



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

Par

BRAHIMI LILIA

LOUNAS HAKIMA

Extensions de la dominance stochastiques aux variables aléatoires floues

Soutenue le 03 octobre 2022 devant les jury :

Dr. CHEBBAH Mohammed	UMMTO	Président du jury
Dr. GUETTAF Rabah	UMMTO	Examineur
Dr. AICHE Farid	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

En premier lieu, nous remercions Dieu de nous avoir donné du courage, de la volonté et d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir.

En deuxième lieu, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Monsieur **AICHE Farid**, de nous avoir encadré, pour la confiance qu'il nous a toujours témoigné. Son expérience dans la recherche qu'il a partagé avec nous, ses inestimables conseils et encouragements, sa disponibilité et sa ponctualité nous ont été très précieux et nous ont permis de mener à bien ce travail.

Ensuite, nous exprimons nos sincères remerciements à Monsieur **CHEBBAH Mohammed** et Monsieur **GUETTAF Rabah**, de nous avoir fait honneur d'être les membres de notre jury, afin d'évaluer notre travail.

Nous ne saurons oublier le grand mérite des enseignants qui ont contribué à notre cursus particulièrement ceux du département "mathématiques" et qu'ils trouvent ici le témoignage de notre profonde reconnaissance.

Finalement, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Tizi-Ouzou, le 7 novembre 2022.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents, qui se sont sacrifiés pour nous, avec toute mon affection, mon amour, ma reconnaissance et tout mon respect.

" Que Dieu vous garde ".

Mes sœurs pour leur affection et leurs encouragements qui ont toujours été pour moi des plus précieux.

A mon frère Ahcene, mon confident qui me manque terriblement.

Tous mes amis spécialement Manel, Sandra et Sabrina.

Ma binôme Hakima et sa famille.

Et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

LILIA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents, qui se sont sacrifiés pour nous, avec toute mon affection, mon amour, ma reconnaissance et tout mon respect.

" Que Dieu vous garde ".

Mes chères sœurs et mon frère pour leur affection et leurs encouragements qui ont toujours été pour moi des plus précieux.

Mes chères amies Nouara, Hamida, Dalila et Samia, mes chers amis Abdou et Nabil.

Ma binôme Lilia et sa famille.

Et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

HAKIMA

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	viii
INTRODUCTION	1
1 PRÉLIMINAIRES	4
1.1 THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS :	5
1.1.1 Notion de base des ensembles flous :	6
1.1.2 Caractéristique d'un ensemble flou :	8
1.1.3 Fonction d'appartenance :	10
1.1.4 α – Coupe :	11
1.1.5 Principe d'extension :	12
1.1.6 Opérations sur les ensembles flous :	14
1.1.7 Intervalle flou :	17
1.1.8 Comparaison d'intervalle flou :	17
1.1.9 Nombre flou :	18
1.1.10 Types de nombre flou :	19
1.2 ÉLÉMENT DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS :	22
1.2.1 Notions d'espace mesurable :	22
1.2.2 Tribus d'évènements :	22
1.2.3 Espace probabilisable :	22
1.2.4 Espace probabilisé :	22
1.2.5 Tribu borélienne sur \mathbb{R}	22
1.2.6 Applications mesurables :	23
1.2.7 Variables aléatoires réelles :	23
1.3 COMBINAISON DU FLOU ET DE L'ALÉA :	24
1.3.1 Variables aléatoires floues :	24
1.3.2 Variables aléatoires floues discrètes :	24
1.3.3 Variables aléatoires floues normales :	26
2 EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX INTERVALLES ALÉATOIRES	27
2.1 COMPARAISON DES INTERVALLES DE NOMBRE RÉELS :	28
2.2 DOMINANCE STOCHASTIQUE DU PREMIER ORDRE :	28
2.3 AUTRE FORMULATION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE DES VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES	29
2.4 EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX INTERVALLES ALÉATOIRES :	29
2.4.1 Propriétés :Aiche [2013]	30
2.4.2 Transitivité :Aiche [2013]	31
2.4.3 Remarque 5 :Aiche [2013]	33

3	EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX VARIABLES ALÉATOIRES FLOUES	34
3.1	EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX VARIABLES ALÉATOIRES FLOUES EN UTILISANT LEURS α – Coupes	35
3.1.1	Propriétés : Aiche [2013]	35
3.1.2	Transitivité : Aiche [2013]	36
3.1.3	Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires	38
3.2	EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX VARIABLES ALÉATOIRES FLOUES EN UTILISANT POSSIBILITÉ ET NÉCESSITÉ	39
3.2.1	Propriétés : Aiche [2013]	39
3.2.2	Transitivité : Aiche [2013]	43
3.2.3	Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires réelles	46
3.2.4	Expressions en termes de dominance stochastique des intervalles aléatoires	46
3.2.5	Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α – Coupes	46
	CONCLUSION GÉNÉRALE	48
	BIBLIOGRAPHIE	49

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble flou	5
1.2	Présentation de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$	8
1.3	Noyau, Support et Hauteur d'un sous-ensemble flou.	9
1.4	Formes usuelles des fonction d'appartenance	11
1.5	Extension d'une fonction f	12
1.6	Inclusion de deux sous-ensembles flous	14
1.7	Intersection de deux sous-ensemble flous avec l'opération min	15
1.8	Union de deux ensemble flous avec l'opération max	15
1.9	Complémentaire d'un ensemble flou	16
1.10	Représentation d'un nombre flou et un nombre réel	19
1.11	Représentation d'un nombre flou triangulaire (a, α, β)	19
1.12	Exemple d'un nombre flou triangulaire	20
1.13	Présentation d'un nombre flou trapézoïdal	21
1.14	Exemple d'un nombre flou trapézoïdal	21

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'UNE des principales missions de la recherche opérationnelle est d'aider à prendre des décisions en vue d'une gestion efficace, rationnelle et logique.

Depuis les années 70, les activités de recherche en Recherche Opérationnelle au niveau mondial n'ont cessé de se développer tant au niveau de ses concepts théoriques et de l'amélioration techniques de ses outils d'optimisation qu'au niveau applicatifs où elle intervient de manière cruciale dans des secteurs de plus en plus nombreux et diversifiés comme : « la production industrielle, la planification, le transport, l'informatique, les télécommunications et l'énergie, mais aussi dans les banques et les assurances... etc. Les modèles traditionnels développés dans le cadre des méthodes quantitatives de gestion considéraient en général un critère unique, pour lequel il existe une solution optimale. Les algorithmes mis au point consistaient alors à définir un moyen d'atteindre le plus rapidement possible une telle solution. Cependant, dans de nombreux cas, cette modélisation ne traduit pas exactement la réalité.

La plupart des problèmes réels intervenant en mathématiques de décision sont de nature qui impose la prise en compte de plusieurs critères qui sont souvent antagonistes. Tout décideur est obligé de tenir compte du maximum d'éléments en sa possession pour aboutir à la meilleure décision possible.

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'une expérience ou d'un problème d'optimisation ou de décision qui se ramène à un programme mathématique, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Cette hypothèse est peu réaliste compte tenu du fait que ces derniers peuvent être imprécises avec imprécision de nature floue ou aléatoire.

Dans pas mal de situations, le flou et l'aléa peuvent se trouver combiné par exemple en programmation mathématique, ce qui a donné naissance à la programmation floue stochastique.

Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme pour cette combinaison. Elles ont été introduites en premiers lieu par [Kwakernaak \[1979\]](#) qui les définit comme étant des variables aléatoires dont les valeurs sont des intervalles flous.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa dans un contexte d'optimisation.

Ce travail s'évêtu à faire avancer les débats dans ce domaine dans [Aiche \[2013\]](#) en proposant des résultats concernant les extensions, aux variables aléatoires floues, de la dominance stochastique des variables aléatoires réelles, en deux étapes :

La première consiste à les étendre des variables aléatoires réelles aux intervalles aléatoires réelles,

La deuxième, des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues [Aiche \[2013\]](#).

Et il est organisé en 3 chapitres comme suit :

Chapitre 01 : Ce chapitre est partagé en 3 sections, nous avons défini et rappelé quelques notions nécessaires pour ce travail à savoir : les notions de base de la théorie des ensembles flous, la théorie des probabilités et la combinaison du flou et de l'aléa.

Chapitre 02 : Nous avons repris l'extension de la dominance stochastique des intervalles aléatoires établie dans [Aiche \[2013\]](#), sur la base de la comparaison des intervalles de nombres réels.

Chapitre 03 : Nous reprenons , la généralisation de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues, en utilisant les α – *coupes* des ces dernières, les intervalles flous comme des distributions de possibilité établie dans [Aiche \[2013\]](#).

Ce travail se termine par une conclusion ou nous avons représenté les principaux résultats obtenus et sans oublier les principales références bibliographiques.

PRÉLIMINAIRES

1

1.1 THÉORIE DES ENSEMBLES FLOUS :

Il est beaucoup plus facile de classer des individus selon leurs sexes, leurs niveaux d'étude mais il est difficile de les classer par degré d'intelligence (on ne peut pas mesurer le degré d'intelligence exact d'un individu), c'est là où intervient la théorie des ensembles flous.

En effet, la théorie des ensembles flous est une généralisation de la théorie des ensembles classiques, en introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, autrement dit, nous permettons à cette dernière d'être dans un autre état que vrai ou faux.

La théorie des sous-ensembles flous est assez récente, elle a débuté en 1965 avec la publication de l'article "Fuzzy sets" Zadeh [1965] (ensembles flous) par Lotfi Aliasker Zadeh, qui a proposé pour la première fois le concept des sous-ensembles flous pallier la modélisation de l'incertitude des modèles classiques. Et aussi Didier Dubois et Heny Prade Dubois et Prade [1978] Depuis lors, plusieurs auteurs ont étudié les propriétés et des applications proposés des ensembles flous Yager [1980]

Dans cette section nous allons expliquer les fondements mathématiques de la théorie des sous-ensembles flous ainsi que les concepts de base de cette dernière.

