q_{rr} : | facteur de résonance en régulation |
| S : | fonction de sensibilité |
| s : | opérateur de Laplace |
| T : | fonction de sensibilité complémentaire |
| t_m : | temps de montée |
| t_p : | temps du premier dépassement |
| T_s : | temps de réponse |
| $x(s), y(s)$: | sorties du système |
| $\hat{y}(s)$: | sortie approximée du système |
| $x_{ref}(s),$ | consignes |
| $y_{ref}(s)$: | |
| α, λ : | ordre non entier |
| v : | perturbation |
| θ : | retard |
| ϕ_m : | marge de phase |

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| 1 Réduction de modèles de grande dimension | 6 |
| 1.1 Introduction | 6 |
| 1.2 Méthodes de réduction de l'ordre du modèle | 7 |
| 1.2.1 Méthodes basées sur la représentation d'état | 10 |
| 1.2.2 Méthodes basées sur l'approximation de la fonction de transfert | 18 |
| 1.3 Simplification de la structure du modèle | 21 |
| 1.3.1 Méthodes basées sur la technique d'identification | 21 |
| 1.3.2 Méthode d'approximation de Skogestad "règle de la moitié" ou "half rule" | 22 |
| 1.3.3 Compression de modèles entiers de grande dimension par des modèles non entiers | 24 |
| 1.4 Conclusion | 26 |
| 2 Synthèse de contrôleurs FOF-PID pour la commande des systèmes de grande dimension | 28 |
| 2.1 Introduction | 28 |
| 2.2 Simulation des contrôleurs fractionnaires | 30 |
| 2.2.1 Méthode d'approximation de Charef | 30 |
| 2.2.2 Méthode d'approximation d'Oustaloup | 31 |
| 2.3 Principe de la commande CRONE | 34 |
| 2.3.1 Fonction idéale de Bode | 34 |
| 2.3.2 Comportement de la fonction idéale de Bode dans le domaine fréquentiel | 35 |
| 2.3.3 Comportement de la fonction idéale de Bode dans le plan complexe | 37 |
| 2.3.4 Comportement de la fonction idéale de Bode dans le domaine temporel | 40 |
| 2.4 Choix des paramètres du modèle de référence | 45 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.4.1 | Choix des paramètres du modèle de référence dans le domaine fréquentiel | 45 |
| 2.4.2 | Choix des paramètres du modèle de référence dans le domaine temporel | 46 |
| 2.4.3 | Choix des paramètres du modèle de référence dans le plan complexe | 47 |
| 2.5 | Commande par modèle interne | 52 |
| 2.6 | Synthèse du contrôleur FOF-PID | 56 |
| 2.6.1 | Synthèse de contrôleurs FOF-PID pour des modèles de petites dimensions | 57 |
| 2.6.2 | Cas d'un système décrit par un modèle du premier ordre à retard | 57 |
| 2.6.3 | Synthèse de contrôleurs FOF-PID pour des modèles de grande dimension | 59 |
| 2.6.4 | Exemple numérique | 61 |
| 2.7 | Conclusion | 70 |
| 3 | Méthode empirique pour le réglage des contrôleurs FOF-PID | 72 |
| 3.1 | Introduction | 72 |
| 3.2 | Principe de la méthode de Ziegler-Nichols | 73 |
| 3.3 | Méthode basée sur le dépassement de la réponse indicielle de la boucle fermée | 74 |
| 3.4 | Extension de la méthode SOM au contrôleur fractionnaire FOF-PID | 77 |
| 3.4.1 | Réglage des paramètres du contrôleur FOF-PI | 78 |
| 3.4.2 | Réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID | 86 |
| 3.4.3 | Influence des paramètres η et ρ sur la réponse indicielle | 90 |
| 3.5 | Tests et résultats | 92 |
| 3.5.1 | Exemple 1 | 92 |
| 3.5.2 | Exemple 2 | 95 |
| 3.5.3 | Exemple 3 | 99 |
| 3.6 | Conclusion | 101 |
| 4 | Application de la méthode SOM sur un banc d'essai expérimental | 103 |
| 4.1 | Introduction | 103 |
| 4.2 | Description du système pendule inversé monté sur chariot | 104 |
| 4.3 | Modélisation du système global moteur-chariot-pendule | 105 |
| 4.4 | Commande du pendule inversé | 108 |
| 4.5 | Calcul analytique du contrôleur FOF-PID | 111 |
| 4.5.1 | Synthèse du contrôleur en suivant la première démarche | 111 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.5.2 | Synthèse du contrôleur en suivant la deuxième démarche | 113 |
| 4.5.3 | Synthèse du contrôleur en suivant la troisième démarche | 114 |
| 4.6 | Réglage du contrôleur FOF-PID en utilisant la méthode empirique "SOM" | 115 |
| 4.7 | Implémentation et résultats expérimentaux | 117 |
| 4.7.1 | Résultats obtenus avec les contrôleurs calculés analytiquement | 118 |
| 4.7.2 | Résultats obtenus avec la méthode SOM | 119 |
| 4.8 | Conclusion | 123 |
| 5 | Conclusion générale et perspectives | 125 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Schéma de simplification de modèles. | 7 |
| 1.2 | Réponses indicielles du modèle initial et le modèle réduit. | 12 |
| 1.3 | Réponses indicielles du modèle initial et le modèle réduit. | 15 |
| 1.4 | Réponses indicielles du modèle initial et les modèles réduits. | 18 |
| 1.5 | Réponses indicielles du modèle initial et les modèles réduits ($G_{r1}(s), G_{r2}(s)$) et $G_{r3}(s)$ | 20 |
| 1.6 | Modèle de Broïda | 22 |
| 1.7 | Réponses indicielles du modèle entier initial et du modèle fractionnaire. | 27 |
| 2.1 | Diagramme asymptotique de Bode de $H(s)$ et sont approximation. | 31 |
| 2.2 | Diagramme de Bode de $D_{gen}(s)$ en trait pointillé et $D_{borné}(s)$ en trait continu. | 32 |
| 2.3 | Diagramme asymptotique de Bode de $D_{gen}(s)$ et $D_N(s)$ pour $\alpha \in]0, 1[$ | 33 |
| 2.4 | Tracé de Bode de $L(s)$ avec des gains différents. | 35 |
| 2.5 | Schéma bloc d'une régulation en boucle fermée. | 36 |
| 2.6 | Facteur de résonance Q_{ra} dans le plan de Nichols et sa transposition dans le plan de Nyquist. | 38 |
| 2.7 | Facteur de résonance Q_{rr} dans le plan de Nichols et sa transposition dans le plan de Nyquist avec la marge de module. | 38 |
| 2.8 | Pôles d'un modèle de second ordre amorti. | 39 |
| 2.9 | Pôles de la fonction de transfert en boucle fermée de la fonction idéale de Bode. | 40 |
| 2.10 | Réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermée pour différentes valeurs de ω_c | 41 |
| 2.11 | Réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermé :1) $y(t)$, 2) $\hat{y}(t)$, 3) $\hat{y}(t) - f_\alpha(t)$, 4) $f_\alpha(t)$ | 42 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.12 | Dépassement M_p en fonction de α | 44 |
| 2.13 | Evolution de λ en fonction du dépassement M_p | 46 |
| 2.14 | Caractéristiques du modèle d'ordre entier en trait plein et caractéristiques du modèle fractionnaire en pointillé : a-b-c) en utilisant les caractéristiques fréquentielles. d-e-f) en utilisant les caractéristiques temporelles. g-h-i) en utilisant la position des pôles. | 51 |
| 2.15 | Schéma bloc d'une régulation en boucle ouverte. | 52 |
| 2.16 | Schéma bloc d'une régulation en boucle fermée. | 53 |
| 2.17 | Schéma bloc d'une régulation en boucle fermée : a)- régulation classique. b)- régulation par modèle interne | 54 |
| 2.18 | Démarches à suivre pour la synthèse de contrôleurs fractionnaires pour les modèles de grande dimension. | 59 |
| 2.19 | M_s dans le plan de nyquist | 63 |
| 2.20 | Réponses indicielles des modèles réduits du second ordre et du modèle initial. . . | 64 |
| 2.21 | Réponses indicielles des modèles réduits de premier ordre et le modèle initial. . . | 65 |
| 2.22 | Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D11}(s)$, $C_{D12}(s)$ et $C_{D13}(s)$ | 66 |
| 2.23 | Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D14}(s)$, $C_{D15}(s)$ et C_{D16} | 67 |
| 2.24 | Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D21}(s)$ et $C_{D22}(s)$ de la deuxième démarche. 68 | |
| 2.25 | Réponses indicielles des modèles entier et non entier. | 69 |
| 2.26 | Résultat obtenu avec le contrôleur $C_{D31}(s)$ | 69 |
| 3.1 | Schéma bloc d'une commande en boucle fermée avec une action proportionnelle . | 76 |
| 3.2 | Mesures à relever sur la réponse indicielle | 76 |
| 3.3 | Schéma bloc d'une commande en boucle fermée avec un contrôleur FOF-PID . . | 76 |
| 3.4 | Relation entre KK_c et KK_{c0} | 81 |
| 3.5 | Tracé de la pente A_{PI} en fonction du dépassement M_p | 82 |
| 3.6 | Variation de $1/\tau_i$ en fonction du rapport T/θ | 83 |
| 3.7 | Variation de θ/t_p en fonction de M_p pour les 15 systèmes | 85 |
| 3.8 | Relation entre KK_c et KK_{c0} pour un contrôleur FOF-PID | 87 |
| 3.9 | Variation de la pente A_{PID} en fonction du dépassement M_p | 88 |
| 3.10 | Influence du paramètre η sur la réponse indicielle ($1 : \eta = 0.25$, $2 : \eta = 0.32$, $3 : \eta = 0.37$, $4 : \eta = 0.50$, $5 : IMC$). | 91 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.11 | Influence du paramètre ρ sur la réponse indicielle ($1 : \rho = 0.5, 2 : \rho = 0.37, 3 : \rho = 0.32, 4 : \rho = 0.25, 5 : IMC$). | 92 |
| 3.12 | Réponse indicielle en boucle fermée en présence de perturbations et de bruits gaussien avec les contrôleurs $C_{PI-IMC}, C_{PID-IMC}, C_{PI-SOM}$ et $C_{PID-SOM}$. | 94 |
| 3.13 | Réponse indicielle du système contrôlé avec $C_{PI-SOM}(s)$, pour différentes valeurs de gain K et $\tau_c = 1$. | 96 |
| 3.14 | Réponse indicielle du système contrôlé avec $C_{PI-SOM}(s)$, pour différentes valeurs du gain K et $\tau_c = 4$. | 96 |
| 3.15 | Réponse indicielle en boucle fermée en présence de perturbations.(trait plein : FOF-PI réglé par SOM, trait mixte : FOF-PI calculé par IMC, trait pointillé : le contrôleur de Monje et al. | 98 |
| 3.16 | Amplitude de la loi de commande : trait plein montre la méthode proposée et trait pointillé montre la méthode de monje et al. | 99 |
| 3.17 | Réponse indicielle de la boucle fermée avec bruit : trait plein avec le contrôleur FOF-PI et trait pointillé avec le contrôleur de monje et al. | 100 |
| 3.18 | Réponse indicielle du système en boucle fermée avec FOF-PI (trait pointillé), SP-FO-PI (trait discontinu) et le modèle de référence ($G_{ref}(s)$) (trait plein). | 101 |
| 4.1 | Banc d'essai : -a) Photo de banc d'essai, -b) Synoptique de banc d'essai. | 105 |
| 4.2 | Schéma de l'ensemble chariot-pendule. | 106 |
| 4.3 | Schéma bloc de la commande de stabilisation et d'asservissement du système réel. | 109 |
| 4.4 | Réponses indicielles du modèle initial G_{vx} (trait plein) et du modèle réduit G_{rre} (trait pointillé). | 112 |
| 4.5 | Réponses indicielles du modèle initial G_{vx} (trait plein) et le modèle réduit G_{rps} (trait pointillé) | 113 |
| 4.6 | Réponses indicielles du modèle G_{vx} (trait plein) et son approximation par un modèle du premier ordre à retard (trait pointillé). | 114 |
| 4.7 | Réponses indicielles du modèle G_{vx} (trait plein) et son approximation par un modèle fractionnaire (trait pointillé). | 115 |
| 4.8 | Expérience avec $K_{c0} = -6$, trait plein : position du chariot, trait pointillé : référence | 117 |
| 4.9 | Expérience avec $K_{c0} = -10$, trait plein : position du chariot, trait pointillé : référence | 118 |
| 4.10 | Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D11}(s), C_{D12}(s), C_{D13}(s), C_{D21}(s)$ et $C_{D31}(s)$. | 119 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.11 | Zoom sur la position du chariot obtenue avec les contrôleurs $C_{D11}(s), C_{D12}(s), C_{D13}(s), C_{D21}(s)$ et $C_{D31}(s)$ entre $t = 30$ et $t = 55$ | 120 |
| 4.12 | Résultat de l'implémentation du contrôleur $C_{1-SOM}(s)$ en trait plein et le contrôleur $C_{2-SOM}(s)$ en trait discontinu | 121 |
| 4.13 | Zoom sur la position du chariot obtenue avec les contrôleurs $C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$ entre $t = 30$ et $t = 55$ | 122 |
| 4.14 | Pôles et zéros des fonctions de transferts obtenues avec les contrôleurs $C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$ | 122 |
| 4.15 | Résultats obtenus avec $C_{1-SOM}(s)$ pour différentes valeurs de λ | 123 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Caractéristiques du modèle fractionnaire obtenus en utilisant les caractéristiques fréquentielles du modèle de second ordre. | 48 |
| 2.2 | Caractéristiques du modèle fractionnaire obtenu en utilisant les caractéristiques temporelles du modèle de second ordre. | 49 |
| 2.3 | Caractéristiques du modèle fractionnaire obtenu en utilisant la position des pôles dans le plan complexe. | 50 |
| 2.4 | Modèles réduits obtenus. | 63 |
| 2.5 | Erreurs d'approximation du modèle initial par les modèles réduits d'ordre 1 et 2. | 64 |
| 2.6 | Paramètres des contrôleurs obtenus. | 65 |
| 2.7 | Performances temporelles et fréquentielles de la boucle fermée avec les différents contrôleurs. | 70 |
| 3.1 | Réglage des paramètres du régulateur PID avec la méthode de Zeigler-Nichols en boucle fermée. | 74 |
| 3.2 | Mesures relevées des réponses indicielles des modèles dont $0.1 \leq \frac{T}{\theta} \leq 3$ | 79 |
| 3.3 | Mesures relevées des réponses indicielles des modèles dont $5 \leq \frac{T}{\theta} \leq 100$ | 80 |
| 3.4 | Paramètres du contrôleur pour différentes valeurs de η . (avec IMC : $K_c = 10$, $\tau_i = 5$ et $M_p = 0.21$ | 90 |
| 3.5 | Performances de la boucle fermée (le comportement désiré : $M_p = 0.10$ et $t_{r(2\%)} = 6.6s$) | 95 |
| 3.6 | Performances de la boucle fermée par rapport au rejet de perturbations | 95 |
| 3.7 | Performances de la boucle fermée obtenues avec les différents contrôleurs | 98 |
| 4.1 | Paramètres de l'ensemble pendule-chariot et moteur à courant continu. | 108 |

Introduction

Le régulateur PID reste sans doute le régulateur le plus utilisé dans l'industrie malgré les progrès importants qu'a connu la recherche dans le domaine du contrôle [6]. Cela est due à sa simplicité et son efficacité qui permet d'avoir le meilleur rapport qualité/prix. En 1999 Podlubny a proposé pour la première fois le contrôleur PID d'ordre fractionnaire noté $(PI^\nu D^\mu)$ qui est une généralisation du contrôleur PID classique, comprenant une intégration d'ordre fractionnaire (I^ν) et une dérivation d'ordre fractionnaire (D^μ). Podlubny a montré dans [60] que le contrôleur $PI^\nu D^\mu$ donne des résultats meilleurs que le contrôleur PID classique, notamment pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire. Dès lors, une grande attention par la communauté scientifique est accordée à la synthèse des contrôleurs d'ordre fractionnaire et le réglage de leurs paramètres et des progrès considérables sont enregistrés dans ce domaine.

Cependant, les méthodes de synthèse de lois de commande d'ordre non entier, comme toutes les méthodes avancées de synthèse des contrôleurs, sont insuffisamment ou pas du tout utilisées dans l'industrie et cela pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le réglage des contrôleurs fractionnaires s'avère très complexe car ils possèdent cinq paramètres à régler ou à calculer, notamment les ordres non entiers qui ne sont pas faciles à déterminer [42, 83]. De plus, les méthodes avancées reposent sur un modèle mathématique qui doit être précis et capable de reproduire fidèlement le comportement du système physique à commander, cela n'est souvent obtenu qu'au prix d'efforts considérables. Cependant, les modèles obtenus sont de plus en plus complexes d'où le dilemme fidélité/complexité. Cette complexité peut s'afficher par une très grande dimension voir même de dimension infinie, ce qui rend ces modèles inexploitable pour la synthèse. D'un autre côté, une commande basée sur un modèle de grande dimension conduit souvent à des contrôleurs à structures complexes et d'ordres élevés, ce qui n'est pas souhaité en pratique. En effet, dans un contexte industriel, dû aux contraintes de coût de fabrication et d'implémentation, les régulateurs d'ordre réduit sont les plus désirés. Enfin, les méthodes avancées de l'automatique sont d'un

abord difficile pour un praticien non spécialiste du domaine, pour cela l'utilisation des méthodes simples telles que les méthodes empiriques sont privilégiées.

Plusieurs solutions peuvent être envisagées afin de remédier à ces contraintes. Plusieurs travaux de recherche ont été consacrés pour le développement de nouveaux types de contrôleurs fractionnaires à structure plus simple et de nouvelles méthodes analytiques plus efficaces pour le dimensionnement de ces contrôleurs, en se basant sur des théories de la commande classique [21, 50]. Récemment, un nouveau type de contrôleur fractionnaire introduit par Bettayeb et Mansouri [11, 12] est apparu, en combinant entre la commande à modèle interne (IMC) et la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) pour la commande des systèmes d'ordre entier. Le choix de la commande à modèle interne est motivé par sa simplicité et son efficacité, elle est aussi robuste par rapport aux variations paramétriques et donne lieu à des contrôleurs simples [63], contrairement aux autres méthodes de synthèse robustes telles que les commandes H_∞/H_2 , qui conduisent à des correcteurs d'ordre élevé même si le modèle du système à commander est d'ordre réduit en raison des filtres de pondération ajoutés. Ce nouveau contrôleur est appelé en anglais "PID-Fractional-Order-Filter Controller" (FOF-PID) où bien "contrôleur PID associé à un filtre fractionnaire", dont l'équation générale est

$$C(s) = F(s) \left[K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \right]$$

$F(s)$ étant le filtre fractionnaire.

L'origine de son comportement fractionnaire est la fonction de transfert idéale de Bode imposée à la boucle fermée. En effet, en s'inspirant de la commande CRONE basée sur la fonction idéale de Bode en boucle ouverte $\left(L(s) = \frac{1}{\tau_c s^{\lambda+1}} \right)$ dont la marge de phase est constante et insensible aux variations du gain dans une bande de fréquences donnée, Bettayeb et Mansouri [11, 12] ont eu l'idée d'utiliser la fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée $\left(G_{ref}(s) = \frac{1}{1+\tau_c s^{\lambda+1}} \right)$ comme un modèle de référence (filtre de robustesse) pour la synthèse du contrôleur en utilisant le principe de la commande IMC. Nous nous intéressons à ce type de contrôleurs car il possède une structure très simple et très intéressante puisqu'il est composée d'un contrôleur PID classique très connu et bien maîtrisé par les utilisateurs industriels en série avec un filtre fractionnaire permettant de rendre le contrôleur plus robuste. De ce fait, le calcul (ou le réglage) de ses paramètres est plus simple en le comparant avec le contrôleur fractionnaire $PI^\nu D^\mu$.

La simplification de modèles de grande dimension est une autre solution, dont l'objectif est d'obtenir un modèle simple tout en préservant le comportement et les caractéristiques essentielles

du modèle original de grande dimension. Plusieurs méthodes de simplification de modèles peuvent être appliquées particulièrement pour les systèmes linéaires invariants, telles que les méthodes de réduction de l'ordre, basées sur la représentation d'état ou sur la fonction de transfert du système [64], et les méthodes de simplification de structure telles que les méthodes d'identification et les méthodes d'approximation par des modèles d'ordre non entier [47]. Ainsi, l'utilisation du modèle réduit dans la synthèse permet d'obtenir un contrôleur d'ordre réduit.

Enfin, il est très intéressant de développer des méthodes de réglage empiriques qui sont plus favorisées dans l'industrie. En effet, ces méthodes sont très largement répandues dans l'industrie car elles sont simples, efficaces et ne demandent que très peu de temps et d'effort à l'ingénieur pour le réglage des paramètres du contrôleur. Ces méthodes sont basées sur un essai expérimental relativement aisé à réaliser. Pour le réglage des paramètres du contrôleur d'ordre fractionnaire, les méthodes empiriques sont très peu utilisées, l'unique méthode qui a été généralisée au cas fractionnaire jusqu'à présent est la méthode de Zeigler-Nichols dans [76]. L'inconvénient majeur de cette méthode est le fait de forcer le système à fonctionner dans sa limite de stabilité, ce qui est néfaste pour les procédés industriels. Une nouvelle méthode appelée " setpoint overshoot method (SOM) " ou " méthode basée sur le dépassement de la réponse indicielle " proposée par Shamsuzuha [67] peut remédier à ce problème. En effet, cette méthode requiert uniquement une réponse indicielle en boucle fermée en utilisant un régulateur proportionnel. Cette réponse doit être suffisamment oscillatoire (dépassement entre 0.1 et 0.6) afin de pouvoir relever facilement les mesures et c'est à base de ces informations que les paramètres du contrôleur PID sont réglés en utilisant des formules très simples.

C'est dans ce cadre général que s'inscrit le travail développé dans cette thèse dont l'objectif principal est le dimensionnement des paramètres du contrôleur fractionnaire FOF-PID pour la commande des systèmes entiers dont le modèle est de grande dimension et rendre la commande d'ordre non entier plus accessible aux utilisateurs industriels [1]. Pour ce faire, nous nous sommes basés principalement sur les travaux de Bettayeb et Mansouri [11, 12] permettant de synthétiser le contrôleur FOF-PID de manière analytique en se basant sur la méthode de commande à modèle interne. Nous nous sommes également inspirés des travaux de Shamsuzuha et Skogestad [67], afin de trouver des relations empiriques entre des données relevées de la réponse indicielle du système bouclé en utilisant un simple contrôleur proportionnel et les paramètres du régulateur FOF-PID obtenus par la méthode IMC.

Les méthodes de synthèse développées seront appliquées sur plusieurs exemples académiques afin de tester leur efficacité. Une implémentation sur un banc d'essai expérimental sera également présentée afin de valider les résultats de simulation obtenus sur un cas réel.

La progression de cette thèse est ponctuée par quatre chapitres dont le contenu est présenté comme suit :

Le chapitre 1 est un état de l'art des méthodes de simplification de modèles entiers de grande dimension, les plus utilisées dans le domaine de l'automatique, à savoir : les méthodes de réduction de l'ordre, telle que, les méthodes basées sur la représentation d'état et les méthodes basées sur la fonction de transfert. Les méthodes de simplification de structures dont l'objectif est l'obtention des modèles à structures plus simples, telles que les méthodes basées sur l'identification et les méthodes de compression de modèles. Les modèles simplifiés ainsi obtenus seront par la suite utilisés pour la synthèse du contrôleur FOF-PID.

La première partie du **chapitre 2** présente une méthode de simulation et d'implémentation des systèmes d'ordre fractionnaire qui est basée sur l'approximation de l'opérateur de dérivation/intégration non entier. En effet, deux méthodes d'approximations sont présentées, la méthode de Charef [22] et la méthode d'Oustaloup [55]. Une étude détaillée de la fonction idéale de Bode en boucle fermée est également effectuée dans différents domaines (temporel, fréquentiel et complexe), cette fonction est utilisée par la suite comme modèle de référence dans la synthèse du contrôleur FOF-PID. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la méthode de synthèse du régulateur fractionnaire FOF-PID basée sur la commande à modèle interne. Deux cas sont abordés : le cas de modèles de petite dimension, où nous avons détaillé le cas d'un modèle du premier ordre à retard et le cas des modèles de grande dimension. Dans ce dernier cas, trois démarches différentes sont distinguées, elles sont bien détaillées afin d'aboutir à un contrôleur fractionnaire d'ordre réduit.

Le chapitre 3 expose notre contribution principale qui consiste à étendre la méthode SOM (setpoint overshoot method) au cas du contrôleur FOF-PID. Ce chapitre est entièrement consacré au développement de la méthode empirique proposée pour le dimensionnement des paramètres de ce contrôleur. Par la suite, des simulations numériques permettant d'illustrer ses performances

seront présentées.

Afin de tester les performances et la robustesse des contrôleurs FOF-PID obtenus en utilisant les deux méthodes de synthèse analytique et empirique développées, **Le chapitre 4** est dédié à l'implémentation de ces contrôleurs sur un banc d'essai expérimental constitué d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile disponible au laboratoire L2CSP. La commande du pendule inversé monté sur chariot comporte trois phases. une phase d'initialisation pendant laquelle le chariot est amené manuellement au centre du rail et le pendule est immobilisé dans la position verticale basse stable. Une phase de redressement permettant de redresser le pendule depuis sa position stable vers la position verticale haute instable. Enfin la phase de stabilisation dans laquelle on maintient le pendule dans cette position inversé instable tout en faisant suivre à la position du chariot une position de référence sur le rail. Il faut noter que, dans ce travail nous ne intervenons qu'à la dernière phase. En effet, pour maintenir le pendule dans une position haute nous utilisons la commande par retour d'état, une fois stabilisé le contrôleur FOF-PID intervient pour asservir la position du chariot sur le rail.

Chapitre 1

Réduction de modèles de grande dimension

1.1 Introduction

L'analyse et la commande des processus passent souvent par l'étape de modélisation. Une modélisation précise et fiable des systèmes physiques complexes conduit souvent à des modèles de grande dimension. Cependant, l'utilisation de ces derniers lors de la synthèse de contrôleurs s'avère très compliquée et conduit à des structures complexes et de grande dimension, car la complexité du contrôleur dépend de la complexité du modèle utilisé. Pour cette raison et afin d'obtenir des contrôleurs simples, on aura besoin des méthodes de simplification de modèles. Dans ce chapitre on s'intéresse aux méthodes de simplification de modèles linéaires d'ordre entier. On présente en premier lieu quelques méthodes de réduction de l'ordre, c-à-d réduction de la dimension du modèle. En deuxième point, on propose deux méthodes de simplification de structure de modèle, voir l'approximation de modèles entiers de grande dimension par des modèles d'ordre entier avec retard pur ou par des modèles d'ordre non entier (voir figure (1.1)).

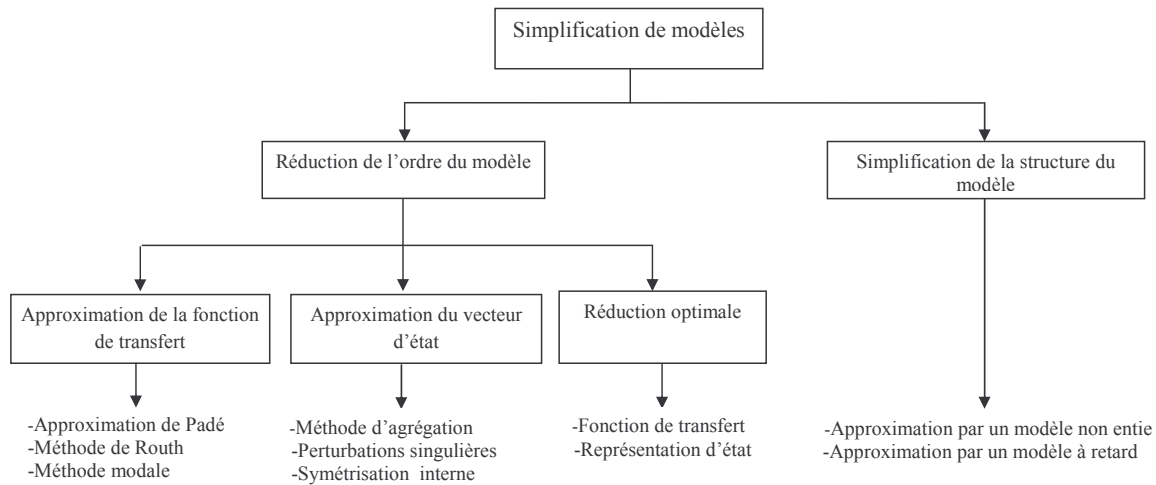


FIG. 1.1: Schéma de simplification de modèles.

1.2 Méthodes de réduction de l'ordre du modèle

Le problème de réduction de modèles a suscité un très grand intérêt par la communauté scientifique pour des raisons d'ordre pratique et économique (simplification de l'analyse du système, diminution du temps de calcul lors des simulations, rendre la conception plus efficace, obtenir des lois de commande simplifiées et diminuer le coût). Cela a permis de développer plusieurs techniques de réduction et de ce fait générer une littérature abondante et riche, particulièrement pour les systèmes linéaires invariants dans le temps. On peut distinguer deux classes de méthodes, en se référant au domaine où les modèles sont représentés, soit fréquentielles ou temporelles [29], mais cette classification n'est pas cruciale, car on peut passer facilement d'un domaine représentation à un autre. D'autres classifications existent dans la littérature, plusieurs auteurs ont opté pour la classification en trois catégories de méthodes [17], [64], [70] : les méthodes basées sur l'approximation de la fonction de transfert, les méthodes d'optimisation ou réduction optimale et les méthodes basées sur l'approximation du vecteur d'état.

1. **L'approximation du vecteur d'état** : regroupe toutes les méthodes basées sur la représentation d'état. Avec la transformation de la représentation d'état du modèle de grande dimension on aboutit à un modèle réduit préservant au mieux les propriétés du modèle original, tel que la réponse temporelle, l'observabilité, la contrôlabilité et la stabilité en boucle fermée...etc. Les méthodes basées sur la représentation d'état sont très utilisées dans le domaine de l'automatique, les plus connues sont :

- *Les méthodes modales* : Davison (1966 – 1968) a été le premier à proposer une méthode de réduction basée sur la décomposition modale. Dans sa méthode Davison néglige totalement les pôles non dominants, ce qui n’assure pas la conservation du gain statique. Pour remédier à ce problème, des améliorations ont été portées par Davison lui même (méthode de Davison modifiée) et par d’autres auteurs, ce qui a donné lieu à plusieurs nouvelles méthodes (Chidambara, Marshall, Fossard et Wilson)[23] , [30], [48] et [81]. La notion d’agrégation peut être incluse dans ce type d’approche, elle a été d’abord utilisée en économie puis généralisée au domaine de l’automatique (systèmes dynamiques) par Aoki [4], basée sur la mise sous forme modale (ou de Jordan) de la matrice d’état.
- *L’approche basée sur le concept des perturbations singulières* : proposée par Kokotovic en 1968 [35], elle est basée sur la mise en évidence des modes lents et rapides du modèle original, ce qui permet, si la partie rapide est stable d’approcher le modèle initial par l’ensemble des variables lentes. Plusieurs travaux ont montré l’importance de cette méthode dans l’analyse des systèmes complexes [24], [82] et dans la théorie du contrôle [36], [37] et [53].
- *L’approche de Moore (symétrisation interne)* : introduite par Moore [51], elle consiste à effectuer un changement de base et la recherche des composantes d’état les plus fortement commandables et observables qui seront par la suite les états du modèle réduit. Ainsi le modèle réduit obtenu conserve les propriétés du modèle initial (commandabilité, observabilité, stabilité), et c’est le principale avantage de cette approche. La méthode de symétrisation interne ne s’applique pas uniquement aux systèmes LTI, elle a fait l’objet de nombreux travaux où elle a été appliquée pour plusieurs types de modèles dont [2], [51] pour les modèles continus/ multivariables et [39] pour les modèles discrets, dans [75] elle a été appliquée aux modèles stochastiques, et généralisée aux modèles linéaires et variables dans le temps dans [77], de même, elle a été étendue aux modèles continus/discrets instables [52], [84].

2. **Méthodes basées sur l’approximation de la fonction de transfert** : souvent utilisées dans le domaine fréquentiel, basées sur les moments et les paramètres de Markov. En général ces méthodes sont simples et ne nécessitent pas de lourds calculs. L’approximation de Padé est l’une des premières méthodes utilisées pour la réduction de modèles linéaires SISO, c’est une approche très simple construite à partir d’un développement de la fonction de transfert

en fractions continues au voisinage de $s = 0$ (on utilise les moments) ou au voisinage de $s = \infty$, on utilise alors dans ce cas les paramètres de Markov, d'où l'apparition de trois formes de Cauer [15]. Le principal inconvénient de l'approximation de Padé est qu'elle ne préserve pas la propriété de stabilité. Pour remédier à cet inconvénient d'autres méthodes sont apparues telle que la méthode de Routh et l'approximation de Padé modifiée. La méthode de Routh proposée par Hutton et Friedland [33] préserve les premiers éléments du tableau de Routh, ce qui garantit la stabilité du système réduit [65], [66], mais il a été constaté que cette méthode a tendance à approximer le comportement du modèle de grande dimension en basses fréquences [61]. L'approximation de Padé modifiée, qui est simplement l'approximation de Padé couplée avec d'autres procédures appropriées pour préserver la stabilité telle que la méthode de Routh-Padé [20], [69]. La plupart des méthodes de cette classe ont été étendues au cas des systèmes MIMO [20], et d'autres nouvelles méthodes sont apparues en combinant entre plusieurs concepts, tel que l'approximation Routh-Padé améliorée qui combine entre la méthode de Routh-Padé et la méthode d'optimisation multi-objective utilisée par Mittal pour la réduction des modèles instables [49].

- 3. Les techniques d'optimisation (réduction optimale) :** Ce sont des méthodes d'optimisation paramétriques séquentielles qui peuvent être utilisées dans le domaine temporel ou fréquentiel, elles sont basées sur la minimisation d'un certain critère qui représente l'erreur entre le modèle réduit et le modèle original. Le modèle d'ordre réduit optimal peut être obtenu en utilisant plusieurs approches numériques. Parmi ces approches, la plus intéressante est celle basée sur la minimisation de la norme de Hankel $|G - G_r|$ (la norme de l'erreur entre le modèle originale G et le modèle réduit G_r) [10], l'inconvénient majeur de ce type de méthodes est la nécessité des algorithmes de résolution d'équations qui s'avère non convergents dans certain cas et des calculs fastidieux et coûteux.

Dans ce travail nous nous intéressons uniquement aux méthodes de réduction les plus utilisées en automatique et aux cas des modèles monovariables. Ainsi pour les méthodes de réduction utilisant la représentation d'état on va traiter la méthode d'agrégation, la méthode des perturbations singulières et la méthode basée sur la réalisation équilibrée. Pour les méthodes de réduction d'une fonction de transfert, l'approximation de Padé (1^{ère} forme de Cauer, 2^{ème} forme de Cauer et 3^{ème} forme de Cauer), sera traitée.

1.2.1 Méthodes basées sur la représentation d'état

a)- méthode d'agrégation

La méthode d'agrégation consiste à substituer au modèle initial un modèle d'ordre réduit par projection du vecteur d'état [64]. Elle est basée sur la mise sous forme modale de la matrice d'état en classant les modes du système par ordre d'importance des valeurs propres, c-à-d ordonner les valeurs propres en regroupant les modes lents qui correspondent aux valeurs propres de faible module et les modes rapides correspondant aux valeurs propres de module élevé. Dans le modèle réduit, on retiendra que les modes correspondant au comportement désiré.

Considérons le modèle initial décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ et $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

Le modèle réduit décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = Hz(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où $F \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $G \in \mathbb{R}^{r \times l}$, $H \in \mathbb{R}^{q \times r}$ et $r < n$.

est un modèle agrégé du modèle initial (1.1) s'il existe une application linéaire (relation d'agrégation) entre les variables d'état z et x [29] :

$$z = Kx \quad K \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad (1.3)$$

K est une matrice de rang plein, appelée matrice d'agrégation.

Ce qui implique alors les relations :

$$\begin{cases} FK = KA \\ G = KB \\ HK = C \end{cases} \quad (1.4)$$

Si on connaît la matrice K , les solutions F, G et H sont données par :

$$\begin{cases} F = KAK^+ \\ G = KB \\ H = CK^+ \end{cases} \quad (1.5)$$

Où K^+ est la matrice pseudo-inverse de K :

$$K^+ = K^T(KK^T)^{-1} \quad (1.6)$$

Remarque 1 *La matrice d'observation H calculée par la relation (1.5) est peu satisfaisante, elle conduit souvent à des résultats très grossiers. Pour cette raison, une autre méthode peut être appliquée, à condition que le système initial ne possède pas de pôles à l'origine. En effet la matrice d'observation H peut être calculée de manière à rendre égaux les gains statiques du système initial et du modèle réduit [15].*

ce qui donne :

$$HF^{-1}G = CA^{-1}B$$

$$H = (CA^{-1}B)(F^{-1}G)^+ \quad (1.7)$$

Calcul de la matrice d'agrégation K [?] :

$$K = T[v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_r]^T \quad (1.8)$$

Où les v_i sont les vecteurs propres de A^T associés aux r valeurs propres dominantes et T est une matrice carrée ($r \times r$) inversible quelconque. Dans le cas particulier où toutes les valeurs propres de A sont distinctes on a :

$$K = T[I_r \quad 0_{r,n-r}]V^{-1} \quad (1.9)$$

Où V est la matrice modale de A et T est une matrice quelconque qu'on peut prendre égale à I_r .

Exemple

Soit un modèle d'ordre 3 décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.001 & 0.005 \\ 0.01 & -0.015 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0.12 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \quad (1.10)$$

Les valeurs propres ordonnées selon leurs parties réelles décroissantes sont :

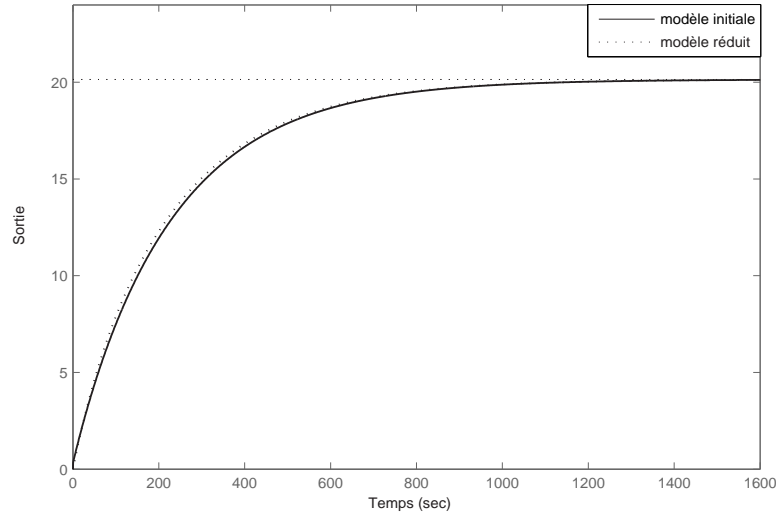


FIG. 1.2: Réponses indicielles du modèle initial et le modèle réduit.

$$\sigma_i = \{-0.0043, -0.0191, -3.0017\}.$$

l'objectif est de conserver les pôles dominants, c-à-d, les deux premières valeurs propres dont le module est faible.

La matrice d'agrégation est dans ce cas : $K = \begin{pmatrix} -1.2101 & -0.4899 & -0.0020 \\ 0.8148 & -0.8746 & 0.0014 \end{pmatrix}$

En utilisant l'équation (1.5) pour le calcul des matrices F et G et l'équation (1.7) pour calculer la matrice H , on obtient le modèle réduit du second ordre défini par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = \begin{pmatrix} -0.0043 & 0 \\ 0 & -0.0191 \end{pmatrix} x_r(t) + \begin{pmatrix} -0.0705 \\ -0.0971 \end{pmatrix} u(t) \\ y_r(t) = \begin{pmatrix} -1.1170 & -0.3457 \end{pmatrix} x_r(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

Les réponses indicielles du modèle initial (1.10) et du modèle réduit (1.11) sont représentées dans la figure (1.2). Cette figure montre que le comportement du modèle réduit obtenu est très proche de celui du modèle initial.

b)- Méthode des perturbations singulières

Les techniques des perturbations singulières sont utilisées lorsque le modèle du processus (la représentation d'état du système) contient des petits paramètres dus à des dynamiques d'ordres de grandeurs différents. Dans ce cas, la dynamique du système peut être décrite par des équations sous la forme dite singulièrement perturbée où apparaît un petit paramètre ε qui permet de normaliser les termes de la matrice d'état [29], sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du \end{cases} \quad (1.12)$$

Où ε est un paramètre de faible valeur ($0 \leq \varepsilon < 1$).

Quand ε tend vers 0 et A_{22} matrice inversible, on obtient le modèle réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u & a) \\ 0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u & b) \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du & c) \end{cases} \quad (1.13)$$

L'équation (1.13b) représente la partie lente (dominante) du système, cette équation se résout en :

$$x_{2s} = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_{1s} + B_2u_s) \quad (1.14)$$

Par substitution de l'équation (1.14) dans les équations (1.13a) et (1.13c) on obtient le modèle réduit lent suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_{1s} + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u_s \\ y_s = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_{1s} + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u_s \end{cases} \quad (1.15)$$

Les techniques des perturbations singulières conduisent à une simplification de structure par découplage ou/et une réduction de dimension lorsque la partie rapide est stable. Dans ce cas, le modèle initial est approché par la partie lente en régime permanent. Le plus délicat dans cette méthode est la mise sous forme singulièrement perturbée, c-à-d la mise en évidence du paramètre ε . En effet, il n'existe pas une formule générale définie a priori mais ce paramètre dépend du système à réduire.

Exemple

Reprenons le modèle d'ordre 3 de l'exemple précédent. Dans ce système la matrice d'état possède des termes d'ordres de grandeur très différents, ces termes peuvent être normalisés en introduisant le paramètre ε . La forme singulièrement perturbée correspondante au modèle décrit par l'équation (1.10) est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.001 & 0.005 \\ 0.01 & -0.015 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0.12 \\ 0.1 \end{pmatrix} u \quad (1.16)$$

Avec $\varepsilon = 0.1$.

Le modèle réduit obtenu en utilisant l'équation (1.13) est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1r} = \begin{pmatrix} -0.0083 & 0.0043 \\ 0.01 & -0.015 \end{pmatrix} x_{1r} + \begin{pmatrix} 0.0097 \\ 0.12 \end{pmatrix} u \\ y_r = \begin{pmatrix} 1.3333 & 0.6667 \end{pmatrix} x_{1r} \end{cases} \quad (1.17)$$

Les courbes de simulation des réponses indicielles du modèle initial et le modèle réduit sont illustrées sur la figure (1.3). Comme le montre cette figure les deux réponses indicielles sont confondues. Le principal inconvénient de cette méthode est la difficulté de faire apparaître le paramètre ε dans certain cas.

c)- Méthode de symétrisation interne (réalisation équilibrée)

Considérons le modèle continu linéaire et invariant dans le temps, supposé commandable, observable et asymptotiquement stable décrit par la représentation d'état minimale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.18)$$

$A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times l}$ et $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$.

