MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU FACULTE DES SCIENCES DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE: RECHERCHE OPERATIONNELLE OPTION: METHODES ET MODELES DE DECISION

 $\begin{array}{c} {\rm Présenté \ par:}\\ {\bf M}^{elle} \ {\bf Lydia \ BOUCHAMA} \end{array}$

Sujet:

Redressement d'un pendule inversé par une commande en temps optimal

Devant le jury d'examen composé de:

| M^r . Mohamed Aidene; | Professeur; | U.M.M.T.O; | Président |
|-----------------------------|-------------|------------|--------------|
| M^r . Abdelkader Merakeb; | MCB; | U.M.M.T.O; | Rapporteur |
| M^r . Brahim Oukacha; | MCA; | U.M.M.T.O; | Examinateur |
| M^{me} . Kahina Louadj; | MCB; | U.M.M.T.O; | Examinatrice |

Soutenu le: 16/06/2013

Remerciements

Je remercie et avant tout le bon dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Tout ce que je dirai n'est jamais assez pour remercier mon promoteur monsieur Abdelkader Merakeb qui a été toujours disponible pour moi et sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

J'exprime mes sincères remerciements à monsieur Mohamed Aidene qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je suis honorée de la présence dans ce jury de monsieur Brahim Oukacha et madame Kahina Louadj et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Enfin pour avoir cru en moi, j'exprime ma profonde gratitude à ma très chère famille, particulièrement mes parents, ma soeur et mon fiancé.

$\mathcal{D}\acute{e}dicaces$

Je dédie ce travail:

- A mes très chers parents qui sont la source de mon éducation, mon savoir et mes principes.
- A ma chère soeur Radia.
- A mon fiancé et sa famille.
- A toute la famille BOUCHAMA.
- A tous ceux qui ont de l'estime pour moi.

Table des matières

Introduction

| 1 | Mét | thodes numériques de résolution des équations différentielles ordi- | | | |
|----------|---------------------------|---|----------|--|--|
| | nair | es | 5 | | |
| | 1.1 | Introduction | 5 | | |
| | 1.2 | Généralités | 6 | | |
| | 1.3 Notions fondamentales | | | | |
| | 1.4 | Types d'équations différentielles | 8 | | |
| | | 1.4.1 Équation différentielle à variables séparées | 8 | | |
| | | 1.4.2 Équation différentielle homogène | 9 | | |
| | | 1.4.3 Équation différentielle linéaire d'ordre 1 | 9 | | |
| | 1.5 | Les méthodes numériques de résolution | 0 | | |
| | | 1.5.1 Les méthodes d'Euler $\ldots \ldots 1$ | 0 | | |
| | | 1.5.2 Les méthodes de Runge-Kutta | 1 | | |
| | | 1.5.3 La méthode de Newmark | 5 | | |
| | | 1.5.4 Les méthodes d'Adams 1 | 6 | | |
| | 1.6 | Exemple d'application | 7 | | |
| | | 1.6.1 Par la méthode d'Euler | 8 | | |
| | | 1.6.2 Par la méthode RK4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 1 | 8 | | |
| | | 1.6.3 Par la méthode RK45 $\dots \dots \dots$ | 9 | | |
| | 1.7 | Conclusion | 2 | | |
| 2 | Thé | eorie du contrôle optimal 22 | 3 | | |
| | 2.1 | Introduction | 3 | | |
| | 2.2 | Définition | 3 | | |
| | 2.3 | Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle | 4 | | |

3

| | | 2.3.1 | Objet de la commande | 24 | | |
|----|-------------------|---------|--|------------------|--|--|
| | | 2.3.2 | Condition initiale du système | 25 | | |
| | | 2.3.3 | Le but de la commande | 25 | | |
| | | 2.3.4 | Critère de qualité | 25 | | |
| | 2.4 | Contrá | Slabilité | 27 | | |
| | | 2.4.1 | Contrôlabilité des systèmes linéaires | 27 | | |
| | | 2.4.2 | Contrôlabilité des systèmes non-linéaires | 29 | | |
| | 2.5 | Observ | vabilité | 29 | | |
| | | 2.5.1 | Observabilité des systèmes linéaires | <u>-</u> 0 30 | | |
| | | 2.5.2 | Observabilité des systèmes non-linéaires | 31 | | |
| | 2.6 | Princi | pe du maximum de Pontryagin | 31 | | |
| | $\frac{2.3}{2.7}$ | Métho | des numériques de résolution | 33 | | |
| | | 2.7.1 | Méthodes indirectes | 33 | | |
| | | 2.7.2 | Méthodes directes | 35 | | |
| | 2.8 | Exem | ble d'application | 36 | | |
| | 2.9 | Conclu | ision | 39 | | |
| 3 | Com | ımande | e en temps minimum d'un pendule inversé | 40 | | |
| | 3.1 | Introd | uction | 40 | | |
| | 3.2 | Intérêt | d'étude d'un pendule inversé | 41 | | |
| | 3.3 | Présen | tation du pendule inversé | 41 | | |
| | 3.4 | Modél | isation du problème du pendule inversé | 42 | | |
| | 3.5 | Princi | pe du maximum de Pontryagin | 45 | | |
| | 3.6 | Résolu | tion du problème avec la méthode de tir direct | 46 | | |
| | 3.7 | Conclu | ision | 51 | | |
| Co | onclus | sion | | 52 | | |
| Bi | Bibliographie 53 | | | | | |

Introduction

La théorie mathématique du contrôle optimal a pris naissance durant les années 40 dans le cadre spécifique des équations différentielles. Elle est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, équation d'Euler-Lagrange,...etc).

La théorie du contrôle optimal est la continuité du calcul variationnel, qui a connue une grande avancée avec l'apparition du principe du maximum de Pontryagin (1956). Cette théorie concerne la recherche d'une loi de commande pour un système dynamique donné de telle sorte qu'un certain critère d'optimalité soit atteint. Un problème de commande comprend donc un coût à optimiser, une fonction d'état et une variable de contrôle. La théorie du contrôle permet d'amener un système d'un état initial donné à un certain état final en respectant certains critères: c'est l'étape de réalisation de la commande.

On dispose de deux grandes classes de méthodes de résolution du problème de contrôle optimal: les méthodes indirectes et les méthodes directes. Le méthodes indirectes impliquent l'utilisation du principe du maximum de Pontryagin, tandis que l'autre fait usage à des techniques de discrétisation pour aboutir à un problème d'optimisation non linéaire.

Des travaux concernant l'application de la théorie du contrôle sur des problèmes réels ont connus un grand succès de part le monde, notamment les problèmes pratiques du pendule inversé qui fera l'objet d'étude de ce mémoire.

Le pendule inversé a fait l'objet d'une grande discussion tout au long de ces

INTRODUCTION

dernières années. Cet intérêt est dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites. Le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques à savoir la non linéarité et l'instabilité du système, et possède plusieurs implication pratiques.

Ce mémoire consiste à résoudre le problème du pendule inversé par une méthode directe, pour trouver la meilleure commande qui amène le pendule de sa position d'équilibre stable (le pendule vers le bas) vers sa position d'équilibre instable (le pendule vers le haut) en un temps minimum.

Le présent travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des généralités et des définitions des équations différentielles qui seront utilisées par la suite. Des méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires ont été également données.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la théorie du contrôle optimal et aux méthodes de résolution. On s'est basé sur la méthode de tir direct (discrétisation totale) qui sera la méthode de résolution de notre problème.

Au dernier chapitre, on résout le problème du pendule inversé avec la méthode directe donnée au deuxième chapitre. Les résultats numériques obtenus sont présentés sur MATLAB.

On achèvera notre travail par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires

1.1 Introduction

Le calcul différentiel, et par conséquent les équations différentielles sont aujourd'hui extrêmement présentes dans de nombreux domaines scientifiques, et ont donné lieu à une abondante richesse bibliographique. Elles interviennent également pour la détermination de loi de commande optimale des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires.

Les équations différentielles constituent l'un des chapitres les plus importants de l'analyse. Plusieurs problèmes pratiques sont modélisés par des équations différentielles. Une équation différentielle, en mathématique, est une relation entre une variable réelle, une fonction inconnue et ses dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les théories relatives aux équations différentielles sont nombreuses, et l'on peut trouver des volumes entiers consacrés à la résolution de cas particuliers. Malheureusement, nombre de ces équations, dans la plupart des problèmes de modélisation, ne sont pas toujours résolubles de façon analytique. Pour cela, on utilise les méthodes de résolution numériques. Il existe deux types de méthodes numériques : les méthodes à pas unique tel que les méthodes d'Euler et les méthodes de Runge-Kutta, les méthodes à pas multiples tel que les méthodes d'Adams.

1.2 Généralités

Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $\|.\|$ une norme multiplicative sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

Définition 1.1. Soit $A \in M_n(K)$

l'exponentielle de la matrice A est définie par:

$$exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

Remarque 1.1. La série précédente est convergente dans $M_n(K)$ du fait que :

$$\left\|\sum_{k=p}^{q} \frac{A^{k}}{k!}\right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \left\|\frac{A^{k}}{k!}\right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \frac{\|A^{k}\|}{k!} \leq e^{\|A\|}$$

Définition 1.2. (produit scalaire dans \mathbb{R}^n)

Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de \mathbb{R}^n , on appelle produit scalaire de X et Y le nombre réel

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Définition 1.3. (norme et distance euclidiennes)

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de \mathbb{R}^n . On appelle norme euclidienne de X, le nombre réel

$$||X|| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

On appelle distance euclidienne entre X et Y

$$d(X,Y) = ||Y - X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Définition 1.4. Soit r > 0 l'ensemble des points et $A \in \mathbb{R}^n$

 $B_r(A) = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X - A\| < r\} \text{ est appelé boule ouverte de centre } A \text{ et de rayon } r > 0.$ $\bar{B}_r(A) = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X - A\| \le r\} \text{ est appelé boule fermée de centre } A \text{ et de rayon } r \ge 0.$

Définition 1.5. Soit $S \in \mathbb{R}^n$

Un point P est appelé point intérieur à S s'il existe r > 0 tel que: $B_r(p) \subset S$. L'ensemble des points intérieurs à S est appelé intérieur de S et noté \tilde{S} .

