RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT $3^{ème}$ CYCLE LMD

Spécialité : AUTOMATIQUE

Par :

Nouara HABRACHE

THEME

Extension de l'approche semi-groupe à l'analyse et à la commande des systèmes à paramètres distribués bilinéaires.

M. DJENNOUNE Said	Professeur	UMMTO	Président
M. MAIDI Ahmed	Professeur	UMMTO	Rapporteur
M. KARA Redouane	Professeur	UMMTO	Examinateur
M. MOULAHOUM Samir	Professeur	École supérieure navale d'Alger	Examinateur
M. GUERMAH Said	MCA	UMMTO	Examinateur
M. KOUADRI Abdelmalek	MCA	UMB Boumedes	Examinateur

ANNÉE : 2018

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Conception et de Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens en tout premier lieu à remercier profondément mon directeur de thèse le Professeur Ahmed MAIDI, qui tout au long de ces années de thèse, m'a guidée dans mes recherches et m'a introduite et initiée à ce monde privilégié de la recherche. Je le remercie pour sa disponibilité, sa patience et sa persévérance. Ses conseils avisés, son soutien permanent et ses remarques pertinentes ont été déterminants dans l'avancée de ma thèse. Qu'il trouve dans ces lignes l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Jean-Pierre CORRIOU, Professeur émérite à l'université de Lorraine pour sa précieuse collaboration. Je le remercie vivement pour sa patience, ses conseils précieux, ses encouragements et son accueil chaleureux durant mon stage scientifique au laboratoire LRGP.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Saïd DJENNOUNE, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de thèse et le temps consacré pour la lecture de cette thèse. Ses remarques précieuses vont surement améliorer la qualité de cette thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent à Monsieur Redouane KARA, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou ainsi qu'à Monsieur Samir MOULAHOUM, Professeur à l'école supérieure navale d'Alger, Monsieur GUERMAH Saïd, Maître de Conférences Classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, et Monsieur KOUADRI Abdelmalek, Maître de Conférences Classe A à l'université de Boumerdes d'avoir accepté de faire partie de ce jury de soutenance et pour l'honneur qu'ils me font par leur présence.

Je remercie également tous les enseignants et chercheurs du laboratoire (L2CSP) que j'ai eu la chance de côtoyer durant mes années de thèse pour leur sympathie et leurs qualités humaines.

Je ne pourrais finir ces remerciements sans penser à ma famille , en particulier mes parents, dont le soutien et l'encouragement constants m'ont été d'un grand réconfort et ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux que je n'ai pas cités et qui m'ont soutenu ou qui ont contribué à la finalité de cette thèse.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Notations

a	Constante de diffusion de chaleur.
a_c	Coefficient de conduction thermique.
a_{cv}	Coefficient de transfert de chaleur.
$a_s, \breve{a}, a_{on}$	Constante positive.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C},$	Matrices d'opérateurs différentiels spatiales.
A	Matrice d'état.
A_c	Surface de transfert de chaleur.
A_d, E_d	Matrice approximée.
A_s	Surface de transfert de chaleur par unité de longueur.
$b(z)$	Fonction qui caractérise la structure géométrique du système d'actionneur.
B	Espace de Banach.
$\mathbf{B}$:	Espace des opérateurs linéaires bornés.
$c(z)$	Fonction qui caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.
c_1, c_2	Constantes quelconques.
C	Constante réelle.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
C_P	Capacité calorifique d'un fluide.
$\mathcal{D}$	Domaine de définition d'un opérateur.
e	Vecteur d'éléments.
E	Espace vectoriel.
$E^{\perp}$	Sous-espace orthogonal.
f	Fonction non linéaire continue de dimension finie.
F	Opérateur non linéaire continue.
$\mathcal{F}$	Opérateur borné.
g_z	Fonction continue.
$\mathcal{G}$	Sous-graphe d'un opérateur.
$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert.
h	Forme linéaire bornée.
H	Opérateur différentiel.
h_f, h_c	Coefficient d'échange global.

I	Matrice identité.
Im	Image d'un opérateur.
$\Im m$	Partie imaginaire d'une valeur propre.
k_c	Coefficient de transfert thermique.
$\mathcal{K}$	Opérateur de projection.
k	Nombre entier.
ℓ	Espace des applications linéaires dans $\mathcal{H}$.
L	Longueur [m].
L_2 :	Espace des fonctions carrées intégrables.
$\mathcal{L}, \mathcal{M}$	Matrices d'opérateurs différentiels spatiales.
m	Dimension du vecteur de sortie.
M	Constantes positives.
n	Dimension vecteur d'état.
N	Nombre entier positif.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers positifs.
p	Nombre entier positif.
P	Opérateur différentiel.
P^*	Opérateur adjoint de P
q_1, q_2	Constantes quelconques.
$\mathcal{Q}$	Flux thermique.
r	Dimension du vecteur de commande.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathcal{R}$	Opérateur différentiel.
$\Re e$	Partie réelle d'une valeur propre.
S	Opérateur différentiel spatial.
S_c	Section du tube externe.
S_f	Section du tube interne.
t	Variable du temps.
t_0	Instant initial.
$\mathbf{T}$	Domaine temporel.
$\mathcal{T}$	Semi-groupe.
T_b	Température de la barre.
T_{b0}	Température de la barre à $z = 0$.
T_{bL}	Température de la barre à $z = L$.
T_c	Température du fluide chaud.
$T_{c,0}$	Température d'entrée du fluide chaud.
T_f^{df}	Température désirée et filtrée du fluide froid.
T_f	Température du fluide froid.
$T_{f,0}$	Température d'entrée du fluide froid.
T_m	Température du milieu.
T_{ref1}, T_{ref2}	Températures de référence.
T_f^0, T_c^0	Profils de température initiaux.
u	Vecteur de commande.
u_1, u_2	Constantes positives.
u_d	Signal d'entrée.

v_1	Vitesse du convoyeur.
v_2	Alimentation du convoyeur.
v_c	Vitesse du fluide chaud.
v_f	Vitesse du fluide froid.
V	Fonction de Lyapunov.
x	Vecteur d'état.
x_e	Point d'équilibre.
y	Vecteur de sortie.
y_d	Sortie désirée.
z	Variable de l'espace.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers.

Symboles et lettres grecques

α, β, γ	Coefficients constants.
α_1, α_2	Constantes positives.
α_c, α_f	Coefficient de transfert de chaleur.
λ	Vecteur des valeurs propres.
δ	Distribution de Dirac.
ϕ	Vecteur des fonctions propres.
ε, η	Constantes positives.
κ	Constante dans $\mathbb{R}$.
μ	Valeur propre.
Γ	Arc continu fermé.
ϑ	Fonction continue.
ν_n	Multiplicité des valeurs propres.
θ	Base de Vecteurs.
φ	Constante de Stefan-Boltzmann.
ρ	Ensemble résolvant.
ρ_f	Densité du fluide froid.
ρ_c	Densité du fluide chaud.
σ	Spectre d'un opérateur.
σ_p	Spectre ponctuel d'un opérateur.
σ_c	Spectre continu d'un opérateur.
σ_r	Spectre résiduel d'un opérateur.
ς	Constante positive.
τ, τ_f	Constantes du temps.
ω	Constantes positives.
ψ	Fonction qui dépend uniquement du temps.
Δt :	Période d'échantillonnage.
Δz :	Pas de discrétisation pou la variable de l'espace.
Ω	Domaine spatial
$\partial\Omega$	Frontières du domaine spatial.
$\partial\Omega_{\mathfrak{D}}$	Partition de la Frontière avec des conditions aux frontières de type Dirichlet.
$\partial\Omega_{\mathfrak{N}}$	Partition de la Frontière avec des conditions aux frontières de type Neumann.
$\partial\Omega_{\mathfrak{F}}$	Partition de la Frontière avec des conditions aux frontières de type Neumann.

Indices

i	Unité imaginaire.
j	Indice (nombre entier).
$(.)^T$	Transposée.
$(.)^{-1}$	Opérateur inverse.

Abréviations

EDP	Équation aux dérivées partielles.
EDO	Équation aux dérivées ordinaires.
SPD	Système à paramètres distribués.
SPL	Système à paramètres localisés.

Introduction générale

La plupart des systèmes physiques sont caractérisés par des phénomènes de transport et de réaction de nature non linéaire [1] [2]. La modélisation de ces systèmes en utilisant des lois de la physique (bilans de matière et de l'énergie) conduit à des équations aux dérivées partielles (EDPs) faisant intervenir des variables dépendantes non homogènes [3]. Bien que sous certaines hypothèses, généralement, un modèle linéaire peut être toujours accepté, néanmoins, pour la quasi-totalité des systèmes, les non linéarités sont souvent fortes et ne peuvent pas être négligées ou approximées [4].

Parmi les systèmes à paramètres distribués (SPDs) non linéaires, on distingue deux classes particulières : les systèmes quasi-linéaires et les systèmes bilinéaires. Les systèmes quasi-linéaires sont caractérisés par des phénomènes de transport (diffusion et convection) linéaires et des phénomènes de réactions non linéaires [5]. Les systèmes bilinéaires sont caractérisés par une structure linéaire par rapport à l'état ou à la commande mais pas par rapport aux deux simultanément [6]. Cette dernière classe regroupe aussi les systèmes de convection-réaction linéaire lorsque la vitesse de convection est prise comme variable à manipuler [7–9].

Pour la commande des SPDs, on distingue deux approches principales : l'approche de pré-approximation et l'approche de post-approximation [10,11]. Le principe de la première approche consiste à approximer le SPD par un système à paramètres localisés (SPL). Cette approche représente réellement une réduction d'ordre du modèle car elle permet d'approximer les EDPs, de dimension infinie, par un ensemble d'équations aux dérivées ordinaires (EDOs), c'est-à-dire à un système de dimension finie [12, 13]. L'approximation est réalisée en utilisant des méthodes d'approximation d'équations (par exemple les différences finies) [14–16] ou par des méthodes d'approximation des solutions des EDPs (méthode des fonctions propres) [10, 17]. Par conséquent, cette approche de pré-approximation permet d'exploiter la théorie de commande des systèmes de dimension finie, c'est-à-dire à paramètres localisés. Néanmoins, cette approche présente certains inconvénients qui limitent son utilisation [5, 9]. Ainsi, souvent le processus d'approximation ou de réduction détruit généralement les propriétés fondamentales (commandabilité, observabilité et stabilité) du système original [4]. Sur le plan pratique, le correcteur obtenu est souvent de dimension importante contraignant ainsi son implémentation pratique et les performances attendues sont limitées [5]. Notons que l'approche de pré-approximation est recommandée pour les systèmes paraboliques pour lesquels la séparation du spectre est possible [4,18], par contre elle est déconseillée pour les systèmes hyperboliques.

Le principe de la deuxième approche consiste à utiliser le modèle aux EDPs directement pour l'analyse et la synthèse du correcteur [10, 11]. Cette approche permet d'améliorer davantage les performances puisque les propriétés fondamentales du SPD sont préservées [5, 19]. Néanmoins, la manipulation des EDPs constitue une tâche ardue et nécessite des outils mathématiques poussés relevant de l'analyse fonctionnelle [20].

Pour le cas des systèmes linéaires, le développement de la théorie des semi-groupes des opérateurs fortement continus a permis de généraliser la théorie, très développée, des systèmes linéaires de dimension finie aux SPDs linéaires [21]. Le semi-groupe est l'équivalent de la matrice de transition d'un système linéaire de dimension finie [5]. La théorie des semi-groupes permet d'écrire une équation différentielle sous forme d'une représentation d'état abstraite avec des opérateurs différentiels [20]. Cette représentation abstraite est utilisée pour l'analyse des propriétés fondamentales du système et la synthèse des commandes par retour d'état dans le cadre de l'approche de post-approximation [22, 23].

Pour les SPDs non linéaires, il est très difficile d'établir une théorie générale et l'étude se fait généralement cas par cas. Sur le plan commande, les SPDs non linéaires sont peu abordés dans la littérature vu leur complexité. Une synthèse sur les différentes contributions et les problèmes ouverts peut être trouvée dans [4].

Une attention particulière a été portée, ces dernières années, à la commande des systèmes de dimension infinie non linéaires. La complexité de cette classe de systèmes a poussé la majorité des chercheurs à adopter l'approche de pré-approximation pour concevoir des lois de commande [18, 24–26]. L'objectif consiste à tirer profit de la théorie de commande des systèmes non linéaires à paramètres localisés qui est assez développée. Les SPDs quasi-linéaires, considérés comme une classe particulière des systèmes non linéaires de dimension infinie, ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Pour cette classe, proche des systèmes linéaires, plusieurs résultats existent. Ainsi, dans [27] la méthode des fonctions propres est adoptée pour la commande d'un système parabolique quasi-linéaire. Une approche de commande d'un système quasi-linéaire hyperbolique de premier ordre, en combinant la méthode des caractéristiques et la commande par modes glissants, a été proposée par [28,29]. Pour les systèmes bilinéaires peu de résultats existent et la quasi-totalité sont développés dans le cadre de la commande optimale [30–32].

L'approche de post-approximation est peu utilisée dans la littérature pour développer des techniques de commande pour les systèmes de dimension infinie non linaires. La majorité des contributions considèrent la commande géométrique. Cette dernière permet de concevoir aisément des lois de commande de nature distribuée en utilisant directement le modèle aux EDPs. La première contribution intéressante a été faite par Christofides et Daoutidis [5]. Ces auteurs ont généralisé la notion du degré relatif aux systèmes de dimension infinie et ont proposé une loi géométrique pour la commande des systèmes hyperboliques avec une application à un réacteur chimique. Ces résultats sont par la suite étendus dans [33] à la commande à la frontière d'un système non linéaire en se basant sur la notion de l'opérateur étendu. Une autre approche de commande géométrique d'un système de diffusion non linéaire est proposée dans [34] basée sur une linéarisation globale du système obtenue par l'utilisation d'une transformation tangente. Ces résultats ont été ensuite étendus au problème de Stefan dans [35], c'est-à-dire un système de diffusion linéaire avec une frontière mobile.

Une des classes les plus rencontrées des SPDs, c'est les systèmes bilinéaires. Pour ces derniers l'opérateur spatial possède une structure particulière qui peut être facilement exploitée pour développer des lois de commande, et analyser leurs propriétés fondamentales [6]. Parmi les systèmes bilinéaires, on peut citer les échangeurs de chaleur, les réacteurs chimiques (lorsque les réactions pouvant être assumées linéaires), les lignes de transmission électrique et les systèmes de transport.

Dans cette thèse, on s'intéresse à la commande géométrique des systèmes bilinéaires. L'objectif est d'étendre la théorie des semi-groupes pour l'analyse de la stabilité du système corrigé. L'idée principale consiste à exploiter les propriétés spectrales de l'opérateur spatial pour l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée.

L'utilisation de la commande géométrique permet de concevoir aisément des lois de commande en utilisant la notion de l'indice caractéristique. Néanmoins, la démonstration de la stabilité d'une commande géométrique représente un vrai challenge. Si la stabilité externe peut être garantie en fixant les positions d'un nombre fini de pôles en boucle fermée, la stabilité interne, liée à la stabilité de la dynamique des zéros, est difficile à démontrer en utilisant les méthodes usuelles (théorème de perturbation, méthode de Lyapunov, analyse spectrale). Pour surmonter cette difficulté, on montrera que dans le cas des systèmes bilinéaires, l'utilisation de la commande géométrique permet de préserver la même structure en boucle fermée, c'est-à-dire le système en boucle fermée résultant est bilinéaire mais avec des paramètres variables dans le temps. Ainsi, en exploitant les résultats de l'analyse spectrale de l'opérateur spatial en boucle fermée, on peut conclure sur la stabilité du système corrigé. Le cas de l'échangeur de chaleur à courant parallèle est pris comme exemple d'application dont l'objectif est de contrôler la température du fluide froid en manipulant sa vitesse d'écoulement.

La thèse est structurée comme suit :

Le **chapitre 1** introduit les SPDs. Ainsi, après avoir présenté un exemple physique d'un SPDs, nous avons axé l'exposé sur les différentes classes des SPDs, les différentes conditions aux limites et les différentes commandes et observations. A la fin du chapitre, on s'intéresse à la classe des systèmes bilinéaires traités dans la thèse.

Dans le **chapitre 2**, on aborde l'analyse spectrale des opérateurs différentiels. On commence par un ensemble de définitions mathématiques de certaines notions de l'analyse fonctionnelle relative aux opérateurs. Puis, on présente la théorie de l'analyse spectrale des opérateurs bornés exploitée par la suite pour l'analyse de la stabilité d'un SPD linéaire. A la fin du chapitre, on s'intéresse à l'analyse spectrale de l'opérateur différentiel d'un SPD décrit par deux EDPs hyperboliques linéaires couplées.

Le **chapitre 3** est consacré à la commande des SPDs et les différentes approches utilisées pour l'analyse de leur stabilité. On commence par introduire les deux approches principales de commande des SPDs en l'occurrence la pré-approximation et la post-approximation, puis on reprend quelques définitions relatives à la stabilité des systèmes dynamiques. Après, on s'intéresse à l'analyse de la stabilité des SPDs en présentant les différentes méthodes utilisées. La suite du chapitre est réservée à la théorie des semi-groupes.

Dans le **chapitre 4**, on s'intéresse à la modélisation d'un échangeur de chaleur, à courants parallèles, pris comme exemple d'application des systèmes bilinéaires dans le cadre de cette thèse. On débute le chapitre par un rappel de certaines notions de transfert de chaleur, puis on présente les différentes étapes de la modélisation de l'échangeur. A la fin on s'intéresse à l'analyse, par simulation numérique, du comportement dynamique de l'échangeur.

Le **chapitre 5** présente la commande géométrique d'un l'échangeur de chaleur. L'objectif est d'imposer au fluide froid à la sortie de l'échangeur une température désirée en manipulant sa vitesse d'écoulement. On commence par la synthèse de la loi de commande en utilisant le concept de l'indice caractéristique, puis on démontre la stabilité du système en boucle fermée. La fin du chapitre est consacrée à l'évaluation, par simulation, des performances de la loi de commande développée en considérant les problèmes de poursuite de consigne et de rejet de perturbation.

La thèse se termine par une conclusion générale qui résume les différents résultats obtenus tout en précisant certaines pistes qui méritent d'être explorées.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

1.1 Introduction

Un système à paramètres distribués (SPD), appelé encore un système à paramètres répartis, est un système dynamique dont les variables caractéristiques (entrée, sortie et état) dépendent non seulement de la variable de temps mais aussi de la variable de l'espace.

Au cours de ces dernières années, les SPDs ont occupé une place importante dans la commande et la théorie des systèmes. Cette position a pris de l'importance en raison du nombre des classes de systèmes d'ingénieur qui sont naturellement de natures distribuées.

L'objectif du présent chapitre est de présenter les notions de base sur les SPDs. Le chapitre est structuré comme suit : dans la Section 2, une barre métallique chauffée à l'extrémité est prise comme exemple d'un SPD. La classification des SPDs basée sur les équations aux dérivées partielles (EDPs) fait l'objet de la Section 3. La Section 4 aborde la description mathématique d'un SPD en considérant le cas linéaire et non linéaire. Différentes conditions aux limites sont présentées à la Section 5. La Section 6 est consacrée aux différents types de commandes et d'observations dans le cas des SPDs et illustrées dans le cas de l'exemple de la barre métallique. Dans la Section 7, on s'intéresse au cas des SPDs bilinéaires qui représentent une classe particulière des SPDs non linéaires. Le chapitre se termine par une conclusion.

1.2 Exemple d'un système à paramètres distribués

Théoriquement, tous les processus naturels et industriels sont des SPDs [36]. Des domaines d'un grand intérêt technologique dans toutes les sciences de l'ingénieur se modélisent naturellement par des SPDs [37], à savoir les processus thermiques (four à chauffer, les échangeurs de chaleur), chimiques (les réacteurs chimiques) et les systèmes électriques (les lignes de transmission d'énergie).

Certains type d'hypothèses simplificatrices, telle que l'hypothèse d'un mélange parfait dans une cuve agitée d'un réacteur chimique, permet d'approximer la dynamique des phénomènes physiques par un système à paramètres localisés (SPLs) modélisé par des équations aux dérivées ordinaires (EDOs) [38]. Cela est possible en supposant que les variables caractéristiques (les entrées, les sorties et les états) sont suffisamment homogènes par rapport à l'espace géométrique pour qu'elles puissent être considérées comme indépendantes de la variable de l'espace [10]. Cependant, les systèmes dynamiques pour lesquels les variables caractéristiques et les paramètres ont une variation spatiale significative nécessitent des modèles à paramètres distribués afin d'avoir une représentation suffisamment précise du comportement dynamique du système. Ce type de système est de dimension infinie vu que la dimension des variables caractérisant le système est infinie. Mathématiquement, ces processus peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles (EDPs) ou des équations intégrales ou intégro-différentielles, linéaires ou non linéaires, à coefficients constants ou variables [10]. La description d'un SPD, basée sur les lois de conservation d'énergie et de la matière, prennent souvent la forme des EDPs [36].

Avant de faire une description mathématique des SPDs, il est intéressant de commencer l'exposé par un exemple physique d'un SPD. C'est pourquoi nous nous intéressons à la description physique d'un SPD classique. Ce système est une barre métallique, de longueur L, représentée par la Figure 1.1 constituée d'un métal conducteur de chaleur. La barre est chauffée à son extrémité $z = 0$ par une source de chaleur et plongée dans un milieu de température donnée.

La température de chaque point de la barre diffère d'un point à un autre, elle diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la source. Par conséquent, la température de la barre est non homogène, elle dépend non seulement de la variable du temps $t \in]0, \infty[$ mais aussi de la variable de l'espace $z \in]0, L[$. Le bilan énergétique qui en résulte doit nécessairement prendre en considération la nature distribuée de la température qui est de dimension infinie.

La modélisation du phénomène de diffusion de chaleur dans une seule direction, en négligeant les variations de la température dans les autres directions (monodirectionnel), permet d'obtenir l'EDP suivante appelée aussi équation de chaleur [39].

$$\frac{\partial T_b(t,z)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T_b(t,z)}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

où $T_b(t,z)$ est la température de la barre et a est une constante qui dépend de la nature du matériau, elle caractérise la diffusion de chaleur.

FIGURE 1.1: Barre métallique chauffée à l'extrémité $z = 0$.

Pour avoir une description complète, on doit spécifier des conditions aux limites et des conditions initiales.

1.3 Classification des systèmes à paramètres distribués

Une EDP est une équation impliquant une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes et de ses dérivées partielles [40]. Il s'avère important d'établir un schéma de classification qui identifie des classes d'équations ayant des propriétés communes. Les EDPs sont classées en différents types. Soit selon les types des phénomènes physiques d'où elles proviennent ou selon les propriétés mathématiques [41].

1.3.1 Classification basée sur le type de linéarité

Le critère de classification le plus important consiste à distinguer les EDPs entre linéaires et non linéaires. La répartition des EDPs dans ces deux catégories est très significative vu que les méthodes mathématiques conçues pour traiter ces deux classes d'équations sont souvent entièrement différentes et leur comportement est sensiblement différent [41].

Une EDP est linéaire lorsque toutes les dérivées partielles apparaissent sous forme linéaire et aucun de ses coefficients ne dépend des variables dépendantes (les coefficients peuvent être en fonction des variables indépendantes) [42]. Les EDPs linéaires apparaissent dans de nombreux domaines d'applications scientifiques (équation de chaleur, équation linéaire de Schrödinger,...)

D'autre part, une EDP non linéaire peut être décrite en impliquant des termes non linéaires usuels ou bien les coefficients des dérivées partielles sont en fonction des variables dépendantes [43].

La quasi totalité des SPDs sont décrits par des EDPs non linéaires. Ces EDPs peuvent être aussi divisées selon le type de non-linéarité. Une EDP semi linéaire représente une classe des EDPs dont les coefficients des dérivées d'ordre supérieur dépendent uniquement des variables indépendantes [42]. Tandis que si les coefficients de ces dérivées dépendent aussi des dérivées d'ordre inférieure, l'EDP est quasi-linéaire. Parmi les classes des EDPs non linéaires les plus rencontrées dans la pratique, on distingue aussi les EDPs bilinéaires, elles sont linéaires par apport aux variables dépendantes est linéaires par rapport aux entrées mais elles sont non linéaires entre les deux (voir l'exemple de la section 1.7).

L'étude des EDPs non linéaires est très difficile vu qu'il n'existe pas de théorie générale comme dans le cas des SPDs linéaires pour cela une linéarisation au tour d'un profil d'équilibre est souvent réalisée pour déterminer un modèle linéaire.

1.3.2 Classification basée sur le discriminant

La classification des EDPs suivant le discriminant est principalement basée sur une EDP linéaire de deuxième ordre, l'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé de la dérivée partielle. Une EDP linéaire de deuxième ordre peut s'écrire sous la forme suivante [43] :

$$\alpha\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial x(z,t)}{\partial t\partial z}+\gamma\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}=\vartheta\left(z,t,x(z,t),\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}+\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

La solution $x(z,t)$ de l'EDP (1.2) est fonction de deux variables indépendantes t et z. α, β et γ sont des constantes ou des fonction de t et z dans Ω et ϑ est une fonction continue sur Ω qui inclut tous les autres termes sans dérivées secondes de l'équation (1.2).

Par analogie avec le plan des coniques, on distingue trois types d'EDP selon le signe de discriminant $\beta^2-4\alpha\gamma$ définies comme suit [41] :

1. **Hyperbolique** : on dit que l'EDP (1.2) est hyperbolique si

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0 \tag{1.3}$$

L'équation d'onde est une equation hyperbolique donnée comme suit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=a_{on}^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \tag{1.4}$$

où a_{on} est une constante positive.

2. **Elliptique** : on dit que l'EDP (1.2) est elliptique si

$$\beta^2-4\alpha\gamma<0 \tag{1.5}$$

Les équations de Schrödinger et de Laplace sont des équations elliptiques. L'équation de Laplace à deux dimensions est donnée comme suit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0 \tag{1.6}$$

3. **Parabolique** : on dit que l'EDP (1.2) est parabolique si

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \tag{1.7}$$

Les équations de flux de chaleur et de processus de diffusion sont considérées comme exemple d'une équation parabolique. Par exemple, l'équation de transfert de chaleur qui prend la forme suivante

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \tag{1.8}$$

En automatique, on s'intéresse à l'analyse et la commande des systèmes dynamiques modélisés par des équations hyperboliques et paraboliques tandis que les équations elliptiques modélisent des problèmes stationnaires [41].

Si β et γ sont nuls le type de l'équation (1.2) dépend de la valeur de α. Ainsi,

- Si $\alpha \neq 0$ l'équation (1.2) est parabolique,
- Si $\alpha = 0$ l'équation (1.2) est hyperbolique (c'est une équation de premier ordre, elle dépend uniquement des dérivées premières de x).

Avec un changement de variable, toute équation d'ordre supérieur peut se ramener à une équation de deuxième ordre. Ce changement de variable ne modifie pas le caractère hyperbolique, parabolique et elliptique de l'équation [39].

Il existe également une relation étroite entre la classification et les types de conditions initiales et les conditions aux limites qui doivent être imposées à une EDP pour obtenir un problème mathématique bien posé [40].

Dans le cas des EDPs non linéaires, la classification précédente est plus difficile à établir. Le type de l'équation peut dépendre non seulement d'un point dans l'espace mais aussi de la solution elle-même. Pour cela, il est recommandé de linéariser l'équation autour d'un profil d'équilibre et de définir le type comme étant celui de l'équation linéarisée, vu que les surfaces caractéristiques de l'équation non linéaire sont définies de la même manière que les surfaces caractéristiques de l'équation linéarisée [40]. Notons qu'une classification des équations quasi-linéaires a été proposée par Renaldy [40].

1.4 Description mathématique des systèmes à paramètres distribués

La modélisation d'un SPD conduit souvent à des EDPs qui peuvent être linéaires ou non linéaires. Pour une description mathématique complète d'un SPD linéaire à deux variables indépendantes, une variable d'espace (cas monodimensionnel) et une variable temporelle, désignées respectivement par z et t, les données suivantes sont nécessaires [21] :

- une équation d'évolution à l'intérieur du domaine $\Omega \times \mathbf{T}$:

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \mathcal{A}x(z,t) + \mathcal{B}u(z,t), \quad t \in \mathbf{T} \; et \; z \in \Omega \tag{1.9}$$

- un domaine spatial Ω, borné, tel que $\Omega = [0, L]$, et de frontière $\partial\Omega = \{0, L\}$.
- un domaine temporel $\mathbf{T}$ tel que $\mathbf{T} = [0, \infty[$
- une équation de sortie sur $\Omega \times \mathbf{T}$

$$y(z,t) = \mathcal{C}(x(z,t)) \tag{1.10}$$

- des conditions initiales à $t = 0$

$$\mathcal{M}(x(z,t)) = 0 \tag{1.11}$$

- des conditions sur la frontière $\partial\Omega$ appelées conditions aux limites.

$$\mathcal{L}(x(z,t)) = 0 \qquad z \in \partial\Omega \tag{1.12}$$

La différence d'une description mathématique d'un SPD non linéaire avec celle d'un SPD linéaire réside dans l'équation d'évolution qui peut s'écrire d'une manière générale comme suit :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = F(z,t,x(z,t),u(z,t)) \tag{1.13}$$

avec F un opérateur non linéaire continue dans Ω

L'état $x(z,t)$, la sortie $y(z,t)$ et la commande $u(z,t)$ représentent des fonctions vectorielles de dimension $(1 \times n)$, $(1 \times m)$ et $(1 \times r)$ respectivement.

Les matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont des matrices d'opérateurs différentiels spatiales bornés ne comportant que des dérivées par rapport à la variable de l'espace z.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont appelés respectivement opérateur d'état, opérateur de commande et opérateur de sortie. L'état $x(z,t)$ appartient à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui sera défini dans le prochain chapitre.