Cette méthode fait appel aux grammiens de commandabilité et d'observabilité afin de rechercher les composantes d'états les plus fortement commandable et observable [15], [29]. Pour cela, on définit W_c et W_o correspondant au modèle (1.18).

$$W_c = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (1.19)$$

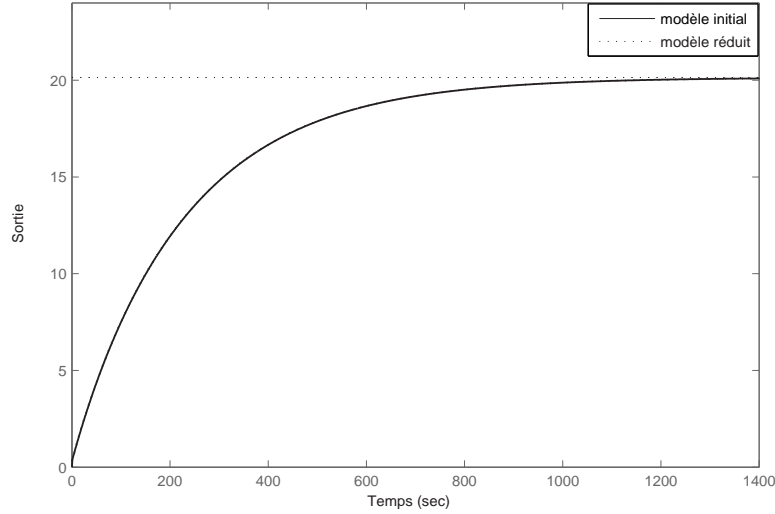


FIG. 1.3: Réponses indicielles du modèle initial et le modèle réduit.

$$W_o = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (1.20)$$

W_c et W_o sont des matrices symétriques définies positives solutions des équations de Lyapunov :

$$\begin{cases} AW_c + W_c A^T = -BB^T \\ A^T W_o + W_o A = -C^T C \end{cases} \quad (1.21)$$

Les deux grammiens sont liés aux propriétés de commandabilité et d'observabilité. En effet, le système décrit par (1.18) est complètement commandable (complètement observable) si et seulement si la matrice de commandabilité W_c (respectivement d'observabilité W_o) est non singulière (invertible). Les valeurs propres de W_c (respectivement W_o) sont interprétées comme des mesures de degré de commandabilité (respectivement d'observabilité) des variables composant le vecteur état x . Autrement dit, mesure l'importance de chaque composant du vecteur état du système par rapport au comportement entrée/sortie de ce dernier.

- Définition de la représentation d'état équilibrée

Une représentation d'état minimale stable est dite équilibrée si et seulement si les grammiens de cette représentation sont égaux à la même matrice diagonale W d'élément $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

$$W_c = W_o = W = \text{diag}(\sigma_i) \quad (1.22)$$

Où les σ_i sont les valeurs singulières du système, qui peuvent être calculées comme suit :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(W_c W_o)} \quad (1.23)$$

- ***Théorème d'existence d'une représentation équilibrée***

Soit le modèle (1.18) décrit par les matrices (A, B, C) . Il existe une transformation T telle que le modèle décrit par les matrices (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) soit équilibré. Ce changement de base permet de diagonaliser le produit $W_c W_o$.

- ***Simplification***

Soit le modèle décrit par les matrices (A, B, C) , supposons qu'un changement de base existe et la représentation d'état équilibrée correspondante est donnée par les matrices (A_b, B_b, C_b) . Supposons que les valeurs singulières de Hankel sont ordonnées de la manière suivante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

La matrice des valeurs singulières est sous la forme :

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Avec

$$W_1 = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_r) \text{ et } W_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1} \dots \sigma_n)$$

c-à-d : W_1 contient les r valeurs singulières les plus grandes (correspond aux états les plus fortement commandables et observables) et W_2 contient les $(n - r)$ valeurs singulières les plus petites. Relativement à cette décomposition, le modèle d'état équilibré (A_b, B_b, C_b) peut être partitionné comme suit :

$$A_b = \begin{pmatrix} A_{b11} & A_{b12} \\ A_{b21} & A_{b22} \end{pmatrix}, B_b = \begin{pmatrix} B_{b1} \\ B_{b2} \end{pmatrix}, C_b = \begin{pmatrix} C_{b1} & C_{b2} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

La simplification du modèle consiste alors à effectuer une troncature des modes du système en éliminant les $(n - r)$ variables d'état les moins significatives vis-à-vis de la commande et l'observation du système initial et se sont les états associées à W_2 . Ainsi le modèle réduit contient la partie la plus commandable et la plus observable du modèle initial. Le modèle réduit est décrit alors par les matrices (A_r, B_r, C_r) , tel que : $A_r = A_{b11}$, $B_r = B_{b1}$ et $C_r = C_{b1}$.

Exemple

Soit le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -12 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Et de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{2s^2 + 9s + 10}{s^3 + 6s^2 + 12s + 7} \quad (1.27)$$

La transformation T permettant de passer à une réalisation équilibrée est :

$$T = \begin{pmatrix} 0.6975 & 0.7873 & 0.9293 \\ 0.1299 & 0.0837 & -0.1666 \\ -0.0586 & 0.0424 & -0.0262 \end{pmatrix}$$

La réalisation équilibrée correspondante est alors :

$$A_b = \begin{pmatrix} -1.4110 & -0.5061 & -0.2377 \\ -0.5061 & -1.2630 & -1.2340 \\ 0.2377 & 1.2340 & -3.3260 \end{pmatrix}, B_b = \begin{pmatrix} 1.3950 \\ 0.2599 \\ -0.1172 \end{pmatrix}, C_b = \begin{pmatrix} 1.3950 & 0.2599 & 0.1172 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Avec les valeurs singulières de Hankel correspondantes : $\sigma_i = \{0.6896, 0.0267, 0.0021\}$.

Le modèle réduit du second ordre a donc pour fonction de transfert :

$$G_2(s) = \frac{2.014s + 2.187}{s^2 + 2.674s + 1.526} \quad (1.29)$$

et le modèle réduit du premier ordre est :

$$G_1(s) = \frac{1.946}{s + 1.411} \quad (1.30)$$

Les courbes de simulation de la figure (1.4) montrent les réponses indicielles du modèle initial et les deux modèles réduits. On voit clairement que le modèle $G_2(s)$ réalise une meilleure approximation (les courbes sont pratiquement confondues) par rapport au modèle $G_1(s)$ du premier ordre, ce qui est tout à fait logique. L'avantage majeur de cette méthode est la conservation de la stabilité du modèle.

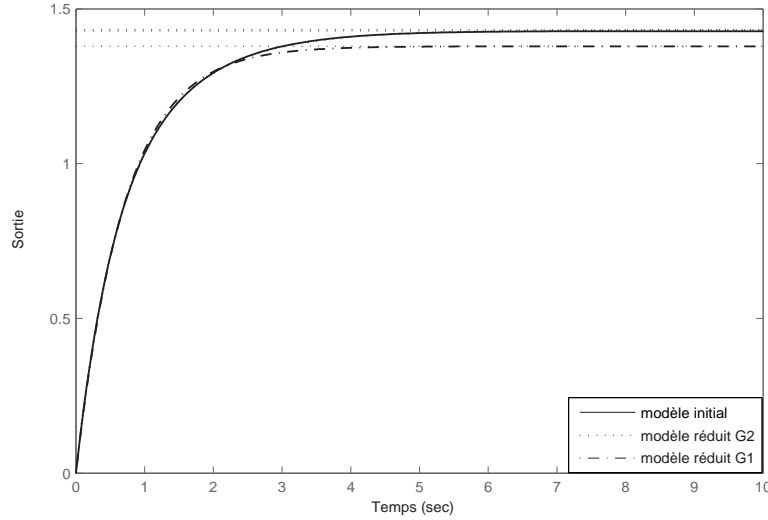


FIG. 1.4: Réponses indicielles du modèle initial et les modèles réduits.

1.2.2 Méthodes basées sur l'approximation de la fonction de transfert

a)- Formes de Cauer [58]

Appelé aussi fractions continues, elle est construite à partir d'un développement de la fonction de transfert en fraction continue au voisinage de $s = 0$ ou $s = \infty$.

Soit un système linéaire monovariante décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{a^n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.31)$$

Les coefficients a_i et b_i étant scalaires et réels.

– 1^{ère} forme de Cauer :

Le développement de $G(s)$ en fractions continues au voisinage de $s = \infty$ est sous la forme

$$G(s) = \frac{1}{h_1 s + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 s + \frac{1}{h_4 + \frac{1}{\vdots}}}}} \quad (1.32)$$

Ce développement existe si $b_{n-1} \neq 0$.

Les coefficients h_i sont les premiers termes de la division polynomiale suivant les puissances décroissantes et le modèle réduit est obtenu simplement par troncature de cette décomposition [16].

- 2^{ème} forme de Caueur : Le développement de $G(s)$ en fractions continues au voisinage de $s = 0$ est sous la forme

$$G(s) = \frac{1}{k_1 + \frac{k_2}{s + \frac{k_3}{k_4 + \frac{1}{s + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad (1.33)$$

Les coefficients k_i , sont les premiers termes de la division polynômiale suivant les puissances croissantes. Nous obtenons le modèle réduit par troncature de ce développement.

- 3^{ème} forme de Caueur :

la troisième forme de Caueur peut être considérée comme l'association de la première et la deuxième forme. Le développement de $G(s)$ en fractions continues est dans ce cas donnée par

$$G(s) = \frac{1}{k_1 + h_1 s + \frac{k_2}{s + h_2 + \frac{1}{k_3 + h_3 s + \frac{1}{\frac{k_4}{s} + h_4 + \dots}}}}} \quad (1.34)$$

Les coefficients k_i et h_i sont les premiers termes de la division polynômiale alternative suivant les puissances croissantes et décroissantes.

Exemple

Reprenons le modèle de l'exemple précédent, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{2s^2 + 9s + 10}{s^3 + 6s^2 + 12s + 7} \quad (1.35)$$

La décomposition de $G(s)$ en utilisant la 1^{ère} forme de Caueur donne :

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{4}{3 + \frac{-9}{2}s + \frac{1}{\frac{-1}{30} + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad (1.36)$$

La fonction de transfert du modèle réduit du second ordre est alors :

$$G_{r1}(s) = \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{4}{3 + \frac{-9}{2}s + \frac{1}{\frac{-1}{30}}}}} = \frac{2s + 13}{s^2 + 8s + 10} \quad (1.37)$$

En utilisant la 2^{ème} forme de Caueur on aura :

$$G(s) = \frac{1}{\frac{7}{10} + \frac{\frac{100}{57}}{s + \frac{3249}{530} + \frac{1}{\frac{2809}{9348} + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad (1.38)$$

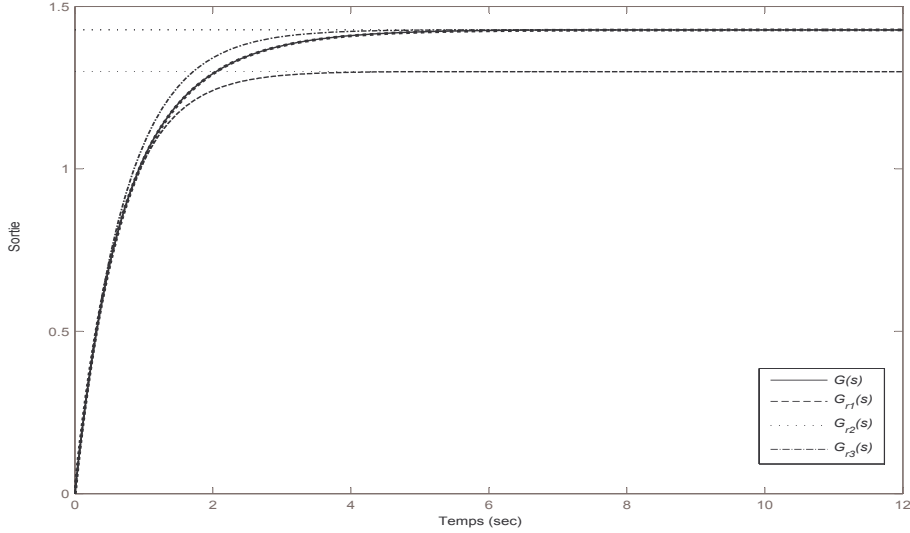


FIG. 1.5: Réponses indicielles du modèle initial et les modèles réduits ($G_{r1}(s)$, $G_{r2}(s)$) et $G_{r3}(s)$.

La fonction de transfert du modèle réduit du second ordre obtenu est :

$$G_{r2}(s) = \frac{1}{\frac{7}{10} + \frac{\frac{100}{57}}{s} + \frac{\frac{3249}{530} + \frac{1}{\frac{2809}{9348}}}{s}} = \frac{6.84s + 10.75}{3.33s^2 + 10.92s + 7.53} \quad (1.39)$$

Le développement suivant la 3^{ème} forme de Caer est :

$$G(s) = \frac{1}{0.7 + \frac{s}{2} + \frac{1}{\frac{4}{s} + 0.8s + \dots}} \quad (1.40)$$

On peut réduire le modèle jusqu'à l'ordre 1 :

$$G_{r3}(s) = \frac{2}{s + 1.4} \quad (1.41)$$

Les réponses indicielles du modèle initial et les deux modèles réduits du second ordre sont représentées sur la figure (1.5).

La première forme de Caer est une approximation de Padé à $s = \infty$, c'est-à-dire que le modèle réduit approxime le comportement du modèle initial en hautes fréquences (régime transitoire), alors que la 2^{ème} forme approxime le comportement du modèle initial aux basses fréquences (régime permanent), comme il est montré sur la figure (1.5).

L'avantage de ces méthodes réside dans la facilité d'obtention du modèle réduit, de plus elles ne nécessitent pas la connaissance des modes dominants (lents) du système. En contre partie, la stabilité du modèle réduit n'est pas garantie même si le modèle initial est stable.

1.3 Simplification de la structure du modèle

1.3.1 Méthodes basées sur la technique d'identification

Les méthodes d'identification peuvent être utilisées afin d'obtenir un modèle simple qui décrit le comportement réel d'un système complexe. Dans ce cas, la loi qui relie l'entrée et la sortie du système (le modèle) est choisit à priori et ses paramètres sont déterminés de telle sorte que le comportement du modèle soit le plus proche possible de celui du système. Deux types de méthodes d'identification peuvent être distingués :

- les méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation de calculateurs.
- les méthodes graphiques qui ne nécessitent aucun calcul complexe.

Les méthodes les plus intéressantes sont les méthodes graphiques basées sur la réponse du système à une entrée donnée. Ces méthodes sont simples et efficaces, elles s'appuient sur l'analyse graphique des courbes expérimentales en quelques points particuliers et ne tiennent pas compte de l'ensemble des mesures. Les plus utilisées sont les méthodes basées sur la réponse indicielle du système, telle que la méthode de Strejc et celle de Broïda qui peuvent être appliquées pour identifier les systèmes ayant un comportement apériodique.

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de Broïda. Cette dernière propose un modèle du premier ordre avec un retard pur, donnée par l'équation (1.42) pour approcher le comportement du système.

$$G_{app}(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(1 + Ts)} \quad (1.42)$$

Son principe consiste à ajuster les paramètres θ et T du modèle, afin que les courbes de réponse de ce dernier et du processus aient deux points communs C_1 et C_2 correspondant respectivement à 28% et 40% de la valeur finale, comme il est illustré sur la figure (1.6).

Les valeurs des paramètres θ et T sont calculés à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} T = 5.5(t_2 - t_1) \\ \theta = 2.8t_1 - 1.8t_2 \end{cases} \quad (1.43)$$

Quand au gain statique K , il est mesuré directement par la valeur finale de la sortie.

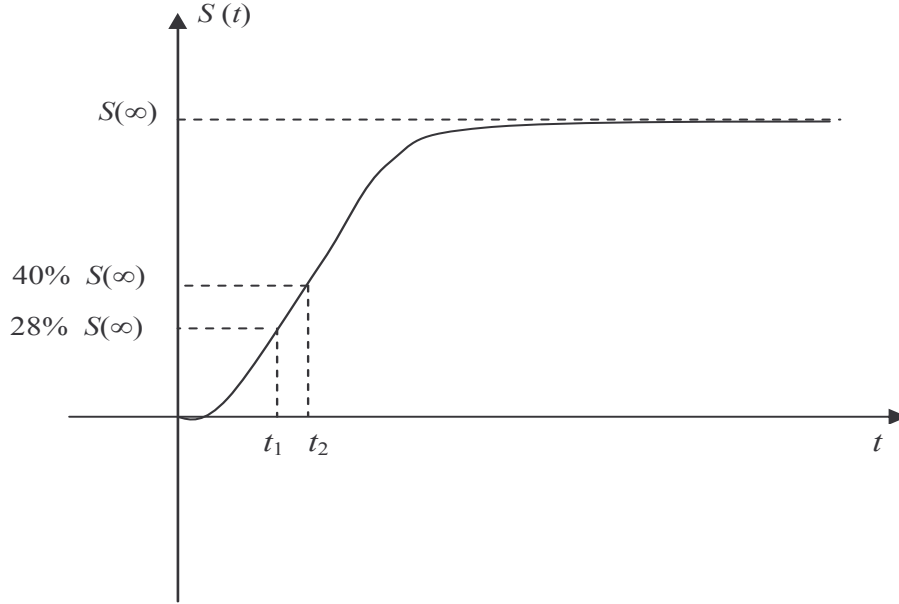


FIG. 1.6: Modèle de Broïda

1.3.2 Méthode d'approximation de Skogestad "règle de la moitié" ou "half rule"

En 2002 Skogestad a proposé une nouvelle méthode intéressante appelée "half rule" ou "la règle de la moitié", elle consiste à approximer les modèles possédant plusieurs constantes de temps par des modèles du premier ou du second ordre à retard [72]. Elle consiste à distribuer la constante de temps la plus grande négligée, en ajoutant la moitié d'elle à la constante de temps la plus petite retenue et l'autre moitié est ajoutée au retard. La démarche à suivre pour cette réduction est comme suit [72] :

Le modèle réduit recherché est un modèle du premier ou du second ordre sous la forme :

$$G_r(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (1.44)$$

On utilisant la formule de Taylor pour l'approximation du retard pur :

$$e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s \implies e^{-\theta s} = \frac{1}{e^{+\theta s}} = \frac{1}{1 + \theta s} \quad (1.45)$$

à partir de cette équation, on peut déduire que :

- Un zéros négatif T_0 d'une fonction de transfert peut être remplacé par un retard pur comme suit :

$$(1 - T_0 s) \approx e^{-T_0 s} \quad (1.46)$$

- La constante de temps τ_0 (la petite constante de temps) peut être remplacée par un retard pur :

$$\frac{1}{1 + \tau_0 s} = e^{-\tau_0 s} \quad (1.47)$$

Soit le modèle initial défini par une fonction de transfert possédant plusieurs zéros et pôles

$$G(s) = \frac{\prod_j (1 - T_{j0}^{inv} s)}{\prod_i (1 + \tau_{i0} s)} e^{-\theta_0 s} \quad (1.48)$$

tel que :

τ_{i0} sont donnés par ordre décroissant et $T_{j0}^{inv} > 0$.

Afin d'approximer le modèle (1.48) par un modèle réduit du 1^{er} ordre sous la forme : $e^{-\theta s}/(1 + \tau_1 s)$, la règle de la moitié peut être appliquée comme suit :

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_{10} + \frac{\tau_{20}}{2} \\ \theta = \theta_0 + \frac{\tau_{20}}{2} + \sum_{i \geq 3} \tau_{i0} + \sum_j T_{j0}^{inv} + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (1.49)$$

Et pour obtenir un modèle réduit du second ordre sous la forme (1.44), la règle de la moitié s'applique comme suit :

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_{10}; \quad \tau_2 = \tau_{20} + \frac{\tau_{30}}{2} \\ \theta = \theta_0 + \frac{\tau_{30}}{2} + \sum_{i \geq 4} \tau_{i0} + \sum_j T_{j0}^{inv} + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (1.50)$$

Dans le cas où le modèle initial contient des zéros positifs, la règle de la moitié peut être appliquée en utilisant les approximations suivantes :

$$\frac{1 + T_0 s}{1 + \tau_0 s} \approx \begin{cases} \frac{T_0}{\tau_0} & \text{for } T_0 \geq \tau_0 \geq \theta \\ \frac{T_0}{\theta} & \text{for } T_0 \geq \theta \geq \tau_0 \\ 1 & \text{for } \theta \geq T_0 \geq \tau_0 \\ \frac{T_0}{\tau_0} & \text{for } \tau_0 \geq T_0 \geq 5\theta \\ \frac{\tilde{\tau}_0/\tau_0}{(\tilde{\tau}_0 - \tau_0)s + 1} & \text{for } \tilde{\tau}_0 = \min(\tau_0, 5\theta) \geq T_0 \end{cases} \quad (1.51)$$

Exemple

Soit le système décrit par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{(8s + 1)}{(10s + 1)(s + 1)(0.2s + 1)^2} \quad (1.52)$$

en appliquant la règle T_2 on aura :

$$\frac{(8s+1)}{(10s+1)} \approx \frac{(8s)}{10s} = 0.8$$

et en négligeant la constante de temps 0.2

$$\theta = \frac{0.2}{2} + 0.2 = 0.3$$

$$\tau_1 = \frac{0.2}{2} + 1 = 1.1$$

le modèle d'équation (1.52) peut être approximé par un modèle $G_r(s)$ du premier ordre

$$G_r(s) = \frac{0.8e^{-0.3s}}{(1.1s + 1)} \quad (1.53)$$

1.3.3 Compression de modèles entiers de grande dimension par des modèles non entiers

La compression de modèles entiers signifie l'approximation du modèle entier de grande dimension contenant un nombre très grand de paramètres par un modèle fractionnaire qui est de dimension infini mais contenant que deux paramètres τ et α et éventuellement un retard pur. Le modèle de grande dimension peut être approximé par trois types de modèle non entier.

- Un modèle non entier implicite de fonction de transfert : $\frac{1}{(1+\tau s)^\alpha}$.
- Un modèle non entier oscillatoire de fonction de transfert : $\frac{1}{1+(\tau s)^\alpha}$ avec $1 < \alpha < 2$.
- Un modèle non entier apériodique de fonction de transfert : $\frac{1}{1+(\tau s)^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

L'utilisation du modèle compressé permet de synthétiser des contrôleurs fractionnaires ayant des structures simples. Dans ce qui suit, nous présentons uniquement la méthode de compression d'un modèle entier de grande dimension par un modèle non entier apériodique. Pour plus de détails voir [47].

Considérons la fonction de transfert d'ordre entier définie par des pôles p_i et leurs résidus correspondants r_i , comme suit :

$$G(s) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (1.54)$$

Ce modèle peut être approximé par un modèle non entier apériodique de dimension 1 de la forme :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (\tau s)^\alpha} \quad (1.55)$$

Le modèle non entier peut être obtenu en compressant un maximum de pôles du modèle entier et cela en respectant les étapes suivantes :

- Créer deux vecteurs dont les éléments sont les valeurs absolues des pôles réels de $G(s)$ et les résidus correspondants r_i , triés dans l'ordre croissant.

$$pole = [p_1, p_2, \dots, p_N] \quad p_1 < p_2 < \dots < p_N$$

$$residus = [r_1, r_2, \dots, r_N] \quad r_1 < r_2 < \dots < r_N$$

- Afin d’avoir une première sélection des pôles qui peuvent être compressés, on doit extraire du vecteur *pole* toutes les combinaisons ayant un rapport entre deux pôles successifs relativement constant. Pour chaque combinaison et pour chaque paire de pôles successifs (p_i, p_{i+1}) calculer la constante λ_i qui caractérise la qualité de l’approximation.

$$\lambda_i = \frac{p_{i+1}}{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, N_p - 1 \quad (1.56)$$

N_p est le nombre de pôles dans la combinaison considérée. λ prend finalement la valeur moyenne des λ_i qui caractérise la récursivité de tous les pôles.

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{N_p-1} \lambda_i}{N_p - 1} \quad (1.57)$$

- Pour chaque combinaison et pour chaque pôle, calculer α_i solution de l’équation :

$$r_i = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1 - \alpha)\pi]}{\cosh \left[\alpha \log\left(\frac{r_i}{\tau}\right) - \cos[(1 - \alpha)\pi] \right]} \right] \quad (1.58)$$

r_i est le résidus du pôle considéré $\frac{1}{\tau}$ est le premier pôle. la valeur finale de α correspond à la valeur moyenne des α_i

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N_p-1} \alpha_i}{N_p - 1} \quad (1.59)$$

- Calculer σ_m l’écart type des ordres non entiers α_i qui mesure la récursivité de la distribution des singularités :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_p} |\alpha_i - \alpha|}{N_p - 1}} \quad (1.60)$$

la combinaison à retenir est celle qui a un maximum de pôles et ayant la plus petite valeur de σ_m .

le modèle non entier de l’équation (1.55) contient uniquement les singularités compressées, pour tenir compte du reste des singularités, le modèle entier est approximé par le modèle non entier :

$$G_{app} = \frac{1}{1 + (\tau s)^\alpha} G_R(s) \quad (1.61)$$

$G_R(s)$ contient les singularités non compressées.

Pour illustrer cette méthode, considérons un système décrit par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{s^5 + 19.06s^4 + 135s^3 + 444.5s^2 + 682.5s + 392.9}{s^6 + 21.72s^5 + 173.1s^4 + 631.4s^3 + 1075s^2 + 792.1s + 196.1} \quad (1.62)$$

La fonction de transfert $G(s)$ doit d'abord être écrite sous la forme pôles-résidus selon l'équation (1.54). $G(s)$ contient six pôles qui sont tous réels, ce qui donne

$$G(s) = \frac{0.0255}{1 + \frac{s}{8.4189}} + \frac{0.0205}{1 + \frac{s}{5.7259}} + \frac{0.0152}{1 + \frac{s}{4.0844}} - \frac{0.0081}{1 + \frac{s}{1.9901}} - \frac{0.7082}{1 + \frac{s}{1.0004}} + \frac{2.6584}{1 + \frac{s}{0.5003}} \quad (1.63)$$

Les vecteurs contenant les pôles ordonnés dans l'ordre croissant et les résidus correspondants sont donnés par :

$$\begin{aligned} pole &= [0.5003 \quad 1.0004 \quad 1.9901 \quad 4.0844 \quad 5.7259 \quad 8.4189] \\ residu &= [2.6584 \quad -0.7082 \quad -0.0081 \quad 0.0152 \quad 0.0205 \quad 0.0255] \end{aligned}$$

La combinaison contenant le maximum de pôles, tel que le rapport entre deux pôles successifs est relativement constant, vérifiant ainsi l'équation (1.56) est :

$$Comb = [0.5003 \quad 1.0004 \quad 1.9901 \quad 4.0844 \quad 8.4189]$$

En utilisant les équations (1.57) permettant de calculer le paramètre λ , l'équation non linéaire (1.58) et l'équation (1.60) permettant de calculer le paramètre α et l'écart type σ , on obtient les valeurs numériques suivantes :

$$\lambda = 2.0256, \alpha = 0.7109 \text{ et } \sigma = 7.410^{-9}.$$

La constante de temps τ est l'inverse du premier pôle du vecteur *pole*, quant au gain du modèle non entier est tout simplement le gain du modèle entier. Ainsi le modèle non entier explicite apériodique qui approxime $G(s)$ est donné par :

$$G_r(s) = \frac{2.01}{1 + (2s)^{0.71}} \quad (1.64)$$

Les réponses indicielle du modèle entier de grande dimension et le modèle non entier apériodique sont montrées sur le figure (1.7).

1.4 Conclusion

Les méthodes de réduction de modèles sont nombreuses et le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes n'est pas facile, sachant qu'une technique particulière peut être bien adaptée à un problème donné et ne pas l'être pour un autre. Ainsi le choix peut être effectué selon la nature ainsi que le type de description du système (représentation d'état, fonction de transfert...).

Dans le prochain chapitre, quelques méthodes de simplification de modèles présentées dans ce chapitre vont être utilisées afin d'obtenir des contrôleurs fractionnaires d'ordre réduit pour la commande des systèmes de grande dimension.

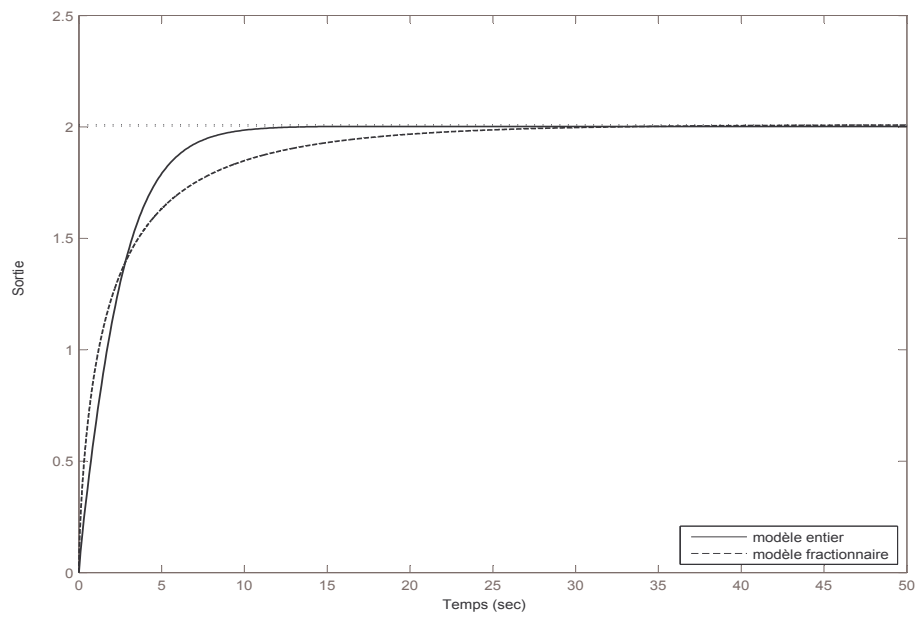


FIG. 1.7: Réponses indicielles du modèle entier initial et du modèle fractionnaire.

Chapitre 2

Synthèse de contrôleurs FOF-PID pour la commande des systèmes de grande dimension

2.1 Introduction

La synthèse de lois de commande pour les systèmes complexes mène généralement à des contrôleurs complexes et d'ordre élevé, ce qui n'est pas souhaité en pratique. En effet, la conception et la réalisation de ces contrôleurs s'avère compliquées d'un point de vue pratique et très coûteuse d'un point de vue économique. Par conséquent, il est plus judicieux de synthétiser des contrôleurs de structures simples et d'ordre réduit en faisant appel aux méthodes de simplification de modèles. Néanmoins, la simplification où la réduction du modèle va écartier encore plus le modèle obtenu de la réalité du processus à commander. Pour cette raison, le choix de la méthode de synthèse est important, elle doit être robuste afin de prendre en compte les défaillances du modèle et permet d'obtenir un contrôleur d'ordre réduit tout en garantissant la fiabilité et la robustesse de la commande. La commande par modèle interne (IMC) est l'une des structures de commande qui permet d'atteindre ces objectifs.

Récemment toute l'attention est accordée à la commande d'ordre non entier qui est également une commande connue par sa robustesse. Dans notre travail, nous nous intéressons à la commande des systèmes d'ordre entier en utilisant des contrôleurs d'ordre fractionnaire. Nous étudions, plus précisément, un nouveau type de contrôleurs appelé "contrôleur PID à filtre fractionnaire" (en

anglais appelé "FOF-PID controller") [11, 12] qui est apparue en combinant entre la commande IMC et la commande CRONE [56] pour la commande des systèmes d'ordre entier.

Dans la première partie de ce chapitre, on présente quelques notions sur la simulation des systèmes fractionnaires en utilisant les méthodes d'approximation de l'opérateur d'intégration/dérivation fractionnaire. Pour cela, deux méthodes d'approximations vont être présentées, la méthode de Charef [22] et celle d'Outaloup [55]. Nous définissons également le principe de la commande CRONE basé sur la fonction idéale de Bode qui présente des caractéristiques très intéressantes de point de vue robustesse. La fonction résultante en boucle fermée sera utilisée comme modèle de référence dans la synthèse du contrôleur fractionnaire. Pour cette raison, une étude détaillée de cette fonction dans différents domaines est faite afin de pouvoir choisir convenablement ses paramètres.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse de contrôleurs d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dont le modèle est de grande dimension. La commande IMC va être généralisée au cas fractionnaire pour la synthèse du contrôleur FOF-PID qui possède une structure particulière. Il s'agit d'un régulateur PID d'ordre entier classique en série avec un filtre fractionnaire. Le comportement fractionnaire du contrôleur est imposé par la fonction idéale de Bode en boucle fermée.

Enfin, pour obtenir des contrôleurs fractionnaires d'ordre réduit pour la commande des systèmes entiers dont les modèles sont de grande dimension, trois démarches différentes vont être suivies :

- Réduire d'abord le modèle du système à commander ensuite calculer le contrôleur fractionnaire en se basant sur le modèle réduit.
- Calculer d'abord le contrôleur en utilisant le modèle de grande dimension ensuite réduire ou simplifier la structure du contrôleur obtenu.
- Approximer le modèle de grande dimension par un modèle d'ordre non entier qui va être utilisé pour le calcul du contrôleur fractionnaire.

2.2 Simulation des contrôleurs fractionnaires

Les contrôleurs fractionnaires sont de dimension infinie à cause de l'ordre non entier de l'opérateur d'intégration et/ou de dérivation qu'ils contiennent. La simulation ou l'implémentation d'une loi de commande fractionnaire se repose donc sur l'approximation de ces opérateurs fractionnaires par des transferts rationnels de dimension finie. Pour cela, plusieurs méthodes numériques et de formules analytiques ont été développées. Comme méthodes analytiques, plusieurs méthodes d'approximation du dérivateur généralisé ont été proposées, les plus connues sont celles de Charef et d'Oustaloup, qui consistent à approximer le dérivateur généralisé par une fonction de transfert d'ordre entier de dimension finie dont les zéros et les pôles sont obtenus au moyen de simples calculs géométriques sur une bande de fréquences donnée. Dans ce travail, La méthode d'approximation d'Oustaloup sera utilisée pour l'implémentation de nos lois de commande, c'est pourquoi nous la présenterons en détail dans la suite de ce paragraphe, les lecteurs désireux obtenir plus de détails sur la méthode d'approximation de Charef, peuvent consulter la référence [28].

2.2.1 Méthode d'approximation de Charef

La méthode de Charef a été introduite pour représenter et analyser le comportement des systèmes fractals représentés par une transmittance de la forme [22] :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad (2.1)$$

Charef propose d'approximer la fonction de transfert de l'équation (2.1) par une fonction rationnelle de la forme :

$$H(s) \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.2)$$

En utilisant les formules de synthèse suivantes :

$$\begin{cases} p_0 = p_T \sqrt{b} \\ p_i = (ab)^i p_0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, N \\ z_i = (ab)^i a p_0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

où

a et b sont deux constantes données par : $a = 10^{\varepsilon/10(1-\alpha)}$; $b = 10^{\varepsilon/10\alpha}$

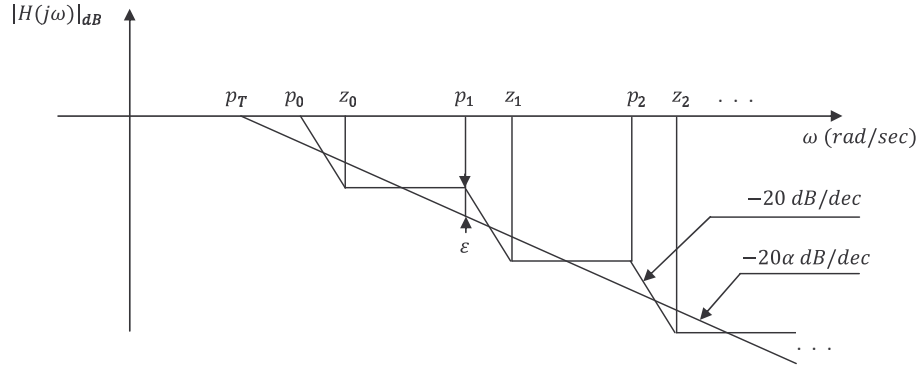


FIG. 2.1: Diagramme asymptotique de Bode de $H(s)$ et son approximation.

ε est l'erreur d'approximation qui représente l'écart maximal entre la ligne d'approximation en zigzag et la droite de pente $-20\alpha \text{ dB/dec}$ comme le montre la figure (2.1).

z_i et p_i sont les zéros et les pôles de la fonction de transfert d'ordre entier et p_0 est le premier pôle.

Le nombre de pôles et de zéros est lié à la bande passante souhaitée, il est donné par :

$$N = E \left[\frac{\log \frac{\omega_{max}}{p_0}}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (2.4)$$

$E(\cdot)$ étant la partie entière.

La précision de cette approximation dépend de ε .

2.2.2 Méthode d'approximation d'Oustaloup

La méthode d'Oustaloup consiste à réduire d'abord le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application. Cela permet d'obtenir un dérivateur généralisé borné en fréquences qui est ensuite approximé par un modèle d'ordre entier constitué d'un nombre fini de zéros et de pôles, comme la méthode de Charef, distribués récursivement sur cette bande de fréquences.

Soit la fonction de transfert d'un dérivateur généralisé :

$$D_{gen}(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad (2.5)$$

ω_c étant la fréquence au gain unité ou fréquence de coupure, α est l'ordre non entier.

Après une troncature sur un intervalle fréquentiel réduit $[\omega_b, \omega_h]$, centré géométriquement sur ω_c ,

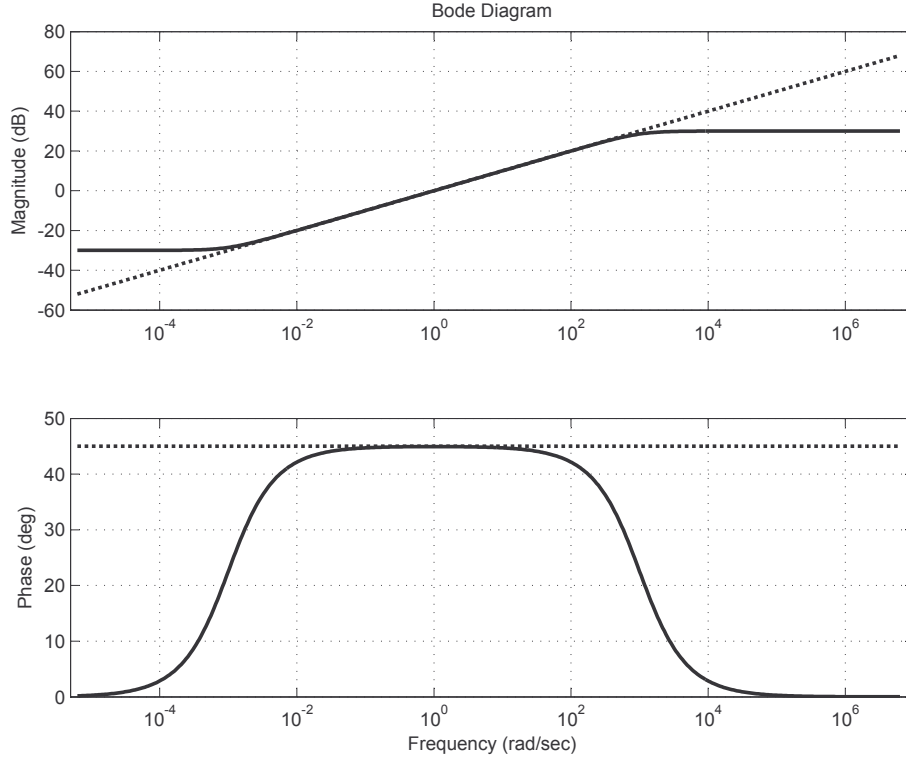


FIG. 2.2: Diagramme de Bode de $D_{gen}(s)$ en trait pointillé et $D_{borné}(s)$ en trait continu.

on obtient le transfert fractionnaire borné en fréquences donné par :

$$D_{borné}(s) = \left[C_0 \frac{1 + s/\omega_b}{1 + s/\omega_h} \right]^\alpha \quad (2.6)$$

avec

$$C_0 = \frac{\omega_b}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \quad (2.7)$$

La figure (2.2) représente à titre d'exemple, les diagrammes de Bode du dérivateur généralisé $D_{gen}(s) = \left(\frac{s}{1}\right)^{0.5}$ (en trait pointillé) et ceux du dérivateur généralisé borné en fréquences correspondant $D_{borné}(s) = \left[0.0316 \frac{1+s/0.001}{1+s/1000}\right]^{0.5}$ en trait continu).

Ce dérivateur généralisé résultant doit être approximé par une fonction de transfert d'ordre entier, constituée de zéros et de pôles de la forme :

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h}\right)^\alpha \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (2.8)$$

avec

$$D(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s)$$

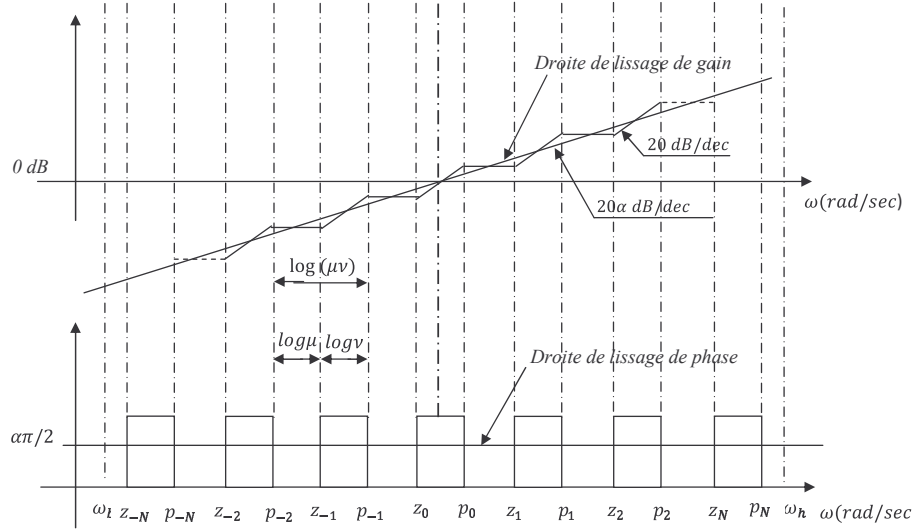


FIG. 2.3: Diagramme asymptotique de Bode de $D_{gen}(s)$ et $D_N(s)$ pour $\alpha \in]0, 1[$.

N est le nombre de cellules utilisées dans l'approximation, les pôles et les zéros sont distribués récursivement, comme suit :

$$\begin{cases} \frac{p_i}{z_i} = \mu > 0 \\ \frac{z_{i+1}}{p_i} = \nu \\ \frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \mu\nu > 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

les rapports μ et ν sont appelés "facteurs récursifs" $\mu\nu$ est un rapport constant entre deux zéros ou deux pôles consécutifs. L'approximation se fait par un lissage des diagrammes asymptotiques de Bode de $D_{borné}(s)$ (voir figure (2.3)).

Oustaloup propose dans [55] de fixer ce rapport initialement à 5 et de calculer le nombre total des fréquences transitionnelles à l'aide de l'équation :

$$2N + 1 = \text{arrondi} \left[\frac{\log(\omega_h/\omega_b)}{\log((\mu\nu)_{initial})} + 0.5 \right] \quad (2.10)$$

Connaissant les fréquences ω_h et ω_b et le nombre de cellules N , les zéros et les pôles peuvent être calculés comme suit :

$$\begin{cases} z_i = (\omega_h/\omega_b)^{\frac{i+N+1/2-\alpha/2}{2N+1}} \omega_b \\ p_i = (\omega_h/\omega_b)^{\frac{i+N+1/2+\alpha/2}{2N+1}} \omega_b \end{cases} \quad (2.11)$$

ainsi, disposant de zéros z_i , de pôles p_i , de C_0 et de N , la fonction de transfert d'ordre entier peut être obtenue en utilisant l'équation (2.6)

2.3 Principe de la commande CRONE

La commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) est une commande qui assure la robustesse au sens plus large et plus sévère. En effet, elle permet de garantir une robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des incertitudes du gain statique du modèle du procédé à commander, c'est-à-dire maintenir la performance dynamique fréquentielle ou temporelle qui mesure le degré de stabilité, c'est la robustesse en performance et en stabilité [32]. Rappelons que le degré de stabilité est caractérisé par la distance minimale de la réponse fréquentielle de la boucle ouverte par rapport au point critique $(-1, 0)$. Le principe de la commande CRONE est basé sur la fonction idéale de Bode qui est présentée dans ce qui suit.