Définition 1.6.

S est dit ouvert si $S = \tilde{S}$.

F est dit fermé si son complémentaire CF est ouvert.

1.3 Notions fondamentales

Définition 1.7. Une équation différentielle est linéaire si elle est constitué d'une somme de termes linéaires en sa fonction et ses dérivés comme dans les deux exemples suivants:

1.
$$\frac{dy}{dx} + 12y = 4$$

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 12y = 2z$

Elle est non linéaire si elle contient des termes non linéaires en sa fonction et ses dérivés comme dans les exemples suivants:

1. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 2$ 2. $x\frac{dy}{dx} + 2y^2 = e^z$ 3. $\frac{dy}{dx} + 2\cos y = z$

Définition 1.8. Soit y une fonction réelle définie sur un intervalle $I \in \mathbb{R}, t \in I$, supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n.

 $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ est appelée équation différentielle d'ordre n.

Remarque 1.2. Une équation différentielle est dite autonome lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable t, c'est à dire lorsqu'elle est de la forme $\dot{y} = f(y)$.

Théorème 1.1. Toute équation différentielle d'ordre $n(n \ge 1)$ linéaire ou non linéaire, peut être transformée en un système de n équations différentielles du 1^{er} ordre.

Définition 1.9. Soit l'équation différentielle suivante:

$$\dot{y} = f(x,y), \, x \in [a, \, b]$$

où $f:[a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

On appelle problème de Cauchy pour l'équation précédente le problème avec condition initiale en un point $x_0 \in [a, b]$ suivant:

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \, x_0 \in [a, \, b], \, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Théorème 1.2. Soit $f : U \times I \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, définie sur le produit d'un ouvert U de \mathbb{R}^n et d'un intervalle I de \mathbb{R} . L'équation différentielle $\dot{y}(x) = f(y(x),x)$ qui passe par y_0 à x = 0, est équivalente à l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(y(t), t) dt$$

Le résultat suivant donne les conditions d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle.

Théorème 1.3. Si la fonction f est continue sur $[a, b] \in \mathbb{R}$ et vérifie la condition de Lipschitz de rapport L > 0 suivante:

$$\forall t \in [a, b]; \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \ \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le L \|y_1 - y_2\|$$

alors le problème de cauchy admet une solution globale unique.

1.4 Types d'équations différentielles

1.4.1 Équation différentielle à variables séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$\dot{y} = g(y).f(x)$$

Pour résoudre une telle équation, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = g(y).f(x) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Par intégration, on obtient

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Exemple 1.1. Résolvons l'équation suivante: $(x - 1)\dot{y} - 2y = 0$.

$$(x-1)\frac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{2}{x-1}dx$$

En intégrant: $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x-1} dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x-1} dx$

$$\Leftrightarrow \ln y = 2\ln(x-1)$$

La solution est donc $y = k(x - 1)^2$, k est une constante.

1.4.2 Équation différentielle homogène

Une équation différentielle est dite homogène lorsqu'on peut la mettre sous la forme

$$\dot{y} = f(\frac{y}{x})$$

Pour sa résolution, on pose $\frac{y}{x} = z$, donc $y = xz \Rightarrow \dot{y} = z + \dot{z}x$, de là $z + \dot{z}x = f(z) \Rightarrow \dot{z}x = f(z) - z \Rightarrow \dot{z} = (f(z) - z)/x$ qui est une équation différentielle à variables séparées.

Exemple 1.2. $x\dot{y} = x + y$ est une équation homogène, car elle peut s'écrire $\dot{y} = 1 + \frac{y}{x}$ En posant $z = \frac{y}{x}$, on obtient l'équation $z + x\dot{z} = 1 + z$, d'où $\dot{z} = \frac{1}{x}$. Sa solution générale est: $z = \ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$. D'où la solution générale de l'équation proposée: $y = x(\ln x + C)$.

1.4.3 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$\dot{y} + a(x)y = b(x)$$

où a, b sont des fonctions de la variable réelle x, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Méthode de résolution

- 1. Calculer $\mu = e^{\int a(x)dx}$, μ est appelé facteur d'intégration.
- 2. Poser $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu b(x)$.
- 3. Intégrer les deux côtés de l'équation obtenue en 2 et résoudre pour y.

Exemple 1.3. Résolvons $\dot{y} - 4xy = x$. Comme a(x) = -4x, le facteur d'intégration vaut $\mu = e^{\int -4xdx} = e^{-2x^2}$. On pose $\frac{d}{dx}(e^{-2x^2}y) = xe^{-2x^2}$. On intègre $e^{-2x^2}y = \int xe^{-2x^2}dx = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C$. D'où l'on tire $y = -\frac{1}{4} + Ce^{-2x^2}$.

1.5 Les méthodes numériques de résolution

La plupart des équations différentielles modélisant des problèmes pratiques ne sont pas toujours résolubles de façon analytique. Pour cela, on utilise les méthodes de résolution numériques. On distingue deux types de méthodes à savoir les méthodes à pas fixe et les méthodes à pas variable.

1.5.1 Les méthodes d'Euler

La méthode de Leonhard Euler (1707-1783) est une méthode du premier ordre à pas constant. Elle consiste à remplacer l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$ par le schéma discret $\frac{(y_{i+1}-y_i)}{h}$. La résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

conduit au schéma explicite

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i) \end{cases}$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée, car elle n'offre pas une précision

suffisante. Cette méthode est convergente et du premier ordre, car l'erreur de consistance vaut

$$|y(x_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 f'(c, y_i) \text{ avec } c \in [x_{i-1}, x_i].$$

 $y(x_i)$: la valeur exacte.

 y_i : la valeur approchée obtenue.

Mais la méthode explicite est souvent instable. En revanche, le schéma rétrograde

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h.f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{cases}$$

conduit à une méthode implicite qui est universellement stable.

Exemple 1.4. Soit la fonction linéaire f définie comme suit : f(x,y) = -ay avec a > 0, le schéma d'Euler explicite

$$y_{i+1} = y_i - ahy_i = (1 - ah)y_i$$

est instable dès que $h > \frac{2}{a}$, car dans ce cas, y_i tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini. Par contre,le schéma rétrograde

$$y_{i+1} = y_i - ahy_{i+1} = \frac{y_i}{1 + ah}$$

est stable puisque y_{i+1} tend vers zéro, quand le pas h tend vers l'infini.

1.5.2 Les méthodes de Runge-Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy, en introduisant un schéma numérique de la forme

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h\\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(x_i, y_i, h_i) \end{cases}$$

où la fonction d'incrémentation Φ est une approximation de f(x,y) sur l'intervalle

 $[x_i, x_{i+1}]$. Supposons donnés un entier r, une matrice A dont les éléments triangulaires supérieures sont nuls et un vecteur $b = (b_1, \ldots, b_r)$, l'algorithme de Runge-Kutta est le suivant:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_j h, y_i + h (a_{1j}k_1 + \dots + a_{rj}k_r)) \\ y_{i+1} = y_i + (b_1k_1 + \dots + b_rk_r) \end{cases}$$

où $\sum_{i=1}^{r} b_i = 1, c_j = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}, i = 1, \dots, r, a_{ij} = 0$ si $j \ge i$ ce qui nous permet de calculer chaque k_j explicitement en fonction des j - 1 coefficients k_1, \dots, k_{j-1} déjà connus. Dans ce cas la méthode RK est explicite. Autrement, elle est implicite et il faut résoudre un système non linéaire de dimension r pour calculer les k_j .

L'augmentation des calculs pour les schémas implicites rend leur utilisation coûteuse. Par conséquent, on s'intéressera seulement aux méthodes explicites.

Méthodes d'ordre 1:

Pour b = 1 et $a_{11} = 0$, $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, c'est la méthode d'Euler explicite. Pour b = 1 et $a_{11} = 1$, $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$, c'est la méthode d'Euler rétrograde(implicite).

Méthodes d'ordre 2:

On a deux cas pour cet ordre Le premier cas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = (0,1)$$

Le système correspondant est le suivant:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \end{cases}$$

On l'appelle méthode d'Euler améliorée. Le deuxième cas:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le système correspondant est le suivant :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + k_2)/2 \end{cases}$$

C'est la méthode de Heun.

Méthodes d'ordre 3:

L'algorithme de Runge-Kutta classique correspond au cas $b = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\right)$ et à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

L'algorithme effectue à chaque pas le calcul de trois facteurs k_j

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \end{cases}$$

Méthodes d'ordre 4:

En appliquant l'algorithme de Runge-Kutta on obtiendra:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2/2) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{cases}$$

Remarque 1.3. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient plus précise.

Pour améliorer l'efficacité du calcul, on utilise des méthodes à pas variable, c'est-àdire des méthodes dans lesquelles le pas varie à chaque itération. Une des méthodes classiques consiste à employer deux méthodes de Runge-Kutta emboîtées. La première méthode d'ordre r sert à calculer la solution approchée, tandis que la seconde méthode d'ordre r' sert à estimer l'erreur de consistance pour contrôler le pas. On dit que la méthode est d'ordre (r',r).

