

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes  
de MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : **Automatique et Informatique Industrielle**

*Présenté par*  
**BENCHABANE LYDIA  
HALZOUN LILIA**

Mémoire dirigé par **Ahmed MAIDI**

**Thème**

**Commande adaptative d'un système à  
paramètres distribués : application à  
l'équation de la chaleur.**

*Mémoire soutenu publiquement le 26/06/2018 devant le jury composé de :*

**M<sup>r</sup> S. Djenoune**

Professeur de l'université Mouloud Mammeri, Président

**M<sup>r</sup> A. Maidi**

Professeur de l'université Mouloud Mammeri, Rapporteur

**M<sup>r</sup> . Melah**

Professeur de l'université Mouloud Mammeri, Examineur

**M<sup>r</sup> B. Salhi**

Maitre-assistant classe A l'université Mouloud Mammeri, Examineur

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes à paramètres distribués</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction	9
1.2 Définition d'un système à paramètres distribués	9
1.3 Description mathématique des systèmes à paramètres distribués	10
1.4 Conditions aux limites	11
1.4.1 Condition de Dirichlet	11
1.4.2 Condition de Neumann	12
1.4.3 Condition de Fourier	13
1.5 Classes de problèmes des systèmes à paramètres distribués	13
1.5.1 Problème dynamique	13
1.5.2 Problème stationnaire (statique)	14
1.6 Problème bien posé	14
1.7 Classification des systèmes à paramètres distribués	14
1.7.1 Elliptique	14
1.7.2 Parabolique	15
1.7.3 Hyperbolique	15
1.7.3.1 Équation de transport :	16
1.7.3.2 Équation des ondes :	16
1.8 Systèmes à paramètres distribués linéaires et non linéaires	16
1.9 Actionneurs et capteurs des systèmes à paramètres distribués	16
1.9.1 Capteurs	17
1.9.1.1 Type de capteurs des systèmes à paramètres distribués :	17
1.9.2 Actionneurs	17
1.10 Commande des systèmes à paramètres distribués	17
1.10.1 Commande répartie (distribuée)	17
1.10.2 Commande par zone	17
1.10.3 Commande ponctuelle	18
1.10.4 Commande par balayage	19
1.10.5 Commande aux frontières	19

1.11 Observateurs d'un système à paramètres distribués . . . . .	19
1.11.1 Observation répartie . . . . .	19
1.11.2 Observation ponctuelle . . . . .	20
1.11.3 Observation par balayage . . . . .	20
1.11.4 Observation par moyennage spatial . . . . .	20
1.12 Contrôlabilité exacte . . . . .	20
1.13 Contrôlabilité faible . . . . .	21
1.14 Observabilité exacte . . . . .	21
1.15 Observabilité faible . . . . .	21
1.16 Résolution des équations aux dérivées partielles . . . . .	21
1.17 Méthode des différences finies . . . . .	22
1.17.1 Principe . . . . .	22
1.17.2 Maillage . . . . .	23
1.18 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Commande adaptative des systèmes dynamiques</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1 Introduction . . . . .	24
2.2 Classe des paramètres des systèmes dynamiques . . . . .	24
2.2.1 Paramètre constant . . . . .	25
2.2.2 Paramètre variable . . . . .	25
2.2.2.1 Paramètre incertain . . . . .	25
2.2.2.2 Paramètre inconnu . . . . .	25
2.2.3 Classe des paramètres variables . . . . .	25
2.2.3.1 Paramètre variable prévisible . . . . .	25
2.2.3.2 Paramètre variable non prévisible . . . . .	25
2.3 Estimation paramétrique . . . . .	26
2.4 Commande adaptative . . . . .	26
2.4.1 Définition de la commande adaptative . . . . .	26
2.4.2 Types de commande adaptative . . . . .	26
2.4.3 Commande adaptative directe . . . . .	26
2.4.3.1 Définition . . . . .	26
2.4.4 Commande adaptative indirecte . . . . .	27
2.4.4.1 Définition . . . . .	27
2.4.5 Constitution de la commande adaptative . . . . .	28
2.4.6 Principe de la commande adaptative . . . . .	28
2.4.7 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	29
2.4.7.1 Point d'équilibre (définition) . . . . .	29
2.4.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	29
2.4.7.3 Stabilité asymptotique . . . . .	30

2.4.7.4	Stabilité exponentielle	31
2.4.7.5	Théorème de Lyapunov	31
2.4.7.6	Méthodes d'analyse de la stabilité	31
2.4.7.7	Stabilité selon le bilan énergétique	32
2.4.7.8	Choix de la fonction de Lyapunov	33
2.4.7.9	Fonction de Lyapunov	33
2.4.8	Commande adaptative basée sur la fonction de Lyapunov	33
2.4.9	Fonction semi définie et définie positive	33
2.5	Conclusion	34
<b>3</b>	<b>Modélisation et simulation de l'équation de la chaleur</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction	35
3.2	Définitions	35
3.2.1	Température	35
3.2.2	Champ de température	36
3.2.3	Flux de la chaleur	36
3.2.4	Flux de la chaleur échangé par conduction (loi de Fourier)	36
3.3	Transfert thermique de la chaleur	37
3.3.1	Transfert par conduction	38
3.3.2	Transfert par convection	39
3.3.3	Transfert par rayonnement	39
3.4	Modélisation de l'équation de la chaleur	40
3.4.0.1	Bilan thermique	42
3.4.1	Modèle de l'équation de la chaleur	43
3.5	Résolution numérique de l'équation de la chaleur	44
3.5.1	Méthode des lignes	44
3.5.2	Résolution de l'équation de la chaleur avec la méthode des lignes	45
3.5.2.1	Approximation des dérivées	45
3.6	Simulation du système en boucle ouverte	48
3.7	Interprétation des résultats de simulation	49
3.8	Conclusion	50
<b>4</b>	<b>Commande adaptative de l'équation de la chaleur</b>	<b>51</b>
4.1	Principe de la technique du Backstepping	51
4.2	fonction de Lyapunov	52
4.3	Calcul de la loi de commande	55
4.4	Simulation du système en boucle fermée	58
4.5	Interprétation des résultats	61
4.6	Conclusion	61

**Conclusion générale**

# Table des figures

1.1 Exemple de conditions de Dirichlet	12
1.2 la commande par zone.	18
1.3 Système unidimensionnel excité par un actionneur ponctuel	19
1.4 Contrôlabilité exacte.	20
1.5 Contrôlabilité faible.	21
2.1 Les étapes de la commande adaptative directe	26
2.2 Structure de la commande adaptative directe.	27
2.3 Les étapes de la commande adaptative indirecte	27
2.4 Structure générale de la commande adaptative indirecte	28
2.5 la stabilité d'un point d'équilibre.	29
2.6 Stabilité d'un point d'équilibre.	30
2.7 Stabilité asymptotique.	31
3.1 Circulation du flux de la chaleur.	37
3.2 Illustration des trois modes du transfert de la chaleur.	38
3.3 Exemple illustratif de la conduction thermique .	39
3.4 Conduction de la chaleur dans un élément de la barre métallique.	40
3.5 Sens d'échange de chaleur entre la barre et l'enveloppe.	41
3.6 La discrétisation de la barre métallique.	45
3.7 Simulation de l'équation de chaleur en boucle ouverte.	49
4.1 Evolution de l'état en fonction du temps et l'espace.	59
4.2 Evolution de l'état du système auxiliaire en fonction du temps et de l'espace.	60
4.3 Evolution de la commande $u(1)$ .	60
4.4 L'évolution du paramètre du système en fonction de temps.	61

# Indices

$t$	variable temps .
$x(t, z)$	vecteur d'état.
$\tau$	intervalle de temps.
$l$	longueur de la barre métallique.
$\Omega$	domaine géométrique (spatial).
$\partial\Omega$	frontière du domaine géométrique $\Omega$ .
$z$	variable géométrique (variable d'espace ).
$z'$	élément de $\partial\Omega$ .
$T$	la température.
$T_{ex}$	la température de l'extérieure.
$k$	caractéristique de la diffusion de la chaleur.
$q(z)$	la structure géométrique du système d'actionneur.
$p(z)$	la structure géométrique d'un système d'observation.
$u_e(t)$	signale d'entrée. $h$ : coefficient de convection.
$M$	matrice d'évolution.
$H$	matrice de commande.
$x_0(0, z)$	condition initiale.
$\nabla$	gradient.
$\nabla_0, \nabla_l$	gradient aux limites.
$c$	la chaleur massique
$\rho$	masse volumique.
$\Delta Q$	variation de la quantité de chaleur (en joules).
$\Delta T$	variation de la température(en $^{\circ}C$ ou $K$ ) .
$m$	masse de l'objet (en $Kg$ ).
$T_a$	température de environnement .
$h$	coefficient de convection.
$u_t$	la dérivée de $u$ par rapport au temps
$u_{zz}$	la dérivée de $u$ par rapport à $z^2$

# Introduction générale

Les systèmes industriels modernes s'appuient de plus en plus sur des techniques de commande avancées dont l'objectif est d'atteindre des niveaux de performances élevés. Concevoir un système asservi avec des bonnes performances nécessite que le correcteur de la boucle de commande soit toujours convenablement réglé, non seulement pour un point de fonctionnement particulier appelé point nominal, mais aussi pour tout un ensemble de points de fonctionnement le plus vaste possible autour du point nominal. Avec les développements successifs de l'automatique moderne, on s'est aperçu qu'un régulateur fixe ne pouvait pas toujours fournir un comportement acceptable du système en toute situation. En particulier, lorsque les processus à commander possèdent des paramètres variables ou incertains dans le temps.

Le contrôle adaptatif consiste à éliminer les perturbations structurelles (les variations des paramètres) agissant sur les performances du système de contrôle. Un système de contrôle est adaptatif, si on plus d'une contre réaction conventionnelle, il contient une boucle fermée de contrôle de son indice de performance. Une solution pour éliminer ces perturbation est apportée par l'approche appelée commande adaptative.

Les systèmes à paramètres distribués, sont décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) avec un minimum de deux variables indépendantes qui sont généralement, le temps et l'espace.

Le problème traité dans ce travail, concerne la commande adaptative des systèmes à paramètres distribués à paramètre incertains.

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande basée sur la technique du backstepping, dont la synthèse est basée sur la fonction de Lyapunov, pour stabiliser le système malgré les incertitudes paramétriques.

Le contenu du mémoire est structuré comme suit :

Le chapitre 1 est consacré pour définir les systèmes à paramètres distribués et quelques

généralités sur les équations aux dérivées partielles .

Le chapitre 2 présente des généralités sur la stabilité des systèmes dynamiques et des notions théoriques sur la commande adaptative.

Le chapitre 3 aborde la modélisation du phénomène de transfert de chaleur dans une tige métallique, la résolution avec la méthode des lignes de l'équation de la chaleur obtenue. Les résultats de simulation et leurs interprétations en boucle ouverte sont présentés à la fin du chapitre.

Dans le chapitre 4, nous allons présenter l'application de la commande adaptative basée sur la technique du backstepping pour stabiliser la distribution de la température dans une barre métallique en présence d'incertitudes paramétriques . On présente à la fin les résultats de simulation et leurs interprétations en boucle fermée.

On termine notre travail par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

### 1.1 Introduction

Les nombreux systèmes industriels et environnementaux impliquent des comportements liés au temps et à l'espace ou encore à d'autres facteurs.

Les systèmes dynamiques décrits par les équations différentielles ordinaires (ODE) sont donc inutilisables dans ces conditions, comme la modélisation de la propagation d'un polluant suivant la localisation spatiale, diffusion de la chaleur dans une tige...etc.

Il est nécessaire de considérer une deuxième classe de système prenant en compte la variable de l'espace  $z$  en plus de la variable temporelle. Cette classe de système fait appel à des équations aux dérivées partielles.

Ce chapitre a pour objectif l'explication de certaines notions de base liées aux systèmes à paramètres distribués et d'exposer aussi une des méthodes de simulation de ces systèmes.

### 1.2 Définition d'un système à paramètres distribués

Le système est dit à paramètre distribué (ou répartis) lorsqu'il évolue en fonction de la variable temps et d'espace.

De façon habituelle, les systèmes à paramètres distribués sont représentés par des équations aux dérivées partielles complétés avec des conditions aux limites et des conditions initiales.

### 1.3 Description mathématique des systèmes à paramètres distribués

Les systèmes à paramètres distribués décrits par des équations aux dérivées partielles sont de dimension infinie contrairement aux systèmes à paramètres localisés qui sont décrits par des équations différentielles ordinaires qui sont de dimension finie.

La dérivée partielle d'ordre le plus élevé représente l'ordre d'une équation aux dérivées partielles.

D'une manière générale, on considère la classe des systèmes à paramètres distribués définie par l'équation d'état [2] :

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{z})}{\partial t} = \mathbf{M}(\mathbf{x}(t, \mathbf{z})) + \mathbf{H}(t)\mathbf{u}(t, \mathbf{z}). \quad (1.1)$$

avec

$$\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$t \in \tau \subset \mathbb{R}^+,$$

$\Omega$  : domaine géométrique dans de  $\mathbb{R}^n$ ,

$\tau$  : intervalle de temps  $\tau = ]0, t_f[$ .