2.3.1 Fonction idéale de Bode

En 1945 Bode a proposé une fonction de transfert idéale, permettant d'assurer des performances invariantes vis-à-vis des variations du gain lorsqu'elle décrit la boucle ouverte. Cette fonction de transfert a la forme [14] :

$$L(s) = \left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\alpha \quad 1 < \alpha < 2 \quad (2.12)$$

qui représente simplement la transmittance d'un intégrateur d'ordre non entier compris entre 1 et 2 et de fréquence de coupure ω_c . Elle est appelée fonction de transfert idéale car elle possède des propriétés importantes. En effet, sa phase est insensible à la variation du gain. La réponse en fréquence de cette fonction de transfert est :

$$L(j\omega) = \left(\frac{\omega_c}{j\omega}\right)^\alpha \quad (2.13)$$

dont le module en dB est donné par

$$|L(j\omega)|_{db} = -20\alpha \log\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \quad (2.14)$$

et la phase est :

$$\varphi(L(j\omega)) = -\alpha \frac{\pi}{2} \quad (2.15)$$

Le module de $L(s)$ est une droite de pente $-20\alpha \text{ dB/dec}$, et sa phase est une droite horizontale à $-\alpha\pi/2$, comme il est illustré sur la figure (2.4)). Cette figure montre que le changement de la valeur du gain statique se traduit par une translation verticale dans le diagramme d'amplitude de Bode, ce qui entraîne le changement de la pulsation de coupure ω_c également. Par contre, le

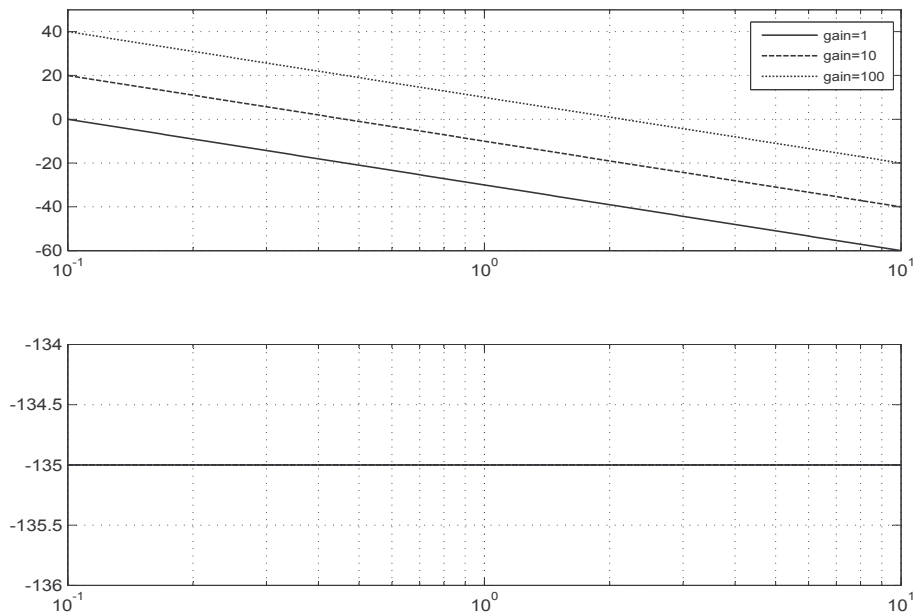


FIG. 2.4: Tracé de Bode de $L(s)$ avec des gains différents.

diagramme de phase reste constant insensible à ces changements. Le comportement dynamique d'un système en boucle fermée dépend de son comportement en boucle ouverte. De ce fait, la boucle fermée résultante, dans le cadre d'une configuration typique à retour unitaire préserve la caractéristique de robustesse de la fonction idéale de Bode. Pour cette raison, ce système est considéré comme un modèle de référence par plusieurs stratégies de commande.

Afin de pouvoir fixer les paramètres de ce modèle de référence en fonction de la dynamique désirée, une étude de la fonction idéale de Bode dans différents domaines est nécessaire.

2.3.2 Comportement de la fonction idéale de Bode dans le domaine fréquentiel

Le degré de stabilité de la commande en boucle fermée dans le domaine fréquentiel est caractérisé par la distance au point critique qui peut se mesurer par les marges de stabilité (la marge de gain, la marge de phase et marge de module) de la boucle ouverte. Le degré de stabilité peut également se mesurer par le facteur de résonance en régulation et le facteur de résonance en asservissement en se basant sur la fonction de sensibilité $S(s)$ et la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$. La fonction de sensibilité $S(s)$, également appelée transmittance en régulation (relative à une perturbation sur la sortie et au bruit qui caractérise la fonction de régulation) et la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$, également appelée transmittance en asservissement

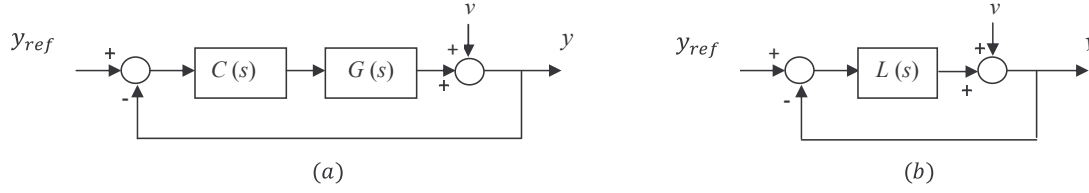


FIG. 2.5: Schéma bloc d'une régulation en boucle fermée.

(la transmittance relative à la consigne qui caractérise la fonction d'asservissement), cette dénomination provient du fait que $S + T = 1$. Étant donné que le comportement en boucle ouverte autour de la fréquence de gain unitaire détermine le comportement dynamique en boucle fermée, nous utilisons la fonction idéale de Bode en boucle ouverte pour définir le comportement désiré de $T(s)$ ou $S(s)$ comme le montre la figure (2.5), où v est l'entrée de perturbation, y_{ref} et y sont respectivement la consigne et la sortie du système en boucle fermée.

Les fonctions de sensibilité $S(s)$ et $T(s)$ sont définies par :

$$T(s) = \left[\frac{y(s)}{y_{ref}(s)} \right]_{v(s)=0} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + (s/\omega_c)^\alpha} \quad (2.16)$$

$$S(s) = \left[\frac{y(s)}{v(s)} \right]_{y_{ref}(s)=0} = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{(s/\omega_c)^\alpha}{1 + (s/\omega_c)^\alpha} \quad (2.17)$$

dont les réponses en fréquences sont données par :

$$T(j\omega) = \frac{\omega_c^\alpha}{\omega_c^\alpha + (j\omega)^\alpha} = \frac{\omega_c^\alpha}{(\omega^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + \omega_c^\alpha) + j\omega^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})} \quad (2.18)$$

$$S(j\omega) = \frac{(j\omega)^\alpha}{\omega_c^\alpha + (j\omega)^\alpha} = \frac{\omega^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + j\omega^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})}{(\omega^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + \omega_c^\alpha) + j\omega^\alpha \sin(\alpha\frac{\pi}{2})} \quad (2.19)$$

Les gains de $T(j\omega)$ et $S(j\omega)$ sont données par :

$$|T(\omega)| = \frac{\omega_c^\alpha}{\sqrt{\omega^{2\alpha} + 2\omega_c^\alpha \omega^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + \omega_c^{2\alpha}}} \quad (2.20)$$

$$|S(\omega)| = \frac{\omega^\alpha}{\sqrt{\omega^{2\alpha} + 2\omega_c^\alpha \omega^\alpha \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) + \omega_c^{2\alpha}}} \quad (2.21)$$

En asservissement, le gain atteint son maximum à la fréquence de résonance ω_{ra} qui représente la fréquence pour laquelle la dérivée de $|T(j\omega)|$ est nulle, son expression est donnée par :

$$\omega_{ra} = \omega_c \left(-\cos \alpha \frac{\pi}{2} \right)^{1/\alpha} \quad (2.22)$$

En régulation, le gain atteint son maximum à la fréquence de résonance ω_{rr} pour laquelle la dérivée de $|S(j\omega)|$ est nulle, son expression est donnée par :

$$\omega_{rr} = \omega_c \left(-\cos \alpha \frac{\pi}{2} \right)^{1/\alpha} \quad (2.23)$$

Ainsi les facteurs de résonance en asservissement et en régulation sont :

$$Q_{ra} = |T(j\omega_{ra})| = \frac{1}{\sin \alpha \frac{\pi}{2}} \quad (2.24)$$

$$Q_{rr} = |S(j\omega_{rr})| = \frac{1}{\sin \alpha \frac{\pi}{2}} \quad (2.25)$$

On constate que les deux facteurs de résonance Q_{ra} et Q_{rr} sont identiques, et dépendent uniquement de l'ordre non entier α d'où la notion de robustesse aux variations du gain. Sachant que le facteur de résonance en asservissement Q_{ra} est significatif du premier dépassement réduit de la réponse indicielle, il réalise un contour d'isodépassement dans le plan de Nichols (contour d'amplitude de Nichols) comme il est illustré dans la figure (2.6) [32]. Le facteur de régulation Q_{rr} est significatif de l'amortissement de son mode oscillatoire, dans le plan de Nyquist cela correspond à un cercle centré sur le point critique $(-1, 0)$ mesurant ainsi la distance à ce point qui est la marge de module M_m , comme est montré sur la figure (2.7). Le système en boucle fermée présente les propriétés de robustesse en performance et en stabilité dite propriété d'isodépassement ou d'iso-amortissement.

à partir des équations (2.22) et (2.23) on peut exprimer la fréquence de coupure ω_c en fonction de ω_{ra} et ω_{rr} , elle est donnée par :

$$\omega_c = (\omega_{ra}\omega_{rr})^{1/2} \quad (2.26)$$

2.3.3 Comportement de la fonction idéale de Bode dans le plan complexe

La fonction de transfert d'un système du second ordre peut s'écrire :

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.27)$$

Ce modèle présente un comportement oscillatoire amorti si l'amortissement ξ est strictement inférieur à 1. Dans ce cas, la fonction de transfert $G(s)$ possède deux pôles complexes conjugués donnés par :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.28)$$

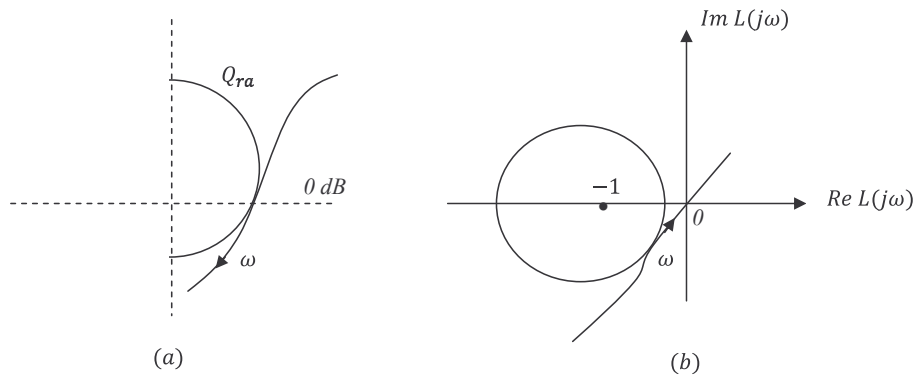


FIG. 2.6: Facteur de résonance Q_{ra} dans le plan de Nichols et sa transposition dans le plan de Nyquist.

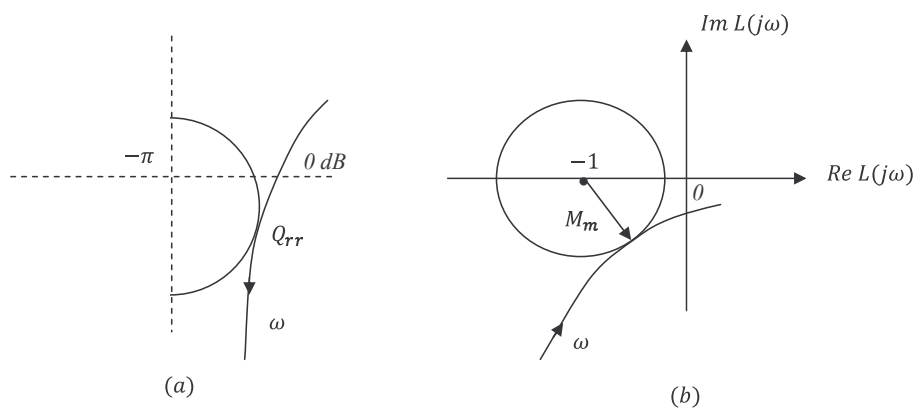


FIG. 2.7: Facteur de résonance Q_{rr} dans le plan de Nichols et sa transposition dans le plan de Nyquist avec la marge de module.

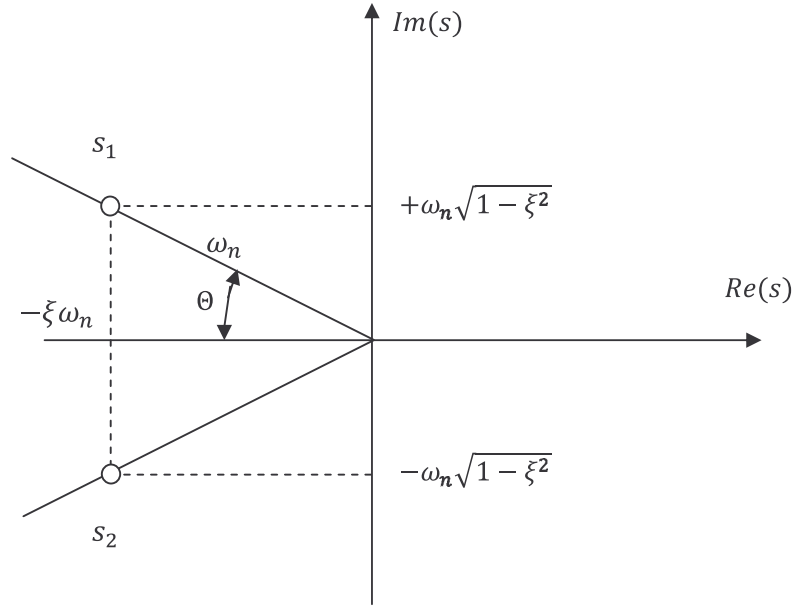


FIG. 2.8: Pôles d'un modèle de second ordre amorti.

qui peuvent être présentés dans le plan complexe comme le montre la figure (2.8).

Considérons maintenant la fonction de transfert en boucle fermée de la fonction idéale de Bode donnée par :

$$H(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\alpha}{1 + \left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\alpha} \quad (2.29)$$

qui peut être mise sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \quad (2.30)$$

Les pôles du système en boucle fermée sont les racines de l'équation caractéristique $1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha = 0$, ils sont donnés par :

$$s_{1,2} = \omega_c e^{\pm j \frac{\pi}{\alpha}} = \omega_c \left(\cos \frac{\pi}{\alpha} \pm j \sin \frac{\pi}{\alpha} \right) \quad (2.31)$$

Les pôles s_1 et s_2 sont complexes conjugués et forment un angle au centre 2Θ avec Θ donnée par :

$$\Theta = (\pi - \pi/\alpha) \quad (2.32)$$

Comme il est illustré sur la figure (2.9), lorsque ω_c varie, les pôles se déplacent le long des demi-droites avec un angle constant fixé par l'ordre α . La figure (2.10) montre les réponses indicielles de la fonction idéale de Bode en boucle fermée pour $\alpha = 1.5$ et différentes valeurs de ω_c . Cette figure montre que la réponse indicielle est similaire à celle d'un modèle du second ordre amorti,

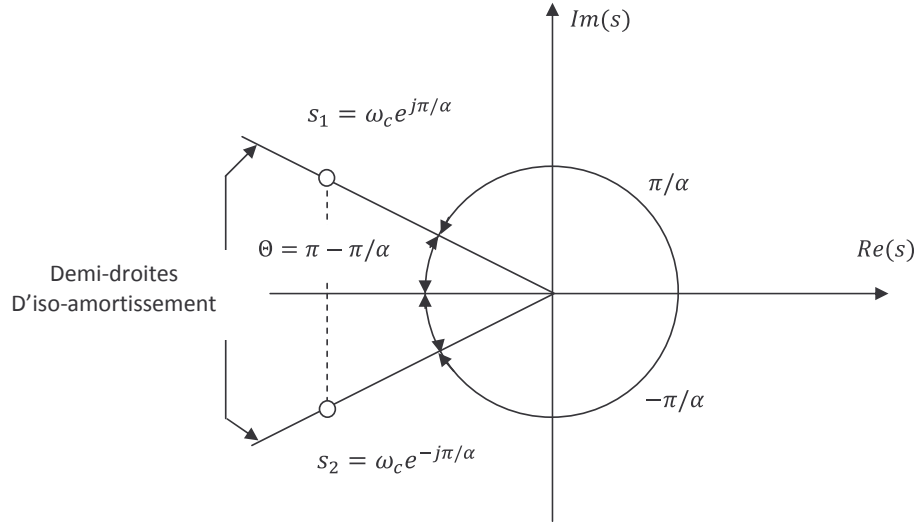


FIG. 2.9: Pôles de la fonction de transfert en boucle fermée de la fonction idéale de Bode.

tel que, pour une valeur de α fixe, le dépassement de la réponse en boucle fermée est constant quelque soit la valeur de ω_c . c'est ce qu'on appelle la propriété d'iso-amortissement ou d'iso-dépassement.

Par analogie avec le système de second ordre et en se basant sur les expressions des pôles s_1 et s_2 et le schéma de la figure (2.9), les expressions des paramètres caractéristiques peuvent être déduites comme suit :

- Fréquence naturelle :

$$\omega_n = |s_{1,2}| = \omega_c \quad (2.33)$$

- Facteur d'amortissement :

$$\xi = \cos \Theta = -\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \quad (2.34)$$

- Fréquence propre :

$$\omega_p = \omega_c \sin \Theta = \omega_c \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.35)$$

ces expressions montrent que le facteur d'amortissement ξ est exclusivement lié à l'ordre de dérivation non entier α , illustrant ainsi la notion de robustesse du mode oscillatoire.

2.3.4 Comportement de la fonction idéale de Bode dans le domaine temporel

Etudier un modèle dans le domaine temporel consiste généralement à étudier sa réponse à un échelon unitaire. Le degré de stabilité se mesure dans ce cas par le dépassement et le facteur

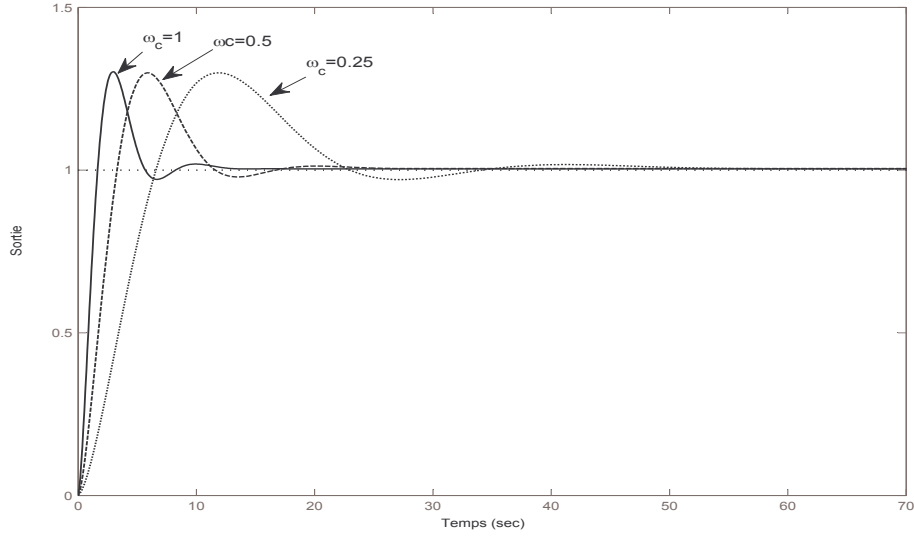


FIG. 2.10: Réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermée pour différentes valeurs de ω_c .

d'amortissement. La réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermée est donnée par [7] :

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \frac{1}{p} \right] = 1 - E_\alpha(-(\omega_c t)^\alpha) \quad (2.36)$$

Où $L^{-1}(\cdot)$ est la transformée de Laplace inverse et $E_\alpha(\cdot)$ est la fonction Mittag-Leffler qui est une généralisation de la fonction exponentielle au cas non entier dont l'expression est définie par Gorenflo et Mainardi dans [78] pour le cas $1 < \alpha < 2$ par :

$$E_\alpha(-t^\alpha) = f_\alpha(t) + g_\alpha(t) \quad (2.37)$$

Où

$$f_\alpha(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1} \sin(\alpha\pi)}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1} e^{-st} ds \quad \text{et} \quad g_\alpha(t) = \frac{2}{\alpha} e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right]$$

Pour un gain unité ($\omega_c = 1$), la réponse indicielle est donnée par :

$$y(t) = 1 + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-1} \sin(\alpha\pi)}{s^{2\alpha} + 2s^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1} e^{-st} ds}_{\sum^\infty \text{ pôles stables aperiodiques}} - \underbrace{\frac{2}{\alpha} e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right]}_{\text{mode oscillatoire}} \quad (2.38)$$

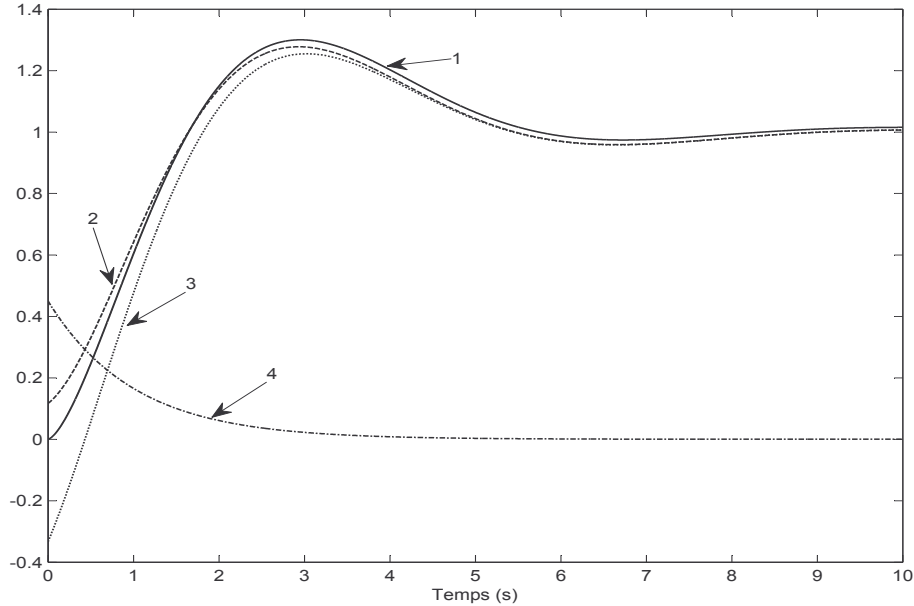


FIG. 2.11: Réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermée : 1) $y(t)$, 2) $\hat{y}(t)$, 3) $\hat{y}(t) - f_\alpha(t)$, 4) $f_\alpha(t)$

Les pôles stables aperiodiques qui caractérisent la fonction $f_\alpha(t)$ sont rapides et influencent peu l'allure générale de la réponse temporelle. Comme le montre la courbe (4) de la figure (2.11), on constate que cette fonction intervient au voisinage de $t = 0$. Dans [78] les auteurs proposent d'approximer la fonction $f_\alpha(t)$ par $\hat{f}_\alpha(t) = 0.9(2 - \alpha)e^{-t}$. L'approximation de la réponse indicielle $y(t)$ ainsi obtenue est donnée par l'équation (2.39), tel que l'erreur quadratique moyenne d'approximation entre $y(t)$ et $\hat{y}(t)$ est de 10^{-3} et l'erreur maximale est de 0.1 à $t = 0$. Les tracés des deux réponses $y(t)$ et $\hat{y}(t)$ sont représentés respectivement par les courbes (1) et (2) de la figure (2.11).

$$y(\hat{t}) \simeq 1 + 0.9(2 - \alpha)e^{-t} - \frac{2}{\alpha}e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \quad (2.39)$$

C'est cette équation qui est utilisée pour déterminer les expressions des caractéristiques temporelles de la réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermée, à savoir : le dépassement (M_p), le temps de réponse (t_r), le temps de premier dépassement t_p et le temps de montée (t_m).

De l'équation (2.38) on constate que le temps du premier dépassement peut être obtenu à partir de la partie "mode oscillatoire" de la réponse indicielle. Il correspond au temps où la dérivée de

la partie oscillatoire est nulle :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{2}{\alpha} e^{t \cos(\pi/\alpha)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \right]_{t=t_p} = 0 \quad (2.40)$$

L'expression du temps du premier dépassement obtenu par la résolution de cette équation en tenant compte de la périodicité des fonctions trigonométriques est donné par [78] :

$$t_p = \frac{\tan^{-1} (1/\tan(\pi/\alpha)) + \pi}{\omega_c \sin(\pi/\alpha)} \quad (2.41)$$

On note que dans le domaine temporel ω_c n'est qu'un scalaire, avec ($t = \omega_c t_p$).

L'expression du dépassement peut être obtenue en calculant simplement $\hat{y}(t_p)$, mais dans ce cas on aboutit à une expression complexe. D'autres auteurs tels Manabe [45] et Barbosa [7] ont proposé d'autres méthodes qui aboutissent à une expression donnant la valeur du dépassement, plus simple. Il suffit de tracer les valeurs numériques du dépassement pour différentes valeurs de α , comme le montre la figure (2.12), ensuite la courbe ainsi obtenue est approximée par un polynôme d'ordre 2 en utilisant la fonction "cftool" de Matlab. Le polynôme obtenu est donné par l'équation (2.42) avec une somme de l'erreur quadratique moyenne d'approximation (MSE) de 2×10^{-4} .

$$M_p \approx 0.7577\alpha^2 - 1.297\alpha + 0.5387 \quad (2.42)$$

La même procédure est appliquée pour avoir l'expression du temps de réponse, en traçant $\omega_c t_r(2\%)$ et $\omega_c t_r(5\%)$ pour différentes valeurs de α , les deux courbes obtenues sont approximées et donnent lieu aux expressions suivantes [7] :

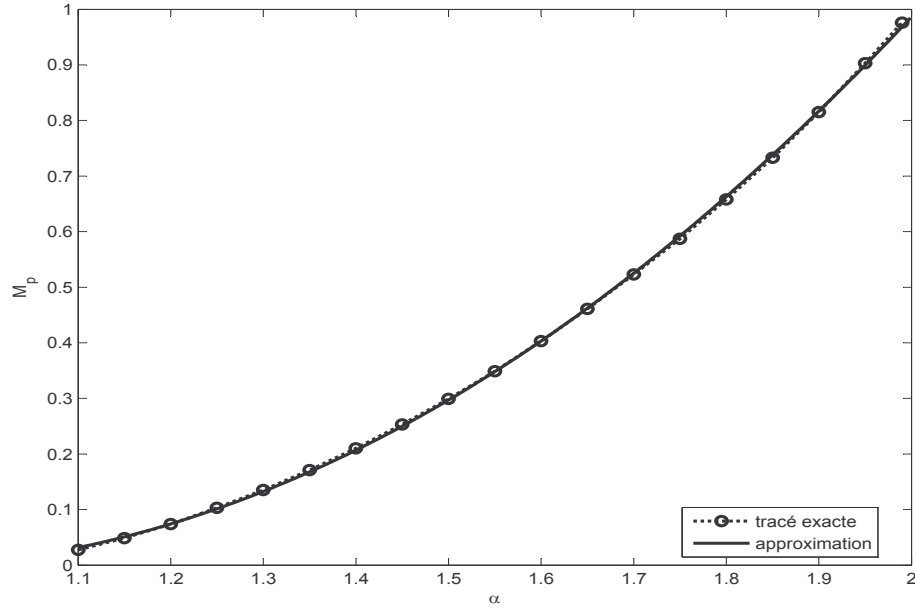
$$T_r(2\%) \approx \frac{4}{\cos \left(\pi - \frac{\pi}{\alpha} \right) \tau_c^{\frac{-1}{\alpha}}}, \quad 1.39 < \alpha < 2 \quad (2.43)$$

$$T_r(5\%) \approx \frac{3}{\cos \left(\pi - \frac{\pi}{\alpha} \right) \tau_c^{\frac{-1}{\alpha}}}, \quad 1.44 < \alpha < 2 \quad (2.44)$$

et le temps de montée est donnée par

$$T_m \approx \frac{0.131(\alpha + 1.157)^2}{(\alpha - 0.724) \tau_c^{\frac{-1}{\alpha}}} \quad 1 < \alpha < 2 \quad (2.45)$$

L'objectif dans ce chapitre étant de synthétiser une loi de commande robuste par rapport aux

FIG. 2.12: Dépassement M_p en fonction de α

variations du gain, en garantissant des marges de stabilité, alors l'idée c'est de synthétiser un contrôleur fractionnaire en imposant à la boucle fermée un comportement similaire à celui de la fonction idéale de Bode en boucle fermée et cela en choisissant cette dernière comme modèle de référence. Néanmoins, afin de faciliter la synthèse du contrôleur nous utilisons une nouvelle écriture de la fonction idéale de Bode. L'objectif de ce choix est d'isoler le dérivateur généralisé non entier afin de faciliter par la suite la séparation entre la partie entière et non entière du contrôleur obtenu. Alors la fonction idéale de Bode de l'équation (2.12) sera écrite sous la forme :

$$L(s) = \left(\frac{\omega_c}{s}\right)^\alpha = \frac{1}{\tau_c s^{\lambda+1}} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (2.46)$$

où

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c^{\lambda+1}} \text{ et } \lambda = \alpha - 1$$

la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$G_{ref}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\lambda+1}} \quad (2.47)$$

Cette nouvelle écriture utilise les paramètres λ et τ_c . Le problème est alors de trouver un moyen de choisir ou fixer ces deux paramètres ?

2.4 Choix des paramètres du modèle de référence

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, le comportement du modèle de référence de l'équation (2.47) est similaire à celui d'un modèle du second ordre sinusoïdal amorti avec un dépassement constant pour n'importe quelle valeur de τ_c . Le dépassement de sa réponse indicielle dépend du paramètre λ et la rapidité de la réponse dépend de la valeur de la constante de temps τ_c . Ces deux paramètres peuvent être fixés comme suit :

2.4.1 Choix des paramètres du modèle de référence dans le domaine fréquentiel

- Si les performances de la boucle fermée sont données par la marges de phase ϕ_m (en radian) et la fréquence de coupure ω_c , la valeur de λ et τ_c peuvent être déduites comme suit :

La marge de phase ϕ_m est donnée par :

$$\phi_m = \pi + \varphi(L(j\omega)) \quad (2.48)$$

En remplaçant $\varphi(L(j\omega))$ par son expression donnée par l'équation (2.15) et en tenant compte de la relation $\alpha = \lambda + 1$, on obtient :

$$\lambda = \frac{\pi - \phi_m}{\pi/2} - 1 \quad (2.49)$$

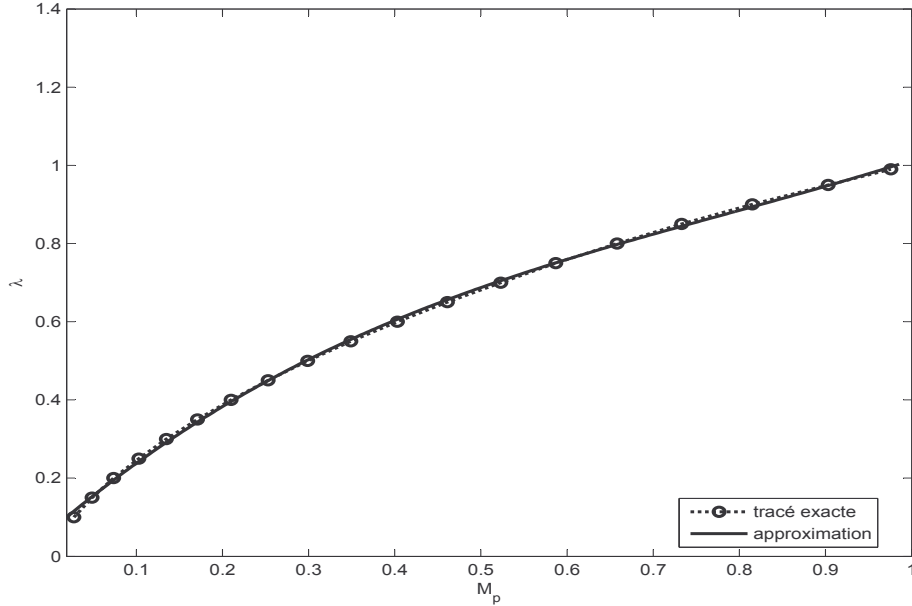
La valeur de τ_c peut être déduite facilement de l'équation (2.46), elle est donnée par :

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_c^{\lambda+1}} \quad (2.50)$$

- Si les caractéristiques de la boucle fermée sont définies par le facteur de résonance en régulation Q_{rr} ou le facteur de résonance en asservissement Q_{ra} et les fréquences de résonances ω_{rr} et ω_{rt} , la valeur de λ peut être déduite à partir des équations (2.24) ou (2.25) et la valeur de τ_c peut être calculée en utilisant les équations (2.26) et (2.50) comme suit :

$$\lambda = \frac{2 \arcsin\left(\frac{1}{Q_{rr}}\right)}{\pi} - 1 \quad (2.51)$$

$$\tau_c = \frac{1}{(\omega_{rt}\omega_{rr})^{\frac{\lambda+1}{2}}} \quad (2.52)$$

FIG. 2.13: Evolution de λ en fonction du dépassement M_p

2.4.2 Choix des paramètres du modèle de référence dans le domaine temporel

Si les performances désirées sont spécifiées dans le domaine temporel le paramètre λ peut être déduit approximativement à partir du dépassement M_p en approximant la courbe représentative de λ en fonction de M_p par un polynôme d'ordre 3 en utilisant la fonction de Matlab "cftool" (figure (2.13)). Le polynôme obtenu est donné par l'équation (2.53) avec une erreur quadratique moyenne de 6×10^{-4} :

$$\lambda \approx 0.7003M_p^3 - 1.646M_p^2 + 1.894M_p + 0.06422 \quad (2.53)$$

La valeur approximative de τ_c peut être déduite à partir des équations (2.43), (2.44) en fonction de la valeur de temps de réponse T_s :

$$\tau_c \approx \left(\frac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{\lambda+1}\right) t_r(2\%)}{4} \right)^{\lambda+1}, \quad 0.39 < \lambda < 1 \quad (2.54)$$

$$\tau_c \approx \left(\frac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{\lambda+1}\right) t_r(5\%)}{3} \right)^{\lambda+1}, \quad 0.44 < \lambda < 1 \quad (2.55)$$

On note que ces deux équations ne donnent pas la valeur de τ_c pour les valeurs de λ inférieur à 0.39, dans ce cas nous proposons d'utiliser la méthode essai/erreur où bien d'utiliser l'équation

(2.45) qui donne la valeur de τ_c en fonction du temps de monté comme suit :

$$\tau_c \approx \left(\frac{t_m(\lambda + 0.276)}{0.131(\lambda + 2.157)^2} \right)^{\lambda+1} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (2.56)$$

2.4.3 Choix des paramètres du modèle de référence dans le plan complexe

Si le comportement désiré est défini par la position des pôles s_1, s_2 dans le plan complexe alors les paramètres du modèle de référence peuvent être obtenus comme suit :

Le paramètre λ peut être déduit de l'équation (2.32), en tenant compte du fait que $\alpha = \lambda + 1$:

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi - \Theta} - 1 \quad (2.57)$$

Θ est l'angle formé par les pôles s_1 et s_2 avec l'axe des réels. τ_c peut être calculé en utilisant les équations (2.33), (2.50) par

$$\tau_c = \frac{1}{|s_1, s_2|^{\lambda+1}} \quad (2.58)$$

Remarque 2 *L'étude de la fonction idéale de Bode en boucle fermée a révélé que son comportement dans différents domaines est similaire à celui d'un modèle du second ordre entier amorti. Par analogie entre les deux modèles, nous avons trouvé des expressions qui permettent d'obtenir pour tout modèle entier du second ordre son modèle fractionnaire équivalent et vice versa, dans différents domaines (fréquentiel, temporel et dans le plan complexe). Cependant, il faut noter que cette équivalence entre les deux modèles n'est pas parfaite. La question qui se pose alors est : si l'équivalence de ces deux modèles est imposée dans un domaine donné est ce que les caractéristiques des deux modèles restent équivalentes dans un autre domaine ?*

Pour montrer ce fait, prenons un modèle du second ordre entier, avec $\omega_n = 5$ et plusieurs valeurs de l'amortissement $\xi = [0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7]$, donc on aura en tout 6 modèles avec des caractéristiques différentes.

Calculons pour chaque modèle entier le modèle fractionnaire correspondant, en utilisant les caractéristiques fréquentielles (la marge de phase et la fréquence de coupure), en utilisant les caractéristiques temporelles (le dépassement et le temps de réponse) et en utilisant la position des pôles dans le plan complexe. Ensuite, nous relevons les caractéristiques des modèles entiers et les modèles fractionnaires correspondants, sachant que le dérivateur non entier est approximé en utilisant l'approximation d'Oustaloup, dans la bande de fréquences $[10^{-3}, 10^3]$ en utilisant 15 cellules. Les caractéristiques relevées sont regroupées dans les tableaux (2.1), (2.2) et (2.3).

TAB. 2.1: Caractéristiques du modèle fractionnaire obtenus en utilisant les caractéristiques fréquentielles du modèle de second ordre.

| Modèle de $2^{\text{ème}}$ ordre $\omega_n = 0.5$ | Caractéristiques | | Modèle fractionnaire | Caractéristiques | |
|--|------------------------------|-----------------------------------|---|--------------------------------|-----------------------------------|
| | temporelles | fréquentielles | | fréquentielles | temporelles |
| $\zeta = 0.7$ | $M_p = 4.6$ $t_r = 1.2$ | $\phi_m = 65.2$ $G_m = \infty$ | $\lambda = 0.276$ $\tau_c = 0.223$ | $M_p = 11.8$ $t_r = 2.28$ | $\phi_m = 65.4$ $G_m = \infty$ |
| $\zeta = 0.6$ | $M_p = 9.48$ $t_r = 1.19$ | $\phi_m = 59.2$ $G_m = \infty$ | $\lambda = 0.3424$ $\tau_c = 0.1806$ | $M_p = 16.4$ $t_r = 1.88$ | $\phi_m = 59.5$ $G_m = \infty$ |
| $\zeta = 0.5$ | $M_p = 16.3$ $t_r = 1.62$ | $\phi_m = 51.8$ $G_m = \infty$ | $\lambda = 0.4241$ $\tau_c = 0.1424$ | $M_p = 22.8$ $t_r = 1.51$ | $\phi_m = 52.2$ $G_m = \infty$ |
| $\zeta = 0.4$ | $M_p = 20.5$ $t_r = 1.67$ | $\phi_m = 47.6$ $G_m = \infty$ | $\lambda = 0.4708$ $\tau_c = 0.1253$ | $M_p = 26.9$ $t_r = 1.1.37$ | $\phi_m = 48$ $G_m = \infty$ |
| $\zeta = 0.3$ | $M_p = 30.9$ $t_r = 2.2$ | $\phi_m = 38.3$ $G_m = \infty$ | $\lambda = 0.5742$ $\tau_c = 0.0961$ | $M_p = 37.1$ $t_r = 2.43$ | $\phi_m = 38.8$ $G_m = \infty$ |
| $\zeta = 0.2$ | $M_p = 52.6$ $t_r = 3.92$ | $\phi_m = 22.6$ $G_m = \infty$ | $\lambda = 0.7489$ $\tau_c = 0.0643$ | $M_p = 58.1$ $t_r = 3.51$ | $\phi_m = 23.1$ $G_m = \infty$ |

Enfin, en utilisant ces tableaux, nous traçons les caractéristiques M_p, t_r et ϕ_m des deux modèles en fonction de l'amortissement ξ , comme il est illustré sur la figure (2.14).

Les figures (a), (b) et (c) montrent que lorsque on utilise les caractéristiques fréquentielles du modèle entier pour calculer les paramètres du modèle fractionnaire, on obtient un modèle qui a les mêmes caractéristiques fréquentielles que celles du modèle entier tel que l'erreur maximale de la marge de phase est de 0.5° , mais les caractéristiques temporelles ne sont pas exactement les mêmes. En effet, l'erreur sur le dépassement augmente en augmentant l'amortissement, jusqu'à atteindre l'erreur maximale de 7.2% , de même, le temps de réponse du modèle fractionnaire s'éloigne de celui du modèle entier pour des valeurs de $\xi > 0.55$.

Sur les figures (d), (e) et (f), le modèle fractionnaire est calculé en utilisant les caractéristiques temporelles du modèle entier. Cela a permis d'obtenir un modèle fractionnaire possédant les mêmes caractéristiques temporelles que celles du modèle entier avec une erreur maximale de dépassement de 0.6% , et les temps de réponses sont proches pour les valeurs de $\xi < 0.5$. Cependant,

TAB. 2.2: Caractéristiques du modèle fractionnaire obtenu en utilisant les caractéristiques temporelles du modèle de second ordre.

| Modèle de fractionnaire | Caractéristiques | |
|---|------------------------------|-----------------------------------|
| | temporelles | fréquentielles |
| $\lambda = 0.1374$ $\tau_c = 0.2338$ | $M_p = 4.77$ $t_r = 2.02$ | $\phi_m = 76.9$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.2296$ $\tau_c = 0.1799$ | $M_p = 9$ $t_r = 1.9$ | $\phi_m = 69.6$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.3322$ $\tau_c = 0.1895$ | $M_p = 15.7$ $t_r = 1.96$ | $\phi_m = 60.4$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.3894$ $\tau_c = 0.1587$ | $M_p = 20$ $t_r = 1.66$ | $\phi_m = 55.3$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.513$ $\tau_c = 0.1352$ | $M_p = 30.9$ $t_r = 2$ | $\phi_m = 44.2$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.707$ $\tau_c = 0.101$ | $M_p = 52.7$ $t_r = 3.5$ | $\phi_m = 26.8$ $G_m = \infty$ |

TAB. 2.3: Caractéristiques du modèle fractionnaire obtenu en utilisant la position des pôles dans le plan complexe.

| Modèle de fractionnaire | Caractéristiques | |
|---|------------------------------|-----------------------------------|
| | temporelles | fréquentielles |
| $\lambda = 0.339$ $\tau_c = 0.1159$ | $M_p = 16.1$ $t_r = 1.35$ | $\phi_m = 59.9$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.4188$ $\tau_c = 0.1019$ | $M_p = 22.3$ $t_r = 1.2$ | $\phi_m = 52.7$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.5$ $\tau_c = 0.0894$ | $M_p = 29.6$ $t_r = 1.46$ | $\phi_m = 45.5$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.4518$ $\tau_c = 0.0836$ | $M_p = 33.7$ $t_r = 1.55$ | $\phi_m = 41.7$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.6391$ $\tau_c = 0.0727$ | $M_p = 43.1$ $t_r = 2.21$ | $\phi_m = 33.9$ $G_m = \infty$ |
| $\lambda = 0.7728$ $\tau_c = 0.0577$ | $M_p = 61.2$ $t_r = 3.87$ | $\phi_m = 21$ $G_m = \infty$ |

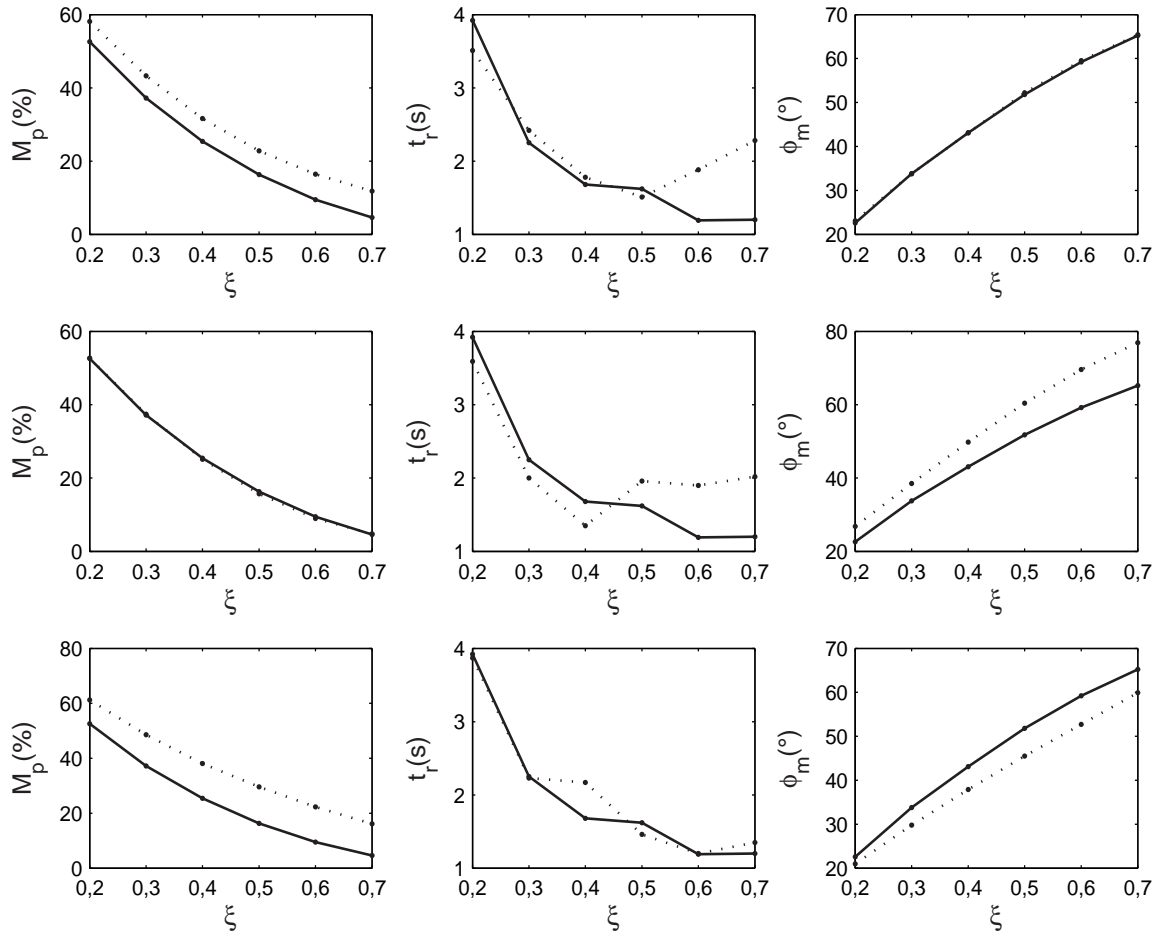


FIG. 2.14: Caractéristiques du modèle d'ordre entier en trait plein et caractéristiques du modèle fractionnaire en pointillé : a-b-c) en utilisant les caractéristiques fréquentielles. d-e-f) en utilisant les caractéristiques temporelles. g-h-i) en utilisant la position des pôles.