1.5 Conditions aux limites

Un système dynamique est généralement délimité physiquement dans l'espace. La description mathématique d'un SPD n'est donc pas complète sans des conditions aux limites, une information supplémentaire sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω, ou sur une partie de la frontière $\partial\Omega$ est nécessaire [44]. Les conditions aux limites doivent être en nombre suffisant dépendant de l'ordre des EDPs.

Il existe plusieurs types de conditions aux limites. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux conditions de Dirichlet, Neumann et Fourier [45]. Ces dernières seront illustrées dans le cas de l'exemple de la barre métallique présentée à la Section 1.2.

1.5.1 Condition de Dirichlet

La variable dépendante de l'EDP est connue aux frontières du système. Elle est définie comme suit

$$x(z,t) = g_z(t), \quad z \in \partial\Omega, \quad et \quad t \in \mathbf{T} \tag{1.14}$$

où g_z est une fonction continue.

Si les extrémités de la barre, $z = 0$ et $z = L$, sont maintenues respectivement à des températures données $T_{b0}(t)$ à $T_{bL}(t)$, on aura

$$T_b(0,t) = T_{b0}(t) \tag{1.15}$$

$$T_b(L,t) = T_{bL}(t) \tag{1.16}$$

1.5.2 Condition de Neumann

Le gradient de la variable dépendante est spécifié aux frontières comme suit,

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} = g_z(t), \quad z \in \partial\Omega, \quad et \quad t \in \mathbf{T} \tag{1.17}$$

Si la barre métallique est chauffée à ses extrémités, de l'énergie est ajoutée sous forme d'un flux de chaleur, la température réelle ne serait pas connue. Des conditions aux frontières de type Neumann seront données comme suit

$$-a \left.\frac{\partial T_b(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = T_{b0}(t) \tag{1.18}$$

$$a \left.\frac{\partial T_b(z,t)}{\partial z}\right|_{z=L} = T_{bL}(t) \tag{1.19}$$

1.5.3 Condition de Fourier

C'est la combinaison linéaire de la condition de Dirichlet et la condition de Neumann, elle est donnée comme suit

$$c_1 \frac{\partial x(z,t)}{\partial z} + c_2 x(z,t) = g_z(t) \quad avec \;\; z \in \partial\Omega \tag{1.20}$$

c_1 et c_2 sont deux constantes.

Si la barre est plongée dans un milieu de température $T_m(t)$, le gradient de température aux limites sera proportionnel à la différence $T_b - T_m$.

$$a \left. \frac{\partial T_b(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = -k_c(T_{b0}(t) - T_m(t)) \tag{1.21}$$

$$a \left. \frac{\partial T_b(z,t)}{\partial z} \right|_{z=L} = k_c(T_{bL}(t) - T_m(t)) \tag{1.22}$$

où k_c est un coefficient de transfert thermique

Les conditions aux limites qu'on vient de présenter interviennent sur la totalité de la frontière $\partial\Omega$, mais des situations particulières peuvent être rencontrées où les conditions aux limites sont mélangées sur la frontière, Dirichlet sur $\partial\Omega_{\mathfrak{D}}$, Neumann sur $\partial\Omega_{\mathfrak{N}}$ et Fourier sur $\partial\Omega_{\mathfrak{F}}$ avec $\partial\Omega_{\mathfrak{D}}$, $\partial\Omega_{\mathfrak{N}}$ et $\partial\Omega_{\mathfrak{F}}$ forment une partition de la frontière [39].

Autrement, les conditions aux limites sont homogènes si la variable dépendante x est nulle à chaque point de la frontière $\partial\Omega$, sinon les conditions aux limites sont non homogènes [42].

1.6 Types de commande et d'observation d'un système à paramètres distribués

Dans la théorie des systèmes dynamiques, pour une description interne complète d'un SPD, on doit spécifier le type d'entrée (commande) u et de sortie (observation) y.

1.6.1 Types de commande d'un système à paramètres distribués

La commande d'un SPD dépend de l'objectif de commande souhaité. En général, on distingue [10, 17, 46] :

- **Commande distribuée** :

La commande $u(z,t)$ est définie sur $\Omega \times \mathbf{T}$ (Figure 1.2) donnée par l'équation suivante :

$$u(z,t) = b(z)u_d(t) \tag{1.23}$$

où $b(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs et $u_d(t)$ est le signal d'entrée.

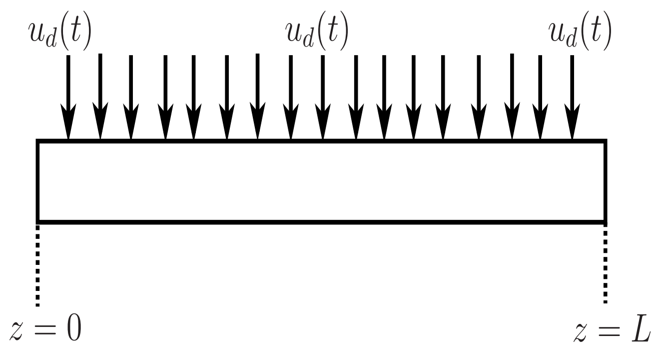

FIGURE 1.2: Commande distribuée.

- **Commande ponctuelle**

Dans ce cas, la commande agit sur un ou plusieurs points de Ω (Figure 1.3). Elle est donnée par l'équation suivante :

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^{m} u_d(t)\delta(z - z_i) \tag{1.24}$$

avec δ est le pic de Dirac concentré en z_i. m est le nombre de points considérés qui représente la dimension de l'opérateur de commande.

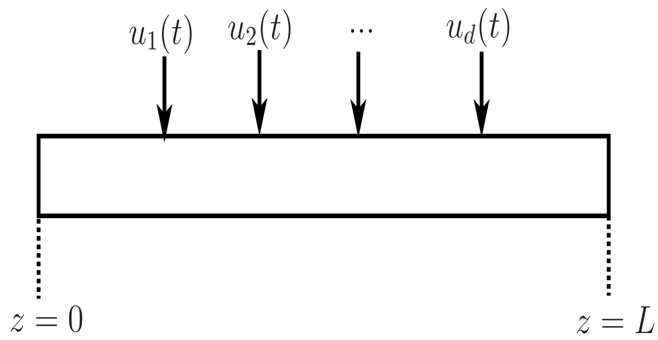

FIGURE 1.3: Commande ponctuelle.

• **Commande aux frontières**

Cette commande, définie sur $\partial\Omega \times \mathbf{T}$, est un cas particulier de la commande ponctuelle (Figure 1.4). Elle est donnée par l'équation suivante :

$$u(0,t) = u_{d0}(t)\delta(z) \tag{1.25}$$

$$u(L,t) = u_{dL}(t)\delta(z-L) \tag{1.26}$$

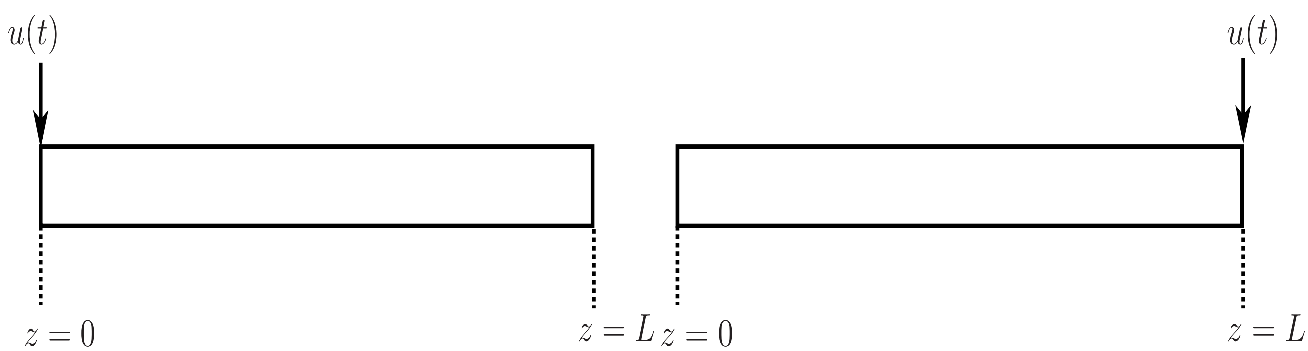

FIGURE 1.4: Commande aux frontières

1.6.2 Types d'observation d'un système à paramètres distribués

Généralement, la sortie est considérée comme une fonction linéaire du vecteur d'état et coïncide avec le vecteur d'observation. On distingue plusieurs types d'observations [45,46] :

- **Observation distribuée**

Le vecteur de sortie $y(z,t)$ défini sur $\Omega \times \mathbf{T}$ est écrit sous la forme suivante (Figure 1.5) :

$$y(z,t) = c(z)x(z,t) \tag{1.27}$$

où $c(z)$ caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs, et $x(z,t)$ représente le vecteur d'état du système.

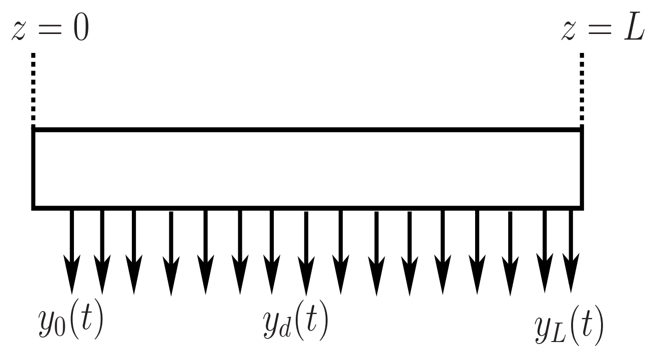

FIGURE 1.5: Observation distribuée.

- **Observation aux frontières**

L'observation est effectuée sur un ou plusieurs points z_i de la frontière $\partial\Omega$ (Figure 1.6). Elle est donnée par l'équation suivante :

$$y_i(t) = y(z_i,t) = \int_{\Omega} y(z,t)\delta(z-z_i)dz, \;\; z_i \in \Omega \tag{1.28}$$

- **Observation par moyennage spatial**

C'est la moyenne d'un nombre fini d'observations (Figure 1.7). Elle est définie par l'intégrale suivante

$$y(t) = \int_{\Omega} c(z)x(z,t)dz \tag{1.29}$$

Lorsque la commande ou bien la sortie est de nature distribuée, le modèle devient non

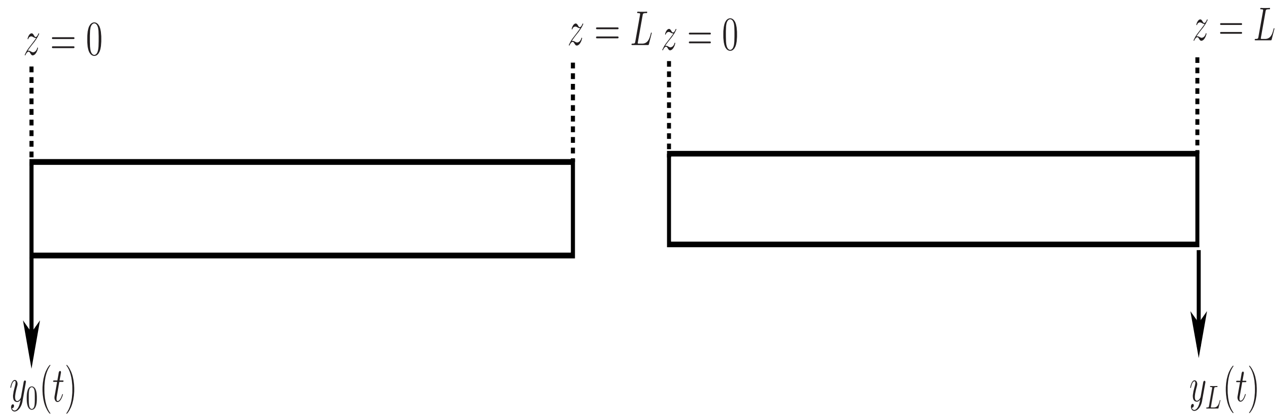

Figure 1.6: Observation aux frontières

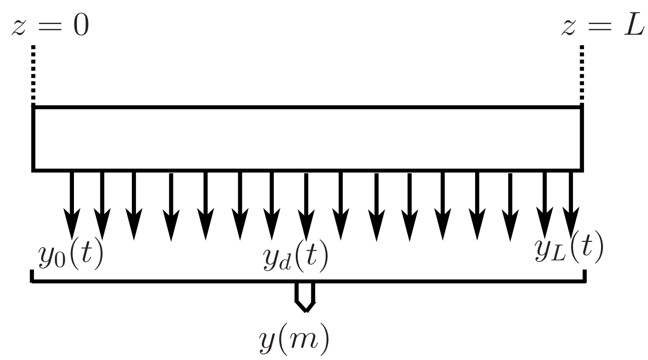

Figure 1.7: Observation par moyennage spatial.

réaliste du fait qu'il est impossible de mesurer un état donné en tout point du domaine Ω. Pour cela, il est recommandé de prendre un nombre fini de points de sorte à avoir une commande et une sortie ponctuelle ou à la frontière. Dans ce cas, la commande et la sortie sont de dimension finies [21].

1.7 Système à paramètres distribués bilinéaire

Ces dernières années, un intérêt particulier a été porté à une classe particulière de systèmes dynamiques non linéaires appelée système bilinéaire [47–51]. Les modèles de cette classe sont caractérisés par le produit de l'état et de la variable de commande, c'est-à-dire ils sont linéaires par rapport à l'état et linéaires par rapport à la commande lorsque ils sont considérés indépendamment, mais pas conjointement linéaires par rapport aux deux [6]. Les systèmes bilinéaires sont considérés comme une classe intermédiaire entre les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires [52]. Des techniques linéaires peuvent être étendues aux systèmes bilinéaire grâce au type spécial de la non linéarités [6]. L'adoption d'un modèle bilinéaire conserve un cadre bien structuré qui regroupe les concepts bien connus tels que les constantes de temps et le comportement dynamique en régime permanent [51].

Dans le cas des systèmes bilinéaires, les variables de commande utilisées pour maintenir une sortie à une consigne désirée ne sont pas des entrées aux frontières, mais elles sont des paramètres du modèle. Pour cela, les systèmes bilinéaires sont aussi appelés système à structure variable [6]. De nombreux processus industriels ont une structure intrinsèquement bilinéaire lorsque la vitesse du fluide est choisie comme variable de commande pour contrôler une sortie désirée [53] (par exemple la température dans un échangeur de chaleur [8] ou dans un collecteur d'énergie solaire [54], ou la température et la concentration dans un réacteur chimique [55]).

En général, un SPD bilinéaire est décrit par l'équation d'évolution suivante [6] :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \mathcal{A}x(z,t) + \mathcal{B}u(z,t) + x(z,t)Su(z,t) \tag{1.30}$$

où S est un opérateur différentiel spatial. Le troisième terme à droite de l'équation (1.30) représente la bilinéarité.

Comme exemple d'un SPD bilinéaire, on peut citer le système de transport de pièces sur un convoyeur (Figure 1.8). La distribution des pièces sur le convoyeur $x(z,t)$ est décrite par l'équation suivante [6]

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = -v_1(t)\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} + v_2(z,t) \tag{1.31}$$

avec la condition à la limite $z = 0$

$$x(0,t) = 0 \tag{1.32}$$

et la condition initiale

$$x(z, 0) = x_0(z) \tag{1.33}$$

où x_0 est le profil initial caractérisant la distribution des pièces.

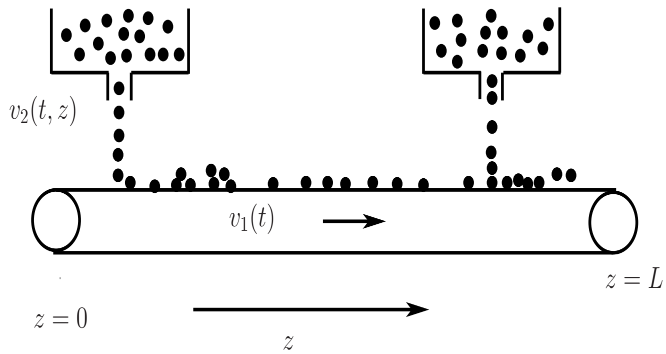

FIGURE 1.8: Distribution des pièces sur un convoyeur.

$v_2(z, t)$ peut être considérée comme une source d'alimentation en pièces du convoyeur ou comme une perturbation sur le système. Lorsque la vitesse $v_1(t)$, indépendante de la variable de l'espace z, est considérée comme variable de commande pour contrôler le nombre de pièces à $z = L$ donné par l'équation suivante

$$y(t) = x(L, t) \tag{1.34}$$

le système est un SPD bilinéaire.

1.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur les SPDs. Cette classe de système est largement rencontrée en pratique dans différents domaines. Les SPDs sont décrits par des EDPs complétées par des conditions initiales et des conditions aux limites.

Les systèmes bilinéaires représentent une classe particulière de systèmes non linéaires avec une structure non linéaire simple qui apparait sous forme d'un produit de l'état et de la commande du système.

Le chapitre suivant sera consacré à l'analyse spectrale des opérateurs linéaires, avec des outils de l'analyse fonctionnelle, utilisée pour l'étude de la stabilité des SDPs.

Chapitre 2

Analyse spectrale des opérateurs linéaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des évolutions des solutions d'un SPD représentées par des semi-groupes. Notre outil principal pour étudier la nature des solutions est la théorie spectrale des opérateurs. Cette théorie permet de tirer des conclusions sur la stabilité des solutions et la nature de leurs régimes transitoires en examinant le spectre de l'opérateur.

Nous commençons par une section introductive, dans laquelle nous expliquons les notions théoriques de base de l'analyse fonctionnelle relative aux espaces de dimension infinie, aux opérateurs linéaires et leurs propriétés essentielles. Puis, on présente la théorie spectrale des opérateurs linéaires. L'objectif principal de ce chapitre est d'utiliser l'analyse spectrale des opérateurs linéaires pour étudier la stabilité des systèmes de dimension infinie.

2.2 Espace de Hilbert

Les espaces de Hilbert apparaissent fréquemment en mathématiques et en physique, essentiellement en tant qu'espaces fonctionnels de dimension infinie. L'intérêt des espaces de Hilbert réside dans la notion d'orthogonalité basée sur l'existence d'un produit scalaire [56].

Introduisons au premier lieu la définition d'un espace de Banach [57].

Définition 1 ***(Espace de Banach)***

Un espace de Banach B est un espace vectoriel normé complet. Un espace vectoriel complet est un espace dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Une suite $\{e_n\}$ d'éléments d'un espace vectoriel E normé est dite de Cauchy si :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to\infty}} \|e_n - e_p\|_E = 0 \tag{2.1}$$

L'espace de Hilbert est un cas particulier d'un espace de Banach, il est défini comme suit

Définition 2 ***(Espace de Hilbert)***

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace de Banach qui est muni d'un produit scalaire $< .,. >_{\mathcal{H}}$ et de la norme induite par ce produit scalaire donnée comme suit

$$\| e \|_{\mathcal{H}} = \sqrt{< e, e >_{\mathcal{H}}} \tag{2.2}$$

L'espace $L_2(\Omega)$, l'espace des fonctions carrées intégrables sur Ω, représente l'un des principaux espaces de Hilbert qui est muni de la norme $\| . \|_{L_2(\Omega)}$ et du produit scalaire $< , >_{L_2(\Omega)}$ défini comme suit

$$< e_1 \, , \, e_2 >_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega e_1 \, e_2 \, d\Omega \tag{2.3}$$

$$\| e_1 \|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{< e_1, e_1 >_{L_2(\Omega)}} \tag{2.4}$$

La notion du produit scalaire permet de définir :

• la propriété d'orthogonalité : deux vecteurs e_1, $e_2 \in \mathcal{H}$ sont orthogonaux ($e_1 \perp e_2$) si $< e_1, e_2 >= 0$.

• le sous-espace orthogonal $E^{\perp}$ d'un espace de Hilbert E :

$$E^{\perp} = \{e_1 \in \mathcal{H}, \ < e_1, e_2 >= 0 \ \forall e_2 \in E\} \tag{2.5}$$

• la base orthonormée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable est définie comme l'ensemble des vecteurs mutuellement orthogonaux et de norme unité soit :

$$< \theta_n, \theta_p >= \begin{cases} 1 \ si \ n = p \\ 0 \ si \ n \neq p \end{cases} \tag{2.6}$$

La décomposition en série de Fourier des éléments de $\mathcal{H}$ sur la base $\{\theta_n, \ n \geqslant 1\}$ de $\mathcal{H}$ est donnée par :

$$\forall \ e \in \mathcal{H}, \ e = \sum_{n=1}^{\infty} < e, \theta_n > \theta_n \tag{2.7}$$

où $< e, \theta_n >$ sont les coefficients de Fourier de e sur la base $\{\theta_n\}$. Dans ce cas, le produit scalaire et la norme sont données comme suit :

$$< e_1, e_2 >= \sum_{n=1}^{\infty} < e_1, \theta_n > \overline{< e_2, \theta_n >} \tag{2.8}$$

$$\| \ e_1 \ \|_{\mathcal{H}}= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |< e_1, \theta_n >|^2 \right)^{\dfrac{1}{2}} \tag{2.9}$$

La décomposition en série de Fourier justifie l'approximation en dimension finie. En effet si $\{\theta_n, \ n \geqslant 1\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$, la projection orthogonale $\sum_{n=1}^{N} < e, \theta_n > \theta_n$ de e sur un sous-espace vectoriel dont la dimension finie N est engendré par les fonctions propres $\{\theta_n, \ 1 \leqslant n \leqslant N\}$ représente la meilleure estimation d'ordre N

de e. Par conséquent, l'augmentation de l'ordre N permet d'améliorer davantage cette approximation.

2.3 Opérateurs sur des espaces de dimension infinie

Dans cette section, on présente les principaux résultats de la théorie des opérateurs linéaires [58].

2.3.1 Opérateur linéaire

Définition 3 ***(Opérateur linéaire)***

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels réels. Un opérateur linéaire P de E_1 dans E_2 est une application de $\mathcal{D}(P) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ telle que :

$$P(e_1 + e_2) = P(e_1) + P(e_2) \tag{2.10}$$

$$P(\kappa e_1) = \kappa P(e_1), \quad \forall\, e_1,\, e_2 \in \mathcal{D}(P),\ \ \forall \kappa \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

$\mathcal{D}(P)$ représente le domaine de définition de P.

L'image $Im(P) = P(\mathcal{D}(P))$ de $\mathcal{D}(P)$ par P est un sous-espace de E_2. Le graphe de l'opérateur P est le sous-graphe $\mathcal{G}(P) = \{(e, Pe),\ e \in \mathcal{D}(P)\}$ de $E_1 \times E_2$.

Définition 4 ***(Opérateur inverse)***

L'opérateur P est inversible s'il existe une bijection entre son domaine de définition $\mathcal{D}(P)$ et son image $P(\mathcal{D}(P))$. L'inverse P^{-1} est un opérateur de $\mathcal{D}(P^{-1}) = P(\mathcal{D}(P)) \subset E_2$ dans E_1, tel que

$$P^{-1}Pe_1 = e_1, \quad \forall\ e_1 \in \mathcal{D}(P) \tag{2.12}$$

$$PP^{-1}e_2 = e_2, \quad \forall\ e_2 \in P(\mathcal{D}(P)) \tag{2.13}$$

Théorème 1

L'inverse d'un opérateur linéaire est un opérateur linéaire.

2.3.2 Opérateur borné

Dans cette partie, on présente quelques notions sur les opérateurs bornés.

Définition 5 ***(Opérateur borné)***

Un opérateur linéaire P de $\mathcal{D}(P) \subset E_1 \longrightarrow E_2$ est dit borné s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\| P\,e \|_{E_2} \leqslant C \, \| e \|_{E_1}, \quad \forall\, e \in \mathcal{D}(P) \tag{2.14}$$

et sa norme $\| P \|$ est définie comme suit :

$$\| P \| = \sup_{\substack{e \in \mathcal{D}(P) \\ e \neq 0}} \frac{\| P\,e \|_{E_2}}{\| e \|_{E_1}} = \sup_{\substack{e \in \mathcal{D}(P), \\ \|e\|_{E_1} = 1}} \| P\,e \|_{E_2} \tag{2.15}$$

Pour les opérateurs bornés, nous avons les propriétés suivantes :

1. Lorsque le domaine $\mathcal{D}(P)$ est borné, l'image $P(\mathcal{D}(P))$ est un sous ensemble borné de E_2.
2. Un opérateur borné vérifie

$$\| Pe \|_{E_2} \leqslant \| P \| \| e \|_{E_1} \tag{2.16}$$

2.3.3 Opérateur fermé

Dans ce qui suit, on présente les définitions d'un opérateur fermé et du graphe fermé.

Définition 6 ***(Opérateur fermé)***

Un opérateur linéaire P de $E_1 \longrightarrow E_2$ est fermé si son graphe $\mathcal{G}(P) = \{(e, Pe),\ e \in \mathcal{D}(P)\}$ est un sous-espace fermé de $E_1 \times E_2$, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} e_n = e_1 \\ &\lim_{n \to \infty} Pe_n = e_2 \quad , \quad \forall e_n \in \mathcal{D}(P),\ n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.17}$$

alors,

$$e_1 \in \mathcal{D}(P), \quad et \quad Pe_1 = e_2 \tag{2.18}$$

Théorème 2 ***(graphe fermé)***

Si P est un opérateur fermé de E_1 dans E_2 défini sur tout E_1, c'est-à-dire $\mathcal{D}(P) = E_1$, alors P est un opérateur borné.

Ainsi, un bon choix pour le domaine de définition $P(\mathcal{D})$ de l'opérateur P permet d'avoir un opérateur fermé.

2.3.4 Opérateur compact

Définition 7 ***(Opérateur compact)***

Un opérateur borné P de $\boldsymbol{B}(E_1, E_2)$ est compact si l'image de P de tout sous-ensemble borné de E_1 est un sous ensemble relativement compact de E_2. Un sous ensemble relativement compact est un sous ensemble E_2 de E_1 inclus dans une partie compacte de E_1.

2.3.5 Opérateur adjoint

Théorème 3 ***(Représentation de Riesz)***

Tout vecteur e dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ induit une forme linéaire bornée h définie par $h(e_2) =< e_2, e_1 >_{\mathcal{H}}$. Réciproquement, pour toute forme linéaire bornée h sur $\mathcal{H}$, il existe un vecteur $e_1 \in \mathcal{H}$ unique tel que :

$$h(e_2) =< e_2, e_1 >_{\mathcal{H}}, \quad \forall e_2 \in \mathcal{H} \quad et \quad \| h \| = \| e_1 \| \tag{2.19}$$

Définition 8 ***(Opérateur auto-adjoint d'un opérateur borné)***

Pour tout opérateur borné P, le théorème 3 assure l'existence d'un opérateur unique

P^* dit opérateur adjoint de P et défini par :

$$< Pe_1, e_2 >_{\mathcal{H}_2} = < e_1, P^* e_2 >_{\mathcal{H}_1} \quad \forall e_1 \in \mathcal{H}_1, \ \ \forall e_2 \in \mathcal{H}_2 \tag{2.20}$$

avec $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux sous espaces de Hilbert.

L'opérateur P est auto-adjoint s'il est symétrique et si

$$\mathcal{D}(P^*) = \mathcal{D}(P) \tag{2.21}$$

P est symétrique si

$$< Pe_1, e_2 > = < e_1, Pe_2 > \ \ \forall \ e_1 \, , e_2 \in \ \mathcal{D}(P) \tag{2.22}$$

2.4 Théorie spectrale

La théorie spectrale d'un opérateur linéaire P s'intéresse à l'analyse des valeurs propres λ de l'opérateur $\lambda I - P$ pour lesquelles ce dernier est inversible dans B. Lorsque le système est de dimension finie, il est bien connu que cela dépend de λ si elle est valeur propre de P. La notion des valeurs propres sera généralisée dans le cas des systèmes de dimension infinie. Les définitions et les résultats principaux sont présentés dans le cas des opérateurs fermés et opérateurs compacts.

2.4.1 Théorie spectrale des opérateurs fermés

Dans cette section, on s'intéresse à l'opérateur linéaire fermé suivant

$$P : \mathcal{D}(P) \subset B \rightarrow B \tag{2.23}$$

$\mathcal{D}(P)$ est le domaine de définition de l'opérateur $P \in B$.

Les définitions suivantes permettent d'introduire les notions de base de l'analyse spectrale des opérateurs linéaires [59, 60]

Définition 9 ***(Opérateur résolvant)***

On appelle opérateur résolvant (ou résolvante) de P l'opérateur $(\lambda I - P)^{-1}$ si $\lambda I - P$ est inversible et d'inverse borné sur un domaine dense de B. Cet opérateur est fermé et borné de domaine fermé et dense.

Définition 10 ***(Ensemble résolvant)***

L'ensemble résolvant de P noté $\rho(P)$ est l'ensemble des valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $(\lambda I - P)^{-1}$ est inversible et borné.

L'opérateur résolvant possède la propriété suivante :

$$(\lambda I - P)^{-1} - (\mu I - P)^{-1} = (\lambda - \mu)(\lambda I - P)^{-1}(\mu I - P)^{-1} \quad \forall \ \lambda, \mu \in \rho(P) \tag{2.24}$$

Par conséquent

$$(\lambda I - P)^{-1} = \left[I - (\lambda - \mu)(\mu I - P)^{-1}\right]^{-1} (\mu I - P)^{-1} \tag{2.25}$$

et on peut démontré que :

$$(\lambda I - P)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n (\mu I - P)^{-n-1}, \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(P) \tag{2.26}$$

Cette série est uniformément convergente si :

$$\| (\lambda - \mu)(\mu I - P)^{-1} \|^{-1} < 1 \tag{2.27}$$

Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent et plus complexe [56]. En dimension finie, le spectre d'un opérateur est constitué d'un nombre fini de valeurs propres. Par contre, en dimension infinie, le spectre peut être vide, infini, ou même couvrir tout le plan complexe.