#### \* Condition initiale

L'instant où on commence à agir sur le processus est la condition imposées à l'instant  $t = 0$ .

$$x(0, z) = x_0.$$

#### \*Condition aux limites

Établissant les relations entre l'état et la commande aux limites (si elle existe)

$$L(x(t, z')) = u_l(t, z'). \quad (1.2)$$

$$z' \in \partial\Omega$$

#### Remarque

$M$  et  $L$  sont des opérateurs matriciels différentiels ne comportant que des dérivées par rapport à  $z$ ;  $u(t, z)$  et  $u_l(t, z')$  représentent les commandes du système.

Le vecteur d'état  $x(t, z)$  est défini comme suit :

$$x(t, z) = \begin{bmatrix} x_1(t, z) \\ x_2(t, z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t, z) \end{bmatrix}$$

## 1.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites indiquent ce qui se passe à la frontière ou au bord du domaine noté  $\partial\Omega$ . Cette condition dépend du contexte physique et expérimental.

On distingue trois types de conditions aux limites [14] :

### 1.4.1 Condition de Dirichlet

Elle signifie que la valeur de la fonction est donnée aux points de la frontière  $\partial\Omega$ . On retrouve ce type de condition dans le cas de l'écoulement d'un fluide contre une paroi immobile.

### Exemple illustratif

Soit une barre métallique de longueur  $l \in [0, l]$ .

Dans ce cas, les conditions de Dirichlet correspondent aux températures constantes sur les extrémités de la barre.

$$T(t, 0) = T_0. \tag{1.3}$$

$$T(t, l) = T_l. \tag{1.4}$$

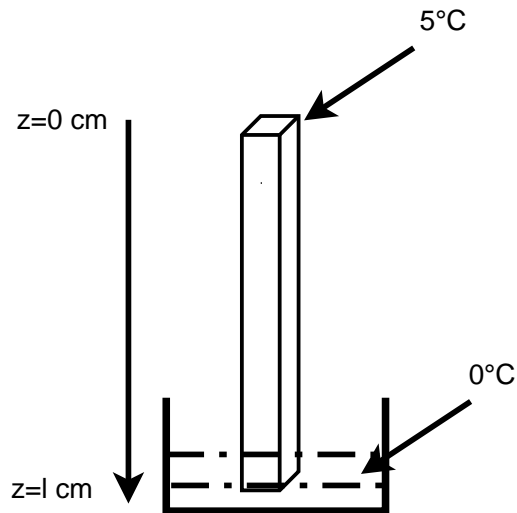


FIGURE 1.1 – Exemple de conditions de Dirichlet

D'après le schéma, les conditions de Dirichlet sont :

$$T(t, 0) = T_0(t) = 0^\circ\text{C}$$

$$T(t, l) = T_l(t) = 5^\circ\text{C}$$

### 1.4.2 Condition de Neumann

Elle signifie que la valeur de la fonction suivant la normale  $\eta$  à la frontière est donnée en chaque point de la frontière  $\partial\Omega$ .

Elle est utilisée dans exemple de l'écoulement irrationnel d'un fluide parfaitement incompressible.

L'inconvénient de cette condition est qu'elle nécessite l'existence d'une dérivée propre à la normale  $\eta$  sur le bord.

### Exemple

Considérons l'exemple d'une barre métallique. Dans ce cas, la condition correspond à imposer un flux de chaleur sur les bords de la barre, si on veut isoler le milieu, il suffit d'imposer un flux nul. Donc le gradient de la température  $\nabla(t)$  est fixe et les conditions aux limites sont données comme suit :

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nabla_0. \quad (1.5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \nabla_l. \quad (1.6)$$

$k$  : caractéristique de la diffusion de la chaleur (la conductivité).

### 1.4.3 Condition de Fourier

Elle regroupe les deux conditions précédentes.

Il est en effet possible d'avoir une condition de **Dirichlet** sur une partie  $\partial\Omega_1$  de  $\partial\Omega$  et une condition de **Neumann** sur son complément  $\partial\Omega_2$ .

### Exemple

Considérons une barre métallique. Dans ce cas on dispose de la température extérieure  $T_{ex}$ , on sait que le gradient de la température aux limites sera proportionnel à la différence  $(T - T_{ex})$ .

L'expression de la condition est comme suit :

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega} = K(T - T_{ex}). \quad (1.7)$$

$k$  : caractéristique de la diffusion de la chaleur (la conductivité),

$\partial\Omega$  : frontière du domaine  $\Omega$ .

## 1.5 Classes de problèmes des systèmes à paramètres distribués

Du point de vue résolution numérique des équations aux dérivés partielles, deux classes de problèmes doivent être distingués :

### 1.5.1 Problème dynamique

Il s'agit de déterminer  $x(t, z)$  dans un domaine  $\Omega$  sur certain intervalle de temps en fonction des conditions aux limites.

## 1.5.2 Problème stationnaire (statique)

Le temps n'intervient pas, il s'agit de déterminer  $x(z)$  en fonction des conditions aux limites. Cela correspond en général à un régime stationnaire atteint après un temps d'évolution assez long.

## 1.6 Problème bien posé

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine  $\Omega$  avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution. On dit que le problème est bien posé si on a :

- une existence de solution du problème,
- l'unicité de cette solution pour une condition initiale,
- une stabilité par rapport aux données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu, on dit que le problème est sensible aux données.

## 1.7 Classification des systèmes à paramètres distribués

La classification des systèmes à paramètres distribués est basée sur les équations aux dérivées partielles.

Dans notre cas, on s'intéressera aux équations aux dérivées partielles du 2<sup>ème</sup> ordre linéaires qui jouent un rôle fondamental dans les modèles dynamiques. On les classe selon la forme des coefficients figurant devant les dérivées partielles [2] du modèle suivant :

$$a(t, z) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2b(t, z) \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} + c(t, z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + d(t, z) \frac{\partial x}{\partial z} + e(t, z) \frac{\partial x}{\partial t} + f(t, z)x + g(t, z) = 0. \quad (1.8)$$

### 1.7.1 Elliptique

Si on a

$$b^2 - ac < 0$$

Alors le système est elliptique.

Ce type d'équations intervient très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Par exemple, l'équation de

Laplace :

$$-\nabla x = f \quad (1.9)$$

d'inconnue  $x(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  et de donnée  $f$ .

### 1.7.2 Parabolique

Si

$$b^2 - ac = 0$$

Alors le système est parabolique.

Ce type d'équations modélisent souvent l'évolution transitoire des phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion. Par exemple l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \nabla x = f \quad (1.10)$$

d'inconnue  $x(t, z)$ ;  $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ;  $t \geq 0$  et de donnée  $f$ .

### 1.7.3 Hyperbolique

Si

$$b^2 - ac > 0$$

Alors le système est hyperbolique.

Ce type d'équations modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation.

– On identifie deux prototypes pour cette classe

### 1.7.3.1 Équation de transport :

Cette équation es de la forme :

$$\frac{\partial x}{\partial t} + c \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \quad (1.11)$$

d'inconnue  $x(t, z)$ ;  $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ;  $t \geq 0$  et de donnée  $f$ .

### 1.7.3.2 Équation des ondes :

C'est un modèle simplifié pour la propagation des ondes acoustiques, sonores et électromagnétiques dans le vide. L'équation est donné comme suit :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta x = 0 \quad (1.12)$$

d'inconnue  $x(t, z)$ ;  $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ;  $t \geq 0$  et de donnée  $f$ .

## 1.8 Systèmes à paramètres distribués linéaires et non linéaires

On dit qu'un système à paramètre distribué est linéaire si la dépendance par rapport à la fonction inconnue de l'équation (1.8) et ces dérivées partielles est linéaire. De plus si  $g(t, z)$  est nul sur  $\Omega$ , le système à paramètre distribué est dit linéaire et homogène.

On dit qu'un système est non linéaire si la fonction inconnue de l'équation (1.8) dépend des termes non linéairement d'ordre plus élevé.

## 1.9 Actionneurs et capteurs des systèmes à paramètres distribués

Pour garantir un bon fonctionnement du système, il faut connaître l'état du système à chaque instant pour pouvoir agir en fonction de ces informations ; et pour cela on aura besoin des capteurs et des actionneurs.

## 1.9.1 Capteurs

Les capteurs permettent de recueillir les informations sur le système et son évolution.

### 1.9.1.1 Type de capteurs des systèmes à paramètres distribués :

- Capteur ponctuel : exemple de thermos-couple.
- Capteur dans des zones  $D_i \subset \Omega$ . Ce cas correspond à une lecture sur une partie  $D_i$ .
- Capteur suivant une ligne  $L_i \subset \Omega$  : exemple d'un mémoire pivotant.

## 1.9.2 Actionneurs

Les actionneurs permettent d'exciter le système (ou d'appliquer la commande).

## 1.10 Commande des systèmes à paramètres distribués

La commande d'un système se traduit par la détermination d'une loi  $u(t, z)$  qui permet de ramener le système à l'état désiré  $x^d$  dans le domaine  $\Omega$ .

$$x(t, z) = x^d(t, z) \quad (1.13)$$

On distingue plusieurs classes de commande :

### 1.10.1 Commande répartie (distribuée)

La loi de commande  $u(t, z)$  est définie sur l'intervalle  $\Omega \times \tau$ , elle peut être décrite comme suite :

$$u(t, z) = q(z) \times u_e(t) \quad (1.14)$$

$q(z)$  : caractérise la structure géométrique du système d'actionneur,

$u_e(t)$  : représente le signal d'entrée.

### 1.10.2 Commande par zone

Dans ce cas, le domaine spatial est décomposé de plusieurs zones. La loi de commande par zone est définie sur un sous ensemble  $\Omega \times \Omega_0$ . En général, si on applique  $u(t, z)$  sur  $p$  zones on peut l'écrire :

$$u(t, z) = \sum_{i=1}^p q_i(z) u_{ei}(t) \quad (1.15)$$

Exemple d'un système de diffusion avec une zone de chauffe importante (figure 1.2 )

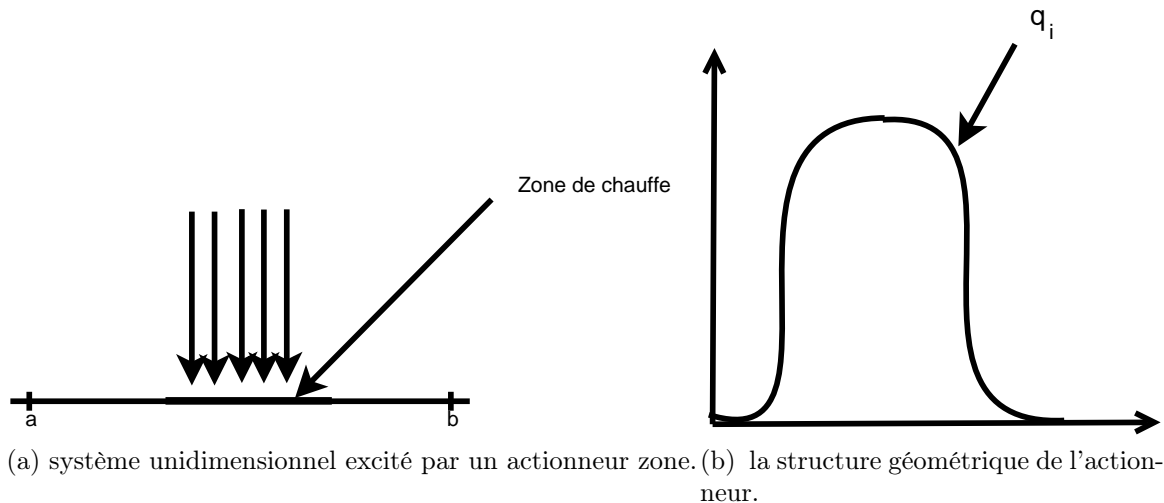


FIGURE 1.2 – la commande par zone.

### 1.10.3 Commande ponctuelle

La commande ponctuelle est un cas particulier de la commande par zone. Dans ce cas, la zone de commande se réduit à un point situé dans  $\Omega$  où la fonction  $q_i(z)$  est remplacée par des impulsions de Dirac. La loi de commande  $u(t, z)$  appliquée à  $p$  points du domaine  $\Omega$  est de la forme :

$$u(t, z) = \sum_{i=1}^p u_i(t, z) \delta(z - z_i) \quad (1.16)$$

Exemple d'un brûleur dans un système de diffusion Figure 1.3.



FIGURE 1.3 – Système unidimensionnel excité par un actionneur ponctuel

### 1.10.4 Commande par balayage

Dans ce cas, les zones et/ou les points où on applique la loi de commande  $u(t, z)$  est mobile dans le domaine  $\Omega$ .

- Ponctuel mobile : c'est un actionneur de type ponctuel dont la position varie avec le temps. C'est le cas d'un système excité par un rayon laser de direction variable.
- zone mobile : c'est un actionneur de type zone ou la commande varie avec le temps. C'est le cas d'un système diffusion avec zone de chauffage importante.