La première méthode de Runge-Kutta emboîtée a été proposée en 1957 par Merson, elle est d'ordre 5 pour le calcul de la solution et d'ordre 4 pour le contrôle du pas. Elle consiste à calculer

 $\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/3, y_i + hk_1/3) \\ k_3 = f(x_i + h/3, y_i + hk_1/6 + hk_2/6) \\ k_4 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/8 + 3hk_2/8) \\ k_5 = f(x_i + h, y_i + hk_1/2 - 3hk_3/2 + 2hk_4) \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 4k_4 + k_5)/6 \\ y_{i+1}^* = y_i + (k_1 - 3k_3 + 4k_4)/2 \end{cases}$

L'erreur

$$\Delta_i = |y_{i+1} - y_{i+1}^*|$$

est évalué à chaque pas.

Remarque 1.4. Si ε désigne la tolérance acceptée, l'algorithme de Merson change le pas comme suit: il le divise par 2 quand $\Delta_i > \varepsilon$, il le multiplie par 2 quand $\Delta_i \le \varepsilon/64$ et le laisse tel qu'il est dans les autres cas.

D'autres méthodes ont été proposées. En 1969, Fehlberg a proposé une méthode d'ordre (4,5), elle calcule

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/4, y_i + hk_1/4) \\ k_3 = f(x_i + 3h/8, y_i + 3hk_1/32 + 9hk_2/32) \\ k_4 = f(x_i + 12h/13, y_i + 1932hk_1/2197 - 7200hk_2/2197 + 2729hk_3/2197) \\ k_5 = f(x_i + h, y_i + 439hk_1/216 - 8hk_2 + 3680hk_3/513 - 845hk_4/4104) \\ k_6 = f(x_i + h/2, y_i - 8hk_1/27 + 2hk_2 - 3544hk_3/2565 + \dots + 1859hk_4/4104 - 11hk_5/40) \\ y_{i+1} = y_i + (25k_1/216 + 1408k_3/2565 + 2197k_4/4104 - k_5/5) \\ y_{i+1}^* = y_i + (16k_1/135 + 6656k_3/12825 + 28561k_4/56430 + \dots + \dots - 9k_5/50 + 2k_6/55) \end{cases}$$

Si l'erreur est:

$$E = |y_{i+1} - y_{i+1}^*| / h$$

 et

$$\Delta = 0.1 * (\frac{\varepsilon}{E})^{\frac{1}{4}}$$

alors le changement du pas se fait comme suit: $h = \Delta * h$. Dormand et Prince ont proposé une méthode d'ordre (7,8). Plus récemment, Cash et Karp ont proposé une méthode aussi d'ordre (4,5) elle consiste à calculer

 $\begin{cases} k_1 = h.f(x_i, y_i) \\ k_2 = h.f(x_i + h/5, y_i + k_1/5) \\ k_3 = h.f(x_i + 3h/10, y_i + 3k_1/40 + 9k_2/40) \\ k_4 = h.f(x_i + 3h/5, y_i + 3k_1/10 - 9k_2/10 + 6k_3/5) \\ k_5 = h.f(x_i + h, y_i - 11k_1/54 + 5k_2/2 - 70k_3/27 + 35k_4/27) \\ k_6 = h.f(x_i + 7h/8, y_i + 1631k_1/55296 + 175k_2/512 + 575k_3/13824 + \dots \\ \dots + 44275k_4/110592 + 253k_5/4096) \\ y_{i+1} = y_i + (37k_1/378 + 250k_3/621 + 125k_4/594 + 512k_6/1771) \\ y_{i+1}^* = y_i + (2825k_1/27648 + 18575k_3/48384 + 13525k_4/55296 + 277k_5/14336 + k_6/4) \end{cases}$

Si on pose

$$y_{i+1} = y_i + c_1 k_1 + \ldots + c_6 k_6 + O(h^2)$$

 et

$$y_{i+1}^* = y_i + c_1^* k_1 + \ldots + c_6^* k_6 + O(h^2)$$

Une estimation de l'erreur est donné par

$$\Delta = y_{i+1} - y_{i+1}^* = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i$$

1.5.3 La méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une méthode très utilisée dans les codes de dynamique. C'est une méthode de résolution directe qui s'applique à l'équation matricielle

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

où M est la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, K la matrice de rigidité et F la force généralisée. La solution est une fonction x(t) dépendante du temps. Le schéma de Newmark se présente sous la forme

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h\dot{x}_i + h^2((1/2 - \beta)\ddot{x}_i + \beta\ddot{x}_{i+1}) \\ \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + h((1 - \gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}) \end{cases}$$

où β et γ sont deux paramètres. Lorsque ces deux paramètres sont nuls, on retrouve les formules de Taylor. Lorsque $\beta = 1/12$ et $\gamma = 1/2$, la méthode s'appelle méthode de Fox-Goodwin.

La méthode de Newmark est d'ordre 1 pour $\gamma \neq 1/2$ et d'ordre 2 pour $\gamma = 1/2$ D'autres codes de mécanique utilisent la méthode de Gear, implicite à deux pas, appelée aussi *Backward Differential Formulas*, qui se définit par le schéma

$$\begin{cases} \dot{x}_{i+1} = (3x_{i+1} - 4x_i + x_{i-1})/2\hbar \\ \ddot{x}_{i+1} = (3\dot{x}_{i+1} - 4\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1})/2\hbar \end{cases}$$

1.5.4 Les méthodes d'Adams

John Adams (1819-1892) a proposé des méthodes en 1855 où la fonction f est approchée par son polynôme d'interpolation (l'interpolation consiste en une estimation d'une valeur inconnue en s'appuyant sur des valeurs connues qui l'encadrent).

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt$$
$$\simeq y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{n,r}(t)dt$$

Principe : les erreurs augmentent avec l'intégration, les points les plus proches de la valeur initiale ont tendance à être plus fiables. Pour calculer y_{i+1} , on peut s'appuyer non seulement sur la dernière valeur estimée y_i mais aussi sur les r précédentes.

- Si le calcul invoque la pente au point recherché $f(x_{i+1}, y_{i+1})$, la méthode est implicite: Adams-Moulton.
- Sinon elle est explicite: Adams-Bashforth.

Dans les deux cas, il faut initialiser le calcul par une méthode à un pas sur les m premiers points.

Adams-Bashforth

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + \beta h_i \sum_{j=1}^r a_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1}) \text{ avec } \beta \sum_{j=1}^r a_j = 1 \end{cases}$$

méthode d'ordre r

| r | eta | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 |
|---|------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1 | 1 | | | |
| 2 | 1/2 | 3 | -1 | | |
| 3 | 1/12 | 23 | -16 | 5 | |
| 4 | 1/24 | 55 | -59 | 37 | -9 |

Les méthodes de Milne explicites sont fondées sur le même principe que les méthodes d'Adams-Bashforth mais ici, le schéma donnant y_{i+1} est exprimé en fonction de y_{i-r} .

Adams-Moulton

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + \beta h_i \sum_{j=0}^r a_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1}) \text{ avec } \beta \sum_{j=0}^r a_j = 1 \end{cases}$$

méthode d'ordre r + 1

| r | β | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 |
|---|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 1/2 | 1 | 1 | | | |
| 2 | 1/12 | 5 | 8 | -1 | | |
| 3 | 1/24 | 9 | 19 | -5 | -1 | |
| 4 | 1/720 | 251 | 646 | -264 | 106 | -19 |

Les méthodes de Milne implicites sont fondés sur le même principe que les méthodes d'Adams-Moulton mais ici, le schéma donnant y_{i+1} est exprimé en fonction de y_{i-r} .

1.6 Exemple d'application

Résolvons le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 * x \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

par les méthodes d'Euler, RK4 et RK45 à l'aide du logiciel Matlab

1.6.1 Par la méthode d'Euler

```
clear all; close all;

x0 = 3; T = 1; %initialisation

n = 100; h = T/n;

t = [0:n] * h;

xe = x0 * exp(2 * t);

xap(1) = x0;

for i = 1:n

xap(i+1) = (1+2*h) * xap(i);
```

end

plot(t, xe, 'r', linspace(0, T, n), xap(1:n), 'g'); grid on; hold on; legend ('solution exacte', 'solution approchée par Euler');

1.6.2 Par la méthode RK4

```
clear all; close all;

x0 = 3; T = 1;

n = 100; h = T/n;

t = [0:n] * h;

xe = x0 * exp(2 * t);

xap(1) = x0;

for i = 1:n

k1 = h * (2 * xap(i) + k1/2);

k2 = h * (2 * xap(i) + k2/2);

k3 = h * (2 * xap(i) + k3);

xap(i + 1) = xap(i) + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6;

end
```

plot(t,xe, 'r', linspace(0, T, n), xap(1:n), 'k'); grid on; hold on; legend ('solution exacte', 'solution approchée par RK4');

1.6.3 Par la méthode RK45

```
clear all; close all;
x0 = 3; T = 1;
epsilon = 1e - 6; h = 0.2;
xap(1) = x0; i = 1;
while t(i) < T
     h = min(h, T - t(i));
     k1 = h * (2 * xap(i));
     k2 = h * (2 * xap(i) + k1/4);
     k3 = h * (2 * xap(i) + 3 * k1/32 + 9 * k2/32);
     k4 = h * (2 * xap(i) + 1932 * k1/2197 - 7200 * k2/2197 + 7296 * k3/2197);
     k5 = h * (2 * xap(i) + 439 * k1/216 - 8 * k2 + 3680 * k3/513 - 845 * k4/4104);
     k6 = h * (2 * xap(i) - 8 * k1/27 + 2 * k2 - 3544 * k3/2565 + 1859 * k4/4104 - 11 * k5/40);
     xap(i+1) = xap(i) + (25 * k1/216 + 1408 * k3/2565 + 2197 * k4/4104 - k5/5);
     xc = xap(i) + (16 * k1/135 + 6656 * k3/12825 + 28561 * k4/56430 - 9 * k5/50 + 2 * k6/55);
   erreur = abs(xap - xc)/h;
   delta = 0.1 * (epsilon/erreur)^{(1/4)};
     if delta \leq epsilon
             t(i+1) = t(i) + h;
             i = i + 1;
             fprintf('Step %d: t = \%6.4f, xap = \%18.15f', i - 1, t(i), xap(i));
             h = delta * h;
     else
             h = delta * h;
     end
end
```

plot(t, xap); grid on; hold on; legend ('solution approchée par RK45');

Pour avoir une seule figure on a combiné les trois programmes en un seul. Les graphes obtenus par Matlab sont donnés dans les figures ci-dessous. **NB**: Les figures sont données par plusieurs zooms.