Définition 11 ***(Spectre)***

Le complément de l'ensemble résolvant de l'opérateur P définie comme suit

$$\sigma(P) = \mathbb{C} \setminus \rho(P) \tag{2.28}$$

est appelé le spectre de l'opérateur P.

Le spectre de l'opérateur P peut être décomposé en trois parties [20, 59], $\sigma_p(P)$,$\sigma_c(P)$ et $\sigma_r(P)$, c'est-à-dire :

$$\sigma(P) = \sigma_p(P) \cup \sigma_c(P) \cup \sigma_r(P) \tag{2.29}$$

Les trois spectre sont définis comme suit

1. **Spectre ponctuel** $\sigma_p(P)$ défini comme suit :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - P) \ n'est \ pas \ injectif\}. \tag{2.30}$$

2. **Spectre continu** $\sigma_c(P)$ défini comme suit :

$$\sigma_c(P) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - P) \ \ est \ injectif, \ \ \overline{Im(\lambda I - P)} = B, \ \ Im(\lambda I - P) \neq B\Big\} \tag{2.31}$$

avec $\overline{P}$ est le conjugué de l'opérateur P.

3. **Le spectre résiduel** $\sigma_r(P)$ défini comme suit :

$$\sigma_r(P) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \ \lambda I - P \ est \ injectif \ et \ Im(\lambda I - P) \ n'est \ pas \ dense \ dans \ B\} \tag{2.32}$$

Dans le cas des systèmes de dimension finie, le spectre continu $\sigma_c(P)$ et le spectre résiduel $\sigma_r(P)$ sont toujours vides, mais ce n'est pas le cas si le système est de dimension infinie [20].

2.4.2 Cas des opérateurs compacts

Pour un opérateur, en dimension infinie, les propriétés spectrales sont plus complexes. Néanmoins, pour un opérateur compact le spectre à une structure simple proche de celle d'un opérateur de dimension finie. Pour un opérateur compact, la décomposition spectrale est possible.

Pour un opérateur compact, les théorèmes suivants sont définis [20, 56, 59].

Théorème 4 *(**Propriétés spectrales**)*

Si P est un opérateur compact défini sur un espace de Banach B :

- $\lambda \neq 0$ *est soit dans le spectre ponctuel $\sigma_p(P)$, soit dans l'ensemble résolvant $\rho(P)$,*
- $\sigma_p(P)$ *est dénombrable et sans point d'accumulation non nul,*
- *l'ordre de toutes les valeurs propres non nulles est fini, donc leur multiplicité aussi.*

L'opérateur à résolvante compacte fréquent dans la modélisation des systèmes dynamiques, possède un spectre analogue à celui de l'opérateur en dimension finie.

Théorème 5 *(**Opérateur à résolvante compacte**)*

Soit P un opérateur fermé, tel que sa résolvante $(\lambda I - P)^{-1}$ existe et soit compacte pour un certain λ. Alors, le spectre de P est discret, c'est-à-dire constitué uniquement de valeurs propres isolées de multiplicité finie. De plus, la résolvante $(\lambda I - P)^{-1}$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(P)$.

Un opérateur normal compact sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ possède une propriété intéressante illustrée dans le théorème suivant [20].

Théorème 6 *(**Opérateur normal compact**)*

Si $P \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ est un opérateur normal compact sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres $(\theta_i,\ i \geqslant 1)$, correspondant aux valeurs propres $\{\lambda_i,\ i \geqslant 1\}$, telle que

$$Pe = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < e, \theta_i > \theta_i. \ \ \forall e \in \mathcal{H}. \tag{2.33}$$

Cela signifie que tout opérateur normal compact sur un Hilbert induit une base orthonormée sur cet espace.

2.5 Valeurs propres et fonctions propres en dimension infinie

Dans cette section, on s'intéresse au calcul des valeurs propres et fonctions propres basé sur la méthode de séparation des variables. La méthode de séparation des variables permet d'approximer le système par un ensemble d'EDOs, cela en supposant que la solution peut s'écrire comme un produit de deux fonctions dont chaque fonction dépend d'une seule variable indépendante [11]. Considérons le SPD linéaire défini sur un domaine spatial Ω et un domaine temporel $\mathbf{T}$, par l'équation d'état suivante

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \mathcal{A}x(z,t) + \mathcal{B}u(t),\ t \in \mathbf{T}\ et\ z \in \Omega \tag{2.34}$$

les conditions aux limites

$$\mathcal{L}(x(z,t)) = 0 \qquad z \in \partial\Omega \tag{2.35}$$

et la condition initiale

$$x(z,0) = x_0(z) \tag{2.36}$$

où $x \in L_2(\Omega)$

La solution du système (2.34) - (2.36) peut être obtenue s'il est possible de déterminer analytiquement les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}$. Le problème aux valeurs propres associé au système (2.34)- (2.36) consiste à résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante [10]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi(z) &= \lambda^T \phi(z) \\ \mathcal{L}\phi(z') &= 0 \qquad z' \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.37}$$

S'il existe une solution non nulle du système (2.37), alors λ et $\phi(z)$ représentent, respectivement, les vecteurs des valeurs propres et des fonctions propres du système (2.34) - (2.36).

La solution du système (2.34)- (2.36) peut s'écrire sous la forme séparable suivante :

$$x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)\phi_n(z) \tag{2.38}$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte et admet le spectre discret suivant

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, ...\} \tag{2.39}$$

avec : $\lambda_1 >\ \lambda_2 >\ \lambda_3, ...$ et $\lambda_n \to -\infty$ quand $n \to \infty$.

Si λ_n est de multiplicité ν_n et (ϕ_{nj}) désigne la base de fonctions propres associées, alors $\forall\ x \in L_2(\Omega)$:

$$\mathcal{T}(t)x = \sum_n e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{\nu_n} < x, \phi_{nj} > \phi_{nj} \tag{2.40}$$

avec $\mathcal{T}(t)$ est le semi-groupe généré par l'opérateur $\mathcal{A}$.

2.5.1 Exemple d'application

Comme exemple d'application, on considère l'équation de chaleur définie par :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} \qquad t \in [0,\infty[\ et\ z \in [0,1] \tag{2.41}$$

la condition initiale est donnée comme suit

$$x(z,0) = x_0(z) \tag{2.42}$$

et les conditions aux limites de type Neumann sont

$$\frac{\partial x(0,t)}{\partial z} = 0 \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial x(1,t)}{\partial z} = 0 \tag{2.44}$$

En utilisant l'approximation de la solution donnée par l'équation (2.38), le système (2.41) avec les conditions aux limites (2.43)- (2.44) s'écrivent :

$$\phi_n(z)\frac{d\psi_n(t)}{dt} = a\,\psi_n(t)\frac{d^2\phi_n(z)}{dz^2} \tag{2.45}$$

$$\frac{d\phi_n(0)}{dz} = 0 \tag{2.46}$$

$$\frac{d\phi_n(1)}{dz} = 0 \tag{2.47}$$

En divisant l'équation (2.45) par $\psi_n(t)\phi_n(z)$, on aura

$$\frac{1}{\psi_n(t)}\frac{d\psi_n(t)}{dt} = \frac{a}{\phi_n(z)}\frac{d^2\phi_n(z)}{dz^2} \tag{2.48}$$

Cette équation peut être séparée comme suit :

$$\frac{a}{\phi_n(z)}\frac{d^2\phi_n(z)}{dz^2} = \lambda_n \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{\psi_n(t)}\frac{d\psi_n(t)}{dt} = \lambda_n \tag{2.50}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d^2\phi_n(z)}{dz^2} = \frac{\lambda_n}{a}\phi_n(z) \tag{2.51}$$

$$\frac{d\psi_n(t)}{dt} = \lambda_n\psi_n(t) \tag{2.52}$$

Cherchons la solution non nulle de l'équation (2.51) avec les conditions aux limites (2.46)-(2.47).

La solution dépend du signe de λ_n pour cela on distingue trois cas :

- Si $\lambda_n > 0$ la solution prend la forme suivante :

$$\phi_n(z) = q_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}z} + q_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}z} \tag{2.53}$$

En tenant compte de la conditions aux limites, on aura :

$$\frac{d\phi_n(0)}{dz} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}(q_1 - q_2) = 0 \tag{2.54}$$

ce qui implique que

$$q_1 = q_2 \tag{2.55}$$

à $z = 1$ on a

$$\frac{d\phi_n(1)}{dz} = q_1\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda_n}{a}}}) = 0 \tag{2.56}$$

ce qui implique que

$$q_1 = q_2 = 0 \tag{2.57}$$

Dans ce cas, on ne possède pas de solution non nulle, ce cas est donc exclu.

- Si $\lambda_n = 0$ la solution est de la forme :

$$\phi_n(z) = q_1 z + q_2 \tag{2.58}$$

Prenons en considération les conditions aux limites, on aura

$$q_1 = 0 \tag{2.59}$$

par contre $q_1 \in \mathbb{R}$. La solution n'évolue pas donc ce cas est à éliminer.

- Si $\lambda_n < 0$ la solution est de la forme suivante

$$\phi_n(z) = q_1\, sin(\sqrt{\frac{-\lambda_n}{a}}z) + q_2\, cos(\sqrt{\frac{-\lambda_n}{a}}z) \tag{2.60}$$

Prenons en considération la conditions à limite $z = 0$, on aura

$$\frac{d\phi_n(0)}{dz} = q_1\sqrt{\frac{-\lambda_n}{a}}cos(0) = 0 \tag{2.61}$$

alors

$$q_1 = 0 \tag{2.62}$$

à $z = 1$ on aura

$$\frac{d\phi_n(1)}{dz} = -q_2\sqrt{\frac{-\lambda_n}{a}}\, sin\sqrt{\frac{-\lambda_n}{a}} = 0 \tag{2.63}$$

soit $q_2 = 0$ ou bien $\sqrt{\frac{-\lambda_n}{a}} = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas le système (2.41) possède des solutions non nulles données comme suit

$$\phi_n(z) = q_2 cos(n\pi z) \tag{2.64}$$

où les valeurs propres du système sont :

$$\lambda_n = -an^2\pi^2 \tag{2.65}$$

L'équation (2.51), avec les conditions aux limites(2.46)-(2.47), est une équation différentielle homogène auto-adjointe, par conséquent les fonctions propres sont orthogonales, c'est-à-dire, elles vérifient la condition suivante

$$\int_0^1 \phi_n(z)\phi_p(z)dz = 0, \quad pour\ \ n \neq p \tag{2.66}$$

La constante q_2 dans l'équation (2.64) est choisie pour que les fonctions propres soient orthonormées, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \phi_n(z)^2 dz = 1 \tag{2.67}$$

En substituant l'équation (2.64) dans l'équation (2.67), on aura

$$q_2^2 = \left[\int_0^1 (\cos n\pi z)^2 \, dz\right]^{-1} \tag{2.68}$$

comme

$$\cos^2(x) = \frac{(1+\cos(2x))}{2} \tag{2.69}$$

En tenant compte de l'équation (2.69), l'équation (2.68) devient

$$\begin{aligned} q_2^2 &= \left[\textstyle\int_0^1 \dfrac{(1+\cos(2n\pi z))}{2} dz\right]^{-1} \\ &= \left[\textstyle\int_0^1 \dfrac{1}{2} dz + \dfrac{1}{2}\int_0^1 \cos(2n\pi z)) dz\right]^{-1} \\ &= \left[\dfrac{1}{2}\left[x\right]_0^1 + \dfrac{1}{4n\pi}\left[\sin(2n\pi z)\right]_0^1\right]^{-1} \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{2.70}$$

ce qui donne

$$q_2 = \sqrt{2} \tag{2.71}$$

alors les fonctions propres sont

$$\phi_n(z) = \sqrt{2}\cos(n\pi z) \tag{2.72}$$

Ainsi, en remplaçant les valeurs propres et les fonctions propres par leurs expressions dans l'équation (2.40), on aura

$$\mathcal{T}(t)x = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2\pi^2 t}\cos(n\pi z)\int_0^1 \cos(n\pi x)x(\xi)d\xi \tag{2.73}$$

2.6 Lien avec la stabilité exponentielle

L'analyse de la stabilité des SPDs est une étape essentielle comme dans le cas des SPLs. Pour les SPDs à spectre discret $\sigma = (\lambda_1, ..., \lambda_n, ...)$ avec $\lambda_n \rightarrow -\infty$, nous pouvons décomposer le système en une partie stable correspondant à [21] :

$$\{\lambda_n | \Re e(\lambda_n) < 0\} \tag{2.74}$$

et une partie instable correspondant à :

$$\{\lambda_n | \Re e(\lambda_n) \geqslant 0\} \tag{2.75}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ dans le système (2.34) engendre un semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}(t)$ et $\mathcal{B} \in \ell(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. La solution du système (2.34) est donnée comme suit :

$$x(t) = \mathcal{T}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-\xi)B(\xi)d\xi \tag{2.76}$$

L'étude de la stabilité du système (2.34) consiste a étudié le comportement asymptotique de cette solution (semi-groupe).

Comme dans le cas des systèmes de dimension finie, la propriété suivante permet de définir la caractérisation de la stabilité exponentielle.

2.6.0.1 Propriété : Caractérisation de la stabilité exponentielle

Soit $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n, ...\}$ le spectre de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{T}(t)$ le semi-groupe engendré par $\mathcal{A}$.

• s'il existe $\omega > 0$ tel que :

$$\Re e(\lambda_n) < -\omega, \qquad \forall n \geqslant 1 \tag{2.77}$$

alors $\mathcal{T}(t)$ est exponentiellement stable.

• si pour un certain i_0

$$\Re e(\lambda_{i0}) > 0 \tag{2.78}$$

alors $\mathcal{T}(t)$ n'est pas exponentiellement stable.

En d'autres termes, toutes les valeurs propres du spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$ doivent être à parties réelles négatives pour que le système (2.34) soit stable.

2.7 Décomposition spectrale d'un opérateur linéaire

La théorie spectrale est un outil puissant pour la compréhension des opérateurs linéaires en décomposant l'espace d'état en sous-espaces invariants sur lesquels les modes de l'opérateur présentent un comportement similaire [61]. Cette décomposition peut se faire selon la dynamique des modes (rapide ou lente) et leur stabilité.

Supposant qu'il existe un certain $\varsigma > 0$ tel que le spectre de $\mathcal{A}$ peut se décomposer en un spectre σ_1, qui comporte les valeurs propres stables de l'opérateur $\mathcal{A}$, et un spectre σ_2, qui comporte les valeurs propres instables, telles qu'une courbe Γ, fermée, puisse être tracée comme illustré par la Figure 2.1. Le spectre de $\mathcal{A}$ s'écrit alors sous la forme suivante [20, 21]

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_1(\mathcal{A}) \cup \sigma_2(\mathcal{A}) \tag{2.79}$$

où

$$\sigma_1(\mathcal{A}) = \{ \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \ | \ \Re e(\lambda) \geqslant -\varsigma \ \} \tag{2.80}$$

$$\sigma_2(\mathcal{A}) = \{ \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \ | \ \Re e(\lambda) < -\varsigma \ \} \tag{2.81}$$

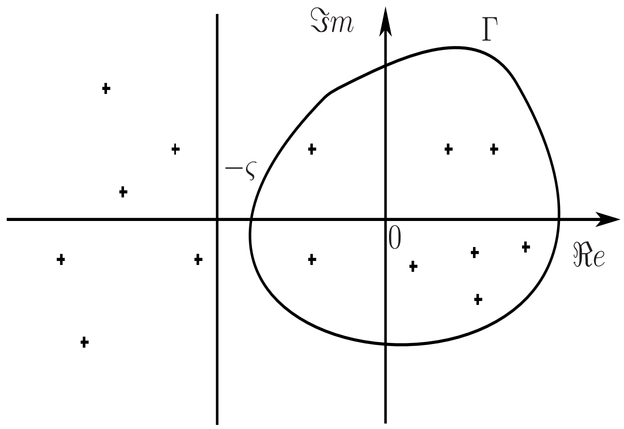

FIGURE 2.1: Décomposition spectrale des valeurs propres d'un opérateur linéaire.

Si $\sigma_1(\mathcal{A})$ est borné et peut être contenu à l'intérieur d'un arc simple Γ continu fermé, nous avons [62]

1. L'espace $\mathcal{H}$ peut être décomposé sous la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \tag{2.82}$$

où $\oplus$ est la somme directe entre les sous ensembles $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$

et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{H}_2 = (I - \mathcal{K})(\mathcal{H})$

avec $\mathcal{K}$ l'opérateur de projection défini par

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} d\lambda \tag{2.83}$$

et $\mathcal{K} \in \ell(\mathcal{H})$, avec ℓ est l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

2. Si $\mathcal{A}_1$ est la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{H}_1$ ($\mathcal{A}|_{\mathcal{H}_1}$) et $\mathcal{A}_2$ est la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{H}_2$ ($\mathcal{A}|_{\mathcal{H}_2}$)

alors :

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma_1(\mathcal{A}) \qquad et \quad \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma_2(\mathcal{A}) \tag{2.84}$$

3. $\mathcal{A}$ est borné sur $\mathcal{H}_1$.
4. $\mathcal{K}$ et $(I - \mathcal{K})$ commutent avec $\mathcal{A}$ et $T(t)$

Cette décomposition spectrale permet d'obtenir deux sous systèmes à partir du système (2.34) définis comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(z,t)}{\partial t} &= \mathcal{A}_1 x_1(z,t) + \mathcal{K}\mathcal{B}u(t) \\ x_1(z,0) &= x_0^1 \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2(z,t)}{\partial t} &= \mathcal{A}_2 x_2(z,t) + (I - \mathcal{K})\mathcal{B}u(t) \\ x_2(z,0) &= x_0^2 \end{aligned} \tag{2.86}$$

correspondant respectivement aux parties instables et stables du système (2.34). Pour étudier la stabilité du système (2.34), on s'intéresse uniquement au sous-système correspondant à la partie instable

Si $\mathcal{T}_1(t)$ est le semi-groupe engendré par $\mathcal{A}_1$ et comme $\mathcal{A}_1$ est borné sur $\mathcal{H}_1$, nous avons :

$$\mathcal{T}_1(t) = e^{\mathcal{A}_1 t} \tag{2.87}$$

la solution est

$$x_1(t) = e^{\mathcal{A}_1 t} x_0^1 + \int_0^t e^{t-\xi} \mathcal{K}\mathcal{B}u(\xi) d\xi \tag{2.88}$$

le semi-groupe engendré par $\mathcal{A}_2$ est le suivant

$$\mathcal{T}_2(t) = e^{\mathcal{A}_2 t} \tag{2.89}$$

et la solution est

$$x_2(t) = e^{\mathcal{A}_2 t} x_0^2 + \int_0^t e^{t-\xi} (\mathcal{I} - \mathcal{K}) \mathcal{B} u(\xi) \mathcal{B} d\xi \tag{2.90}$$

Remarque 7 *La décomposition spectrale peut se faire selon la dynamique des valeurs propres en modes rapides et modes lents. L'objectif est d'approximer le système de dimension infinie décrit par des EDPs par un système de dimension finie décrit par des EDOs en négligeant la dynamique des modes rapides. Cette approximation peut être adoptée dans le cas des EDPs paraboliques, à valeurs propres stables, pour lesquelles la séparation des modes est possible [5, 18].*

2.8 Cas d'un Système à paramètres distribués hyperbolique couplé

Considérons le système décrit par deux EDPs hyperboliques linéaires couplées suivantes :

$$\frac{\partial x_1(z,\, t)}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial x_1(z,\, t)}{\partial z} + \alpha_1 \left(x_2(z,\, t) - x_1(z,\, t) \right) \tag{2.91}$$

$$\frac{\partial x_2(z,\, t)}{\partial t} = -u_2 \frac{\partial x_2(z,\, t)}{\partial z} + \alpha_2 \left(x_1(z,\, t) - x_2(z,\, t) \right) \tag{2.92}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$x_1(0, t) = x_{10} \tag{2.93}$$

$$x_2(0, t) = x_{20} \tag{2.94}$$

et les conditions initiales

$$x_1(z, 0) = x_1^0(z) \tag{2.95}$$

$$x_2(z, 0) = x_2^0(z) \tag{2.96}$$

avec u_1, u_2, α_1 et α_2 sont des constantes positives.

Le modèle (2.91)-(2.96) peut s'écrire sous la forme abstraite suivante

$$\frac{\partial x(z,\,t)}{\partial t} = H\,x(z,\,t) \tag{2.97}$$

Avec

$$x(z,\,t) = \begin{bmatrix} x_1(z,\,t) \\ x_2(z,\,t) \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

où $x(z,\,t)$ est le vecteur des variables d'état. L'opérateur H est défini comme suit

$$H = \mathcal{A}\,\frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{B} \tag{2.99}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -u_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \end{pmatrix} \tag{2.100}$$

et

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{2.101}$$

En tenant compte des condition aux limites, les valeurs propre de l'opérateur H sont complexe et égales à $[5, 63]$:

$$\lambda_k = -\infty + i\,k\,\pi \tag{2.102}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des entiers) et i est l'unité imaginaire.

Ce résultat a été vérifié, par simulation numérique, en considérant un schéma de différence finie pour discrétiser les EDPs, en considérons un pas de discrétisation très proche de zero.

2.9 Conclusion

L'analyse spectrale des opérateurs linéaires bornés représente une théorie fondamentale pour l'étude des EDPs linéaires. Grâce à cette théorie, certains concepts en dimension finie peuvent être étendus en dimension infinie. La théorie spectrale des opérateurs est basée sur le calcul des valeurs propres et des fonctions propres de l'opérateur différentiel spatial en envisageant une approximation des EDPs par un ensemble d'EDOs. Cette méthode permet de séparer les pôles rapides et lents de l'opérateur par conséquent de réduire le modèle EDP à un ensembles d'EDOs. Cet ensemble représente l'approximation en dimension finie du SPD dont l'ordre dépend du nombre des pôles lents considérés dans la séparation spectrale. Pour que les modes d'un spectre soient exponentiellement stables, les valeurs propres de l'opérateur doivent être à parties réelles négatives. Cette propriété permet de tirer des conclusions sur la stabilité des systèmes dynamiques basée sur la notion de semi-groupe.

Les différentes approches utilisées pour la commande et la stabilité des SPDs feront l'objet du prochaine chapitre.

Chapitre 3

Commande et analyse de stabilité des systèmes à paramètres distribués

3.1 Introduction

La commande d'un système consiste à déterminer une loi de commande garantissant la réalisation des objectifs pour lesquels le système est conçu. L'analyse et la commande d'un SPD décrit par des EDPs aboutissent souvent à des problèmes difficiles à résoudre. Cette difficulté est liée au fait qu'il n'existe pas de théorie générale pour l'étude des EDPs et que leurs propriétés diffèrent d'une classe à une autre (hyperbolique et parabolique) [10].

L'approximation des EDPs par des EDOs est la solution la plus adoptée dont l'objectif est de pouvoir utiliser la théorie des SPLs. Une autre solution consiste à utiliser directement les EDPs et nécessite des connaissances mathématiques poussées de l'analyse fonctionnelle [21].

La théorie des semi-groupes constitue un outil majeur dans l'étude des SPDs. Elle permet de représenter plusieurs classes de systèmes sous forme d'une représentation d'état abstraite (représentation d'état dans les SPDs) ce qui permet de généraliser la matrice de transition aux SPDs. Cette représentation permet de conclure sur les propriétés fondamentales du système à savoir la stabilité, la commandabilité et l'observabilité.

L'objectif du chapitre est de présenter les différentes approches considérées dans la commande des SPDs, et les différentes méthodes utilisées pour analyser la stabilité d'un système de dimension infinie telles que la théorie de Lyapunov et la théorie des semi-groupes.

Le chapitre commence par une présentation des approches utilisées dans la commande des SPDs en citant les avantages et les inconvénients de chaque approche. Par la suite, on s'intéresse à la stabilité des SPDs au sens de Lyapunov illustrée par un exemple d'application. La fin du chapitre est consacrée à l'analyse de la stabilité en utilisant la théorie des semi-groupes illustrée dans le cas de l'équation de chaleur.

3.2 Commande des systèmes à paramètres distribués

La commande des systèmes est engagée avec de nombreux objectifs différents tels que l'orientation du processus vers un état désiré, en minimisant les effets de diverses perturbations et bruits tendant à le déplacer dans une direction indésirable, et stabiliser les systèmes qui sont intrinsèquement instables ou améliorer la stabilité des systèmes présentant de faibles caractéristiques de stabilité [64]. Ces objectifs sont plus difficiles à atteindre lorsqu'il s'agit des SPDs vu la nature distribuée de ces variables caractéristiques. Pour cela, l'étude généralement se limite au cas unidimensionnel en négligeant les phénomènes de transports et de propagations dans les autres directions. De plus, la commande des SPDs, avec les nouvelles technologies, exige des performances plus élevées (une réponse rapide avec une grande précision) en tenant compte de la nature distribuée du système [65].

L'examen des différents travaux effectués pour la commande des SPDs (linéaires/non linéaires) permet de distinguer deux approches de commande : l'approche de pré-approximation et l'approche de post-approximation [11].

3.2.1 Approche de pré-approximation

La difficulté du traitement des EDPs qui décrivent le comportement dynamique des SPDs a incité l'ensemble des chercheurs à simplifier le problème de commande d'un SPD en l'approximant par un problème de commande d'un SPL [11,13]. L'obtention d'un système de dimension finie permet de développer des stratégies de commande en se servant de la théorie, très développée, des SPLs [5]. La capacité du SPL à traduire convenablement le comportement dynamique du SPD dépend de la dimension du vecteur d'état considéré et de la technique d'approximation utilisée [4].

L'approximation est généralement basée sur la discrétisation spatiale directe des EDPs, appelée méthode d'approximation d'équation, en utilisant des méthodes d'approximation numériques telles que la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis [9, 15, 16, 66–69]. Ainsi, un SPL décrit par des EDOs (linéaires non linéaires) est obtenu.

L'approximation de la solution d'une EDP est aussi utilisée pour approcher le SPD par un SPL [10, 11, 17]. Cette approximation est basée sur des méthodes analytiques telles que la méthode des caractéristiques [29, 70], la méthode de Galerkin [18, 26], la méthode de collocation par points [71, 72] et la méthode des fonctions propres [73].

L'utilisation de l'approche de pré-approximation pour la conception d'une stratégie de commande conduit souvent à un modèle différentiel de dimension élevé. Pour cela, l'étape de la réduction est inévitable avant l'implémentation du correcteur [29] soit pour réduire le nombre des EDOs puis concevoir le correcteur [74] ou bien pour réduire l'ordre du correcteur conçu à partir des EDOs de dimension élevées [75].

Le choix de l'approche de commande peut dépendre du type des EDPs (hyperboliques, paraboliques) en fonction des propriétés spectrales de l'opérateur différentiel spatial [5]. Le spectre d'un opérateur différentiel spatial d'une EDP parabolique peut être divisé en une partie finie de modes d'une dynamique lente (modes dominants) et une autre partie infinie complémentaire d'une dynamique rapide [18]. Ainsi, la dynamique de ce type de systèmes peut être déterminée par un nombre fini de modes, modes dominants, ce qui permets d'utiliser l'approche de pré-approximation [4]. En revanche, dans le cas des EDPs hyperboliques, le spectre de l'opérateur différentiel spatial est difficile à séparer car ces modes ont la même quantité d'énergie [76]. Par conséquent un nombre infini de modes est exigé pour décrire convenablement le comportent dynamique du SPD. Pour cela, l'approche de pré-approximation est déconseillée dans le cas de la commande des

SPDs décrits par des EDPs hyperboliques [5].

La commande des SPDs (linéaires/non linéaires) en suivant l'approche de pré-approximation a atteint un niveau très avancé. Beaucoup de travaux ont été développés en utilisant différentes techniques de commande. Parmi ces commande, on peut citer la commande prédictive [18, 77–80], la commande optimale [81–83], la commande par mode glissant [28, 29], la commande robuste [9] et la commande floue [84, 85].

L'approche de pré-approximation est illustrée par la Figure 3.1.

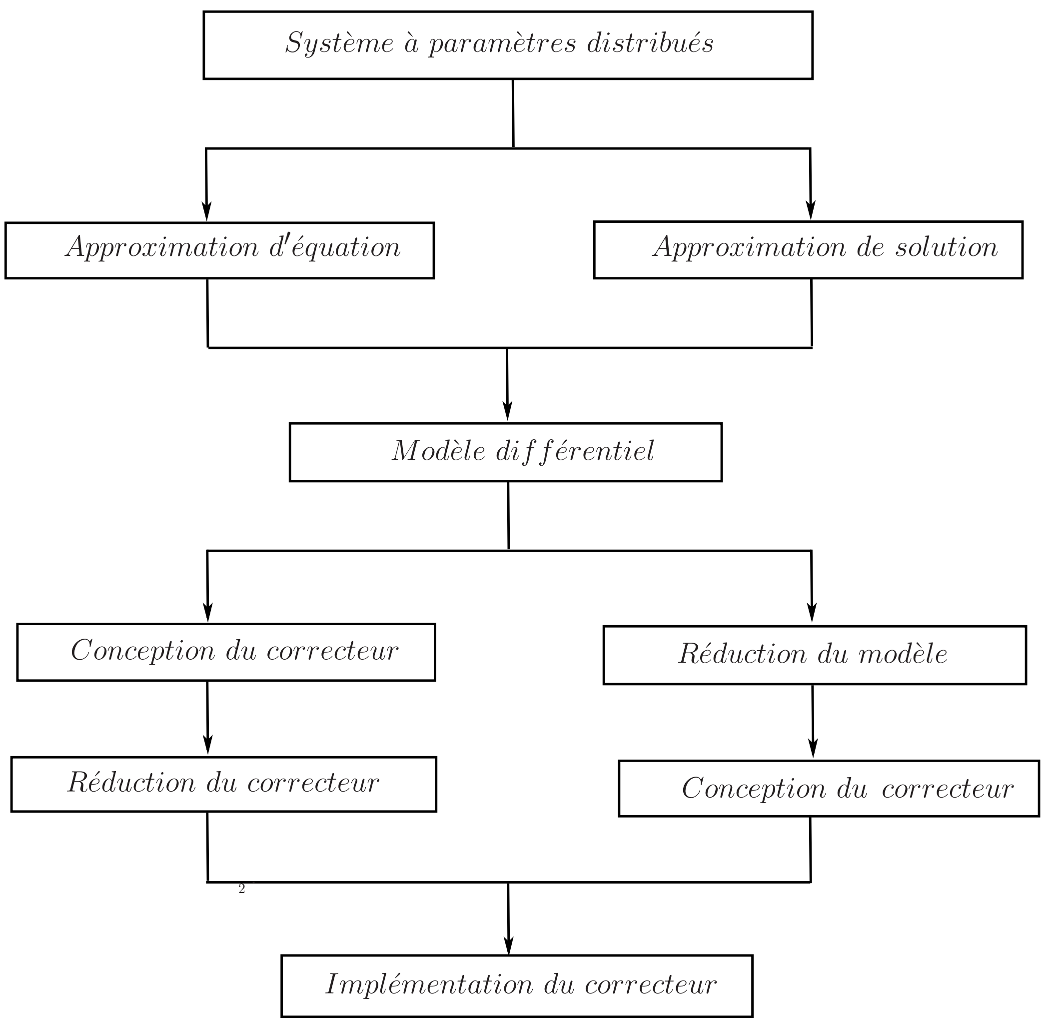

FIGURE 3.1: Approche de pré-approximation.