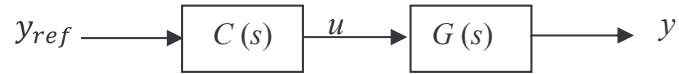


FIG. 2.15: Schéma bloc d'une régulation en boucle ouverte.

les marges de phase sont différentes de celles du modèle entier, tel que l'erreur minimale de la marge de phase est de 11.7° .

les figures (g), (h) et (i), concernant le plan complexe, les temps de réponses sont très proches l'erreur maximale est de 0.15 s, alors que le dépassement et la marge de phase sont très loin de celles du modèle entier, tel que l'erreur maximale de dépassement est de 13.3 %, l'erreur maximale de phase 6.5° .

En conclusion, on peut dire qu'une égalité parfaite entre les performances du modèle fractionnaire et celle du modèle entier n'est pas vraie. Pour cette raison, nous recommandant de déterminer les paramètres du modèle fractionnaire selon les objectifs fixés par le cahier des charges, c'est-à-dire, d'utiliser les caractéristiques fréquentielles pour déterminer le modèle fractionnaire si les objectifs sont fixés dans le domaine fréquentiel, et d'utiliser les caractéristiques temporelles si les objectifs sont imposés dans le domaine temporel.

2.5 Commande par modèle interne

Considérons la structure de commande en boucle ouverte de la figure (2.15), qui représente le schéma bloc de la commande en boucle ouverte. Le régulateur $C(s)$ est utilisé pour commander le procédé de fonction de transfert $G(s)$. Soit $G_m(s)$ le modèle du procédé qu'on suppose inversible. Dans ce cas, le régulateur $C(s)$ peut être calculé facilement ; c'est l'inverse du modèle $G_m(s)$.

$$C(s) = G_m(s)^{-1} \quad (2.59)$$

Si le modèle $G_m(s)$ est parfait, c'est-à-dire $G_m(s) = G(s)$, la sortie y sera égale à l'entrée de référence y_{ref} , c'est le cas idéal.

L'avantage de la synthèse des régulateurs en boucle ouverte réside dans sa simplicité et elle ne pose pas de problèmes de stabilité. En effet, si le procédé et le régulateur sont tous les deux stables, le système globale est stable [63]. Néanmoins, la commande en boucle ouverte devient inutile lorsque le système est soumis à une perturbation ou bien lorsque $G_m(s) \neq G(s)$ (ce qui est souvent le cas). Dans ce cas on doit utiliser le schéma de commande en boucle fermée de la

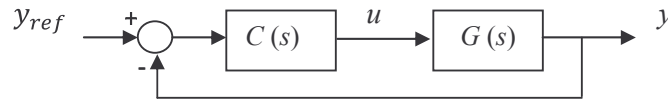


FIG. 2.16: Schéma bloc d'une régulation en boucle fermée.

figure (2.16).

La fonction de transfert du système en boucle fermée est dans ce cas donnée par :

$$H(s) = \frac{y(s)}{y_{ref}(s)} = \frac{C(s)G_m(s)}{1 + C(s)G_m(s)} \quad (2.60)$$

Soit $G_{ref}(s)$ la fonction de transfert désirée à imposer à la boucle fermée. L'expression du régulateur est alors donnée par :

$$C(s) = \frac{1}{G_m(s)} \frac{G_{ref}(s)}{1 - G_{ref}(s)} \quad (2.61)$$

Cette méthode de synthèse directe est très intéressante car elle permet toujours d'aboutir à un régulateur qui permet d'obtenir les performances imposées par le cahier des charges. Elle est efficace et aboutit à des régulateurs simples (PI, PID) dans le cas où le modèle G_m est simple (premier ordre, deuxième ordre) et la fonction de transfert désirée est aussi simple. Par contre, dans le cas où le modèle du système à commander est complexe ou lorsque la fonction de transfert en boucle fermée désirée est complexe cette méthode est inutilisable car elle peut donner lieu à une structure du régulateur complexe qu'on ne peut pas mettre sous forme d'un régulateur PID, ou non réalisable (degré du numérateur supérieur au degré de dénominateur) ou bien instable.

La structure de commande par modèle interne (IMC) introduite par Garcia et Morari [34] englobe les avantages de la commande en boucle fermée et la commande en boucle ouverte. En effet, l'IMC est une commande en boucle fermée, c'est à dire robuste et précise puisqu'elle prend compte des perturbations et les erreurs de modélisation, en même temps, elle utilise la simplicité de la commande en boucle ouverte pour le calcul du contrôleur. En plus, en utilisant cette approche on aboutit facilement à un contrôleur (PID) offrant de bonnes performances dans le cas des systèmes simples et des systèmes complexes. La figure (2.17) montre le schéma bloc d'une commande classique et le schéma bloc d'une commande par modèle interne.

Dans la structure de commande par modèle interne, le régulateur est celui encadré en pointillés. Il est principalement constitué du régulateur proprement dit $C_{IMC}(s)$ et du modèle $G_m(s)$

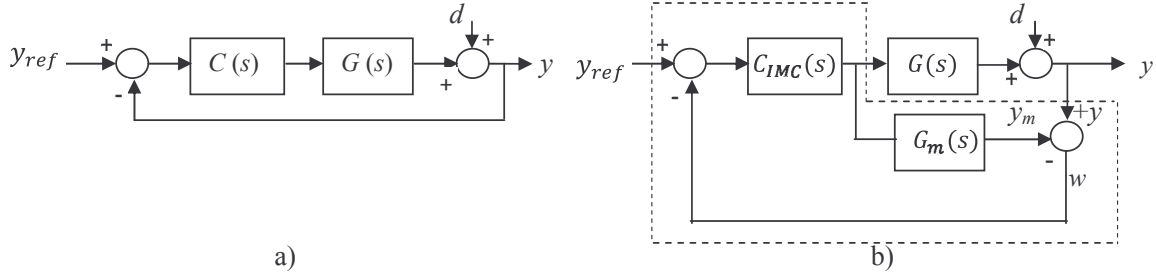


FIG. 2.17: Schéma bloc d'une régulation en boucle fermée : a)- régulation classique. b)- régulation par modèle interne

du procédé à commander dont le modèle exacte est $G(s)$. Le modèle $G_m(s)$ est obtenu par modélisation simplifiée ou par identification, il correspond à une image approchée de la fonction de transfert réelle $G(s)$ du système. Dans cette structure de commande ce n'est plus l'erreur entre la grandeur à commander $y(s)$ et l'entrée de référence $y_{ref}(s)$ qui est utilisée par le régulateur $C_{IMC}(s)$ pour calculer la loi de commande mais la grandeur $\varepsilon(s) = y_{ref}(s) - w(s)$, où $w(s)$ représente l'erreur d'approximation du système à commander par le modèle $G_m(s)$, ce qui permet à cette structure de prendre en compte des erreurs de modélisation. Ainsi, dans le cas parfait où $G_m(s) = G(s)$ cette structure de commande devient simplement une structure de commande en boucle ouverte.

En utilisant le schéma de la figure(2.17)-b), la sortie $y(s)$ peut être exprimée en fonction de $y_{ref}(s)$ et $d(s)$ par

$$y(s) = \frac{G(s)C_{IMC}(s)}{1 + C_{IMC}(s)[G(s) - G_m(s)]}y_{ref}(s) + \frac{1 - C_{IMC}(s)G_m(s)}{1 + C_{IMC}(s)[G(s) - G_m(s)]}d(s) \quad (2.62)$$

Dans le cas d'une commande en boucle fermée classique montrée sur la figure (2.17)-a) la sortie $y(s)$ est donnée par

$$y(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}y_{ref}(s) + \frac{1}{1 + G(s)C(s)}d(s) \quad (2.63)$$

A partir des deux relations (2.62) et (2.63), on peut établir la relation entre le régulateur classique $C(s)$ et le régulateur à modèle interne $C_{IMC}(s)$.

$$\begin{cases} C(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - G_m(s)C_{IMC}(s)} & (a) \\ C_{IMC}(s) = \frac{C(s)}{1 + G_m(s)C(s)} & (b) \end{cases} \quad (2.64)$$

Les relations de l'équation (2.64) permettent de passer de la commande à modèle interne à la commande classique et vice et versa.

Puisque la structure de commande à modèle interne tient compte des erreurs de modélisation lors de la synthèse du contrôleur $C_{IMC}(s)$, on suppose que le modèle est parfait c'est-à-dire $G(s) = G_m(s)$. L'expression de la sortie (équation (2.62)) devient alors :

$$y(s) = G(s)C_{IMC}(s)y_{ref}(s) + (1 - G_m(s)C_{IMC}(s))d(s) \quad (2.65)$$

Dans ce cas, le système peut être vu comme fonctionnant en boucle ouverte. Par conséquent, la stabilité de l'ensemble régulateur plus procédé ne pose pas de problème.

La synthèse du contrôleur $C_{IMC}(s)$ est simple, elle utilise le principe de la commande en boucle ouverte. Néanmoins, à cause de l'inversion du modèle, lorsque $G_m(s)$ possède un retard ou des zéros instables il est d'abord décomposé selon :

$$G_m(s) = G_m^+(s)G_m^-(s) \quad (2.66)$$

Où $G_m^-(s)$ contient le retard et les zéros instables, $G_m^-(s)$ doit avoir en plus un gain statique égal à 1. $G_m^+(s)$ est la partie inversible de $G_m(s)$.

L'expression du contrôleur $C_{IMC}(s)$ est donnée par :

$$C_{IMC}(s) = \frac{1}{G_m^+(s)}f(s) \quad (2.67)$$

$f(s)$ est un filtre passe bas, que l'on souhaite imposer au système en boucle fermée, appelé aussi "filtre de robustesse" par Morari [80]. En effet, le choix de $f(s)$ conditionne les performances du système de commande. Il doit par conséquent être choisi de sorte à trouver un compromis entre robustesse et performances du système de commande. De plus, sa structure doit être la plus simple possible afin que le contrôleur qui en découlera aie une structure simple à implémenter.

Lorsque $G_m(s)$ est stable, Morari propose de choisir $f(s)$ ayant la forme générale :

$$f(s) = \frac{1}{(1 + \tau_c s)^r} \quad (2.68)$$

τ_c étant la constante de temps qui définit la durée du régime transitoire et r est un nombre entier positif, il est choisi de sorte que le contrôleur finalement obtenu soit causal. Afin d'assurer la poursuite de la référence, $f(s)$ doit avoir un gain statique unitaire. Après avoir calculé le régulateur à modèle interne $C_{IMC}(s)$ en utilisant l'expression (2.67), le régulateur classique $C(s)$ peut être retrouvé par l'équation (2.64-a).

2.6 Synthèse du contrôleur FOF-PID

Le principe de la technique de synthèse du contrôleur fractionnaire FOF-PID combine entre deux méthodes de commande robustes : la commande par modèle interne et la commande CRONE. En effet, la commande par modèle interne connue par son efficacité et sa simplicité à mettre en œuvre, elle est aussi robuste par rapport aux variations paramétriques et donne lieu à des contrôleurs simple de type PID, et la commande CRONE permet d'assurer la robustesse de degré de stabilité de la commande dans une bande de fréquences donnée, en se basant sur la fonction de transfert idéale de Bode. Cette technique de synthèse est considérée comme une généralisation de la méthode IMC au cas fractionnaire. L'idée est alors, d'imposer à la boucle fermée un comportement fractionnaire, en choisissant la fonction idéale de Bode en boucle fermée donnée par l'équation (2.47) comme filtre de robustesse lors de l'application de la méthode IMC.

Dans ce cas, et afin d'avoir en boucle fermée un comportement fractionnaire robuste, On choisit la fonction de transfert $f(s)$ égal à la fonction idéale de Bode en boucle fermée :

$$f(s) = G_{ref}(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\lambda+1}} \quad (2.69)$$

Ainsi lorsque le système à commander est décrit par la fonction de transfert :

$$G_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.70)$$

On suppose que cette fonction de transfert est strictement propre et inversible (ne possède pas de retard ni de zéros instables). Dans ce cas, le contrôleur C_{IMC} obtenu en utilisant l'équation (2.62) est donné par

$$C_{IMC}(s) = \frac{D(s)}{N(s)} \frac{1}{1 + \tau_c s^{\lambda+1}} \quad (2.71)$$

et le contrôleur standard $C(s)$ correspondant, calculé en utilisant l'équation (2.59) est donné par

$$C(s) = \frac{D(s)}{\tau_c s^{\lambda+1} N(s)} = \frac{1}{s^\lambda} \frac{D(s)}{\tau_c N(s)} \quad (2.72)$$

Ce contrôleur est composé d'une partie fractionnaire ($\frac{1}{s^\lambda}$) et une partie entière ($\frac{D(s)}{\tau_c N(s)}$). La partie entière va être factorisée en laissant apparaître l'intégrateur ($\frac{1}{s}$) afin de faciliter la mise sous la forme d'un PID classique. Une fois ces deux parties sont séparées on obtient la forme particulière du contrôleur FOF-PID.

Nous présentons dans ce qui suit comment obtenir cette forme dans le cas de la commande de

systèmes simples du premier ou du second ordre, et nous allons traiter en détails le cas d'un système du premier ordre à retard qui va être utilisé par la suite dans le chapitre 3 pour le développement de la méthode empirique. Nous abordons également le cas de la commande de systèmes dont le modèle est d'ordre élevé.

2.6.1 Synthèse de contrôleurs FOF-PID pour des modèles de petites dimensions

Dans le cas où le système est décrit par un modèle simple du premier ou du deuxième ordre, le contrôleur fractionnaire de l'équation (2.72) peut être mis facilement sous la forme particulière du contrôleur FOF-PID comme suit :

- Isoler la partie fractionnaire du contrôleur donné par l'équation (2.72) dans une fonction de transfert $F(s)$. pour la partie entière restante, on essaye d'isoler l'intégrateur pour obtenir la forme suivante :

$$C(s) = F(s) \left[\frac{1}{s} H(s) \right] \quad (2.73)$$

- Si le modèle est simple et ne contient pas de zéros, la fonction $H(s)$ obtenu est un simple polynôme d'ordre 1 ou de 2. Le contrôleur $C(s)$ peut être alors facilement mis sous la forme d'un filtre fractionnaire en série avec un régulateur PID classique et c'est le contrôleur FOF-PID recherché.

$$C(s) = F(s) \left[K_c \left(\frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s + 1 \right) \right] \quad (2.74)$$

- Si le modèle est simple et contient un zéro stable, $H(s)$ est une simple fonction de transfert. Dans ce cas le contrôleur $C(s)$ contient en plus d'un filtre fractionnaire, un autre filtre entier en série.

2.6.2 Cas d'un système décrit par un modèle du premier ordre à retard

Considérons le système du premier ordre avec retard, décrit par la fonction de transfert :

$$G_m(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{(1 + Ts)} \quad (2.75)$$

Pour approximer le retard, deux méthodes d'approximation peuvent être utilisées. La première est l'approximation de Taylor de premier ordre qui permet d'avoir un contrôleur FOF-PI et la deuxième est l'approximation de Padé de premier ordre qui aboutie à un contrôleur FOF-PID.

– Approximation du retard par la formule de Taylor du premier ordre

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s \quad (2.76)$$

En remplaçant le retard approximé dans $G_m(s)$ et en utilisant l'équation (2.69) comme modèle de référence, le contrôleur IMC calculé par l'équation (2.71) est donné par :

$$C_{IMC}(s) = \frac{(1 + Ts)}{K(1 + \tau_c s^{\lambda+1})} \quad (2.77)$$

Le contrôleur $C(s)$ correspondant selon l'équation (2.72) est :

$$C(s) = \frac{(1 + Ts)}{K(\tau_c s^{\lambda+1} + \theta s)} \quad (2.78)$$

qui peut être mis sous la forme d'un $FOF - PI$ suivant :

$$C(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s^\lambda} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (2.79)$$

où

$$\begin{cases} \tau_f = \frac{\tau_c}{\theta} \\ K_c = \frac{T}{K\theta} \\ \tau_i = T \end{cases} \quad (2.80)$$

$C(s)$ est constitué d'un contrôleur PI classique en série avec le filtre fractionnaire $\frac{1}{1 + \tau_f s^\lambda}$.

– Approximation du retard par la formule de Padé du premier ordre

Si le retard est approximé par l'approximation de Padé du premier ordre :

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s} \quad (2.81)$$

le contrôleur $C_{IMC}(s)$ devient :

$$C_{IMC}(s) = \frac{(1 + Ts)(1 + \frac{\theta}{2}s)}{K(1 + \tau_c s^{\lambda+1})} \quad (2.82)$$

et le contrôleur $C(s)$ correspondant est :

$$C(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s^\lambda} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (2.83)$$

où

$$\begin{cases} \tau_f = \frac{2\tau_c}{\theta} \\ K_c = \frac{2T + \theta}{K\theta} \\ \tau_i = \frac{2T + \theta}{2} \\ \tau_d = \frac{T\theta}{2T + \theta} \end{cases} \quad (2.84)$$

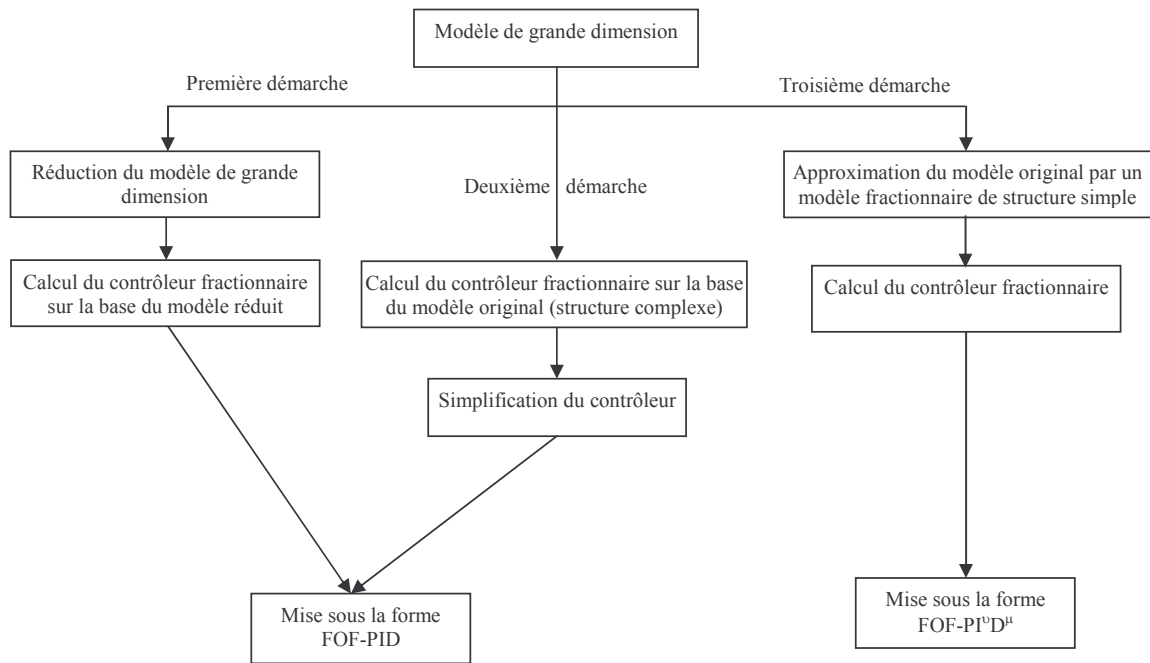


FIG. 2.18: Démarches à suivre pour la synthèse de contrôleurs fractionnaires pour les modèles de grande dimension.

Dans ce cas, $C(s)$ est constitué d'un contrôleur PID classique en série avec le filtre fractionnaire $\frac{1}{1+\tau_f s^\lambda}$.

2.6.3 Synthèse de contrôleurs FOF-PID pour des modèles de grande dimension

Nous avons vu dans la section ci-dessus comment synthétiser un contrôleur FOF-PID dans le cas des systèmes simples dont les modèles sont d'ordres réduits. Cependant, dans la réalité la plupart des systèmes physiques sont complexes qui ne peuvent être modélisés que par des modèles de grande dimension et dans ce cas l'obtention de contrôleur d'ordre réduit n'est pas évident. Notre objectif est alors de synthétiser des contrôleurs fractionnaires de type FOF-PID d'ordre réduit pour ce types de systèmes. Pour cette raison, trois démarches différentes peuvent être envisagées comme le synthétise le schéma de la figure (2.18). Ces démarches peuvent être définies comme suit :

1- Première démarche

La première démarche consiste à réduire d'abord l'ordre du modèle de grande dimension, en

utilisant des méthodes de réduction. En utilisant le modèle réduit ainsi obtenu, on peut alors synthétiser le contrôleur fractionnaire en utilisant la méthode proposée dans la section (2.6.1).

2- Deuxième démarche

La deuxième démarche consiste à calculer d'abord le contrôleur fractionnaire à partir du modèle de grande dimension. On peut dans ce cas aussi utiliser la méthode décrite dans la section (2.6), le contrôleur ainsi obtenu possède la structure de l'équation (2.72). Ensuite simplifier cette structure en respectant les étapes suivantes :

La première étape consiste à isoler la partie fractionnaire et mettre le contrôleur sous la forme :

$$C(s) = F(s) \left[\frac{1}{s} H(s) \right] \quad (2.85)$$

le filtre fractionnaire $F(s)$ peut avoir deux formes :

- $F(s) = \frac{1}{s^\lambda}$: si le modèle ne possède pas de retard.
- $F(s) = \frac{1}{1+\tau_f s^\lambda}$: si le modèle possède un retard où un zéro instable.

Contrairement au cas d'un modèle simple, dans le cas des modèles de grande dimension, $H(s)$ est une fonction de transfert complexe de grande dimension. Afin d'obtenir la structure FOF-PID, on peut utiliser le développement en séries de Maclaurin pour approximer la fonction $H(s)$ par un polynôme, ce qui donne :

$$C(s) = F(s) \frac{1}{s} \left[H(0) + H'(0)s + \frac{H''(0)}{2} s^2 + \dots \right] \quad (2.86)$$

La partie entière de ce contrôleur (l'intégrateur + le développement en séries de Maclaurin) peut être mise sous forme d'un PID classique en prenant en considération les trois premiers termes de la série de Maclaurin, ainsi on obtient :

$$C(s) = F(s) \left[\frac{H(0)}{s} + H'(0) + \frac{H''(0)}{2} s \right] \quad (2.87)$$

qui peut donc être mis sous la forme :

$$C(s) = F(s) \left[K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \right]$$

Où :

$$K_c = H'(0)$$

$$\tau_i = H'(0)/H(0)$$

$$\tau_d = H''(0)/2H'(0)$$

3- Troisième démarche

La troisième démarche consiste à approximer le modèle de grande dimension qui contient un nombre très grand de paramètres par un modèle fractionnaire qui est de dimension infini mais ne contenant que deux paramètres, puis calculer le contrôleur fractionnaire en utilisant le modèle fractionnaire obtenu. Dans ce cas, le contrôleur obtenu est un FOF- $PI^\nu D^\mu$ [12], car le modèle de référence et le modèle du système à contrôler sont tout les deux d'ordre fractionnaire.

Afin de pouvoir comparer entre ces différentes démarches, nous allons les appliquer sur l'exemple numérique suivant.

2.6.4 Exemple numérique

Considérons un système décrit par le modèle donné par l'équation (2.88). Calculons le contrôleur FOF-PID en utilisant les trois démarches décrites précédemment. Les valeurs numériques des paramètres du modèle de référence (2.65) sont : $\tau_c = 2et\lambda = 0.2$, dont la réponse indicielle est caractérisée par un dépassement $M_p = 7.5\%$ et un temps de réponse $t_r(2\%) = 13.6$ s.

$$G(s) = \frac{s^5 + 19.06s^4 + 135s^3 + 444.5s^2 + 682.5s + 392.9}{s^6 + 21.72s^5 + 173.1s^4 + 631.4s^3 + 1075s^2 + 792.1s + 196.1} \quad (2.88)$$

L'objectif de la commande d'un système quelconque est la maîtrise de sa réponse en lui imposant un comportement désiré et de maintenir ce comportement malgré les aléas et les perturbations qui affectent le processus pendant sont fonctionnement. Ces deux exigences sont appelées performances et robustesse. L'évaluation de la commande consiste alors à vérifier si les deux objectifs sont atteints. Les performances et la robustesse sont évaluées par simulation du système commandé avec les différents contrôleurs synthétisés et l'analyse les résultats obtenus. Les critères utilisés sont les suivants :

– Performances

La qualité de la réduction du modèle est quantifiée en calculant l'erreur maximale (ε) entre la réponse indicielle y du modèle initial d'ordre élevé et la réponse indicielle y_r du modèle réduit. L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE) donnée par l'expression (2.89) et

l'erreur quadratique moyenne (MSE) donnée par l'expression (2.90) :

$$\varepsilon = \max |y - y_r| \quad (2.89)$$

$$IAE = \int_0^{\infty} |y - y_r| dt \quad (2.90)$$

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y - y_r)^2} \quad (2.91)$$

les performances de la commande sont quantifiées en comparant les valeurs de dépassement M_p , le temps de réponse t_r et en utilisant aussi les erreurs MSE et IAE entre la sortie du système en boucle fermée et la sortie désirée.

– *Robustesse*

Afin d'évaluer la robustesse de la commande, nous calculons la sensibilité maximale en boucle fermée M_s . Ce dernier représente l'inverse de la distance la plus courte de la courbe de Nyquist de la fonction de transfert de boucle au point critique $(-1, 0)$, comme il est illustré sur la figure (2.19). Une faible valeur de M_s indique que le système de contrôle a une grande marge de stabilité. On note que pour une valeur de M_s inférieur à 1.7 ($M_s < 1.7$) garantit une marge de gain $G_m > 2.43$ et une marge de phase $\phi_m > 34.2^\circ$ [63]. M_s est défini par :

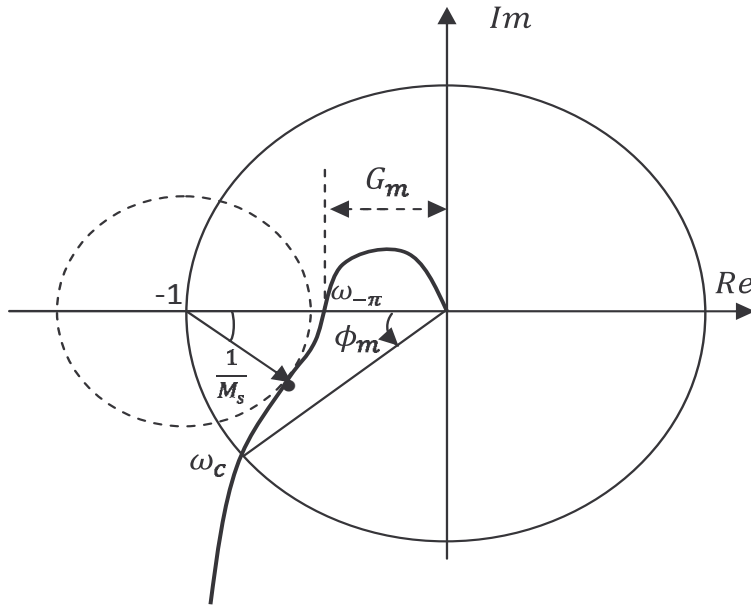
$$M_s = \max \left| \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \right| \quad (2.92)$$

Pour avoir en même temps de bonnes performances est une bonne robustesse, théoriquement les valeurs de IAE et M_s doivent avoir toutes des deux de faibles valeurs. Cependant, la réduction de l' IAE implique une augmentation de M_s et vice versa, alors pour un contrôleur bien réglé, il faut qu'il ait un bon compromis entre la performance et la robustesse.

- Synthèse du contrôleur en se basant sur les techniques de réduction de modèle

D'abord, on réduit le modèle d'ordre sept à un modèle simple d'ordre un et deux, en utilisant les méthodes de réduction présentées dans le chapitre I.

les modèles réduits de second ordre obtenus en utilisant la méthode des réalisations équilibrées, la

FIG. 2.19: M_s dans le plan de nyquist

TAB. 2.4: Modèles réduits obtenus.

| Méthode utilisée | Modèle réduit du second ordre | Modèle réduit du premier ordre |
|-------------------------------|---|---|
| Réalisations équilibrées | $G_{rre2}(s) = \frac{0.7879s+0.2471}{s^2+0.6627s+0.125}$ | $G_{rre1}(s) = \frac{0.8109}{(s+0.3933)}$ |
| Agrégation | $G_{rag2}(s) = \frac{1.817s+1.002}{s^2+1.5s+0.5}$ | $G_{rag1}(s) = \frac{1.002}{(s+0.5)}$ |
| 3 ^{me} forme de Caue | $G_{rca2}(s) = \frac{0.4628s+6.7089}{0.4628s^2+7.9399s+3.3484}$ | $G_{rca1}(s) = \frac{1}{(s+0.4991)}$ |

méthode d'agrégation et la troisième forme de Caue sont respectivement notés $G_{rre2}(s)$, $G_{rag2}(s)$ et $G_{rca2}(s)$ et les modèles réduits du premier ordre obtenus en utilisant les mêmes méthodes de réduction sont respectivement notés $G_{rre1}(s)$, $G_{rag1}(s)$ et $G_{rca1}(s)$. Les six modèles sont donnés dans le tableau (2.4) :

Les réponses indicielles des trois modèles réduits du second ordre et le modèle original sont illustrées sur la figure (2.20) et les erreurs d'approximations sont regroupées dans le tableau (2.7). D'après ces résultats, la méthode qui reproduit au mieux le comportement du modèle initial est la méthode des réalisations équilibrées avec une erreur maximale de 0.01 et une erreur moyenne de 0.005. La méthode d'agrégation donne la mauvaise réduction avec une erreur maximale de 0.55.

La figure (2.21) donne les réponses indicielles des trois modèles réduits du premier ordre et

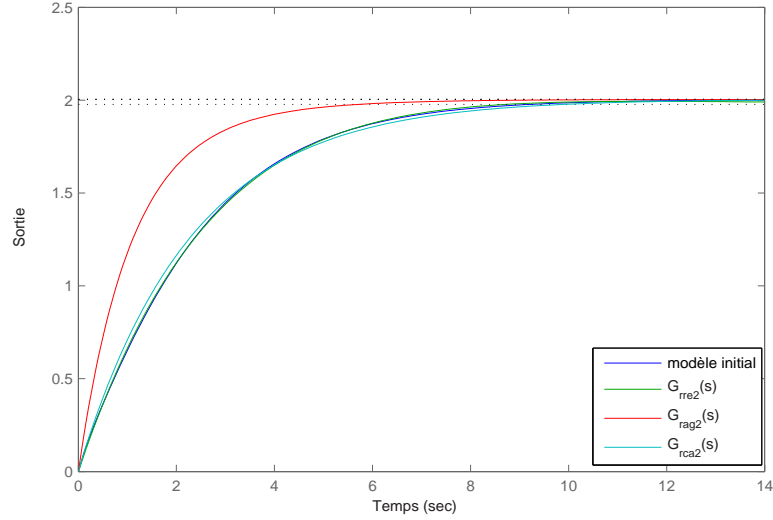


FIG. 2.20: Réponses indicielles des modèles réduits du second ordre et du modèle initial.

TAB. 2.5: Erreurs d'approximation du modèle initial par les modèles réduits d'ordre 1 et 2.

| 1 ^{er} ordre | <i>IAE</i> | <i>MSE</i> | ε | 2 ^{me} ordre | <i>IAE</i> | <i>MSE</i> | ε |
|-----------------------|------------|----------------------|---------------|-----------------------|------------|-----------------------|---------------|
| $G_{rre1}(s)$ | 0.44 | 1.1×10^{-3} | 0.05 | $G_{rre2}(s)$ | 0.07 | 0.40×10^{-4} | 0.01 |
| $G_{rag1}(s)$ | 0.61 | 3.8×10^{-3} | 0.15 | $G_{rag2}(s)$ | 2.23 | 0.59×10^{-3} | 0.55 |
| $G_{rca1}(s)$ | 0.59 | 3.7×10^{-3} | 0.15 | $G_{rca2}(s)$ | 0.21 | 4.4×10^{-4} | 0.05 |

le modèle original. Ces réponses montrent que les trois modèles peuvent être utilisés pour la synthèse du contrôleur, puisque les performances de l'approximation sont acceptables pour les trois méthodes. Cependant, la méthode des réalisations équilibrées est celle qui présente les meilleurs performances, avec une erreur maximale de 0.05.

Les contrôleurs fractionnaires (FOF-PID) obtenus en utilisant les modèles réduits de second ordre ($G_{rre2}(s)$, $G_{rag2}(s)$ et $G_{rca2}(s)$) sont respectivement ($C_{D11}(s)$, $C_{D12}(s)$ et $C_{D13}(s)$) qui sont sous la forme :

$$C_{D1i}(s) = \frac{1}{s^\lambda} \frac{1}{(1 + \tau_f s)} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (2.93)$$

et les contrôleurs obtenus en utilisant les modèles réduits du premier ordre ($G_{rre1}(s)$, $G_{rag1}(s)$ et $G_{rca1}(s)$) sont respectivement ($C_{D14}(s)$, $C_{D15}(s)$ et $C_{D16}(s)$) qui ont la forme :

$$C_{D1i}(s) = \frac{1}{s^\lambda} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (2.94)$$

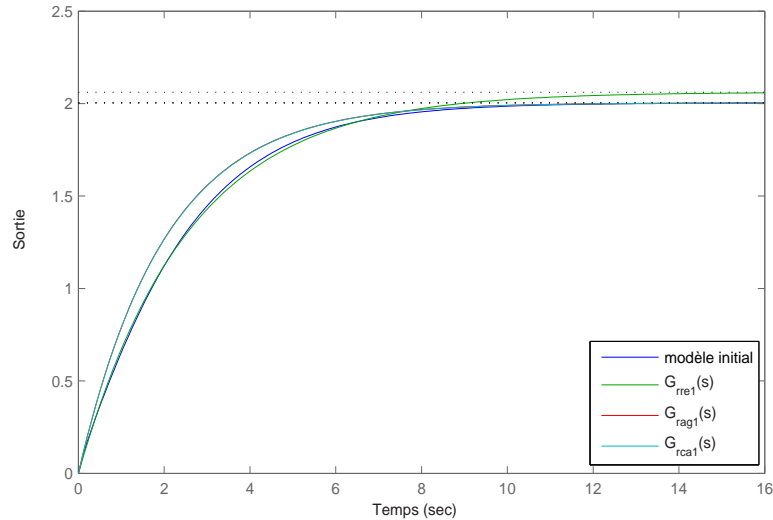


FIG. 2.21: Réponses indicielles des modèles réduits de premier ordre et le modèle initial.

les valeurs numériques des paramètres des contrôleurs obtenus sont regroupées dans le tableau (2.6).

Les figures (2.22) et (2.23) montrent respectivement les réponses indicielles du modèle de grande dimension en utilisant les contrôleurs $C_{D11}(s)$, $C_{D12}(s)$, $C_{D13}(s)$ et les réponses indicielles obtenues en utilisant les contrôleurs $C_{D14}(s)$, $C_{D15}(s)$, $C_{D16}(s)$ ainsi que le comportement désiré.

En comparant les résultats obtenus avec les différents contrôleurs, on constate que, contrairement aux réponses obtenues avec les contrôleurs $C_{D12}(s)$ et $C_{D15}(s)$ les réponses obtenues avec les contrôleurs $C_{D11}(s)$, $C_{D13}(s)$, $C_{D14}(s)$ et $C_{D16}(s)$, sont très proches du comportement désiré.

TAB. 2.6: Paramètres des contrôleurs obtenus.

| Modèle utilisé | Contrôleur obtenu | Paramètres du contrôleur | | | |
|----------------|-------------------|--------------------------|-------|----------|----------|
| | | τ_f | K_c | τ_i | τ_d |
| $G_{rre2}(s)$ | $C_{D11}(s)$ | 3.19 | 1.34 | 5.30 | 1.50 |
| $G_{rag2}(s)$ | $C_{D12}(s)$ | 1.81 | 0.75 | 3 | 0.67 |
| $G_{rca2}(s)$ | $C_{D13}(s)$ | 0.07 | 0.59 | 2.37 | 0.06 |
| $G_{rre1}(s)$ | $C_{D14}(s)$ | – | 0.62 | 2.54 | – |
| $G_{rag1}(s)$ | $C_{D15}(s)$ | – | 0.50 | 2 | – |
| $G_{rca1}(s)$ | $C_{D16}(s)$ | – | 0.50 | 2 | – |

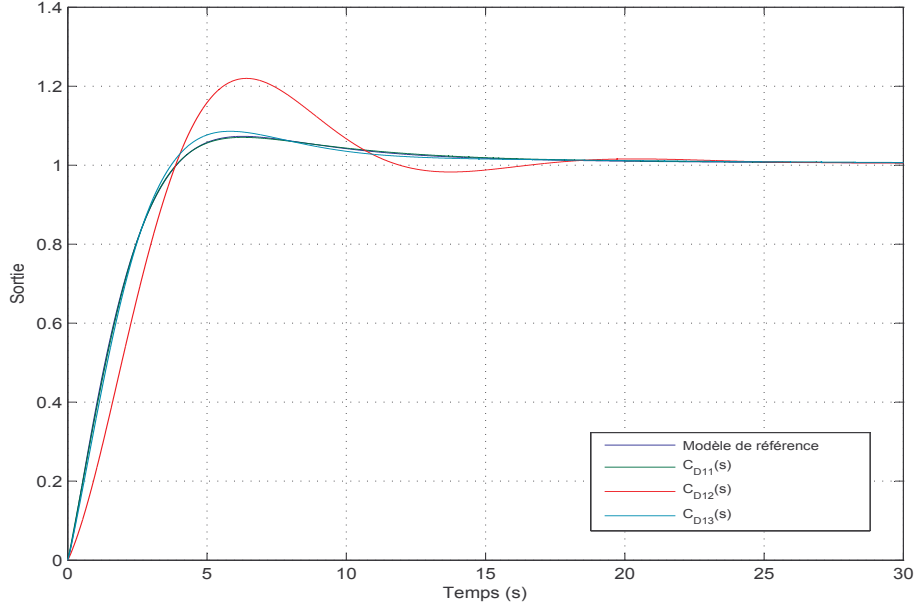


FIG. 2.22: Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D11}(s)$, $C_{D12}(s)$ et $C_{D13}(s)$.

Ce qui est logique, car les contrôleurs $C_{D12}(s)$ et $C_{D15}(s)$ sont calculés en se basant sur les modèles réduits obtenus par la méthode d'agrégation qui a mal réduit le modèle initial, notamment le modèle $G_{rag2}(s)$.

Les performances temporelles et fréquentielles de la boucle fermée regroupées dans le tableau (2.7) confirment les conclusions tirées à partir des courbes de simulations.

2-Synthèse du contrôleur en utilisant la deuxième démarche :

Dans ce cas le contrôleur est calculé à partir du modèle de grande dimension, ensuite simplifier la structure du contrôleur ainsi obtenu en utilisant la série de Maclaurin.

En imposant à la boucle fermée le filtre fractionnaire donnée par l'équation (2.69) et en utilisant les équations (2.71), (2.72), le contrôleur $C_{D2i}(s)$ obtenu en utilisant le modèle original est donné par :

$$C_{D2i}(s) = \frac{1}{s^\lambda} \frac{1}{s} \frac{s^6 + 21.72s^5 + 173.1s^4 + 631.4s^3 + 1075s^2 + 792.1s + 196.1}{2(s^5 + 19.06s^4 + 135s^3 + 444.5s^2 + 682.5s + 392.9)} \quad (2.95)$$

en utilisant le développement en série de Maclaurin, on obtient :

$$C_{D2i}(s) = \frac{1}{s^\lambda} \frac{1}{s} \left[0.25 + 0.57s + \frac{0.175}{2}s^2 + \dots \right] \quad (2.96)$$

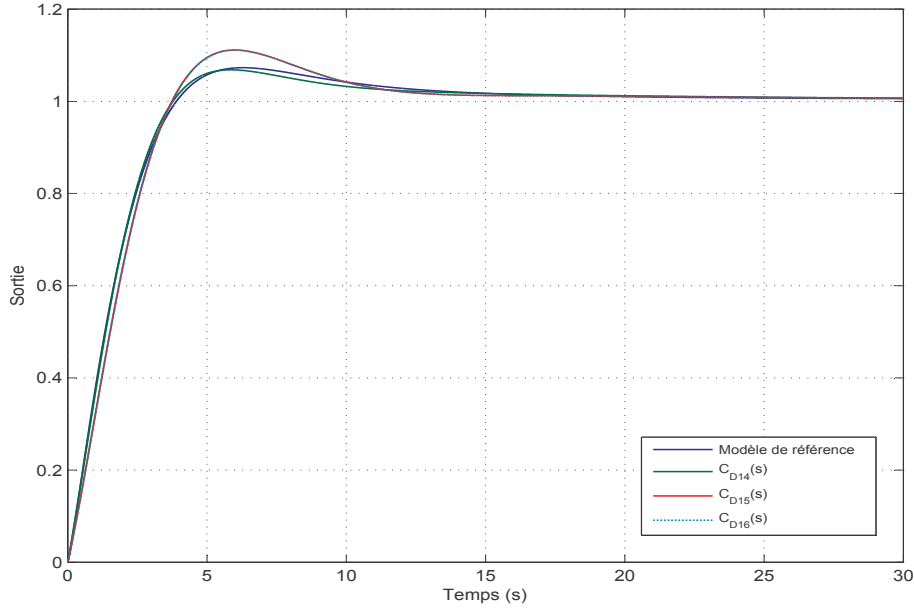


FIG. 2.23: Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D14}(s)$, $C_{D15}(s)$ et C_{D16} .