FIG. 1.1 – Résultats des méthodes d'Euler, de RK4 et RK45







1.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré aux méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires.

En premier lieu on a cité quelques généralités sur les équations différentielles puis dans la deuxième partie, on a défini quelques méthodes de résolution. Après avoir résolu un exemple (dans notre cas Euler et Runge-Kutta seulement), on a aperçu qu'à chaque fois que l'ordre d'une méthode augmente, elle s'approche encore plus de la solution exacte.

Les méthodes de RK d'ordre (r', r) (emboîtées) sont meilleures que les méthodes de RK d'ordre r, et les méthodes de RK d'ordre r sont meilleures que les méthodes d'Euler.

Alors, pour plus de précision il serait intéressant de travailler avec les méthodes d'ordre élevé.

Chapitre 2

Théorie du contrôle optimal

2.1 Introduction

Les processus physiques consomment tous une certaine quantité d'énergie lors de leur fonctionnement. Il apparaît souhaitable, lorsque cela est possible, de chercher à minimiser cette dépense en s'écartant le moins possible de l'objectif à atteindre. Ainsi, si on possède un modèle mathématique décrivant le processus physique et si on a fait le choix d'un objectif à atteindre par la donnée d'une fonctionnelle à minimiser, il est alors possible de poser le problème mathématiquement et de rechercher les solutions optimales éventuelles.

Ce chapitre est composé de deux parties: la première partie est consacrée à la présentation des concepts de bases d'un problème de contrôle, tandis que dans la deuxième partie on verra les méthodes numériques de résolution.

2.2 Définition

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples: systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie... L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation. Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc.

2.3 Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle

Le problème général de contrôle optimal est constitué des données suivantes:

2.3.1 Objet de la commande

Le système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que n variables sont nécessaires pour décrire son comportement. L'identification de ces variables et la description du système dépendant de celles-ci est une tâche très importante: c'est l'étape de modélisation mathématique.

Les variables, nommées variables d'états seront notées x_i , i = 1,...,n. Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de t: $x_i(t)$. Les n variables d'états vont être présentées par n équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$; ce sont les équations d'état de forme générale $\dot{x} = f(t,x,u)$ où \dot{x} désigne le vecteur dérivé par rapport au temps t de toutes les composantes de x.

Les variables de contrôle seront notées $u_j(t)$, j = 1,...,m. Elles sont soumises à l'hypothèse d'intégrabilité par rapport à t. Cela simplifie beaucoup les traitements si les u_j sont connues; cependant cette hypothèse est bien souvent trop restrictive car ces fonctions peuvent être continues par morceaux ou de type Bang-Bang. U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être sans borne, borné ou du type Bang-Bang définit ci-dessous.

Commande Bang-Bang

On suppose que U est un polyèdre (cube) $[-1,1]^m$ dans \mathbb{R}^m . Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque temps t et chaque indice j = 1,...,m, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch.

2.3.2 Condition initiale du système

La condition initiale du système, $x_0 = x(t_0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, les composantes de x(t) et de x_0 peuvent représenter physiquement: la position, la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables.

2.3.3 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0), (x_0 \in M_0)$ à une autre position $x^* = x(t^*), (x^* \in M_1)$ où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 est l'ensemble d'arrivée.

2.3.4 Critère de qualité

L'objectif, lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système est exécuté de la façon la plus souhaitable. Donc, choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système.

Le critère de qualité, appelé aussi fonctionnelle coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule

$$J(x,u) = F(t_f, x^f) + \int_0^{t_f} f_0(t, x, u) dt.$$

Cette fonctionnelle a deux parties: $F(t_f, x^f)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t_f . Il a son importance lorsque t_f est libre, sinon il est constant. $\int_0^{t_f} f_0(t, x, u) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Elle dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u.

Classement des problèmes de contrôle optimal

On peut classer les fonctions objectif en deux critères physiques de performance:

Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t,x,u) = 1$, $F(t_f,x^f) = 0$ et le temps final t_f est libre dans l'expression de $\min_u \int_0^{t_f} 1 dt$.

Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression

$$\min_{u} \int_{0}^{t_{f}} f_{0}(t, x, u) dt + F(t_{f}, x^{f})$$

Évidemment, il existe des problèmes qui combine les deux critères physique de performance, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal. Dans certains problèmes de contrôle optimal, il peut s'avérer utile et efficace de s'intéresser tout d'abord au problème de minimisation du temps de transfert afin de pouvoir traiter correctement le problème de minimisation du coût.

Si dans l'expression de J, f_0 est proportionnelle à u^2 on parle alors d'un coût quadratique. Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(t,x,u)$ ne dépendent pas explicitement du temps, c'est à dire $\dot{x} = f(x,u)$, on parle dans ce cas de problème autonome. Si test présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

Problème de Mayer-Lagrange

Le problème de Mayer-Lagrange est donné sous la forme d'un système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x^0, x(t_f) = x^f, u \in U, t \in [0, t_f]$$

l'objectif étant de minimiser le coût

$$J(t_f, u) = \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_f, x(t_f))$$

Lorsque F = 0 dans l'expression de la fonctionnelle J, on parlera d'un problème de Lagrange; lorsque $f_0 = 0$, on parlera d'un problème de Mayer.

2.4 Contrôlabilité

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle. C'est la possibilité d'influencer l'état du système (sortie) en manipulant les entrées (commandes). Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial M_0 à une cible M_1 , il faut d'abord vérifier si cette cible est atteignable: c'est le problème de contrôlabilité. Existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée x conduit le système de M_0 à M_1 en un temps fini?

La notion de contrôlabilité a été inventée en 1960 par Kalman à propos des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. L'état x évolue dans un espace vectoriel réel E, de dimension n. On dit que $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable, si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit, c'est à dire, si et seulement si, étant donnés deux points $x^0, x^f \in E$ et deux instants t_0, t_f avec $t_0 < t_f$, il existe une commande u, définie sur $[t_0, t_f]$, telle que $x(t_i) = x^i, i = 0, f$.

2.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x^0, t \in I$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} , A, B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n . L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soit $M(.): I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t), M(0) = Id.$

Pour tout contrôle u le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x^{0}$$

admet une unique solution $x(.): I \to \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par

$$x(t) = M(t)x^{0} + \int_{0}^{t} M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

pour tout $t \in I$.

Si r = 0 et $x^0 = 0$, la solution du système s'écrit $x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds$. Elle est linéaire en u.

Le théorème suivant donne une condition générale pour la contrôlabilité des systèmes linéaires:

Théorème 2.1. Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t_1 si et seulement si la matrice

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} M(t)^{-1} B(t) B(t)' M(t)^{-1} dt,$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Cette condition ne dépend pas de x^0 , c'est à dire que si un système linéaire est contrôlable le temps t_f depuis x^0 , alors il est contrôlable en temps t_f depuis tout point.

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t. Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{tA}$, et la solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{tA}(x^0 + \int_0^t e^{-sA}(B(s)u(s) + r(s))ds)$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contrainte sur le contrôle:

Théorème 2.2. On suppose que $U = \mathbb{R}^n$. Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice

$$C = (B|AB|...|A^{n-1}B)$$

 $est \ de \ rang \ n.$

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition rang C = n est appelée condition de Kalman.

Dans le cas mono-entrée m = 1 (u est un contrôle scalaire), on a le théorème suivant: **Théorème 2.3.** On considère le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U$ où Uest un intervalle de \mathbb{R} avec $0 \in U$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la matrice $C = (b, Ab, ..., A^{n-1}b)$ est de rang n et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

2.4.2 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

La contrôlabilité est un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation. L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et de dimension infinie a suscité depuis près de cinquante ans une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié. Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de $\dot{x} = Ax + Bu$. Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non-linéaires:

Proposition 2.1. Considérons le système $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), x(0) = x^0$ avec $f(x^0,u^0) = 0$. On note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,u^0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0,u^0)$. Si rang $(B|AB|...|A^{n-1}B) = n$ alors le système est localement contrôlable en x^0 .

En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

2.5 Observabilité

L'observabilité d'un processus est un concept très important dans le domaine de l'estimation de l'état. En effet pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir à priori si les variables d'états sont observables ou non. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales.