Cette approche présente certains inconvénients comme [5, 7, 11] :

• L'approximation de la solution d'une EDP nécessite des calculs préalables souvent compliqués et de grande dimension ,

• Négliger la nature distribuée du système peut conduire à des conclusions erronées sur la stabilité du système en boucle ouverte ou en boucle fermée.

• Le nombre de points de discrétisation doit être important pour que le SPL traduise convenablement le comportement dynamique du SPD. Ce qui conduit souvent à un correcteur de dimension élevée difficile à implémenter,

• Les propriétés fondamentales telles que la commandabilité et l'observabilité du SPL sont souvent influencées par l'emplacement des capteurs et des actionneurs qui peuvent dépendre de la méthode de discrétisation et du nombre de points de discrétisation considéré,

• Dans le cas où la nature distribuée du système est très forte en raison des phénomènes de convection et de diffusion, une telle approche réduit les performances du correcteur.

3.2.2 Approche de post-approximation

Pour surmonter les inconvénients de l'approche de pré-approximation, cités précédemment, des efforts considérables ont été consacrés au développement d'une nouvelle approche de commande, appelée approche de post-approximation, permettant de tenir compte de la nature distribuée du SPD. Dans cette approche, illustrée par la Figure 3.2, le correcteur est conçu directement en utilisant les EDPs sans aucune approximation préalable, le modèle EDPs est alors préservé le plus longtemps possible [11]. L'approximation se fait seulement lors de l'implémentation pratique du correcteur [5]. Cela permet davantage d'améliorer les performances du correcteur en boucle fermée. De plus, les propriétés fondamentales de commande (commandabilité, observabilité, stabilité) sont préservées.

La commande et l'analyse des propriétés fondamentales du système corrigé, lorsque l'approche de post-approximation est adoptée, nécessite des connaissances mathématiques de l'analyse fonctionnelle vu que les EDPs sont définies dans des espaces fonctionnels (Hilbert, Banach ou Sobolev) [20].

Cette approche constitue une solution adéquate pour l'étude des EDPs hyperboliques

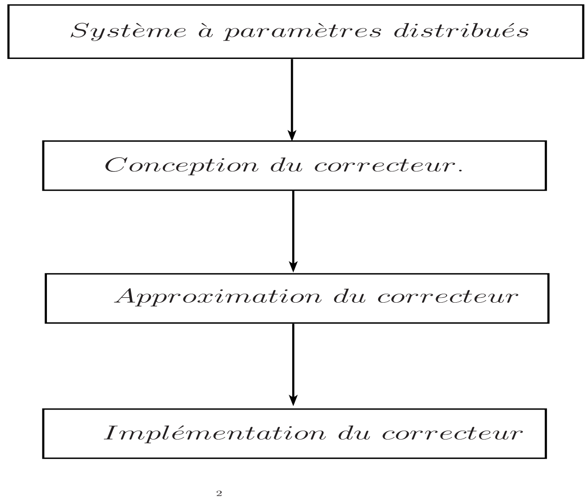

FIGURE 3.2: Approche de post-approximation.

pour lesquelles une séparation de modes est impossible [86].

Dans le cas des SPDs linéaires, l'approche de post-approximation est largement utilisée pour résoudre des problèmes de commande, de commandabilité, d'observabilité et de stabilité avec des applications à des systèmes physiques [20, 21]. La théorie de commande des SPDs linéaires a atteint un certain niveau de maturité grâce à la théorie des semi-groupes [4, 5].

Parmi les techniques de commande développées, on peut citer la commande géométrique [19, 87] et la commande floue [88].

Dans le cas des SPDs non linéaires, l'exploitation de l'approche de post-approximation est très difficile vu l'indisponibilité d'une théorie générale. Généralement, l'étude se fait en linéarisant le système autour d'un profil ou en considérant des classes particulières de systèmes non linéaires (quasi-linéaire ou bilinéaire) [5]. Des transformations peuvent être utilisées pour déterminer un modèle linéaire équivalent. A titre d'exemple, la transformation de Cole-Hopf a été utilisée dans [22] pour linéariser un système de diffusion non linéaire.

3.3 Différents types de stabilité

L'analyse de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes. La théorie fondamentale de la stabilité a été établie en 1892 par le scientifique russe Lyapunov et introduite dans son célèbre mémoire "Le problème général de la stabilité du mouvement" [89].

Différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques tels que la stabilité d'un point d'équilibre, la stabilité entrée-sortie et la stabilité des orbites périodiques [90].

Le concept de la stabilité d'un point d'équilibre formulé par Lyapunov est le plus considéré dans la littérature [90]. Par définition, un système est stable s'il restera dans son état d'équilibre dans le temps quel que soient les conditions initiales. En effet, l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est proche d'un état d'équilibre.

Diverses notions de stabilité au sens de Lyapunov ont été étendues à des systèmes dynamiques à paramètres distribués [91]. Au cours des dernières années, la stabilité des SPDs a été largement étudiée et de nombreux résultats intéressants ont été obtenus [20,92].

Considérant le système de dimension finie non autonome, qui admet x_e comme un point d'équilibre, décrit par l'équation suivante [21]

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.1}$$

avec f une fonction non linéaire continue dans $\mathbb{R}$.

La notion du point d'équilibre est donnée par la définition suivante

Définition 12 *(point d'équilibre)*

x_e est un point d'équilibre du système (3.1) si

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Tout point d'équilibre x_e peut être ramener à l'origine 0 en considérant un nouvel état $\breve{x}$ tel que $\breve{x} = x - x_e$ [93].

Définition 13 ***(Stabilité)***

Le point d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov si :
$\forall\ t > t_0$*,* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\|x(t_0) - x_e\| < \eta$ *alors*

$$\|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \textit{avec } t_0 \textit{ est l'instant initial.} \tag{3.3}$$

sinon le système est instable.

Cette définition signifie que pour toute condition initiale comprise dans une boule de rayon η, la trajectoire de la solution sera comprise dans la boule de rayon ε. En d'autres termes, pour une petite perturbation de la condition initiale, la solution de l'équation (3.1) reste au voisinage du point d'équilibre.

Il existe plusieurs notions de stabilité :

- la stabilité asymptotique.
- la stabilité exponentielle.

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage de l'équilibre tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre.

Définition 14 ***(Stabilité asymptotique)***

Le système est asymptotiquement stable au sens du Lyapunov si :

– *il est stable, et*

– $\exists\ a_s > 0$ *tel que*

$$\|x(t_0) - x_e\| < a_s \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } t \longrightarrow \infty \tag{3.4}$$

Lorsque la trajectoire temporelle du système converge exponentiellement vers l'état d'équilibre à partir d'une condition initiale arbitraire, on parle alors d'une stabilité exponentielle.

Définition 15 *(Stabilité exponentielle)*

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable si il existe deux constantes m et $a_s > 0$ tel que,

$$\| x(t) \| = me^{-\alpha_s(t-t_0)} \| x(t_0), \| \qquad \forall t > 0 \tag{3.5}$$

avec a_s est le taux de convergence.

La stabilité définie précédemment est une stabilité locale puisque elle est liée à la notion du voisinage. Par conséquent, il n'est pas possible de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.

Dans le cas où le système de dimension finie est représenté par l'équation d'état donnée comme suit :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{3.6}$$

$$x(0) = x_0 \tag{3.7}$$

La solution $x(t)$ de l'équation (3.6) est

$$x(t) = e^{At}x_0 = \mathcal{T}(t)x_0 \tag{3.8}$$

où A et x_0 sont respectivement la matrice d'état et la condition initiale. $\mathcal{T}(t)$ est la matrice de transition (semi-groupe).
Ce système est stable si et seulement si :

$$\forall t > t_0, \quad \exists \quad \eta > 0 \quad tel\ que \quad \|\mathcal{T}(t - t_0)\| < \eta \tag{3.9}$$

asymptotiquement stable si :

$$\|\mathcal{T}(t - t_0)\| \longrightarrow 0 \quad lorsque \quad t \longrightarrow \infty \tag{3.10}$$

exponentiellement stable s'il existe deux constantes M et $\omega > 0$ telles que

$$\| \mathcal{T}(t) \| = Me^{-\omega t}, \quad t \geqslant 0 \tag{3.11}$$

Ceci revient à dire que les valeurs propres de A sont à partie réelle négative.

La stabilité définie ci-dessus nécessite le calcul d'une manière explicite des solutions du système qui correspond à chaque condition initiale, ce qui est difficile voire impossible [90]. Par conséquent, il est intéressant de développer des techniques permettant de vérifier la stabilité sans résoudre ces équations. Ces méthodes seront discutées dans la section suivante.

3.4 Méthodes d'analyse de stabilité d'un système à paramètres distribués

La manipulation des EDPs, qui modélisent le comportement dynamique des SPDs, afin d'étudier la stabilité du système conduit généralement à des calculs complexes. Pour cela certaines études de stabilité s'appuient sur des EDOs déterminées en suivant l'approche de pré-approximation [91,94]. Comme il a été déjà annoncé dans la Section 3.2, cette méthode peut conduire à des résultats erronés. Par conséquent, la nature distribuée du système doit être prise en considération, cela en formulant les problèmes de stabilité directement avec les EDPs [91, 95].

Parmi les méthodes bien connues pour l'analyse de la stabilité des SPDs on peut citer, la méthode directe de Lyapunov et la méthode des semi-groupes qui sont les plus utilisées [96].

3.4.1 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov est un outil puissant pour l'étude de la stabilité des SPDs [91, 97]. Elle permet de déterminer les conditions de stabilité d'un système sans intégration explicite des équations différentielles.

La méthode directe de Lyapunov est très utilisée soit pour déterminer les conditions de stabilité des SPDs linéaires [91, 98] ou non linéaires [95–97] ou pour des objectifs de stabilisation [99, 100].

Cette méthode est une généralisation de la notion de la dissipation d'énergie dans un système qui nous permet de conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre par rapport aux conditions initiales choisies [90]. Ainsi, en examinant la dérivée de l'énergie, il est possible de définir la stabilité du point d'équilibre pour que cette énergie soit décroissante [90]. Cette énergie est appelée fonction de Lyapunov.

Le théorème suivant illustre les conditions que la fonction de Lyapunov doit satisfaire pour garantir la stabilité d'un point d'équilibre [90].

Théorème 8 *:(**méthode directe de Lyapunov**)*

Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (3.1) et $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine qui contient le point d'équilibre. Soit $V : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue différentiable tel que

$$V(0) = 0 \quad et \quad V(x) > 0 \;\; dans \;\; \mathcal{D} - \{0\} \tag{3.12}$$

$$\dot{V} \leqslant 0 \;\; dans \;\; \mathcal{D} \tag{3.13}$$

alors $x_e = 0$ est stable. De plus, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad dans \quad \mathcal{D} - \{0\} \tag{3.14}$$

alors $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

- **Exemple d'application**

Comme exemple d'application, on considère le système de transport de pièces sur un convoyeur introduit dans le chapitre (1) représenté par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(z,t)}{\partial t} &= -v_1(t)\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} + v_2(z,t) \\ x(0,t) &= 0 \\ x(z,0) &= x_0(z) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L x^2(z,t)dz \tag{3.16}$$

avec $v_2(z,t) = 0$

Le calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial x^2(z,t)}{\partial t}dz \\ &= \int_0^L x(z,t)\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}dz \\ &= -v_1(t)\int_0^L x(z,t)\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$\int_0^L x(z,t)\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}dz = \frac{1}{2}x(z,t)^2|_0^L \tag{3.18}$$

alors l'équation (3.17) devient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tfrac{-v_1(t)}{2}x^2(z,t)|_0^L \\ &= \tfrac{-v_1(t)}{2}x^2(L,t) \end{aligned} \tag{3.19}$$

- Si $v_1(t) = 0$ ceci implique que $\dot{V} = 0$,
- Si $v_1(t) \neq 0$ alors $\dot{V} < 0$

Comme v_1 est la vitesse de rotation du convoyeur qui est toujours positive (le convoyeur circule dans un seul sens), alors la fonction $\dot{V}$ est négative. Par conséquent le système est asymptotiquement stable.

Le théorème de stabilité basé sur la méthode directe de Lyapunov est facile à comprendre, la difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthodes systématiques permettant de trouver la fonction de Lyapunov candidate [97].

3.4.2 Théorie des semi-groupes

Depuis 1948, la théorie des semi-groupes et ses applications ont fait un énorme progrès dans l'analyse fonctionnelle des opérateurs [101]. Les résultats fondamentaux de la théorie des semi-groupes ont été obtenus par le mathématicien américain E. HILLE [102,103]. Par la suite, cette théorie a été largement étudiée par plusieurs mathématiciens (K. YOSIDA, W. FELLER et P. S. PHILLIPS) dans le but de la généraliser et de la développer pour des objectifs plus élargis [104–109].

La théorie des semi -groupes est devenue un outil indispensable dans un grand nombre de domaines de l'analyse moderne car elle joue un rôle très important dans les problèmes d'évolution [59].

La motivation essentielle de la théorie des semi-groupes réside dans le fait qu'elle permet de généraliser le concept de la matrice de transition, connu dans le cas des systèmes de dimension finie, à des opérateurs défini sur des espaces de dimension infinie [21]. En effet, la représentation mathématique par semi-groupe peut s'étendre à une large classe de SPDs linéaires. Cette représentation généralise naturellement le vecteur d'état classique d'un système en dimension finie [21]. De plus, elle permet de développer une théorie abstraite présentée sous une forme plus simple et uniforme [110].

La théorie des semi-groupes a été très utilisée en automatique notamment pour résoudre les problèmes de stabilité [5, 33] et de commandabilité [111] des SPDs linéaires etc.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas particulier des semi-groupes fortement continus sur un espace de Hilbert.

Considérons le système linéaire de dimension infinie représenté par l'équation d'état suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

L'état x défini dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. x_0 est la condition initiale à $t = 0$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ et $u \in \mathcal{U}$ est la commande avec $\mathcal{U}$ est l'espace de commande.

La solution de l'équation (3.20) est donnée comme suit :

$$x(t) = \mathcal{T}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-\xi)\mathcal{B}u(\xi)d\xi \tag{3.21}$$

avec $\mathcal{T}(t)$ est le semi-groupe généré par l'opérateur $\mathcal{A}$.

L'étude de la stabilité du système (3.20) consiste à étudier le comportement de la solution, c'est-à-dire le comportement du semi-groupe engendré par l'opérateur $\mathcal{A}$.

Définition 16 *: (**Semi-groupe**) [112]*

On appelle un semi-groupe d'un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ toute famille d'opérateur $\mathcal{T}(t)$ satisfaisant

- $\mathcal{T}(0) = I$ *(I est l'opérateur identité dans $\mathcal{H}$)*
- $\mathcal{T}(t+s) = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s), \ \forall \ t, \ s \geq 0$

Définition 17 *: (**Semi-groupe fortement continu**)*

On dit qu'un semi-groupe $\mathcal{T}(t)$ est fortement continu si et seulement si

$$\| \mathcal{T}(t)x - x \| \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ t \longrightarrow 0^+, \ \ \forall \ \ x \in \mathcal{H} \tag{3.22}$$

On dit aussi que $\mathcal{T}(t)$ est un C_0 semi-groupe.

Définition 18 *: (**Générateur infinitésimal**) [21]*

Soit $\mathcal{T}(t)$ un semi-groupe fortement continu sur $\mathcal{H}$. Considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ défini *par*

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(t)x - x}{t} \tag{3.23}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe $\mathcal{T}(t)$ quand la limite (3.23) existe.

$\mathcal{A}$ est alors défini sur le domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathcal{H} / \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \tag{3.24}$$

Soit $\mathcal{T}(t)$ un semi-groupe fortement continu sur $\mathcal{H}$ de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$. Pour tout $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, on a les propriétés suivantes [20, 59] :

- $\mathcal{T}(t)\, x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \forall\, t \geq 0$
- $\frac{d}{dt}(\mathcal{T}(t)\, x_0) = \mathcal{A}\, \mathcal{T}(t)\, x_0 = \mathcal{T}(t)\, \mathcal{A}\, x_0, \quad \forall\; t > 0$
- $\frac{d^n}{dt^n}(\mathcal{T}(t)\, x_0) = \mathcal{A}^n\, \mathcal{T}(t)\, x_0 = \mathcal{T}(t)\, \mathcal{A}^n x_0, \forall n \geq 1,\, x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ et $t > 0$
- $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé.
- $\mathcal{T}(t)x_0 - x_0 = \int_0^t \mathcal{T}(s)\mathcal{A}x_0 ds$
- $\int_0^t \mathcal{T}(s)xds \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}\int_0^t \mathcal{T}(s)xds = \mathcal{T}(t)x - x$, $\forall\; x \in \mathcal{H}$, avec $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Le théorème de Hille-Yosida permet de définir une caractérisation très importante des générateurs infinitésimaux. Il permet de garantir que le spectre du générateur d'un semi-groupe fortement continu se trouve toujours dans le demi-plan gauche du plan complexe [59].

Théorème 9 : ***Hille-Yosida*** *[20]*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire $\mathcal{A}$, fermé et de domaine dense sur un espace de Hilbert soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe *fortement continu est qu'il existe deux nombres réels M et ω tels que*

$$\| (\breve{a}I - \mathcal{A})^{-n} \| \leqslant \frac{M}{(\breve{a} - \omega)^n}, \ \forall\, n \geqslant 1, \ et\ \forall \breve{a} > \omega, \ tel\, que\ \breve{a} \in \rho(\mathcal{A}) \tag{3.25}$$

Dans ce cas,

$$\| \mathcal{T}(t) \| \leq M\, e^{wt} \tag{3.26}$$

Cette propriété joue un rôle crucial dans l'étude de la stabilité. Le théorème suivant définit les conditions pour lesquelles le semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}(t)$ est stable.

Théorème 10 *[21]*

L'opérateur $\mathcal{A}$ génère un semi groupe $\mathcal{T}(t)$ exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives ω et M tel que, pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\| \mathcal{T}(t) \| \leq M\, e^{-\omega t} \tag{3.27}$$

avec ω est appelé le taux de décroissance.

3.4.2.1 Stabilisabilité (Théorème de perturbation)

Pour des objectifs de commande, la loi de commande $u(t)$ dans (3.20) est souvent déterminée, en vue de la stabilisation du système, par une entrée de commande de type retour d'état donnée comme suit [20] :

$$u(t) = \mathcal{F}x(t) \tag{3.28}$$

où l'opérateur $\mathcal{F} \in \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}$ est l'espace des opérateurs bornés.

Le système de l'équation (3.20) devient

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}\mathcal{F}x(t) \\ &= (\mathcal{A} + \mathcal{R})x(t) \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec $\mathcal{R} = \mathcal{B}\mathcal{F}$.

Les conditions de stabilité du système (3.29) sont précisées par la définition suivante.

Définition 19 *: **(Stabilisabilité)** [20]*

Soit $\mathcal{A}$ un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}(t)$ dans $\mathcal{H}$ qui satisfait

$$\| T(t) \| \leq M\, e^{-\omega t} \tag{3.30}$$

Si $\mathcal{F}$ est un opérateur borné dans $\mathcal{H}$, alors l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{H}$, défini comme suit :

$$\| \mathcal{T}_{\mathcal{R}}(t) \| \leq M\, e^{(-\omega + M\|\mathcal{R}\|)t} \tag{3.31}$$

Le système en boucle fermée est stable si le semi-groupe $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}(t)$ est exponentiellement stable soit :

$$\| \mathcal{R} \| < \omega / M \tag{3.32}$$

La solution de l'équation (3.29) est donnée comme suit

$$x(t) = \mathcal{T}_{\mathcal{R}}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{\mathcal{R}}(t - \xi)\mathcal{B}u(\xi)d\xi \tag{3.33}$$

• Exemple d'application

On considère l'équation de chaleur représentée par l'EDP parabolique suivante :

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} \tag{3.34}$$

avec la condition initiale et les conditions aux limites suivantes :

$$x(z,0) = x_0 \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial x(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial x(1,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.36}$$

Le système (3.34)-(3.36) peut être réécrit sous la forme abstraite :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} = a\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ est défini dans le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in L_2(\Omega) \;\; tel\, que \;\; \frac{\partial x(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial x(1,t)}{\partial t} = 0 \right\} \tag{3.38}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ génère un semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}(t)$ dans $\mathcal{H} = L_2(0,1)$ défini comme suit

$$\mathcal{T}(t)x = \sum_n e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{\nu_n} < x, \phi_{nj} > \phi_{nj} \tag{3.39}$$

où

• les fonctions propres :

$$\phi_n(z) = \sqrt{2}cos(n\pi z) \tag{3.40}$$

• les valeurs propres :

$$\lambda_n = -an^2\pi^2 \tag{3.41}$$

• la multiplicité de λ_n est $\nu_n = 1 \ \forall n \geqslant 0$.

Ainsi la relation (3.39) devient :

$$\mathcal{T}(t)x = 2\sum_n e^{-an^2\pi^2 t} cos(n\pi z)\int_0^1 cos(n\pi\xi)x(\xi)d\xi \tag{3.42}$$

La norme de $\mathcal{T}(t)x$ est donnée comme suit

$$\| T(t)x \|_{L_2(\Omega)} = 2\sum_n e^{-an^2\pi^2 t} \| cos(n\pi z) \|_{L_2(\Omega)} \| \int_0^1 cos(n\pi\xi)x(\xi)d\xi \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.43}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz [58] permets d'écrire

$$\| \int_0^1 cos(n\pi\xi)x(\xi)d\xi \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| cos(n\pi\xi) \|_{L_2(\Omega)} \| x(\xi) \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.44}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on aura

$$\| T(t)x \|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\sum_n e^{-an^2\pi^2 t} \| cos(n\pi z) \|^2_{L_2(\Omega)} \| x(z) \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.45}$$

On a aussi,

$$(cos(n\pi z))^2 = \frac{1 + cos(2n\pi z)}{2} \tag{3.46}$$

En utilisant l'équation (3.46)et en négligeant les termes pour lesquels n>1, on aura

$$\| \mathcal{T}(t)x \|_{L_2(\Omega)} \leqslant e^{-a\pi^2 t} \| x \|_{L_2(\Omega)} \tag{3.47}$$

Ce qui implique que

$$\| \mathcal{T}(t) \|_{L_2(\Omega)} \leqslant e^{-a\pi^2 t} \tag{3.48}$$

Le semi-groupe $\mathcal{T}(t)$ est exponentiellement stable avec $M = 1$ et $\omega = a\pi^2$.

Supposons maintenant qu'une commande par retour d'état (équation (3.28)) est appliquée à ce système. Le semi-groupe engendré par l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ donné par l'équation (3.33) est exponentiellement stable si

$$\| \mathcal{R} \| < a\pi^2, \ \ (M = 1) \tag{3.49}$$

3.5 Conclusion

Deux approches sont possibles pour la commande et l'analyse d'un SPD : approche de pré-approximation et l'approche de post-approximation. L'approche de pré-approximation est mieux adaptée dans le cas des EDPS paraboliques vu que la séparation des modes (lents et rapides) est possible, tandis que l'approche de post-approximation est adaptée pour la commande des SPDs de type quelconque.

La commande des SPDs en adoptant l'approche de post-approximation permet de se rapprocher plus de la dynamique du système physique. Pour cette raison cette approche constitue un axe de recherche très actif, particulièrement dans le cas des SPDs non linéaires.

La théorie des semi-groupes a fait un bond en avant dans la commande des SPDs linéaires. Cette théorie a permis de généraliser les concepts bien connus et maitrisés en dimension finie à la dimension infinie. Cette généralisation a permis de tirer profit des outils d'analyse et de synthèse des SPLs. Pour le cas des SPDs non linéaires, peu de résultats sont disponibles, et le développement d'une théorie générale s'avère impossible. Pour cette classe de systèmes, plus rencontrée en pratique, l'investigation se fait cas par cas.

Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation et l'étude du comportement dynamique d'un échangeur de chaleur à courants parallèles considéré comme exemple d'un SPD bilinéaire.

Chapitre 4

Analyse de la dynamique d'un échangeur de chaleur

4.1 Introduction

Face aux défis énergétiques et économiques, la diminution des énergies fossiles et la hausse des prix, les sociétés industrielles s'engagent de plus en plus à assurer des stratégies permettant une bonne gestion de l'énergie [113]. L'échangeur de chaleur est un élément clef pour toute politique de maîtrise de l'énergie. Une grande part de l'énergie thermique utilisée dans les procédés industriels transite au moins une fois dans un échangeur de chaleur. Ce dernier est largement utilisé dans les procédés industriels tels que les centrales électriques, les turbines à gaz, l'industrie chimique, la climatisation ou le chauffage (domestique, urbain ou central) parmi beaucoup d'autres [114] [115]. Du fait que les fonctionnalités des échangeurs de chaleur sont extrêmement diverses et variées, il est indispensable de faire un bon choix pour un gain de rendement et d'énergie consommée. Ce choix dépend de l'application en question, des propriétés physiques et du domaine de pression et de température des fluides [116] [117].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse du comportement dynamique de l'échangeur de chaleur. Le chapitre commence par la définition des modes de transfert de chaleur intervenant lors du fonctionnement, ensuite on établit une classification des échangeurs de chaleur suivant leur construction et le sens d'écoulement des fluides. On s'intéresse par la suite à la modélisation d'un échangeur de chaleur tubulaire à courants parallèles basée sur le principe de la conservation d'énergie. Ce modèle sera utilisé pour analyser le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur en boucle ouverte en tenant compte du problème de commandabilité. Pour terminer, un état de l'art sur la commande des échangeurs de chaleur sera présenté.

4.2 Principe de fonctionnement d'un échangeur de chaleur

Un échangeur de chaleur est un dispositif dans lequel le transfert de chaleur est réalisé entre deux fluides (liquide ou gaz), à différentes températures, séparés par une paroi permettant le transfert du flux thermique [2] [117]. Selon la deuxième loi de la thermodynamique, le transfert d'énergie sous forme de chaleur se fait toujours de la température la plus élevée à la température la plus basse, il s'arrête lorsque les deux fluides atteignent la même température [118].

La chaleur peut être transférée selon trois modes différents [119] : la conduction, la convection et le rayonnement.

La conduction est le transfert d'énergie thermique dans un milieu, sans transport de matière, des particules les plus énergétiques aux moins énergétiques [120]. La conduction est plus significative dans les solides mais elle peut avoir lieu dans des liquides et des gaz à condition qu'il n'y ait pas de mouvement de ces derniers [121]. La conductivité thermique à travers la paroi dépend de sa géométrie, de son épaisseur et des propriétés physiques du matériau qui la constitue [118].

Le flux thermique par conduction $\mathcal{Q}_{conduction}$ par unité de surface A_c est déterminé par la loi de Fourier suivante :

$$\frac{\mathcal{Q}_{conduction}}{A_c} = a_c \frac{dT}{dz} \tag{4.1}$$

où a_c est le coefficient de conduction thermique, $\frac{dT}{dz}$ est le gradient de température et z est l'axe correspondant à la direction de la variation de la température.

Dans le cas où le transfert de chaleur est accompagné d'un déplacement de matière, on parle alors d'un transfert de chaleur par convection. Le transfert de chaleur par convection se produit lorsqu'un fluide en mouvement est en contact avec une surface solide dont la température est différente de celle du fluide [122]. Le mouvement de fluide permet d'améliorer le transfert de chaleur en déplaçant les fluides d'une partie chaude vers une autre partie moins chaude [118]. La convection est forcée si le mouvement du fluide est imposé par des moyens externes tels qu'un ventilateur, une pompe ou le vent. En revanche, la convection est libre (ou naturelle) si le mouvement du fluide est causé par des forces de flottabilité qui sont induites par des différences de densité dues à la variation de température dans le fluide [120]. La convection dépend de plusieurs paramètres tels que le type de fluide, de sa vitesse et son régime hydrodynamique (laminaire ou turbulent) [122].

Le flux de chaleur par convection $\mathcal{Q}_{convection}$ par unité de surface A_c peut s'exprimer comme suit

$$\frac{\mathcal{Q}_{convection}}{A_c} = \alpha_{cv}\Delta T \tag{4.2}$$

où ΔT est la différence de température et α_{cv} est un coefficient de transfert de chaleur.