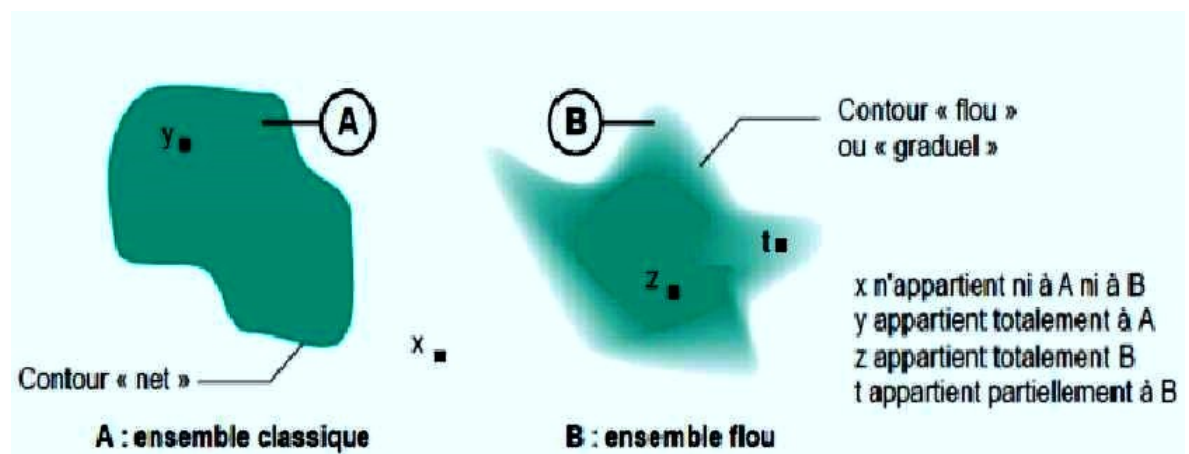
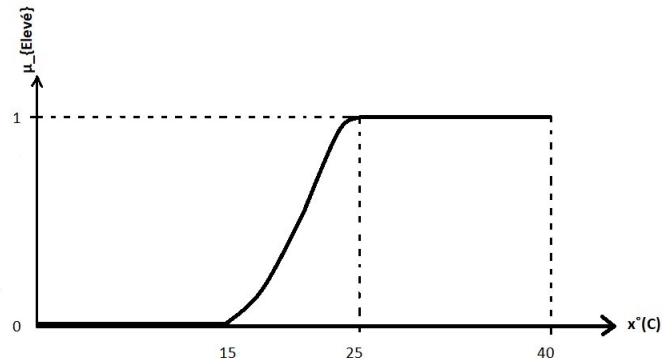


FIGURE 1.1 – Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble flou

EXEMPLE 1 :

Considérons une personne chargée d'évaluer la température d'une pièce. Plutôt que d'exprimer la température de façon précise, elle peut être tentée de fournir l'information sous une forme naturelle comme "la température est élevée". Pour pouvoir manipuler cette information par la suite, il est nécessaire d'explicitier sur l'échelle des températures ce que représente l'ensemble des températures de niveau élevé. On définit donc sur le référentiel des températures possibles, par exemple $\tilde{A} = [0,40]$, le sous-ensemble flou des "températures élevées". Pour construire la fonction d'appartenance Elevé, on a considéré ici qu'en dessous de 15°C , la température n'est certainement pas élevée, d'où un degré d'appartenance nul, et que les températures au dessus de 25°C sont assurément élevées, d'où un degré d'appartenance maximum. Entre ces deux zones de températures, l'appartenance passe graduellement de 0 à 1.

On illustre ceci dans le graphe suivant :



1.1.1 Notion de base des ensembles flous :

Dans la théorie ensembliste classique, on peut indiquer les éléments $\{x\}$ appartiennent à une certaine classe de A de l'ensemble X et ceux qui n'y appartiennent pas par une fonction caractéristique μ_A prenant respectivement deux valeurs 1 ou 0

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

si l'appartenance de certains éléments A de X n'est pas absolue ($\{x\}$ appartiennent un peu au sous-ensemble), on peut remplacer la fonction caractéristique par une fonction d'appartenance, qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, cette classe est appelée sous-ensemble flou de X noté \tilde{A} .

EXEMPLE 2 : AICHE [1995]

On se propose de mesurer l'acuité visuelle (moyenne des deux yeux) des individus d'une certaine localité X. Soit A l'ensemble des individus en cette localité ayant une bonne acuité visuelle. Cet ensemble a un contour mal défini. En effet, il y a des individus dont l'acuité visuelle est égale à 1 ; 0.8 ; 0.6 ou toutes autre valeur comprise entre 0 et 1.

Dans ce cas on dit que A est un sous ensemble flou on le note par \tilde{A} .

DÉFINITION 1 :

Soit E un ensemble référentiel appelé univers (qui peut être fini ou infini, discret ou continu, ordonné ou non) dont les éléments sont notés par x . On définit un ensemble flou \tilde{A} dans E par la donnée d'une application $\mu_{\tilde{A}}$ de E dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que :

$$\mu_{\tilde{A}} : \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)$$

qui à tout élément $x \in E$ associe une valeur réelle. Cette fonction est appelée " fonction d'appartenance " de l'ensemble flou, généralisant ainsi le concept d'appartenance et donc la notion de fonction caractéristique. L'ensemble flou est noté par \tilde{A} et est défini par :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)), x \in E\}$$

On observe les trois cas possibles suivants :

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } \tilde{A} \\ 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 & \text{si } x \text{ appartient partiellement à } \tilde{A} \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient entièrement à } \tilde{A} \end{cases}$$

EXEMPLE 3 :

Si $E = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\}$ alors on peut définir un ensemble flou par :

$$\tilde{A} = \{(x_1, 0.3); (x_2, 1); (x_3, 0.9); (x_4, 0); (x_5, 0.5)\}$$

A tout élément x de E , la valeur associée $\mu_{\tilde{A}}(x)$ n'est pas nécessairement égale à 0 ou à 1, elle est à priori quelconque et désigne le degré d'appartenance de x à l'ensemble E .

REMARQUE 1 :

On peut faire remarquer que si A est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1.

On a dans ce cas :

$$\mu_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

-Un ensemble classique constitue donc un cas particulier d'ensemble flou.

EXEMPLE 4 :

Le sous-ensemble \tilde{A} des âge compris entre 20 et 40 ans a pour fonction caractéristique :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 20 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est donné dans la figure suivante :

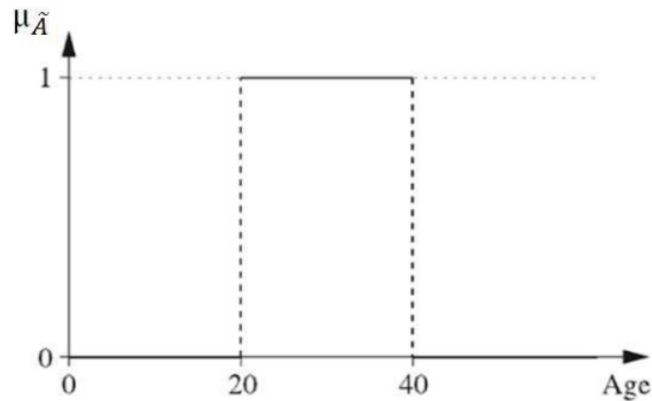


FIGURE 1.2 – Présentation de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$

1.1.2 Caractéristique d'un ensemble flou :

Un ensemble flou \tilde{A} est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$. A partir de laquelle, un certain nombre de caractéristiques de l'ensemble flou peuvent être étudiées.

Noyau :

Le noyau d'un ensemble flou \tilde{A} de X , noté $\mathbf{Noy}(\tilde{A})$, est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1). Il est défini par :

$$\mathbf{Noy}(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Support :

Le support d'un ensemble flou \tilde{A} de X , noté $\mathbf{supp}(\tilde{A})$, est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au moins un petit peu. Il est défini par :

$$\mathbf{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}} > 0\}$$

Hauteur :

La hauteur d'un ensemble flou \tilde{A} de X , notée $\mathbf{Haut}(\tilde{A})$, est le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à \tilde{A} . Elle est définie par :

$$\mathbf{Haut}(\tilde{A}) = \sup \mu_{\tilde{A}}(x)$$

REMARQUE 2 :

On dira alors qu'un sous-ensemble flou \tilde{A} est normalisé si sa hauteur $\text{Haut}(\tilde{A})$ est égale 1.

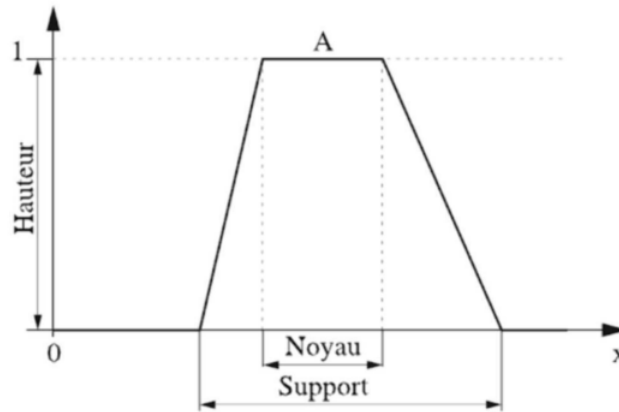


FIGURE 1.3 – Noyau, Support et Hauteur d'un sous-ensemble flou.