2.5.1 Observabilité des systèmes linéaires

On considère le système linéaire autonome suivant:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
(2.1)

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est celui des contrôles (entrées, commandes), $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est celui des sorties du système. $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}),$ $C \in M_{p,n}(\mathbb{R}), D \in M_{p,m}(\mathbb{R})$. Dans tout ce qui suit on suppose que D = 0, cela ne change rien aux résultats qui suivent.

Définition et critères d'observabilité

Notons $(x_u(t,x_0),y_u(t,x_0))$ la solution de (2.1) telle que $x_u(0,x_0) = x_0$ Définition 2.1. Le système (2.1) est observable en temps T si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists u \in L^{\infty}([0,T], \mathbb{R}^m) | y_u(.,x_1) \neq y_u(.,x_2)$$

(dans ce cas on dit que x_1 et x_2 sont distinguables).

Autrement dit, x_1 et x_2 sont distinguables s'il existe un contrôle tel que les trajectoires observées diffèrent. De manière équivalente, on peut dire

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_n \quad \forall u \in L^{\infty}([0,T], \mathbb{R}^m) \quad y_u(.,x_1) = y_u(.,x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

i.e. la connaissance de la trajectoire observée détermine de manière univoque l'état initial. **Théorème 2.4.** Le système (2.1) est observable (en temps T quelconque) si et seulement si

$$rang \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Lemme 2.1. Le système (2.1) est observable en temps T si et seulement si, pour le système observé $\dot{x} = Ax$, y = Cx, $x(0) = x_0$, on a

$$x_0 \neq 0 \Rightarrow y(.) \neq 0 \ sur[0,T]$$

Remarque 2.1. Pour un système linéaire autonome, l'observabilité a lieu en temps quelconque si elle a lieu en temps T. **Remarque 2.2.** La notion d'observabilité pour un système linéaire autonome ne dépend pas de la matrice B.

Corollaire. Le système (2.1) est observable en temps T si et seulement si la matrice

$$O(T) = \int_{O}^{T} e^{-sA^{T}} C^{T} C e^{-sA} ds$$

est inversible

2.5.2 Observabilité des systèmes non-linéaires

Pour les systèmes non-linéaires, étant donné l'espace de l'état $X \subset \mathbb{R}^n$ et l'ensemble U des entrées, la notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales. La notion d'observabilité des systèmes non-linéaires est la même que pour les systèmes linéaires.

2.6 Principe du maximum de Pontryagin

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, on cherche parmi toutes les trajectoires qui transférent l'objet de la position initiale $x(t_0)$ à la position finale $x(t^*) = x_f$ celle qui le fait en temps final, ou celle qui le fait en minimisant un certain critère, c'est le problème de contrôle optimal. La résolution d'un tel problème se fait par différentes méthodes. Parmi ces méthodes on peut citer entre autre le principe du maximum de Pontryagin.

Considérons le problème de contrôle optimal suivant

$$\min_{\substack{t,x,u\\s.c}} J(x,u) = \int_0^{t_f} f_0(t,x,u) dt
\stackrel{x.c}{s.c} \\
\dot{x} = f(t,x,u) \\
x(0) = x^0 \in M_0, \quad x(t_f) = x^f \in M_1 \\
u \in U$$
(2.2)

S'il n'existe pas de contrôle $u \in U$ satisfaisant le système $\dot{x} = f(t,x,u), x(0) = x^0$ et $x(t_f) \in M_1$, on dit que le système n'est pas contrôlable de l'état initial aux états terminaux de M_1 . Alors le problème n'admet pas de solution. Si le système est

contrôlable, il existe en général beaucoup de contrôles possibles et pour chacun de ces contrôles correspond une valeur pour J. Le problème est de déterminer un contrôle optimal $u^* \in U$ associé à des trajectoires optimales x^* qui optimise la valeur de J.

On définit une variable d'état supplémentaire x_0 dont l'équation d'état s'écrit $\dot{x}_0 = f_0(x,u)$ et soumise à la condition initiale $x_0(0) = 0$, et tel que le coût s'écrit $J(x,u) = x_0(t_f)$.

On introduit ensuite un vecteur d'état $\tilde{x} = (x, x_0)$ de dimension n+1 où $x_i, i = 0,...,n$ sont les composantes de \tilde{x} . De manière similaire, on étend f en $\tilde{f} = (f, f_0)$ pour obtenir le système augmenté

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(t, x, u).$$

En raisonnant sur le système augmenté, le problème revient à chercher un contrôle u correspondant à une trajectoire \tilde{x} solution du système $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(t,x,u)$ joignant le point $\tilde{x}^0 = (x^0, 0)$ à $\tilde{x}^f = (x^f, x_0(t_f))$ et minimisant la dernière coordonnée $x_0(t_f)$. L'Hamiltonien du système augmenté $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(t,x,u)$ est la fonction H définie par:

$$H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}_* \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$(t, \tilde{x}, \tilde{p}, u) \mapsto H(t, \tilde{x}, \tilde{p}, u) = \sum_{i=0}^n p_i f_i(t, x, u).$$

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire x est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application continue $\tilde{p}: [0, t_f] \to \mathbb{R}^{n+1}_*$ appelée vecteur adjoint vérifiant

$$\begin{split} \dot{\tilde{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, u), \\ \dot{\tilde{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}}(t, \tilde{x}, \tilde{p}, u), \end{split}$$

et vérifiant la condition du maximum

$$H(t, \tilde{x}, \tilde{p}, u) = \max_{v \in U} H(t, \tilde{x}, \tilde{p}, v).$$

La fonction H ne dépend pas de x_0 d'où $\dot{p}_0(t) = 0$, c'est à dire $p_0(t)$ est constant sur $[0, t_f]$.

Remarque 2.3. La convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum, tandis que $p_0 \geq 0$ conduit au principe du minimum.

Dans le cas où il n'y a pas de contrainte sur le contrôle $(U = \mathbb{R}^m)$, un contrôle optimal u vérifie les conditions suivantes:

 $- p_0 = -1.$

- *u* est une fonction telle que *H*(*t*, *x̃*, *p̃*, *v*) atteint son maximum en *u*, ∀*v* ∈ ℝ^{*m*}. La condition du maximum devient $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$.
- Les co-équations d'état adjoint ont une solution \tilde{p} , et les équations d'état ont une solution x qui prend les valeurs x^0 en $t_0 = 0$ et x^f au temps t_f . Le système vérifie les conditions de transversalité: à l'instant initial, p(0) est perpendiculaire à l'espace tangent de M_0 en x(0) et à l'instant final, $p(t_f)$ est perpendiculaire à l'espace tangent de M_1 en $x(t_f)$.
- L'Hamiltonien est constant le long de la trajectoire optimale, et cette constante vaut 0 si le temps terminal t_f est libre.

Si une solution existe, le principe du maximum de Pontryagin produit des conditions nécessaires. On va donc chercher des solutions qui satisfont ces conditions nécessaires et l'on prendra celle qui minimise J. Il n'y a pas de garantie en toute généralité sur l'unicité de la solution optimale. Si l'on ne trouve pas de solution satisfaisant toutes les conditions du PMP, alors il n'existe pas de solution au problème de contrôle optimal.

2.7 Méthodes numériques de résolution

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal: les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et à réduire le problème en un problème d'optimisation non linéaire. Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir, un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

2.7.1 Méthodes indirectes

Il s'agit des méthodes de tir simple et multiple. Étudions le tir simple.

Tir simple

Le principe est le suivant Considérons le problème de contrôle optimal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ x(t_0) = x^0, \ x(t_f) = x^f, \ u \in U, \ t \in [0, t_f] \\ J(t_f, u) = \int_0^{t_f} f_0(t, x_u(t), u(t)) dt + F(t_f, x_u(t_f)) \end{cases}$$

et supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixe. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de (x(t),p(t)), alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t,z(t))$, où z(t) = (x(t),p(t)), et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0),z(t_f)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0 \end{cases}$$
(2.3)

Notons $z(t,z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0))$. Le problème (2.3) aux valeurs limites est alors équivalent à $G(z_0) = 0$ (déterminer le zéro de la fonction G).

Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Remarque 2.4. Si le temps final t_f est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant t_f comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\frac{dt_f}{dt} = 0$. On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutation. Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

2.7.2 Méthodes directes

Les méthodes directes ont pris de l'importance dans le domaine du contrôle optimal numérique depuis les années 80. Cette approche consiste à discrétiser l'état et le contrôle.

tir direct

C'est la méthode la plus simple lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme:

$$\min_{Z \in C} F(Z) \tag{2.4}$$

où $Z = (x_1, ..., x_N, u_1, ..., u_N)$, et

$$C = \{ Z | g_i(Z) = 0, i \in 1, ..., r, g_j(Z) \le 0, j \in r+1, ..., m \}.$$
(2.5)

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors

$$x_{i+1} = x_i + h.f(t_i, x_i, u_i)$$

Remarque 2.5. Il existe une infinité de méthodes d'intégration numérique. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, etc. D'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler, méthode du point milieu, méthode de Heun, méthode de Runge-kutta, Adams-Moulton, etc. Le choix de la méthode dépend du problème abordé. La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire

$$x_{i+1} = x_i + h.f(t_i, x_i, u_i), \ i = 0, \dots, N - 1,$$
$$\min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N),$$
$$u_i \in \Omega, \ i = 0, \dots, N - 1,$$

D'un point de vue plus général, cela revient à choisir une discrétisation des contrôles, ainsi que de l'état, dans certains espaces de dimension finie:

$$u \in vect(U_1,...,U_N), i.e. \ u(t) = \sum_{i=1}^N u_i U_i, \ u_i \in \mathbb{R},$$

 $x \in vect(X_1,...,X_N), i.e. \ x(t) = \sum_{i=1}^N x_i X_i, \ x_i \in \mathbb{R},$

où les $U_i(t)$ et $X_i(t)$ représentent une base. L'équation différentielle, ainsi que les éventuelles contraintes sur l'état ou le contrôle, ne sont vérifiées que sur les points de la discrétisation. On se ramène bien à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme (2.4).