### 1.10.5 Commande aux frontières

La loi de commande est définie sur  $\tau \times \Omega$ .  $u(t, z)$  peut être sous la forme de zone ou ponctuelle (fixe ou à balayage).

Dans ce cas, les systèmes sont excités par des actionneurs de type zone ou ponctuel mais qui sont localisés sur la frontière du domaine  $\Omega$ . Ce cas de figure, correspond à certaines situations réelles. Exemple du four tournant et qui ne peut être exciter que par ses extrémités.

## 1.11 Observateurs d'un système à paramètres distribués

Les mesures sont de grande importance quand on cherche à appliquer une commande en boucle fermée.

### 1.11.1 Observation répartie

Le vecteur de sortie  $x(t, z)$  définie pour tout  $t \in \tau$  et tout  $z$  appartenant à un sous ensemble de  $\Omega$  est défini :

:

$$x(t, z) = p(z)u(t, z) \quad (1.17)$$

$p(z)$  caractérise la structure géométrique du système d'observation.

### 1.11.2 Observation ponctuelle

Dans ce cas, on définit la sortie comme un point du domaine  $\Omega$  ou de la frontière  $\partial\Omega$ . La sortie est sous la forme :

$$x(t, z) = \int_{\Omega} u(t, z)\delta(z - z_i)dz = u(t, z_i) \quad (1.18)$$

### 1.11.3 Observation par balayage

Dans ce cas, l'observation est obtenue en déplaçant les points de mesures à l'intérieur du domaine admissible.

### 1.11.4 Observation par moyennage spatial

La sortie du système est donnée comme suite :

$$x(z, t) = \int_{\Omega} u(t, z)c(z)dz \quad (1.19)$$

Où  $c(z)$  caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

## 1.12 Contrôlabilité exacte

C'est d'atteindre exactement l'état désiré fixé.

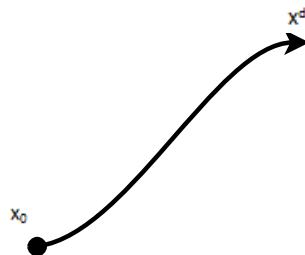


FIGURE 1.4 – Contrôlabilité exacte.

## 1.13 Contrôlabilité faible

C'est d'atteindre seulement un voisinage de cet état.

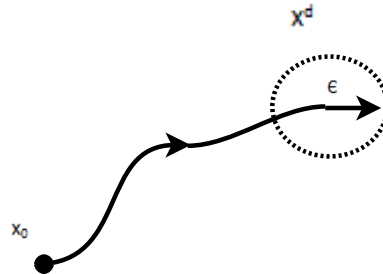


FIGURE 1.5 – Contrôlabilité faible.

## 1.14 Observabilité exacte

C'est de pouvoir observer exactement le système.

## 1.15 Observabilité faible

C'est d'observer approximativement l'état du système.

## 1.16 Résolution des équations aux dérivées partielles

Les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe une infinité de méthode de discrétisation d'une équation. Nous ne pouvons jamais les énumérer toutes, mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont :

1. la méthode des différences finies.
2. la méthode des éléments finis.
3. la méthode des volumes finis.
4. la méthode des caractéristiques.

Dans ce qui suit, on s'intéressera à la méthode des différences finies. Cette méthode la plus utilisée et simple à implémenter.

## 1.17 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies permet de traiter facilement des problèmes en une, deux ou trois dimension spatiales pour des domaines à géométrie simple et avec des propriétés (exemples : densité, vitesse) qui varient lentement dans le domaine de définition  $\Omega$ .

Les problèmes du type EDP sont dimension infinie (il s'agit de déterminer toute une fonction). Si l'on veut calculer la solution numériquement, il faut se ramener à un problème en dimension finie. Dans ce cas, on distingue globalement deux types de discrétisation :

### 1) Discrétisation totale

La discrétisation est totale, C'est à dire le temps et l'espace sont discrétisés . On obtient un modèle d'équations aux récurrences. Dans ce cas la solution est très précise et donc plus proche du système initial.

### 2) Semi-discrétisation

La discrétisation se fait seulement sur l'un des domaines, c'est à dire seul l'espace ou le temps est décomposé. On obtient un système d'équations différentielles ordinaires, l'ordre du système augmente avec le nombre de point de discrétisation et devient plus proche du système initial. Cette méthode est moins précise que la première mais elle est plus pratique.

#### 1.17.1 Principe

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées par rapport à une variable au moyen de développement de Taylor.

Soit  $f(t, z)$  une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(t, z + \Delta z) - f(t, z)}{\Delta z}$$

Si  $\Delta z$  est petit, un développement de Taylor de  $f(t, z + \Delta z)$  de 2ème ordre au voisinage de  $z$  donne :

$$f(t, z + \Delta z) = f(t, z) + \Delta z \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} + \frac{\Delta z^2}{2!} \frac{\partial^2 f(t, z)}{\partial z^2}$$

D'où l'approximation de la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f(t, z + \Delta z) - f(t, z)}{\Delta z}$$

### 1.17.2 Maillage

On appelle un maillage un ensemble de points du domaine  $\Omega$  sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies.

Pas de maillage : c'est la distance entre deux points successifs du maillage. En 1 dimension cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut même être judicieux de ne pas le fixer. Si le pas tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude.

## 1.18 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé quelques notions de bases liées aux systèmes à paramètres distribués qui se résument dans les points suivants :

- la description mathématique et classification des systèmes à paramètres distribués,
- les différentes commandes et observations; ainsi que les actionneurs et capteurs adaptés pour ce type de système,
- la méthode aux différences finies utilisée pour la résolution des systèmes à paramètres distribués.

# Chapitre 2

## Commande adaptative des systèmes dynamiques

### 2.1 Introduction

La commande adaptative est définie comme une commande permettant au régulateur de s'adapter de lui-même aux changements du processus. En conséquence, l'objectif de la commande adaptative est l'ajustement automatique en ligne des régulateurs des boucles de commande, afin de réaliser ou maintenir de façon identique un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander varient dans le temps.

La multitude des approches utilisées pour l'analyse des systèmes non linéaires, reflète la grande diversité des non-linéarités que l'on peut y rencontrer. Les méthodes approximatives, très largement utilisées, ne sont d'aucune utilité en présence de non linéarités essentielles, c'est à dire qui ne peuvent être négligées. Dans de telles situations, des méthodes exactes, telle que la deuxième méthode de Lyapunov, constituent des outils incontournables.

Dans ce chapitre, nous allons essayer de donner les principes généraux de la commande adaptative et aussi d'aborder la notions de stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov .

### 2.2 Classe des paramètres des systèmes dynamiques

Un système dynamique est caractérisé par un ensemble de paramètres. On distingue deux classes de paramètres :

### 2.2.1 Paramètre constant

Les valeurs des paramètres sont constantes (ne change pas en fonction du temps).  
On les note  $\alpha$ .

### 2.2.2 Paramètre variable

Les paramètres variables sont liés aux perturbations internes par exemple de la valeur de la résistance qui change en fonction de la température. Dans cette classe, on distingue deux types de paramètres :

#### 2.2.2.1 Paramètre incertain

Les valeurs des paramètres incertains sont constantes mais inconnues. Dans ce cas, les valeurs des paramètres sont bornées.

On les note

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$$

#### 2.2.2.2 Paramètre inconnu

Les valeurs des paramètres inconnus dépendent de la variable du temps.

On les note

$$\alpha(t)_{min} \leq \alpha(t) \leq \alpha(t)_{max}$$

### 2.2.3 Classe des paramètres variables

#### 2.2.3.1 Paramètre variable prévisible

Dans ce cas, on peut prédire toutes les valeurs possibles de ce paramètre.

#### 2.2.3.2 Paramètre variable non prévisible

Si les valeurs du paramètre constituent un intervalle borné et entre une valeur et une autre on dispose d'une infinité de valeurs, par conséquent on peut pas prédire la valeur possible de ce paramètre (exemple d'un potentiomètre).

## 2.3 Estimation paramétrique

Les méthodes d'estimation paramétriques ont pour principe d'estimer les paramètres du modèle. On entend par paramètres les constantes physiques du système (masse, résistance, ...etc.) ou un ensemble de plusieurs paramètres physiques. Don une correspondance unique doit exister entre les paramètres du modèle et les paramètres du système.

## 2.4 Commande adaptative

### 2.4.1 Définition de la commande adaptative

La commande adaptative est une commande dans laquelle le contrôleur est automatiquement ajustable, à fin de compenser des changements dans le procédé et/ou son environnement.

La commande adaptative présente un meilleur choix dans le cas d'un systèmes à forte perturbation, d'une incertitude du modèle ou bien de paramètres à forte variation dans le temps.

### 2.4.2 Types de commande adaptative

### 2.4.3 Commande adaptative directe

#### 2.4.3.1 Définition

Les paramètres du contrôleur sont directement estimés à partir des équations mathématiques. Autrement dit, cette méthode consiste à calculer les paramètres du contrôleur, mais sans estimation des paramètres du procédé, donc l'estimation paramétrique se fait en une seule étape, ce qui justifie la terminologie de la commande directe.

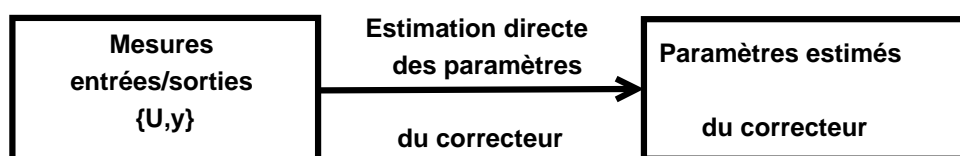


FIGURE 2.1 – Les étapes de la commande adaptative directe

La structure générale de la commande adaptative directe est donnée par la Figure 2.2.

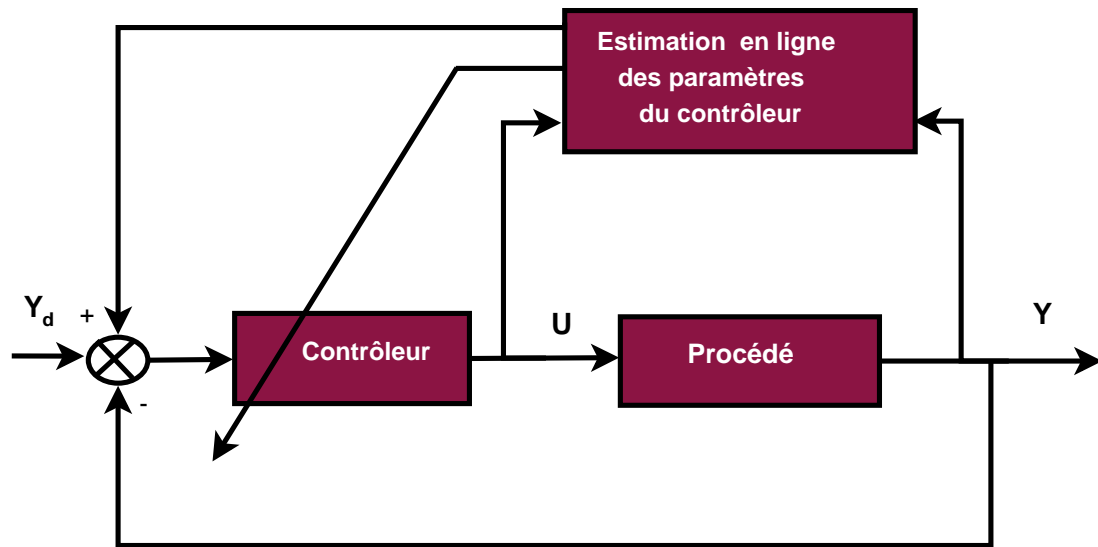


FIGURE 2.2 – Structure de la commande adaptative directe.

## 2.4.4 Commande adaptative indirecte

### 2.4.4.1 Définition

Les paramètres du procédé sont estimés en ligne pour être ensuite utilisés dans le calcul des paramètres du correcteur.

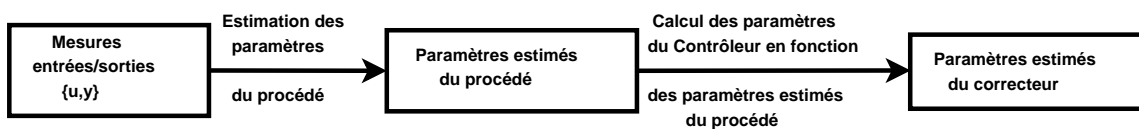


FIGURE 2.3 – Les étapes de la commande adaptative indirecte

parmi les méthode utilisées pour l'estimation paramétrique on peut citer :

- les moindres carrés récurrents.

La stratégie de commande adaptative indirecte est donnée par la Figure 2.4.