Un ensemble flou \tilde{A} est normalisé s'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$.

Ensemble flou convexe :

Un ensemble flou $\tilde{A} \in X$ est dit convexe si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$$

Cardinalité :

La cardinalité d'un ensemble flou \tilde{A} de X , noté $|\tilde{A}|$, est le nombre d'éléments appartenant à \tilde{A} pondéré par leur degré d'appartenance. Formellement, pour \tilde{A} fini,

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

EXEMPLE 5 :

Soit \tilde{A} un sous-ensemble flou tel que :

$$\tilde{A} = (x_1/0.9); (x_2/1); (x_3/0.5); (x_4/0.1); (x_5/0.3); (x_6/0.7); (x_7/0)$$

D'après les définitions les caractéristique de \tilde{A} sont :

$$\text{Noy}(\tilde{A}) = x_2$$

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6\}$$

$$h(\tilde{A}) = 1 \implies \tilde{A} \text{ normalis } (\exists x_2 \in \tilde{A} \text{ telque } \mu_{\tilde{A}}(x_2) = 1)$$

$$|\tilde{A}| = \sum \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.9 + 1 + 0.5 + 0.1 + 0.3 + 0.7 + 0 = 3.5$$

EXEMPLE 6 :

Soit $X = [0, 35]$ (l'ensemble des âges) tel que $\gamma \in [0, 1]$, et soit \tilde{A} sous-ensemble de X des âges jeunes définie par :

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [20, 30] \\ 0 & \text{si } x \geq 35 \text{ et } x \leq 15 \\ \gamma & \text{si } x \in]15, 20[\text{ et } x \in]30, 35[\end{cases}$$

D'après les définitions les caractéristiques de \tilde{A} sont :

$$\text{Noy}(\tilde{A}) = [20, 30]$$

$$\text{Supp}(\tilde{A}) =]15, 35[$$

$$h(\tilde{A}) = 1 \implies \tilde{A} \text{ normalise}$$

1.1.3 Fonction d'appartenance :

Les fonctions d'appartenance (FAs), permettent de définir les variables linguistiques. A chaque valeur de la variable linguistique est associée une fonction d'appartenance $\mu_F(x)$. Ceci est important pour le traitement numérique en logique floue.

Les fonctions d'appartenance sont différentes formes, nous en citons :

- **La fonction triangulaire** : Elle est caractérisée par trois paramètres (a, b, c) qui sont les sommets du triangle.

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- **La fonction trapézoïdale** : Elle est définie par quatre paramètres (a, b, c, d)

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- **La fonction gaussienne** : Elle définie par m et σ le centre de l'épaisseur de la fonction gaussienne, respectivement.

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

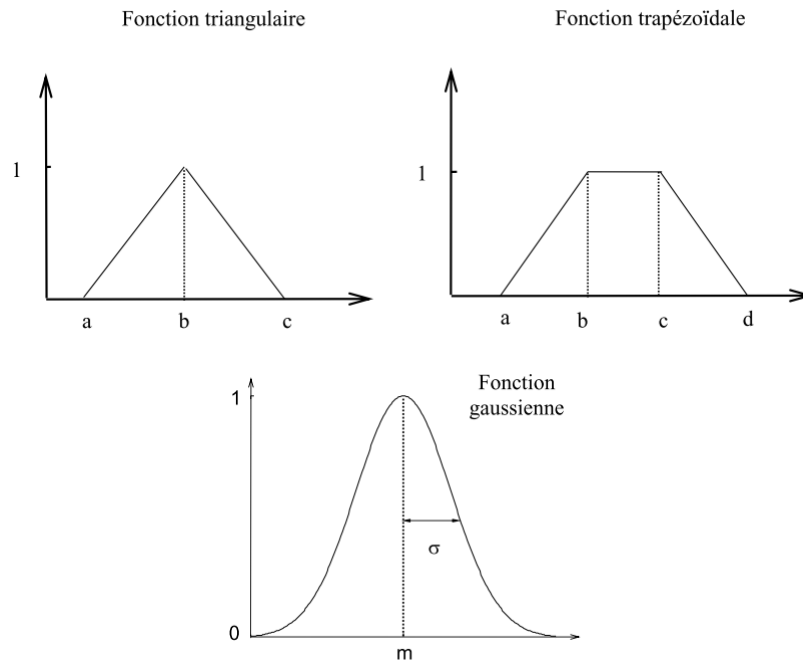


FIGURE 1.4 – Formes usuelles des fonction d'appartenance

1.1.4 α – Coupe :

Il peut être utile de décrire un sous-ensemble ou en référant à des sous-ensembles ordinaires. Une façon de réaliser une approximation d'un sous-ensemble flou consiste à fixer un seuil inférieur sur les degrés d'appartenance. Le sous-ensemble ordinaire \tilde{A}^α de X associé à \tilde{A} pour le seuil α est l'ensemble des éléments $\{x\}$ qui appartiennent à \tilde{A} avec un degré au moins égale à α .

DÉFINITION 2 : YAGER [1980]

Pour un seuil donné α de $[0,1]$ on définit l' α – Coupe du sous-ensemble flou A de X (ou sous-ensemble de niveau associé à A) comme le sous-ensemble :

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

et \tilde{A}^α est un sous-ensemble ordinaire de fonction caractéristique :

$$\chi_{\tilde{A}^\alpha} = 1 \text{ si et seulement si } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$$

REMARQUE 3 :

On peut définir l'ensemble α – coupe strict de \tilde{A} noté \tilde{A}^α comme

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

EXEMPLE 7 :

Soit \tilde{A} un sous-ensemble flou tel que :

$$\tilde{A} = \{(x_1/0); (x_2/0.5); (x_3/0.6); (x_4/0.7); (x_5/0.9); (x_6/0.2); (x_7/0.7)\}$$

La coupe de niveau $\alpha = 0.6$ est l'ensemble : $\tilde{A}^{0.6} = \{x_3; x_4; x_5; x_7\}$

- La coupe de niveau stricte $\alpha = 0.6$ est l'ensemble $\tilde{A}^{0.6} = \{x_4; x_5; x_7\}$

PROPRIÉTÉS DES α – coupes :

En choisissant un niveau α , on indique le seuil à partir duquel l'appartenance est considéré comme satisfaite. Plus on est exigeant sur la notion d'appartenance de $\{x\}$, plus on augmente le seuil α , et moins il existe d'éléments $\{x\}$ de X satisfaisant cette notion d'appartenance.

Les α – coupes des sous-ensembles flous jouissent des propriétés suivantes :

Soit \tilde{A} et \tilde{B} deux sous-ensembles flous alors on a :

- $(\tilde{A} \cap \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha \cap \tilde{B}^\alpha$
- $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha \cup \tilde{B}^\alpha$
- Si $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ alors $\tilde{A}^\alpha \subseteq \tilde{B}^\alpha$
- $(\tilde{A} + \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha + \tilde{B}^\alpha$
- $(\lambda \tilde{A})^\alpha = \lambda \tilde{A}^\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$

1.1.5 Principe d'extension :

Le principe d'extension [Zadeh \[1965\]](#) est l'un des plus importants de la théorie des ensembles flous parce qu'il permet d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas des données floues. On suppose qu'on dispose d'une application f d'un premier ensemble de référence X vers un second ensemble de référence Y . A tout élément $\{x\}$ de X , l'application f fait correspondre un élément $\{y\}$ de Y . Soit \tilde{A} un sous-ensemble flou de X auquel $\{x\}$ appartient fortement, on se propose de lui associer un sous-ensemble \tilde{B} de Y auquel $\{y\}$ appartient fortement. On définit ainsi l'image d'un sous-ensemble flou par une application.

Ce qui est illustré dans la figure 1.5 [Bouchon-Meunier et Marsala \[2003\]](#)

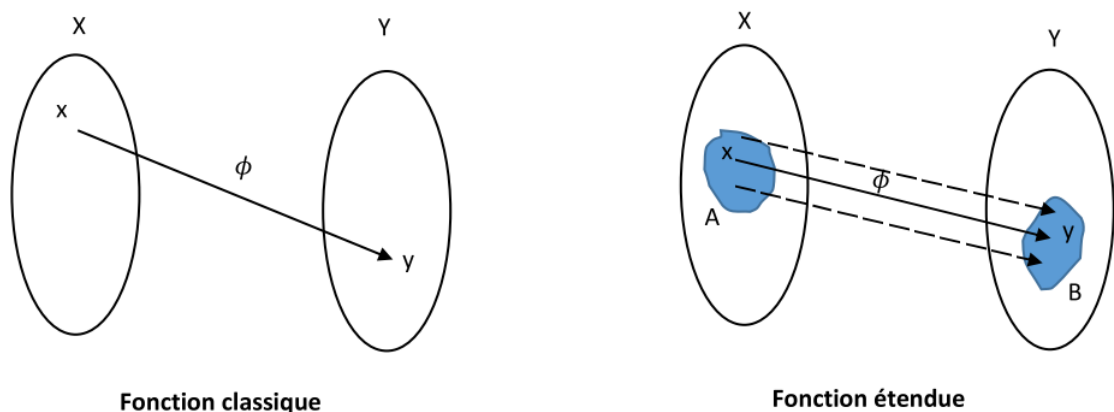


FIGURE 1.5 – Extension d'une fonction f

Définition 3 :Bouchon-Meunier [1995]

Etant donné un sous-ensemble flou \tilde{A} de X et f une application de X vers Y . Le principe d'extention permet de définir un sous-ensemble flou \tilde{B} de Y associé \tilde{A} (image directe), par l'intermédiaire de f , par :

$$\forall y \in Y, \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{\{x \in X / f(x)=y\}} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

Cas particulier

Considérons le cas où X est lui-même le produit cartésien de plusieurs ensemble de référence X_1, X_2, \dots, X_r . le produit d'extension et la définition du produit cartésien de sous-ensembles flous permettent d'associer, à leurs sous-ensembles flous respectifs $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_r$, un sous-ensemble flou \tilde{B} de Y défini par la fonction d'appartenance suivante :

$$\forall y \in Y, \mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{\{x=\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \in X / f(x)=y\}} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases}$$

Exemple 8 :Bouchon-Meunier et Marsala [2003]

Soit $X = \text{Camion, Caravane, Voiture, Moto}$, l'univers de moyens transports terrestres existants et soit $Y = \text{Rapide, Lent, Normale}$, un univers des vitesses. On sait associer une vitesse à un moyen de transport en caractérisant la vitesse d'un camion comme étant lente, celle d'une caravane (c'est-à-dire caravane +voiture) comme lente, celle d'une voiture comme normale et celle d'une moto comme rapide.