On peut résoudre un problème de programmation non linéaire de la forme (2.4) par plusieurs méthodes, on peut citer parmi celles-ci: méthode du gradient, du sous gradient et du gradient conjugué, méthode de Newton, méthode quasi-Newton (DFP, BFGS), méthode de pénalités (intérieures et extérieures), la méthode SQP, etc.

Dans ces méthodes, le but est de se ramener à des sous-problèmes plus simples.

2.8 Exemple d'application

Résolvons un exemple simple de contrôle optimal avec la méthode de discrétisation totale, comme dans le premier chapitre à l'aide du logiciel Matlab. Soit le problème de contrôle optimal

$$\begin{cases} \min_{X(t),u(t)} J(t_f, X, u) = \min t_f \\ \dot{x}(t) = y(t), \ x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) = u(t), \ y(0) = 0 \\ |u(t)| \le 1 \end{cases}$$

L'objectif est de joindre (0,0) à (0, -1) en temps minimal. Le principe est de se ramener à un problème de programmation non linéaire. Un tel problème se résout à l'aide d'une méthode SQP. Pour se faire on utilise une fonction implémentée sur Matlab, c'est la fonction "fmincon".

Le programme

function direct

clear all; close all; clc;

N = 40; % Nombre de pas de discrétisation

uinit = 2 * rand(N,1) - 1; % Initialisation aléatoire du contrôle

tfinit = 1; xinit = [uinit; tfinit]; % Point de départ pour fmincon

lb = -ones(N + 1,1); lb(N + 1) = 0; ub = ones(N + 1,1); ub(N + 1) = 3; %Contrainte sur le contrôle $|u| \le 1$ et $0 \le tf \le 3$

options=optimset('Display','iter','Algorithm','active-set','MaxFunEvals',100000);

[res, Fval, exitflag]=fmincon(@tempsfinal, xinit, [], [], [], [], lb, ub, @cond, options);

exitflag

% Calcul des trajectoires optimales

tf = res(end); z(1, :) = [0; 0];

%Méthode RK4

for
$$i = 1: N$$

 $k11 = tf/N * z(i,2);$
 $k21 = tf/N * (z(i,2) + k11/2);$
 $k31 = tf/N * (z(i,2) + k21/2);$
 $k41 = tf/N * (z(i,2) + k31);$
 $z(i+1,1) = z(i,1) + (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)/6;$
 $k12 = tf/N * res(i);$
 $k22 = tf/N * (res(i) + k12/2);$
 $k32 = tf/N * (res(i) + k22/2);$
 $k42 = tf/N * (res(i) + k32);$
 $z(i+1,2) = z(i,2) + (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)/6;$

end

$$\begin{split} & \text{subplot(221); plot(linspace(0,tf,N),} z(1:N,1)); \\ & \text{subplot(222); plot(linspace(0,tf,N),} z(1:N,2)); \\ & \text{subplot(223); plot(linspace(0,tf,N),} res(1:N)); \\ & \text{subplot(223); plot(N); res(N),} res(N); res(N)$$

function [c,ceq] = cond(u) N = length(u) - 1;tf = u(end); xf = 0; yf = 0;

% Calcul de l'etat final au temps t
f avec la méthode RK4

for i = 1: N k11 = tf/N * yf; k21 = tf/N * (yf + k11/2); k31 = tf/N * (yf + k21/2); k41 = tf/N * (yf + k31);xf = xf + (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)/6;

 $\begin{aligned} k12 &= tf/N * u(i); \\ k22 &= tf/N * (u(i) + k12/2); \\ k32 &= tf/N * (u(i) + k22/2); \\ k42 &= tf/N * (u(i) + k32); \\ yf &= yf + (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)/6; \end{aligned}$

end

$$c=0;$$

ceq = [xf; yf + 1];% On impose la condition finale xf = 0, yf = -1

function val = tempsfinal $(u_{-}tf)$

val = $u_t f(end)$; % $u_t f = [u; tf]$, où u est le discretisé du contrôle, et tf est le temps final

Les graphes obtenus sont donnés dans la figure (2.1)



FIG. 2.1 – Résultats de la méthode directe

2.9 Conclusion

On s'est intéressé dans ce chapitre à la théorie du contrôle optimal. Le principe du maximum de Pontryagin a été introduit. Une méthode numérique directe (discrétisation totale) a été utilisée pour résoudre un simple exemple de contrôle optimal.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude pratique d'un problème de contrôle en temps minimum d'un pendule inversé. La résolution de ce problème serait effectuée en utilisant la méthode de discrétisation directe implémentée sous MATLAB.

Chapitre 3

Commande en temps minimum d'un pendule inversé

3.1 Introduction

Le problème du pendule inversé (PI) est l'un des problèmes classiques les plus importants d'ingénierie de contrôle, et présente des caractères identiques aux systèmes de commande qui existent en robotiques.

Le pendule inversé sur un chariot est un exemple bien connu des problèmes de commande non linéaires et instables. Ce problème devient encore plus compliqué quand la tige du pendule est flexible, au lieu d'une tige rigide. Le degré de difficulté dans sa commande augmente avec sa flexibilité.

Le système du pendule inversé est un problème standard du domaine de systèmes de commande. Ils sont souvent utiles pour démontrer les concepts du contrôle linéaire comme la stabilisation des systèmes. Puisque le système est en soi non linéaire, il est souvent utilisé pour l'illustration de certaines idées dans le contrôle non linéaire.

Dans ce système, un pendule est attaché à un chariot équipé d'un moteur qui le conduit le long d'une piste horizontale. L'utilisateur peut manipuler la position et la vitesse du chariot à travers le moteur. La piste limite le mouvement du chariot dans la direction horizontale. Des capteurs sont attachés au chariot et au pivot pour mesurer la position du chariot et l'angle du pendule, respectivement. Le système a deux équilibres, dont l'un est stable tandis que l'autre est instable. L'équilibre stable correspond à l'état où le pendule pointe vers le bas. En absence de n'importe quelle force de contrôle, le système retournera naturellement à cet état. L'équilibre instable correspond à l'état où les points du pendule sont strictement dirigés vers le haut, ce qui exige une force de contrôle pour maintenir cette position.

3.2 Intérêt d'étude d'un pendule inversé

L'étude du pendule inversé a beaucoup d'importance et présente plusieurs raison à cela:

L'homme est un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse.

Dans le même ordre d'idée, la robotique utilise ce genre de concept.

On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralenti en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.

Les étudiants en automatique, en robotique, ... font des recherches avec ce genre de dispositif, et font intervenir beaucoup de notions intéressantes : programmation, automatisation, mécanique

3.3 Présentation du pendule inversé

Le but de la commande du pendule inversé est de maintenir en équilibre vertical une tige en aluminium à l'extrémité de laquelle est montée une masse de forme cylindrique.

Cette tige est fixée par une articulation pivotante sur un chariot qui peut se déplacer

en glissant le long d'un rail de longueur $L_r \leq 0.5$ de guidage horizontale. Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est transformé en mouvement de translation du chariot par l'intermédiaire d'une poulie et d'une courroie crantée. Le déplacement du chariot dans un sens ou dans l'autre assure, par réaction, l'équilibre vertical du bras du pendule. Le dispositif est montré dans la figure (3.1).



FIG. 3.1 – Schéma du système chariot-pendule

Le signal de commande est placé à [-25V, +25V] et la position du chariot est physiquement liée par la longueur de rail dans l'intervalle [-0.5m, +0.5m]. On considère dans ce modèle que $\theta = 0$ est la position stable (le pendule est pointé vers le bas) et $\theta = \pm \pi$ est la position instable (le pendule est pointé vers le haut).

3.4 Modélisation du problème du pendule inversé

L'objet de ce paragraphe est d'établir le modèle mathématique du système complet. Pour cela, on procédera en deux temps. On considère dans un premier temps les forces s'exerçant sur le pendule et ensuite celles s'exerçant sur le chariot.