Contrairement au transfert de chaleur par conduction et par convection, le transfert de chaleur par rayonnement ne nécessite pas la présence d'un milieu intermédiaire [121]. Le rayonnement est l'énergie émise par un corps sous forme d'ondes électromagnétiques [123]. Considérons un corps noir, qui absorbe ou émet parfaitement les rayonnements, d'une température T_1 contenu dans un milieu de température $T_2 < T_1$. Le flux de chaleur par rayonnement $Q_{rayonnement}$, par unité de surface A_c, qui quitte le corps s'exprime par la loi de Stefan :

$$\frac{\mathcal{Q}_{rayonnement}}{A_c} = \varphi(T_1^4 - T_2^4) \tag{4.3}$$

avec φ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Le transfert de chaleur dans un échangeur de chaleur s'effectue principalement par convection et par conduction, le rayonnement n'intervient de manière significative que s'il existe une différence de température très importantes entre les fluides et la paroi [121]. La chaleur est d'abord transférée du fluide chaud à la paroi par convection et à travers la paroi par conduction, et enfin de la paroi au fluide froid par convection [118]. Ce transfert de chaleur est illustré par la Figure 4.1

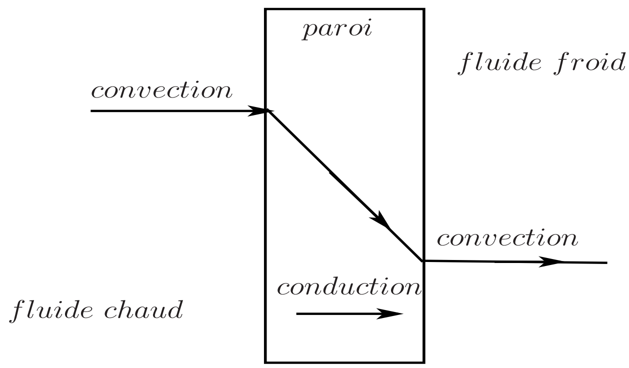

FIGURE 4.1: Modes de transfert de chaleur dans un échangeur de chaleur.

4.3 Architecture générale d'un échangeur de chaleur

Étant donné la grande variété d'applications et de configurations des échangeurs de chaleur, il est important de faire une classification pour faciliter le processus de sélection. En fonction des critères considérés, les échangeurs de chaleurs peuvent être classés en plusieurs types [124]. Le plus souvent, les échangeurs de chaleur sont classés selon leur type de construction et selon la configuration d'écoulement des fluides [116].

4.3.1 Classification basée sur la construction de l'échangeur

Selon la géométrie des canaux d'écoulement des fluides, on distingue plusieurs types d'échangeurs. Néanmoins, les échangeurs de chaleur tubulaires et les échangeurs de chaleur à plaques représentent les catégories les plus rencontrées en pratique [125].

Les échangeurs de chaleur à plaques sont constitués d'un nombre variable de plaques minces disposées les unes à côté des autres et séparées par un espace formant des canaux d'écoulement des fluides. Dans ce type d'échangeur, le taux de transfert de chaleur est extrêmement élevé grâce à la surface d'échange de chaleur [126]. Les échangeurs de chaleur à plaques sont utilisés pour transférer de la chaleur quel que soit l'état physique des fluides. Généralement, ces échangeurs ne peuvent pas fonctionner à de très hautes pressions, températures ou différences de pression et de température [116]. Les échangeurs de chaleur à plaques peuvent en outre être classés comme à plaques et joints, à plaques en spirale ou à lamelles. Un exemple d'échangeur de chaleur à plaques est donné par la Figure 4.3.

D'autre part, les échangeurs de chaleur tubulaires sont construits en tubes circulaires, elliptiques ou rectangulaires selon l'application considérée. La conception est très flexible car la géométrie du noyau peut être facilement modifiée en changeant le diamètre, la longueur, le nombre et l'arrangement des tubes [116]. Le fonctionnement de l'échangeur tubulaire est possible avec des fluides très différents (pression, phase, caractéristique) [127], et peuvent être conçus pour des pressions élevées par rapport à l'environnement [116]. Les échangeurs de chaleur tubulaires peuvent être divisés en trois catégories, les échangeurs de chaleur à tube et enveloppe, à double tubes et à tube en spirale. La Figure 4.2 représente un échangeur de chaleur à double tubes.

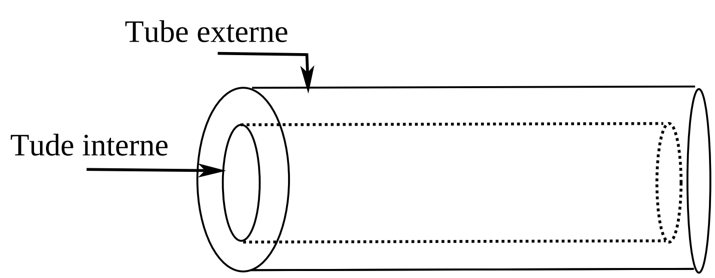

FIGURE 4.2: Échangeur de chaleur tubulaire à double tubes.

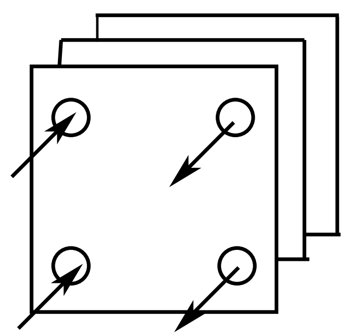

FIGURE 4.3: Échangeur de chaleur à plaques.

4.3.2 Classification basée sur le sens d'écoulement des fluides

Selon la direction d'écoulement des fluides, les échangeurs de chaleur peuvent être scindés en trois catégories, écoulement à contre-courant, à courants parallèles (co-courant) et à courants croisés [125]. Cependant, les échangeurs à contre courant et à courants parallèles sont les plus utilisés.

Dans un écoulement à contre-courant, donné par la Figure 4.4, les deux fluides s'écoulent parallèlement mais en sens opposé. Dans ce type d'échangeur, la température du fluide froid peut dépasser celle du fluide chaud [128]. Pour des débits et températures d'entrées des fluides données, ce type d'écoulement est le plus efficace en produisant le changement de température le plus élevé de chaque fluide [116].

Dans un écoulement à courants parallèles, voir la Figure 4.5, les deux fluides s'écoulent parallèlement et dans le même sens. L'évolution de la température de la paroi en fonction de la variable d'espace est plus faible dans le cas de l'échangeur de chaleur à courants parallèles ce qui implique que les pertes de flux de chaleur sont minimales [128]. L'écoulement de fluides à courants parallèles convient également à certaines situations particulières, par exemple, s'il est nécessaire de limiter la température maximale du fluide froid ou s'il est important de changer rapidement sa température [129].

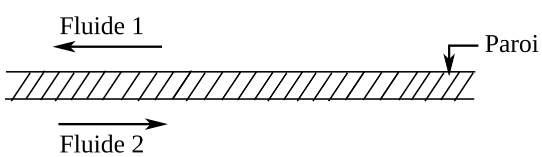

FIGURE 4.4: Écoulement de fluides à contre courant.

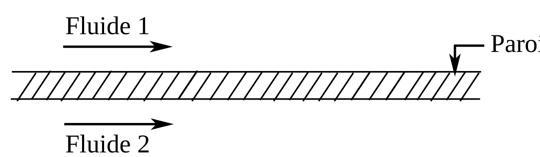

FIGURE 4.5: Écoulement de fluides à courants parallèles.

Remarque 11 *Les échangeurs de chaleur peuvent également être classés en fonction du nombre de fluides considérés, de leurs états physiques (liquide-liquide, liquide-gaz et gaz-gaz). Aussi, selon le processus de transfert de chaleur, les échangeurs de chaleur peuvent être classés comme à contact direct ou indirect. Un échangeur de chaleur à contact direct se caractérise par un contact direct du fluide chaud et du fluide froid, et lorsque ces derniers sont séparés par une paroi alors l'échangeur de chaleur est à contact indirect. De plus, la manière dont le fluide récupère la chaleur peut être considérée comme un critère de classification (récupérateur ou régénérateur). Un échangeur de chaleur est récupérateur lorsque la chaleur est transférée instantanément au fluide froid et il est régénérateur quand la température est stockée avant qu'elle soit transmise au fluide froid [116, 124, 125].*

Bien qu'il existe plusieurs types d'échangeurs de chaleur, les échangeurs de chaleur tubulaires sont les plus répondus [130, 131]. Pour cela, la suite du chapitre est consacrée à l'étude d'un échangeur de chaleur tubulaire à courants parallèles.

4.4 Modélisation d'un échangeur de chaleur

Un échangeur de chaleur n'est que rarement constitué d'un tube unique, il est généralement constitué d'un grand nombre de tubes. Néanmoins, l'étude de ces cas élémentaires est nécessaire.

4.4.1 Description d'un échangeur de chaleur à courants parallèles

Considérons un échangeur de chaleur tubulaire à courants parallèles, de longueur L, représenté par la Figures 4.6. Il est constitué de deux tubes concentriques traversés par deux fluides. Un fluide froid de densité constante ρ_f et de capacité calorifique C_{pf} entre à la température $T_{f,0}$ et s'écoule à travers le tube interne avec une vitesse v_f. Ce fluide froid échange de la chaleur, à travers la paroi d'échange, avec le fluide chaud de densité constante ρ_c et de capacité calorifique C_{pc}, qui circule dans le tube externe, avec une vitesse v_c dans la même direction que le fluide froid. Dans la présente étude, les sections des tubes interne et externe respectivement S_f et S_c sont supposées uniformes et la surface utilisée pour le transfert de chaleur par unité de longueur est A_s.

4.4.2 Modélisation d'un échangeur de chaleur à courants parallèles

Bien qu'il soit rarement possible, dans un modèle mathématique, de prendre en compte tous les facteurs affectant les performances d'un système réel, la modélisation mathématique du système est néanmoins essentielle pour concevoir et mettre en œuvre de manière efficace des stratégies de commande.

La modélisation d'un échangeur de chaleur revient à déterminer une description mathématique pouvant décrire le plus fidèlement possible sa dynamique représentée par les

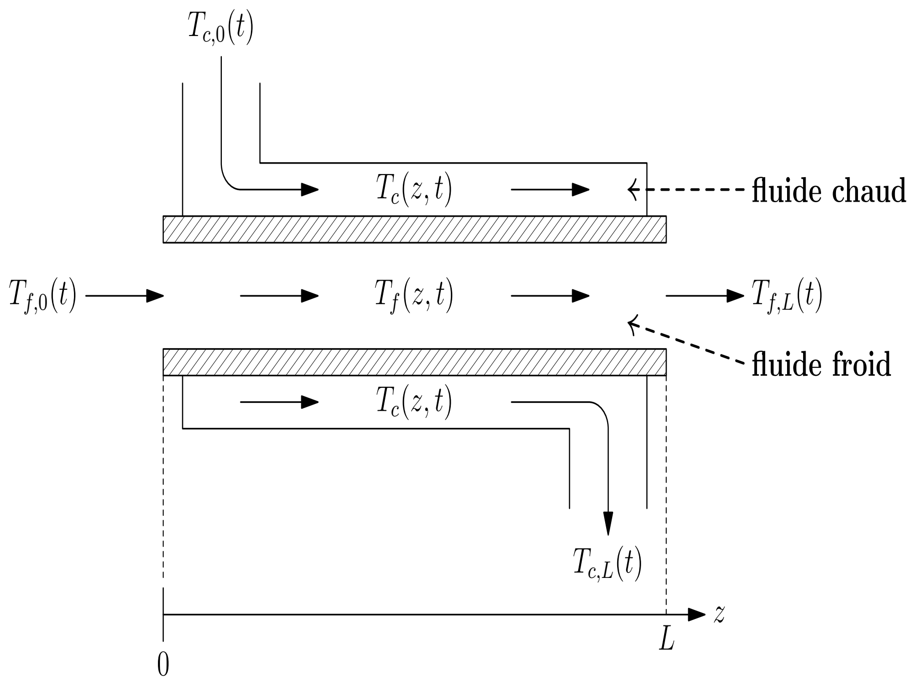

FIGURE 4.6: Échangeur de chaleur tubulaire à courants parallèles.

variations de la température des fluides. Plusieurs modèles ont été développés dans la littérature. Certains auteurs supposent que la température des fluides est uniforme, par rapport à la variable de l'espace, le long de l'échangeur ce qui permet d'obtenir un systèmes de dimension finie [81, 127, 132–134]. Cette hypothèse conduit à des modèles non fiables vu que les températures des fluides sont de natures distribuées. De ce fait, les échangeurs de chaleur sont souvent modélisés par des EDPs.

Le modèle d'un échangeur de chaleur peut être du type diffusion- convection- réaction [135–137] , diffusion-réaction [138] ou de diffusion [139]. Cependant, le phénomène de diffusion est souvent négligé devant celui de convection ce qui conduit à un modèle de type convection-réaction [22, 97, 140, 141].

Le nombre de variables caractéristiques dans un échangeur de chaleur est déterminé par le nombre de dynamiques considérées. Généralement, le modèle à deux EDPs régit convenablement le comportement dynamique d'un échangeur de chaleur [142], une EDP décrit les variations de la température du fluide froid et l'autre celles du fluide chaud en négligeant la dynamique de la paroi.

La modélisation d'un échangeur de chaleur est basée sur la quantité de chaleur transférée d'un fluide à un autre, dans une section élémentaire de limites $[z, z + \Delta z]$ (Figure 4.4.2), pendant une durée $[t, t + \Delta t]$. Pour un modèle théorique simple à l'analyse, il est indispensable de considérer un ensemble d'hypothèses concernant les conditions de fonctionnement de l'échangeur de chaleur. Elles sont données comme suit [2, 3, 143] :

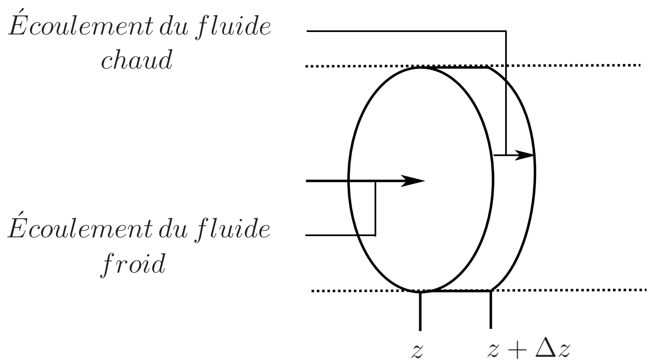

FIGURE 4.7: Élément d'un échangeur de chaleur tubulaire à courants parallèles.

- L'échangeur de chaleur est parfaitement isolé de l'environnement (pas de transfert de chaleur vers l'extérieur),
- Durant le fonctionnement de l'échangeur de chaleur, les deux fluides restent dans le même état physique, c'est-à-dire pas de changements de phase (condensation ou vaporisation),
- Le phénomène de diffusion est négligé ce qui conduit à un modèle de type convection-réaction,
- Les propriétés physiques des fluides (la densité et la capacité thermique) sont supposées constantes,
- Les pertes de pression des fluides le long de l'échangeur sont négligeables,
- La vitesse du fluide est constante dans chaque tube,
- Les coefficients de transfert de chaleur par convection sont constants et uniformes sur chaque surface.

Le fluide froid reçoit une quantité d'énergie convectée E_z à l'entrée z et reçoit de l'énergie par conduction du fluide chaud E_p transférée à travers la paroi dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, et perd de l'énergie par convection $E_{z+\Delta z}$ à la sortie $z + \Delta z$ comme le montre

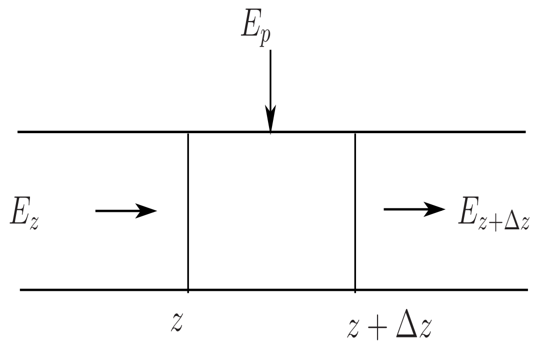

FIGURE 4.8: Bilan énergétique du fluide froid.

la Figure 4.8. Ces énergies sont données respectivement comme suit

$$E_z(z\,,\,t) = \rho_f\, S_f\, v_f\, C_{pf}\, \Delta t\, (T_f(z\,,\,t)\, -\, T_{ref1}) \tag{4.4}$$

$$E_p(z\,,\,t) = h_f\, A_s\, \Delta z\, \Delta t\, (T_c(z\,,\,t) - T_f(z\,,\,t)) \tag{4.5}$$

$$E_{z+\Delta z}(z + \Delta z\,,\,t) = \rho_f\, S_f\, v_f\, C_{pf}\, \Delta t\, (T_f(z + \Delta z\,,\,t) - T_{ref1}) \tag{4.6}$$

L'énergie accumulée dans l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ est

$$E_a = \rho_f\, S_f\, C_{pf}\, \Delta z\, (T_f(z\,,\,t + \Delta t) - T_f(z\,,\,t)) \tag{4.7}$$

Suivant la première loi de la thermodynamique (conservation d'énergie), l'énergie accumulée dans un élément, durant un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, est égale à l'énergie reçue moins l'énergie perdue durant le même intervalle de temps, ce qui permet d'écrire l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\rho_f\, S_f\, C_{pf}\, \Delta z\, (T_f(z, t + \Delta t) - T_f(z, t)) &= \rho_f\, S_f\, v_f\, C_{pf}\, \Delta t\, (T_f(z\,,\,t) - T_{ref1}) \\
&+ h_f\, A_s\, \Delta z\, \Delta t\, (T_c(z\,,\,t) - T_f(z\,,\,t)) \\
&- \rho_f\, S_f\, v_f\, C_{pf}\, \Delta t\, (T_f(z + \Delta z\,,\,t) - T_{ref1}) \\
&= \rho_f\, S_f\, v_f\, C_{pf}\, \Delta t\, (T_f(z, t) - T_f(z + \Delta z\,,\,t) \\
&+ h_f\, A_s\, \Delta z\, \Delta t\, (T_c(z\,,\,t) - T_f(z\,,\,t))
\end{aligned} \tag{4.8}$$

En divisant l'équation (4.8) par $\rho_f\, S_f\, C_{pf}\, \Delta z\, \Delta t$, on obtient

$$\frac{T_f(z,t+\Delta t)-T_f(z,t)}{\Delta t} = v_f \frac{T_f(z,t)-T_f(z+\Delta z,t)}{\Delta z} + \frac{h_f A_s}{\rho_f S_f C_{pf}}(T_c(z,t)-T_f(z,t) \quad (4.9)$$

Lorsque Δz et Δt tendent vers zéro, l'équation (4.9) s'écrit sous forme de l'EDP suivant :

$$\frac{\partial T_f(z\,,\,t)}{\partial t} = -v_f\, \frac{\partial T_f(z\,,\,t)}{\partial z} + \frac{h_f\, A_s}{\rho_f\, S_f\, C_{pf}}(T_c(z\,,\,t)-T_f(z\,,\,t)) \qquad (4.10)$$

Selon le même principe, le transfert d'énergie dans le fluide chaud est schématisé sur la Figure 4.9. Dans ce cas, le fluide chaud cède de l'énergie convectée E_p à travers la paroi au fluide froid. Le bilan énergétique s'écrit comme suit :

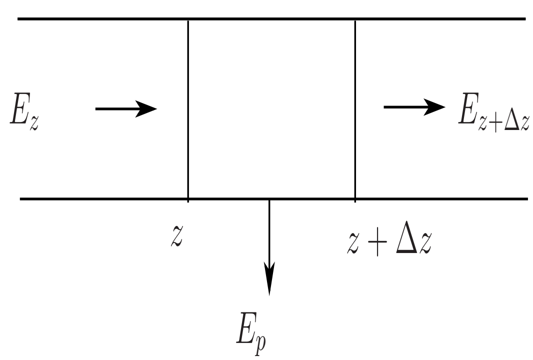

FIGURE 4.9: Bilan énergétique du fluide chaud.

$$\begin{aligned}
\rho_c\, S_c\, C_{pc}\, \Delta z\, (T_c(z\,,\,t+\Delta t) - T_c(z\,,\,t) &= \rho_c\, S_c\, v_c\, C_{pc}\, \Delta t\, (T_c(z\,,\,t) - T_{ref2}) \\
&- h_c\, A_s\, \Delta z\, \Delta t\, (T_c(z\,,\,t) - T_f(z\,,\,t)) \\
&- \rho_c\, S_c\, v_c\, C_{pc}\, \Delta t\, (T_c(z+\Delta z\,,\,t) - T_{ref2}) \\
&= \rho_c\, S_c\, v_c\, C_{pc}\, \Delta t\, (T_c(z\,,\,t) - T_c(z+\Delta z\,,\,t)) \\
&+ h_c\, A_s\, \Delta z\, \Delta t\, (T_f(z,t) - T_c(z,t))
\end{aligned} \qquad (4.11)$$

Ainsi, la division de l'équation (4.11) par $\rho_c\, S_c\, C_{pc}\, \Delta z\, \Delta t$, et pour les limites $\Delta z \longrightarrow 0$ et

$\Delta t \longrightarrow 0$, on déduit l'EDP suivante

$$\frac{\partial T_c(z\,,\,t)}{\partial t} = -v_c\,\frac{\partial T_c(z\,,\,t)}{\partial z} + \frac{h_c\,A_s}{\rho_c\,S_c\,C_{pc}}(T_f(z\,,\,t) - T_c(z\,,\,t)) \tag{4.12}$$

Le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur est décrit par les deux équations aux dérivées partielles linéaires couplées suivantes :

$$\frac{\partial T_f(z\,,\,t)}{\partial t} = -v_f\,\frac{\partial T_f(z\,,\,t)}{\partial z} + \alpha_f\,(T_c(z\,,\,t) - T_f(z\,,\,t)) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial T_c(z\,,\,t)}{\partial t} = -v_c\,\frac{\partial T_c(z\,,\,t)}{\partial z} + \alpha_c\,(T_f(z\,,\,t) - T_c(z\,,\,t)) \tag{4.14}$$

avec

$$\alpha_f = \frac{h_f\,A_s}{\rho_f\,S_f\,C_{pf}} \qquad et \qquad \alpha_c = \frac{h_c\,A_s}{\rho_c\,S_c\,C_{pc}}$$

Pour ce type d'échangeur, les températures d'entrée des deux fluides sont connues à $z = 0$, elles représentent les conditions aux frontières définies comme suit :

$$T_f(0,t) = T_{f,0} \tag{4.15}$$

$$T_c(0,t) = T_{c,0} \tag{4.16}$$

Les conditions initiales à $t = 0$ sont :

$$T_f(z,0) = T_f^0(z) \tag{4.17}$$

$$T_c(z,0) = T_c^0(z) \tag{4.18}$$

$T_f^0(z)$ et $T_c^0(z)$ sont, respectivement, les profils de température initiaux de fluide froid et de fluide chaud. α_f et α_c sont, respectivement, les coefficients de transfert de chaleur du fluide froid et du fluide chaud. h_f et h_c sont, respectivement, les coefficients d'échange global du fluide froid et du fluide chaud.

4.5 Commandabilité des échangeurs de chaleur

L'analyse de la commandalibitè d'un système dynamique est essentielle avant toute conception d'une technique de commande. La commandabilitè d'un système dynamique consiste à montrer l'existence d'une commande permettant de transférer le système d'un état initial vers un état final en un temps fini [144].

La commandabilitè d'un échangeur de chaleur se traduit par sa capacité à porter la température initiale d'un fluide à une autre température désirée en un temps fini, en manipulant une commande appropriée qui peut être le débit d'écoulement de l'un des fluides ou la température d'entrée de l'un des fluides [80]. Le choix de la variable de commande permet de définir la nature du problème de commande à traiter [138].

Dans le cas où la température d'entrée d'un fluide est considérée comme la variable à manipuler, le problème de commande est linéaire. Dans ce cas, l'étude de la commandabilité d'un échangeur de chaleur à courants croisés a été investie dans [145], suivant l'approche de près-approximation, en discrétisant le modèle par la méthode des différences finies. Les auteurs dans [146] se sont intéressés à la commandablité d'un réseau d'échangeurs en utilisant un modèle de dimension finie. L'étude a été faite en adoptant la théorie connue dans le cas des SPLs. Néanmoins, négliger la nature distribuée du système peut conduire à des résultats erronés [5]. Suivant l'approche de post-approximation, la commandabilité d'un échangeur de chaleur à courants parallèles de type convection - réaction en utilisant la théorie des semi-groupes a été étudié dans [111]. Dans [147] la démonstration de commandabilié du système lorsque le phénomène de diffusion est pris en compte a été faite, le modèle est alors du type diffusion- convection- réaction.

D'autre part, considérer le débit d'entrée ou la vitesse d'un fluide comme variable de commande, cas très fréquent en pratique, conduit à un problème de commande non linéaire (le produit de la variable de commande et l'état du système apparait). L'étude de la commandabilité dans le cas des SPDs non linéaires est très complexe vu que la théorie linéaire ne peut pas être utilisée. De plus la commandabilité d'un système linéarisé ne signifie pas la commandabilité du système original [11]. En outre, d'un point de vue pratique, la variation du débit est réalisée par une vanne qui se caractérise par une plage limitée de fonctionnement. Cela signifie que certaines températures souhaitées ne peuvent pas être atteintes si elles nécessitent des variations qui dépassent cette plage [148].

Les températures maximales atteignables dans un échangeur de chaleur peuvent être définies en utilisant les Différences des Températures de mélange Moyenne Logarithmique (DTML) [128].

Considérons un élément Δz d'un échangeur de chaleur à courants parallèles représenté sur la Figure 4.10.

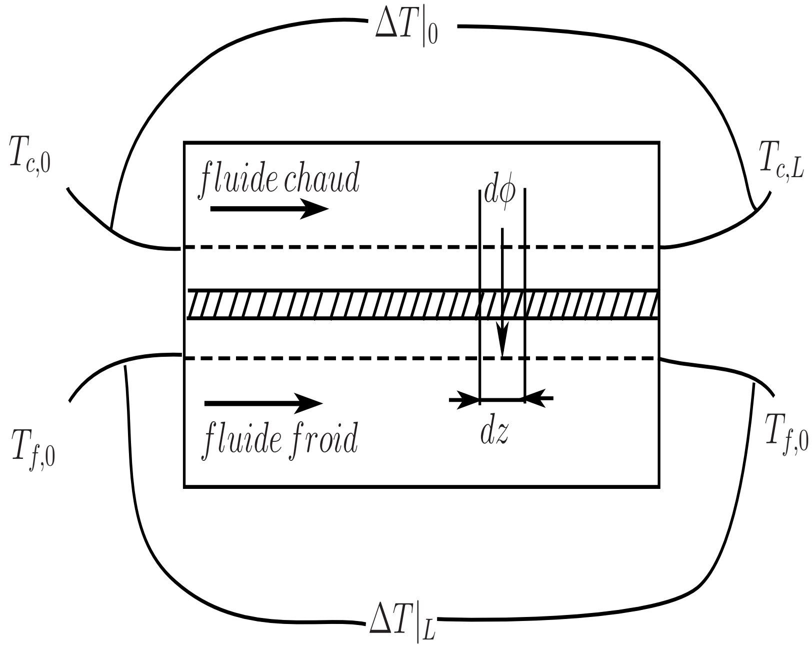

FIGURE 4.10: Échange élémentaire entre deux fluides séparés par une paroi.

Le flux de chaleur échangé à travers la paroi d'échange entre le fluide froid et le fluide chaud s'écrit sous la forme suivante

$$d\mathcal{Q} = C_f dT_f \tag{4.19}$$

$$d\mathcal{Q} = -C_c dT_c \tag{4.20}$$

avec

$$C_f = S_f\,\rho_f\,v_f\,C_{pf} \tag{4.21}$$

$$C_c = S_c\,\rho_c\,v_c\,C_{pc} \tag{4.22}$$

Calculons $dT_c - dT_f$, on aura

$$dT_c - dT_f = -d\mathcal{Q}\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) = d[\Delta T(z)] \tag{4.23}$$

on a encore

$$d\mathcal{Q} = h_f\,A_s\,\Delta T(z)dz \tag{4.24}$$

en combinant les équations (4.23) et (4.24), on aura

$$\begin{aligned} d\Delta T(z) &= -h_f\,A_s\,\Delta T(z)dz\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) \\ \frac{d\Delta T(z)}{\Delta T(z)} &= -h_f A_s\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right)dz \end{aligned} \tag{4.25}$$

En intégrant l'équation (4.25) de 0 à z, on aboutit à :

$$\ln\frac{(\Delta T)_{z=0}}{\Delta T(z)} = -h_f A_s\,\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right)z \tag{4.26}$$

soit

$$\Delta T(z) = \Delta T|_0\;e^{-h_f A_s\left(\frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_f}\right)z} \tag{4.27}$$

L'écart des températures des deux fluides évolue de façon exponentielle. On peut en déduire les évolutions des températures de chaque fluide comme suit :

- **Fluide froid**

$$T_f(z) = T_{f,0} - \frac{T_{c,0} - T_{f,0}}{1 + \dfrac{C_f}{C_c}} \left[1 - e^{-h_f A_s \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) z} \right] \tag{4.28}$$

- **Fluide chaud**

$$T_c(z) = T_{c,0} - \frac{T_{c,0} - T_{f,0}}{1 + \dfrac{C_c}{C_f}} \left[1 - e^{-h_c A_s \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) z} \right] \tag{4.29}$$

Dans le cas d'un échangeur à courants parallèles infini on aura

$$T_{f,\infty} = T_{c,\infty} = T_\infty = \frac{T_{c,0} + \dfrac{C_f}{C_c} T_{f,0}}{1 + \dfrac{C_f}{C_c}} = \frac{T_{f,0} + \dfrac{C_c}{C_f} T_{c,0}}{1 + \dfrac{C_c}{C_f}} \tag{4.30}$$

T_∞ est la température du mélange des deux fluides.