Ceci se formalisme par le biais d'une fonctions $\phi : X \rightarrow Y$ telle que : $f(\text{camion}) = \text{lente}, f(\text{caravane}) = \text{lente}, f(\text{voiture}) = \text{normale}$ et $f(\text{moto}) = \text{rapide}$.

Souhaitant maintenant déterminer la vitesse correspondante au véhicule "side-car avec remorque", nous lui associons d'abord la caractérisation floue suivante :

side-care avec remorque = 0.5 | moto + 0.4 | voiture + 0.1 | caravane.

Pour déterminer sa mesure de vitesse, on étend ϕ en appliquant le principe d'extension :

$$\mu_{\tilde{B}}(\text{lente}) = \max(\mu_{\tilde{A}}(\text{camion}), \mu_{\tilde{A}}(\text{caravane})) = \max(0; 0.1) = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{B}}(\text{normale}) = \mu_{\tilde{A}}(\text{voiture}) = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{B}}(\text{rapide}) = \mu_{\tilde{A}}(\text{moto}) = 0.5$$

Donc sa vitesse est plutôt rapide.

Exemple 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait $f(x) = x_1 + x_2$

Considérer les ensembles flous finis de \mathbb{R}

$$\tilde{A}_1 = (3 \mid 0.4), (4 \mid 0.5), (5 \mid 1), (6 \mid 0.5), (7 \mid 0.2)$$

$$\tilde{A}_2 = (6 \mid 0.2), (7 \mid 0.5), (8 \mid 1), (9 \mid 0.5), (10 \mid 0.2)$$

Alors, le degré d'appartenance de $y = 10$ dans \tilde{B} donnée par

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(10) &= \sup_{f\{x_1+x_2\}} \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)) \\ &= \max\{\min(\mu_{\tilde{A}_1}(3), \mu_{\tilde{A}_2}(7)), \min(\mu_{\tilde{A}_1}(4), \mu_{\tilde{A}_2}(6))\} \\ &= \max\{0.4, 0.2\} = 0.4 \end{aligned}$$

1.1.6 Opérations sur les ensembles flous :

Les opérations sur les ensembles flous [Diab \[2010\]](#) sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques.

Supposons que \tilde{A} et \tilde{B} sont deux sous-ensembles flous définis dans univers du discours X dont les fonctions d'appartenance respectives sont $\mu_{\tilde{A}}$ et $\mu_{\tilde{B}}$. On peut définir des opérations ensemblistes telles que l'égalité, l'inclusion, l'intersection, l'union et le complémentaire grâce à des opérations sur les fonctions d'appartenance.

Egalité :

\tilde{A} et \tilde{B} sont des égaux, on note $\tilde{A} = \tilde{B}$, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur en tout point de X :

$$\forall x \in X \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Inclusion :

\tilde{A} est dit inclus dans \tilde{B} , on note $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, si :

$$\forall x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$

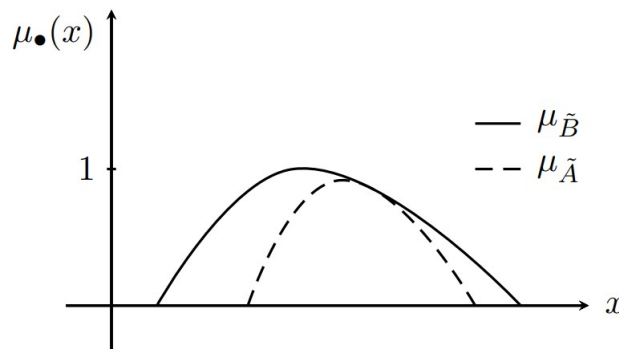


FIGURE 1.6 – Inclusion de deux sous-ensembles flous

Intersection :

L'intersection de $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, que l'on note $\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}$, est le sous-ensemble flou constitué des éléments $\{x\}$ de X affectés du plus petit des deux degrés d'appartenance $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$ et $\mu_{\tilde{\mathbf{B}}}$

$$\forall x \in X; \mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cap \tilde{\mathbf{B}}}(x) = \min(\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x), \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)) = \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) \wedge \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)$$

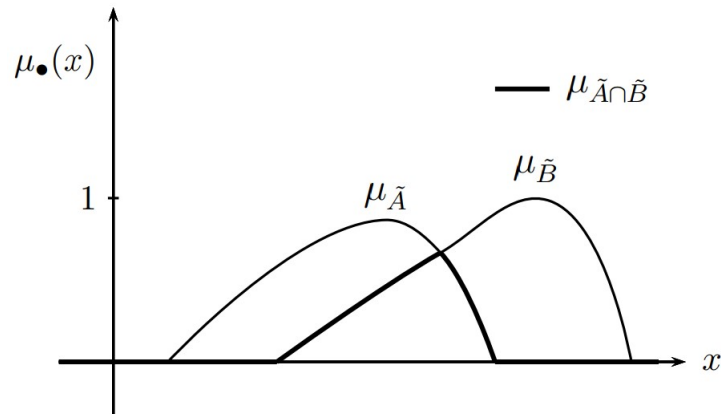


FIGURE 1.7 – Intersection de deux sous-ensemble flous avec l'opération min

Union :

L'union de $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, que l'on note $\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}$, est le sous-ensemble flou constitué des éléments $\{X\}$ de X affectés du plus grand des deux degrés d'appartenance $\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}$ et $\mu_{\tilde{\mathbf{B}}}$

$$\forall x \in X; \mu_{\tilde{\mathbf{A}} \cup \tilde{\mathbf{B}}}(x) = \max(\mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x), \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)) = \mu_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) \vee \mu_{\tilde{\mathbf{B}}}(x)$$

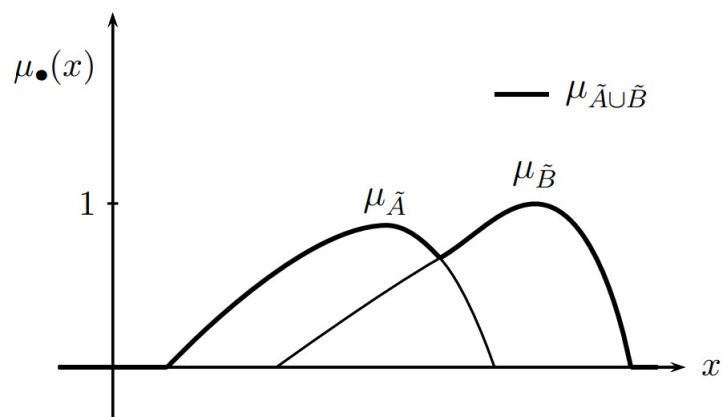


FIGURE 1.8 – Union de deux ensemble flous avec l'opération max

Complémentaire :

Le complémentaire de \tilde{A} , que l'on note $\bar{\tilde{A}}$, est le sous-ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance $\mu_{\bar{\tilde{A}}}$

$$\forall x \in X \mu_{\bar{\tilde{A}}} = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

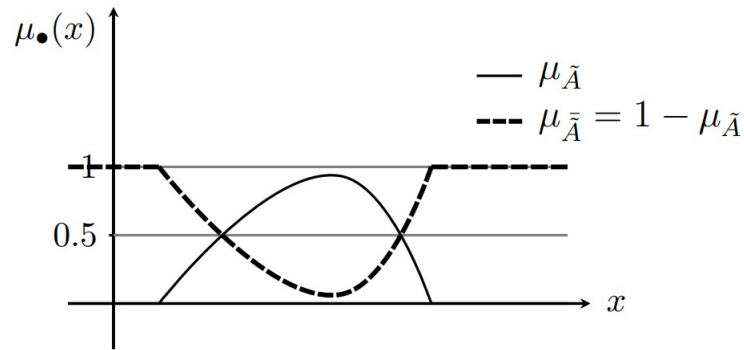


FIGURE 1.9 – Complémentaire d'un ensemble flou

EXEMPLE 10 :

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux sous-ensembles flous tel que :

$$\tilde{A} = \{(x_1/0.5); (x_2/0.2); (x_3/0.3); (x_4/0.1); (x_5/1); (x_6/0.3); (x_7/0.6)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1/0.4); (x_2/0.4); (x_3/0.8); (x_4/0.1); (x_5/0); (x_6/0.8); (x_7/0.5)\}$$

- $\tilde{A} \neq \tilde{B}$
- \tilde{A} non inclus dans \tilde{B}
- $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x_1/0.4); (x_2/0.2); (x_3/0.3); (x_4/0.1); (x_5/0); (x_6/0.3); (x_7/0.5)\}$
- $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x_1/0.5); (x_2/0.4); (x_3/0.8); (x_4/0.1); (x_5/1); (x_6/0.8); (x_7/0.6)\}$

Produit cartésien d'ensemble flous :

Soient $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n, n$ des ensembles flous référentiel respectifs X_1, X_2, \dots, X_n . On définit le produit cartésien flou $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$ par la fonction d'appartenance *Bouchon – Meunier* [1995]

$$\mu_{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n))$$

EXEMPLE 11 :

Soient $X_1 = \{jaune, bleu\}$ et $X_2 = \{rand, long\}$. On pose les ensembles flous $\tilde{A}_1 = \{(j/0.8), (b/0.2)\}$ et $\tilde{A}_2 = \{(r/0.4), (l/0.6)\}$ alors, $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \{((j,r)/0.4), ((j,l)/0.6), ((b,r)/0.2), ((b,l)/0.2)\}$
 Dans cet ensemble, "jaune" et "long" sont les attributs les plus liés.