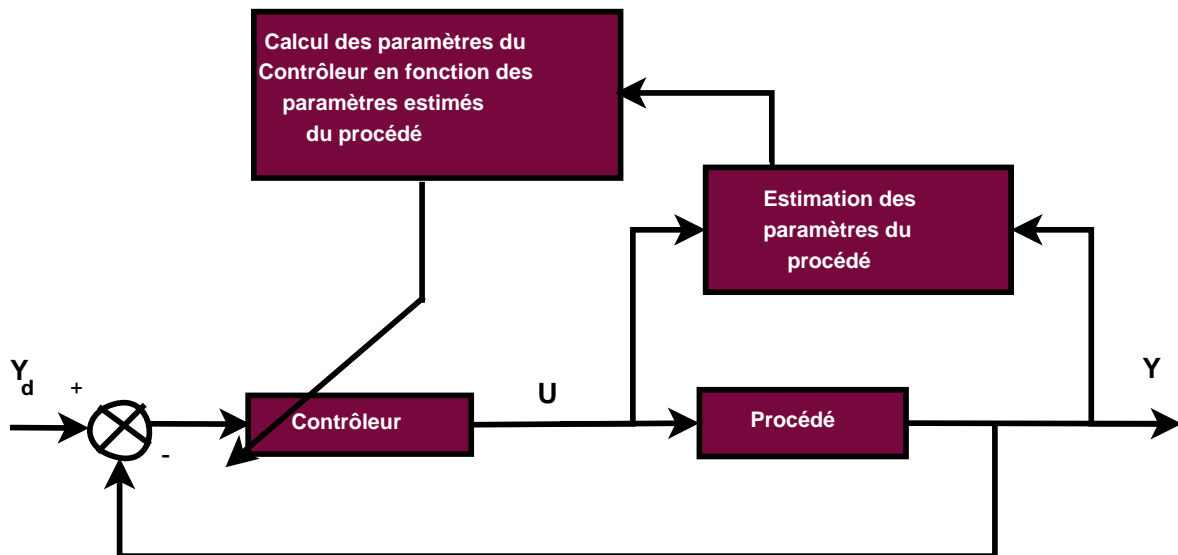


FIGURE 2.4 – Structure générale de la commande adaptative indirecte

### 2.4.5 Constitution de la commande adaptative

Un système de commande adaptative contient deux boucles :

- **la boucle de régulation** : permet de garantir les performances du système.
- **la boucle d'adaptation** : permet l'adaptation (ajustement automatique) des paramètres du correcteur  $\theta_c$ .

### 2.4.6 Principe de la commande adaptative

Un système à commande adaptative permet d'estimer la différence entre les indices de performance mesurés et les indices de performance désirés. Cette différence est appliquée à un mécanisme d'adaptation paramétrique qui adapte (modifie) les paramètres du contrôleur ou agit directement sur les signaux de commandes à fin de modifier d'une manière appropriée les performances du système.

### Remarque

L'indice de performance mesuré du système est une mesure des performances du système. Par exemple le facteur d'amortissement pour les systèmes de 2<sup>ème</sup> ordre.

## 2.4.7 Stabilité au sens de Lyapunov

L'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est très complexe. L'approche de Lyapunov est la plus utilisée pour l'étude de ce problème.

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour tout système décrit par des équations différentielles linéaires ou non-linéaires.

### 2.4.7.1 Point d'équilibre (définition)

#### – Physiquement

Un système est en équilibre quand il conserve son état en absence des forces externes.

#### – Mathématiquement

La variation de son état est nulle ( $\frac{\partial x}{\partial t} = \mathbf{0}$ ).

Dans le cas d'un système linéaire, le point d'équilibre représente la solution de l'équation :

$$\dot{x} = Ax$$

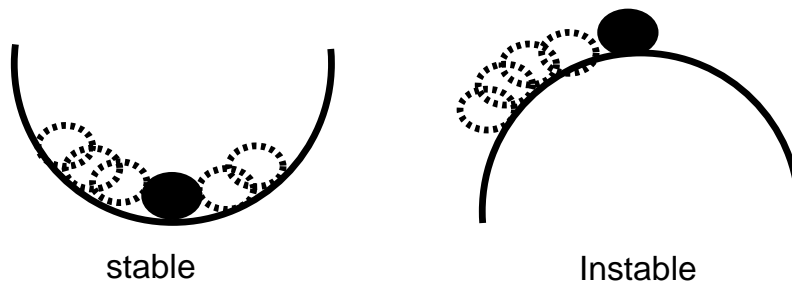


FIGURE 2.5 – la stabilité d'un point d'équilibre.

### 2.4.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système  $\dot{x} = Ax$  dont l'état est défini par le vecteur  $x$  qui possède un point d'équilibre  $x_e$ .

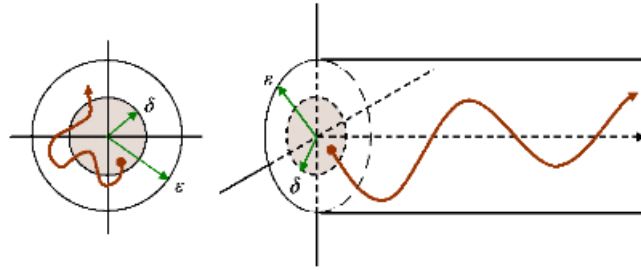


FIGURE 2.6 – Stabilité d'un point d'équilibre.

Le point d'équilibre  $x_e$  est stable au sens de Lyapunov si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \quad (2.1)$$

et pour toutes les valeurs  $t > t_0$

$$\|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad (2.2)$$

Autrement dit, les solutions  $x(t)$  doivent rester à l'intérieur de la région délimitée par  $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$ , c'est-à-dire rester dans un "tube" de rayon  $\varepsilon$  autour de la trajectoire  $x(t) = x_e$ .

Dans le cas contraire, on dit que le point d'équilibre est instable, s'il existe au moins un  $\varepsilon$  pour lequel on trouve pas un  $\delta$  qui satisfait l'inégalité (2.1).

### 2.4.7.3 Stabilité asymptotique

Si  $x(t)$  tend vers le point d'équilibre  $x_e = 0$  pour  $t$  infini. Donc  $x_e$  est asymptotiquement stable s'il existe  $\delta$  tel que :

$$\|x(t_0) - x_e\|^2 < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$$

Autrement dit, n'importe quelle trajectoire  $x(t)$  (issue d'un état initial  $x(t_0)$  appartenant à ce domaine) tend vers  $x_e$  quand  $t$  tend vers  $\infty$ .

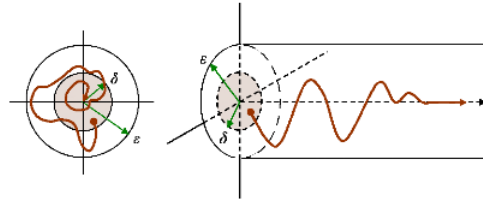


FIGURE 2.7 – Stabilité asymptotique.

#### 2.4.7.4 Stabilité exponentielle

Un point d'équilibre  $x_e$  est exponentiellement stable s'il existe  $\delta > 0$  et  $\lambda > 0$  telle que  $\forall t > 0$

$$\|x(t) - x_e\| \leq \delta \|x(t_0) - x_e\| e^{(-\lambda t)}$$

### Remarque

Un point d'équilibre est dit globalement asymptotiquement ou exponentiellement stable s'il est asymptotiquement ou exponentiellement stable à partir de n'importe quel état initial.

#### 2.4.7.5 Théorème de Lyapunov

- si le système linéarisé est stable (les valeurs propres sont à partie réelle négative), alors le point d'équilibre du système initial est asymptotiquement stable.
- si le système linéarisé est instable (si au moins une des valeurs propres sont à partie réelle positive), alors le point d'équilibre est instable.

#### 2.4.7.6 Méthodes d'analyse de la stabilité

On distingue deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité :

- **Méthode indirecte «la linéarisation».**

La première méthode de Lyapunov se base sur l'analyse du comportement du système linéarisé autour de son point d'équilibre. Plus précisément, on examine les valeurs propres du système de la matrice Jacobienne (la matrice d'état)  $A$  évaluée au point d'équilibre  $x_e$ . Cette méthode concerne la stabilité locale autour d'un point d'équilibre.

La première méthode est simple à appliquer mais étant donné que cette méthode repose sur une linéarisation du système, sa validité est alors limitée à un certain voisinage du point d'équilibre. Lorsque la linéarisation du système n'est pas possible ou lorsqu'on veut analyser le système sans négliger la non linéarité, on doit faire appel à la méthode directe.

– **Méthode directe « fonction de Lyapunov »**

Dans ce cas, l'idée de Lyapunov pour étudier la stabilité d'un système donné, consiste à examiner la variation d'une seule fonction scalaire (appelée la fonction de Lyapunov) dépendant de l'énergie totale du système. Autrement dit, cette méthode est basée sur la définition d'une fonction de Lyapunov décroissante le long des trajectoires du système.

#### 2.4.7.7 Stabilité selon le bilan énergétique

Soit  $E$  l'énergie du système qui comporte l'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie potentielle  $E_p$  telle que :

$$E = E_c + E_p \quad (2.3)$$

1. Le système est stable lorsque :

- l'énergie  $E$  diminue jusqu'au minimum qui représente point d'équilibre.
- l'énergie  $E$  est conservée et elle est minimale au point d'équilibre .

2. Le système instable lorsque :

- l'énergie augmente.
- l'énergie  $E$  est conservée mais elle ne correspond pas au minimum à l'équilibre.

### 2.4.7.8 Choix de la fonction de Lyapunov

Le choix de la fonction de Lyapunov n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe à ce jour quant au choix d'une telle fonction.

Un bon choix de la fonction de Lyapunov permet de conclure sur la stabilité dans une large plage de fonctionnement.

### 2.4.7.9 Fonction de Lyapunov

$V(x)$  est une fonction de Lyapunov si elle vérifie les propriétés suivantes :

1.  $V(x)$  est définie positive c'est à dire :  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0, \forall x, x \neq 0$
2.  $V(x) \in C^1$  dans  $\mathbb{R}^N$ .
3.  $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$ .

$C^1$  : espace des fonctions continues et dérivables au moins une fois.

## 2.4.8 Commande adaptative basée sur la fonction de Lyapunov

L'idée principale de l'utilisation de la fonction de Lyapunov dans la commande adaptative consiste à calculer :

- une loi de commande : qui permet de répondre aux spécifications désirées du système à commander.
- une loi d'adaptation des paramètres du correcteur qui détermine la dynamique d'estimation des paramètres inconnus. Elle doit garantir la convergence vers leurs valeurs réelles, sans affecter le bon fonctionnement, surtout la stabilité de l'ensemble.
- une fonction de Lyapunov : qui permet de déterminer les lois d'adaptations qui garantissent la convergence et la stabilité de la structure commande adaptative.

### 2.4.9 Fonction semi définie et définie positive

1. Une fonction  $V$  est dite semi définie positive (respectivement semi définie négative), s'il existe un voisinage  $V$  de 0 tel que  $V(0) = 0$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $V(x) \geq 0$  (respectivement  $V(x) \leq 0$ )

2. Une fonction  $V$  définie positive (respectivement définie négative), s'il existe un voisinage  $V$  de 0 tel que  $V(0) \neq 0$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $V(x) > 0$  (respectivement  $V(x) < 0$ ).

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre est considéré comme une introduction à la commande adaptative et la stabilité au sens de Lyapunov d'une façon générale. Les principaux points traités sont :

- la classification des paramètres des systèmes dynamiques,
- la définition de la commande adaptative et ses types,
- la définition de la stabilité au sens de Lyapunov et les méthodes d'analyse de la stabilité d'un système linéaire (1ère méthode de Lyapunov) et d'un système non-linéaire (2ème méthode de Lyapunov),
- la commande adaptative basée sur la fonction de Lyapunov.

# Chapitre 3

## Modélisation et simulation de l'équation de la chaleur

### 3.1 Introduction

Les multiples procédés utilisés dans l'industrie sont très souvent le siège d'échanges de chaleur, soit parce que c'est le but recherché (fours, coulée, échangeurs, thermoformage, induction, lits fluidisés, trempe, refroidissement), soit parce que ceux-ci interviennent d'une manière inévitable (chocs thermiques, pertes de chaleurs, rayonnement).

L'équation de la chaleur décrit l'évolution spatiotemporelle de la température permet de modéliser des phénomènes d'évolution : diffusion de chaleur, répartition des substances chimiques, . . . etc. Elle a donc un rapport avec la thermodynamique et le temps ne peut s'écouler que du passé vers le futur. Du point de vue mathématique cela signifie que l'on ne peut pas changer  $t$  par  $-t$  : cela modifie l'équation et produit des problèmes qui n'ont pas de solution en général.

La modélisation d'un phénomène physique nous permet de le comprendre et de connaître l'influence des différents paramètres, grâce à la simulation.

Ce chapitre est consacré à quelques notions théoriques sur la diffusion de la chaleur, ainsi qu'à la modélisation et à la simulation de l'équation de la chaleur.

### 3.2 Définitions

#### 3.2.1 Température

La température exprime la notion du chaud ou du froid. Elle illustre le niveau d'agitation des particules constituant les molécules.

Plus l'agitation est grande, plus la température est élevée. Si l'agitation cesse, la température est minimale c'est le zéro **absolu**  $0^{\circ}K$  (Kelvin)

$$0^{\circ}K = -273^{\circ}C$$

### 3.2.2 Champ de température

Les transferts de chaleur sont déterminés à partir de l'évolution de la température dans l'espace et dans le temps. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé **champ de température**. On distingue deux cas :

- champ de température indépendant du temps : le régime est dit **permanant** ou **stationnaire**.
- l'évolution du champ de température avec le temps : le régime est dit **variable** ou **transitoire**.