En prenant en considération que les deux premiers termes de la série de Maclaurin, on obtient le contrôleur FOF-PI suivant :

$$C_{D21}(s) = \frac{1}{s^\lambda}(0.57) \left(1 + \frac{1}{2.30s} \right) \quad (2.97)$$

En considérant les trois premiers termes de la série de Maclaurin, on obtient le contrôleur FOF-PID donné par

$$C_{D22}(s) = \frac{1}{s^\lambda}(0.57) \left(1 + \frac{1}{2.30s} + 0.15s \right) \quad (2.98)$$

Les réponses indicielles obtenues en utilisant le contrôleur $C_{D21}(s)$ et le contrôleur $C_{D22}(s)$ et le comportement désiré sont illustrés sur la figure (2.24). Cette figure montre clairement que les réponses obtenues avec les deux contrôleurs (FOF-PI et FOF-PID) sont très proches du comportement désiré, comme le confirme les valeurs des performances de la boucle fermée regroupées dans le tableau (2.7). En effet, l'erreur moyenne entre les réponses obtenues avec les deux contrôleurs et le comportement désiré est d'environ 10^{-5} .

3- Synthèse du contrôleur en suivant la troisième démarche :

Le modèle d'ordre fractionnaire qui approxime $G(s)$ obtenu par identification est donné par :

$$G_r(s) = \frac{2.0036}{1 + 2.7s^{1.1}} \quad (2.99)$$

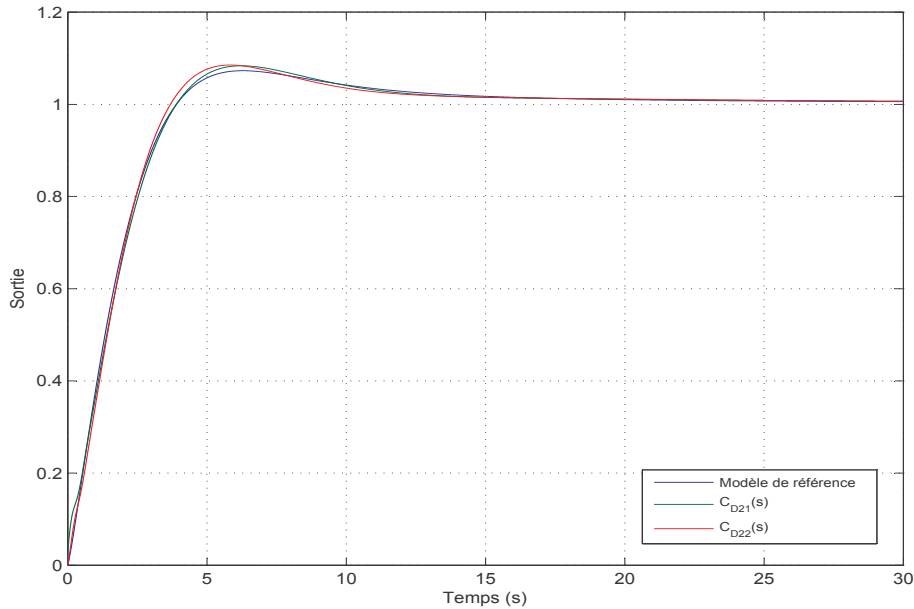


FIG. 2.24: Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D21}(s)$ et $C_{D22}(s)$ de la deuxième démarche.

Les réponses indicielles du modèle entier de grande dimension et le modèle d'ordre non entier illustrées sur la figure (2.25) montrent que le modèle fractionnaire peut reproduire le comportement du modèle du grand dimension. Ce modèle fractionnaire est alors utilisé pour calculer le contrôleur fractionnaire $C_{D31}(s)$ donné par l'équation (2.100). Ce dernier est de type *FOF-PI ν* parce que le comportement imposé à la boucle fermée et le modèle utilisé sont tous les deux fractionnaires.

La réponse indicielle obtenue en utilisant le contrôleur $C_{D31}(s)$ représentée sur la figure (2.25) montre que ce contrôleur permet d'atteindre les caractéristiques désirées tel que l'écart maximal avec le comportement désiré est de 0.03.

$$C_{D31}(s) = \frac{s^{0.1}}{s^\lambda} (0.6737) \left(1 + \frac{1}{2.7s^{1.1}} \right) \quad (2.100)$$

L'analyse des résultats et des simulations obtenus avec les trois démarches appliquées révèle que la meilleure est la deuxième démarche. Cependant, chacune des trois a des avantages et des inconvénients. En effet, en ce qui concerne la première démarche, on peut dire que les résultats obtenus dépendent de la précision de la réduction du modèle de grande dimension. En effet, si le modèle réduit est précis on aura de très bons résultats et le contraire est vrai. Le premier inconvénient de cette démarche c'est qu'on doit appliquer plusieurs méthodes de réduction pour à la fin choisir la meilleure, car il n'existe pas de règles pour le choix de la méthode de réduction.

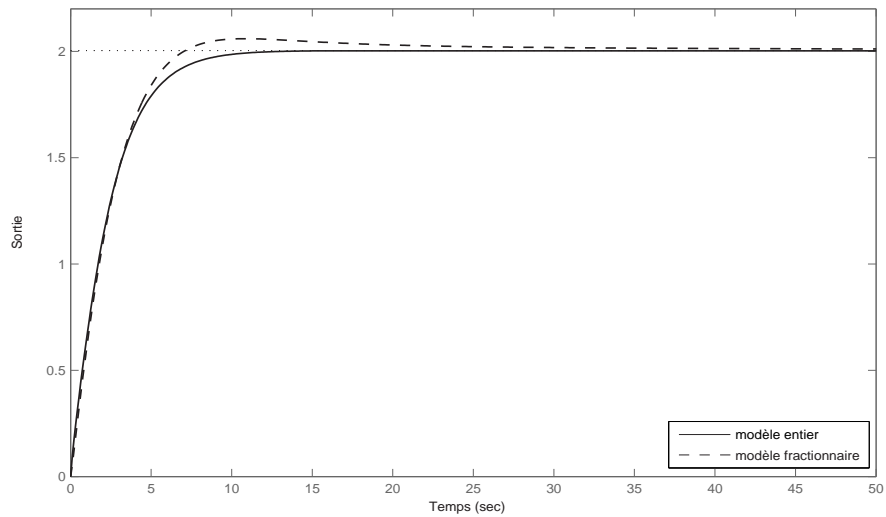
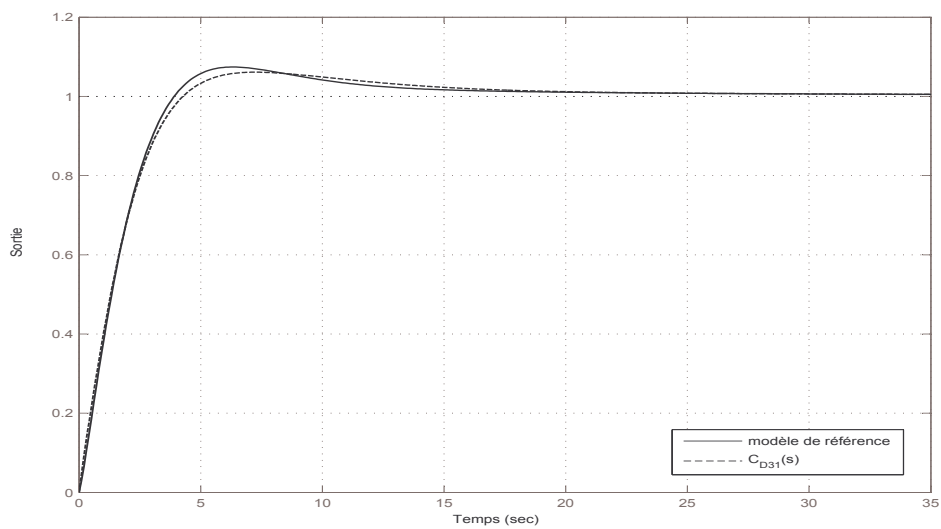


FIG. 2.25: Réponses indicielles des modèles entier et non entier.

FIG. 2.26: Résultat obtenu avec le contrôleur $C_{D31}(s)$.

TAB. 2.7: Performances temporelles et fréquentielles de la boucle fermée avec les différents contrôleurs.

| démarche | $C_i(s)$ | $M_p(\%)$ | $t_r(2\%)$ | $t_r(5\%)$ | IAE | MSE | $err.max$ | M_s | $\varphi_m(^{\circ})$ |
|---------------------|-----------|-----------|------------|------------|-------|-----------------------|-----------|-------|-----------------------|
| 1 ^{ère} | C_{D11} | 6.83 | 13.2 | 8.02 | 0.12 | 1.7×10^{-5} | 0.011 | 1.06 | 72 |
| | C_{D12} | 11.1 | 12.1 | 9.5 | 0.32 | 2.11×10^{-4} | 0.06 | 1.35 | 49.8 |
| | C_{D13} | 11.1 | 12.1 | 9.5 | 0.32 | 2.08×10^{-4} | 0.06 | 1.09 | 68 |
| | C_{D14} | 7.1 | 14.6 | 9.14 | 0.04 | 1.91×10^{-6} | 0.006 | 1.06 | 72.2 |
| | C_{D15} | 21.9 | 11.2 | 10.36 | 1.25 | 2.7×10^{-3} | 0.18 | 1.35 | 49.8 |
| | C_{D16} | 8.62 | 12.6 | 8.7 | 0.16 | 4.22×10^{-5} | 0.02 | 1.09 | 68 |
| 2 ^{ème} | C_{D21} | 8.52 | 12.6 | 8.7 | 0.16 | 5.88×10^{-5} | 0.03 | 1.09 | 68.2 |
| | C_{D22} | 8.23 | 13.1 | 9.24 | 0.13 | 5.44×10^{-4} | 0.07 | 1.03 | 71.4 |
| 3 ^{ème} | C_{D31} | 6.11 | 15.9 | 9.78 | 0.20 | 0.8×10^{-4} | 0.03 | 1.01 | 77.3 |
| modèle de référence | | 7.5 | 13.6 | 9.14 | – | – | – | 1.05 | 72 |

Le deuxième inconvénient c'est que dans le cas où le modèle réduit est du second ordre on obtient une structure du contrôleur FOF-PID un peu complexe, qui est constitué d'un filtre fractionnaire en série avec le PID classique, mais également en cascade avec un autre filtre entier.

La troisième démarche donne de bons résultats car le modèle fractionnaire peut représenter le comportement d'un modèle de grande dimension. Cependant l'application de cette méthode est compliquée. L'avantage de cette démarche est l'obtention d'un contrôleur $PI^{\nu}D^{\mu}$ qui est robuste. Quand à la deuxième démarche, contrairement aux deux autres, elle ne nécessite pas la réduction du modèle de grande dimension, elle est rapide, très facile à appliquer, en plus elle donne de très bons résultats.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé la simulation des contrôleurs fractionnaires qui est basée sur l'approximation de l'opérateur d'intégration et/ou de la dérivation non entier qu'ils contiennent. Pour cela deux méthodes d'approximations ont été présentées, la méthode de Charef et la méthode d'Outaloup; nous avons également défini le principe de la commande CRONE basée sur la fonction idéale de Bode. Une étude détaillée de cette dernière a été effectuée dans

différents domaines pour faire le lien entre le modèle de second ordre entier et le la fonction idéale de Bode en boucle fermée, ce qui nous a permet de faire le point sur le choix des paramètres du modèle de référence présenté par la fonction idéale de Bode en boucle fermée. Par la suite, nous avons présenté la commande par modèle interne et sa généralisation au cas fractionnaire pour la commande de systèmes d'ordre entier. Enfin, nous avons terminé par la présentation de trois démarches différentes permettant la synthèse de contrôleurs FOF-PID pour la commande des systèmes entiers de grande dimension, qui sont par suite appliquées sur un exemple de modèle d'ordre 7. Les résultats obtenus ont révélé que la meilleure démarche à suivre est la deuxième, vue sa simplicité et son efficacité.

Dans le prochain chapitre, nous présentons une autre méthode de synthèse de contrôleurs appelée "setpoint overshoot method" (SOM). Cette méthode va être généralisée au réglage de contrôleurs FOF-PID. Cette méthode est intéressante du fait qu'elle est empirique basée sur des essais expérimentaux sans faire appel au modèle du système à commander, donc peut être une solution pour la commande des systèmes de grande dimension.

Chapitre 3

Méthode empirique pour le réglage des contrôleurs FOF-PID

3.1 Introduction

Ces dernières années, plusieurs travaux de recherches ont été consacrés pour le développement de nouvelles techniques pour la synthèse des contrôleurs fractionnaires en se basant sur les théories de contrôle classiques. La plupart des méthodes développées sont analytiques et nécessitent la connaissance préalable d'un modèle mathématique du système à commander. Ces méthodes sont difficiles à mettre en œuvre pour un praticien non spécialiste du domaine, par conséquent elles sont inexploitable dans l'industrie. En effet, dans le milieu industriel se sont les méthodes empiriques qui sont les plus privilégiées car elles sont simples, efficaces et ne demandent que très peu de temps et d'effort à l'ingénieur pour le réglage des paramètres du contrôleur. En outre, ces méthodes empiriques sont des solutions pour la commande des systèmes complexes dont les modèles ne sont pas faciles à obtenir, complexes ou de grande dimension et peu fiables. La célèbre méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée est la méthode la plus connue et la plus utilisée dans l'industrie pour le réglage du contrôleur PID, son inconvénient majeur est la mise à la limite de stabilité du système à commander. Afin de remédier à ce problème, d'autres méthodes empiriques sont apparues parmi elles, "la méthode basée sur le dépassement de la réponse indicielle", appelée en anglais "setpoint overshoot method" (SOM), proposée par Shamsuzzoha et Skogestad dans [67] pour le réglage des paramètres du contrôleur PID classique.

Récemment une méthode empirique a été développée dans [76] pour le réglage de contrôleurs

fractionnaires de type $PI^{\nu}D^{\mu}$. Cette méthode est considérée comme une généralisation de la méthode de Zeigler-Nichols au cas fractionnaire car elle nécessite les mêmes données de la réponse indicielle utilisées par Zeigler et Nichols dans leur méthode en boucle ouverte. Dans ce contexte, ce chapitre est consacré à la généralisation et l'adaptation de la méthode empirique SOM pour le réglage des paramètres du contrôleur fractionnaire (FOF-PID) en apportant quelques modifications à la méthode de base. Nous allons d'abord rappeler brièvement le principe de la méthode de Ziegler-Nichols, ensuite nous développerons notre méthode en utilisant les résultats de la méthode IMC vue dans le chapitre 2 et on termine par trois exemples pour tester l'efficacité de la méthode sur différents modèles.

3.2 Principe de la méthode de Ziegler-Nichols

En 1942, Ziegler et Nichols [85] ont proposé deux approches expérimentales destinées à ajuster rapidement les paramètres du contrôleur PID défini par :

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (3.1)$$

La première méthode nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à régler seul en boucle ouverte (c-à-d sans contrôleur), alors que la deuxième est basée sur une expérience en boucle fermée. Celle-ci consiste à chercher la valeur du gain K_u du contrôleur proportionnel qui permet de mettre le processus à sa limite de stabilité [85]. La méthode présentée ici est celle utilisant les oscillations entretenues, sa mise en œuvre se déroule selon les étapes suivantes :

1. Mettre le contrôleur en mode proportionnel (mettre la constante d'intégration τ_i au maximum et la constante de dérivation τ_d au minimum).
2. Mettre le gain du contrôleur à une faible valeur afin d'avoir une réponse très amortie.
3. Faire une petite variation de la consigne et observer l'évolution de la réponse (qui doit être très amortie) de la variable contrôlée.
4. Augmenter la valeur du gain jusqu'à l'obtention des oscillations entretenues.
5. Relever alors la valeur du gain K_u (gain ultime) et la période des oscillations T_u .

Les paramètres du contrôleur sont ensuite déterminés en utilisant ces deux données (K_u, T_u) obtenues à partir de l'expérience selon le tableau (3.1) [31]. Cette méthode, bien qu'elle soit la plus utilisée dans l'industrie, elle comporte un inconvénient de taille, à savoir : le système doit être

TAB. 3.1: Réglage des paramètres du régulateur PID avec la méthode de Zeigler-Nichols en boucle fermée.

| | <i>P</i> | <i>PI</i> | <i>PID</i> |
|-------------------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| le gain K_c | $\frac{K_u}{2}$ | $\frac{K_u}{2.2}$ | $\frac{K_u}{1.7}$ |
| la constante d'intégration τ_i | 0 | $\frac{T_u}{1.2}$ | $\frac{T_u}{2}$ |
| la constante de dérivation τ_d | 0 | 0 | $\frac{T_u}{8}$ |

mis à sa limite de stabilité ce qui peut le conduire à l'instabilité ou passer dans un état dangereux dans le cas des systèmes chimiques. En plus, plusieurs essais peuvent être nécessaires pour amener le système à ce point critique et cela nécessite beaucoup de temps lorsque le processus est lent. La méthode de Ziegler-Nichols est aussi limitée car le système en boucle fermée présente un très faible amortissement donc un dépassement de la réponse indicielle très important, de ce fait, elle est inappropriée pour les applications qui ont besoin de faibles dépassements [5, 8]. Depuis, plusieurs approches ont été apparues pour améliorer la méthode de Ziegler-Nichols, parmi ces approches on peut citer : la méthode de Cohen-Coon en 1953 [26], la méthode de Broïda en 1969 [19], la méthode D'Åström en 1995 [5]... etc.

3.3 Méthode basée sur le dépassement de la réponse indicielle de la boucle fermée

La méthode SOM est basée sur le dépassement de la réponse indicielle de la boucle fermée, elle a été développée et appliquée par Shamsuzzoha et al dans [67, 68] pour le réglage des paramètres du régulateur PID. Le principe de base de cette méthode est similaire à celui de la méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée mais elle est plus intéressante car contrairement à la méthode de Ziegler-Nichols, le système n'est pas forcé de fonctionner à sa limite de stabilité. Les expressions de la méthode SOM pour le réglage du régulateur PID ont été développées en se basant sur plusieurs simulations et des observations de la réponse indicielle pour une large gamme de processus décrits par des modèles du premier ordre à retard. Ensuite, une corrélation a été établie entre les informations obtenues à partir de ces simulations et les expressions des paramètres du contrôleur PID obtenus avec la méthode analytique SIMC (Simple Internal Model Control [72]) afin d'aboutir à des expressions simples qui permettent d'avoir des résultats proches

de ceux obtenus avec la méthode SIMC.

La méthode SOM est basée sur une seule expérience en boucle fermée en utilisant un contrôleur proportionnel de gain K_{c0} , permettant d'obtenir une réponse indicielle oscillatoire amortie avec un dépassement compris entre 0.1 et 0.6. A partir de la réponse oscillatoire on peut relever plusieurs informations : le temps et l'amplitude du premier dépassement, le temps de montée, le temps de réponse, la période des oscillations, la valeur finale de la réponse...etc. Parmi ces informations, les plus faciles à relever sont : la valeur finale de la réponse indicielle, le temps et l'amplitude du premier dépassement qui sont la base de la méthode SOM. Les étapes à suivre pour le réglage des paramètres du contrôleur PID en utilisant la méthode SOM peuvent être résumées comme suit :

1. Mettre le contrôleur en mode proportionnel de gain K_{c0} , comme le montre la figure (3.1).
2. Ajuster la valeur du gain de contrôleur K_{c0} afin d'obtenir une réponse indicielle avec un dépassement compris entre 0.1 et 0.6, puis enregistrer la valeur du gain K_{c0} du contrôleur utilisé dans l'expérience, ainsi que l'évolution de la sortie du système.
3. Relever à partir de la réponse indicielle les trois mesures nécessaires, à savoir : la valeur finale de la réponse indicielle (y_∞), le temps et l'amplitude du premier dépassement (t_p et M_p), comme elles sont illustrées sur la figure (3.2). Ainsi les informations nécessaires à la mise en œuvre de la méthode SOM sont :
 - Le gain du contrôleur proportionnel K_{c0} .
 - Le dépassement : $M_p = (y_{max} - y_\infty)/y_\infty$
 - Le temps de premier dépassement t_p .
 - Le gain statique : $b = y_\infty/r$

Les paramètres du contrôleur sont ensuite déterminés en remplaçant ces informations dans les expressions de la méthode SOM développées par Shamsuzzoha et Skogestad [67]. La démarche à suivre pour le développement des expressions de la méthode SOM est présentée plus en détails dans le cas de réglage des paramètres des contrôleurs FOF-PID.

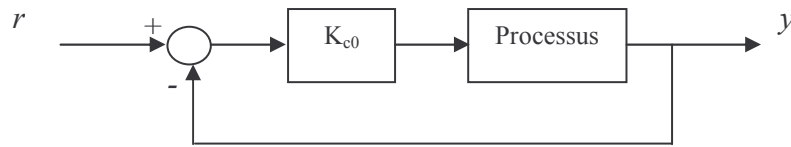


FIG. 3.1: Schéma bloc d'une commande en boucle fermée avec une action proportionnelle

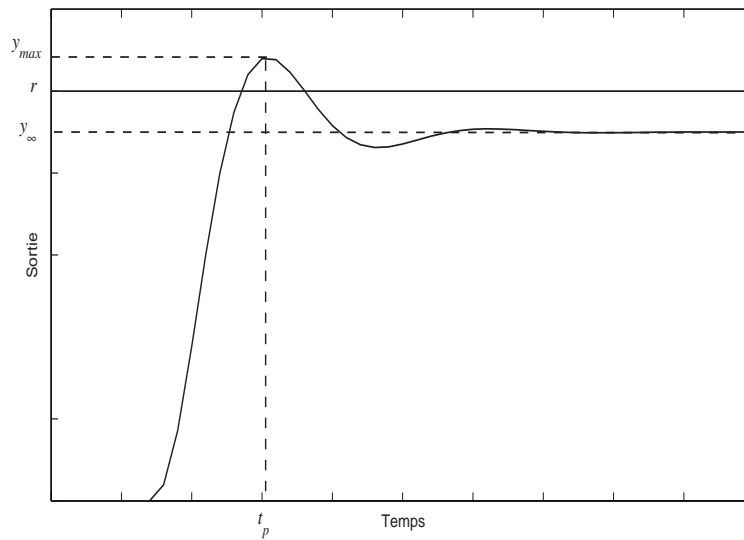


FIG. 3.2: Mesures à relever sur la réponse indicielle

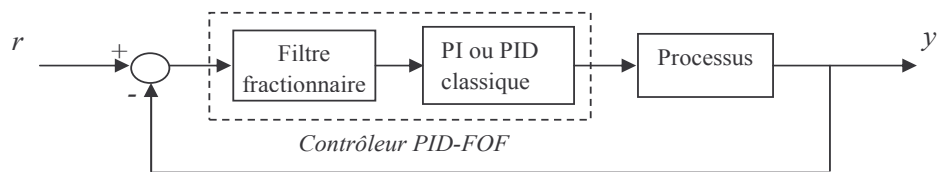


FIG. 3.3: Schéma bloc d'une commande en boucle fermée avec un contrôleur FOF-PID

3.4 Extension de la méthode SOM au contrôleur fractionnaire FOF-PID

L'objectif est de généraliser la méthode SOM au cas fractionnaire en l'adaptant pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID donnée par l'équation (3.2). Le schéma bloc d'une commande en boucle fermée avec ce contrôleur est montré sur la figure (3.3).

$$C(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s^\gamma} K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \quad (3.2)$$

Ce contrôleur possède cinq paramètres à déterminer : les coefficients multiplicatifs τ_f , K_c , τ_i et τ_d , ainsi que l'ordre non entier γ . Sa structure particulière composée d'un PID entier et d'un filtre fractionnaire rend cette tâche plus facile. En effet, la méthode SOM peut être appliquée pour ce type de régulateur tout en respectant son principe de fonctionnement, mais il faut d'abord l'adapter en développant de nouvelles expressions pour le réglage de ces paramètres. Quelques modifications et améliorations sont apportées à la méthode de base. En effet, nous avons proposé de mettre à la disposition de l'ingénieur, deux paramètres de synthèse permettant d'ajuster le dépassement et le temps de stabilisation de la réponse du système en boucle fermée, dans le but d'apporter plus de souplesse à la méthode de base. De plus, au lieu d'utiliser la méthode SIMC utilisée par Shamsuzzoha, nous avons utilisé la méthode IMC qui a permis d'obtenir le contrôleur FOF-PID [11, 12].

Afin de développer les expressions de la méthode SOM pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID donné par l'équation (3.2) nous avons effectué plusieurs simulations et des observations de la réponse indicielle pour une large gamme de processus du premier ordre à retard. Ce choix est justifié par le fait que ce modèle peut représenter tout les systèmes possédant un comportement apériodique. A partir de ces réponses indicelles, les données nécessaires pour la méthode SOM ont été recueillies. Ensuite, une corrélation est établie entre ces données et les expressions des paramètres des contrôleurs FOF-PI/FOF-PID obtenues par la méthode IMC.

Pour mettre en œuvre la méthode, nous avons considéré 15 modèles du premier ordre à retard, sous la forme :

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + T s} \quad (3.3)$$

où K désigne le gain, θ le retard et T représente la constante de temps du modèle. Pour simplifier la mise en œuvre de la méthode, nous avons également considéré, $K = 1$ et $\theta = 1$, de ce fait le

gain du contrôleur est supposé égal à KK_{c0} .

Nous avons pris 15 valeurs différentes du rapport T/θ allant de 0.1 jusqu'à 100 afin de couvrir une large gamme de processus. Les valeurs considérées sont :

$$\frac{T}{\theta} = 0.1, \quad 0.2, \quad 0.4, \quad 0.8, \quad 1, \quad 1.5, \quad 2, \quad 2.5, \quad 3, \quad 5, \quad 7.5, \quad 10, \quad 20, \quad 50, \quad 100.$$

L'expérience consiste à enregistrer la réponse indicielle en boucle fermée pour chacun de ces 15 systèmes avec le contrôleur mis en mode proportionnel de gain K_{c0} (figure(3.2)). Ensuite faire varier le gain K_{c0} afin d'avoir pour chaque système différentes valeurs du dépassement M_p allant de 0.1 à 0.6. Cela a permis d'avoir en tout 6 réponses indiciaires pour chacun des 15 systèmes et 4 informations à partir de chaque réponse indicielle (le gain du contrôleur K_{c0} , l'amplitude du premier dépassement $M_p = (y_{max} - y_{\infty})/y_{\infty}$, le temps du premier dépassement t_p et le gain statique $b = y_{\infty}/r$). Ces mesures sont regroupées dans les tableaux (3.2) et (3.3).

D'un autre côté, nous avons calculé pour chaque système (de $T/\theta = 0.1$ à $T/\theta = 100$) la valeur du gain K_c du contrôleur FOF-PI/FOF-PID analytiquement en utilisant les expressions obtenues par la méthode IMC pour la commande des systèmes à retard (équation (2.80) et (2.84)).

3.4.1 Réglage des paramètres du contrôleur FOF-PI

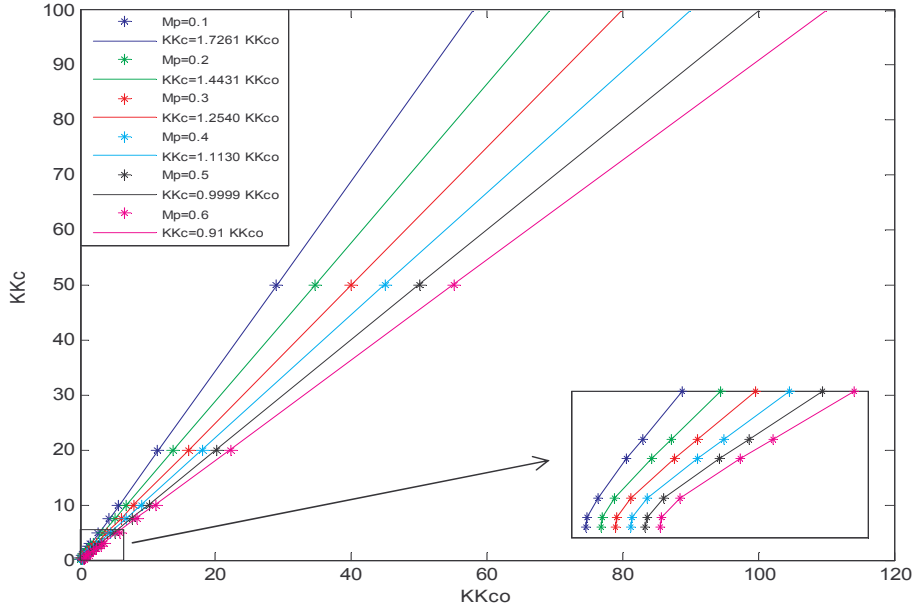
Les expressions de la méthode SOM développées par Shamsuzzoha et Skogestad ont été obtenues par corrélation entre les informations recueillies de l'expérience sur une large gamme de processus et les paramètres du contrôleur PID obtenu en utilisant la méthode de synthèse SIMC. Pour les contrôleurs fractionnaires nous utilisons le même principe, c'est-à-dire trouver une relation aussi simple que possible entre des données regroupées dans les tableaux (3.2) et (3.3) et les paramètres des contrôleurs fractionnaires obtenus par la méthode IMC. Les expressions des paramètres des contrôleurs FOF-PI et FOF-PID sont différentes, par conséquent nous développons dans cette section les expressions de la méthode SOM du contrôleur FOF-PI puis celles du contrôleur FOF-PID dans la section (3.4.2).

TAB. 3.2: Mesures relevées des réponses indicielles des modèles dont $0.1 \leq \frac{T}{\theta} \leq 3$.

| $T/\theta \backslash M_p$ | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---------------------------|----------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|
| | | 0.1 | K_{c0} | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| | t_p | 1.99 | 1.98 | 1.99 | 1.99 | 1.98 | 1.97 |
| | b | 0.09 | 0.167 | 0.231 | 0.286 | 0.333 | 0.375 |
| 0.2 | K_{c0} | 0.107 | 0.208 | 0.309 | 0.410 | 0.511 | 0.611 |
| | t_p | 2.01 | 2.02 | 2.02 | 2.02 | 1.98 | 1.99 |
| | b | 0.097 | 0.172 | 0.236 | 0.291 | 0.338 | 0.379 |
| 0.4 | K_{c0} | 0.177 | 0.293 | 0.405 | 0.515 | 0.626 | 0.735 |
| | t_p | 2.19 | 2.12 | 2.1 | 2.08 | 2.07 | 2.05 |
| | b | 0.151 | 0.227 | 0.288 | 0.34 | 0.385 | 0.424 |
| 0.8 | K_{c0} | 0.376 | 0.544 | 0.7 | 0.85 | 0.998 | 1.142 |
| | t_p | 2.62 | 2.43 | 2.33 | 2.25 | 2.25 | 2.2 |
| | b | 0.273 | 0.352 | 0.412 | 0.459 | 0.499 | 0.533 |
| 1 | K_{c0} | 0.482 | 0.675 | 0.855 | 1.026 | 1.196 | 1.363 |
| | t_p | 2.75 | 2.54 | 2.43 | 2.37 | 2.29 | 2.3 |
| | b | 0.325 | 0.403 | 0.461 | 0.506 | 0.545 | 0.577 |
| 1.5 | K_{c0} | 0.752 | 1.008 | 1.245 | 1.472 | 1.692 | 1.911 |
| | t_p | 3.01 | 2.77 | 2.6 | 2.53 | 2.46 | 2.38 |
| | b | 0.429 | 0.502 | 0.555 | 0.595 | 0.629 | 0.656 |
| 2 | K_{c0} | 1.031 | 1.345 | 1.637 | 1.915 | 2.193 | 2.46 |
| | t_p | 3.21 | 2.92 | 2.74 | 2.62 | 2.52 | 2.5 |
| | b | 0.508 | 0.574 | 0.621 | 0.657 | 0.687 | 0.711 |
| 2.5 | K_{c0} | 1.314 | 1.684 | 2.03 | 2.363 | 2.69 | 3.014 |
| | t_p | 3.32 | 2.99 | 2.83 | 2.68 | 2.59 | 2.6 |
| | b | 0.568 | 0.627 | 0.67 | 0.703 | 0.729 | 0.701 |
| 3 | K_{c0} | 1.6 | 2.026 | 2.423 | 2.81 | 3.19 | 3.56 |
| | t_p | 3.4 | 3.06 | 2.87 | 2.74 | 2.64 | 2.63 |
| | b | 0.615 | 0.670 | 0.708 | 0.738 | 0.761 | 0.781 |

TAB. 3.3: Mesures relevées des réponses indicielles des modèles dont $5 \leq \frac{T}{\theta} \leq 100$.

| $T/\theta \backslash M_p$ | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---------------------------|----------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|
| | | 5 | K_{c0} | 2.75 | 3.405 | 4.01 | 4.601 |
| | t_p | 3.62 | 3.22 | 3 | 2.92 | 2.83 | 2.65 |
| | b | 0.733 | 0.773 | 0.8 | 0.821 | 0.838 | 0.852 |
| 7.5 | K_{c0} | 4.192 | 5.13 | 6 | 6.845 | 7.683 | 8.52 |
| | t_p | 3.74 | 3.34 | 3.08 | 2.96 | 2.9 | 2.82 |
| | b | 0.807 | 0.837 | 0.857 | 0.873 | 0.885 | 0.895 |
| 10 | K_{c0} | 5.64 | 6.86 | 8 | 9.09 | 10.18 | 11.26 |
| | t_p | 3.83 | 3.37 | 3.12 | 3.01 | 2.87 | 2.85 |
| | b | 0.849 | 0.873 | 0.889 | 0.901 | 0.911 | 0.918 |
| 20 | K_{c0} | 11.45 | 13.81 | 15.98 | 18.1 | 20.2 | 22.25 |
| | t_p | 3.93 | 3.46 | 3.2 | 3.08 | 2.99 | 2.89 |
| | b | 0.92 | 0.932 | 0.941 | 0.948 | 0.953 | 0.957 |
| 50 | K_{c0} | 28.87 | 34.63 | 39.93 | 45.05 | 50.2 | 55.21 |
| | t_p | 3.98 | 3.49 | 3.23 | 3.1 | 2.99 | 2.91 |
| | b | 0.967 | 0.972 | 0.976 | 0.978 | 0.98 | 0.982 |
| 100 | K_{c0} | 57.9 | 69.3 | 79.9 | 90.1 | 100.2 | 110.2 |
| | t_p | 4.02 | 3.5 | 3.3 | 3.11 | 3.01 | 2.91 |
| | b | 0.983 | 0.986 | 0.988 | 0.989 | 0.990 | 0.991 |

FIG. 3.4: Relation entre KK_c et KK_{c0}

1. Réglage du gain K_c

Afin de connaître la nature de la relation entre le gain K_c du contrôleur FOF-PI et le gain K_{c0} du contrôleur proportionnel, utilisé dans l'expérience, nous avons tracé les valeurs de KK_c calculées théoriquement en utilisant la méthode IMC en fonction des valeurs du gain KK_{c0} . Il faut noter que, le fait de considérer $K = 1$ dans le modèle de l'équation (3.3) ne veut pas dire négliger le gain du système, mais il est pris en considération dans le gain du contrôleur qui devient égal à KK_{c0} .

Comme il est montré sur la figure (3.4) la relation entre KK_c et KK_{c0} est linéaire pour les systèmes avec $(T/\theta > 1)$. Par conséquent, cette relation peut être approximée par des droites de pentes A_{PI} , on écrit alors :

$$KK_c = A_{PI}KK_{c0} \quad (3.4)$$

$$K_c = A_{PI}K_{c0} \quad (3.5)$$

Comme le montre la figure (3.4), la valeur de la pente A_{PI} varie en fonction du dépassement, entre 0.91 pour un dépassement $M_p = 0.6$ jusqu'à 1.7261 pour un dépassement $M_p = 0.1$. La figure (3.5) montre le tracé exacte de cette pente A_{PI} en fonction du dépassement M_p (trait continu) et son approximation par un polynôme d'ordre deux (trait discontinu) obtenu en utilisant la

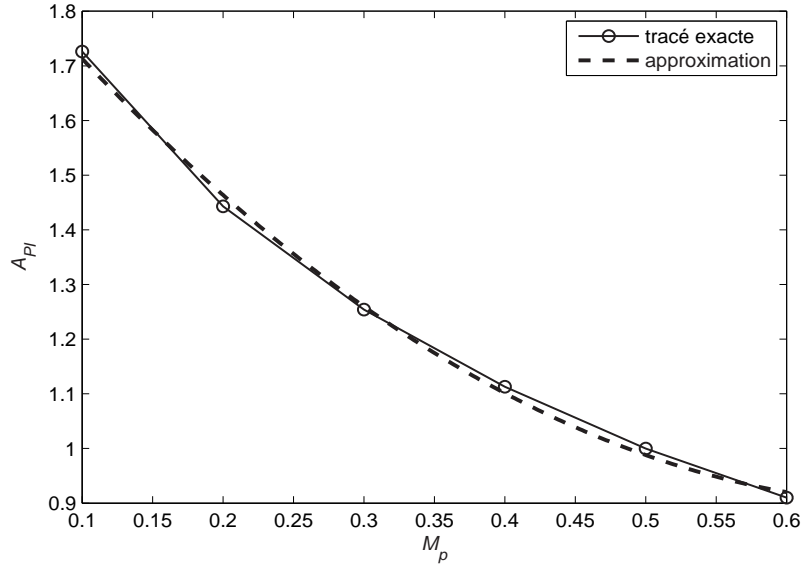


FIG. 3.5: Tracé de la pente A_{PI} en fonction du dépassement M_p

commande `cftool` de la boîte à outils de MATLAB (Matlab curve fitting toolbox), le polynôme obtenu est donné par :

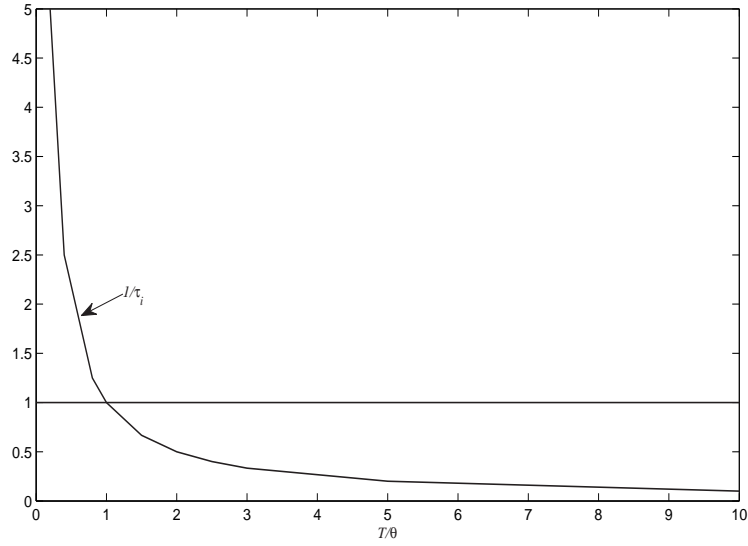
$$A_{PI} = 2.267M_p^2 - 3.173M_p + 2.008 \quad (3.6)$$

Remarque 3 *Pour les systèmes à retard dominant ($T/\theta < 1$) la relation entre KK_c et KK_{c0} n'est pas vraiment linéaire, comme le montre le zoom de la figure (3.4). Néanmoins, cela n'aura pas une grande influence sur le résultat car pour ce genre de systèmes l'action proportionnelle est moins importante par rapport à l'action intégrale.*

En effet, calculons et traçons les valeurs de $1/\tau_i$ pour quelques systèmes, c'est-à-dire en fonction de quelques valeurs de T/θ en utilisant l'expression obtenue par la méthode IMC donnée par

$$\tau_i = T \quad (3.7)$$

Les résultats illustrés sur la figure (3.6) montrent que pour des systèmes possédant le rapport $T/\theta < 1$ l'action intégrale $1/\tau_i$ est beaucoup plus importante par rapport à 1 c'est-à-dire plus importante par rapport à l'action proportionnelle. Par conséquent, même si l'erreur d'approximation est importante dans cet intervalle, elle n'aura pas une grande influence sur les résultats.

FIG. 3.6: Variation de $1/\tau_i$ en fonction du rapport T/θ

2. Réglage de la constante de temps d'intégration τ_i

Il s'agit de trouver la relation entre la constante d'intégration τ_i calculée par la méthode IMC et les données obtenues de l'expérience sur plusieurs systèmes à retard. Rappelons qu'avec la méthode IMC, lorsque le retard est approximé par la formule de Taylor du premier ordre, nous avons obtenu un contrôleur FOF-PI composé d'un filtre fractionnaire en série avec un contrôleur PI classique dont les paramètres sont :

$$K_c = \frac{T}{K\theta} \quad (3.8)$$

$$\tau_i = T \quad (3.9)$$

A partir de ces deux équations, on obtient :

$$\tau_i = KK_c\theta \quad (3.10)$$

En remplaçant l'équation (3.4) dans l'équation (3.10), on obtient :

$$\tau_i = A_{PI}KK_{c0}\theta \quad (3.11)$$

KK_{c0} peut être calculé en utilisant le gain statique (b) obtenu de la réponse indicielle. En effet, b représente le gain statique du système en boucle fermée supposé stable. Analytiquement son

expression est donnée par

$$b = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \right) = \frac{KK_{c0}}{1 + KK_{c0}} \quad (3.12)$$

on obtient

$$KK_{c0} = \left| \frac{b}{1-b} \right| \quad (3.13)$$

La valeur absolue est ajoutée pour éviter les valeurs négatives lorsque b est supérieur à 1. En remplaçant cette expression dans l'équation (3.11) on obtient :

$$\tau_i = A_{PI} \left| \frac{b}{1-b} \right| \theta \quad (3.14)$$

Pour obtenir l'expression de τ_i en fonction des informations obtenues de la réponse indicielle uniquement, il est encore nécessaire d'estimer la valeur de θ qui est un paramètre inconnu, puisqu'on ne dispose pas du modèle du système à contrôler.

La valeur de θ peut être déterminée directement à partir de la réponse indicielle en utilisant une simple lecture. Néanmoins, pour les systèmes possédant un retard trop petit par rapport à la constante de temps cela est impossible. Pour cette raison, nous avons proposé une autre démarche qui consiste à estimer la valeur de θ en utilisant le temps du premier dépassement relevée de la réponse indicielle. Pour ce faire, nous avons tracé le rapport θ/t_p en fonction du dépassement M_p pour les 15 systèmes pris en considération.

La figure (3.7) représente l'évolution de θ/t_p en fonction du dépassement M_p . Cette figure montre que, pour les systèmes dont le rapport $T/\theta = 0.1$, le rapport θ/t_p est presque constant et égal à 0.5 pour toutes les valeurs du dépassements M_p . Pour les systèmes avec $T/\theta = 100$, θ/t_p varie entre 0.25 pour un dépassement $M_p = 0.1$ jusqu'à 0.32 pour un dépassement $M_p = 0.6$. Pour le reste des systèmes les valeurs de θ/t_p sont comprises entre ces deux bandes. Ainsi, pour tous les systèmes (de $T/\theta = 0.1$ à $T/\theta = 100$) la valeur du rapport θ/t_p est comprise entre 0.25 et 0.5. (Noter que si nous considérons $\theta \neq 1$ on aura les mêmes résultats puisque t_p sera décalé de la même valeur que θ).