1.1.7 Intervalle flou :

Un intervalle flou \tilde{A} est une quantité floue dont la fonction d'appartenance est quasi-concave ; on parle alors d'ensemble flou convexe qui obéit à la contrainte [Aiche \[2013\]](#) [AICHE et al. \[2013\]](#) :

$$\forall x, y, \forall z \in [x, y], \quad \mu_{\tilde{A}}(z) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$$

Les α - coupes de \tilde{A} est $\tilde{A}^\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ sont donc des intervalles fermés $[\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ et ces intervalles sont emboîtés, autrement dit : $\tilde{A}^\alpha \subseteq \tilde{A}^\beta$ si $\alpha \geq \beta$.

1.1.8 Comparaison d'intervalle flou :

Le problème de comparaison des intervalles flous [Dubois et Prade \[1978\]](#) est important en pratique ; quand on utilise des intervalle flous pour évaluer des situation, ils doivent ensuite être comparés afin faire un choix et prendre une décision. Ce problème n'est pas facile. En effet, étant donné l'imprécision des intervalles flous, il est quelquefois difficile de prétendre dans l'absolu qu'une quantité floue est plus grande ou plus petite qu'une autre.

Possibilité, Nécessité :

[Dubois et Prade \[1978\]](#) proposent de fuzzifier ces quatre relations d'ordre d'intervalles en utilisant le principe d'extension

Considérons deux intervalles flous \tilde{A} et \tilde{B} dont les fonctions d'appartenance respectives sont $\mu_{\tilde{A}}$ et $\mu_{\tilde{B}}$.

pos et nec : représentent respectivement possibilité et nécessité.

On définit la possibilité de $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ et la nécessité de $\mu_{\tilde{A}} \leq \mu_{\tilde{B}}$ comme suit :

1. pos ($\tilde{A} \leq \tilde{B}$) = $\sup(\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)). x$ et y sont des nombres réels tels que $x \leq y$.

2. nec ($\tilde{A} \leq \tilde{B}$) = $1 - \text{pos}(\tilde{A} > \tilde{B}) = 1 - \sup(\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)). x$ et y sont des nombres réels tels que $x > y$.

3. nec₂ ($\tilde{A} \leq \tilde{B}$) = $\inf\{\sup[\max(1 - \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(v) / u \geq v]\}$

4. pos₃ ($\tilde{A} \leq \tilde{B}$) = $\sup\{\inf[\min(\mu_{\tilde{A}}(u), 1 - \mu_{\tilde{B}}(v) / u \leq v]\}$

Dans le but de ramener la comparaison d'intervalles flous utilisant possibilité et nécessité à celle de nombres réels, [Dubois et Prade \[1978\]](#) ont établi les résultats suivants :

PROPOSITION 1 :

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux intervalles flous et $\tilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha]$, $\tilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \bar{b}^\alpha]$, $\tilde{A}^{1-\alpha} = [\underline{a}^{1-\alpha}, \bar{a}^{1-\alpha}]$ et $\tilde{B}^{1-\alpha} = [\underline{b}^{1-\alpha}, \bar{b}^{1-\alpha}]$ leurs coupes de niveau.

Alors on a :

1. $pos(\tilde{A} \leq \tilde{B}) \geq \alpha \iff \underline{a}^\alpha \leq \bar{b}^\alpha$
2. $nec(\tilde{A} \leq \tilde{B}) \geq \alpha \iff \bar{a}^{1-\alpha} \leq \underline{b}^{1-\alpha}$
3. $pos_3(\tilde{A} \leq \tilde{B}) \geq \alpha \iff \bar{a}^{1-\alpha} \leq \bar{b}^\alpha$
4. $nec_2(\tilde{A} > \tilde{B}) \geq \alpha \iff \underline{a}^\alpha \leq \underline{b}^{1-\alpha}$

PROPOSITION 2 :

Quelque que soient les intervalles flous \tilde{A} et \tilde{B} , on a :

1. $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) \leq pos(\tilde{A} > \tilde{B})$
2. $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) > 0 \implies pos(\tilde{A} > \tilde{B}) = 1$

1.1.9 Nombre flou :

Nombre flou est un ensemble flou \tilde{A} normalisé et convexe de \mathbb{R} dont la fonction d'appartenance est continue par morceaux.

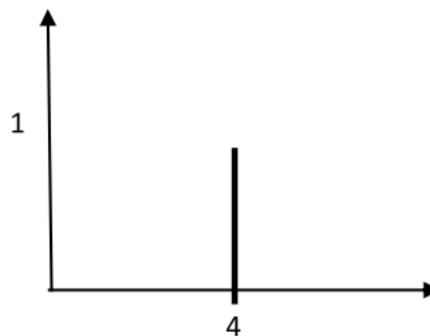
Un intervalle flou \tilde{A} dont l'ensemble $x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ est réduit à un point, est souvent appelé nombre flou.

REMARQUE 4 :

si le Noy(\tilde{A}) est un intervalle de \mathbb{R} , on parle alors d'intervalle flou .

EXEMPLE 12 :

- *Nombre réel*



• **Nombre flou**

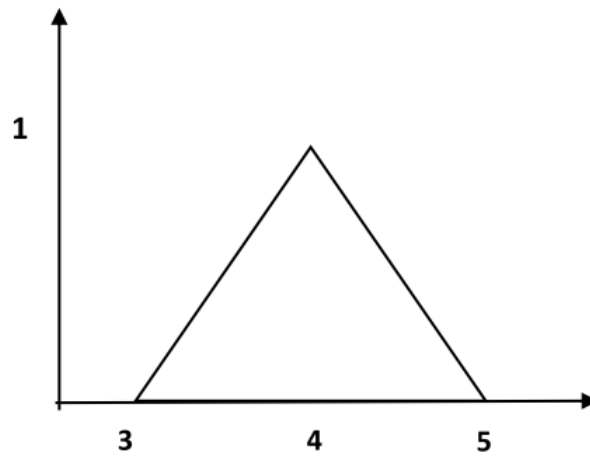


FIGURE 1.10 – Représentation d'un nombre flou et un nombre réel

1.1.10 Types de nombre flou :

Nombres floue de type triangulaire :

Un nombre flou \tilde{A} est dite de type triangulaire (a, α, β) si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & \text{si } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x = a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & \text{si } a \leq x \leq a + \beta \end{cases}$$

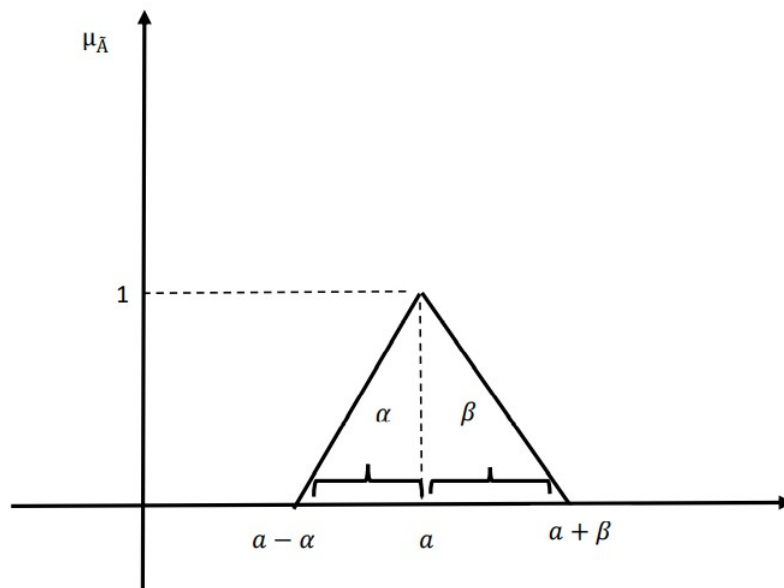


FIGURE 1.11 – Représentation d'un nombre flou triangulaire (a, α, β)

COMPARAISON DE DEUX NOMBRES FLOUS TRIANGULAIRES :

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux nombres flous triangulaires tels que : $\tilde{A}=(a,\alpha_1,\beta_1)$ et $\tilde{B}=(b,\alpha_2,\beta_2)$

1. $\tilde{A} = \tilde{B} \iff a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$

2. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, \alpha + \beta_1 \leq b + \beta_2$

EXEMPLE 13 :

L'expression vers quatre heures peut être modélisée mathématiquement par le nombre flou triangulaire symétrique \tilde{A} , dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-4|}{0.2} & \text{si } x \in [3.8, 4.2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les α – coupes d'un ensemble flou triangulaire sont les intervalles $[\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha]$ ou $\tilde{a}_1^\alpha = 0.2\alpha + 3.8$ et $\tilde{a}_2^\alpha = 0.2\alpha + 4.2$