4.6 Comportement dynamique d'un échangeur de chaleur à courants parallèles

La dynamique de l'échangeur de chaleur est extrêmement complexe, une analyse dynamique en boucle ouverte basée sur le modèle décrit par les équations (4.13)-(4.18) est très intéressante pour comprendre les difficultés liées à la commande.

Dans cette section, on va étudier, par simulation, le comportement dynamique d'un échangeur de chaleur à courants parallèles en boucle ouverte. La méthode des lignes basée sur les différences finies sera utilisée.

Il s'agit d'une méthode flexible et polyvalente dans la simulation des EDPs qui peut être appliquée à toute classe d'EDP (elliptique, hyperbolique, parabolique), linéaire et non-linéaire à une, deux ou trois dimensions (variable d'espace) [149]. Le succès de cette méthode provient de sa simplicité de mise en oeuvre [66], contrairement aux méthodes déjà utilisées pour l'approximation des EDPs telle que la méthode des fonctions propres, la méthode des résidus pondérés et les méthodes variationnelles.

La méthode des lignes consiste à transformer les EDPs en des EDOs en les discrétisant par rapport à la variable d'espace z. Son principe repose sur la division du domaine spatial Ω en N points, en utilisant un pas de discrétisation Δz. Le nombre de points de discrétisations N doit être suffisamment grand pour traduire convenablement le modèle original représenté par des EDPs .

Par la suite, un schéma de différences finies sera choisi afin de discrétiser la dérivée partielle par rapport à z conduisant à un SPL de dimension N. Souvent, le schéma de différence choisi nécessite une adaptation pour tenir compte des conditions aux frontières à $z = 0$ et à $z = L$.

Le schéma de différence finie arrière est utilisé pour approximer l'opérateur spatial de l'échangeur de chaleur à courants parallèles, représenté par les équations (4.13)-(4.18), est donné comme suit :

$$\frac{\partial X(z_j,t)}{\partial z} = \frac{X(z_j,t) - X(z_{j-1},t)}{\Delta z} \quad j = 1, ...N \tag{4.31}$$

Le modèle représenté par les équations (4.13)-(4.14) sera réécrit comme suit :

$$\frac{\partial T_f(z_j,t)}{\partial t} = -\frac{v_f}{\Delta z}(T_f(z_j,t) - T_f(z_{j-1},t)) + \alpha_f(T_c(z_j,t) - T_f(z_j,t)) \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial T_c(z_j,t)}{\partial t} = -\frac{v_c}{\Delta z}(T_c(z_j,t) - T_c(z_{j-1},t)) + \alpha_c(T_f(z_j,t) - T_c(z_j,t)) \tag{4.33}$$

Après réarrangement, le modèle discrétisé sera réécrit par l'EDO suivante :

$$\dot{T}(t) = A_d T(t) + E_d T_0(t) \tag{4.34}$$

avec

$$T = [T_{f1}(t), \ \ . \ . \ . \ , T_{fN}(t), \ \ T_{c1}(t), \ \ . \ . \ . \ , T_{cN}(t)]^T$$

et

$$T_0(t) = [T_{f,0} \ \ , \ \ T_{c,0}]^T$$

avec la matrice $A_d \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et le vecteur $E_d \in \mathbb{R}^{N \times 2}$.

L'effet des vitesses des deux fluides et leur température d'entrée sur le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur à courants parallèles sera analysé. Les paramètres de l'échangeur de chaleur utilisés sont donnés dans le Tableau (4.1).

paramètre	L	$T_{f,0}$	$T_{c,0}$	α_f	α_c	v_f	v_c
valeur	$1.0\ [m]$	$25[^{\circ}C]$	$80[^{\circ}C]$	$1.5[s^{-1}]$	$3[s^{-1}]$	$5[m/s]$	$7[m/s]$

TABLE 4.1: Paramètres de l'échangeur de chaleur pour une simulation en boucle ouvert.

Les profils des températures du fluide chaud et du fluide froid d'un échangeur de chaleur à courants parallèles sont donnés par la Figure 4.11.

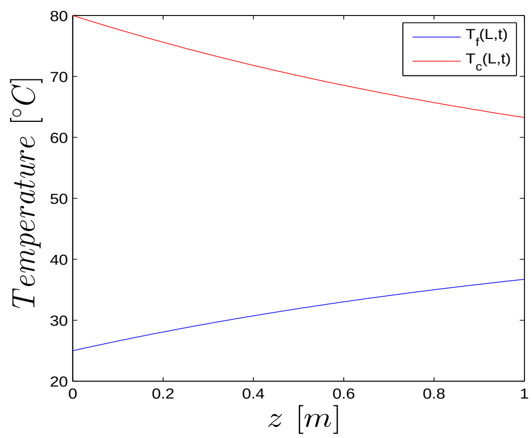

FIGURE 4.11: Profils des températures des deux fluides en régime stationnaire.

La différence de température à l'entrée de l'échangeur est importante. Elle diminue asymptotiquement au fur et à mesure que les fluides s'écoulent le long de l'échangeur. La température du fluide chaud est plus élevée que celle du fluide froid quelque soit z.

Les profils des températures du fluide froid et du fluide chaud pour $v_f = 1m/s$ et $v_f = 10m/s$ sont donnés respectivement par les Figures 4.12 et 4.13. La température du fluide froid à la sortie de l'échangeur $T_f(L,t)$ décroît lorsque sa vitesse d'écoulement v_f augmente comme le montre la Figure 4.14.

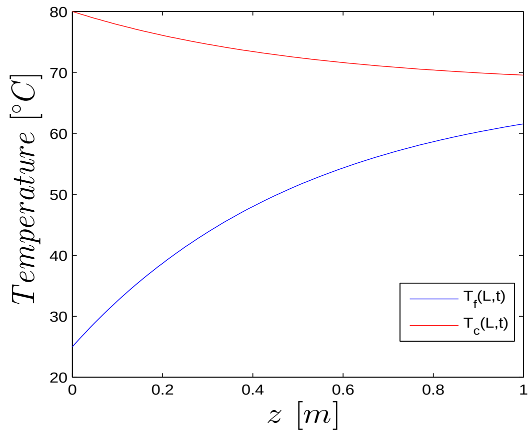

FIGURE 4.12: Profils des températures pour $v_f = 1m/s$.

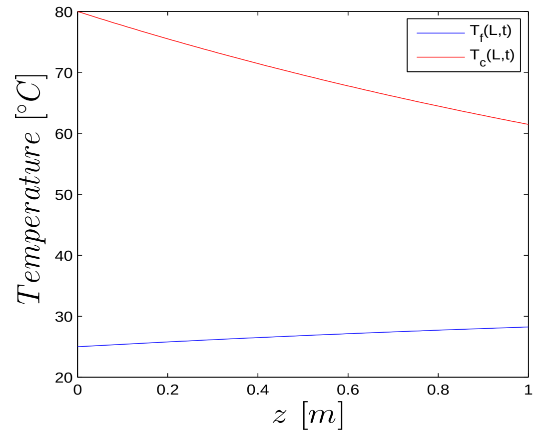

FIGURE 4.13: Profils des températures pour $v_f = 10m/s$.

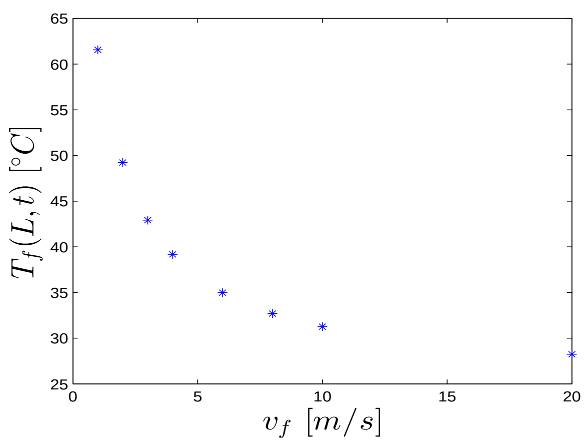

FIGURE 4.14: Influence de v_f sur $T_f(L, t)$.

Les profils des températures du fluide froid et du fluide chaud pour $v_c = 1m/s$ et $v_c = 10m/s$ sont donnés respectivement par les Figures 4.15 et 4.16. La température du fluide froid à $z = L$ augmente lorsque la vitesse du fluide chaud augmente, mais son influence n'est pas très significative, comme le montre la Figures 4.17. Par conséquent, l'intervalle de température du fluide froid, à la sortie de l'échangeur, atteignable est plus important lorsque sa vitesse sera prise comment variable de commande, par rapport à l'intervalle de température atteignable lorsque la vitesse du fluide chaud est choisie comme variable de commande. La température que le fluide froid peut atteindre à la sortie de l'échangeur de chaleur quand la vitesse v_f est proche de zero dépasse $60^{\circ}C$ alors qu'elle ne dépasse pas $40^{\circ}C$ pour des différentes valeurs de v_c.

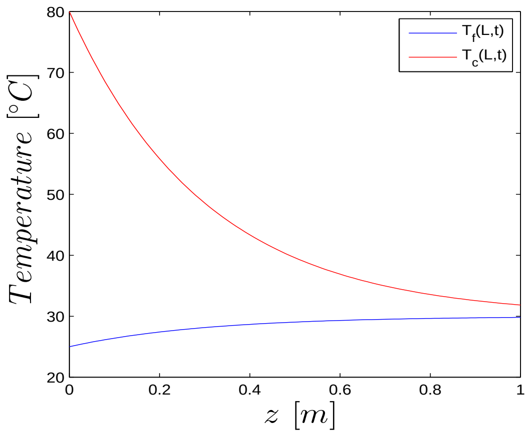

FIGURE 4.15: Profils des températures pour $v_c = 1m/s$.

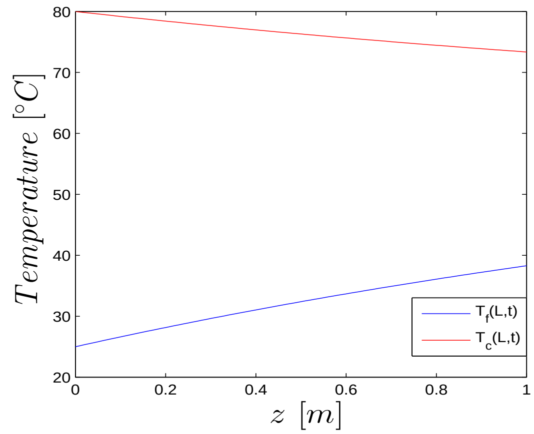

FIGURE 4.16: Profils de température pour $v_c = 10m/s$.

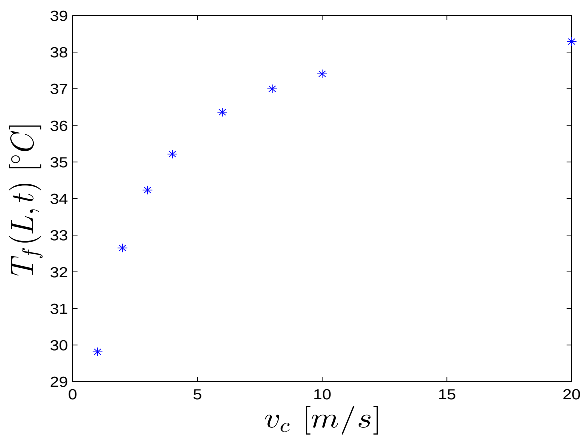

FIGURE 4.17: Influence de v_c sur $T_f(L, t)$.

Les profils des températures des deux fluides sont représentés respectivement par les Figures 4.18-4.19 et les Figures 4.21-4.22 pour $T_{c,0} = 50^{\circ}C$, $T_{c,0} = 90^{\circ}C$, $T_{f,0} = 20^{\circ}C$ et $T_{f,0} = 70^{\circ}C$. Le transfert de chaleur est plus intéressant lorsque la différence de température est plus importante entre la température d'entrée du fluide froid $T_{f,0}$ et celle du fluide chaud $T_{c,0}$. La Figure 4.20 et la Figure 4.23 représentent l'influence des températures d'entrée des deux fluides sur la température du fluide froid à la sortie de l'échangeur. L'augmentation de la température du fluide froid à l'entrée de l'échangeur entraine une hausse significative de la température de ce fluide à la sortie de l'échangeur, tandis que l'effet de la variation de la température du fluide chaud, à l'entrée de l'échangeur, sur la température de fluide froid à la sortie de l'échangeur est insignifiant.

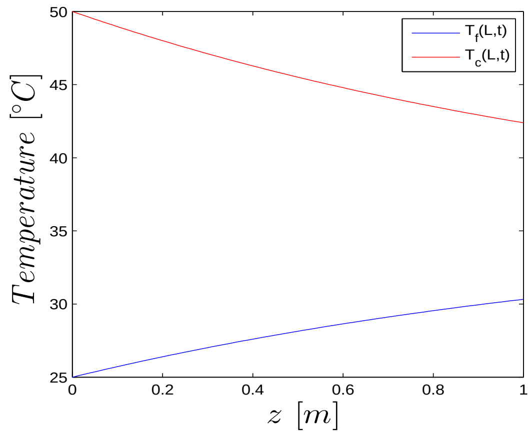

FIGURE 4.18: Profils des températures pour $T_{c,0} = 50[^{\circ}C]$.

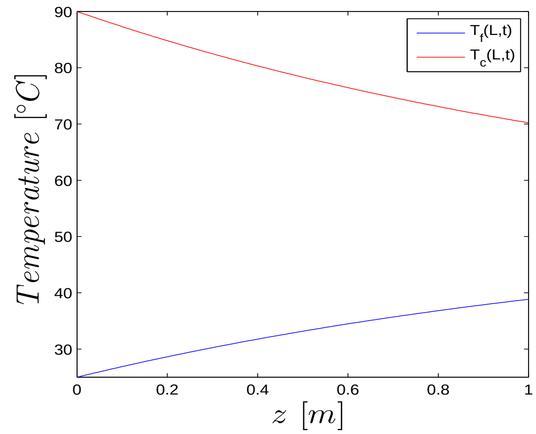

FIGURE 4.19: Profils des températures pour $T_{c,0} = 90[^{\circ}C]$.

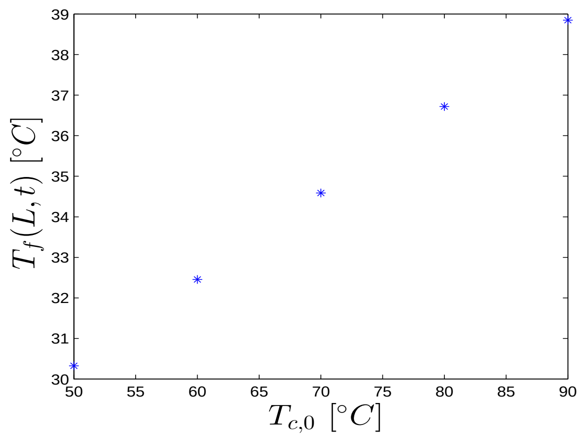

FIGURE 4.20: Influence de $T_{c,0}$ sur $T_f(L,t)$.

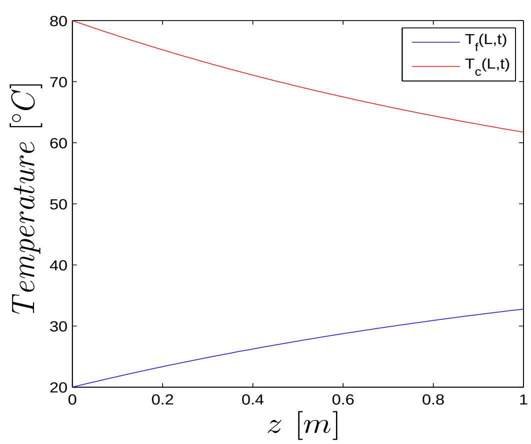

FIGURE 4.21: Profils des températures pour $T_{f,0} = 20[^{\circ}C]$.

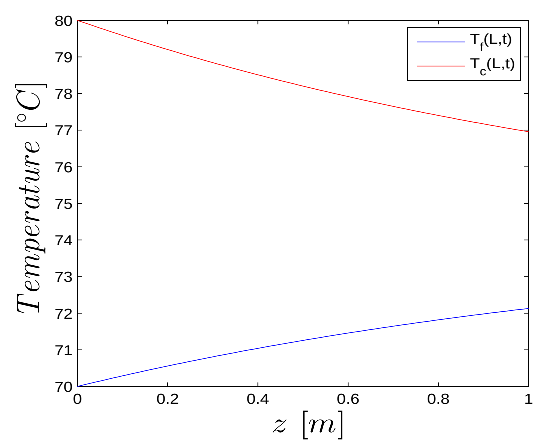

FIGURE 4.22: Profils des températures pour $T_{f,0} = 70[^{\circ}C]$.

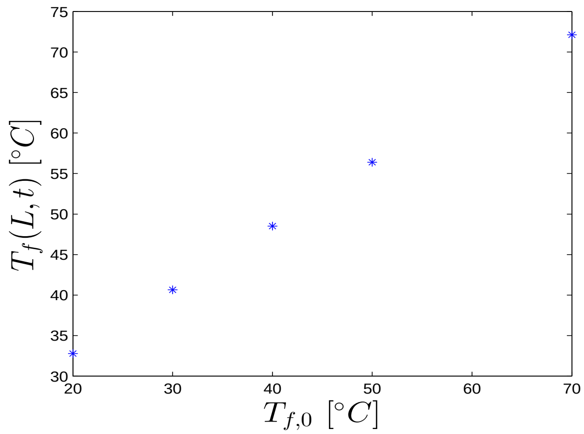

FIGURE 4.23: Influence de $T_{f,0}$ sur $T_f(L,t)$.

4.7 Commande d'un échangeur de chaleur à courants parallèles

L'objectif principal de la commande d'un échangeur de chaleur est de maintenir la température de sortie d'un fluide à une température désirée [150]. Cette température peut être contrôlée en manipulant une température d'entrée ou le débit (la vitesse) d'un fluide [115]. Dans la pratique, la température de sortie d'un fluide dans un échangeur de chaleur est contrôlée en manipulant le débit(vitesse) et non pas les températures d'entrée des fluides [78].

Auparavant, un échangeur de chaleur est conçu pour un fonctionnement en boucle ouverte [115], cependant les performances souhaitées se dégradent rapidement vu que l'échangeur de chaleur est souvent lié à d'autres systèmes pouvant affecter son fonctionnement [151]. La première solution proposée, plus adoptée en pratique, consiste à utiliser des régulateurs classiques par exemple un PI (proportionnel- intégral) ou bien PID (proportionnel- intégral - dérivé) [133,152]. Néanmoins, le délai nécessaire pour changer la température d'un fluide est important quand la longueur de l'échangeur est suffisamment importante ce qui correspond à un système à retard [80]. Par conséquent, il est indispensable de concevoir des lois de commande modernes et efficaces pouvant améliorer le fonctionnement du système en boucle fermée. Plusieurs approches de commande ont été proposées dans la littérature. Elles diffèrent selon le modèle et la technique de commande utilisée.

Comme le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur est décrit par un modèle de dimension infinie, plusieurs auteurs ont adopté l'approche de prè-approximation [81, 153]. La théorie des modes glissants a été appliquée dans [29] pour la commande d'un échangeur de chaleur à courants parallèles en utilisant la méthode des caractéristiques pour approximer le modèle EDP. Cette méthode a été utilisée dans [7] et [9] respectivement pour concevoir une commande géométrique et une commande robuste non linéaire. Dans [36], un retour d'état a été proposé en utilisant toujours la méthode des caractéristiques. Des modèles de dimension finie ont été considérés dans [148] pour la régulation de la température de sortie dans un échangeur de chaleur à courants parallèles et à contre-courant.

L'approche de post-approximation est rarement utilisée pour la commande des échangeurs de chaleur. Un algorithme de commande optimale a été proposé dans [139] pour un échangeur de chaleur à courants parallèles , en utilisant la méthode du gradient conjugué. Dans [22], la commande géométrique a été utilisée, introduite par [5], pour la commande à la frontière d'un échangeur de chaleur à courants parallèles. La commande Backstepping a été utilisée dans [136] pour la commande d'un échangeur de chaleur à courants parallèles . Ces techniques de commande proposées sont toutes basées sur le choix de la température d'entrée des fluides comme variable de commande tant dit qu'il n'existe pas de stratégie de commande lorsque le débit (vitesse) de l'un des fluides est pris comme variable de commande.

4.8 Conclusion

Des généralités sur les échangeurs de chaleur ont été présentées dans ce chapitre. Leur principe de fonctionnement a été illustré selon les différents modes de transfert de chaleur. Les échangeurs de chaleur sont largement utilisés dans la maitrîse d'énergie et leur conception dépend de l'application considérée. Néanmoins, les échangeurs de chaleurs tubulaires sont les plus utilisés dans la pratique car ils présentent un large domaine de fonctionnement de température et de pression. Le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur tubulaire est convenablement décrit par deux EDPs décrivant la distribution spatio-temporelle des températures des fluides en négligeant la dynamique de la paroi.

La commande des échangeurs de chaleur constitue un domaine de recherche actif. En utilisant l'approche de post-approximation, une technique de commande géométrique sera développée dans le prochain chapitre. La stratégie de commande consiste à manipuler la vitesse d'un fluide comme variable de commande dans le but d'améliorer l'efficacité de l'échangeur de chaleur.

Chapitre 5

Commande d'un système à paramètres distribués bilinéaire

5.1 Introduction

Bien que plusieurs stratégies de commande intéressantes ont été développées dans le cas des SPDs non linéaires [1, 4, 18, 33, 34, 154, 155], la conception de commandes pour cette classe reste toujours un défi [4]. Une théorie générale a été développée dans le cas des SPDs linéaires en utilisant la théorie des semi-groupes [20]. Cela n'est pas possible dans le cas des SPDs non linéaires car ils présentent des non linéarités très différentes dans leurs formes. L'investigation est souvent faite en considérant certaines classes particulières. Parmi ces classes, on peut citer les EDPs hyperboliques de premier ordre [5, 7, 9, 29], les EDPs paraboliques quasi-linéaires [18] et les EDPs paraboliques non linéaires [34].

Les SPDs bilinéaires représentent une autre classe intéressante des systèmes non linéaires [6]. Pour cette classe compte tenu de certaines considérations pratiques, certains paramètres du système sont pris comme variables de commande. A titre d'exemple, la manipulation d'une vitesse du fluide dans un échangeur de chaleur.

La commande géométrique est une approche intéressante et appropriée pour concevoir des lois de commande pour les SPDs suivant l'approche de post-approximation. Cette stratégie permet de concevoir des lois de commande directement en utilisant les modèles

EDPs, ce qui conduit à une commande de nature distribuée qui améliore davantage les performances du système en boucle fermée [1]. Néanmoins, l'extension de cette technique de commande aux SPDs non linéaires bute à certaines contraintes. Par exemple, la stabilité en boucle fermée est difficile à démontrer et nécessite généralement des outils mathématiques sophistiqués de l'analyse fonctionnelle.

L'objectif du chapitre est de développer une technique de commande pour un SPD bilinéaire dans le cadre de la commande géométrique en suivant l'approche de post-approximation. Par la suite, on abordera la stabilité du système basée sur les propriétés mathématiques de l'opérateur spatial résultant en boucle fermée. Les performances de la loi de commande développée sont évaluées dans le cas d'un échangeur de chaleur à courants parallèles. Le problème est de contrôler la température du fluide froid à la sortie de l'échangeur de chaleur en manipulant sa vitesse d'entrée.

Le chapitre est structuré comme suit : le problème de commande d'un SPD bilinéaire modélisé par deux EDPs hyperboliques linéaires couplées est présenté à la section 2. La stabilité du système en boucle ouverte fera l'objet de la section 3. La section 4 est consacrée à la conception de la loi de commande géométrique en suivant l'approche de post-approximation. La condition de stabilité du système en boucle fermée est démontrée à la section 5. A la section 6, l'approche de commande développée est illustrée dans le cas d'un échangeur de chaleur à courants parallèles. Les performances de la loi de commande développée sont évaluées, par simulation, pour un changement de consigne et rejet de perturbation.

5.2 Formulation du problème de commande

Une classe importante des SPDs rencontrée dans une grande variété d'applications pratiques est décrite par des EDPs hyperboliques linéaires couplées issues des lois de la conservation d'énergie [2]. Dans ce cas, deux types de SPDs peuvent être distingués : fortement et faiblement couplés [2].

Lorsque les dérivées temporelles et spatiales des différentes variables d'état interviennent dans chaque équation du modèle, le système est dit fortement couplé. Dans le deuxième cas, lorsque chaque équation du modèle ne contient que les dérivées temporelles et spatiales de la même variable d'état, le système est faiblement couplé. Notons que, sous certaines hypothèses, un système fortement couplé peut être transformé en un système faiblement couplé par une procédure de découplage. Les échangeurs de chaleur, les lignes de transmission électrique, les canaux d'irrigation et les pipelines de transport sont quelques exemples des SPDs dont le comportement dynamique est décrit par les EDPs hyperboliques couplées [2, 141]

Dans ce chapitre, une classe de système linéaire faiblement couplé représenté par deux EDPs hyperbolique est considérée. Son modèle mathématique est donné comme suit [2],

$$\frac{\partial x_1(z,\,t)}{\partial t} = -u_1\,\frac{\partial x_1(z,\,t)}{\partial z} + \alpha_1\left(x_2(z,\,t) - x_1(z,\,t)\right) \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial x_2(z,\,t)}{\partial t} = -u_2\,\frac{\partial x_2(z,\,t)}{\partial z} + \alpha_2\left(x_1(z,\,t) - x_2(z,\,t)\right) \tag{5.2}$$

avec les conditions aux frontières suivantes

$$x_1(0,t) = x_{10} \tag{5.3}$$

$$x_2(0,t) = x_{20} \tag{5.4}$$

et les conditions initiales

$$x_1(z,0) = x_1^0(z) \tag{5.5}$$

$$x_2(z,0) = x_2^0(z) \tag{5.6}$$

x_1 et x_2 sont les variables d'état tel que $x_1\,,\,x_2 \in L_2(\Omega)$ tandis que x_1^0 et x_2^0 représentent les profils spatiaux initiaux. $t \in [0\,,\infty[$ et $z \in \Omega$ représentent respectivement la variable du temps et la variable de l'espace avec $\Omega \in [0;L]$. x_{10}, x_{20}, α_1 et α_2 sont des constantes positives.

Les variables u_1 et u_2 peuvent être considérées respectivement comme la variable à manipuler et une perturbation et vice versa selon la configuration de commande considérée.

Sans perte de généralité, on suppose que l'objectif est de contrôler la sortie suivante

$$y(t) = x_1(L, t) \tag{5.7}$$

en manipulant la variable u_1 alors que u_2 est considérée comme une perturbation.

Dans ce cas, le système (5.1)-(5.6) est bilinéaire [6, 156]. Cette classe particulière de DPSs est appelée systèmes faiblement couplés ou découplés puisque les termes qui contiennent les dérivées ne sont pas couplés [2]

Pour résoudre ce problème de commande, on considère les hypothèses suivantes [157] :

Hypothèse 1 *Le profil spatial $x_1(z, t)$ est une fonction monotone croissante par rapport à z [158].*

Hypothèse 2 *A $z = 0$, les conditions aux frontières verifient la condition : $x_2(0, t) - x_1(0, t) > 0$, c'est-à-dire $x_{20} - x_{10} > 0$.*

Remarque 12 *Pour le SPD (5.1)-(5.2), puisque u_1, u_2, α_1 et α_2 sont des paramètres positifs, l'hypothèse (2) implique que $x_2(z, t) - x_1(z, t) > 0$ pour tout $z \in [0; l]$.*

Avant d'aborder la conception de la loi de commande, le problème de stabilité du système (5.1)-(5.6) est étudié dans la section suivante.

5.3 Analyse de stabilité en boucle ouverte

Comme nous l'avons déjà introduit dans le chapitre 2 et 3, la stabilité du semi-groupe ou de son générateur (opérateur), c'est-à-dire la stabilité du SPD, peut être étudiée à l'aide de certains outils de la théorie spectrale [59]. Ainsi, si toutes les valeurs propres de l'opérateur, réelles ou complexes, sont à parties réelles négatives le semi-groupe généré par cet opérateur est stable c'est-à-dire que le SPD est stable.

Le modèle (5.1)-(5.6) peut s'écrire sous la forme d'opérateur suivante

$$\frac{\partial x(z,\, t)}{\partial t} = H\, x(z,\, t) \tag{5.8}$$

Avec

$$x(z,\, t) = \begin{bmatrix} x_1(z,\, t) \\ x_2(z,\, t) \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

où $x(z,\, t)$ est le vecteur des variables d'état. L'opérateur H est défini comme suit

$$H = \mathcal{A}\,\frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{B} \tag{5.10}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -u_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

et

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

La stabilité des systèmes hyperboliques linéaires issus des lois de la conservation d'énergie a été étudiée dans la littérature [63,98]. Le but de cette section est de donner la condition qui assure la stabilité exponentielle établie en se basant sur la théorie spectrale du système (5.1)-(5.6) [59]. Cette théorie fournit le comportement qualitatif du semi-groupe généré par l'opérateur spatial H [59].

Pour les conditions aux limites (5.3) -(5.4), puisque les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ sont négatives, alors les valeurs propres de l'opérateur spatial H sont complexes données comme suit [5, 63]

$$\lambda_k = -\infty + i\,k\,\pi \tag{5.13}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des entiers) et i est l'unité imaginaire. Comme la partie réelle de λ_k est négative, le système (5.8) est exponentiellement stable, c'est-à-dire que l'opérateur spatial H génère un semi-groupe stable. Par conséquent, le modèle (5.1) -(5.6) est exponentiellement stable si les paramètres u_1 et u_2 sont positifs.