La valeur du retard θ peut être alors déterminée en fonction du temps du premier dépassement t_p par

$$\eta_{min} t_p \leq \theta \leq \eta_{max} t_p \quad (3.15)$$

avec : $\eta_{min} = 0.25$ et $\eta_{max} = 0.5$

Où bien, il peut être exprimé par

$$\theta = \eta t_p \quad (3.16)$$

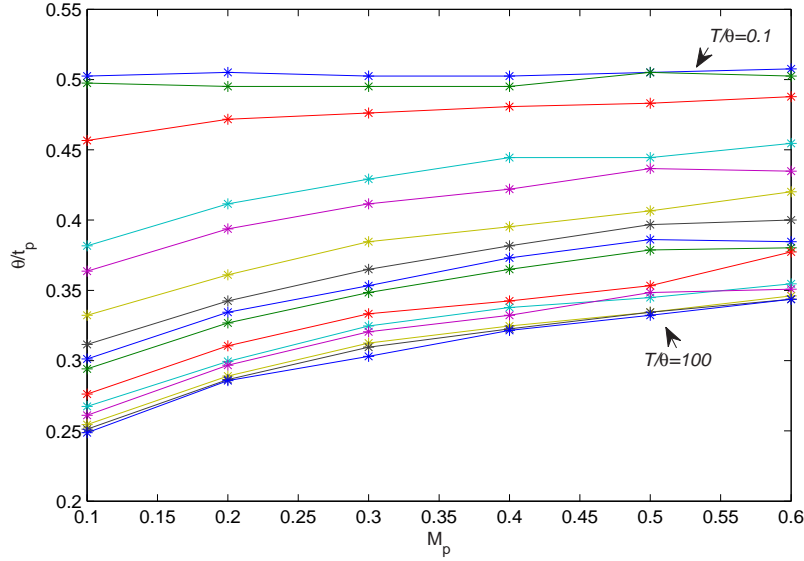


FIG. 3.7: Variation de θ/t_p en fonction de M_p pour les 15 systèmes

où η est un paramètre dont la valeur est comprise entre 0.25 et 0.5.

En remplaçant l'équation (3.16) dans l'équation (3.14), on obtient l'expression finale de τ_i , elle est donnée par

$$\tau_i = A_{PI} \left| \frac{b}{1-b} \right| \eta t_p \quad (3.17)$$

Dans leurs développement des expressions de la méthode SOM pour le réglage du contrôleur PID, Shamsuzzoha et Skogestad ont fixé le paramètre η à deux valeurs intermédiaires, $\eta = 0.305$ pour les systèmes intégrateurs et $\eta = 0.43$ pour les systèmes dont $T/\theta < 8$. Pour notre part, nous proposons de laisser ce paramètre à la disposition de l'ingénieur comme un moyen d'ajustage, pour qu'il puisse intervenir afin d'ajuster éventuellement la réponse indicielle de la boucle fermée. Cela va donner plus de souplesse à la méthode SOM.

3. Réglage des paramètres du filtre fractionnaire

Le problème majeur de la synthèse des contrôleurs fractionnaires est la détermination des ordres non entiers qu'ils contiennent car ces derniers sont des puissances de l'opérateur de Laplace et non pas des coefficients multiplicatifs comme dans le cas des contrôleurs entiers. Dans le cas du contrôleur FOF-PID, ce problème a été résolu grâce à la méthode IMC utilisée pour la synthèse

du contrôleur et la fonction idéale de Bode utilisée comme modèle de référence de la boucle fermée.

En utilisant la méthode IMC (le retard étant approximé par la formule de Taylor du premier ordre) nous avons obtenu un contrôleur FOF-PI dont le filtre fractionnaire est :

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s^\gamma} \quad (3.18)$$

avec

$$\tau_f = \frac{\tau_c}{\theta} \quad \text{et} \quad \gamma = \lambda \quad (3.19)$$

τ_c et λ sont les paramètres du modèle de référence fixés par l'ingénieur selon les objectifs. La valeur de θ peut être déduite à partir de l'expérience, elle est donnée par l'équation (3.16). En remplaçant l'expression de θ dans l'équation (3.19), on obtient

$$\tau_f = \frac{\tau_c}{\eta t_p} \quad (3.20)$$

3.4.2 Réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID

Afin de développer les expressions des paramètres du contrôleur FOF-PID, nous avons suivi la même démarche que celle appliquée pour le contrôleur FOF-PI. Nous avons utilisé les résultats de l'expérience effectuée sur une large gamme de processus du premier ordre à retard, regroupés dans les tableaux (3.2) et (3.3). Néanmoins, les expressions des paramètres du contrôleur FOF-PID obtenues analytiquement par la méthode IMC étant différentes de celles des paramètres du contrôleur FOF-PI, il est nécessaire de développer d'autres expressions pour le réglage du contrôleur FOF-PID.

1. Réglage du gain K_c du contrôleur

Les valeurs du gain K_c sont calculées d'abord en utilisant son expression obtenue par la méthode IMC, donnée par l'équation (2.79) avec $K = \theta = 1$ comme pour le régulateur FOF-PI. Pour trouver la relation entre K_c et K_{c0} , nous avons tracé KK_{c0} en fonction de KK_c , comme il est illustré sur la figure (3.8). Dans ce cas aussi, une relation approximativement linéaire est obtenue mais les valeurs des pentes des droites sont différentes que celles de la figure (3.4), ce qui est logique, puisque les valeurs de K_c sont différentes. On peut alors écrire

$$KK_c = A_{PID}KK_{c0} \quad (3.21)$$

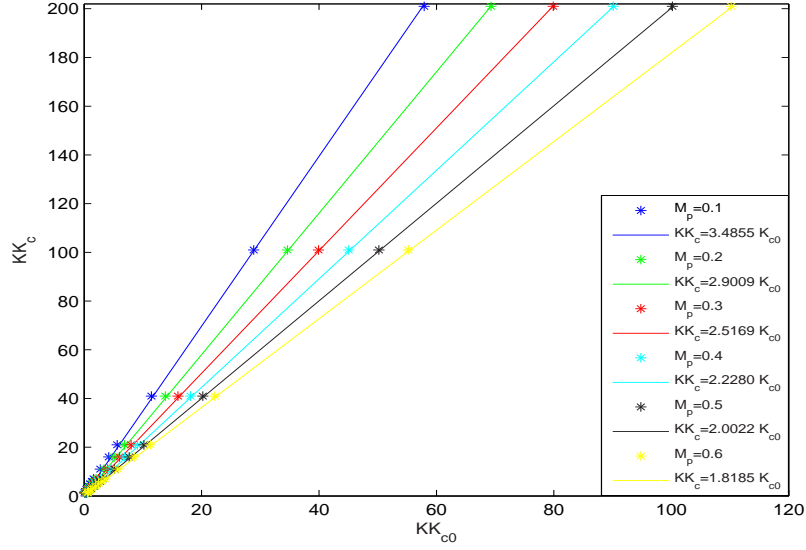


FIG. 3.8: Relation entre KK_c et KK_{c0} pour un contrôleur FOF-PID

Pour trouver la nouvelle expression de la pente A_{PID} , nous avons tracé ses valeurs en fonction du dépassement M_p , comme le montre la figure (3.9). Le tracé ainsi obtenu est approximé par une parabole en utilisant la fonction *cftool* de MATLAB, son expression est donnée par :

$$A_{PID} = 4.709M_p^2 - 6.531M_p + 4.064 \quad (3.22)$$

2. Réglage de la constante d'intégration τ_i

Rappelons que les expressions des paramètres de la partie entière du contrôleur FOF-PID obtenus avec la méthode IMC sont :

$$K_c = \frac{2T + \theta}{K\theta} \quad (3.23)$$

$$\tau_i = T + \frac{\theta}{2} \quad (3.24)$$

$$\tau_d = \frac{T\theta}{2T + \theta} \quad (3.25)$$

à partir de l'équation (3.23) on peut exprimer T en fonction de KK_c et θ , on trouve

$$T = \frac{KK_c\theta - \theta}{2} \quad (3.26)$$

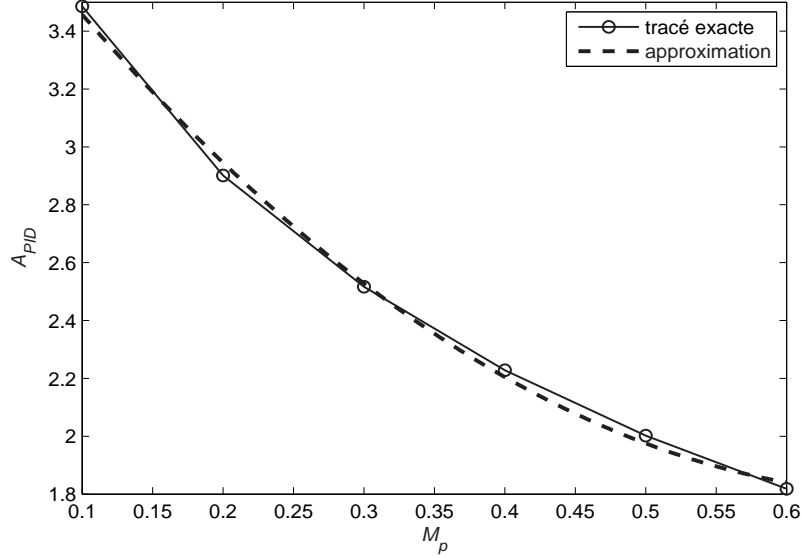


FIG. 3.9: Variation de la pente A_{PID} en fonction du dépassement M_p

En ajoutant $\frac{\theta}{2}$ à l'équation (3.26), on obtient

$$T + \frac{\theta}{2} = \frac{KK_c\theta - \theta}{2} + \frac{\theta}{2} \quad (3.27)$$

De l'équation (3.27) et (3.24) on obtient

$$\tau_i = \frac{1}{2}KK_c\theta \quad (3.28)$$

En remplaçant l'équation (3.21) dans l'équation (3.28), on aura

$$\tau_i = \frac{1}{2}A_{PID}KK_{c0}\theta \quad (3.29)$$

D'un autre côté, nous avons l'expression du gain statique donné par

$$KK_{c0} = \left| \frac{b}{1-b} \right| \quad (3.30)$$

et θ peut être estimé par

$$\theta = \eta t_p \quad 0.25 \leq \eta \leq 0.5 \quad (3.31)$$

En remplaçant les expressions (3.30) et (3.31) dans l'équation (3.29), on obtient l'expression finale de la constante d'intégration τ_i .

$$\tau_i = \frac{1}{2}A_{PID} \left| \frac{b}{1-b} \right| \eta t_p \quad (3.32)$$

3. Réglage de la constante de dérivation τ_d

l'expression de τ_d , donné par l'équation (3.25), peut être écrite comme suit :

$$\tau_d = \frac{T}{2\left(\frac{T}{\theta}\right) + 1} \quad (3.33)$$

En remplaçant l'équation (3.26) dans l'équation (3.33), on obtient

$$\tau_d = \frac{1}{2}\theta \left(1 - \frac{1}{KK_c}\right) \quad (3.34)$$

En remplaçant KK_c par son expression donnée par l'équation (3.21) on aura

$$\tau_d = \frac{1}{2}\theta \left(1 - \frac{1}{A_{PID}KK_{c0}}\right) \quad (3.35)$$

A partir des équations (3.30), (3.31) et (3.35) on obtient l'expression finale de la constante de temps de dérivation τ_d

$$\tau_d = \frac{1}{2}\eta t_p \left(1 - \frac{1}{A_{PID} \left|\frac{b}{1-b}\right|}\right) \quad (3.36)$$

4. Réglage des paramètres du filtre fractionnaire

L'expression du filtre fractionnaire obtenue par la méthode IMC est donnée par

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s^\gamma} \quad \text{avec} \quad \tau_f = \frac{2\tau_c}{\theta} \quad \text{et} \quad \gamma = \lambda \quad (3.37)$$

En remplaçant θ par son expression (équation (3.31)) on obtient la constante du filtre τ_f

$$\tau_f = \frac{1}{\eta} \frac{2\tau_c}{t_p} \quad (3.38)$$

τ_c et λ sont les paramètres du modèle de référence fixés par l'ingénieur.

Remarque 4 Nous avons considéré η comme un paramètre d'ajustement de la réponse indicielle mis à la disposition de l'ingénieur. Cependant, nous avons constaté que ce paramètre figure dans la constante de temps τ_f du filtre fractionnaire et dans les constantes de temps τ_i et τ_d du régulateur PID. Afin de pouvoir ajuster la partie fractionnaire et la partie entière séparément, nous avons proposé de considérer ce paramètre comme étant deux paramètres distinct, c'est-à-dire on garde l'appellation " η " dans les paramètres du PID et on l'appelle " ρ " dans la constante de temps du filtre, ainsi on aura deux paramètres qui peuvent être ajustés séparément.

TAB. 3.4: Paramètres du contrôleur pour différentes valeurs de η . (avec IMC : $K_c = 10$, $\tau_i = 5$ et $M_p = 0.21$.

| | méthode proposée | | |
|--------|------------------|----------|-------|
| η | K_c | τ_i | M_p |
| 0.25 | 10.08 | 3.93 | 0.29 |
| 0.32 | 10.08 | 5.03 | 0.20 |
| 0.37 | 10.08 | 5.82 | 0.17 |
| 0.5 | 10.08 | 7.87 | 0.11 |

3.4.3 Influence des paramètres η et ρ sur la réponse indicielle

Il est intéressant d'étudier l'influence des paramètres η et ρ sur le comportement du système contrôlé afin de savoir comment choisir leurs valeurs dans l'intervalle $[0.25, 0.5]$. Pour ce faire, considérons le système décrit par la fonction de transfert du premier ordre à retard :

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{1 + 5s} \quad (3.39)$$

Le modèle de référence choisi pour la synthèse du contrôleur FOF-PID est donné par la fonction de transfert $G_{ref}(s)$:

$$G_{ref}(s) = \frac{1}{1 + 2s^{1.4}} \quad (3.40)$$

qui correspond à un dépassement $M_p = 0.2$ et le temps de réponse $t_s(2\%) = 7.65s$.

Dans l'objectif de montrer l'influence des paramètres η et ρ sur le comportement du système commandé, nous avons tracé la réponse indicielle du système en boucle fermée pour différentes valeurs de η et ρ . D'abord, on a fixé la valeur de ρ à 0.32 et on a fait varier la valeur de η dans l'intervalle $[0.25, 0.5]$. Ensuite, inversement, on a fixé η à 0.32 et on a fait varier la valeur de ρ dans l'intervalle $[0.25, 0.5]$ (0.32 est la valeur qui permet d'avoir le même résultat que celui obtenu par la méthode IMC). Les valeurs des paramètres des contrôleurs calculés en utilisant les deux méthodes, IMC et SOM avec 4 valeurs différentes de η sont regroupées dans le tableau (3.4) et les résultats de simulations sont illustrés sur la figure (3.10).

Comme le montre la figure (3.10) le dépassement dépend de la valeur de η . En effet pour $\eta = 0.32$ la réponse indicielle obtenue avec la méthode proposée est similaire à celle obtenue avec la méthode IMC. En augmentant la valeur de ce paramètre le dépassement diminue et en le diminuant les oscillations deviennent importantes, donc le dépassement est inversement

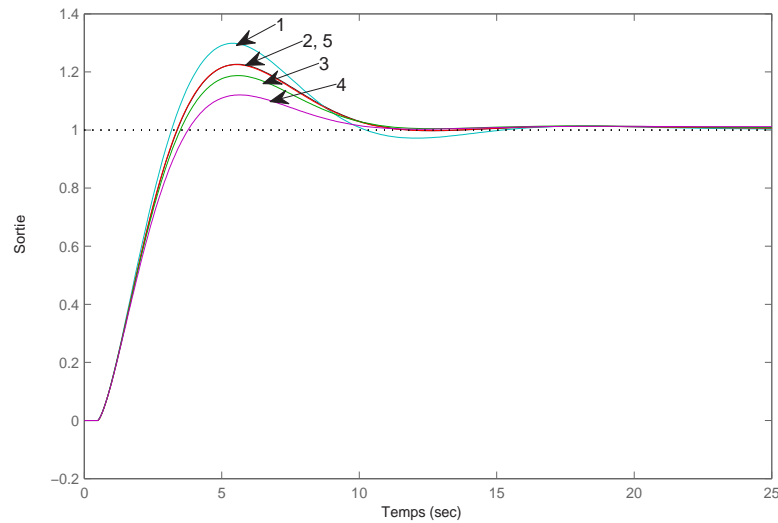


FIG. 3.10: Influence du paramètre η sur la réponse indicielle (1 : $\eta = 0.25$, 2 : $\eta = 0.32$, 3 : $\eta = 0.37$, 4 : $\eta = 0.50$, 5 : *IMC*).

proportionnel à η .

La figure (3.11) montre la réponse indicielle du système en boucle fermée pour différentes valeurs de ρ avec le paramètre η fixé à 0.32. Cette figure montre que le paramètre ρ a une influence sur le temps de réponse. En effet, en augmentant la valeur de ρ le temps de réponse diminue et inversement lorsque on diminue la valeur de ρ le temps de réponse devient important.

Nous avons illustré à travers cet exemple que les deux paramètres η et ρ agissent différemment sur la réponse du système en boucle fermée. C'est ainsi que nous avons eu l'idée de les considérer comme des paramètres d'ajustement qui permettent d'améliorer la réponse du système en boucle fermée, ainsi η sert à ajuster le dépassement et ρ sert à ajuster le temps de réponse. La démarche générale à suivre pour fixer ces paramètres est la suivante : d'abord on fixe η et ρ à une valeur intermédiaire d'environ 0.3, si la réponse a besoin d'être ajustée, l'ingénieur peut le faire en agissant sur le paramètre η pour ajuster le dépassement où ρ pour ajuster le temps de réponse.

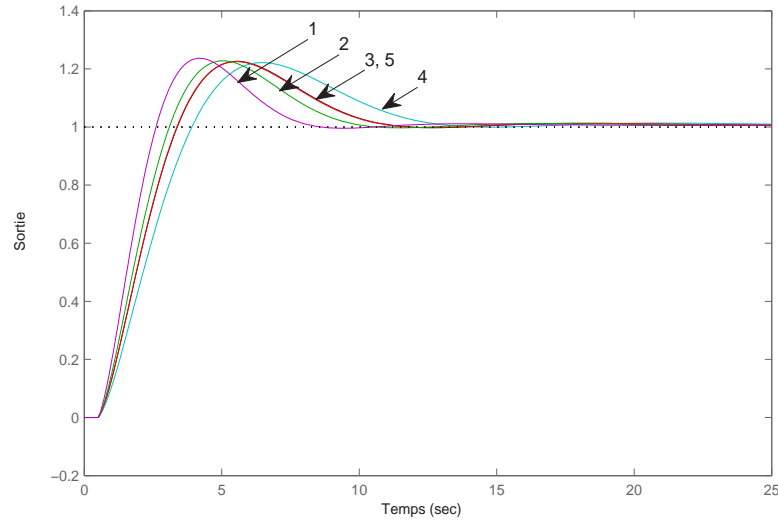


FIG. 3.11: Influence du paramètre ρ sur la réponse indicielle ($1 : \rho = 0.5$, $2 : \rho = 0.37$, $3 : \rho = 0.32$, $4 : \rho = 0.25$, $5 : IMC$).

3.5 Tests et résultats

Plusieurs simulations sont réalisées afin de valider et tester l'efficacité de la méthode SOM. Cette dernière est utilisée pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID pour la commande de trois exemples de fonctions de transferts différents, évidemment, ces systèmes sont supposés inconnus, puisque la méthode proposée n'exige pas la connaissance du modèle du système à commander. Ces modèles sont utilisés uniquement pour générer la réponse indicielle du système en boucle fermée avec le contrôleur proportionnel et calculer les paramètres du contrôleur FOF-PID avec la méthode analytique IMC afin d'effectuer une étude comparative entre la méthode de synthèse IMC et la méthode de réglage SOM.

La simulation des contrôleurs fractionnaires dans les trois exemples est effectuée en utilisant l'approximation du dérivateur d'ordre non entier en utilisant la méthode d'approximation d'Oustaloup dans une bande de fréquence $[10^{-4}10^{+4}]$ avec 10 cellules.

3.5.1 Exemple 1

Pour montrer que la méthode SOM peut fonctionner sur une large gamme de processus, nous considérons dans cet exemple un système décrit par un modèle de dimension 4. L'objectif est

d'évaluer l'efficacité de la méthode pour la commande de ce type de systèmes en effectuant une étude comparative entre les contrôleurs réglés par la méthode SOM et ceux obtenus en utilisant la méthode de synthèse IMC. On évaluera également la robustesse de ces contrôleurs en effectuant une petite variation des paramètres du système. Le modèle considéré est décrit par la fonction de transfert [71] :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.2s+1)(0.04s+1)(0.008s+1)} \quad (3.41)$$

Pour la synthèse du contrôleur par la méthode IMC, ce modèle de dimension 4 est approximé par un modèle du premier ordre à retard donné par

$$G_{app}(s) = \frac{e^{-0.22s}}{(1+1.1s)} \quad (3.42)$$

Le modèle de référence de la boucle fermée utilisé pour la synthèse du contrôleur fractionnaire est choisit tel que

$$G_{ref}(s) = \frac{1}{1+s^{1.25}} \quad (3.43)$$

avec $\lambda = 0.25$ (correspond à un dépassement $M_p = 0.1$) et $\tau_c = 1$ sont choisis arbitrairement.

Les contrôleurs obtenus par la méthode IMC sont donnés par

$$C_{PI-IMC}(s) = \frac{1}{1+4.46s^{0.25}} (4.74) \left(1 + \frac{1}{1.07s}\right) \quad (3.44)$$

$$C_{PID-IMC}(s) = \frac{1}{1+8.93s^{0.25}} (10.49) \left(1 + \frac{1}{1.18s} + 0.10s\right) \quad (3.45)$$

Pour utiliser la méthode que nous avons développé, nous avons effectué une expérience en boucle fermée avec un contrôleur proportionnel de gain K_{c0} et nous avons également enregistré la réponse indicielle générée. Les informations obtenues à partir de cette réponse indicielle sont : $K_{c0} = 3$, $M_p = 0.10$, $t_p = 0.922$ et $b = 0.75$.

Les contrôleurs finaux obtenus avec la méthode SOM après l'ajustement des paramètres η et ρ à 0.25 sont donnés par

$$C_{PI-SOM}(s) = \frac{1}{1+4.35s^{0.25}} (5.11) \left(1 + \frac{1}{1.17s}\right) \quad (3.46)$$

$$C_{PID-SOM}(s) = \frac{1}{1+8.69s^{0.25}} (10.32) \left(1 + \frac{1}{1.33s} + 0.12s\right) \quad (3.47)$$

Les équations ((3.44) à (3.47)), montrent que les valeurs des paramètres des contrôleurs $C_{PI-SOM}(s)$

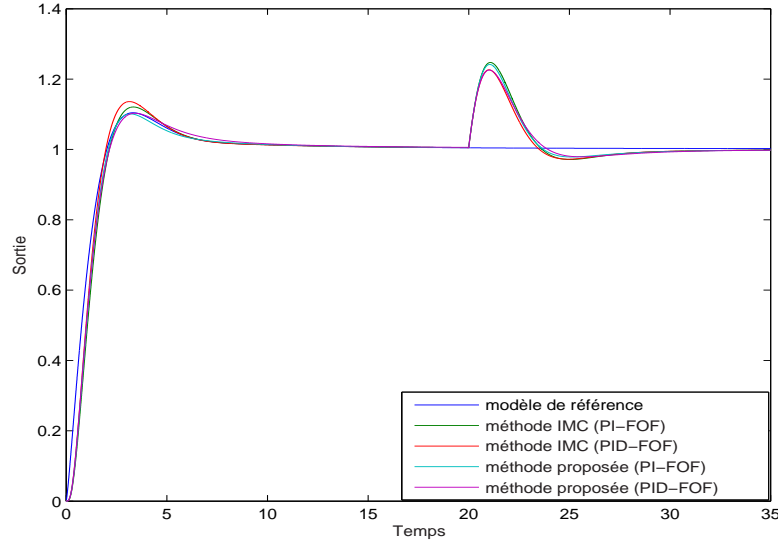


FIG. 3.12: Réponse indicielle en boucle fermée en présence de perturbations et de bruits gaussien avec les contrôleurs C_{PI-IMC} , $C_{PID-IMC}$, C_{PI-SOM} et $C_{PID-SOM}$.

et $C_{PID-SOM}(s)$ calculées en utilisant la méthode SOM sont très proches des valeurs des paramètres des contrôleurs $C_{PI-IMC}(s)$ et $C_{PID-IMC}(s)$ calculées par la méthode IMC, ce qui montre l'efficacité de cette méthode empirique.

l'objectif de la commande est non seulement imposer au système en boucle fermée un certain comportement mais également maintenir ce comportement même lorsqu'il y a de petites variations des paramètres du système où bien en présence de perturbations externes. Pour tester cette robustesse, une perturbation d'amplitude 0.5 est injectée à $t = 20s$ et un bruit Gaussien de variance 1 est ajouté au signal de sortie. La fonction de transfert $g(s)$ de la perturbation est choisie arbitrairement, égale à : $g(s) = \frac{1}{1.07s+1}$. La figure (3.12) montre les résultats de simulation en utilisant les contrôleurs C_{PI-IMC} , $C_{PID-IMC}$, C_{PI-SOM} et $C_{PID-SOM}$.

Les caractéristiques temporelles (le dépassement M_p , le temps de réponse à 2%), l'erreur quadratique moyenne MSE et la sensibilité maximale M_s de la réponse indicielle avec les deux méthodes appliquées sont regroupées dans le tableau (3.5) et les données concernant le rejet de perturbations sont résumées dans le tableau (3.6). Ces résultats montrent que la méthode empirique SOM donne de très bons résultats comparativement aux résultats obtenus avec la méthode IMC. En plus, les régulateurs obtenus sont insensibles aux bruits gaussiens additifs et rejettent correctement les perturbations externes.

TAB. 3.5: Performances de la boucle fermée (le comportement désiré : $M_p = 0.10$ et $t_{r(2\%)} = 6.6s$)

| | IMC | | | | Méthode proposée | | | |
|------------------|-------|--------------|----------------------|-------|------------------|--------------|----------------------|-------|
| | M_p | $t_{r(2\%)}$ | MSE | M_s | M_p | $t_{r(2\%)}$ | MSE | M_s |
| <i>PI – FOF</i> | 0.12 | 6.4 | 1.9×10^{-3} | 1.33 | 0.10 | 6.4 | 1.4×10^{-3} | 1.32 |
| <i>PID – FOF</i> | 0.13 | 6.4 | 5.8×10^{-4} | 1.24 | 0.10 | 7.4 | 5.8×10^{-4} | 1.24 |

TAB. 3.6: Performances de la boucle fermée par rapport au rejet de perturbations

| | IMC | | Méthode proposée | |
|------------------|-------|--------------|------------------|--------------|
| | M_p | $t_{r(2\%)}$ | M_p | $t_{r(2\%)}$ |
| <i>PI – FOF</i> | 0.25 | 23.16 | 0.24 | 23.16 |
| <i>PID – FOF</i> | 0.22 | 23 | 0.23 | 23.20 |

Pour tester la robustesse vis à vis des variations des paramètres, une variation de $\pm 50\%$ du gain du système a été effectuée. Les effets de cette variation sont illustrés sur la figure (3.13) et la figure (3.14) avec des valeurs différentes de τ_c .

La figure (3.13) montre que le dépassement varie avec la variation du gain lorsque τ_c est égal à 1. La figure (3.14) montre que lorsque la constante τ_c choisit plus grande (égal à 4 c-à-d système lent) le dépassement reste constant insensible à la variation du gain. Alors on peut dire que cette commande peut être robuste par rapport aux variations de gain si la valeur de la constante de temps τ_c est choisie suffisamment importante. Cependant, une valeur élevée de la constante de temps rend le système très lent, pour cette raison la valeur de τ_c doit être fixée à une valeur qui permet d'avoir un bon compromis entre robustesse et performance.

3.5.2 Exemple 2

Dans cet exemple on a utilisé les résultats des simulations expérimentaux effectués par Monje et al dans [50], dans le but de comparer les résultats obtenus avec le contrôleur FOF-PID dimensionné avec la méthode SOM et ceux obtenus par le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ utilisé par l'auteur.

Dans [50] une plate forme expérimentale (Basic Process Rig 38–100 Feedback Unit) a été utilisée pour tester un contrôleur d'ordre fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$) conçu avec une méthode d'optimisation. Il s'agit d'un circuit d'écoulement d'eau à faible pression monté sur un banc et complètement

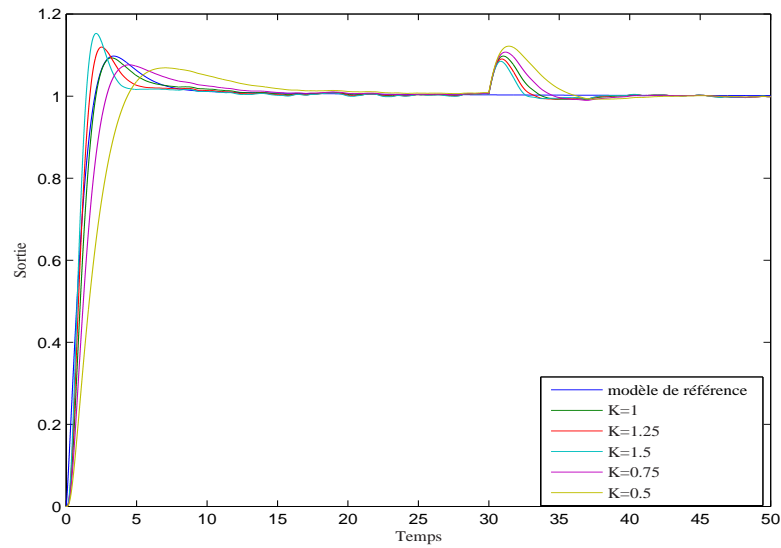


FIG. 3.13: Réponse indicielle du système contrôlé avec $C_{PI-SOM}(s)$, pour différentes valeurs de gain K et $\tau_c = 1$.

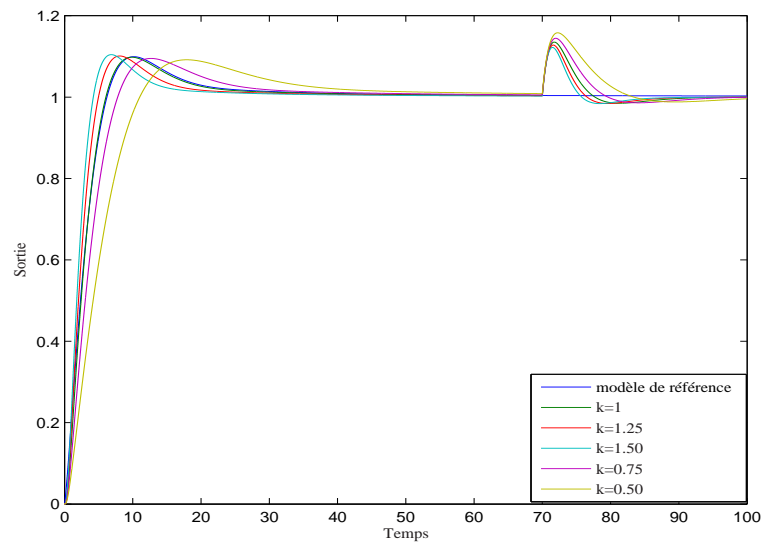


FIG. 3.14: Réponse indicielle du système contrôlé avec $C_{PI-SOM}(s)$, pour différentes valeurs du gain K et $\tau_c = 4$.

autonome. D'après Monje et al, le système est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre à retard, donnée par :

$$G_{app}(s) = \frac{3.13e^{-50s}}{433.33s + 1} \quad (3.48)$$

les objectifs de la commande dans [50] sont fixés dans le domaine fréquentiel (fréquence de coupure, $\omega_c = 0.008 \text{ rad/s}$ et la marge de phase, $\varphi_m = 60^\circ$). Pour évaluer les performances des deux contrôleurs, nous allons fixer des objectifs temporels qui permettent d'avoir la même réponse temporelle que celle obtenue dans [50]. c'est à dire, $M_p = 0.12$ et $t_r(2\%) = 680 \text{ s}$. Le modèle de référence obtenu en utilisant l'équation (2.53) qui satisfait ces exigences temporelles est :

$$G_{ref}(s) = \frac{1}{1 + 500s^{1.29}} \quad (3.49)$$

Le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ obtenu par Monje et al, en utilisant la fonction *fmincon* de toolbox optimisation de Matlab est :

$$C_{PI^\lambda D^\mu}(s) = 0.62 + \frac{0.01}{s^{0.90}} + 4.39s^{0.48} \quad (3.50)$$

Les contrôleur FOF-PI obtenus avec la méthode SOM et la méthode IMC sont respectivement C_{SOM} et C_{IMC} :

$$C_{SOM}(s) = \frac{1}{1 + 8.88s^{0.29}} (2.74) \left(1 + \frac{1}{505.13s} \right) \quad (3.51)$$

$$C_{IMC}(s) = \frac{1}{1 + 10s^{0.29}} (2.77) \left(1 + \frac{1}{433.33s} \right) \quad (3.52)$$

La figure (3.15) illustre les résultats obtenus avec les deux contrôleurs fractionnaires FOF-PI et $PI^\lambda D^\mu$, avec une perturbation d'amplitude 0.3 injectée à $t = 2000 \text{ s}$ afin de tester la robustesse de la commande. Le tableau (3.7) donne les performances du système en boucle fermée en valeurs numériques. Ces résultats satisfont les spécifications de performances puisque le dépassement est le même avec les deux contrôleurs ($M_p = 0.12$) et les temps de réponses sont très proches ($t_r(2\%) = 680 \text{ s}$ avec le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ et $t_r(2\%) = 684 \text{ s}$ avec le contrôleur FOF-PI).

La figure (3.16) montre l'évolution de la loi de commande obtenue avec les deux contrôleurs. Il est claire d'après cette figure que les valeurs des pics de ces deux signaux de commande sont largement différentes. en effet, avec le contrôleur FOF-PI la valeur du pic n'est que de 0.95 V , alors qu'avec le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ la valeur du pic est de 110.87 V . Cette valeur exorbitante de la commande est due à l'action dérivée du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$.

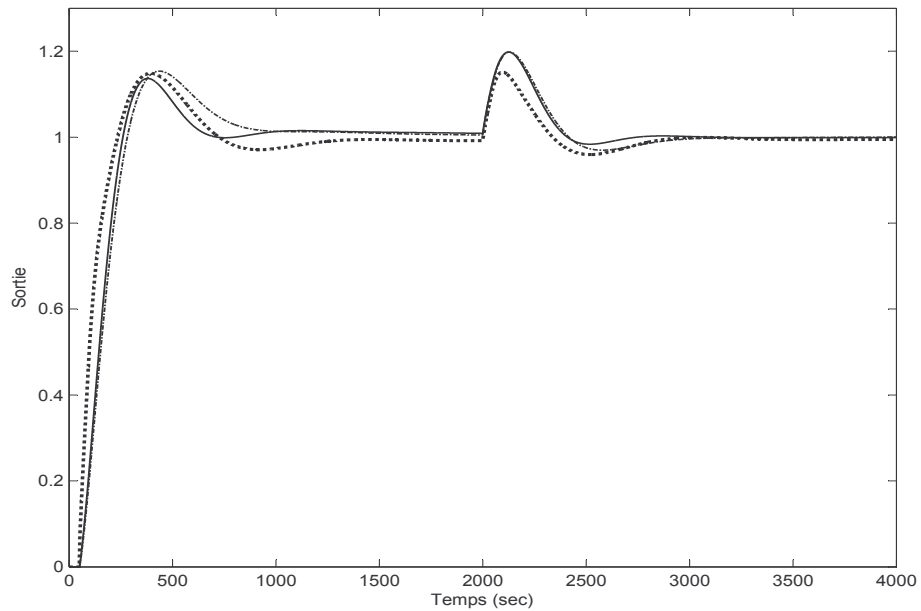


FIG. 3.15: Réponse indicielle en boucle fermée en présence de perturbations. (trait plein : FOF-PID réglé par SOM, trait mixte : FOF-PID calculé par IMC, trait pointillé : le contrôleur de Monje et al.

TAB. 3.7: Performances de la boucle fermée obtenues avec les différents contrôleurs

| | suivi de consigne | | rejet de perturbation | |
|------------------------|-------------------|------------|-----------------------|------------|
| | M_p | $t_r(2\%)$ | M_P | $t_r(2\%)$ |
| méthode de Monge et al | 0.12 | 680 | 0.15 | 2650 |
| méthode IMC | 0.15 | 800 | 0.18 | 2600 |
| méthode SOM | 0.12 | 684 | 0.18 | 2350 |

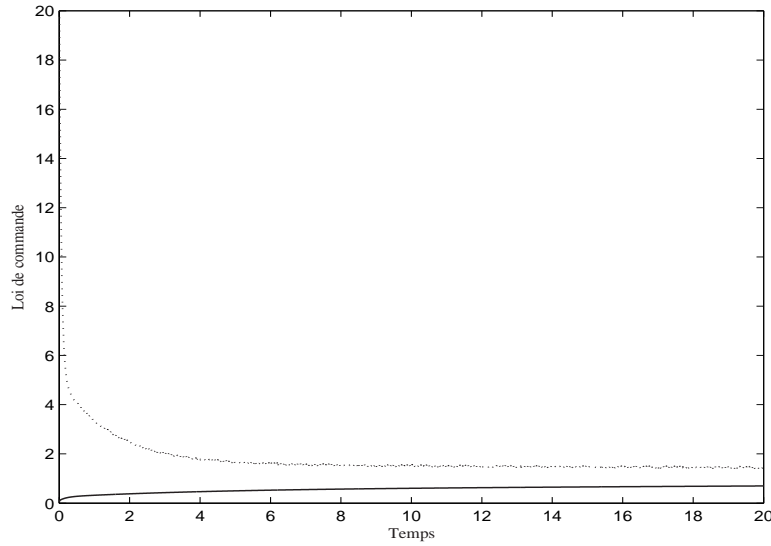


FIG. 3.16: Amplitude de la loi de commande : trait plein montre la méthode proposée et trait pointillé montre la méthode de monje et al.

En ajoutant un bruit gaussien de variance 1 et de moyenne nulle au signal de sortie (voir figure (3.17)), on observe qu'avec le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ on obtient un signal bruité. Par contre, le contrôleur FOF-PI est robuste par rapport aux bruit externes et cela est due à la présence d'un filtre et l'absence de l'action dérivée. Ajoutant à tous ces avantages la simplicité et la facilité de la méthode SOM utilisée pour le dimensionnement du contrôleur FOF-PI, comparativement à la complexité de la méthode d'optimisation non linéaire utilisée pour dimensionner le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$.

3.5.3 Exemple 3

Dans le but de tester la méthode SOM pour la commande des systèmes possédant un grand retard, nous considérons l'exemple proposé par Bettayeb et al dans [13] pour tester leur contrôleur fractionnaire basé sur le prédictor de Smith. Le système est décrit par la fonction de transfert de dimension 4 donnée par

$$G(s) = \frac{e^{-10.625s}}{(1+s)(1+0.5s)(1+1.25s)(1+0.125s)} \quad (3.53)$$

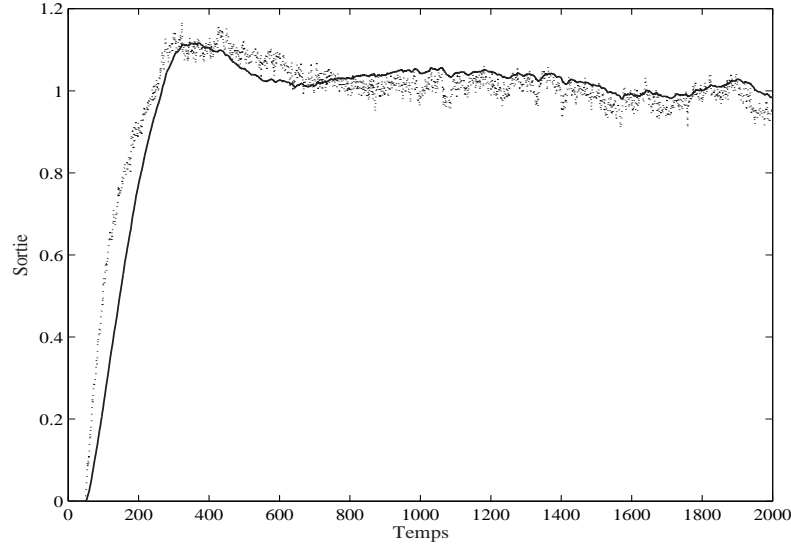


FIG. 3.17: Réponse indicielle de la boucle fermée avec bruit : trait plein avec le contrôleur FOF-PID et trait pointillé avec le contrôleur de Monje et al.

En utilisant la méthode "half rule" de Skogestad [72] $G(s)$ peut être approximé par un modèle du premier ordre à retard $G_{app}(s)$.

$$G_{app}(s) = \frac{e^{-10.625s}}{1 + 1.25s} \quad (3.54)$$

Le modèle de référence de la boucle fermée $G_{ref}(s)$ est choisit de sorte à avoir en boucle fermée un dépassement $M_p = 0.1$, et la constante de temps $\tau_c = 10$ (on choisit $\tau_c = \theta$ pour ne pas avoir une commande agressive au démarrage à cause du retard).

$$G_{ref}(s) = \frac{1}{1 + 10s^{1.25}} \quad (3.55)$$

Le contrôleur FOF-PID obtenu avec la méthode SOM et le contrôleur basé sur le prédicteur de Smith (SP-FO-PID) sont respectivement C_{SOM} et C_{Smith} donnés par les équations (3.56) et (3.57).

$$C_{SOM}(s) = \frac{1}{1 + 0.94s^{0.25}} (0.17) \left(1 + \frac{1}{1.8s} \right) \quad (3.56)$$

$$C_{Smith}(s) = \frac{1}{10s^{0.25}} (1.25) \left(1 + \frac{1}{1.25s} \right) \quad (3.57)$$

Le contrôleur $C_{SOM}(s)$ est obtenu en fixant les valeurs des paramètres η et ρ à leurs valeurs maximales 0.5 qui correspondent à la réponse la plus rapide avec le plus petit dépassement qui

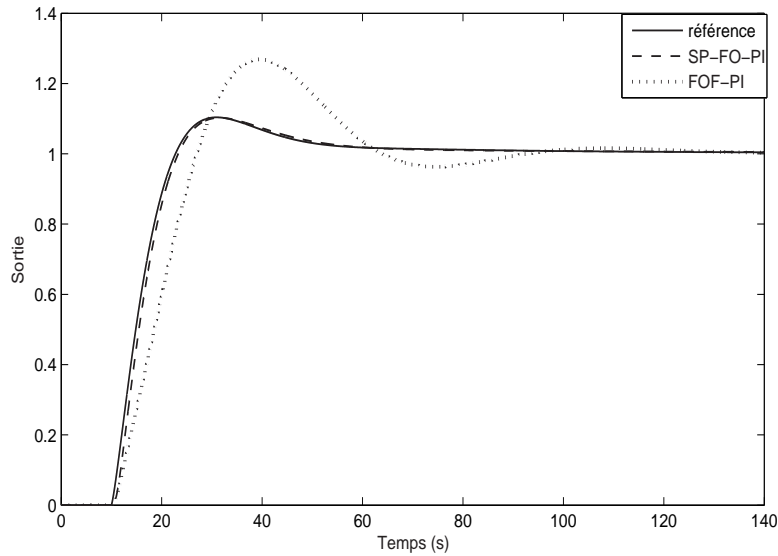


FIG. 3.18: Réponse indicielle du système en boucle fermée avec FOF-PI (trait pointillé), SP-FO-PI (trait discontinu) et le modèle de référence ($G_{ref}(s)$) (trait plein).

puisse être obtenue.

Les résultats obtenus avec les deux contrôleurs sont illustrés sur la figure (3.18). Cette figure montre que les résultats obtenus avec le contrôleur FOF-PI dont les paramètres sont réglés en utilisant la méthode SOM ne sont pas aussi bons que ceux obtenus avec le contrôleur basé sur le prédicteur de Smith. En effet, le temps de réponse et le dépassement fixé par le cahier des charges ne sont pas satisfaits. Ses résultats sont tout à fait logiques, car les régulateurs intégrant un prédicteur de Smith sont particulièrement conçus pour commander des systèmes dont le retard est très important. Dans la phase de synthèse du régulateur, le retard n'est pas pris en considération et lors de l'implémentation, l'effet du retard est éliminé en utilisant comme rétroaction la prédiction de la grandeur à régler. Cependant, la méthode SOM est basée sur la méthode IMC qui utilise dans sa synthèse l'approximation du retard, et cette approximation ne représente pas réellement le retard s'il est relativement important.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une méthode empirique pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID. Le principe de cette méthode est similaire à celui de la méthode de

Zeigler-Nichols. En effet, elle est basée sur la réponse indicielle du système en boucle fermée avec un contrôleur proportionnel de gain K_{c0} , ainsi les paramètres du contrôleur sont réglés en utilisant uniquement les mesures obtenues de cette réponse.