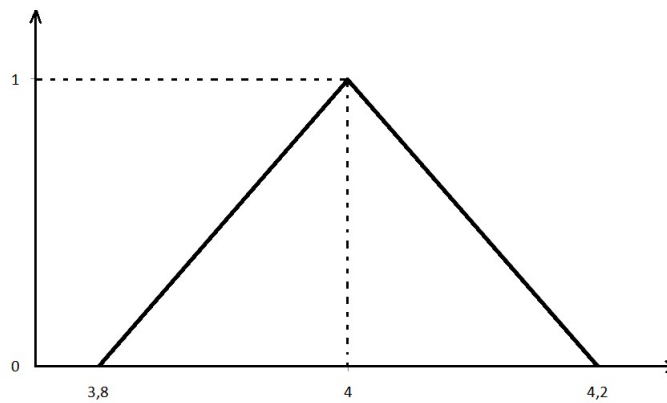


FIGURE 1.12 – Exemple d'un nombre flou triangulaire

Nombre flou de type trapézoïdal :

Un nombre flou \tilde{A} est dite de type trapézoïdal noté $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ si sa fonction d'appartenance est donné par :

$$(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L+\alpha}{\alpha} & \text{Si } a^L - \alpha \leq x \leq a^L \\ 1 & \text{Si } a^L \leq x \leq a^U, \\ \frac{a^U+\beta-x}{\beta} & \text{Si } a^U \leq x \leq a^U + \beta \end{cases}$$

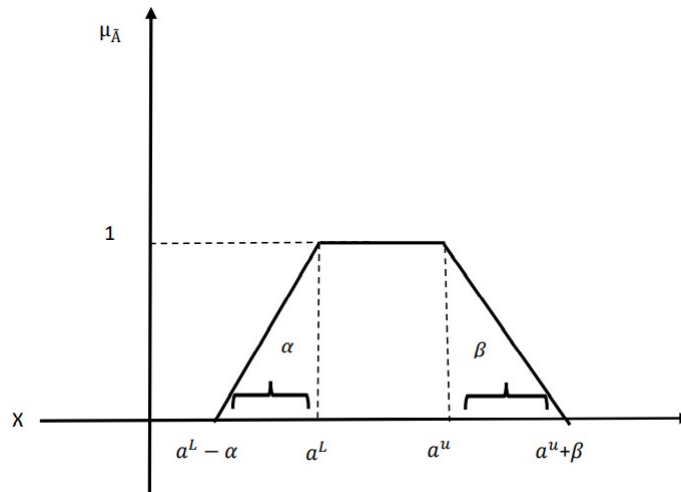


FIGURE 1.13 – Présentation d'un nombre flou trapézoïdal

EXEMPLE 14 :

L'ensemble flou des adolescents peut être représenté par le nombre flou trapézoïdal avec la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3} & \text{si } x \in [11, 14[\\ 1 & \text{si } x \in [14, 17] \\ \frac{20-x}{3} & \text{si } x \in]17, 20] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les α -coupes d'un ensemble flou trapézoïdal sont les intervalles $[3\alpha + 11, -3\alpha + 20]$; avec $\alpha \in [0, 1]$

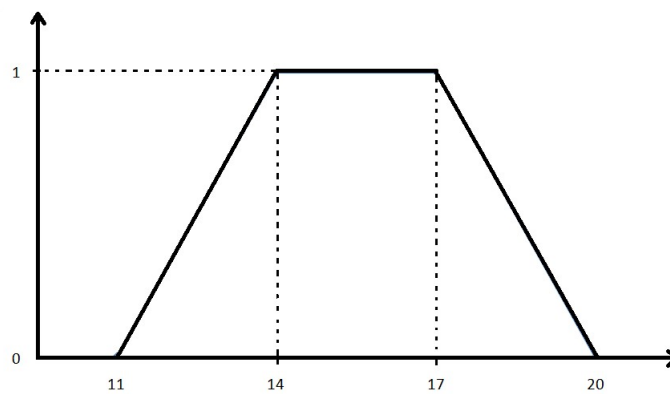


FIGURE 1.14 – Exemple d'un nombre flou trapézoïdal

1.2 ÉLÉMENT DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS :

La théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. Quand on réalise une expérience dont le résultat est déterminé par le hasard, si on peut citer tous les résultats possibles sans pour autant savoir celui qui va se réaliser, on dit que l'expérience est aléatoire. On parle alors de la probabilité que des événements se réalisent, qui est un nombre réel compris entre 0 et 1. plus ce nombre est grand, plus le risque ou la chance que cet événement se produise est grand. Dans cette section nous allons rappeler les notions nécessaires et les propriétés principales de cette théorie, qui vont nous aider dans la suite de ce travail.

1.2.1 Notions d'espace mesurable :

Soit Ω l'espace fondamental, il peut être fini, infini, dénombrable ou non.

1.2.2 Tribus d'évènements :

Une famille F de sous ensembles de Ω s'appelle tribu si :

- $\Omega \in F$,
 - $\forall A \in F \Rightarrow A^c \in F$, où A^c désigne le complémentaire de A ,
 - $\forall A \in F, \forall B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$,
- quelque soit la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F , on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$

1.2.3 Espace probabilisable :

Le couple (Ω, F) où ensemble fondamental et F tribu s'appelle espace mesurable ou probabilisable.

Tout élément de F s'appelle évènement.

1.2.4 Espace probabilisé :

Soit (Ω, F) un espace probabilisable, une probabilité P est une application de $F \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$P(\Omega) = 1,$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ où les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints et I dénombrable.
 (Ω, F, P) s'appelle espace probabilisé.

1.2.5 Tribu borélienne sur \mathbb{R}

La Tribu borélienne $B_{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2.6 Applications mesurables :**DÉFINITION 04 :**

Soient (Ω, \mathcal{F}) et (E, \mathcal{T}) deux espaces probabilisables,
Toute application $X : \Omega \rightarrow E$ est dite mesurable si $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

PROPOSITION 3 :

Si f et g sont des applications mesurables ;
Alors les applications suivantes sont mesurables :

- $f + g$
- fg
- $\inf(f, g)$
- $\sup(f, g)$
- cf avec c constante réelle.

1.2.7 Variables aléatoires réelles :**DÉFINITION 05 :**

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable X d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$,

c'est à dire : $\forall B \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \Rightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

On peut associer à l'évènement B une probabilité par l'intermédiaire de X telle que $P(X^{-1}(B)) = P_X(B)$.

La probabilité P_X ainsi définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ s'appelle loi de probabilité ou distribution de probabilité de la variable aléatoire X .

Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition F de la variable aléatoire X , la fonction définie de $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ par

$$F(t) = P(X \leq t).$$

1.3 COMBINAISON DU FLOU ET DE L'ALÉA :

L'étude des phénomènes de la vie ne nous garantit pas des résultats exactes. Ces dernières peuvent être floues si leur réalisation aussi. Certains chercheurs se sont intéressés à la résolution de ce type de problèmes tels que [Li et al. \[1982\]](#), [Ammar \[2009\]](#) et [Iskander \[2005\]](#) et bien d'autres, Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de la combinaison du flou et d'aléa. Elles sont définies par [Kwakernaak \[1979\]](#) comme suit :

1.3.1 Variables aléatoires floues :

[Kwakernaak \[1979\]](#) considère une variable aléatoire floue comme une variable aléatoire dont les valeurs sont des intervalles flous comme suit

DÉFINITION 06 : KWAKERNAAK [1979]

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité . une variable aléatoire floue \tilde{X} est une application de (Ω, F, P) à valeurs dans l'ensemble des intervalles flous $F(\mathbb{R})$ comme suit :

$$\tilde{X} : \Omega \rightarrow F(\mathbb{R})$$

$$\omega \rightarrow \tilde{X}(\omega)$$

On note l' α – coup de \tilde{X} par $\tilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{X}^\alpha(\omega), \overline{X}^\alpha(\omega)]$ où

$$\underline{X}^\alpha(\omega) = \inf \{x / X(\omega)(x) \geq \alpha\},$$

$$\overline{X}^\alpha(\omega) = \sup \{x / X(\omega)(x) \geq \alpha\} \text{ et } X(\omega) \text{ est la fonction d'appartenance de } X.$$

1.3.2 Variables aléatoires floues discrètes :

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r\}$ et $p(\omega_k) = p_k, k = 1, 2, 3, \dots, r$ et $\sum_{k=1}^r p_k = 1$, une distribution de probabilité discrète.

Une variable aléatoire floue \tilde{X} est dite discrète si à chaque réalisation aléatoire $\omega_k \in \Omega$,

la valeur $\tilde{X}(\omega_k)$ est un intervalle flou comme suit :

$$P(\tilde{X}(\omega_k) = \tilde{a}_k) = p_k, k = 1, 2, 3, \dots, r, \text{ où } \tilde{a}_k, k = 1, 2, 3, \dots, r \text{ sont des intervalles flous.}$$

EXEMPLE 16 : AICHE [2013]

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé où :
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ un espace discret fini, P_ω la distribution de probabilité suivante :

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

On considère la variable aléatoire floue discrète \tilde{X} dans le cas où $\tilde{X}(\omega_1)$ et $\tilde{X}(\omega_2)$ sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance peuvent être discrètes ou continues comme suit :

Im $\tilde{X}(\omega) = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\}$ où \tilde{a}_1 et \tilde{a}_2 sont des nombres flous dont les fonctions d'appartenance respectives $\mu_{\tilde{a}_1}$ et $\mu_{\tilde{a}_2}$ sont discrètes telles que :

$$\mu_{\tilde{a}_1}(1) = \mu_{\tilde{a}_2}(2) = 0.2, \mu_{\tilde{a}_1}(3) = \mu_{\tilde{a}_2}(4) = 0.9, \mu_{\tilde{a}_1}(5) = \mu_{\tilde{a}_2}(6) = 0.6$$

et $P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{a}_1) = 0.25$ et $P(\tilde{X}(\omega_2) = \tilde{a}_2) = 0.75$.