5.4 Conception de la loi de commande géométrique

Les SPDs faiblement couplés sont caractérisés par un indice caractéristique fini lorsqu'un paramètre est pris comme variable à manipuler pour contrôler une sortie à la frontière [5]. De plus, l'analyse de stabilité d'un SPD faiblement couplé peut être étudiée facilement en examinant les valeurs propres de l'opérateur spatial. Ces propriétés intéressantes motivent l'utilisation de la commande géométrique pour les SPDs bilinéaires afin de concevoir une loi de commande suivant l'approche de post-approximation.

Ainsi, le problème de commande formulé est résolu dans le cadre de la commande géométrique basée sur la notion de l'indice caractéristique introduit dans [5]. Cet indice représente une généralisation de la notion de degré relatif dans les SPLs [159]. Il est défini comme le nombre de fois à dériver la sortie $y(t)$ pour que l'entrée u_1 apparaisse explicitement.

Pour le système (5.1)-(5.6), la première dérivée de $y(t)$ par rapport au temps est calculée comme suit

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \left.\frac{\partial x_1(z,\,t)}{dt}\right|_{z=L} \\ &= -u_1\,\left.\frac{\partial x_1(z,\,t)}{\partial z}\right|_{z=L} + \alpha_1\left(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t)\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

A partir de l'équation (5.14), il est remarquable que la variable de commande u_1 apparaît explicitement dans la première dérivée temporelle de la sortie $y(t)$ ce qui implique que l'indice caractéristique est égal à 1. Cela suggère d'imposer, en boucle fermée, un comportement dynamique d'un système du premier ordre, d'une constante de temps τ, entre une variable externe $y^d(t)$ et la sortie $y(t)$, c'est-à-dire

$$\tau \frac{y(t)}{dt} + y(t) = y^d(t) \tag{5.15}$$

L'hypothèse (1) permet de garantir que

$$\left.\frac{\partial x_1(z,\, t)}{\partial z}\right|_{z=L} \neq 0 \tag{5.16}$$

La substitution de la première dérivée temporelle de la sortie commandée $y(t)$ par son expression donnée par l'équation (5.14) dans l'équation (5.15) et en résolvant l'équation résultante par rapport à la variable manipulée u_1, on déduit l'expression de la loi de commande donnée comme suit

$$u_1(t) = \left[\frac{y(t) - y^d(t) + \tau\, \alpha_1\, (x_2(L,\, t) - x_1(L,\, t))}{\tau \left.\dfrac{\partial x_1(z,\, t)}{\partial z}\right|_{z=L}}\right] \tag{5.17}$$

avec $y(t) = x_1(L, t)$

Remarque 13 *La première dérivée spatiale de l'état x_1, qui apparait dans la loi de commande (5.17), peut être approximée par un schéma de différence finie, en utilisant trois points comme suit*

$$\left.\frac{\partial x_1(z,t)}{\partial z}\right|_{z=L} = \frac{x_1(L,t) - 4x_1(L-dz,t) + 3x_1(L-2dz,t)}{2\Delta z} \tag{5.18}$$

Par conséquent, pour la mise en œuvre pratique de la loi de commande, il est nécessaire de connaitre les mesures aux deux positions $z = L - \Delta z$ et $z = L - 2\Delta z$. Ces mesures peuvent être fournies à partir de la mesure de la sortie commandée $y(t) = x_1(L,t)$ à l'aide d'un observateur.

5.5 Stabilité du système en boucle fermée

La loi de commande donnée par l'équation (5.17) fournit, en boucle fermée, un système de dimension finie donné par l'équation (5.15), qui est stable pour une constante du temps τ positive. Dans cette section, la stabilité interne du système en boucle fermée représentée par l'équation (5.15) est analysée.

La représentation interne de la boucle fermée résultante est obtenue en remplaçant la variable manipulée u_1 par son expression (5.17) dans le système à commander (5.1)-(5.6). Dans ce cas, la boucle fermée peut être écrite sous forme d'opérateur donnée par l'équation (5.8) avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\left[\dfrac{y(t) - y^d(t) + \tau\,\alpha_1\,(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t))}{\tau\,\left.\dfrac{\partial x_1(z,\,t)}{\partial z}\right|_{z=L}}\right] & 0 \\ 0 & -u_2 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

et $\mathcal{B}$ reste inchangé.

Le système en boucle fermée peut être considérée comme un système à paramètres variants [160]. Ainsi, selon le développement donné dans la Section 5.3, la stabilité interne de la boucle fermée (5.15) est assurée si les valeurs propres de la matrice (5.19) sont stables (à partie réelle négative).

La condition qui garantit la stabilité de la matrice (5.19) est fournie par la proposition suivante :

Proposition 1 *[157] Si $\tau \geqslant \frac{1}{\alpha_1}$ les valeurs propres de l'opérateur (5.19) sont stables.*

Démonstration 1 *Puisque $u_2 > 0$, il reste à démontrer que*

$$\frac{y(t) - y^d(t) + \tau\,\alpha_1\,(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t))}{\tau\,\left.\dfrac{\partial x_1(z,\,t)}{\partial z}\right|_{z=L}} \tag{5.20}$$

est positive.

L'hypothèse (1) implique que

$$\left.\frac{\partial x_1(z,\,t)}{\partial z}\right|_{z=L} > 0 \tag{5.21}$$

et comme la constante de temps $\tau > 0$, par conséquent le dénominateur de (5.20) est positif.

Pour que la condition (5.20) soit satisfaite, il reste à démontrer que le numérateur de (5.20) est aussi positif, c'est-à-dire,

$$\tau\,\alpha_1\,(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t)) > y^d(t) - y(t) \tag{5.22}$$

- *Si $y^d(t) - y(t) > 0$, la remarque (12) implique que la condition (5.22) est satisfaite si τ et α_1 sont positifs, par conséquent le numérateur de (5.20) est positif.*

- *Si $y^d(t) - y(t) < 0$ cela signifie que $y^d(t) - x_1(t) < 0$, le numérateur (12) est positif si la condition suivante est satisfaite*

$$\tau\,\alpha_1\,(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t)) > \mid y^d(t) - y(t) \mid \tag{5.23}$$

De la remarque (12), on déduit que

$$x_2(L,\,t) > x_1(L,\,t) \tag{5.24}$$

et comme

$$x_1(L,\,t) \geqslant y^d(t) \tag{5.25}$$

alors

$$(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t)) > \mid y^d(t) - y(t) \mid \tag{5.26}$$

Maintenant, si on prend τ tel que $\tau\,\alpha_1 \geqslant 1$ c'est-à-dire $\tau \geqslant \frac{1}{\alpha_1}$, alors

$$\tau\,\alpha_1\,(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t)) \geqslant x_2(L,t) - x_1(L,t) \tag{5.27}$$

en tenant compte de la relation (5.26), on déduit que

$$\tau\,\alpha_1\,(x_2(L,\,t) - x_1(L,\,t)) > \mid y^d(t) - y(t) \mid \tag{5.28}$$

ce qui implique que le numérateur de (5.20) est positif.

Remarque 14 *La proposition (1), signifie que la condition de stabilité interne est liée au choix du paramètre de réglage τ de la loi de commande (5.17).*

5.6 Exemple d'application

Dans cette section, les performances de la loi de commande développée (5.17) sont évaluées dans le cas d'un échangeur de chaleur à courants parallèles (Figure 5.1) étudié dans le chapitre précédent.

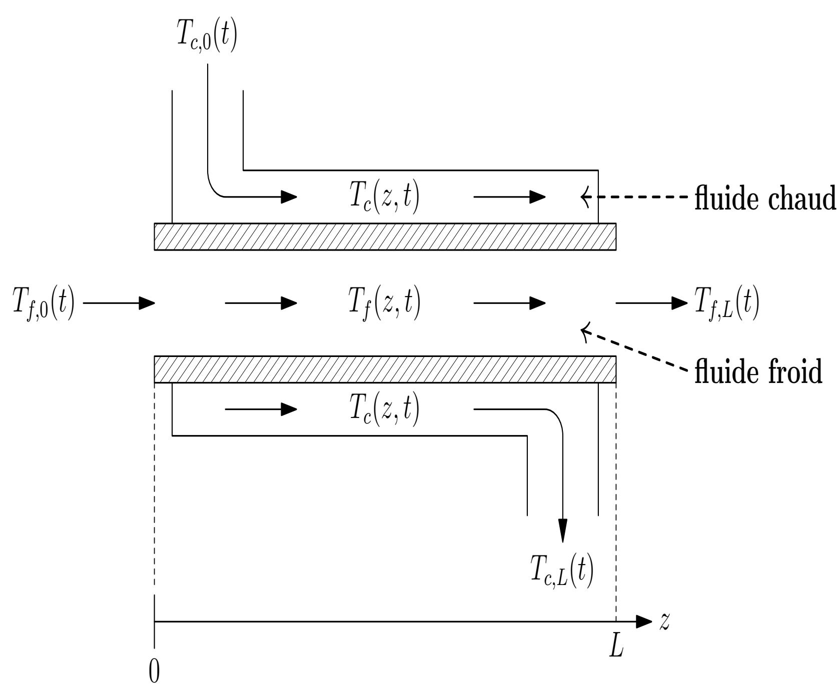

FIGURE 5.1: Échangeur de chaleur à courants parallèles.

Le comportement dynamique de l'échangeur de chaleur à courant parallèle est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{\partial T_f(z\,,\,t)}{\partial t} = -v_f\,\frac{\partial T_f(z\,,\,t)}{\partial z} + \alpha_f\,(T_c(z\,,\,t) - T_f(z\,,\,t)) \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial T_c(z\,,\,t)}{\partial t} = -v_c\,\frac{\partial T_c(z\,,\,t)}{\partial z} + \alpha_c\,(T_f(z\,,\,t) - T_c(z\,,\,t)) \tag{5.30}$$

$$T_f(0,t) = T_{f,0} \tag{5.31}$$

$$T_c(0,t) = T_{c,0} \tag{5.32}$$

$$T_f(z,0) = T_f^0(z) \tag{5.33}$$

$$T_c(z,0) = T_c^0(z) \tag{5.34}$$

L'objectif est de commander la température du fluide froid à la sortie de l'échangeur de chaleur définie comme suit

$$\begin{aligned} y(t) = &\quad T_f(z,t)\big|_{z=L} \\ = &\quad T_{f,L}(t) \end{aligned} \tag{5.35}$$

Comme il a été déjà mentionné, la température de l'échangeur de chaleur peut être contrôlée en manipulant deux grandeurs physiques, la température du fluide à la frontière ou le débit (vitesse) d'un fluide. En manipulant la vitesse v_f, les températures $T_{f,0}$, $T_{c,0}$ et la vitesse v_c représentent des perturbations qui affectent l'échangeur de chaleur.

Notons que, les deux hypothèses (1) et (2) sont satisfaites pour un échangeur de chaleur à courants parallèles puisque $T_f(z,t)$ est une fonction monotone et croissante par rapport à la variable de l'espace z. De plus, $\forall t \in [0,\infty)$, $T_c(z,\,t) - T_f(z,\,t) > 0$. Par conséquent, la méthodologie de commande proposée peut être appliquée.

En suivant le développement de la Section 5.4, le retour d'état qui réalise l'objectif de commande est :

$$v_f(t) = \frac{T_{f,L}(t) - T^d_{f,L}(t) + \tau\,\alpha_f\,(T_c(L,\,t) - T_f(L,\,t))}{\tau\,\left.\dfrac{\partial T_f(z,\,t)}{\partial z}\right|_{z=L}} \tag{5.36}$$

où $T^d_{f,L}$ est la température désirée du fluide froid à la sortie de l'échangeur.

Les performances du système en boucle fermée sont évaluées par simulation en utilisant la méthode des lignes [14] en supposant un nombre de points de discrétisation égal à 100. Les dérivées spatiales sont approximées en utilisant les différences finies. Les paramètres de l'échangeur de chaleur sont résumés dans le Tableau 5.1

paramètre	*valeur*
α_c	0.3 $[s^{-1}]$
α_f	0.2 $[s^{-1}]$
L	1.0 $[m]$

Table 5.1: Paramètres de l'échangeur de chaleur pour une simulation en boucle fermée.

Les température initiales $T^0_c(z)$ et $T^0_f(z)$ sont les profils spatiaux à l'état stationnaire obtenus en considérant les conditions aux limites et les vitesses indiquées dans le Tableau 5.2.

variable	*valeur*
v_c	10 $[m.s^{-1}]$
v_f	5 $[m.s^{-1}]$
$T_{c,0}$	80 $[^\circ C]$
$T_{f,0}$	25 $[^\circ C]$

Table 5.2: Vitesses et conditions aux frontières.

Le paramètre de réglage du régulateur τ qui satisfait la condition de la proposition 1 est pris égale à $6\,s$.

Dans les tests de simulation effectués, pour éviter des variations brusques de la sortie commandée $T_{f,L}(t)$, la consigne désirée $T^d_{f,L}(t)$ est lissée à l'aide d'un filtre du premier ordre qui fournit la consigne filtrée c'est-à-dire la trajectoire de référence $T^{df}_{f,L}(t)$ définie par l'équation différentielle suivante :

$$\tau_f \, \frac{dT^{df}_{f,L}(t)}{dt} + T^{df}_{f,L}(t) = T^{d}_{f,L}(t) \tag{5.37}$$

où τ_f est la constante de temps du filtre prise égale à 5 s. Ainsi, en considérant la consigne filtrée $T^{df}_{f,L}(t)$ au lieu de la consigne $T^{d}_{f,L}(t)$, la loi de commande (5.36) prend la forme suivante

$$v_f(t) = \frac{T_{f,L}(t) - T^{df}_{f,L}(t) + \tau \, \alpha_f \, (T_c(L,\, t) - T_f(L,\, t))}{\tau \, \left.\dfrac{\partial T_f(z,\, t)}{\partial z}\right|_{z=L}} \tag{5.38}$$

Remarque 15 *Selon la proposition 1, le choix de la constante du temps τ assure que les deux vitesses v_f et v_c ont le même signe (positif). Cela signifie physiquement que les fluides froid et chaud circulent dans le même sens, ce qui représente la caractéristique d'un échangeur de chaleur à courants parallèles.*

5.6.1 Résultats de simulation

Pour évaluer les performances de la loi de commande (5.38), deux tests de simulation sont considérés .

5.6.1.1 Poursuite de consigne

Pour le premier test de simulation, on considère le problème de poursuite de trajectoire. Afin d'évaluer les performances de la loi de commande (5.38) en poursuite de consigne, deux échelons $T^d_f(t) = 50C^\circ$ et $T^d_f(t) = 35C^\circ$ ont été imposés respectivement à $t = 5$ s et $t = 60$ s. La Figure 5.2 montre clairement que la température du fluide froid $T_{f,L}(t)$ suit parfaitement la consigne désirée imposée. On remarque que le suivi de trajectoire est réalisé avec une évolution douce de la vitesse v_f (Figure 5.3). Les profils de température sont également ceux d'un échangeur de chaleur à courants parallèles (Figure 5.4).

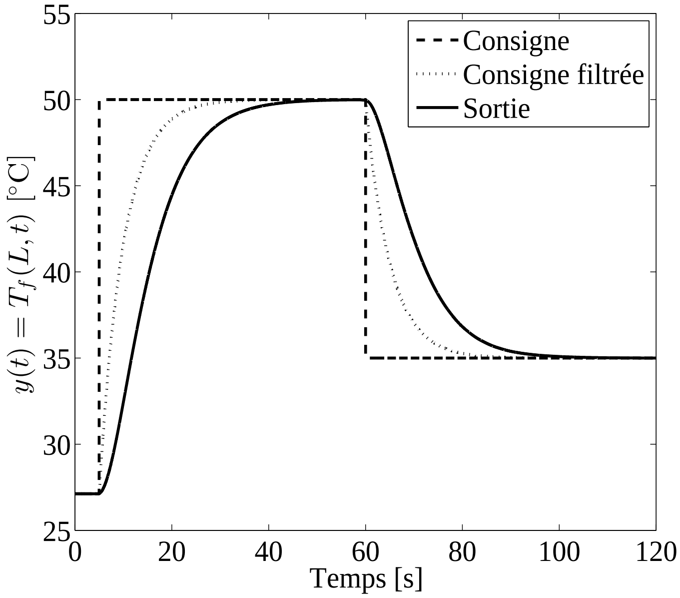

FIGURE 5.2: Poursuite de consigne : Évolution de la température du fluide froid $T_{f,L}(t)$.

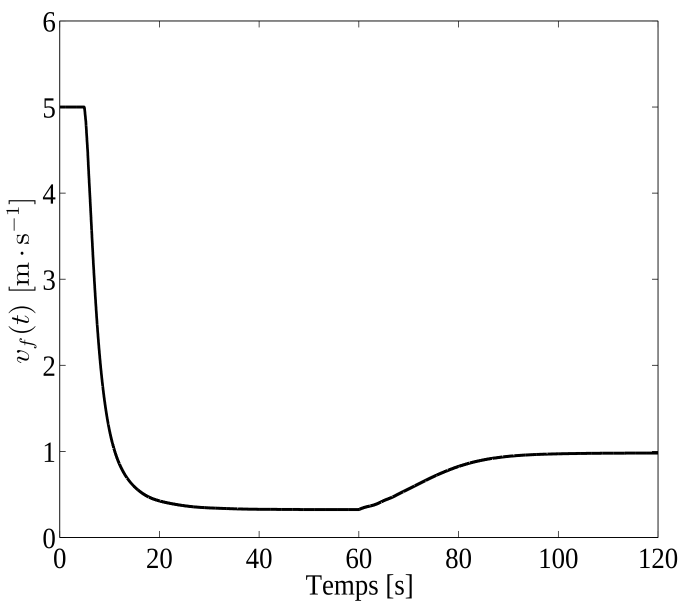

FIGURE 5.3: Poursuite de consigne : Évolution de la vitesse du fluide froid $v_f(t)$.

5.6.1.2 Rejet de perturbation

Le deuxième test considéré est le rejet de perturbation. Pour ce test, un changement de -60% de la vitesse du fluide chaud v_c est appliqué à $t = 10s$. La Figure 5.5 représente des variations de la température du fluide froid à certaines positions le long de l'échangeur de chaleur. On remarque clairement que l'effet de la perturbation observé à $z = 0m$ est

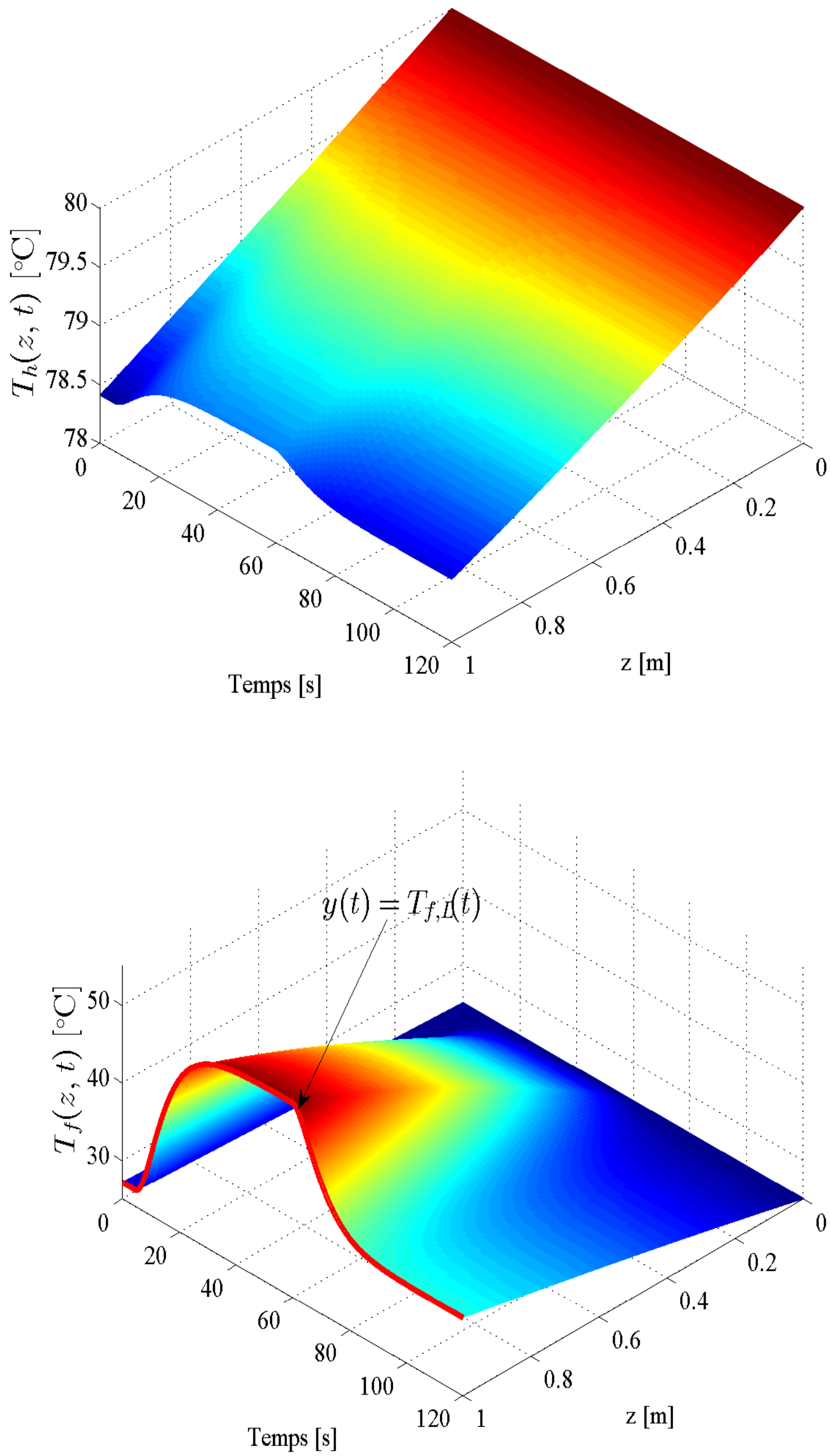

FIGURE 5.4: Poursuite de consigne : Profils des températures en 3D.

atténué et devient invisible à la sortie $z = 1m$ de l'échangeur de chaleur, c'est-à-dire sur la variable commandée. Cette atténuation est obtenue par une légère variation de la vitesse du fluide froid v_f comme le montre la Figure 5.6.

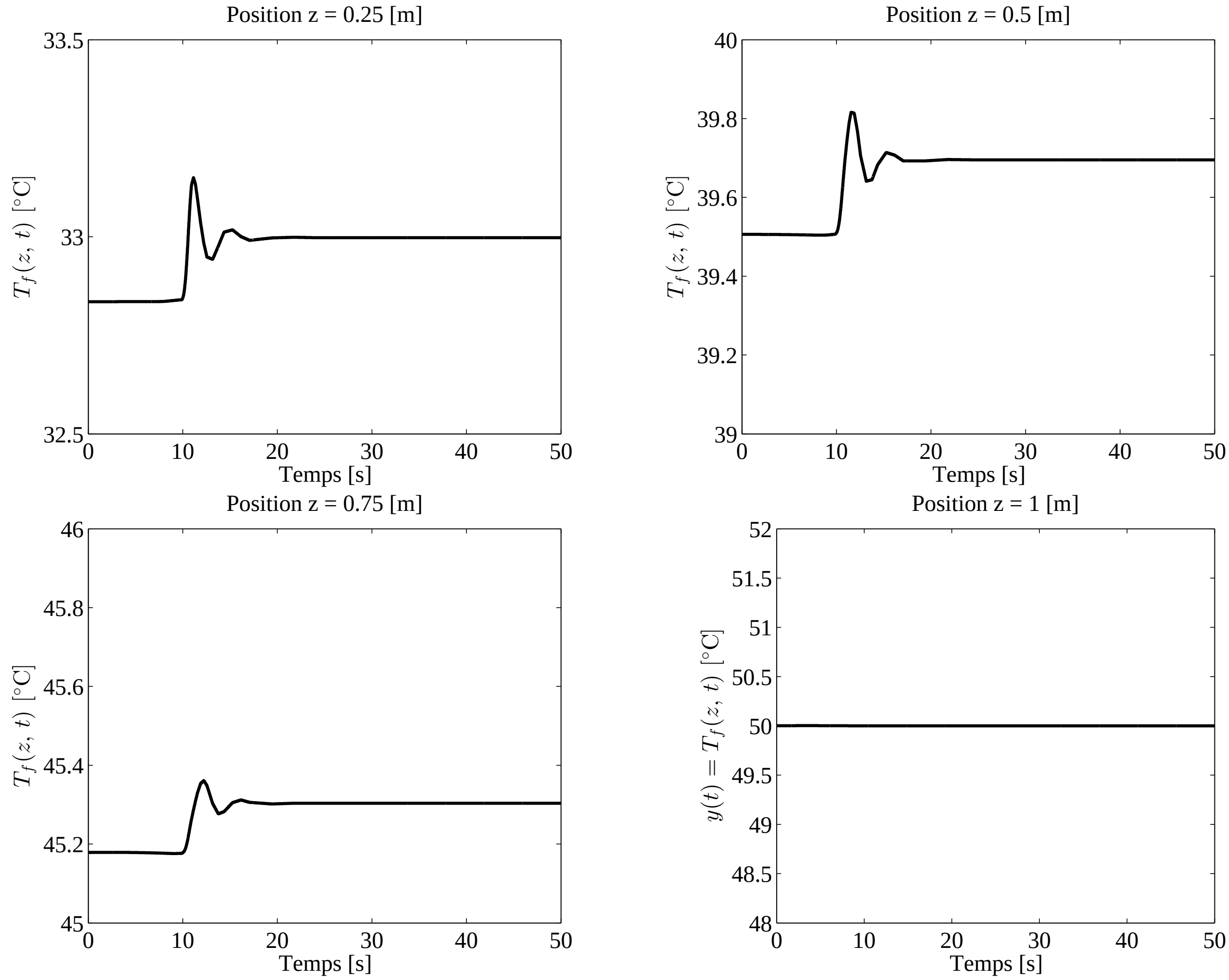

FIGURE 5.5: Rejet de perturbation : Effet de la perturbation $v_c(t)$ sur $T_f(z,t)$

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une loi de commande géométrique pour la commande d'un SPD hyperboliques modélisé par deux EDPs. La vitesse de convection est prise comme variable de commande pour contrôler une sortie à la frontière. Cette configuration de commande conduit à un SPD bilinéaire. Puis, en utilisant la notion d'indice caractéristique qui est une généralisation du concept de degré relatif aux systèmes de dimension infinie, une loi de commande de dimension infinie, qui assure à la fois le suivi de trajectoire et le rejet de perturbation est développée. Cette loi de commande transforme le système en boucle fermée en un système linéaire (2×2) à temps variant .

La condition de stabilité de la boucle fermée est déterminée en fonction de la stabilité des valeurs propres de l'opérateur spatial en boucle fermée.

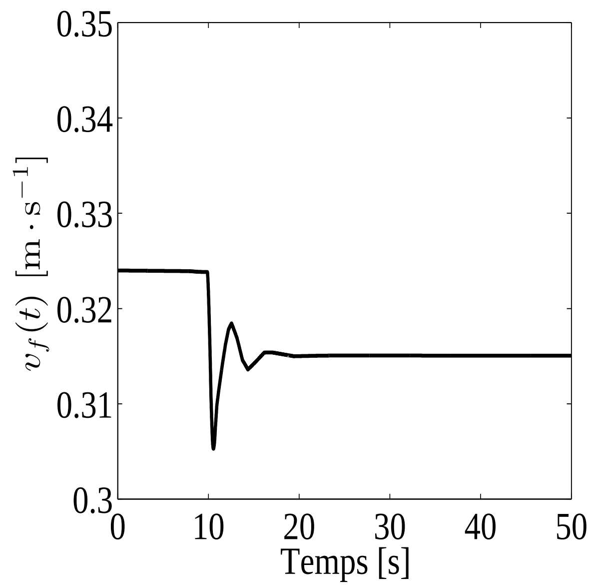

FIGURE 5.6: Rejet de perturbation : Évolution de la vitesse du fluide froid $v_f(t)$.

Les capacités de poursuite et de rejet de perturbations de la loi de commande développée sont évaluées par simulation numérique dans le cas d'un échangeur de chaleur à courants parallèles. Les résultats obtenus montrent que le retour d'état développé permet d'obtenir de bonnes performances en termes de suivi de trajectoire et de rejet de perturbations.

Conclusion générale

Un système bilinéaire de dimension infinie est caractérisé par un opérateur différentiel ayant une forme particulière. Ainsi, en utilisant la théorie des semi-groupes et particulièrement l'analyse spectrale, on peut conclure aisément sur la stabilité du système. L'objectif de la thèse consiste à exploiter cette propriété intéressante pour la conception d'une loi de commande géométrique permettant d'assurer la poursuite de consigne, le rejet de perturbation et la stabilité exponentielle en boucle fermée.

Ainsi, après avoir présenté des généralités sur les systèmes de dimension infinie et particulièrement les systèmes bilinéaires considérés dans le cadre de cette thèse, nous avons rappelé certaines notions de l'analyse fonctionnelle utilisées dans l'étude des propriétés fondamentales des SPDs. Puis, nous avons introduit les principaux résultats de l'analyse spectrale des opérateurs bornés. Ensuite, nous avons présenté les deux approches principales utilisées pour la conception d'une commande pour un SPD. La première approche est la pré-approximation qui consiste à déterminer un système de dimension finie qui approxime le comportement dynamique du SPD. La deuxième approche consiste à utiliser directement le modèle sous forme d'EDPs sans aucune approximation. Pour chaque approche, nous avons précisé ses avantages et ses inconvénients. Après, nous avons axé l'exposé sur le concept de stabilité d'un système dynamique en général. Nous avons commencé par un rappel des différents types de stabilité. Puis, nous avons présenté les techniques utilisées pour l'analyse de la stabilité d'un système de dimension infinie en l'occurrence la théorie des semi-groupes fortement continus, basée sur l'analyse spectrale, et la méthode directe de Lyapunov. Par la suite, nous avons montré que l'opérateur différentiel spatial d'un SPD décrit par deux EDPs hyperboliques linéaires couplées est caractérisé par un spectre dont les valeurs propres sont à parties réelles négatives. Ensuite, on s'est intéressé à la modélisation et l'étude par simulation du comportement dynamique d'un échangeur de chaleur à courants parallèles. Nous avons aussi étudié le problème de commandabilité de l'échangeur de chaleur, c'est-à-dire les températures atteignables. Puis, en utilisant le concept de l'indice caractéristique, nous avons développé une loi de commande de nature distribuée assurant une stabilité exponentielle en boucle fermée. La commande obtenue permet de contrôler la température du fluide froid, à la sortie de l'échangeur, en manipulant la vitesse d'écoulement du même fluide tout en rejetant les perturbations.