Plusieurs simulations numériques ont permis de mettre en évidence la capacité et l'efficacité de la méthode SOM pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID. La supériorité de la méthode apparait notamment pour la commande des systèmes de grandes dimensions. En effet, cette méthode peut être appliquée directement pour la commande de tels systèmes contrairement aux méthodes analytiques qui exigent non seulement la connaissance du modèle mais aussi la réduction où l'approximation du modèle de grande dimension, sachant que les résultats obtenus avec la méthode SOM sont très proches de ceux obtenus avec la méthode IMC. En plus, l'ingénieur a à sa disposition deux paramètres η et ρ qui peuvent être utilisés afin d'ajuster la réponse en boucle fermée de sorte d'avoir une réponse proche du comportement désiré, ce qui donne plus de souplesse à la méthode.

Il reste à valider cette conclusion sur un banc d'essai expérimental, ce qui fera l'objet de notre prochain chapitre. L'objectif étant la commande d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile en utilisant un contrôleur FOF-PI dont les paramètres sont réglés avec la méthode SOM.

Chapitre 4

Application de la méthode SOM sur un banc d'essai expérimental

4.1 Introduction

Le pendule inversé constitue un excellent support expérimental pour tester les performances et la robustesse des nouvelles lois de commande en raison de sa dynamique fortement non linéaire et instable. De plus, les applications similaires au fonctionnement d'un pendule inversé sont nombreuses et variées, puisqu'on peut les retrouver dans de plusieurs domaines. En robotique, par exemple, on peut citer le robot électroménager 'wheelie' (robot serveur), le nouveau moyen de transport, les véhicules légers à deux roues comme le Segway ou le B2 [3] où l'utilisateur est maintenu debout en équilibre grâce au modèle du pendule inversé. En aéronautique, le système de stabilisation d'une fusée ou d'un missile est également une application directe du pendule inversé [79]. Il existe plusieurs systèmes à pendule inversé, chacun ayant un intérêt particulier, le laboratoire *L2CSP* dispose d'un banc d'essai constitué d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile qui peut être utilisé pour valider expérimentalement les techniques de commande développées.

L'objectif de ce chapitre est de tester les performances et la robustesse du contrôleur FOF-PID dont les paramètres sont réglés par les deux méthodes : La méthode analytique dans laquelle le contrôleur est dimensionné sur la base d'un modèle mathématique et la méthode empirique que nous avons développée en se basant que sur la réponse indicielle de la boucle fermée obtenue

en utilisant un simple régulateur proportionnel. Les contrôleurs ainsi obtenus seront analysés en les implémentant sur le banc d'essai expérimental afin d'asservir la position du chariot sur le rail tout en maintenant le pendule dans une position haute instable.

4.2 Description du système pendule inversé monté sur chariot

Le système considéré est constitué d'un chariot mobile qui peut se déplacer en translation sur un rail de guidage de $0.8m$ de longueur à l'aide d'une courroie crantée et deux poulies qui transforment le mouvement de rotation d'un moteur électrique fixé à l'extrémité du rail en un mouvement de translation. Le chariot contient un arbre sur lequel deux pendules sont montés de part et d'autre du chariot à l'aide d'une articulation qui leurs permettent de tourner librement autour de cet arbre. Chaque pendule est constitué d'une tige (bras) en aluminium présentant à son extrémité une masse de forme cylindrique. La figure (4.1) montre la photo du banc d'essai et le schéma correspondant.

Le pendule inversé est commandé par un PC équipé d'une carte d'acquisition universelle (ADVANTECH PCI 1711) disposant de connecteurs extérieurs pour les entrées/sorties analogiques et digitales, son rôle principal est la conversion des signaux analogiques en numériques et vice-versa. Le dispositif de commande contient aussi un ensemble de capteurs installés sur la maquette pour assurer le retour d'information, deux capteurs de position qui fournissent la position du chariot sur le rail par rapport au centre et la position angulaire du pendule par rapport à la verticale et deux fins de course sont placés à chaque extrémité du rail et coupent la puissance lorsqu'ils sont activés. D'un boîtier de commande et un adaptateur (SCSI) dont le rôle est d'adapter des signaux entre la carte d'acquisition et les différents connecteurs de la base d'alimentation et aussi séparer ces différents signaux en fonction de leurs types.

En théorie, il est très simple de comprendre le principe de fonctionnement de ce système. Supposant que les deux pendules sont dans la position haute instable, lorsqu'ils se penchent dans un sens (droite ou gauche), le chariot doit se déplacer dans le même sens pour les rattraper afin de les maintenir stable dans cette position haute. L'exemple classique, pour bien comprendre ce principe de fonctionnement, est le jeu qui consiste à maintenir en équilibre un balai (sa tête en haut) dans la paume de la main, sauf que la main est libre de se déplacer dans n'importe

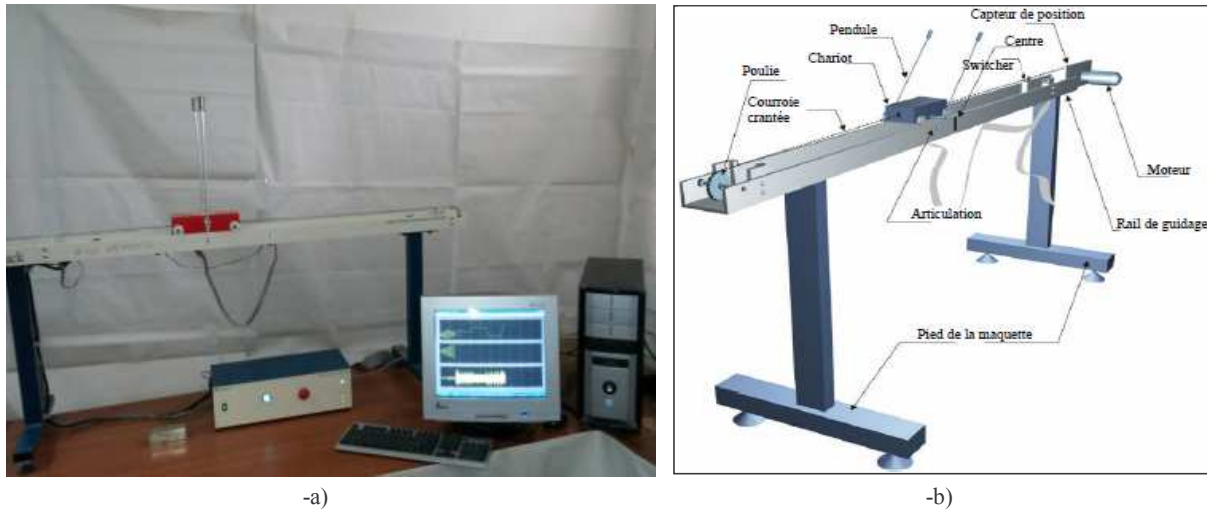


FIG. 4.1: Banc d'essai : -a) Photo de banc d'essai, -b) Synoptique de banc d'essai.

quelle direction pour maintenir le balai en équilibre, contrairement au chariot qui se déplace horizontalement sur le rail de guidage.

Sur le banc d'essai que nous utilisons, le fonctionnement n'est pas aussi simple, au repos le pendule est dans sa position d'équilibre stable basse. Par conséquent, la commande du pendule inversé monté sur chariot comporte trois phases. une phase d'initialisation pendant laquelle le chariot est amené manuellement au centre du rail et le pendule est immobilisé dans la position verticale basse stable. Une phase de redressement pendant laquelle les mouvements de va et vient du chariot permettent de redresser le pendule depuis sa position stable vers la position verticale haute instable. Enfin la phase de stabilisation dans laquelle on maintient le pendule dans cette position inversé instable tout en faisant suivre à la position du chariot une position de référence sur le rail. Dans ce travail on s'intéresse uniquement à cette dernière phase, notre objectif est alors de maintenir en équilibre le pendule inversé dans la position haute qui est une position normalement instable et de positionner le chariot dans une position donnée sur le rail.

4.3 Modélisation du système global moteur-chariot-pendule

Le système pendule inversé monté sur chariot est un système complexe instable et possédant des non linéarités. Par conséquent, la modélisation de son comportement réel conduit à un modèle

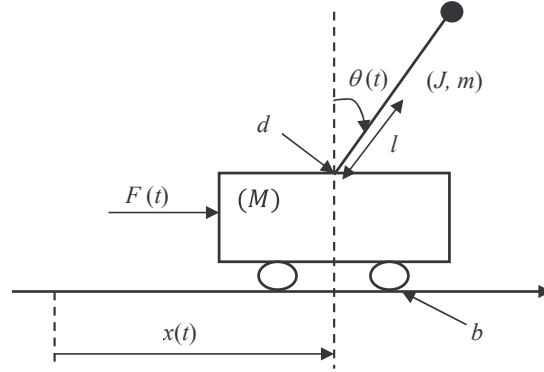


FIG. 4.2: Schéma de l'ensemble chariot-pendule.

non linéaire. Cependant la complexité du modèle non linéaire ne permet pas son utilisation pour la synthèse de contrôleurs linéaires de type FOF-PID. Néanmoins, l'objectif étant de stabiliser le pendule dans sa position haute et d'asservir la position du chariot, le modèle non linéaire du système global moteur-chariot-pendule sera linéarisé autour de la position d'équilibre instable du pendule. L'étape de modélisation ne sera pas détaillée ici, on donnera uniquement les équations essentielles qui seront utilisées pour la commande du système. Pour plus de détails sur cette modélisation, le lecteur peut consulter les références [18] et [38].

L'ensemble pendule-chariot représente un système SIMO (Single Input Multiple Output) possédant deux grandeurs à commander : la position du déplacement horizontal en mètre du chariot sur le rail, notée $x(t)$ et l'angle de rotation du pendule, notée $\theta(t)$. Le signe positif de $x(t)$ désigne le déplacement à droite du chariot, l'origine étant le centre du rail et le signe positif de $\theta(t)$ désigne la rotation du pendule dans le sens des aiguilles d'une montre. La valeur $\theta(t) = 0$ ou $\theta = 2\pi$ représente la position haute du pendule et la valeur $\theta = \pi$ représente sa position basse, comme le montre le schéma de la figure (4.2).

Le modèle de l'ensemble pendule-chariot obtenu en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange est donné par le système d'équations (4.1) [18].

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \\ ml\ddot{x} \cos \theta + N\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mg \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Où : $h = M + m$, $N = ml^2 + J$

Les paramètres du modèle sont : M : la masse du chariot, m : la masse du pendule et l : la demi longueur du pendule. b_f et d_f sont respectivement les coefficients de frottement des roues sur le

chariot et de rotation du pendule, g : l'intensité de la pesanteur, $F(t)$: la force exercée sur le chariot.

Le système pendule inversé-chariot est commandé par la force extérieur F générée par un moteur à courant continu commandé par l'induit avec une alimentation en tension $V_c(t)$ en volt. La relation entre la tension d'alimentation $V_c(t)$ du moteur et la force $F(t)$ est donnée par l'équation (4.2) [18].

$$F = \frac{K_m}{r_i R_a} V_c - \frac{K_m K_b}{r_i^2 R_a} \dot{x} \quad (4.2)$$

où

R_a : Résistance de l'induit, K_b : Constante électrique du moteur, K_m : Constante mécanique, r_i : périmètre de la poulie, \dot{x} est la vitesse du chariot. Les valeurs numériques des paramètres des modèles (4.1) et (4.2) sont résumées dans le tableau (4.1) [46].

Le modèle d'état linéaire du système global (pendule-chariot-moteur) obtenu après linéarisation autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$) du modèle non linéaire est donné par l'équation (4.3), où, l'entrée de commande $u(t)$ est la tension $V_c(t)$, le vecteur de sortie $y(t)$ contient les deux grandeurs $x(t)$ et $\theta(t)$ et le vecteur d'état est $z(t) = [x(t) \quad \dot{x}(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_f N}{hN - m^2 l^2} & \frac{N}{hN - m^2 l^2} & \frac{K_m K_b}{R_a r_i^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m b_f}{hN - m^2 l^2} + \frac{m l}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m K_b}{R_a r_i^2} & \frac{m g l}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN - m^2 l^2)} & \frac{-d_f}{N} + \frac{-m^2 l^2 d_f}{N(hN - m^2 l^2)} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_m N}{(hN - m^2 l^2) r_i R_a} \\ 0 \\ \frac{-m l}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m}{R_a r_i} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z \end{array} \right. \quad (4.3)$$

En remplaçant les paramètres du modèle (4.3) par leurs valeurs numériques, on obtient le modèle d'état décrit par l'équation (4.4) :

TAB. 4.1: Paramètres de l'ensemble pendule-chariot et moteur à courant continu.

| <i>pendule – chariot</i> | | | <i>Moteur</i> | | |
|--------------------------|---------------|--------------|-----------------|----------------------|--------------|
| <i>Notation</i> | <i>valeur</i> | <i>Unité</i> | <i>Notation</i> | <i>valeur</i> | <i>Unité</i> |
| M | 2.3 | Kg | R_a | 2.5 | Ω |
| m | 0.2 | Kg | L_a | 0.0025 | H |
| l | 0.3 | m | K_b | 0.05 | N/A |
| b_f | 0.00005 | $N.s/m$ | K_m | 0.05 | $N.m$ |
| d_f | 0.005 | $N.m.s/rad$ | J_m | 1.4×10^{-5} | $Kg.m^2$ |
| g | 9.81 | m/s^2 | f_m | 10^{-6} | $Kg.m^2/s$ |

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5786 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.2443 & 22.2449 & -0.1890 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3124 \\ 0 \\ -0.6719 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z \end{array} \right. \quad (4.4)$$

le modèle transfert correspondant est :

$$G_{ux}(s) = \frac{0.31242(s + 4.684)(s - 4.504)}{s(s - 4.61)(s + 4.829)(s + 0.5483)} \quad \text{et} \quad G_{u\theta}(s) = \frac{-0.67187s^2}{s(s - 4.61)(s + 4.829)(s + 0.5483)} \quad (4.5)$$

$G_{ux}(s)$ étant la fonction de transfert entre l'entrée de commande $V_c(t)$ et la position du chariot $x(t)$ et $G_{u\theta}(s)$ est la fonction de transfert entre $V_c(t)$ et la position du pendule $\theta(t)$.

4.4 Commande du pendule inversé

Le contrôle du pendule inversé se fait en trois phases (initialisation, redressement et stabilisation), après la phase d'initialisation qui consiste à positionner manuellement le chariot au centre du rail, vient la phase de redressement qui permet au pendule d'atteindre la position haute ($\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$) avec une vitesse angulaire minimale possible pour ne pas provoquer des réactions nerveuses du chariot et ne pas atteindre les fins de course sur le rail. Afin d'éviter ce phénomène un bloc de saturation est nécessaire pour limiter la tension d'alimentation du moteur

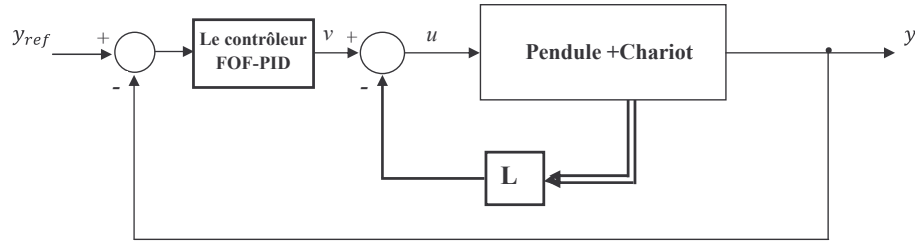


FIG. 4.3: Schéma bloc de la commande de stabilisation et d'asservissement du système réel.

entre $\pm 2.5V$. La commande assurant cette phase de redressement est une commande non linéaire basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov qui va faire converger l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute [18] et [38]. Cette commande ne sera utilisée que pour redresser le pendule dans une position haute, mais elle ne permet pas de le stabiliser. Pour passer de la loi de commande de redressement à la loi de commande de stabilisation, l'ajout d'une loi de commutation appropriée est nécessaire. Cette loi de commutation est appliquée lorsque la valeur absolue de l'angle est inférieure à $\pm 20^\circ$. En effet, quand le pendule atteint la zone $[-20^\circ, +20^\circ]$, le contrôleur assurant le redressement se déconnecte pour être remplacé par le contrôleur qui assure la stabilisation.

Rappelons que dans ce travail on ne s'intéresse pas à la phase de redressement du pendule, mais uniquement à la phase de stabilisation qui consiste à maintenir en équilibre le pendule inversé dans la position haute instable ($\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$) et l'asservissement de la position du chariot sur le rail. Pour cela nous avons besoin de deux lois de commande : Le modèle linéaire du système étant instable, la première loi de commande est destinée à la stabilisation du pendule dans la position haute, pour cela, nous avons opté pour la commande par retour d'état. Et afin d'asservir la position du chariot, nous utilisons un contrôleur de type FOF-PID calculé, d'une part, par les deux méthodes analytiques et d'autre part par la méthode empirique que nous avons développée dans le chapitre 3. le schéma de commande est illustré par la figure (4.3).

Pour stabiliser le système linéaire donné par l'équation (4.4), un retour d'état est calculé afin de placer les pôles en boucle fermée en : $-7.55, -3.24, -1.04 + i0.8, -1.04 - i0.8$ (se sont les valeurs obtenues en appliquant la commande LQR dans [18]).

En utilisant la formule d'Ackermann, on obtient le retour d'état dont la matrice gain L est : $L = [-6.3246 - 12.4177 - 109.2723 - 23.7867]$.

Les fonctions de transfert obtenues avec le retour d'état sont données par les équations (4.6) et

(4.7).

$$G_{vx}(s) = \frac{0.31242(s + 4.684)(s - 4.504)}{(s + 7.551)(s + 3.236)(s^2 + 2.082s + 1.706)} \quad (4.6)$$

$$G_{v\theta}(s) = \frac{-0.67187s^2}{(s + 7.551)(s + 3.236)(s^2 + 2.082s + 1.706)} \quad (4.7)$$

Où $G_{v\theta}(s)$ représente la fonction de transfert entre la nouvelle entrée $v(t)$ et la position du pendule $\theta(t)$ et $G_{vx}(s)$ est la fonction de transfert entre l'entrée $v(t)$ et la position du chariot $x(t)$.

Il faut noter que, sur le banc d'essai uniquement la position du chariot (x) et la position du pendule (θ) sont mesurées par des capteurs. Pour mettre en œuvre la commande par retour d'état nous avons besoin de mesurer également la vitesse linéaire du chariot (\dot{x}) et la vitesse angulaire du pendule ($\dot{\theta}$) qui sont non mesurables. Pour ce faire, nous avons utilisé deux dérivateurs suivis de deux filtres passe bas $G_{f\theta}(s)$ et $G_{fx}(s)$ pour limiter l'amplification des bruits :

$$G_{f\theta}(s) = \frac{0,9 \cdot 10^4}{s^2 + 70,7s + 10^4} \quad G_{fx}(s) = \frac{2 \cdot 10^4}{s^2 + 70,7s + 10^4} \quad (4.8)$$

Afin d'asservir la position du chariot sur le rail, nous utilisons le contrôleur FOF-PID, comme il est illustré sur le schéma de commande de la figure (4.3). Les paramètres de ce contrôleur sont calculés en utilisant deux méthodes différentes :

- La méthode analytique, en se basant sur le modèle linéaire stable $G_{vx}(s)$ donnée par l'équation (4.6). Ce modèle étant d'ordre 4, il permet d'utiliser les trois démarches présentées dans le chapitre 2. Dans la première démarche le modèle est d'abord approximé par un modèle de second ordre obtenu en utilisant la méthode de réalisation équilibrée et la méthode des perturbations singulières, et par un modèle du premier ordre à retard obtenu en utilisant la méthode d'identification de Broida. Dans la deuxième démarche nous avons utilisé le développement en série de Maclaurin pour simplifier la structure du contrôleur obtenu en utilisant le modèle d'ordre 4. Dans la troisième démarche, le modèle d'ordre 4 est approximé par un modèle d'ordre fractionnaire obtenu par identification.
- La méthode empirique SOM, basée sur la réponse indicielle en boucle fermée du système réel en présence d'un contrôleur proportionnel de gain K_{c0} . Pour cela, nous avons utilisé deux réponses indicelles, la première est obtenue avec un gain $K_{c0} = -6$ et la deuxième est obtenue avec un gain $K_{c0} = -10$.

4.5 Calcul analytique du contrôleur FOF-PID

Afin de calculer analytiquement le contrôleur FOF-PID, nous utilisons la fonction de transfert $G_{vx}(s)$ entre l'entrée de commande $v(t)$ et la position du chariot $x(t)$ donnée par l'équation (4.6). Le modèle de référence utilisé pour la synthèse du contrôleur en utilisant la méthode IMC est $G_{ref} = \frac{1}{1+\tau_c s^{\lambda+1}}$, la constante du temps du modèle est $\tau_c = 1$ et $\lambda = 0.25$.

4.5.1 Synthèse du contrôleur en suivant la première démarche

La première démarche consiste à simplifier d'abord le modèle d'équation (4.6), en utilisant une des méthodes de réduction de l'ordre ou d'approximation de modèles vues dans le premier chapitre, puis calculer le contrôleur en utilisant ce modèle réduit.

– *En utilisant la méthode de réalisation équilibrée*

Le modèle réduit de second ordre obtenu à partir du modèle initial de l'équation(4.6), en utilisant la méthode de réalisation équilibrée est :

$$G_{rre}(s) = \frac{-0.1695(1 - 0.2614s)}{s^2 + 1.378s + 1.128} \quad (4.9)$$

La figure (4.4) montre les deux réponses indicielles du modèle initial (en trait plein) et du modèle réduit (4.9) (en trait pointillé). Sur cette figure, on peut voir que le modèle réduit reproduit fidèlement le comportement du modèle initial notamment en régime transitoire, l'erreur maximale en régime permanent, est de 0.008. Avec une erreur quadratique moyenne d'approximation de 1.9×10^{-5} .

En utilisant le modèle du second ordre donné par l'équation (4.9), on obtient le contrôleur FOF-PID donné par :

$$C_{D11}(s) = \frac{1}{1 + 3.8256s^{0.25}}(-31.101) \left(1 + \frac{1}{1.2216s} + 0.7257s \right) \quad (4.10)$$

– *En utilisant la méthode des perturbations singulières*

Le modèle réduit de second ordre obtenu en utilisant la méthode des perturbations singulières est :

$$G_{rps}(s) = \frac{-0.0065(s + 4.685)(s - 4.508)}{s^2 + 1.426s + 0.8575} \quad (4.11)$$

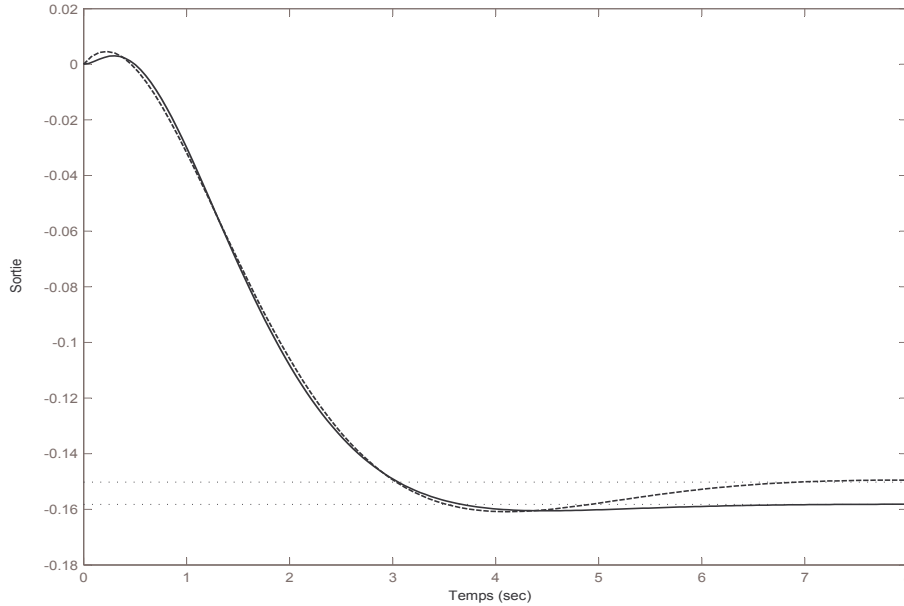


FIG. 4.4: Réponses indicielles du modèle initial G_{vx} (trait plein) et du modèle réduit G_{rre} (trait pointillé).

La réponse indicielle du modèle initial ainsi que celle du modèle réduit sont présentées sur la figure (4.5). L'erreur quadratique moyenne d'approximation est de 2.9×10^{-5} , avec une erreur maximale de 0.01 en régime transitoire. On constate que le modèle réduit reproduit assez bien le comportement du modèle initial notamment en régime permanent.

Le contrôleur FOF-PID calculé en utilisant le modèle réduit $G_{rps}(s)$ est :

$$C_{D12}(s) = \frac{1}{(1 + 4.5086s^{0.25})} \frac{1}{(1 + 0.2134s)} (-47.3782) \left(1 + \frac{1}{1.6630s} + 0.7013s \right) \quad (4.12)$$

On remarque que le contrôleur $C_{D12}(s)$ contient un filtre d'ordre entier en série avec le filtre fractionnaire, cela est dû à la présence du zéro stable dans le modèle $G_{rps}(s)$ utilisé pour sa synthèse.

– *Approximation par un modèle du premier ordre à retard*

En utilisant la méthode d'identification de Broïda [62], le modèle du premier ordre à retard qui approxime le comportement du modèle (4.6) est donné par :

$$G_{app}(s) = \frac{-0.158}{1 + 1.21s} e^{-0.76s} \quad (4.13)$$

Le résultat de l'approximation du modèle $G_{vx}(s)$ par un modèle du premier ordre à retard est illustré sur la figure (4.6). Cette figure montre que le modèle approximé ne reproduit

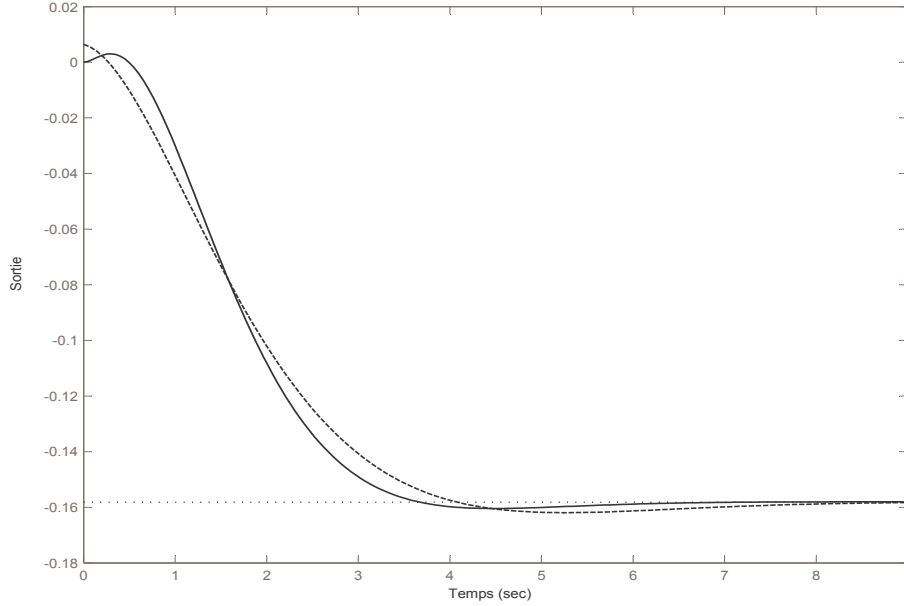


FIG. 4.5: Réponses indicielles du modèle initial G_{vx} (trait plein) et le modèle réduit G_{rps} (trait pointillé)

pas avec précision le comportement du modèle initial. En effet, l'erreur maximale entre les deux réponses indicielles est de 0.015 qui est une erreur relativement importante.

Le retard étant approximé par la formule de Taylor du premier ordre, le contrôleur obtenu en utilisant le modèle à retard est un FOF-PI, donné par :

$$C_{D13}(s) = \frac{1}{1 + 1.315s^{0.25}}(-10.07) \left(1 + \frac{1}{1.21s}\right) \quad (4.14)$$

4.5.2 Synthèse du contrôleur en suivant la deuxième démarche

La deuxième démarche consiste à calculer d'abord le régulateur à partir du modèle linéaire initial (4.6), puis simplifier le contrôleur en utilisant le développement en série de Maclaurin.

La fonction de transfert $G_{vx}(s)$ peut être factorisée sous la forme :

$$G_{vx}(s) = \frac{-0.2697(1 + 0.2135s)(1 - 0.222s)}{(1 + 0.1324s)(1 + 0.309s)(s^2 + 2.082s + 1.706)} \quad (4.15)$$

Le contrôleur $C_{D2}(s)$ calculé avec la méthode IMC, en utilisant le modèle initial $G(s)$ de l'équation (4.16) est donné par

$$C_{D2}(s) = \frac{1}{1 + 4.5045s^\lambda} \frac{1}{s} \frac{(1 + 0.1324s)(1 + 0.309s)(s^2 + 2.082s + 1.706)}{-0.0599(1 + 0.2135s)} \quad (4.16)$$

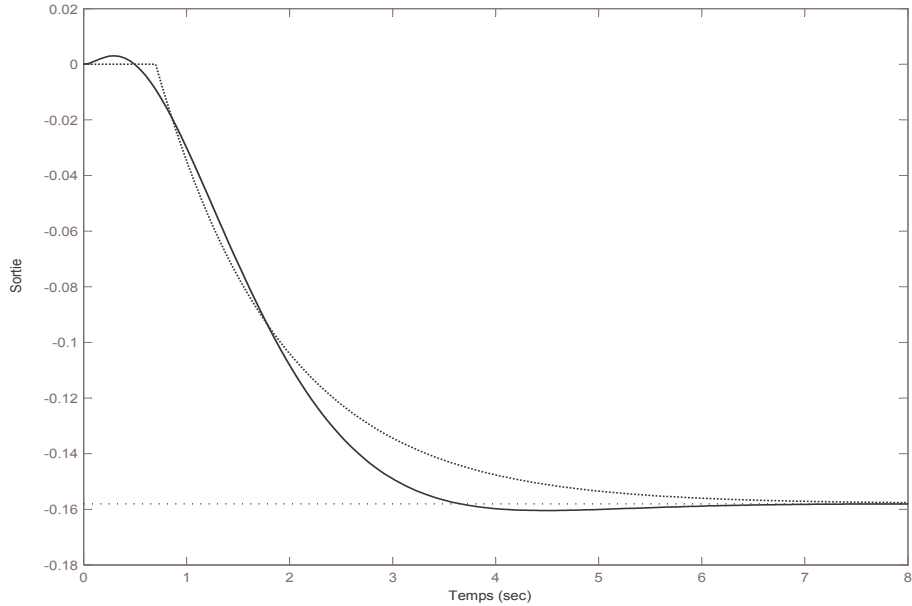


FIG. 4.6: Réponses indicielles du modèle G_{vx} (trait plein) et son approximation par un modèle du premier ordre à retard (trait pointillé).

En réduisant le contrôleur $C_{D2}(s)$ en utilisant le développement en série de Maclaurin, on obtient le contrôleur FOF-PI donnée par

$$C_{D21}(s) = \frac{1}{1 + 4.5045s^\lambda} (-41.27) \left(1 + \frac{1}{1.4483s} \right) \quad (4.17)$$

4.5.3 Synthèse du contrôleur en suivant la troisième démarche

La troisième démarche consiste à approximer le modèle linéaire entier de l'équation (4.6) par un modèle non entier, puis calculer le contrôleur fractionnaire en se basant sur ce dernier.

Le modèle fractionnaire obtenu par identification est donné par l'équation (4.18), l'ordre non entier est calculé en fonction du dépassement mesuré à partir de la réponse indicielle en utilisant l'équation (2.53), et la constante de temps est calculée en fonction du temps de montée mesuré, en utilisant l'équation (2.56). Le retard et le gain sont mesurés directement sur la réponse indicielle. Le résultat de cette approximation est illustré sur la figure (4.7). Cette figure montre que la réponse du modèle fractionnaire est rapide au régime transitoire et lente au régime permanent son comportement est très proche de celui du modèle initial avec une erreur maximale de 0.003.

$$G_{frac}(s) = \frac{-0.158e^{-0.76s}}{1 + 1.08s^{1.1s}} \quad (4.18)$$

Le contrôleur fractionnaire calculé en utilisant ce modèle fractionnaire est donné par

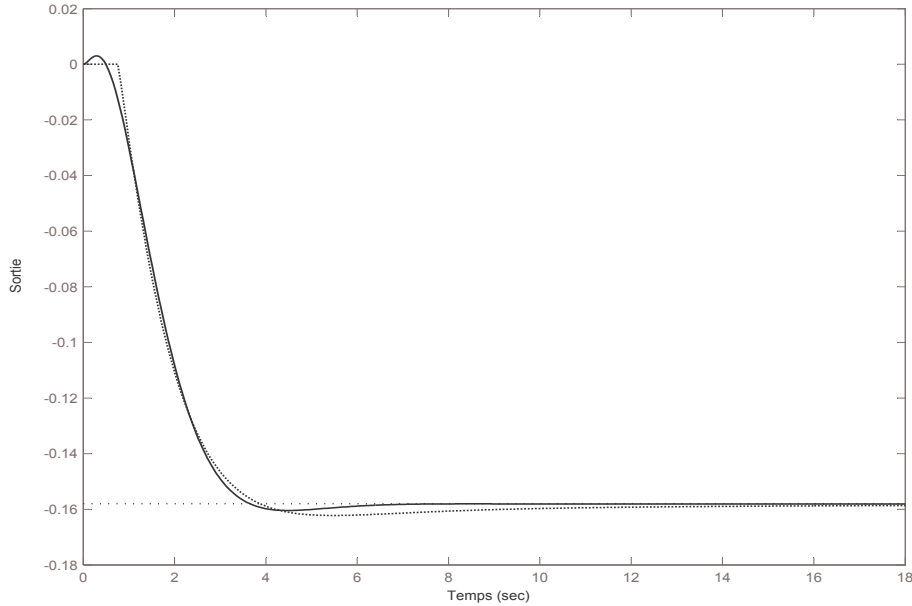


FIG. 4.7: Réponses indicielles du modèle G_{vx} (trait plein) et son approximation par un modèle fractionnaire (trait pointillé).

$$C_{D3}(s) = \frac{s^{0.1}}{1 + 1.315s^{0.25}} (-8.99) \left(1 + \frac{1}{1.08s^{1.1}} \right) \quad (4.19)$$

4.6 Réglage du contrôleur FOF-PID en utilisant la méthode empirique "SOM"

La méthode empirique SOM est utilisée pour le réglage du contrôleur FOF-PI, pour l'asservissement de la position du chariot sur le rail, cela permet d'évaluer et tester l'efficacité de la méthode en présence des aléas et des perturbations internes et externes qui affectent le système pendant son fonctionnement (la position du chariot, erreurs de mesures, influence du bruit ...). Nous avons opté pour un contrôleur FOF-PI car l'action dérivée est déconseillée en présence de bruits puisqu'elle les amplifie.

Pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PI en utilisant la méthode empirique SOM nous avons besoin d'une seule réponse indicielle du pendule inversé bouclé avec un simple contrôleur proportionnel de gain K_{c0} , cette réponse doit être suffisamment oscillatoire afin de pouvoir prendre des mesures précises. Cette méthode est testée avec deux expériences, la première avec un gain $K_{c0} = -6$ et la deuxième avec un gain $K_{c0} = -10$. En se basant sur les données obtenues

de ces expériences, les paramètres du contrôleur FOF-PI sont calculés en utilisant l'ensemble des expressions de la méthode SOM suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_f = \frac{\tau_c}{\rho t_p} \\ K_c = A K_{c0} \\ \tau_i = A \left| \frac{b}{1-b} \right| \eta t_p \\ \text{où} \\ A = 2.267 M_p^2 - 3.173 M_p + 2.008 \\ \eta \text{ et } \rho \in [0.25, 0.5]. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Le modèle de référence utilisé est $G_{ref} = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\lambda+1}}$, avec $\tau_c = 1$ et $\lambda = 0.25$.

1. **Première expérience** : D'abord, le pendule est positionné manuellement au centre du rail dans sa position basse stable, à $t = 0$ s la commande de redressement est appliqué afin de redresser le pendule dans une position haute au centre du rail, ensuite la commande par retour d'état intervient pour le maintenir dans cette position haute. Une fois le pendule est stabilisé on effectue un changement de consigne d'un échelon d'amplitude 0.2 à $t = 40$ s, à cet instant, le contrôleur proportionnel de gain $K_{c0} = -6$ intervient afin de permettre au chariot de suivre cette référence. La figure (4.8) montre la position du chariot sur le rail à partir de $t = 40$ s.

Les données expérimentales relevées à partir de cette réponse indicielle sont :

- La valeur de la sortie en régime permanent : $x_{inf} = 0.14$
- La valeur maximum de la sortie : $x_{max} = 0.16$
- Le gain statique : $b = \frac{x_{inf}}{x_{ref}} = 0.7$
- Le dépassement : $M_p = \frac{x_{max} - x_{inf}}{x_{inf}} = 0.14$
- Le temps de premier dépassement : $t_p = 2.12$

Les valeurs de η et ρ sont initialement fixé à la valeur 0.3, ensuite on vérifie si la réponse a besoin d'ajustement pour atteindre les objectifs fixés. Afin de diminuer un peu le dépassement nous avons augmenté un peu la valeur de η à 0.32 et pour rendre la réponse plus rapide nous avons fixé $\rho = 0.5$. Le contrôleur FOF-PI final obtenu est donné par :

$$C_{1-SOM}(s) = \frac{1}{0.94s^{0.25} + 1} (-9.6) \left(1 + \frac{1}{2.53s} \right) \quad (4.21)$$

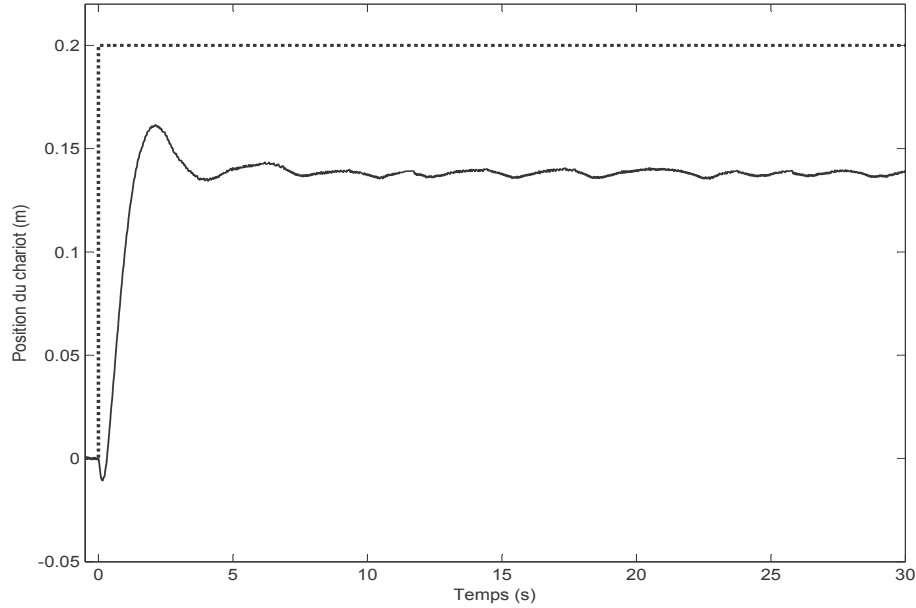


FIG. 4.8: Expérience avec $K_{c0} = -6$, trait plein : position du chariot, trait pointillé : référence

2. **Deuxième expérience** : On refait la même expérience, avec un gain $K_{c0} = -10$, l'entrée de référence est toujours un échelon d'amplitude $x_{ref} = 0.2$ appliquée à $t = 40$ s. La position du chariot à partir de $t = 40$ s est montrée sur la figure (4.9).

Les données expérimentales tirées à partir de la réponse indicielles sont :

- La valeur de la sortie en régime permanent : $x_{inf} = 0.15$
- La valeur maximum de la sortie : $x_{max} = 0.18$
- Le gain statique : $b = \frac{x_{inf}}{x_{ref}} = 0.78$
- Le dépassement : $M_p = \frac{x_{max} - x_{inf}}{x_{inf}} = 0.17$
- Le temps de premier dépassement : $t_p = 1.65$

Les valeurs des paramètres η et ρ sont ajusté afin d'obtenir la réponse désirée et le contrôleur final obtenu avec $\eta = 0.36$ et $\rho = 0.36$ est donné par

$$C_{2-SOM}(s) = \frac{1}{1.68s^{0.25} + 1} (-14.6) \left(1 + \frac{1}{2.6s} \right) \quad (4.22)$$

4.7 Implémentation et résultats expérimentaux

L'objectif de la commande est d'avoir en boucle fermée un comportement similaire à celui du modèle de référence ($G_{ref} = \frac{1}{1 + \tau_c s^{\lambda+1}}$), avec la constante de temps $\tau_c = 1$ et l'ordre non entier $\lambda = 0.25$ qui correspond à un dépassement $M_p = 0.1$.

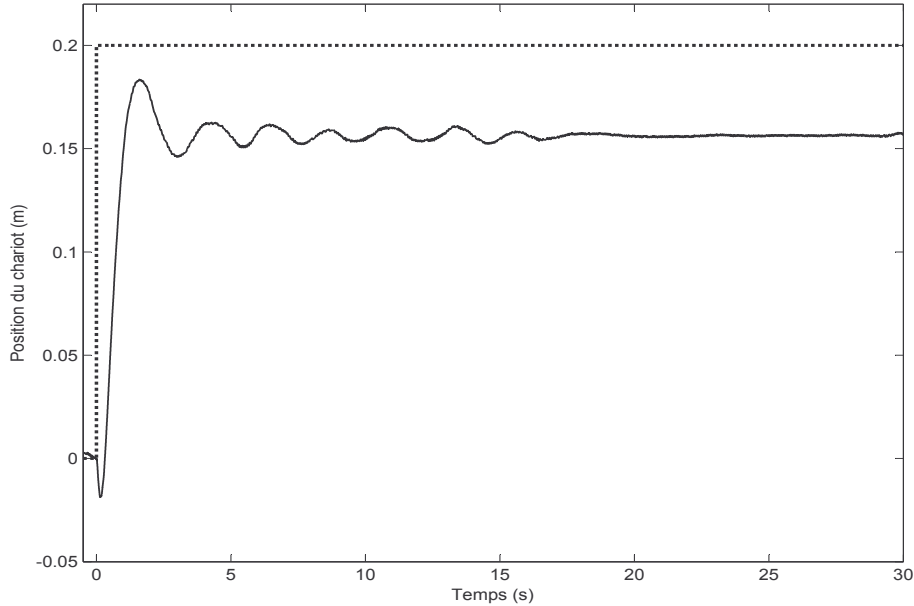


FIG. 4.9: Expérience avec $K_{c0} = -10$, trait plein : position du chariot, trait pointillé : référence

Les lois de commande sont implémentées sur le banc d'essai expérimental, à l'aide d'un PC pentium IV en utilisant le logiciel MATLAB 7.2. La période d'échantillonnage est fixée à 0.001s. Les opérateurs non entiers sont approximés en utilisant la méthode d'Oustaloup dans l'intervalle fréquentiel $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [10^{-3}, 10^2]$, avec 10 cellules. La condition initiale correspond à la position basse stable du pendule $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$.