On obtient les variables aléatoires réelles discrètes $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$. Dont les distributions de probabilité ainsi que leur degré de comparabilité avec \tilde{X} sont comme suit :

$$\left(\begin{array}{lll} P\{X_1(\omega_1) = 1\} = 0.25 & P\{X_1(\omega_2) = 2\} = 0.75 & X(\omega)(X_1) = 0.2 \\ P\{X_2(\omega_1) = 3\} = 0.25 & P\{X_2(\omega_2) = 4\} = 0.75 & X(\omega)(X_2) = 0.9 \\ P\{X_3(\omega_1) = 5\} = 0.25 & P\{X_3(\omega_2) = 6\} = 0.75 & X(\omega)(X_3) = 0.6 \end{array} \right)$$

Im $\tilde{X}(\omega) = \{\tilde{\eta}, \tilde{\xi}\}$ où $\tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance respectives sont continues et définies comme suit :

$$\mu_{\tilde{\eta}} = \left(\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x \in]3,4] \\ 1 & \text{si } x \in]4,5] \\ -x + 6 & \text{si } x \in]5,6] \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{array} \right)$$

$$\mu_{\tilde{\xi}} = \left(\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x \in]4,5] \\ 1 & \text{si } x \in]5,6] \\ -x + 7 & \text{si } x \in]6,7] \\ 0 & \text{si } x > 7 \end{array} \right)$$

et on a $P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{\eta}) = 0.25$ et $P(\tilde{X}(\omega_1) = \tilde{\xi}) = 0.75$

Il existe une infinité de variables aléatoires réelles X_k telles que $X(\omega)(X_k) = a_k \in [0, 1]$.

On peut extraire certaines parmi elles en considérant par exemple $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.8$.

On obtient les variables aléatoires réelles suivantes avec leurs distributions de probabilité :

$$\left(\begin{array}{lll} P\{\underline{X}_1(\omega_1) = 3.4\} = 0.25 & P\{\underline{X}_1(\omega_2) = 4.4\} = 0.75 & X(\omega)(\underline{X}_1) = 0.4 \\ P\{\overline{X}_1(\omega_1) = 5.6\} = 0.25 & P\{\overline{X}_1(\omega_2) = 6.6\} = 0.75 & X(\omega)(\overline{X}_1) = 0.4 \\ P\{\underline{X}_2(\omega_1) = 3.8\} = 0.25 & P\{\underline{X}_2(\omega_2) = 4.8\} = 0.75 & X(\omega)(\underline{X}_2) = 0.8 \\ P\{\overline{X}_2(\omega_1) = 5.2\} = 0.25 & P\{\overline{X}_2(\omega_2) = 6.2\} = 0.75 & X(\omega)(\overline{X}_2) = 0.8 \end{array} \right)$$

1.3.3 Variables aléatoires floues normales :

Une variable aléatoire floue est une vague perception d'une variable aléatoire réelle, nous considérons une variable aléatoire *Kwakernaak* [1979], originale, réelle X normalement distribuée d'espérance μ et de variance σ^2 . En pratique, l'espérance μ de X est mal connue, c'est à peu près μ , donc représentée par l'intervalle flou μ , alors nous avons une variable aléatoire floue \tilde{X} normalement distribuée d'espérance floue et de variance réelle σ^2 et telle que considérée dans Shapiro [15] $\forall \alpha \in [0, 1], \underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \bar{\mu}^\alpha$, où $\underline{\mu}^\alpha$ et $\bar{\mu}^\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $\tilde{\mu}^\alpha = [\underline{\mu}^\alpha, \bar{\mu}^\alpha]$.

Nous déduisons que \underline{X}^α et \bar{X}^α sont des variables aléatoires normales réelles d'espérances respectives $\underline{\mu}^\alpha$ et $\bar{\mu}^\alpha$ et de même variance, σ^2 , où \underline{X}^α et \bar{X}^α sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $\tilde{X}^\alpha = [\underline{X}^\alpha(\omega), \bar{X}^\alpha(\omega)]$ puisque $\underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \bar{\mu}^\alpha$, donc $\forall t \in R, F_{\underline{X}^\alpha}(t) \leq F_X(t) \leq F_{\bar{X}^\alpha}(t)$, $F_{\underline{X}^\alpha}, F_X, F_{\bar{X}^\alpha}$ sont les fonctions de répartition de $\underline{X}^\alpha, X, \bar{X}^\alpha$ respectivement. *Shapiro* [2008]

EXTENSION DE LA DOMINANCE
STOCHASTIQUE AUX INTERVALLES
ALÉATOIRES

2

Dans ce chapitre, l'extension de la dominance stochastique de premier ordre des variables aléatoires aux intervalles aléatoires. Aiche [2013] C'est une extension direct établie dans Aiche [2013] en s'appuyant sur l'ordre des intervalles de nombre réels et la définition de la dominance stochastique du premier ordre.

2.1 COMPARAISON DES INTERVALLES DE NOMBRE RÉELS :

Soient $\tilde{A}=[\underline{a}, \bar{a}]$ et $\tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}]$ deux intervalles réels. Donc \bar{a} , \underline{a} , \bar{b} et \underline{b} sont des nombres réels tels que $\bar{a} \geq \underline{a}$ et $\bar{b} \geq \underline{b}$. Pour ordonner \tilde{A} et \tilde{B} , nous avons quatre relations $>_i, i = 1, 2, 3, 4$ définies dans Dubois et Prade [1988] comme suite

Définition 07 :Dubois et Prade [1988]

1. $[\underline{a}, \bar{a}] >_1 [\underline{b}, \bar{b}] \iff \underline{a} > \bar{b}$ (i.e. $\forall x \in A, \forall y \in B, x > y$)
2. $[\underline{a}, \bar{a}] >_2 [\underline{b}, \bar{b}] \iff \underline{a} \geq \underline{b}$ (i.e. $\forall x \in A, \exists y \in B, x > y$)
3. $[\underline{a}, \bar{a}] >_3 [\underline{b}, \bar{b}] \iff \bar{a} > \bar{b}$ (i.e. $\exists x \in A, \forall y \in B, x > y$)
4. $[\underline{a}, \bar{a}] >_4 [\underline{b}, \bar{b}] \iff \bar{a} \geq \underline{b}$ (i.e. $\exists (x, y) \in A \times B, x > y$)

La relation $>_1$ est la plus forte, $>_4$ est la plus faible, $>_2$ et $>_3$ sont les intermédiaires., d'où les implications suivantes :

Pour $A=[\underline{a}, \bar{a}]$ et $B = [\underline{b}, \bar{b}]$, deux intervalles de nombres réels, nous avons :

1. $A >_1 B \Rightarrow A >_2 B \Rightarrow A >_4 B$.
2. $A >_1 B \Rightarrow A >_3 B \Rightarrow A >_4 B$.

La relation $>_1$ est un ordre d'intervalle Fishburn [1987].

On déduit de la définition 7 que $A >_4 B \iff -(B \geq_1 A)$

2.2 DOMINANCE STOCHASTIQUE DU PREMIER ORDRE :

Le concept de la dominance stochastique du premier ordre consiste à comparer les distributions de probabilité de deux variable aléatoires a et b comme suit :

DÉFINITION 08 :AICHE [2013]

Soient a et b deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P) .

a est dite stochastiquement dominée par b si $P(\omega : a(\omega) > x) \leq P(\omega : b(\omega) > x) \forall x \in R$.

on note $a \leq_{s,d} b$

Autrement dit : a dite stochastiquement dominé par b si $F_a(x) \geq F_b(x) \forall x \in R$; où F_a et F_b sont les fonctions de répartition de a et b respectivement

2.3 AUTRE FORMULATION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE DES VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de fonctions de répartition F_X et F_Y définies par :

$$P(X \leq x) = F_X(x) \text{ et } P(Y \leq x) = F_Y(x)$$

X est dominé stochastiquement par Y , noté $X \prec^{St} Y$ comme suit :

$$X \prec^{St} Y \Leftrightarrow F_X(x) \geq F_Y(x)$$

car on a $X \prec^{St} Y \Leftrightarrow P(X > x) \leq P(Y > x) \forall x \in R$

On sait que si A^c est le complémentaire de $A \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

Donc événement complémentaire de $\{X > x\}$ est $\{X \leq x\}$

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$$

De même : $P(Y > x) = 1 - P(Y \leq x) \forall x \in R$

Donc $P(X > x) \leq P(Y > x) \forall x \Leftrightarrow 1 - P(X \leq x) \leq 1 - P(Y \leq x) \forall x \in R$

$$\Rightarrow 1 - F_X(x) \leq 1 - F_Y(x) \forall x \in R$$

$$\Rightarrow F_X(x) \geq F_Y(x) \forall x \in R$$

Exemple 15 : la dominance stochastique des variables aléatoires

Soit X, Y des variables aléatoires réels

Montrons que Si $X \leq Y$ alors $X \prec^{St} Y$:

$$X < Y \Rightarrow X \prec^{St} Y$$

On a $\forall x \in R$,

$$X > x \Rightarrow Y > x \Rightarrow \{X > x\} \subset \{Y > x\}$$

$$\Leftrightarrow P(X > x) \leq P(Y > x) \forall x \in R$$

Car on sait que si deux événements A et B alors :

$$\text{Si } A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

2.4 EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX INTERVALLES ALÉATOIRES :

Définition 09 : la dominance stochastique des intervalles aléatoires :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

On dit qu'un intervalle aléatoire A est (i, j) stochastiquement dominé par un intervalle aléatoires B

$$\text{si } P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : B(\omega) >_j x\} \forall x \in]-\infty, +\infty[.$$

$$\text{On note } A \leq_{i,j}^{s,d} B$$

Les résultats suivants ont été établie dans Aiche [2013]

2.4.1 Propriétés :Aiche [2013]

Proposition 4 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \bar{a}(\omega)]$ un intervalle aléatoire, où $\underline{a}(\omega)$ et $\bar{a}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles telles que $\forall \omega \in \Omega, \underline{a}(\omega) < \bar{a}(\omega)$.