Pendule

Le pendule est soumis à un certain nombre de forces. Il y a tout d'abord le poids P et aussi une force qui s'exerce à la base du pendule qui est décomposable en une composante horizontale H et verticale V. En appliquant le principe fondamental de

la dynamique et en projetant l'équation obtenue sur les axes x et y on obtient les deux équations qui caractérisent le mouvement du centre de gravité en translation, soit

$$H = m \frac{d^2}{dt^2} (x - l\sin(\theta)) \tag{3.1}$$

$$V = m \frac{d^2}{dt^2} (-l\cos(\theta)) + mg$$
(3.2)

Le pendule est soumis à un certain nombre de couples. Celui lié à la force qui s'exerce à sa base est décomposable en deux couples, un correspondant à la composante horizontale de cette force et l'autre lié à la composante verticale. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur les couples en tenant compte du couple dû aux frottements dont le coefficient est noté d et en notant le moment d'inertie du pendule par rapport au centre de gravité I, on obtient:

$$I\frac{d^{2}\theta}{dt^{2}} = Vl\sin(\theta) + Hl\cos(\theta) - d\frac{d\theta}{dt}$$
(3.3)

Chariot

Le chariot quant à lui est soumis aux forces liées à l'action du pendule : H et V, à la gravité g, à la réaction F_x , à la force d'entraînement transmise par la courroie et due au moteur F, mais également aux forces de frottements des roues b s'opposant à l'action F. En appliquant le principe fondamental de la dynamique et en projetant sur l'axe x, on obtient:

$$F - H - F_x \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$$
(3.4)

Pendule et chariot

En développant les équations (3.1) et (3.2) et en remplaçant dans les équations (3.3) et (3.4), on obtient les équations d'état suivantes:

$$(I+ml^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} + d\frac{d\theta}{dt} + mlg\sin(\theta) - ml\cos(\theta)\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$
(3.5)

$$(M+m)\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} - ml\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos(\theta) + ml(\frac{d\theta}{dt})^2\sin(\theta) = F$$
(3.6)

Si on pose $\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \ \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$, on aura:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mlg\sin(\theta) - ml\cos(\theta)\ddot{x} = 0$$

 et

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\theta}\cos(\theta) + ml(\dot{\theta})^2\sin(\theta) = F$$

Les paramètres du système sont donnés dans le tableau ci-dessous.

| Paramètres | Significations | Valeur |
|------------|--|---------------------|
| l | longueur du pendule | $0.36 \ m$ |
| m | masse du pendule | $0.23 \ kg$ |
| M | masse du chariot | $2.4 \ kg$ |
| h = m + M | masse totale pendule/chariot | $2.63 \ kg$ |
| I | inertie du pendule | $0.09936 \ kg.m^2$ |
| N | moment d'inertie du poteau $(N=ml^2+I)$ | $0.039744 \ kg.m^2$ |
| b | coefficient de frottement des roues du chariot | $0.05 \ Ns/m$ |
| d | coefficient de frottement du pendule | 0.005 Nms/rad |
| g | gravité | 9.81 m/s^2 |
| R | résistance de l'induit | $2.5 \ \Omega$ |
| K_m | constante mécanique | 0.05 Nm |
| K_b | constante électrique du moteur | $0.05 \ N/A$ |
| r | rayon de la poulie | 0.027 m |
| Tmax | tension d'alimentation de l'induit du moteur | $25 \ volts$ |

TAB. 3.1 – Paramètres du pendule inversé.

La force que le moteur exerce sur le chariot dépend de la tension d'entrée u et de la vitesse du chariot \dot{x} . Le rapport est:

$$F = \frac{K_m K_b}{Rr} u - \frac{K_m^2 K_b^2}{Rr^2} \dot{x}$$

$$(3.7)$$

Cette formule est citée dans [10].

Le vecteur d'état du système pendule inversé-chariot sera noté : $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (\dot{x}, x, \dot{\theta}, \theta)^t$, où $x_2 = x$ est la position du chariot, $x_4 = \theta$ représente l'angle du pendule et $x_1 = \dot{x}, x_3 = \dot{\theta}$ sont la vitesse et la vitesse angulaire du chariot et du pendule respectivement. L'angle $\theta = x_4$ est supposé être égal à zéro quand le pendule pointe vers le bas.

Des équations (3.5), (3.6) et (3.7), on donne les équations dynamiques du système pendule-chariot

$$\dot{X} = f(X) + b(X)u \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X) + b_1(X)u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = f_2(X) + b_2(X)u \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} b_1(X) = \frac{NK_m}{R_r} h_1(X) \\ b_2(X) = \frac{lmK_m \cos(\theta)}{R_r} h_1(X) \\ f_1(X) = h_1[h_2(X) + h_3(X) + h_4(X)] \\ f_2(X) = h_1(X)[h_5(X) + h_6(X)] \end{cases}$$

 et

$$\begin{cases} h_1(X) = (N(M+m) - l^2m^2\cos^2(\theta))^{-1} \\ h_2(X) = -(\frac{NK_bK_m}{Rr^2} + Nb)\dot{x} \\ h_3(X) = -gl^2m^2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ h_4(X) = -dlm\dot{\theta}\cos(\theta) - Nlm\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ h_5(X) = -(\frac{lmK_bK_m}{Rr^2} + blm)\dot{x}\cos(\theta) - dh\dot{\theta} \\ h_6(X) = -g(M+m)lm\sin(\theta) - l^2m^2\dot{\theta}^2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

Le problème auquel on s'est intéressé, peut être formulé comme un problème de contrôle en temps optimal en présence d'une contrainte sur l'état:

$$\begin{cases} \min_{X(t),u(t)} J(t_f, X, u) = \min t_f \\ S.C \\ \dot{X} = f(X) + b(X)u \\ |x_2(t)| \le 0.5 \\ |u(t)| \le 25 \\ (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0, 0, 0, 0) \\ (x_1(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f)) = (0, 0, \pm \pi) \end{cases}$$
(3.8)

3.5 Principe du maximum de Pontryagin

On considère le problème (3.8) en relaxant la contrainte sur l'état $L_r \leq \infty$. On peut comprendre qu'on peut résoudre le problème relaxé en considérant le rail assez

long, mais cette contrainte peut être reconsidérée après résolution du problème en repositionnant le chariot, au début, à un emplacement adéquat afin de satisfaire cette contrainte.

Du PMP, on déduit l'expression de la commande en temps optimal du problème (3.8), qui a une structure bang-bang. En effet, on introduit les variables d'état $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ et on définit la fonction Hamiltonienne par:

$$H(t,X,p,u) = p_0 + p_1(f_1(X) + b_1(X)u) + p_2x_1 + p_3(f_2(X) + b_2(X)u) + p_4x_3$$

avec $p_0 = -1$ (principe du maximum). Les variables d'état adjointes vérifient les relations $\dot{p} = \frac{-\partial H(t,X,p,u)}{\partial X}$ données par:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \frac{-\partial H}{\partial x_1} = -p_1 \left(\frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} + \frac{\partial b_1(X)}{\partial x_1} u \right) - p_2 - p_3 \left(\frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2(X)}{\partial x_1} u \right) \\ \dot{p_2} = \frac{-\partial H}{\partial x_2} = 0 \\ \dot{p_3} = \frac{-\partial H}{\partial x_3} = -p_1 \left(\frac{\partial f_1(X)}{\partial x_3} + \frac{\partial b_1(X)}{\partial x_3} u \right) - p_3 \left(\frac{\partial f_2(X)}{\partial x_3} + \frac{\partial b_2(X)}{\partial x_3} u \right) - p_4 \\ \dot{p_4} = \frac{-\partial H}{\partial x_4} = -p_1 \left(\frac{\partial f_1(X)}{\partial x_4} + \frac{\partial b_1(X)}{\partial x_4} u \right) - p_3 \left(\frac{\partial f_2(X)}{\partial x_4} + \frac{\partial b_2(X)}{\partial x_4} u \right) \end{cases}$$
(3.9)

Le maximum de l'Hamiltonien H est atteint pour la valeur de la commande u(t) donnée par la relation:

$$u(t) = Tmax \times signe(p_1b_1(X) + p_3b_2(X))$$

$$(3.10)$$

qui possède une structure bang-bang.

Après application des conditions nécessaires d'optimalité, la méthode indirecte résout un système d'équations différentielles non linéaires. Son principal inconvénient est le besoin d'un point de départ correct. Comme cette méthode applique l'algorithme quasi-newton à la fonction de tir, le rayon de convergence peut être très petit, selon la régularité du problème. La méthode de tir ne converge pas systématiquement. De ce fait, il n'est pas réel d'espérer résoudre le problème (3.8) par cette méthode.

3.6 Résolution du problème avec la méthode de tir direct

En utilisant la méthode de discrétisation totale définie dans le deuxième chapitre, on résout le problème du pendule inversé. Après discrétisation on aura un problème d'optimisation non linéaire, qui sera résolu avec "fmincon" une fonction prédéfinie sur Matlab.

Programme MATLAB pour le redressement du PI en temps minimum

function direct

%Discrétisation directe en utilisant fmincon.m du problème de contrôle en

%
temps minimal du pendule inversé, le problème étant de joindre (0,0,0,0) à
 $(0,\sim,0,\pm pi)$ en temps minimal

clear all; close all; clc;

parametre; % les paramètres donnés dans un autre mfile reproduisant les valeurs du tableau TAB(3.1)

tfinit = 2.5;

n = 100;% Nombre de pas de discrétisation

uinit = Tmax * (2 * rand(n,1) - 1); % Initialisation aléatoire du contrôle

xinit = [uinit; tfinit]; % Point de départ pour fmincon

lb = -Tmax * ones(n+1,1); lb(n+1) = 0; ub = Tmax * ones(n+1,1); ub(n+1) = 4; % Contrainte sur le contrôle |u| <= 1 et 0 <= tf <= 5, Tmax est la tension d'alimentation de l'induit du moteur.

```
options=optimset('Display', 'iter', 'Algorithm', 'active-set', 'MaxFunEvals', 100000);
```

[res, Fval, exitflag]=fmincon(@tempsfinal, xinit, [], [],[], [], lb, ub, @cond, options);

```
fprintf('Contrôle ')
format compact
res'
fprintf('EXITFLAG = %f',exitflag);
```

% Calcul des trajectoires optimales avec RK4

z(1,1) = 0; z(1,2) = 0; z(1,3) = 0; z(1,4) = 0;