### 3.2.3 Flux de la chaleur

Le flux de la chaleur est une quantité d'énergie transférée sous forme de chaleur par unité du temps, c'est donc une puissance exprimé en **Watt**( $J/s$ ).

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad (3.1)$$

### 3.2.4 Flux de la chaleur échangé par conduction (loi de Fourier )

Ce mécanisme de transfert est régi par une loi phénoménologique établie par **Joseph Fourier** en 1822, stipule que la densité de flux échangée par conduction est proportionnelle au gradient de température (proportionnalité entre la cause qui est le gradient et l'effet qui représente le flux). Cette loi appelée loi de **Fourier** s'écrit :

$$\frac{dQ}{dt} = -k\nabla T \quad (3.2)$$

Le signe "–" intervenant dans cette loi traduit le fait que le flux de la chaleur circule des zones chaudes vers les zones froide, c'est-à-dire dans le sens opposé au gradient de

température (Figure 3.1).

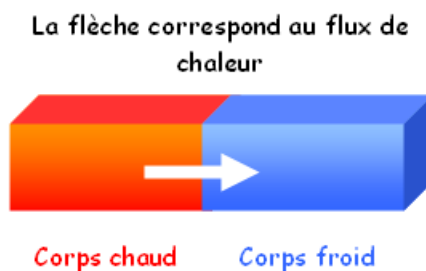


FIGURE 3.1 – Circulation du flux de la chaleur.

Le coefficient de proportionnalité  $k$  est la **conductivité thermique** exprimée en  $\text{w/m/k}$ . La conduction thermique dépend principalement du matériau constituant le corps considéré et dépend généralement de la température. Elle traduit la capacité d'un matériau à transporter la chaleur par conduction.

Ainsi pour un gradient de température donné, le flux de la chaleur sera d'autant plus important et que la conductivité sera grande. Pour les matériaux conducteurs de la chaleur  $k$  sera élevé et inversement pour les isolants.

### 3.3 Transfert thermique de la chaleur

Le transfert thermique peut être assimilé à un transfert d'énergie microscopique désordonné. Il existe trois modes de transfert de la chaleur :

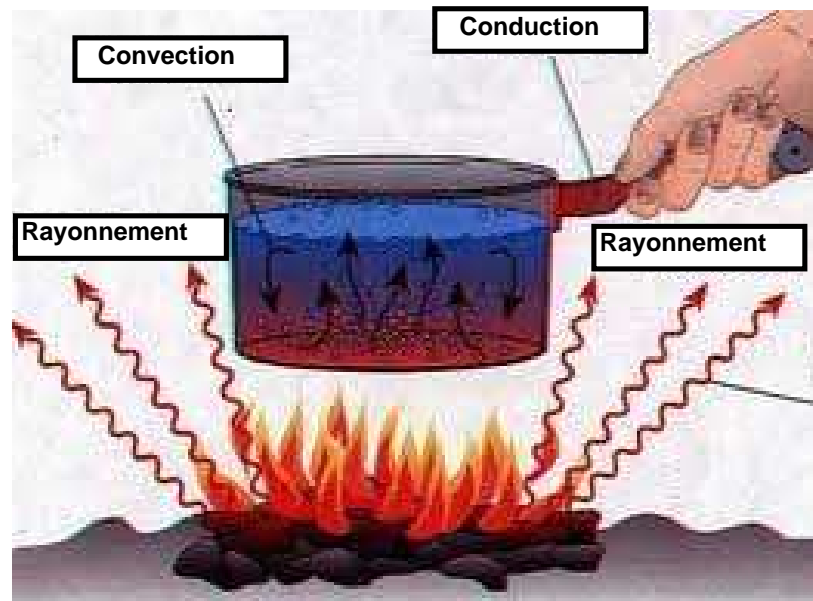


FIGURE 3.2 – Illustration des trois modes du transfert de la chaleur.

### 3.3.1 Transfert par conduction

La conduction correspond au transfert de la chaleur direct entre des matières en contact. La conduction thermique est un terme spécifique aux solides. Ce mode de transfert s'applique les matières solides, liquides et gaz. La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité du flux est proportionnelle au gradient de température (3.2).

Exemple : fer à repasser.

**Exemple illustratif**

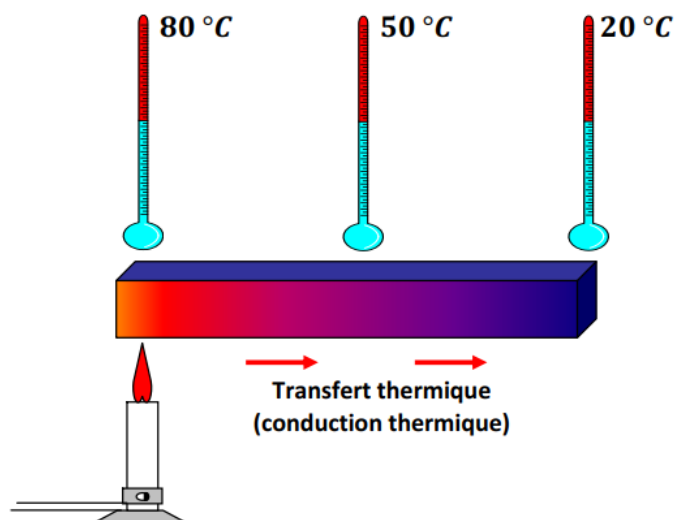


FIGURE 3.3 – Exemple illustratif de la conduction thermique .

### 3.3.2 Transfert par convection

Il s'agit d'un transfert de la chaleur qui s'effectue grâce à un mouvement de matière dans un milieu liquide ou gazeux. En effet la circulation d'un fluide chauffé fait circuler la chaleur c'est donc un terme plutôt réservé aux fluides.

Autrement-dit dans un liquide et dans un gaz, les différences de températures produisent des différences de densité, ce qui engendrent des mouvements du fluide appelé mouvement de convection qui ont pour effet d'égaliser les températures. Dans ce cas, la chaleur est propagée par déplacement de la matière.

Exemple : **Sèche – cheveux**

### 3.3.3 Transfert par rayonnement

Tout corps émet des rayonnements dont la fréquence (l'énergie) dépend de la température de ce corps. A la température ambiante, la majorité de ces rayonnements sont des infrarouges qui sont absorbés par la matière environnante et convertis en chaleur. Donc les corps **émettent** de l'énergie par leur surface sous forme de radiation visible ou non. Inversement, quand un corps reçoit un rayonnement, il en **absorbe** une partie qui se transforme en chaleur.

Exemple : **Rayon de soleil.**

## Remarque

Le transport de la chaleur par conduction est très souvent négligeable devant les deux autres types de transfert.

## 3.4 Modélisation de l'équation de la chaleur

Considérons une barre métallique dont la coupe transversale est uniforme et constituée d'un matériau homogène. Elle est orientée de sorte que l'axe des  $z$  se retrouve sur le long de l'axe de la tige (Figure 3.4).

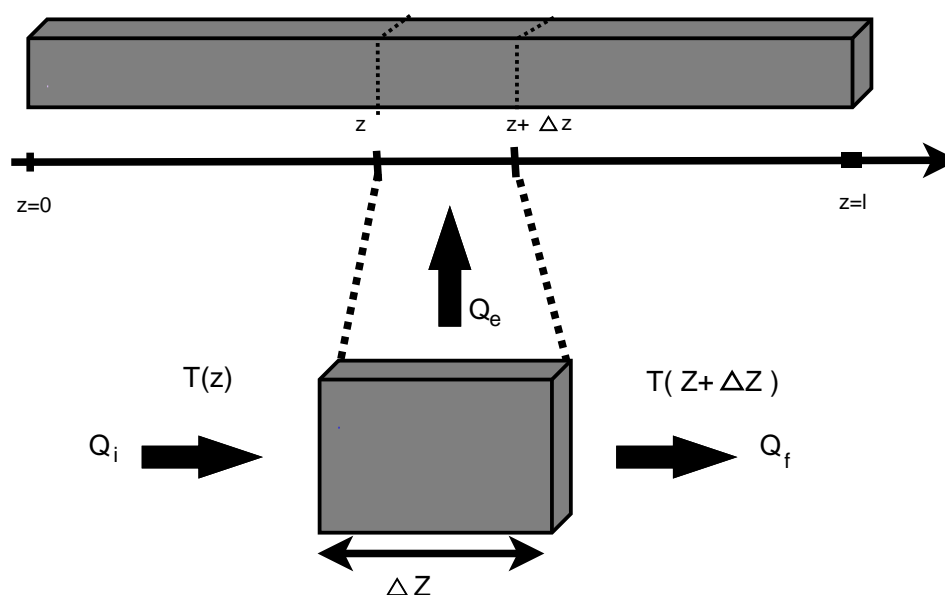


FIGURE 3.4 – Conduction de la chaleur dans un élément de la barre métallique.

Soit  $z = 0$  et  $z = l$  les extrémités de la barre.

On suppose que les côtés de la barre métallique sont parfaitement isolés de sorte qu'aucune chaleur ne les traverse et que la température  $T$  dépend uniquement de la position  $z$  et la variable de temps. Cette hypothèse est habituellement satisfaisante quand les dimensions latérales de la barre métallique sont petites lorsqu'on les compare à la longueur.

$Q_i$  : quantité de la chaleur transmis par conduction en  $z$ ,

$Q_f$  : quantité de la chaleur transmis par conduction en  $z + \Delta z$ ,

$Q_e$  : quantité de la chaleur évacuée à la frontière entre  $z$  et  $z + \Delta z$ .

### Remarque

La direction de  $Q_e$  (Figure 3.5) :

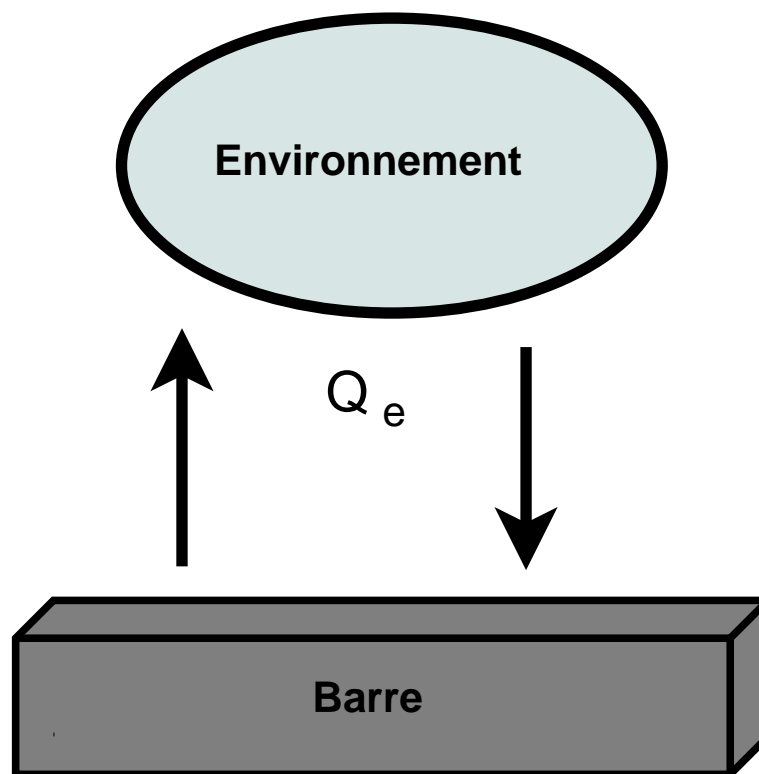


FIGURE 3.5 – Sens d'échange de chaleur entre la barre et l'enveloppe.

De la barre vers l'enveloppe : l'énergie est absorbée par la barre.

De l'enveloppe vers la barre : l'énergie est évacuée de la barre vers l'enveloppe.