Les contributions principales de la thèse sont :

• Extension de la commande géométrique aux systèmes bilinéaires de dimension infinie,

• Utilisation de l'analyse spectrale pour l'analyse de la stabilité d'un système bilinéaire corrigé par une commande géométrique de nature distribuée,

• Application pour un échangeur de chaleur à courants parallèles.

L'étude menée dans le cadre de cette thèse, nous permet de tirer les conclusions suivantes :

• La commande géométrique permet de concevoir facilement, en utilisant le concept de l'indice caractéristique, des lois de commande de nature distribuée permettant d'améliorer davantage les performances d'un système,

• Pour un système bilinéaire de dimension infinie, le choix de la vitesse de la matière transportée comme variable à manipuler permet de préserver la bilinéarité du système en boucle fermée,

• Le système en boucle fermée est bilinéaire mais à paramètres variables dans le temps, ainsi l'utilisation de l'analyse spectrale permet de déduire facilement les conditions de stabilité en boucle fermée,

• La stabilité en boucle fermée peut être garantie par un réglage judicieux de la loi de commande distribuée,

• L'étude de la commandabilité est très importante pour définir l'espace des profiles atteignables.

Aussi, les résultats de simulation obtenus dans le cas de l'échangeur de chaleur démontrent clairement l'apport de la commande géométrique développée.

La commande des systèmes non linéaires à paramètres distribués, en utilisant l'approche de post-approximation, reste un domaine de recherche peu investi dans la littérature. En effet, pour les EDPs non linéaires, il est difficile d'établir une théorie générale comme dans le cas linéaire (théorie des semi-groupes). Néanmoins, les résultats de la thèse motivent d'investir la commande des systèmes non linéaires à paramètres distribués. On peut, par exemple, envisager les pistes suivantes :

• Exploitation de la théorie des semi-groupes, développée pour le cas linéaire, au cas non linéaire en utilisant des transformations tangentes. Ces dernières permettent une linéarisation globale du système à paramètres distribués,

• Extension de la description multi modèles aux systèmes non linéaires de dimension infinie en considérant des modèles linéaires valables au voisinage des profiles spatiaux,

• Utilisation de la description par modèles flous des systèmes non linéaires de dimension infinie,

• Ces dernières années, la théorie des semi-groupes non linéaires commence à émerger, alors il est intéressant d'exploiter les résultats disponibles pour résoudre des problèmes d'automatique des systèmes non linéaires de dimension infinie.

Bibliographie

[1] P. D. CHRISTOFIDES : *Nonlinear and robust control of PDE systems : methods and applications to transport-reaction processes*, Birkhauser, Boston, 2001.

[2] K. BARTECKI : *Modeling and analysis of Linear Hyperbolic Systems of Balance Laws*, Springer, Switzerland, 2016.

[3] B.A. OGUNMAIKE et W.H. RAY : *Process Dynamics, Modeling and Control*, Oxford University Press, New York, 1994.

[4] P. D. CHRISTOFIDES : Control of nonlinear distributed process systems : Recent developments and challenges, *AIChE Journal*, 47(3) : 514-518, 2001.

[5] P. D. CHRISTOFIDES et P. DAOUTIDIS : Feedback control of hyperbolic PDE systems, *AIChE Journal*, 42(11) : 3063-3308, 1996.

[6] E. BÜHLER et D. FRANKE : *Topics in identification and distributed parameter systems*, Springer Fachmedien Wiesbaden, Germany, 1980.

[7] P. K. GUNDEPUDI et J. C. FREIDLY : Velocity control of hyperbolic partial differential equation systems with single characterstic variable, *Chemical Engineering Science*, 53(24) : 4055-4072, 1998.

[8] C-Z XU et G. SALLET : Exponential Stability and Transfer Functions of Processes Governed by Symmetric Hyperbolic Systems, *Optimisation and Calculus of Variations*, 7 : 421-442, 2002.

[9] J. P. GARCIA-SANDOVAL, V. GONZALEZ-ALVAREZ et C. PELAYO-ORTIZ : Robust continuous velocity control of convective spatially distributed systems, *Chemical Engineering Science*, 63(17) : 4373-4385, 2008.

[10] J. P. BABARY et W. PELCZEWSKY : *Commande optimale des systèmes continus déterministes*, Masson, Paris, 1985.

[11] W. H. RAY : *Advanced Process Control, Butterworths*, Boston, 1989.

[12] M. J. BALAS : Reduced-Order Feedback Control of Distributed Parameter Systems via Singular Perturbation Methods, *Journal of Mathematical Analyse and Applications*, 87(1) : 28l-294, 1982.

[13] D. DOCHAIN, J. P. BABARY et N. TALI-MAAMAR : Modelling and Adaptive Control of Nonlinear Distributed Parameter Bioreactors via Orthogonal Collocation, *Automatica*, 28(5) : 873-883, 1992.

[14] A. VANDE WOUWER, Ph. SAUCEZ et W. E. SCHIESSER : *Adaptive method of lines*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2001.

[15] W. WU et S-Y. DING : Model predictive control of nonlinear distributed parameter systems using spatial neural-network architectures, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(19) : 7264-7273, 2008.

[16] K. ALHUMAIZI,R. HENDA et M. SOLIMAN : Numerical analysis of a reaction-diffusion-convection system, *Computers & chemical engineering*, 27(4) : 579-594, 2003.

[17] A. RACHID : *Systèmes de Régulation*, Masson, Paris, 1997.

[18] S. DUBLJEVIC, P. D. CHRISTOFIDES et I. G. KEVREKIDIS : Distributed nonlinear control of diffusion-reaction processes, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(2) : 133-156, 2004.

[19] A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Distributed Geometric Control of Wave Equation, *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) : 218-223, 2008.

[20] R. F. CURTAIN et H. ZWART : *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[21] A. EL JAI et M. AMOUROUX : *Automatique des Systèmes Distribués*, Hermès, Paris, 1990.

[22] A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Boundary control of a parallel-flow heat exchanger by input-output linearization, *Journal of Process Control*, 20(10) : 1161-1174, 2010.

[23] A. MAIDI et J.-P. CORRIOU : Distributed feedback design for systems governed by the wave equation, *International Journal of Control*, 84(8) : 1417-1429, 2011.

[24] J. BAKER et P. D. CHRISTOFIDES : Finite-dimensional approximation and control of nonlinear parabolic PDE systems, *International Journal of Control*, 73(5) : 439-456, 2000.

[25] M. A. DEMETRIOU et N. KAZANTZIS : Compensation of spatiotemporally varying disturbances in nonlinear transport processes via actuator scheduling, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(2) : 181-197, 2004.

[26] A. ARMAOU et P. D. CHRISTOFIDES : Wave suppression by nonlinear finite-dimensional control, *Chemical Engineering Science*, 55(14) : 2627-2640, 2000.

[27] C. C. CHEN et H. C. CHANG : Accelerated Disturbance Damping of an Unknown Distributed System by Nonlinear Feedback, *AIChE Journal*, 38(9) : 1461-1476, 1992.

[28] H. SIRA-RAMIREZ : Distributed Sliding Mode Control in Systems Described by Quasi-linear Partial Differential Equations, *Systems & Control Letters* 13 : 177-181, 1989.

[29] E. M. HANCZYC et A. PALAZOGLU : Sliding mode control of nonlinear distributed parameter chemical processes, *Industrial et Engineering Chemistry Research*, 34(2) : 557-566, 1995.

[30] D. L. BRIGGS et C. N. SHEN : Switching Analysis for Constrained Bilinear Distributed Parameter System With Applications, *Journal of Basic Engineering*, 91(2) : 277-283, 1969.

[31] Y. OU, C. XU, E. SCHUTER, T. C. LUCE, J. R. FERRON, M. L. WALKER et D. A. HUMPHREYS : Optimal Tracking Control of Current Profile in Tokamaks, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(2) : 432-441, 2011.

[32] C. XU et Y. OU, E. SCHUSTER : Sequential linear quadratic control of bilinear parabolic PDEs based on POD, *Automatica*, 47(2) : 418-426, 2011.

[33] A. MAIDI et J. -P. CORRIOU : Boundary control of nonlinear distributed parameter systems by input-output linearization, *18th IFAC World Congress 2011*, Milan, Italy, 28 August - 02 September , 10910-10915, 2011.

[34] A. MAIDI et J. -P. CORRIOU : Distributed control of nonlinear diffusion systems by input-output linearization, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(3) : 389-405, 2014.

[35] A. MAIDI et J. -P. CORRIOU : Boundary Geometric Control of a Nonlinear Diffusion System with Time-Dependent Spatial Domain, *Asian Journal of Control*, 18(4) : 1259-1268, 2016.

[36] H. SHANG, J. F. FORBES et M. GUAY : Feedback control of hyperbolic distributed parameter systems, *Chemical Engineering Science*, 60(4) : 969-980, 2005.

[37] E. AGGETOGIANNAKI et H. SARIMVEIS : Nonlinear model predictive control for distributed parameter systems using data driven artificial neural network models, *Computer and Chemical Engineering*, 32(6) : 1225-1237, 2008.

[38] D.H. GAY et W. H. RAY : Identification and Control of Distributed Parameter Systems by Means of the Singular Value Decomposition, *Chemical Engineering Science*, 50(10) : 1519-1539, 1995.

[39] G. ALLAIRE : *Analyse Numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[40] M. RENARDY et R. C. ROGERS : *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 1993.

[41] J. D. LOGAN : *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations,* John Wiley & Sons, New Jersey, 2008.

[42] A. M. WAZWAZ : *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Springer, Berlin, 2009.

[43] M. KUMAR et G. MISHRA : An Introduction to Numerical Methods for the Solutions of Partial Differential Equations, *Applied Mathematics*, 2(11) : 1327-1338, 2011.

[44] B. LUCQUIN : *Équations aux Dérivées partielles et Leurs Approximations*, Édition Ellipses, Paris, 2004.

[45] P. FAURRE et M. ROBIN : *Éléments d'automatique*, Dunod, Paris, 1990.

[46] A. EL JAI et A, J. PRITCHARD : *Capteurs et Actionneurs dans l'analyse des systèmes Distribués*, Masson, Pris, 1986.

[47] M.LIANG : Bilinear optimal control for a wave equation, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(1) : 45-68, 1999.

[48] A. ADDOU et A. BENBRIK : Existence and uniqueness of optimal control for a distributed-parameter bilinear system, *Journal of dynamical and control systems*, 8(2) : 141-152, 2002.

[49] P. LIN, Z. ZHOUB et H. GAO : Exact controllability of the parabolic system with bilinear control, *Applied Mathematics Letters*, 19(6) : 568-575, 2006.

[50] A. TSOULI, A. BOUTOULOUT et A. EL ALAMI : Constrained Feedback Stabilization for Bilinear Parabolic Systems, *Intelligent Control and Automation*, 6(3) : 103-115, 2015.

[51] E. H. ZERRIK et M. O. SIDI : Constrained regional control problem for distributed bilinear systems, *IET Control Theory & Applications*, 7(15) : 1914-1921, 2013.

[52] M. OUZAHRA : Stabilization with Decay Estimate for a Class of Distributed Bilinear Systems, European Journal of Control, 5(10) : 509-515, 2007.

[53] M. BOULERHCHA : Optimality Conditions of Distributed Bilinear Control Problem, International Journal of Math Analysis, 6(10) : 471-479, 2012.

[54] S. ELMETENNANI et T.M. LALEQ-KIRATI : Bilinear reduced order approximate model of parabolic distributed solar collectors, *Solar Energy*, 131 : 71-80, 2016.

[55] Y. KURODA, A. MAKINO et T. ISHIBASHI : Problem of Bilinear Control in Nonlinear Coupled Distributed Parameter Reactor Systems, *System Modeling and Optimization*, 285-292, 1982.

[56] J.P. RICHARD : *Mathématique pour les systèmes dynamiques*, Lavoisier, Paris, 2002.

[57] R. ADAMS : *Sobolev Spaces*, Academic Press, NY, USA, 1978.

[58] K. ATKINSON et W. HAN : *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, USA, 2001.

[59] K. J. ENGEL et R. NAGEL. *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer, New York, 2006.

[60] A. A. BALINSKY et W. D. EVANS : *Spectral analysis of relativistic operators*, World Scientific, 2011.

[61] E. BRIAN DAVIES : *Linear Operators and Their Spectra*, Cambridge University Press, New York, USA, 2007.

[62] T.KATO : *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980.

[63] D. L. RUSSELL : Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open questions. *SIAM Review*, 20(4) : 639-739, 1978.

[64] D. L. RUSSELL : *Distributed parameter systems : An overview, in Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS) : Control Systems*, Robotics And Automation, London : EOLSS Publishers, 2003.

[65] I. LASIECKA : Control of systems governed by partial differential equations : A historical perspective, *Proceedings of the* 34^{th} *IEEE Conference on Decision and Control*, 3 : 2792-2796, 1995.

[66] A VANDE WOUWER, P. SAUCEZ et W. E. SCHIESSER : Simulation of Distributed Parameter Systems Using a Matlab-Based Method of Lines Toolbox : Chemical Engineering Applications, *Industrial & Chemistry Research*, 43(14) : 3469-3477, 2004.

[67] W.F. AMES : *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1992.

[68] M. LI et P. D. CHRISTOFIDES : An input/output approach to the optimal transition control of a classe of distributed chemical reactors, *Chemical Engineering Science*, 62(11) : 2979-2988, 2007.

[69] B. L. JONES et E. C. KERRIGAN : When is the discretization of a spatially distributed system good enough for control ?, *Automatica*, 46(9) : 1462-1468, 2010.

[70] M. N. CONTOU-CARRERE et P. DAOUTIDIS : Model reduction and control of multi-scale reaction-convection processes, *Chemical engineering science*, 63(15) : 4012-4025, 2008.

[71] J. P. SORENSEN, S. B. JORGENSEN et K. CLEMENT : Fixed-bed reactor kalman filtering and optimal control-I Computational comparison of discrete vs continuous time formulation, *Chemical Engineering Science*, 35(5) : 1223-1230, 1980.

[72] A. ADROVER, G. CONTINILLO, S. CRESCITELLI, M. GIONA et L. RUSSO : Wavelet-like collocation method for finite-dimensional reduction of distributed systems, *Computers & Chemical Engineering*, 24(12), 2687-2703, 2000.

[73] A. ARMAOU et P. D. CHRISTOFIES : Dynamic optimization of dissipative PDE systems using empirical eigenfunctions, *Proceedings of the American Control Conference*, 2 : 1040-1048, 2002.

[74] G. M. KEPLER, H. T. TRAN et H. T. BANKS : Compensator control for chemical vapor deposition film growth using reduced-order design models, *IEEE transactions on semiconductor manufacturing*, 14(3) : 231-241, 2001.

[75] J. A. ATWELL et B. B. KING : Reduced order controllers for spatially distributed systems via proper orthogonal decomposition, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(1) : 128-151, 2004.

[76] A. A. MOGHADAM, I. AKSIKAS, S. DUBLJEVIC et J. FRASER FORBES : Infinite-dimentional LQ optimal control of a dimethyl ether (DME) catalytic distillation column, *Journal of Process Control*, 22(9) : 1655-1669, 2012.

[77] A. A. PATWARDHAN, G. T. WRIGHT et T. F. EDGAR : Nonlinear model-predictive control of distributed-parameter systems, *Chemical Engineering Science*, 47(4) : 721-735, 1992.

[78] M.A. ARBAOUI, L. VERNIERES-HASSIMI, D. SEGUIN et M.A. ABDELGHANI-IDRISSI : Counter-current tubular heat exchanger : modeling and adaptive predictive functional control, *Applied Thermal Engineering*, 27(13) : 2332-2338, 2007.

[79] Y. LOU, G, HU et P. D. CHRISTOFIDES : Model predictive control nonlinear stochastic partial diffirential equation with application to sputtering process, *AIChE Journal*, 54(8) : 2065-2081, 2008.

[80] M.A. ABDELGHANI-IDRISSI, M.A. ARBAOUI, L. ESTEL et J. RICHALET : Predictive functional control of a counter current heat exchanger using convexity property, *Chemical Engineering and Processing*, 40(5) : 449-457, 2001.

[81] D. DUGDALE et P. WEN : Controller Optimisation of a Tube Heat Exchanger, *Proceedings of the* 4^{th} *World Congress on Intelligent Contra1 and Automation*, 7803-7268, Shanghai, China, 2002.

[82] L. MINGHENG et P.D. CHRISTOFIDES : An input/output approach to the optimal transition control of a class of distributed chemical reactors, *Chemical Engineering Science*, 62(11) : 2979 - 2988, 2007.

[83] M. J. BALAS : Finite-Dimensional Control of Distributed Parameter Systems by Galerkin Approximation of Infinite Dimensional Controllers, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114(1) : 17-36, 1986.

[84] P. SOORAKSA et G. CHEN : Mathematical Modeling and Fuzzy Control of a Flexible-Link Robot Arm, *Mathematical and Computing Modeling*, 27(6) : 73-93, 1998.

[85] H-N. WU, J-W WANG et H-X LI : Fuzzy Boundary Control Design for a Class of Nonlinear Parabolic Distributed Parameter Systems, *IEEE Transactions. Fuzzy Systems*, 22(3) : 642-652, 2014.

[86] P. D. CHRISTOFIDES et P. DAOUTIDIS : Distributed output feedback control of two-time-scale hyperbolic PDE system, *Applied Mathematics and Computer Science*, 8(4) : 713-732, 1998.

[87] A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger, *Journal of Process Control*, 19(2) : 297-313, 2009.

[88] A. MAIDI, M. DIAF et J.-P. CORRIOU : Optimal linear PI fuzzy controller design of a heat exchanger,*Chemical Engineering and Processing*, 47(5) : 938-945, 2008.

[89] A. M. LYAPUNOV : The general problem of the stability of motion, Thèse de doctorat, 1892.

[90] H. K. KHALIL : *Nonlinear systems*, Prentic Hall, New Jersey, 1996.

[91] P. K. C. WANG : Asymptotic Stability of Distributed Parameter Systems with Feedback Controls, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1(1) : 46-54, 1966.

[92] J. ZABCZYK : *Mathematical control theory : an introduction*, Springer Science & Business Media, USA, 2009.

[93] S. SASTRY : *Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[94] M. J. BALAS : Stability of Distributed Parameter Systems with Finite-Dimensional Controller-Compensators Using Singular Perturbations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 99(1) : 80-108, 1984.

[95] R. E. BLODGETT : Stability Conditions for a Class of Distributed-Parameter Systems, *Journal of Basic Engineering*, 88(2) : 475-479, 1966.

[96] A. F. D'SOUZA : Lyapunov Stability of a Class of Distributed Parameter Systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 93(2) : 79-85, 1971.

[97] A. TCHOUSSO, T. BESSON et C.XU : Exponential Stability of Distributed Parameter Systems Governed by Symmetric Hyperbolic Partial Differential Equations Using Lyapunov's Second Method, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 15(2) : 403 - 425, 2009. .

[98] A. DIAGNE, G. BASTIN et J. M. CORON : Lyapunov exponential stability of 1-d linear hyperbolic systems of balance laws, *Automatica*, 48(1) : 109-114, 2012.

[99] J.M. CORON, B. D'ANDREA-NOVEL et G. BASTIN : Strict Lyapunov Function for Boundary Control of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *IEEE Transactions on Automatic control*, 52(1) : 2-11 ,2007.

[100] V. DOS SANTOS, G. BASTIND, J.M. CORON et B. D'ANDREA-NOVEL : Boundary control with integral action for hyperbolic systems of conservation laws : Stability and experiments, *Automatica*, 44(5) : 1310-1318, 2008.

[101] E. HILLE et R. S. PHILLIPS : *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, USA, 1957.

[102] E. HILLE : On Semi-Groups of Transformations in Hilbert Space, *National Academy of Sciences Stable*, 24(3) : 159-161, 1938.

[103] E. HILLE : *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, New York, 1948.

[104] K. YOSIDA : On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 1(1) : 15-21, 1948.

[105] R. S. PHILLIPS : The Adjoint Semi-group, *Pacific Journal of Mathematics*, 5(2) : 269-283, 1955.

[106] K. YOSIDA : *Lectures on Semi-group Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[107] W. FELLER : The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, *Annals of Mathematics*, 55(3) : 468-519, 1952.

[108] W. FELLER : Semi-goups of transformations in general weak topologies, *Annals of Mathematics*, 57(2) : 286-308, 1953.

[109] R. S. PHILLIPS : On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific Journal of Mathematics*, 2(3) : 393-415, 1952.

[110] R. F. CURTAIN A. J. PRITCHARD : *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, New York, USA, 1978.

[111] H. SANO : Observability and reachability for parallel-flow heat exchanger equations, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 24(1) : 137-147, 2007.

[112] A. PAZY : *Semigroups of linear operators et applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

[113] K. NAKASO, H. MITANI et J. FUKAI : Convection heat transfer in a shell-and-tube heat exchanger using sheet fins for effective utilization of energy , *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 82 : 403 - 425, 2015.

[114] S. A. CHEEN et K. MAN-HOE : Thermo-hydraulic analysis of multi-row cross-flow heat exchangers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 120 (1) : 534 - 539, 2018.

[115] L. XIA, J.A. De ABREU-GARCIA et T.T. Hartley : Modelling and simulation of a heat exchanger, *IEEE International Conference on Systems Engineering*, Dayton, USA, 1-3 August : 453-456, 1991.

[116] R. K. SHAH et D. P. SEKULIC : *Fundamentals of heat exchanger design*, John Wiley et Sons, New Jersey, 2003.

[117] P. WILDI-TREMBLAY et L. GOSSELIN : Minimizing shell-and-tube heat exchanger cost with genetic algorithms and considering maintenance, *International Journal of Enery Research*, 31(9) : 867 - 885, 2007.

[118] Y. A. CENGEL : *Heat Transfer, a Practical Approach*, McGraw-Hill, 2008.

[119] D. Q. KERN : *Process Heat Transfer*, McGRAW-HILL, New-York 1967.

[120] B. ROFFEL et B. BETLEM : *Process Dynamics and Control : Modeling for Control and Prediction*, John Wiley and Sons Ltd, Paris, 2006.

[121] J. LIETO : *Le génie chimique à l'usage des chimistes*, Lavoisier, Paris, 2004.

[122] R. W. SERTH et T. G. LESTINA : *Process Heat Transfer Principes, Applications and Rules of Thumb*, Academic Press, USA, 2007.

[123] E. CAO : Heat *Transfer in Process Engineering*, McGRAW-HILL, New-York 2009.

[124] T. KUPPAN : Heat Exchanger Design Handbook, CRC Press, Taylor and Francis group, Boca Raton, USA, 2000.

[125] T. KAKAC et H. LIU : Heat exchangers selection, rating and thermal design. CRC Press, USA, 2002.

[126] M. K. BASSIOUNY et H. MARTIN : Flow Distribution and Pressure Drop in Plate Heat Exchangers-I, *Chemical Engineering Science*, 39(4) : 693-700, 1984.

[127] M.A. AHMED, A.A. ISHAK et N.K. ISMAIL : New Hybrid Model Reference Adaptive Supervisory Fuzzy Logic Controller for Shell-and-Tube Heat Exchanger Temperature System, *IEEE Control and System Graduate Research Colloquium* , 2012.

[128] A. BONTEMPS : Échangeurs de chaleur - Définitions et principes généraux , *Techniques de l'ingénieur*, BE 9515 : 1-22, Paris, 2014.

[129] H. K. S. TAN : Continuous Cocurrent Processes in the Nonsteady State, *AIChE Journal*, 40(2) : 369-372, 1994.

[130] A. KARNO et S. AJIB : Effect of tube pitch on heat transfer in shell-and-tube heat exchangers : new simulation software, *Heat Mass Transfer*, 42(4) : 263 - 270, 2006.

[131] U. C. KAPALE et S. CHAND : Modeling for shell-side pressure drop for liquid flow in shell-and-tube heat exchanger, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(3-4) : 601 - 610, 2006.

[132] X.H. MA et H.A. PREISIG : On The Modelling ff Heat Exchangers for Process Control, *American Control Conference* ,24-26 Jun, Chicago,, USA, 1992.

[133] Y. S. N. MALLESWARARAO et M. CHIDAMBARAM : Non-linear controllers for a heat exchanger, *Journal of Process Control*, 2(1) : 17-21, 1992.

[134] G.M. SARABEEVI et L.M. BEEBI : Temperature control of shell and tube heat exchanger system using internal model controllers, International Conference on Next Generation Intelligent Systems (ICNGIS),1-3 Sept, Kottayam, India, 2016.

[135] S. POHJOLAINEN et I. LATTI : Robust controller for boundary control systems, *International Journal of Control*, 38(6) : 1189-1197, 1983.

[136] H. SANO : Output tracking control of a parallel-flow heat exchange process, *Systems and Control Letters*, 60(11) : 917-921, 2011.

[137] J. A. BURNS et B. KARAMER : Full Flux Models For Optimization and Control of Heat Exchangers, *American Control Conference*, July 1-3, Chicago, USA, 2015.

[138] S. ALOTAIBI et A. ALEBRAHIM : Geometric optimization of cross-flow heat exchanger based on dynamic contollability, *Thermal Science*, 12(3) : 75-84, 2008.

[139] C. H HUANG et C. Y YEH : An optimal control algorithm for entrance concurrent flow problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(6) : 1013-1027, 2003.

[140] L. ESTEL, F. BAGUI, M.A. ABDELGHANI-IDRISSI et C. THENARD : Distributed state estimation of a counter current heat exchanger under varying flow rate, *Computers and Chemical Engineering*, 24(1) : 53-60, 2000.

[141] X. XU et S. DUBLJEVICA : The state feedback servo-regulator for countercurrent heat-exchanger system modelled by system of hyperbolic PDEs , *European Journal of Control*, 29 : 51-61 2016.

[142] J.M. DOUGLAS : *Process Dynamics and Control*, Volume1, Prence-Hall, 1972.

[143] C.C. DELNERO, D. DREISIGMEYER, D.C. HITTLE, P.M. YOUNG, C.W. ANDERSON et M.L. ANDERSON : Exact solution to the governing PDE of a hot water-to-air finned tube cross-flow heat exchanger, *HVAC-R Research* ,10(1) : 21-31, 2004.

[144] J. -P. CORRIOU : *Commande des procédés*, Lavoisier, Paris, 2012.

[145] S. ALOTAIBI, M. SEN,B. GOODWINE et K. T. YANG : Controllability of cross-flow heat exchanger, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(5) : 913-924, 2004.

[146] E.I. VARGA, K.M. HANGOS et F. SZIGETI : Controllability and Observability of Heat Exchanger Networks in the Time-Varying Parameter Case, *Control Engineering Practice*, 3(10) : 1409-1419, 1995.

[147] S. NAKAGIRI et H. SANO : Boundary Reachability of a Parallel-Flow Three-Fluid Diffusive Heat Exchange Process , *Advances in Dynamical Systems and control*, 82 : 581-587, 2010.

[148] A. ZAVALA-RIO, C.M. ASTORGA-ZARAGOZA et O. HERNANDEZ-GONZALEZ : Bounded positive control for double-pipe heat exchangers, *Control Engineering Practice*, 17(1) : 136 - 145,

[149] W. E. SCHIESSER : *Numerical Method of Lines, Integration of Partial Differentiel equations*, Academic Press, Inc, California, 1991.

[150] J.D. ALVAREZ, L.J. YEBRA et M. BERENGUEL : Repetitive control of tubular heat exchangers, *Journal of Process Control*, 17(9) : 689-701, 2007.

[151] M.A. ABDELGHANI-IDRISSI, F. BAGUI et L. ESTEL : Analytical and experimental response time to flow rate step along a counter flow double pipe heat exchanger, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(19) : 3721-3730, 2001.

[152] T. KATAYAMAT, T.ITOHF, M.OGAWA et H. YAMAMOTOF : Optimal Tracking Control of a Heat Exchanger with Change in Load Condition, *Proceedings of the* 29^{th} *Conference on Decision and Control, Honululu*, Hawaï 1990.

[153] E. J. DAVISON, P. A. TAYLOR et J. D. WRIGHT : On the Application of Tuning Regulators to Control a Commercial Heat Exchanger, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3) : 361-375, 1980.

[154] R. PADHI et S. FARUQUE ALI : An account of chronological developments in control of distributed parameter systems, *Annual Reviews in Control*, 33(1) : 59-68, 2009.

[155] G. CHEN, I. LASCIEKA et J. ZHOU : *Control of Nonlinear Distributed Parameter System*, CRC Press, New York, 2001.

[156] M. OUZAHRA : Approximate and exact controllability of a reaction-diffusion equation governed by bilinear control, *European Journal of Control*, 32(11) : 32-38, 2016.

[157] N. HABRACHE, A. MAIDI et J.-P. CORRIOU : Feedback control of bilinear distributed parameter system by input-output linearization, *International Journal of Modeling, Identification and Control*, In press, 2018.

[158] F. Jr. AYRES : *Theory and Problems of Differential Equations*, Schaum's Outline, McGraw-Hill, New York, 1952.

[159] A. ISIDORI : *Nonlinear control systems*, Springer-Verlag, NewYork, 1995.

[160] C. BRIAT : *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems : Analysis, Observation, Filtering and Control*, Springer-Verlag, Berlin, 2015.