%Méthode RK4

$$\begin{aligned} & \text{for } i = 1:n \\ k11 = tf/n * (f1(z(i, :)) + b1(z(i, :)) * res(i)); \\ k21 = tf/n * (f1(z(i, :)) + b1(z(i, :)) * res(i) + k11/2); \\ k31 = tf/n * (f1(z(i, :)) + b1(z(i, :)) * res(i) + k21/2); \\ k41 = tf/n * (f1(z(i, :)) + b1(z(i, :)) * res(i) + k31); \\ z(i+1,1) = z(i,1) + (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)/6; \\ k12 = tf/n * z(i,1); \\ k22 = tf/n * (z(i,1) + k12/2); \\ k32 = tf/n * (z(i,1) + k32); \\ z(i+1,2) = z(i,2) + (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)/6; \\ k13 = tf/n * (f2(z(i, :)) + b2(z(i, :)) * res(i)); \\ k23 = tf/n * (f2(z(i, :)) + b2(z(i, :)) * res(i) + k13/2); \\ k33 = tf/n * (f2(z(i, :)) + b2(z(i, :)) * res(i) + k13/2); \\ k43 = tf/n * (f2(z(i, :)) + b2(z(i, :)) * res(i) + k33); \\ z(i+1,3) = z(i,3) + (k13 + 2 * k23 + 2 * k33 + k43)/6; \\ k14 = tf/n * (z(i,3) + k14/2); \\ k34 = tf/n * (z(i,3) + k34); \\ z(i+1,4) = z(i,4) + (k14 + 2 * k24 + 2 * k34 + k44)/6; \end{aligned}$$

 \mathbf{end}

subplot(231); plot(linspace(0,tf,n+1), z(1 : n + 1,1)); title('Vitesse du Chariot'); grid on;

subplot(232); plot(linspace(0,tf,n+1),z(1:n+1,2)); title('Position du Chariot'); grid on;

subplot(234); plot(linspace(0, tf, n + 1), z(1 : n + 1, 3)); title('Vitesse angulaire du Pendule');grid on;

subplot(235); plot(linspace(0,tf,n + 1),z(1 : n + 1,4)); title('Angle du pendule');grid on;

subplot(233); plot(linspace(0, tf, n + 1), res(1 : n)); title('Contrôle'); grid on;

fprintf('vitesse chariot=%f', z(n + 1,1));

fprintf('position chariot %f', z(n + 1,2)); fprintf('vitesse pendule =%f', z(n + 1,3)); fprintf('position pendule=%f', z(n+1,4)); fprintf('temps minimal = %f', res(end));function [c, ceq] = cond(u)parametre; n = length(u) - 1;tf = u(end); zf = [0,0,0,0]; c = [];% ... la méthode RK4 for i = 1: nk11 = tf/n * (f1(zf(i, :)) + b1(zf(i, :)) * u(i));k21 = tf/n * (f1(zf(i, :)) + b1(zf(i, :)) * u(i) + k11/2);k31 = tf/n * (f1(zf(i, :)) + b1(zf(i, :)) * u(i) + k21/2);k41 = tf/n * (f1(zf(i, :)) + b1(zf(i, :)) * u(i) + k31);k12 = tf/n * zf(i,1);k22 = tf/n * (zf(i,1) + k12/2);k32 = tf/n * (zf(i,1) + k22/2);k42 = tf/n * (zf(i,1) + k32);k13 = tf/n * (f2(zf(i, :)) + b2(zf(i, :)) * u(i));k23 = tf/n * (f2(zf(i, :)) + b2(zf(i, :)) * u(i) + k13/2);k33 = tf/n * (f2(zf(i, :)) + b2(zf(i, :)) * u(i) + k23/2);k43 = tf/n * (f2(zf(i, :)) + b2(zf(i, :)) * u(i) + k33);k14 = tf/n * zf(i,3);k24 = tf/n * (zf(i,3) + k14/2);k34 = tf/n * (zf(i,3) + k24/2);k44 = tf/n * (zf(i,3) + k34);zf(i+1,1) = zf(i,1) + (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)/6;zf(i+1,2) = zf(i,2) + (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)/6;zf(i+1,3) = zf(i,3) + (k13 + 2 * k23 + 2 * k33 + k43)/6;zf(i+1,4) = zf(i,4) + (k14 + 2 * k24 + 2 * k34 + k44)/6;c = [c; abs(zf(i,2)) - 0.5];

end

$$ceq = [zf(end,1); zf(end,3); abs(zf(end,4)) - pi]; \%$$
 On impose la condition
finale $zf(end,1) = 0, zf(end,3) = 0, zf(end,4) = pi$

function val=tempsfinal($u_{-}tf$)

 $val=u_tf(end)$; % $u_tf = [u;tf]$, où u est le discretisé du contrôle, et tf est le temps final

Les graphes obtenus sont donnés dans la figure ci-dessous



FIG. 3.2 – Résultats de la méthode directe sur un pendule inversé

On remarque dans la première courbe que la vitesse du chariot atteint sa vitesse finale souhaitée qui est nulle au bout du temps optimal. Tout au long de cette période, le déplacement du chariot s'est fait sur l'intervalle du rail qui est [-0.5; 0.5]comme mentionné dans la deuxième courbe, ce qui répond bien à la contrainte exigée sur l'état du système. L'angle du pendule qui était à zéro au début (position d'équilibre stable) atteint sa valeur souhaitée π (position d'équilibre instable) à la fin du parcours, sa vitesse angulaire à ce moment là étant nulle. La courbe du contrôle présente un caractère bang-bang avec quatre commutations (switchs), ce qui était déjà justifié par le principe du maximum de Pontryagin voir l'équation (3.10).

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a résolu un problème de contrôle en temps minimum avec une méthode directe (tir direct) basée sur la transformation du problème de contrôle en un problème d'optimisation non linéaire.

L'objectif de notre travail est de trouver la commande optimale pour amener le pendule inversé de son état d'équilibre stable vers l'état d'équilibre instable en minimum de temps. La condition nécessaire d'optimalité déduite du principe du maximum de Pontryagin assure que la commande en temps optimal possède une structure bang-bang et le redressement du pendule se fait en 4 commutations.

Conclusion

Dans ce mémoire on a utilisé la méthode de tir direct pour le redressement d'un pendule inversé attaché à un chariot. Ce problème est décrit par une dynamique qui peut être modélisé sous forme d'un problème de contrôle optimal.

On a tout d'abord présenté une introduction générale aux équations différentielles, puisque la modélisation d'un système de contrôle peut avoir recours à des équations différentielles.

Ensuite, on a abordé la théorie du contrôle optimal et on a donné quelques méthodes (directes et indirectes) de résolution de ce type de problème.

On a terminé par la résolution du problème en temps optimal du pendule inversé avec la méthode de discrétisation totale (tir direct). Un programme et une simulation sous MATLAB ont été réalisés.

Enfin, il serait intéressant d'étendre l'étude et l'applications de cette technique à d'autres exemples pratiques plus complexes tel qu'une extension à d'autres types de pendules (double pendule inversé, pendule planaire, pendule inversé rotatif).

Cette étude porte sur la simulation sous Matlab pour le redressement d'un pendule inversé, il serait intéressant d'appliquer ces résultat sur une application en temps réel.

Bibliographie

- [1] Abdelkader MERAKEB. Optimisation multicritères en contrôle optimal: Application au véhicule électrique, Thèse de doctorat, UMMTO, 2011.
- [2] Alfio Quarteroni and al. *Numerical mathematics*, Springer Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [3] Kahina LOUADJ. Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal. Thèse de doctorat, UMMTO, 2012.
- [4] Franck JEDRZEJEWSKI. Introduction aux méthodes numériques, deuxième édition, Springer Verlag France, Paris, 2005.
- [5] J.Gergaud. Equations différentielles ordinaires, Cours de ENSEEIHT, 2012.
- [6] Boukhalfa NAIT SLIMANI. Synthèse d'observateurs non linéaires: Application au diagnostic de défauts, Mémoire de magister, UMMTO.
- [7] Abdelaziz SABA. Méthode de décomposition et contrôlabilité d'un système non linéaire, Mémoire de magister, UMC.
- [8] Daya OUIDJA. Principe du maximum et méthode de tir, Mémoire de magister, UMMTO, 2011.
- [9] Uri, M.Ascher, and Linda, R.Petzold. Computer methods for ordinary differential Equations and differential-Algebraic Equations, 1997.
- [10] Ferhat LAHOUAZI. Mise en oeuvre d'une stratégie de commande neuro floue: Application à un pendule inversé, Mémoire de magister, UMMTO, 2011.
- [11] Chahira BOUSSALEM. Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé, Mémoire de magister, UMMTO, 2012.
- [12] Nawal SIAGHI. Le contrôle optimal et la stabilisation d'un pendule inversé, Mémoire de master, UMMTO, 2011.
- [13] Luc JAULIN. Contrôleurs et observateurs, Cours de ENSI 2, ENSTA-Bretagne, 2011.

- [14] David DUREISSEIX. Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis, Cours de l'université Montpellier 2, 2008.
- [15] Gilles LEBORGNE. Interpolation polynomiale, Intégration numérique, Résolution numérique d'équations différentielles, Notes de cours de l'ISIMA, première année, 2012.
- [16] Gaulthier MOUSSOUAMI et Paul AUPOIX. *Etude du pendule inversé*, Projet de fin d'étude master, Université de Caen, 2007.
- [17] Claude LOBRY et Tewfik SARI. Introduction à la théorie du contrôle, Cours du CIMPA (contrôle non linéaire et application), Tlemcen, 2003.
- [18] Emmanuel Trélat. Contrôle optimal: théorie et applications, Vuibert, collection "Mathématiques Concrètes", 3^{ème} édition, 2011.