D'après la loi de Fourier :

– Le flux de chaleur transmis par conduction en  $z$  est :

$$\frac{dQ_i}{dt} = -k s \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \quad (3.3)$$

Le flux de chaleur transmis par conduction en  $z + \Delta z$  est :

$$\frac{dQ_f}{dt} = -k s \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} \quad (3.4)$$

Le flux de chaleur évacuée à la frontière entre  $z$  et  $z + \Delta z$  est :

$$\frac{dQ_e}{dt} = h p \Delta z (T(z) - T_a) \quad (3.5)$$

La quantité totale de la chaleur accumulée dans l'intervalle  $[t, t+\Delta t]$  est :

$$dQ = c \Delta T dm \quad (3.6)$$

La masse de l'élément considéré est :

$$dm = \rho dv = \rho s \Delta z \quad (3.7)$$

Alors

$$dQ = c \rho s \Delta z \Delta T \quad (3.8)$$

### 3.4.0.1 Bilan thermique

Pour qu'il y ait équilibre énergétique, il faut que la quantité totale de l'énergie accumulée dans l'intervalle  $[t, t+\Delta t]$  soit égale à la quantité totale arrivant en  $z$  à l'élément, moins l'énergie sortante en  $z + \Delta z$ , plus la quantité de chaleur évacuée à la frontière entre  $z$  et  $z + \Delta z$  dans le même intervalle (si la barre absorbe de l'énergie de l'enveloppe donc c'est moins cette quantité pour le bilan thermique) .

$$dQ = dQ_i - dQ_f + dQ_e \quad (3.9)$$

En remplaçant chaque quantité par son expression, on obtient :

$$dQ = k s dt \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \right] + h p dt \Delta z \Delta T \quad (3.10)$$

comme

$$\Delta T = T(z) - T_a \quad (3.11)$$

alors

$$dQ = k s dt \left[ \frac{dT}{dz} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \right] + h p dt \Delta z (T(z) - T_a) \quad (3.12)$$

à l'aide du développement limite d'ordre 1

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} \approx \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z + \Delta z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z \quad (3.13)$$

On remplace l'équation (3.13) dans (3.12), on obtient :

$$dQ = k s dt \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z + \Delta z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z \right] + h p dt \Delta z (T(z) - T_a) \quad (3.14)$$

$$dQ = k s dt \Delta z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z + h p dt \Delta z (T(z) - T_a) \quad (3.15)$$

$$c \rho s \Delta z dT = k s dt \Delta z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z + h p dt \Delta z (T(z) - T_a) \quad (3.16)$$

$$c \rho s \frac{dT}{dt} = k s \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z + h p (T(z) - T_a) \quad (3.17)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k s}{c \rho s} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z + \frac{h p}{c \rho s} (T(z) - T_a) \quad (3.18)$$

En posant  $\lambda = \frac{k}{c \rho}$  et  $\beta = \frac{h p}{c \rho s}$ , l'équation (3.18) prend la forme suivante :

$$\frac{dT}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_z + \beta (T(z) - T_a) \quad (3.19)$$

### 3.4.1 Modèle de l'équation de la chaleur

Le modèle obtenu est de la forme :

$$\frac{dT(t, z)}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2} + \beta (T(z) - T_a) \quad (3.20)$$

Pour compléter la description mathématique, on doit préciser les conditions aux limites. On suppose que les extrémités de la barre sont plongés dans un bain dont les température sont constantes. Alors on aura les conditions aux limites de Dirichlet

$$T(t, 0) = T_0$$

$$T(t, l) = T_l \tag{3.21}$$

Pour la condition initiale, on a :

$$T(0, z) = T(0)$$

Il s'agit de l'équation de la chaleur qui est un problème parabolique en une seule dimension.

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles qui modélise le phénomène de conduction de la chaleur, on distingue deux variables indépendantes, le temps "t" et l'espace "z". Il est muni de conditions aux limites et d'une condition initiale.

On peut considérer que l'équation (3.21) comme un problème aux limites, mais aussi c'est un **problème de Cauchy** à cause de la présence de la condition initiale.

## 3.5 Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Pour résoudre l'équation de la chaleur, on utilise un outil mathématique qui est **la méthode des lignes**. Cette méthode est basée sur l'approximation des dérivées spatiales en utilisant par exemple les différences finies.

### 3.5.1 Méthode des lignes

C'est une méthode qui permet de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles. Son principe est basé sur la discrétisation des dérivées par rapport à l'espace.

Autrement dit, c'est de remplacer les dérivées spatiales dans les équations aux dérivées partielles par des approximations algébriques tout en conservant le caractère continu du temps. Ce qui permet de transformer le système en un système d'équations aux dérivées ordinaires (ODE).

L'approximation de la solution est obtenue en un nombre fini de points du domaine  $\Omega$ . Pour cela on fait un maillage uniforme d'un pas  $\Delta z$  de l'espace  $\Omega$ .

### 3.5.2 Résolution de l'équation de la chaleur avec la méthode des lignes

Discrétisation de l'équation de la chaleur :

Considérons le problème mono-dimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de longueur  $l$ . Le champ de température  $T(t, z)$  vérifie l'équation de la chaleur (3.19) :

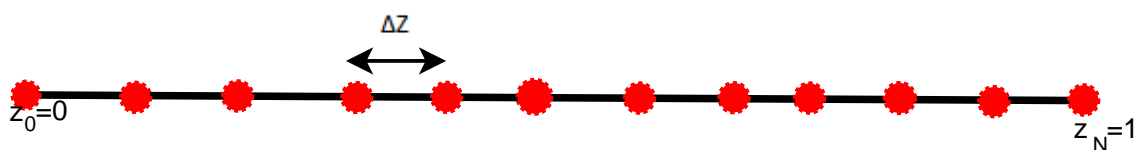


FIGURE 3.6 – La discrétisation de la barre métallique.

Nous introduisons les fonctions  $T_i(t)$  qui approchent  $T_i(t, z_i)$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire :

$$T_i(t) \approx T_i(t, z_i)$$

Le maillage est constitué de  $N + 1$  nœuds  $z_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N + 1$ ), régulièrement espace avec un pas de discrétisation  $\Delta z = \frac{1}{N+1}$ . La quantité  $T_i(t)$  désignera la valeur de la fonction  $T(t)$  au nœud  $z_i$ .

Les points  $T_0 = 0$  et  $T_{N+1} = 1$  constituent les température des extrémités de la barre et les points  $T_1, \dots, T_N$  sont appelés points internes du maillage.

#### Remarque

Le choix du pas de maillage  $\Delta z$  détermine le nombre de points de discrétisation. Ainsi, si  $\Delta z$  est très petit, le nombre de points considérés est très grand et l'approximation de la fonction est meilleure.

Dans la pratique, un pas de maillage  $\Delta z$  trop petit peut entrainer un coût de calcul prohibitif. Il est donc nécessaire de déterminer un pas de maillage suffisamment petit pour obtenir une bonne approximation sans que le temps de calcul soit trop long.

#### 3.5.2.1 Approximation des dérivées

On utilise la formule de Taylor pour approximer les dérivées partielles

– Approximation de la 1<sup>ère</sup> dérivée

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial z} = \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2\Delta z} \quad (3.22)$$

– Approximation de la 2<sup>ème</sup> dérivée

$$\frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)}{\Delta z^2} \quad (3.23)$$

On remplace dans l'équation de la chaleur qui est sous la forme :

$$\frac{dT(t, z)}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2} + \beta(T(z) - T_a) \quad (3.24)$$

Avec les conditions :

$$T(t, 0) = T(0)$$

$$T(t, l) = L_l \quad (3.25)$$

$$T(0, z) = T_0$$

Pour avoir le modèle suivant :

$$\dot{T}_i(t) = \frac{\lambda}{\Delta z^2} [T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)] + \beta(T_i(t) - T_a), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.26)$$

C'est-à-dire :

$$\dot{T}_1(t) = \frac{\lambda}{\Delta z^2} [T_2(t) - 2T_1(t) + T_0(t)] + \beta(T_1 - T_a)$$

$$\dot{T}_2(t) = \frac{\lambda}{\Delta z^2} [T_3(t) - 2T_2(t) + T_1(t)] + \beta(T_2 - T_a)$$

$$\dot{T}_3(t) = \frac{\lambda}{\Delta z^2} [T_4(t) - 2T_3(t) + T_2(t)] + \beta(T_3 - T_a)$$

⋮  
⋮

⋮

$$\dot{T}_{N-1}(t) = \frac{\lambda}{\Delta z^2} [T_N(t) - 2T_{N-1}(t) + T_{N-2}(t)] + \beta(T_{N-1} - T_a)$$

$$\dot{T}_N(t) = \frac{\lambda}{\Delta z^2} [T_{N+1}(t) - 2T_N(t) + T_{N-1}(t)] + \beta(T_N - T_a)$$

Qu'on peut écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\Delta z^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda}{\Delta z^2} \end{bmatrix} T_l$$

$$+ \beta \begin{bmatrix} (T_1 - T_a) \\ (T_2 - T_a) \\ (T_3 - T_a) \\ \vdots \\ (T_{N-1} - T_a) \\ (T_N - T_a) \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{T} = A_1 T + B T_0 + C T_l + \beta(T - T_a)$$

On note que le vecteur d'état du système représente sur les inconnues  $T_1, \dots, T_N$ . Les conditions aux bords  $T_0$  et  $T_{N+1}$  n'apparaissent que dans les vecteurs  $B$  et  $C$ .

Considérons le changement de variable suivant :

$$u(t) = T(t) - T_a \tag{3.27}$$

Où  $T_a$  est la température de l'environnement .

Donc on peut écrire l'équation de la chaleur (3.24) sous la forme suivante :

$$u_t(t, z) = \lambda u_{zz}(t, z) + \beta u(t, z).$$

Et considérons les conditions aux limites suivantes :

$$T(t, 0) = T_0 = 0.$$

$$T(t, l) = T_l = 0.$$

En utilisant la méthode des lignes, on obtient le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_{N-1} \\ \dot{u}_N \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 + \beta & \beta & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta & -2 + \beta & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & -2 + \beta & \beta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \beta & -2 + \beta & \beta \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta & -2 + \beta \end{bmatrix} u$$

Qu'on n peut écrire sous la forme :

$$\dot{u}(t, z) = Au(t, z) \quad (3.28)$$

### 3.6 Simulation du système en boucle ouverte

Système :

$$u_t(t, z) = \lambda u_{zz}(t, z) + \beta u(t, z) \quad (3.29)$$

$$u(t, 0) = u_0 = 0 \quad (3.30)$$

$$u(t, 1) = u_1 = 0 \quad (3.31)$$

Condition initiale :

$$u(0, z) = z(1 - z) \quad (3.32)$$

Les valeurs numériques utilisées pour la simulation sont :

- nombre de points de discrétisations  $N = 100$ .
- la longueur de la barre  $l = 1$ .
- le pas de discrétisation  $\Delta z = \frac{l}{N+1}$ .
- les paramètres du système  $\lambda = 1, \beta = 5$ .

Le résultat de simulation est donné par la figure (Figure 3.7) :

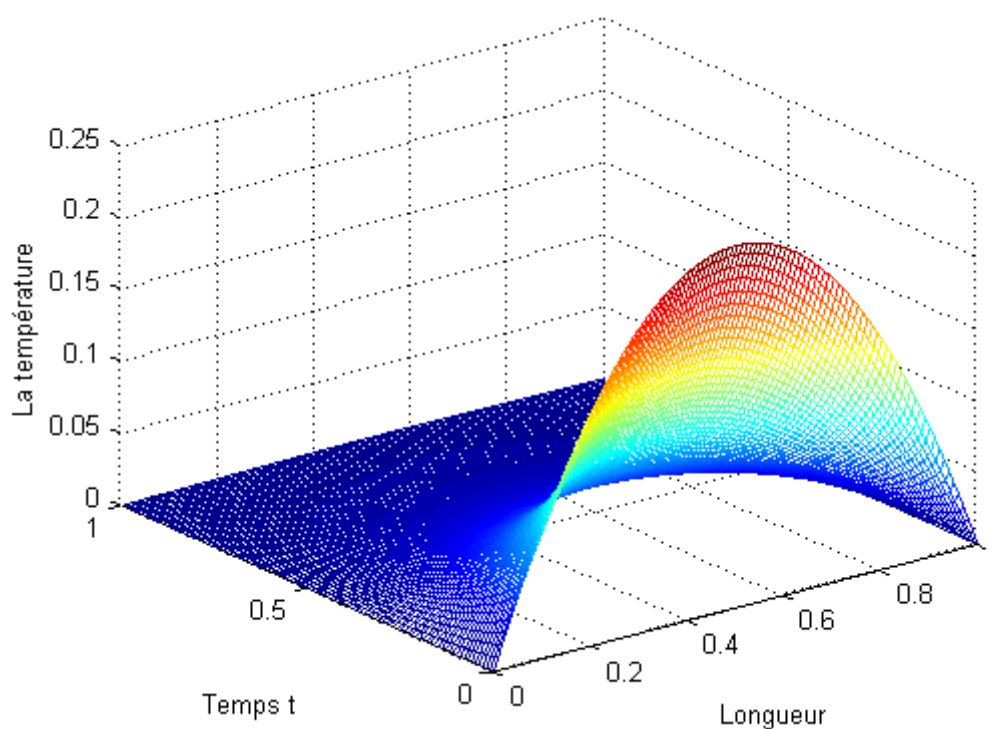


FIGURE 3.7 – Simulation de l'équation de chaleur en boucle ouverte.

### 3.7 Interprétation des résultats de simulation

D'après la simulation du système en boucle ouverte, on constate qu'à un certain temps ( $t \rightarrow \infty$ ) la température tend vers 0 qu'est l'équilibre, et comme on a imposé  $u = T - T_a$ , alors quel que soit la température initiale de la tige, cette dernière va converger à la température de l'environnement.

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté :

- des généralités sur le transfert thermique de chaleur,
- la modélisation du phénomène de conduction de la chaleur dans une barre métallique,
- la résolution de l'équation de la chaleur en utilisant la méthode des lignes et la simulation du système en boucle ouverte.

# Chapitre 4

## Commande adaptative de l'équation de la chaleur

### Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la commande adaptative d'une équation de chaleur avec un terme de source incertain.

L'objectif est de stabiliser le système en présence de l'incertitude en utilisant la technique de Backstepping. Pour faire une stratégie de commande adaptative directe est adaptée.