Tout d'abord, la commande de redressement est appliquée à $t = 0 s$, son rôle est de ramener le pendule depuis sa position stable ($\theta = \pi$) vers la position haute instable ($\theta = 0$) où ($\theta = 2\pi$), le pendule est maintenu dans cette position instable (stabilisé) à l'aide du retour d'état. Une fois le pendule stabilisé en position verticale, on effectue à $t = 30 s$ un changement de consigne de la position du chariot avec $x_{ref} = 0,2 m$, puis à $t = 55 s$ on effectue un autre changement de consigne qui lui permet de revenir à sa position initiale $x_{ref} = 0 m$.

4.7.1 Résultats obtenus avec les contrôleurs calculés analytiquement

Les résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D11}(s), C_{D12}(s), C_{D13}(s), C_{D21}(s)$ et $C_{D31}(s)$ sont illustrés sur la figure (4.10) et le zoom sur la position du chariot entre $t = 30 s$ et $t = 55 s$ est montré sur la figure (4.11). Ces figures montrent qu'après une phase de transition avec des mouvements oscillatoires, le chariot se stabilise à la position $x = 0$ et l'angle du pendule se stabilise à $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, cela dépend du sens de rotation du pendule, s'il se bascule dans

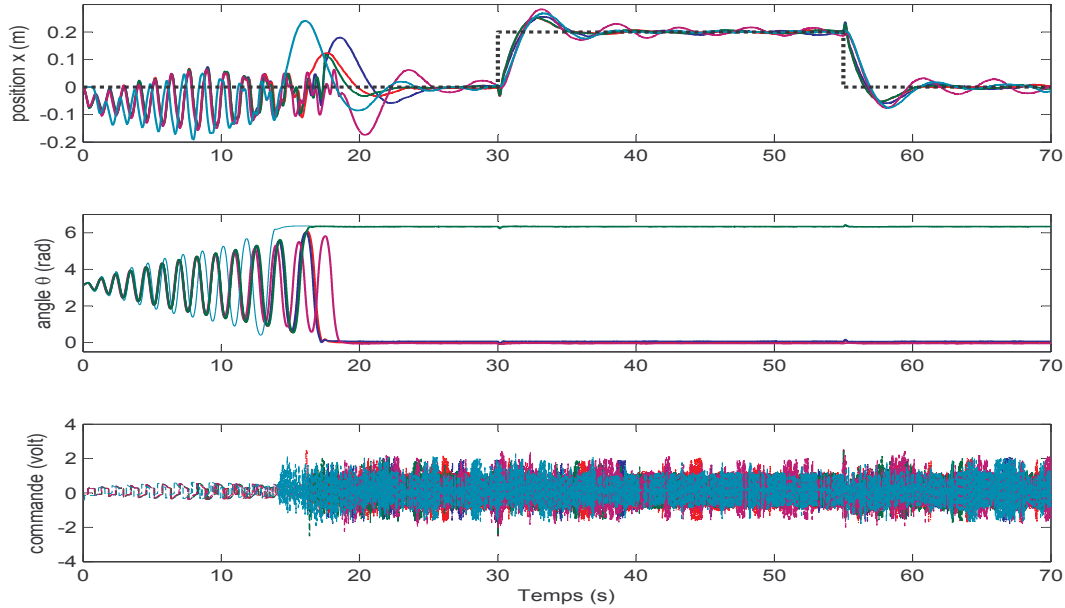


FIG. 4.10: Résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{D11}(s)$, $C_{D12}(s)$, $C_{D13}(s)$, $C_{D21}(s)$ et $C_{D31}(s)$.

la position haute dans le sens des aiguille d'une montre l'angle $\theta = 0$ et s'il se bascule dans le sens contraire $\theta = 2\pi$, comme le montre la figure (4.10). Ces résultats montrent que la meilleure réponse est obtenue avec le contrôleur $C_{D21}(s)$ de la deuxième démarche qui consiste à calculer d'abord le contrôleur en utilisant le modèle d'ordre 4 donné par l'équation (4.6) puis simplifier la structure du contrôleur obtenu en utilisant le développement en série de Maclaurin, comme il était prévu théoriquement. Cependant, l'objectif fixé (dépassement $M_p = 0.1$) n'est pas atteint. En effet, la meilleure valeur de dépassement obtenue est $M_p = 0.25$ avec la deuxième démarche. Le contrôleur $C_{D12}(s)$ calculé en utilisant le modèle réduit obtenu avec la méthode des perturbations singulière de la première démarche a donné lui aussi un résultats similaire avec un dépassement $M_p = 0.25$ mais la structure de ce contrôleur est complexe car il contient deux filtres en série, le premier est d'ordre fractionnaire et le deuxième est d'ordre entier. Ces résultats pratiques confirment les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 2.

4.7.2 Résultats obtenus avec la méthode SOM

Les résultats obtenus avec les contrôleurs $C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$ sont illustrés sur la figure (4.12). Après la phase de redressement et de stabilisation, le contrôleur fractionnaire FOF-PI permet au chariot de suivre la trajectoire de la consigne imposée tout en maintenant le pendule dans cette position haute. La figure (4.13) présente le zoom sur la position du chariot entre $t = 30$ s

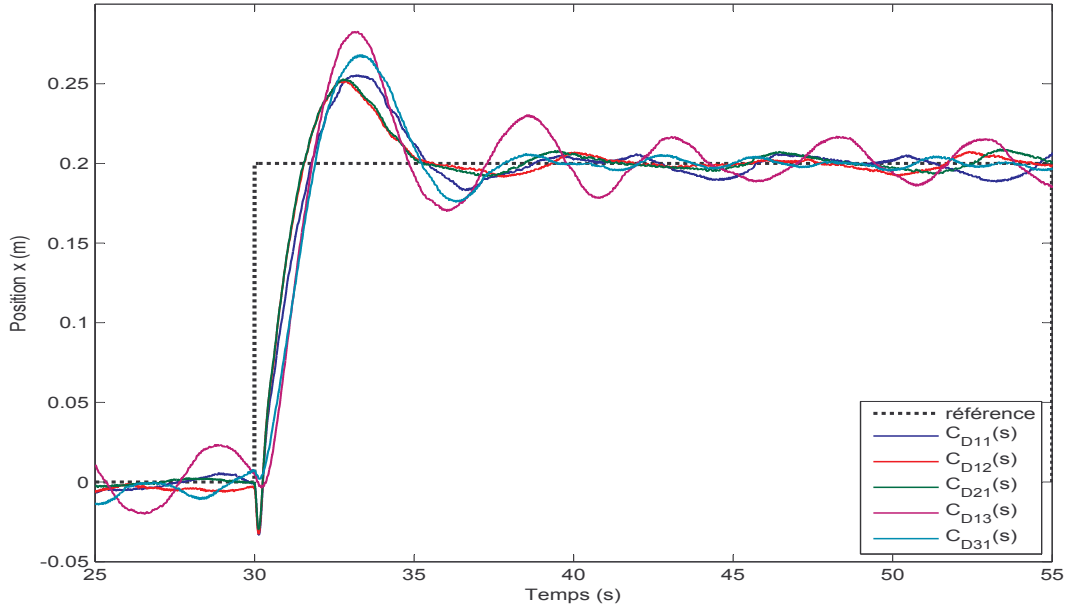


FIG. 4.11: Zoom sur la position du chariot obtenue avec les contrôleurs $C_{D11}(s)$, $C_{D12}(s)$, $C_{D13}(s)$, $C_{D21}(s)$ et $C_{D31}(s)$ entre $t = 30$ et $t = 55$.

et $t = 55$ s.

Les performances sont évaluées en mesurant les valeurs des dépassements des réponses indicelles obtenues, quand au temps de réponse, on ne peut pas le mesurer à cause des oscillations du pendule.

Ces résultats montrent que, contrairement aux méthodes analytiques, les réponses obtenues avec les contrôleurs ($C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$) réglés en utilisant la méthode SOM sont meilleurs et les objectifs imposés à la boucle fermée sont atteints, à savoir un dépassement $M_P \approx 0.1$.

Malgré que les valeurs des paramètres des contrôleurs $C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$ soient différentes, les résultats obtenus par ces derniers sont très proches. Cela peut être justifié par une compensation entre les valeurs des paramètres du contrôleur. Pour montrer cela, nous avons tracé le lieu des pôles et des zéros des fonctions de transfert en boucle fermée avec les deux contrôleurs en utilisant le modèle linéaire (4.6) du pendule, comme il est illustré sur la figure (4.14). Cette figure montre que certains pôles et zéros des deux fonctions sont identiques et le reste sont très proches.

Ce qui est très intéressant dans cette méthode, c'est que le dépassement de la boucle fermée correspond à la valeur de λ , c'est-à-dire, une fois le contrôleur est réglé à un dépassement donné, on peut obtenir n'importe quel dépassement avec le même contrôleur, il suffit juste de fixer λ à

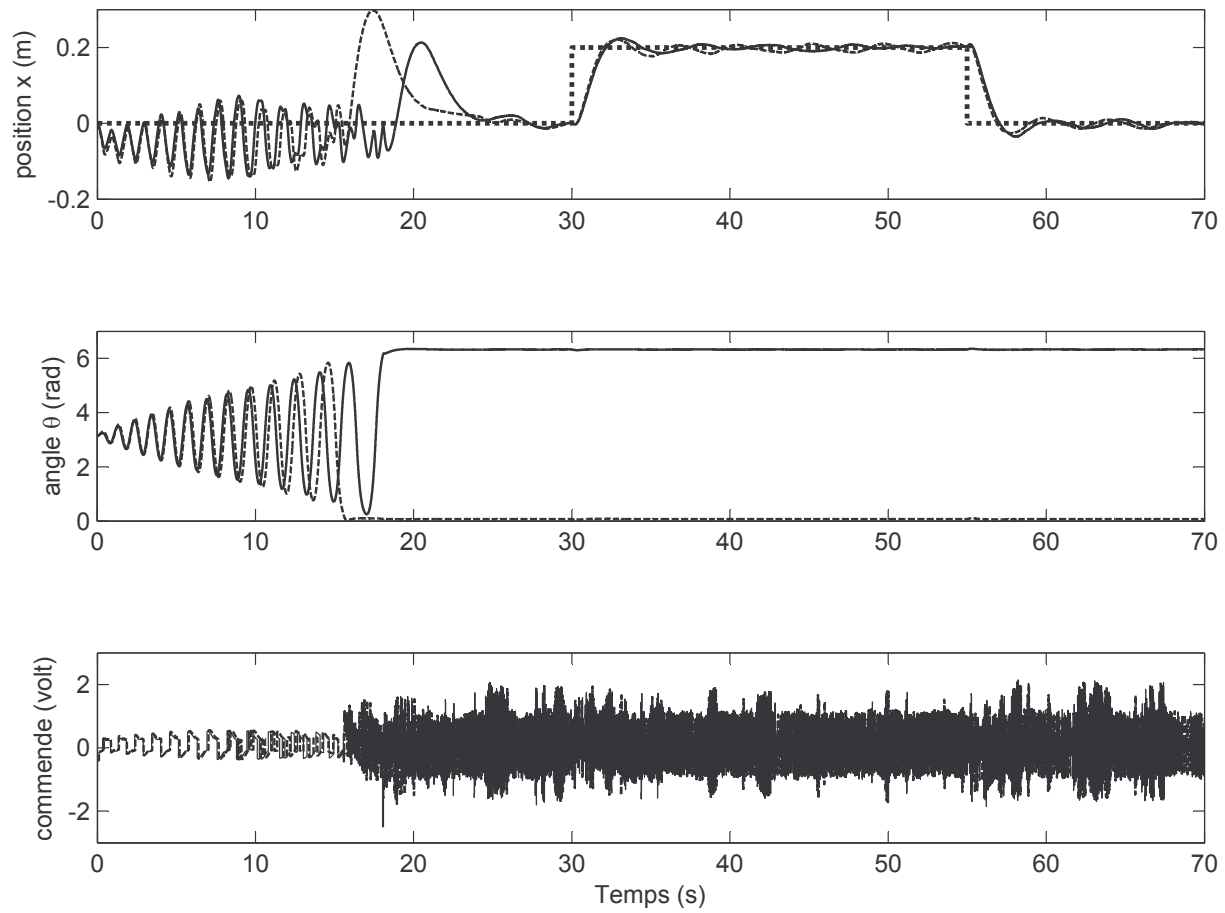


FIG. 4.12: Résultat de l'implémentation du contrôleur $C_{1-SOM}(s)$ en trait plein et le contrôleur $C_{2-SOM}(s)$ en trait discontinu

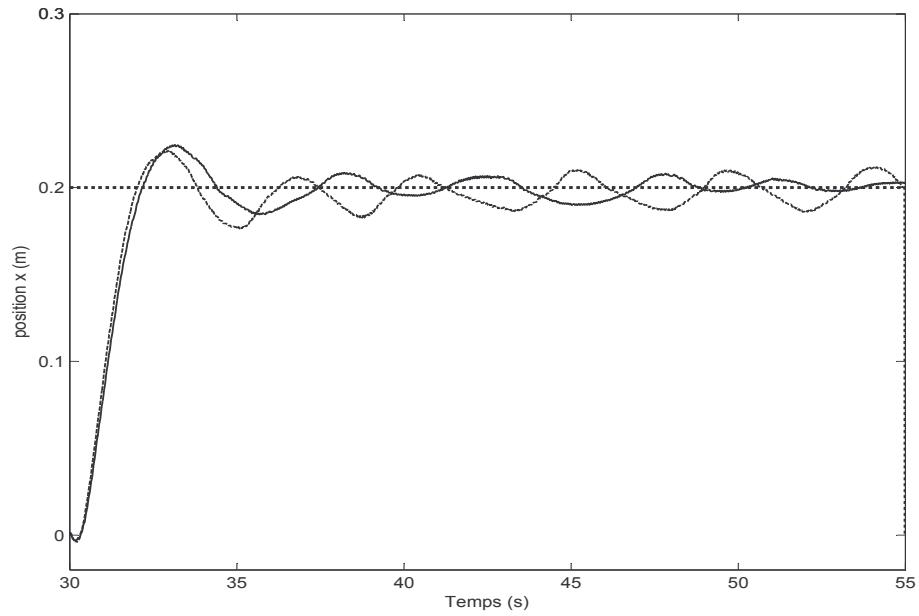


FIG. 4.13: Zoom sur la position du chariot obtenue avec les contrôleurs $C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$ entre $t = 30$ et $t = 55$

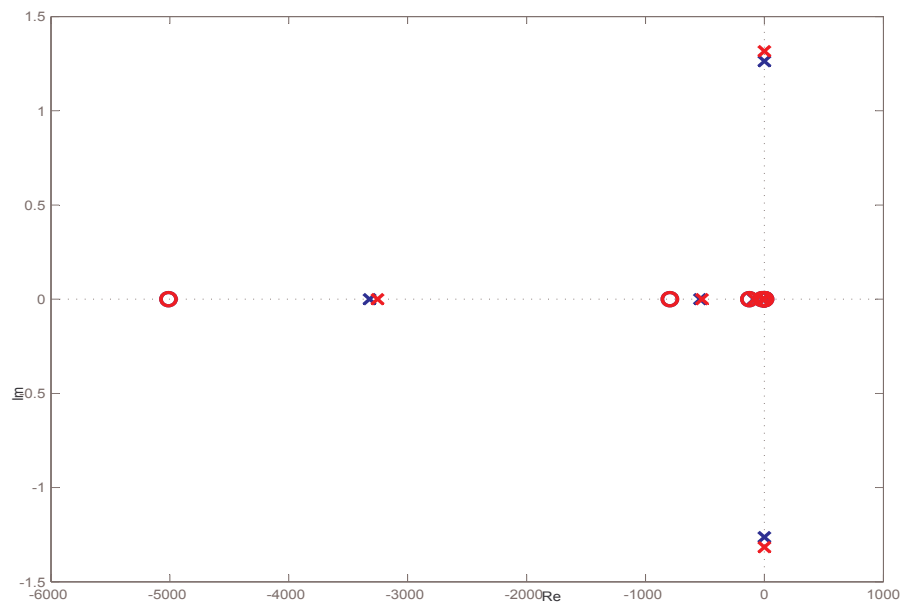


FIG. 4.14: Pôles et zéros des fonctions de transferts obtenues avec les contrôleurs $C_{1-SOM}(s)$ et $C_{2-SOM}(s)$.

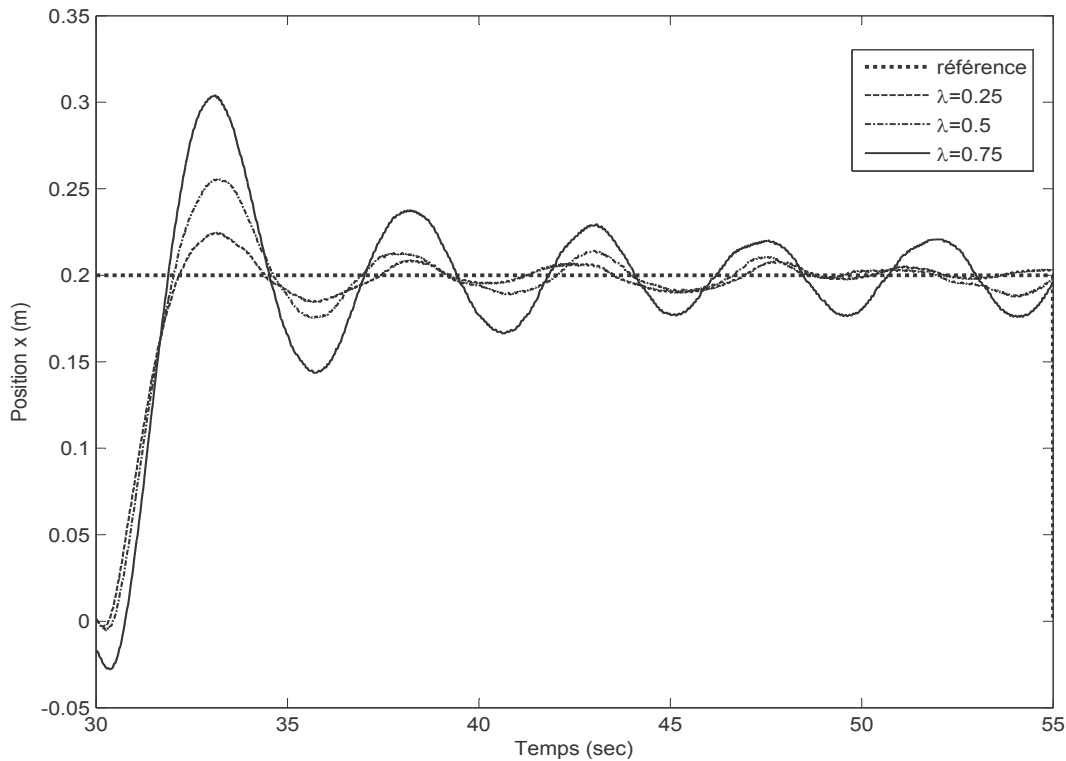


FIG. 4.15: Résultats obtenus avec $C_{1-SOM}(s)$ pour différentes valeurs de λ .

la valeur correspondante au dépassement désiré. Pour montrer cela, on implémente le contrôleur $C_{1-SOM}(s)$ avec différentes valeurs de λ et on mesure de dépassement obtenu pour chaque réponse. Les réponses du chariot obtenues pour les valeurs $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.5$ et $\lambda = 0.75$ sont illustrées sur la figure (4.15) et les valeurs de dépassement correspondantes sont $M_p(\%) = 10\%$, 30% et 55% .

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, le contrôleur FOF-PID est utilisé pour la commande du pendule inversé monté sur un chariot mobile disponible au laboratoire *L2CSP*. L'objectif est de tester les performances des méthodes (SOM et IMC) de synthèse du contrôleur FOF-PID pour la commande d'un système réel. Après l'étape de stabilisation du pendule en position haute en utilisant la commande par retour d'état, le contrôleur FOF-PID intervient pour asservir la position du chariot sur le rail tout en maintenant le pendule dans sa position verticale instable.

Le contrôleur FOF-PID est synthétisé d'abord en utilisant la méthode IMC, le modèle linéaire

étant d'ordre 4, nous a permis de tester les trois démarches vues dans le chapitre 2. Dans la première démarche le modèle linéarisé du pendule est approximé par des modèles d'ordre 2 et un modèle du premier ordre à retard. Dans la deuxième démarche nous avons utilisé la série de Maclaurin pour simplifier la structure du contrôleur fractionnaire obtenu et dans la troisième démarche le modèle du pendule est approximé par un modèle fractionnaire.

Pour le réglage du contrôleur FOF-PI en utilisant la méthode SOM, le système étant considéré inconnu, nous avons utilisé deux expériences en boucle fermée, la première avec un gain $K_{c0} = -6$ et la deuxième avec un gain $K_{c0} = -10$. Les informations relevées des deux réponses indicielles ont été utilisées ensuite pour calculer les paramètres du contrôleur FOF-PI.

Dans la suite de ce chapitre nous avons présenté les résultats de l'implémentation des différents contrôleurs obtenus sur le pendule inversé. Ces résultats expérimentaux montrent l'efficacité de la méthode SOM et sa supériorité par rapport aux méthodes analytiques. Cela peut être expliqué par le fait que la méthode SOM utilise pour le réglage du contrôleur une réponse du système réel donc elle prend compte des aléas et les imperfections du système réel dans la synthèse du contrôleur, tandis que les méthodes analytiques utilisent pour la synthèse du contrôleur, le modèle réduit du modèle linéarisé du modèle non linéaire du système réel, donc elle néglige les non linéarité et les imperfections du système réel. De plus, la méthode SOM présente deux paramètres d'ajustement η et ρ d'un côté et l'ordre non entier de l'autre.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

L'objectif principal de cette thèse est le dimensionnement du contrôleur fractionnaire FOF-PID pour la commande des systèmes dont le modèle est entier d'ordre élevé. Pour ce faire, nous avons proposé deux solutions :

La première consiste à utiliser une méthode analytique basée sur un modèle : Dans ce cas, le contrôleur FOF-PID est obtenu en utilisant la commande à modèle interne tout en imposant à la boucle fermée le comportement fractionnaire de la fonction idéale de Bode en boucle fermée. Pour les modèles d'ordre élevé, nous avons proposé deux démarches soit en simplifiant le modèle original en utilisant les méthodes de simplification proposées dans le premier chapitre, où bien en utilisant la série de Maclaurin pour simplifier la structure du contrôleur de grande dimension obtenu.

La deuxième solution consiste à développer une méthode empirique basée sur des observations expérimentales : Dans ce cas, la forme du contrôleur FOF-PID est fixée à priori, ensuite ses paramètres sont réglés en utilisant les données expérimentales. La méthode proposée dans cette thèse est la méthode SOM, que nous avons généralisé et adapté au contrôleur FOF-PID. Cette démarche permet de rendre plus accessibles aux utilisateurs industriels, les contrôleurs d'ordre non entier.

Des simulations sur plusieurs exemples numériques ont permis de mettre en évidence la capacité, l'efficacité et la simplicité de la méthode SOM pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID. Ces performances ont ensuite été validées sur un banc d'essai expérimental constitué d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile où le contrôleur FOF-PID est utilisé pour l'asservissement de la position du chariot tout en maintenant le pendule dans sa position haute

instable.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté quelques notions sur la simulation des contrôleurs fractionnaires et le principe de la méthode CRONE basée sur la fonction idéale de Bode, le comportement de la fonction en boucle fermée résultante a été étudié dans des domaines différents (temporel, fréquentiel et plan complexe) afin de montrer ses caractéristiques et l'avantage de l'utiliser comme un modèle de référence dans la synthèse du contrôleur FOF-PID. Dans la deuxième partie de ce chapitre, la technique de commande par modèle interne pour la synthèse de contrôleur fractionnaire de type FOF-PID a été présentée. Par la suite, afin d'obtenir des contrôleurs d'ordre réduit nous avons présenté trois démarches différentes à suivre. Les simulations effectuées ont montré que les meilleurs résultats ont été obtenus en utilisant la deuxième démarche qui consiste à calculer d'abord le contrôleur en utilisant le modèle de grande dimension ensuite réduire ou simplifier la structure du contrôleur obtenu en utilisant le développement en série de Maclaurin.

Le troisième chapitre est consacré au développement de la méthode empirique SOM (Setpoint Overshoot Method) qui a été généralisée au cas fractionnaire pour le réglage des paramètres du contrôleur FOF-PID. Cette méthode est basée sur la réponse indicielle du système bouclé avec un contrôleur proportionnel de gain K_{c0} , les expressions ont été obtenues par corrélation entre les expressions obtenues par la méthode analytique IMC et les résultats expérimentaux obtenus sur une large gamme de modèles du premier ordre à retard. Les tests effectués sur plusieurs exemples et la comparaison de ses résultats avec ceux obtenus par la méthode IMC ont montré l'efficacité, la simplicité et la supériorité de la méthode. Cependant, cette méthode reste faible pour des système à retard dominant.

Afin de valider les résultats des deux méthodes analytique et empirique, les lois de commande obtenues ont été implémentées sur un banc d'essai expérimental constitué d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile. Une commande par retour d'état est utilisée pour stabiliser le pendule dans une position haute, ensuite afin d'asservir la position du chariot sur le rail nous avons utilisé le contrôleur FOF-PID dont les paramètres sont obtenus en utilisant les deux méthodes développées dans cette thèse. Les résultats de cette application confirment les résultats théo-

riques obtenus dans le deuxième et le troisième chapitre, à savoir la supériorité de la deuxième démarche en appliquant la méthode analytique IMC, l'efficacité et la simplicité de la méthode empirique SOM.

Finalement, afin de compléter et éventuellement d'améliorer le travail présenté dans le cadre de cette Thèse, il serait intéressant de développer ou/et approfondir les points suivants :

- Nous avons montré à travers l'exemple (3.3) que les performances de la méthode SOM ne correspondaient pas à ceux du modèle de référence en raison de la grande valeur du retard, c'est pourquoi nous suggérons de chercher un moyen d'améliorer la méthode SOM pour la commande des systèmes à retard dominant. On peut, pour ce faire, utiliser une méthode analytique autre que la méthode basée sur la commande par modèle interne.
- Le développement de la méthode SOM que nous avons présentée a été facile à mettre en œuvre en raison de la structure particulière du contrôleur FOF-PID que nous avons utilisé. Néanmoins, il est montré dans la littérature que le contrôleur $PI^{\nu}D^{\mu}$ est plus robuste que le régulateur PID entier grâce aux ordres non entiers ν et μ qu'il contient. Par conséquent, il serait intéressant aussi de suivre la même démarche que nous avons adoptée pour développer une méthode de réglage des cinq paramètres que contient le régulateur $PI^{\nu}D^{\mu}$.

Bibliographie

- [1] Amoura, K., Mansouri, R., Bettayeb, M. et Al-Saggaf, U. M. (2016). *Closed-loop step response for tuning PID-fractional-order-filter controllers*. ISA transactions, vol. 64, pp. 247-257.
- [2] Al-Saggaf U.M et Franklin, G. (1987). *An error bound for a discrete reduced order model of a linear multivariable system*. IEEE transactions on Automatic Control. vol. 32, n° 9, pp. 815-819.
- [3] Allouche B., Vermeiren L., Dequidt A et Dambrine M. (2013). *Modélisation TS sous forme descripteur et commande d'un pendule inversé à deux roues*. 22èmes rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, octobre 10-11, Reims, France.
- [4] Aoki M. (1978). *Some approximation methods for estimation and control of large scale systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 23, pp. 173-182.
- [5] Astrom K. J. et Hagglund T. (1995). *PID Controllers : Theory, Design and Tuning, Second Edition*. Instrument Society of America.
- [6] Astrom K. J. et Hagglund T. (2004). *Revising the Ziegler-Nichols step response method for PID control*. Journal of Process Control. vol. 14, pp. 635-650.
- [7] Barbosa R. S., Machado J. A. T. et Ferreira I. M. (2004). *Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function*. Nonlinear Dynamics, vol. 38, pp. 305-321.
- [8] Basilio J. C. et Matos S.R. (2002). *Design of PI and PID Controllers With Transient performance Specification*. IEEE Transactions on Education, vol. 45, n° 4, pp. 364-370.
- [9] Bensoussan A. (1981) *Singular perturbation results for a class of stochastic control problems*. IEEE-AC-26, no 5, pp. 1071-1080.

- [10] Bettayeb, M., Silverman, L. M., et Safonov, M. G. (1980). *Optimal approximation of continuous-time systems*. In Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 19th IEEE Conference on Vol. 19, pp. 195-198.
- [11] Bettayeb M. et Mansouri R., (2014). *IMC-PID-fractional-order-filter Controllers Design for Integer Order Systems*. ISA Transactions. vol. 53, n° 5, pp. 1620-1628.
- [12] Bettayeb M. et Mansouri R. (2014). *Fractional IMC-PID-Filter Controllers Design for Non Integer Order Systems*. Journal of Process Control. vol. 24, n° 4, pp. 261-271.
- [13] Bettayeb M., Mansouri R., Al-Saggaf U.M et Mustafa Mehdi I. (2017). *Smith Predictor Based Fractional-Order-Filter PID Ccontrollers Desugn For Long Time Delay Systems*. Asian Journal of Control, vol. 19, n° 2, pp. 1-12.
- [14] Bode H.W., (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York.
- [15] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J. P., Rotella F. et Zambettakis I. (1992). *Modélisation et identification des rocessus*. Edition technip. Paris.
- [16] Bouayad A. (1990). *Étude comparative de méthodes d'analyse de systèmes à échelles de temps multiples : contribution à l'élaboration d'un processus d'aide à la simplification de modèles*. Thèse de doctorat en Automatique. Lille 1.
- [17] Bouchaib B. (1988). *Sur une nouvelle méthode de simplification de de modèles des systèmes dynamiques : Application au calcul des réalisations équilibrées*. Thèse de Doctorat en Automatique, Université de Lille.
- [18] Boussalem C. (2012). *Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé*. Mémoire de Magister, Université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, Algérie.
- [19] Broïda, V. (1969). *L'extrapolation des réponses indicielles apériodiques*. Automatismes, France.
- [20] Bulteel A et Van Barel M. (1986). *Padé techniques for model reduction in linear system theory : a survey*. Journal of Computational and Applied Mathematics. vol. 14, n° 3, pp. 401-438.
- [21] Chang L. Y. et Chen C. H., (2009). *Tuning of Fractional PID Controllers Using Adaptive Genetic Algorithm for Active Magnetic Bearing System*. WSEAS Transactions on Systems, vol. 8, n° 1, pp. 1109-2777.

- [22] Charef A., Sun H.H., Tsao Y.Y et Onaral B. (1992). *Fractal system as represented by singularity function*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, n° 9 , pp. 1465 - 1470.
- [23] Chidambara M.R et Davison E.J. (1967). *A method for simplifying linear dynamic systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 12, n° 1, pp. 119-121.
- [24] Chow J.H., Allemong J.J et Kokotovic P.V. (1978). *Singular Perturbation Analysis of Systems with Sustained High Frequency Oscillations*. Automatica, Vol. 14, n° 3, pp. 271-279.
- [25] Chow J.H et Kokotovic P.V. (1978). *Near-optimal Feedback Stabilization of a Class of Non-linear Singularly Perturbed Systems*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 16, n° 5, pp. 756-770.
- [26] Cohen, G.H. et Coon G.A.(1953). *Theoretical consideration of retarded control*. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers 75, pp. 827 -834.
- [27] Davidson D et Cole R. (1950). *Dielectric Relaxation in Glycerine*. Journal of Chemistry and Physics, The Journal of Chemical Physics, vol. 18, n° 10, 1417-1417.
- [28] Djouambi A. (2008). *Contribution à la Commande Crone*. Thèse de doctorat, Université MENTOURI de Constantine.
- [29] Fortuna L., Nunnari G. et Gallo. (1992). *Model Order Reduction Techniques with Applications in Electrical Engineering*. Springer-Verlag. London.
- [30] Fossard A.J. (1970). *On A Method For Simplifying Linear Dynamic Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 15, pp. 261-262.
- [31] Flaus J. M. (1994). *La régulation industrielle : régulateurs PID, prédictifs et flous*. Paris, Hermes.
- [32] Janat Y. (2007). *Commande Crone Monovariante et Multivariante de Système peu Amortis*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse III-Paul Sabatier.
- [33] Hutton M.F et Friedland B. (1975). *Routh approximations for reducing order of linear, time-invariant systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 20, pp. 329-337.
- [34] Garcia, C.E. et Morari M., (1982). *Internal model control I. A unifying review and some new results*, Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development. vol. 21, no 2, pp. 308-323.

- [35] Kokotovic P.V et Sannuti P. (1968). *Singular perturbations method for reducing the model order in optimal control design*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 13, pp. 377-384.
- [36] Kokotovic P.V., O'Malley R.E et Sannuti P. *Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview*. Automatica, vol. 12, pp. 123-132.
- [37] Kokotovic P.V. (1980). *Singular Perturbations And Time Scales In Modeling And Control Of Dynamic Systems*. Illinois univ at urbana decicsion and control LAB.
- [38] Lahouazi, F., (2011). *Mise en oeuvre d'une stratégie de commande neuro-floue : Application à un pendule inversé*. Mémoire de Magister. Université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, Algérie.
- [39] Liu Y et Anderson B.D. (1989). *Singular perturbation approximation of balanced systems*. International Journal of Control, vol. 50, n° 4, pp. 1379-1405.
- [40] Lee H. J et Jung S. (2008). *Control of a mobile inverted pendulum robot system*. IEEE International Conference on Control, Automation and Systems, pp. 217-222, Seoul, South Korea.
- [41] Lee Y., Park S., Lee M et Brosilow C. (1998). *PID controller tuning for desired closed-loop responses for SI/SO systems*. Aiche Journal, vol. 44, n° 1, pp. 106-115.
- [42] Luo Y., Chen Y. Q., Wang C. Y. and Pi Y.G., (2009). *Tuning fractional order proportional integral controllers for fractional orders systems*. Proceeding of Control and Decision Conference, CCDC'09. June 17-19, pp. 307-312, China.
- [43] Ma C.,Hori Y. (2004). *Time-domain Evaluation of Fractional Order Controllers Direct Discretization Methods*. IEEJ (The Institute of Electronical Engineers of Japan), Transactions on industry applications, vol.124, n° 8, pp. 837-842.
- [44] Maïzi N. (1992). *Réduction au sens de la norme de Hankel de modèles dynamiques de dimension infinie*. Thèse de Doctorat en Informatique Temps Réel, Robotique et Automatique, Université de Lille.
- [45] Manabe S. (1961). *The non-integer integral and its application to control systems*. ETJ of Japan, vol. 6, pp 83-87.
- [46] Manuel Manuel d'installation du pendule inversé. 'feedback instruments limited'.

- [47] Mansouri R. (2008). *Contribution à l'analyse et la Synthèse des systèmes d'Ordre Fractionnaire par la Représentation d'état*. Thèse de doctorat, Université Mouloud Maameri de Tizi Ouzou, Algérie.
- [48] Marshall S.A. (1966). *An approximate method for reducing the order of a linear system*. Control, vol. 10, pp. 642-643.
- [49] Mittal S.K., D. Chandra D et Dwivedi B. (2009). *Improved Routh-Padé Approximants Using Vector Evaluated Genetic Algorithm to Unstable Systems*. International Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 1, n° 2, pp. 1-14.
- [50] Monje C.A., Vinagre B.M., Feliu V. et Chen Y.Q., (2008). *Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications*. Control Engineering Practice, vol. 16, n° 7, pp. 798-812.
- [51] Moore B.C. (1981). *Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, n° 1, pp. 17-32.
- [52] Nagar S.K et Singh S.K. (2004). *An algorithmic approach for system decomposition and balanced realized model reduction*. Journal of the Franklin Institute, vol. 341, n° 7, pp. 615-630.
- [53] Naidu D.S. (2002). *Singular Perturbations and Time Scales In Control Theory And Applications : An Overview*. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B : Applications and Algorithms, vol. 9, pp. 233-278.
- [54] Oustaloup A. (1983). "Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire" . Editions Masson, Paris.
- [55] Oustaloup A. (1995). *La dérivation non entière : Théorie, Synthèse et Application*. Editions HERMES, Paris.
- [56] Oustaloup A., Sabatier J and Mareau X. (1998). *From fractal robustness to the CRONE approach*. In Proceedings, ESAIM, Vol. 5, pp. 177-192.
- [57] Peponides G., Kokotovic P.V et CHOW J.H. (1982). *Singular perturbations and time scales in non-linear models of power systems*. IEEE Transactions on Circuits and systems, vol. 29, n° 11, pp. 758-767.

- [58] Philippe P. (1981). *Sur une classe de méthodes de réduction de l'ordre des systèmes dans l'espace d'état*. Thèse de doctorat, Université de Lille.
- [59] Phillips R.G. (1980). *Reduced Order Modelling and Control of Two-Tim-Scale Discrete Systems*. International Journal of Control, Vol. 31, n° 4, pp. 765-780.
- [60] Podlubny I. (1998). *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- [61] Priya N et Sunilkumar T.K. (2013). *A Novel Method of order Reduction for Interval System*. International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering, vol. 2, pp. 2278-8875.
- [62] Prouvost P. (2010). *Automatique : contrôle et régulation : cours et exercices corrigés*. Editions Dunod, Paris.
- [63] Rivera D. E., Morari M et Skogestad S. (1986). *Internal model control : PID controller design*. Industrial and engineering chemistry process design and development, Vol. 25, n° 1, pp. 252-265.
- [64] Rotella F. (1987). *Méthodes algébriques et analytiques pour la simplification et la commande des systèmes bilinéaires à deux dynamiques*. Thèse de Doctorat es-sciences physiques, Université de Lille.
- [65] Sambariya D.K et Prasad R. (2012). *Routh Approximation based Stable Reduced Model of Single Machine Infinite Bus System with Power System Stabilizer*. IX Control Instrumentation System Conference, 16-17 November, Manipal University.
- [66] Sambariya D.K et Prasad R. (2012). *Stable Reduction Methods of Linear Dynamic Systems in Frequency Domain*. 17 th National Power Systems Conference. at Indian Institute of Technology, Vranasi , pp. 549-558.
- [67] Shamsuzzoha M. et Skogestad S. (2010). *The setpoint overshoot method : A simple and fast closed-loop approach for PID tuning*. Journal of Process Control, vol. 20, pp. 1220-1234.
- [68] Shamsuzzoha M., Moonyong L. et Hirya S. (2012). *Closed loop PI/PID Controller Tuning for Stable and Unstable Processes*. America Control Conference, Fairmont Queen Elizabeth. June 27-29, Montreal, Canada.

- [69] Singh J., Chattterjee K et Vishwakarma C.B. (2014). *MIMO System Using Eigen Algorithm and Improved Pade Approximations*. SOP transaction of applied mathematics, vol. 1, n° 1, pp. 60-70.
- [70] Skelton R.E. (1980). *Cost decomposition of linear systems with application to model reduction*. International Journal of Control, vol. 32, n° 6, pp. 1031-1055.
- [71] Skogestad S. (2001). *Probably the best simple PID tuning rules in the world*. AICHE Annual meeting, November 04-09, Reno, Nevada, USA.
- [72] Skogestad S. (2003). *Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning*. International Journal of Control, vol. 13, n° 4, p. 291-309.
- [73] Skogestad S. et Grimlolt C. (2011). *The SIMC method for smooth PID controller tuning, Chapter for PID book Springer*. Edition : R.Vilanova, pp. 976-985.
- [74] Sekara T. B. et Miroslav M. R. (2010). *Revisiting the Ziegler-Nichols process dynamics characterization*. Journal of Process Control, vol. 20, n° 3, pp. 360-363.
- [75] Vacaro R.J. (1985). *Deterministic balancing and stochastic model reduction*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-30, n° 9, pp. 921-923.
- [76] Valerio D. et Da Costa J.S. (2006). *Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules*. Signal Processing, vol. 86, n° 10, pp. 2771-2784.
- [77] Verriest E.I et Kailath T. (1983). *On generalized balanced realizations*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 28, n° 8, pp. 833-844.
- [78] Vinagre B.M., Monje C. A., Calderon A. J., Chen Y. Q et Feliu V. (2004). *The fractional integrator as a reference function*. In First IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, pp. 150-155.
- [79] Villaumé F. (2002). *Contribution à la commande des systèmes complexes : application à l'automatisation du pilotage au sol des avions de transport*. Thèse de Doctorat en Automatique Robotique, Université Paul Sabatier, Toulouse III.
- [80] Vulturescu B. (2002). *Contribution à la commande robuste des systèmes électromécaniques par la méthode du modèle de comportement : Application à la commande des systèmes multimachines*. Thèse de Doctorat, Université de Lille.
- [81] Wilson D.A. (1974). *Model Reduction Of Multivariable Systems*. International Journal of Control, vol, 20, pp. 57-64.

-
- [82] Young K.-k.D., Kokotovic P.V et Utkin V.I. (1977). *A Singular Perturbation Analysis of High-Gain Feedback Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, n° 6, pp 931-938.
- [83] Zhao C., Xue,D. et Chen Y.Q., 2005. *A Fractional Order PID Tuning Algorithm for A class of Fractional Order Plants*. International Conference on Mechatronics and Automation Niagara, July 29, pp. 216-221, Canada.
- [84] Zhou K., Salomon G et Wu E. (1999). *Balanced realization and model reduction for unstable systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 9, n° 3, pp. 183-198.
- [85] Ziegler J.G. et Nichols N.B., (1942). *Optimum settings for automatic controllers*. Transactions of the ASME, vol. 64, pp. 759-768.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

THÈSE DE DOCTORAT

THÈME

CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE DE CONTRÔLEURS
 FRACTIONNAIRES D'ORDRE REDUIT POUR LA COMMANDE
 DES SYSTÈMES DE GRANDE DIMENSION

Résumé *Le travail effectué dans cette thèse porte sur la synthèse d'un nouveau type de contrôleurs fractionnaires, appelé en anglais "PID-Fractional-Order-Filter" pour la commande des systèmes entiers de grande dimension. Pour ce faire nous avons utilisé deux méthodes : la première méthode est analytique basée sur la commande à modèle interne, l'idée est d'imposer à la boucle fermée le comportement fractionnaire de la fonction idéale de Bode en boucle fermée. Pour les modèles de grande dimension, nous avons proposé deux solutions : soit en réduisant d'abord l'ordre du modèle original en utilisant une méthode de réduction, où bien en calculant d'abord le contrôleur fractionnaire à partir du modèle de grande dimension ensuite simplifier sa structure en utilisant la série de Maclaurin. La deuxième méthode proposée est empirique basée sur la réponse indicielle du système en boucle fermée, dans ce cas, la forme du contrôleur FOF-PID est fixée à priori, ensuite ses paramètres sont réglés en utilisant la méthode SOM (Setpoint Overshoot Method) qui a été adapté pour le réglage de ce type de contrôleurs fractionnaires. Cette dernière méthode de synthèse permet à la commande d'ordre non entier d'être plus accessibles aux utilisateurs industriels. Les contrôleurs ainsi obtenus en utilisant les deux méthodes ont été implémenté sur un système réel constitué d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile.*

Mots Clés : Contrôleur fractionnaire, Contrôleur PID, Commande à Modèle Interne, Commande Robuste.

Abstract *This thesis deals with the synthesis of a new type of fractional controller known as PID-Fractional-Order-Filter (FOF-PID) to control integer high order systems. For this reason, we propose two different methods : the first is an analytical method based on the internal model control paradigm (IMC), the idea is to impose the fractional behavior of the closed-loop of the Bode's ideal transfert function to the reference model. for high order models, we have proposed two solutions, either by reducing the order (or simplifying the structure) of the original model by using known reduction (or simplification) methods, or by first calculating the fractional controller for high order model, then simplify its structure using the Maclaurin series. The second method is empirical based on the closed-loop set-point experiment, in this case, the structure of the FOF-PID controller is fixed in advance, then its parameters are tuned using the Setpoint Overshoot Method (SOM) which has been generalized and adapted for this type of fractional controllers (FOF-PID). This last approach allows the fractional control to be more accessible to engineers (in the industrial field). The controllers thus obtained were implemented to control an inverted pendulum cart-system.*

Key Words : Fractional Order Controller, PID Controller, Internal Model Control (IMC), Robust Control.