### 4.1 Principe de la technique du Backstepping

Cette technique se base sur l'idée de concevoir une commande de façon à pouvoir trouver une fonction de Lyapunov garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée. Trouver une telle fonction, pour un système non linéaire d'ordre élevé, peut s'avérer très difficile. La technique du Backstepping permet de réduire cette complexité.

Elle consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués, d'ordre décroissant. Autrement dit, c'est de rendre les systèmes bouclés équivalents à des sous-systèmes d'ordre 1 en cascade stable au sens de Lyapunov, ce qui leur confère des qualités de robustesse et une stabilité globale asymptotique.

La version adaptative du Backstepping offre une méthode itérative et systématique qui permet, pour des systèmes non linéaires de tout ordre, de construire récursivement les trois parties indispensables à une commande adaptative basée sur l'approche de Lyapunov

## 4.2 fonction de Lyapunov

Considérons l'équation de diffusion de la chaleur :

$$u_t(t, z) = \lambda u_{zz}(t, z) + \beta u(t, z) \quad (4.1)$$

$$u(0) = 0 \quad (4.2)$$

Telle que  $\beta$  est un paramètre constant mais inconnu.

On pose  $\lambda = 1$ .

Notons la valeur estimée de  $\beta$  par  $\hat{\beta}$ .

Pour identifier le paramètre inconnu, on aura besoin d'introduire le système auxiliaire suivant :

$$\hat{u}_t(t, z) = \lambda \hat{u}_{zz}(t, z) + \hat{\beta} u(t, z) + \gamma^2 (u - \hat{u}) \int_0^1 u(z)^2 dz \quad (4.3)$$

$$\hat{u}(0) = 0 \quad (4.4)$$

$$\hat{u}(1) = u(1) \quad (4.5)$$

### Remarque

Un tel système auxiliaire est souvent appelé **observateur**. Son but n'est pas l'estimation de l'état du système, puisque l'état  $u(t, z)$  est mesuré. Son but est d'aider à identifier le paramètre inconnu.

On pose l'expression de l'erreur comme suite :

$$e(t, z) = u - \hat{u}. \quad (4.6)$$

En considérant les équations (4.5), (4.3), (4.2) et (4.1), on aura :

$$e_t = u_t - \hat{u}_t \quad (4.7)$$

Ou encore

$$e_t = \lambda u_{zz}(t, z) + \beta u(t, z) - \lambda \hat{u}_{zz}(t, z) - \hat{\beta} u(t, z) - \gamma^2 (u - \hat{u}) \int_0^1 u(z)^2 dz \quad (4.8)$$

Cette EDP peut s'écrire sous la forme :

$$e_t = \lambda e_{zz} + \tilde{\beta} u - \gamma^2 e \|u\|^2 \quad (4.9)$$

avec

$$e(t, 0) = 0 \quad (4.10)$$

$$e(t, 1) = 0 \quad (4.11)$$

et

$\tilde{\beta} = \beta - \hat{\beta}$  est l'erreur d'estimation paramétrique, et

$$\|u\|^2 = \int_0^1 u(z)^2 dz \quad (4.12)$$

Pour garantir la stabilité du système, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 e^2(z) dz + \frac{\tilde{\beta}^2}{2\gamma} \quad (4.13)$$

Dérivons la fonction de Lyapunov par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \int_0^1 2e(z)e_t(z) dz + \frac{\tilde{\beta}\hat{\beta}}{\gamma} \quad (4.14)$$

On remplace  $e_t$  par son expression (4.9) :

$$\dot{V} = \int_0^1 e(z)e_{zz}(z)dz + \int_0^1 \tilde{\beta}e(z)udz - \gamma^2 \int_0^1 e^2(z)\|u\|^2 dz - \frac{\tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}}}{\gamma}, \quad (4.15)$$

$$\dot{V} = \int_0^1 e(z)e_{zz}(z)dz - \gamma^2\|e(z)\|^2\|u\|^2 + \tilde{\beta} \int_0^1 e(z)u(z)dz - \frac{\tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}}}{\gamma}, \quad (4.16)$$

avec

$$\int_0^1 e(z)e_{zz}(z)dz = [e_{zz}(z)e(z)]_0^1 - \int_0^1 e_z(z)e_z(z)dz,$$

On sais que

$$e(t, 0) = 0,$$

$$e(t, 1) = 0,$$

d'où

$$\int_0^1 e(z)e_{zz}(z)dz = - \int_0^1 e_z(z)^2 dz = -\|e_z(z)\|^2. \quad (4.17)$$

alors

$$\dot{V} = -\|e_z(z)\|^2 - \gamma^2\|e(z)\|^2\|u\|^2 + \tilde{\beta} \int_0^1 e(z)u(z)dz - \frac{\tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}}}{\gamma}. \quad (4.18)$$

Pour que le système soit stable  $\dot{V} \leq 0$ , on doit imposer :

$$\tilde{\beta} \int_0^1 e(z)u(z)dz - \frac{\tilde{\beta}\dot{\hat{\beta}}}{\gamma} = 0. \quad (4.19)$$

Ce qui donne la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\hat{\beta}} = \gamma \int_0^1 (u(z) - \hat{u}(z))u(z)dz. \quad (4.20)$$

### 4.3 Calcul de la loi de commande

L'idée principale de la méthode du backstepping est d'employer la transformation du même rang suivante [10] :

$$W(t, z) = u(t, z) - \int_0^z k(z, y)u(t, y)dy. \quad (4.21)$$

Nous définissons la loi de commande comme suit :

$$u(t, 1) = \int_0^1 k(y, 1)u(t, y)dy. \quad (4.22)$$

Pour imposer au système (4.1) - (4.2) le modèle de référence suivant :

$$W_t(t, z) = W_{zz}(t, z) \quad (4.23)$$

avec les conditions aux limites :

$$W(t, 0) = 0 \quad (4.24)$$

$$W(t, 1) = 0 \quad (4.25)$$

Notons que les conditions aux frontières (4.2), (4.24) et (4.25) sont vérifiées par (4.21) sans aucune condition sur  $k(y, z)$ .

Notre objectif est de déterminer l'expression de  $k(y, z)$  qui est le gain de la commande qui impose au système (4.1) de se comporter comme le modèle référence (4.23), considérons les notations suivantes [10] :

$$k_z(z, z) = \frac{\partial}{\partial z}k(y, z)|_{y=z}.$$

$$k_y(z, z) = \frac{\partial}{\partial y}k(y, z)|_{y=z}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}k(y, z) = k_z(z, z) + k_y(z, z).$$

Pour déterminer le gain  $k(y, z)$ , nous remplaçons simplement la transformation (4.21) dans le modèle de référence (4.23) (4.25). Pour ce faire, nous devons différencier la transformation (4.21) par rapport à  $z$  et  $t$ . Rappelons la règle de différenciation de Leibniz suivante :

$$\frac{d}{dz} \int_0^z f'(y, z) dy = f(z, z) + \int_0^z f_z(y, z) dy \quad (4.26)$$

La différenciation de la transformation (4.21) par rapport à  $z$  donne :

$$W_z(z) = u_z(z) - k(z, z)u(z) - \int_0^z k_z(y, z)u(y) dy, \quad (4.27)$$

$$W_{zz} = u_{zz}(z) - \frac{d}{dz}(k(z, z)u(z)) - k_z(z, z)u(z) - \int_0^z k_{zz}(y, z)u(y) dy, \quad (4.28)$$

$$= u_{zz}(z) - u(z) \frac{d}{dz}k(z, z) - k(z, z)u'(z) - k_z(z, z)u(z) - \int_0^z k_{zz}(y, z)u(y) dy. \quad (4.29)$$

Ensuite, nous différencions la transformation (4.21) par rapport à  $t$ , pour avoir :

$$W_t(z) = u_t(z) - \int_0^z k(z, y)u_t(y) dy, \quad (4.30)$$

$$= u_{zz}(z) + \beta u(z) - \int_0^z k(y, z)(u_{yy}(y) + \beta u(y)) dy, \quad (4.31)$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} &= u_{zz}(z) + \beta u(z) - k(z, z)u_z(z) + k(z, 0)u_z(0) + \\ &\int_0^z k_y(y, z)u_z(y) dy - \int_0^z \beta k(y, z)u(y) dy, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
&= u_{zz}(z) + \beta u(z) - k(z, z)u_z(z) + k(z, 0)u_z(0) + k_y(z, z)u(z) - \\
&k_y(z, 0)u(0) - \int_0^z k_{yy}(y, z)u(y)dy - \int_0^z \beta k(y, z)dy \text{ (intégration par partie)}.
\end{aligned}$$

Soustrayant (4.33) et (4.29), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
W_t - W_{zz} &= [\beta + 2\frac{d}{dz}k(z, z)]u(z) + k(z, 0)u_z(0) + \\
&\int_0^z k_{zz}(y, z) - k_{yy}(z, y) - \beta k(y, z)u(y)dy.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour avoir l'équation (4.6) égale à zéro, on impose :

$$k_{zz}(z, y) - k_{yy}(z, y) - \beta k(z, y) = 0. \tag{4.34}$$

$$k(z, 0) = 0. \tag{4.35}$$

$$\beta + 2\frac{d}{dz}k(z, z) = 0. \tag{4.36}$$

Nous pouvons simplifier (4.36) en l'intégrant par rapport à  $z$  et comme on a aussi l'équation  $k(0, 0) = 0$ , donc on aura le système d'équation suivants :

$$k_{zz}(z, y) - k_{yy}(z, y) = \beta k(z, y),$$

$$k(z, 0) = 0, \tag{4.37}$$

$$k(z, z) = -\frac{\beta}{2}z.$$

La solution de cette équation aux dérivées partielles (4.37), est [10] :

$$k(z, y) = -\beta y \frac{I_1 \sqrt{\beta(z^2 - y^2)}}{\sqrt{\beta(z^2 - y^2)}} \tag{4.38}$$

D'où l'expression de la commande  $u(1)$  suivante :

$$u(1) = \int_0^1 -\hat{\beta}y \frac{I_1 \sqrt{\hat{\beta}(z^2 - y^2)}}{\sqrt{\hat{\beta}(z^2 - y^2)}} \hat{u}(y) dy. \quad (4.39)$$

## 4.4 Simulation du système en boucle fermée

Dans cette section, nous évaluons les performances de la commande adaptative présentée. On commence d'abord par le résumé des différentes parties de la stratégie de commande.

Système à commander

$$u_t(t, z) = \lambda u_{zz}(t, z) + \beta u(t, z)$$

$$u(t, 0) = 0$$

Système auxiliaire

$$\hat{u}_t(t, z) = \lambda \hat{u}_{zz}(t, z) + \hat{\beta} u(t, z) + \gamma^2 (u - \hat{u}) \int_0^1 u(z)^2 dz$$

$$\hat{u}(t, 0) = 0$$

$$\hat{u}(t, 1) = u(1)$$

Estimé de  $\hat{\beta}$

$$\dot{\hat{\beta}} = \gamma \int_0^1 (u(z) - \hat{u}(z)) u(z) dz$$

Commande à la frontière  $u(1)$

$$u(t, 1) = \int_0^1 -\hat{\beta}y \frac{I_1 \sqrt{\hat{\beta}(z^2 - y^2)}}{\sqrt{\hat{\beta}(z^2 - y^2)}} \hat{u}(y) dy$$

Pour la simulation numérique, nous considérons les valeurs numériques :

- nombre de points de discrétisation  $N = 100$ .
- la longueur de la barre  $l = 1$ .
- le pas de discrétisation  $\Delta z = \frac{l}{N+1}$ .
- les paramètres du système  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 2, 5$ .  $\gamma = 0, 5$ .
- les conditions initiales :

$$u(0, z) = 25 z (1 - z).$$

$$\hat{u}(0, z) = 50 z (1 - z).$$

$$\hat{\beta}_{Initial} = 3.$$

Les résultats de simulation sont donnés par les Figures 4.1, 4.2 , 4.3 et 4.1 :

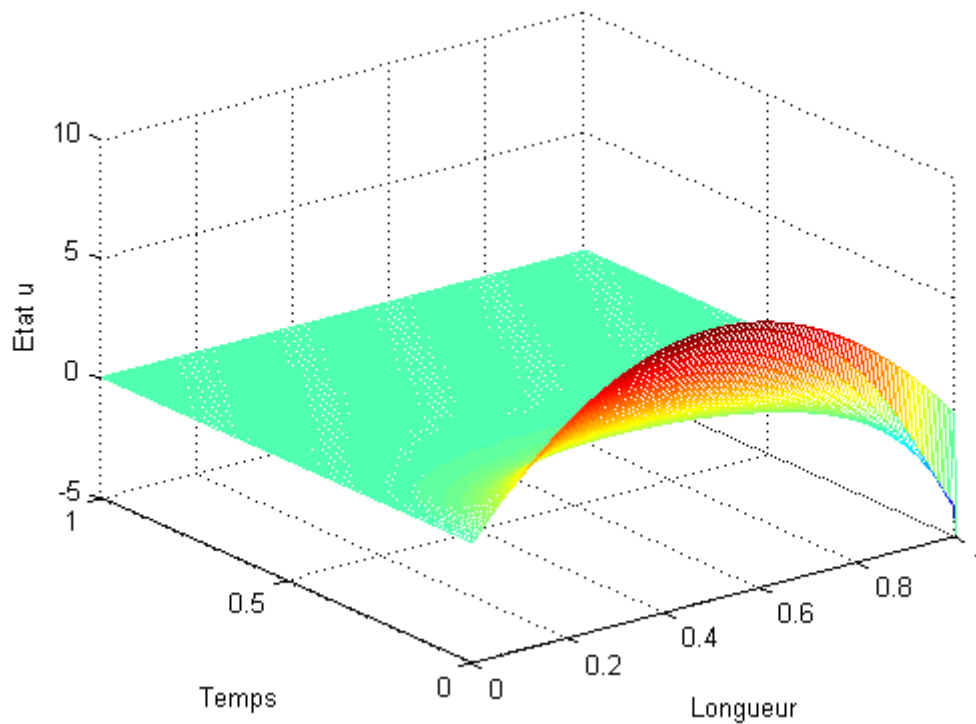


FIGURE 4.1 – Evolution de l'état en fonction du temps et l'espace.

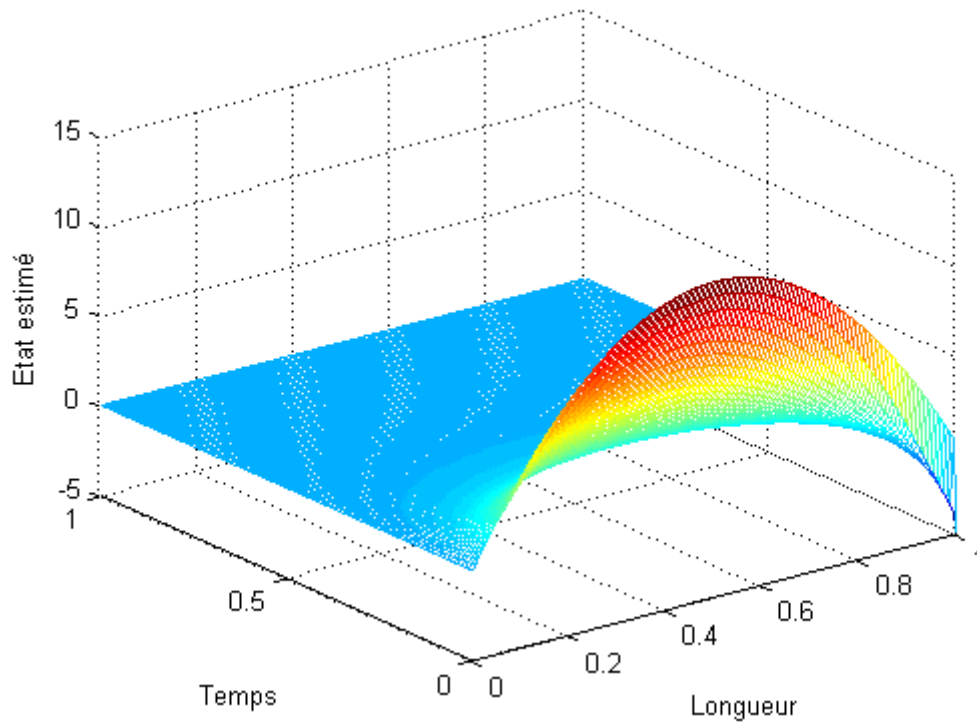


FIGURE 4.2 – Evolution de l'état du système auxiliaire en fonction du temps et de l'espace.

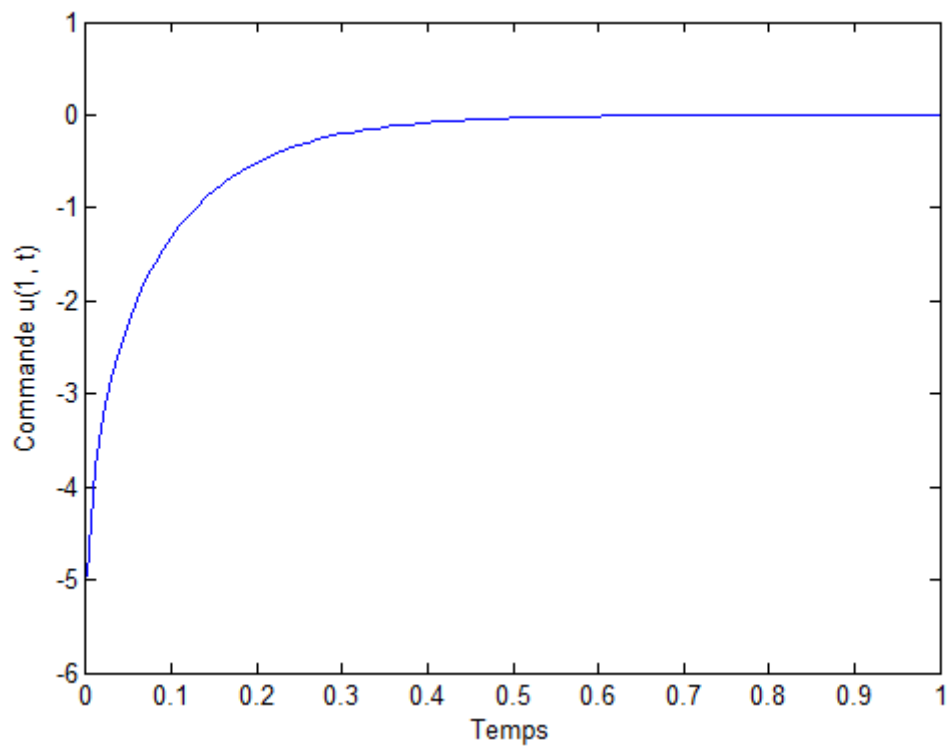


FIGURE 4.3 – Evolution de la commande  $u(1)$ .

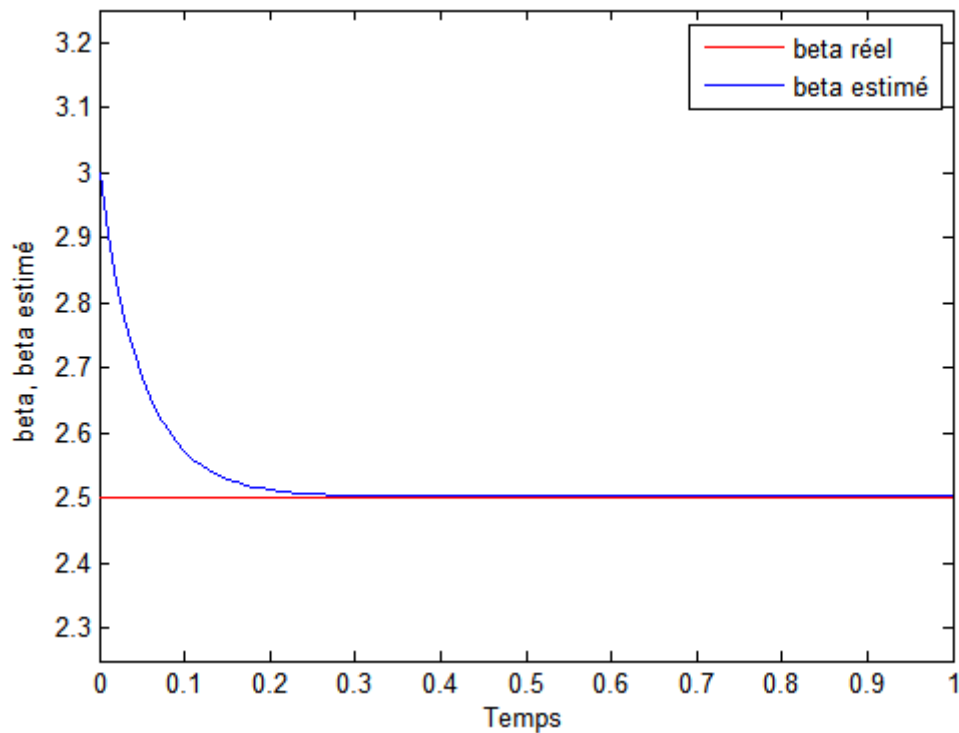


FIGURE 4.4 – L'évolution du paramètre du système en fonction de temps.

## 4.5 Interprétation des résultats

D'après les résultats de simulation en boucle fermée, on constate que le système est stabilisé en dépit de l'incertitude sur le paramètre  $\beta$ . Dans ce cas, à partir d'une valeur initiale quelconque, la stratégie de commande a permis d'estimer la valeur exacte du paramètre  $\beta$ .

L'avantage du contrôle en boucle fermée est la robustesse : comme la boucle dépend de l'état du système, toute perturbation suffisamment petite de la dynamique peut être prise en compte par la commande  $u$  qui pourra rectifier son action pour arriver à stabiliser le système.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre :

- nous avons présenté le principe la technique du Backstepping,

- nous avons déterminé la fonction de Lyapunov qui permet de définir une commande stabilisante basée sur la technique du Backstepping,
- nous avons appliqué cette commande à un système de diffusion de chaleur, décrit l'équation de la chaleur, caractérisé par la propagation de la température dans une barre métallique,
- nous avons effectué la simulation du système en boucle fermée pour tester la stratégie de commande étudiée.
- nous constatons que la commande adaptative basée sur la technique Backstepping permet de stabiliser le système malgré les incertitudes paramétriques.

# Conclusion générale

Le travail réalisé dans ce mémoire est l'application de la commande adaptative basée sur la technique du Backstepping pour commander la distribution de la chaleur dans une barre métallique. Le modèle mathématique de ce phénomène est décrit par une équation aux dérivées partielles de second ordre complétée par des conditions aux limites et une condition initiale qui représente l'équation de la chaleur. L'objectif de l'application de cette la commande est de stabiliser le système malgré les variations ou les incertitudes paramétriques.

Après avoir présenté des généralités sur les systèmes à paramètres distribués et les équations aux dérivées partielles, on a présenté les différentes classes des paramètres, des notions théoriques sur la commande adaptative et la stabilité au sens de Lyapunov. Après avoir expliqué quelques phénomènes liés au transfert de la chaleur, on a passé à la modélisation et la simulation de l'équation de la chaleur et sa résolution par la méthode des lignes. A la fin, on a consacré la dernière partie pour la commande adaptative des systèmes à paramètres distribués Nous avons présenter d'abord la technique de Backstepping qu'on a utilisé dans une stratégie de commande directe pour stabilisé l'équation de la chaleur en dépit de l'incertitude sur le terme de source.

Les systèmes à paramètres distribués sont décrits par les équations aux dérivées partielles. La plupart des équations aux dérivées partielles de la physique sont des équations du second ordre. Pour la résolution d'un système à paramètres distribués, il est préférable d'utiliser la méthode des lignes qui nous permet de transformer le système à un système d'équations différentielles ordinaires.

L'utilisation de la fonction de Lyapunov pour la commande adaptative permet d'assurer la stabilité du système.

Les résultats de simulation montre que le système est stabilisé malgré l'incertitude paramétrique par la commande adaptative basée sur la technique de backstepping. Enfin nous pouvons dire que cette commande est une commande moderne et efficace pour améliorer les performances des systèmes non linéaires et garantir la stabilité globale de ce

système. Ainsi, il est intéressant de penser à l'appliquer pour d'autres systèmes à paramètre distribués.

# Bibliographie

- [1] J. P Corriou. « Commande des Procédés ». Édition Lavoisier, Paris, 2003.
- [2] A. Rachid . « Système de régulation ». Édition Masson, Paris,1996.
- [3] E. Ternisien. Caractérisation aveugle d'un système de dispersion en représentation d'état et localisation de source. Thèse de Doctorat, Université du Littoral, Côte d'Opale, 2001.
- [4] A.El Jai. « éléments d'analyse et de contrôle des systèmes ». Presses Universitaires de perpignon, perpignon, 6552004.
- [5] E. Goncalvès. Cours Résolution Numérique, discrétisation des EDP et EDO. Institut National Polytechnique De Grenoble, 2005.
- [6] A.El Jai, A.J.Pritchard. « Capteurs et actionneurs dans l'analyse des système distribué ». Édition Masson, Paris, 1986.
- [7] A. Bölcs. Cours Transmission de Chaleur. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [8] J. Bouriez, S. Olive et J. Siguenza. Identification Inverse des Sources de Chaleur. Projet d'Ingénierie Mathématique, Université Montpellier 2, 2011.
- [9] R. Husson, C. Lung, J. Aubry , J. Daazouf et D. Wolf . « Du cahier de charge à la réalisation de système ». Édition Dunod, paris 2007.
- [10] M. Krstic et A. Smyshlyaev . « Boundary Control of PDEs ». Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia,2008.
- [11] A. Maida . « Cours Commande avancée ». Département d'Automatique, Faculté de Génie électrique et Informatique. Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, 2018.
- [13] [https ://www.techniques-ingenieur.fr](https://www.techniques-ingenieur.fr) (Analyse numérique des équations différentielles et aux dérivées, Ref. 42620210)
- [14] R.Hanus. « Commande des système non linéaire ». Automatique avancée, Tome 2. Édition La voisier, 2007.