On a alors $\forall x \in R : P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\}$

Autrement dit $\forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{3, 4\}$ on a : $P\{\omega : A(\omega) >_i(x)\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j(x)\} \forall x \in R$.

Preuve :Aiche [2013] Soit $A(\omega) = [\underline{a}(\omega), \bar{a}(\omega)]$ un intervalle aléatoire, où $\underline{a}(\omega)$ et $\bar{a}(\omega)$ sont des variable aléatoires réelles telles que $\forall \omega \in \Omega, \underline{a}(\omega) < \bar{a}(\omega)$.

Nous avons : Pour $i \in \{1, 2\}, A(\omega) >_i x \iff \underline{a}(\omega) > x$ et pour $j \in \{3, 4\}, A(\omega) >_j x \iff \bar{a}(\omega) > x$. Nous obtenons $\forall x \in R$: pour $i \in \{1, 2\}, P\{\omega : A(\omega) >_i x\} = P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\}$ et pour $j \in \{3, 4\}, P\{\omega : A(\omega) >_j x\} = P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\}$.

Étant donné que $\forall \omega \in \Omega, \underline{a}(\omega) < \bar{a}(\omega)$, donc $\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \subset \{\omega : \bar{a}(\omega) > x\}$.

Par conséquent, nous obtenons $\forall x \in R : P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\}$.

Autrement dit : pour $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}$ et $\forall x \in R : P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}$.

En tenant compte de la définition 9(section 2.3) de la dominance stochastique des intervalles aléatoires et de définition 7 de la section (2.1) de l'ordre des intervalles, en utilisant l'inégalité de la proposition 4 a qu'il a été établie dans Aiche [2013]=, que pour $i \in \{1, 2\}$ et pour $j \in \{3, 4\}$, nous avons : la relation $\leq_{(j,i)}^{s,d}$ est la plus forte, $\leq_{(i,j)}^{s,d}$ la plus faible, $\leq_{(j,j)}^{s,d}$ et $\leq_{(i,i)}^{s,d}$ sont les intermédiaires.

D'où les implications suivantes :

Proposition 5 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et A, B deux intervalles aléatoires. $\forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{3, 4\}$ on a :

1. $A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(i,j)}^{s.d} B$
2. $A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(i,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(i,j)}^{s.d} B.$

Preuve :Aiche [2013]

En utilisant l'ordre des intervalles, nous obtenons que pour $i \in \{1, 2\}, A(\omega) >_i x \iff \underline{a}(\omega) > x$ et pour $j \in \{3, 4\}, A(\omega) >_j x \iff \bar{a}(\omega) > x$, d'où pour $j \in \{3, 4\}, P\{\omega : A(\omega) >_j x\} = P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\}$ et pour $i \in \{1, 2\}, P\{\omega : A(\omega) >_i x\} = P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\}$.

Alors nous avons $i \in \{1, 2\}$ et pour $j \in \{3, 4\}$,

$$A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \iff P\{\omega : A(\omega) >_j x\} \leq P\{\omega : B(\omega) >_i x\},$$

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[\iff P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\}, \forall x \in]-\infty, +\infty[.$$

D'où en tenant compte de l'inégalité de la proposition 4, nous obtenons que :

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{b}(\omega) > x\}$$

Nous déduisons alors que $\forall x \in]-\infty, +\infty[:$

$$1. P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \implies P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{b}(\omega) > x\} \implies P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{b}(\omega) > x\}.$$

$$\text{i.e. } \forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{3, 4\}, A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(i,j)}^{s.d} B$$

$$2. P\{\omega : \bar{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \underline{b}(\omega) > x\} \implies P\{\omega : \underline{a}(\omega) > x\} \leq P\{\omega : \bar{b}(\omega) > x\}.$$

$$\text{i.e. } \forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{3, 4\}, A \leq_{(j,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(i,i)}^{s.d} B \implies A \leq_{(i,j)}^{s.d} B .$$

2.4.2 Transitivité :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et L_a l'ensemble des intervalle aléatoires . deux cas, l'un où $i = j$ et l'autre $i \neq j$ ont été considérés comme suit :

a. cas où $i = j$

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq_{(i,i)}^{s.d}$ est transitive sur L_a comme suit :

Proposition 6 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $A, B, C \in L_a$

Alors : $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $A \leq_{(i,i)}^{s.d} B$ et $B \leq_{(i,i)}^{s.d} C \implies A \leq_{(i,i)}^{s.d} C.$

Preuve : évidente

b .cas où $i \neq j$

une autre forme de transitivité a été établie dans Aiche [2013] :

Définition 10 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité , $A, B, C \in L_a$ et $l, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On dit que la relation $\leq_{(i,j)}^{s,d}$ est (l, k) -transitive sur L_a , si $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a :

$$A \leq_{(i,l)}^{s,d} B \text{ et } B \leq_{(k,j)}^{s,d} C \implies A \leq_{(i,j)}^{s,d} C.$$

Nous distinguons deux cas, l'un où $k = l$ et l'autre où $k \neq l$ comme suit :

- cas où $k = l$:

dans ce cas, $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq_{(i,j)}^{s,d}$ est (l, l) -transitive sur $L_a, \forall l \in \{1, 2, 3, 4\}$ comme suit :

Proposition 7 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $A, B, C \in L_a$
Alors $\forall i, j, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $A \leq_{(i,l)}^{s,d} B$ et $B \leq_{(l,j)}^{s,d} C \implies A \leq_{(i,j)}^{s,d} C$.

Preuve :Aiche [2013]

Évidente.

-cas où $k \neq l$:

dans ce cas , $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq_{(i,j)}^{s,d}$ est (l, k) -transitive sur $L_a, \forall l \in \{1, 2\}$ et $\forall k \in \{3, 4\}$ comme suit :

Proposition 8 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $A, B, C \in L_a$.
 $\forall l \in \{1, 2\}, \forall k \in \{3, 4\}$ et $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $A \leq_{(i,l)}^{s,d} B$ et $B \leq_{(k,j)}^{s,d} C \implies A \leq_{(i,j)}^{s,d} C$.

Preuve :Aiche [2013] Nous avons : $A \leq_{(i,l)}^{s,d} B \iff P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_l x\}, \forall x \in R$ et
 $A \leq_{(k,j)}^{s,d} B \iff P\{\omega : A(\omega) >_k x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}, \forall x \in R$. En vertu de la **proposition 6**, nous avons :

$$\forall l \in \{1, 2\} \text{ et } \forall k \in \{3, 4\}, P\{\omega : A(\omega) >_l x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_k x\}, \forall x \in R.$$

Alors $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall l \in \{1, 2\}, \forall k \in \{3, 4\}$ et $\forall x \in R$ nous avons :

$$P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_l x\} \text{ et } P\{\omega : A(\omega) >_k x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\} \text{ impliquent } P\{\omega : A(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : A(\omega) >_j x\}.$$

$$\text{i.e. } A \leq_{(i,l)}^{s,d} B \text{ et } B \leq_{(k,j)}^{s,d} C \implies A \leq_{(i,j)}^{s,d} C.$$

2.4.3 Remarque 5 :Aiche [2013]

1. Cas où $i=j$

- $\leq_{(i,i)}^{s,d}$ et (l,k) -transitive sur L_a pour les même conditions que celles des **proposition 6** et 7.

- Si de plus $l=k=i$, alors : $\leq_{(i,i)}^{s,d}$ et (i,i) - transitive sur $L_a \iff \leq_{(i,i)}^{s,d}$ est transitive sur L_a .

2. Soient $j \in \{1,2,3,4\}, l = k$ (avec $(l,k) \in \{1,2,3,4\}$) ou $l \neq k$ (avec $l \in \{1,2\}$ et $k \in \{3,4\}$), le lecteur eut montrer aisément que :

- (l,k) -transitive de $\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3,4\}$ est plus forte que la (l,k) -transitive de

$\leq_{(m,j)}^{s,d}, m \in \{1,2\}$ sur L_a i.e.

$\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3,4\}$ est (l,k) -transitive sur $L_a \implies \leq_{(m,k)}^{s,d}, m \in \{1,2\}$ est (l,k) -transitive sur L_a

- la (l,k) -transitive de $\leq_{(j,i)}^{s,d}, i \in \{1,2\}$ est plus forte que la (l,k) -transitive de

$\leq_{(j,n)}^{s,d}, n \in \{3,4\}$ sur L_a i.e.

$\leq_{(j,i)}^{s,d}, i \in \{1,2\}$ et (l,k) - transitive sur $L_a \implies \leq_{(j,n)}^{s,d}, n \in \{3,4\}$ est (l,k) -transitive sur L_a

- Par conséquent la (l,k) - transitive de $\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3,4\}, j \in \{1,2\}$ est plus forte que (l,k) -transitive de $\leq_{(m,n)}^{s,d}, m \in \{1,2\}, n \in \{3,4\}$ sur L_a i.e.

$\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3,4\}, j \in \{1,2\}$ est (l,k) - transitive sur $L_a \implies \leq_{(m,n)}^{s,d}, m \in \{1,2\}, n \in \{3,4\}$ est (l,k) - transitive sur L_a .

EXTENSION DE LA DOMINANCE
STOCHASTIQUE AUX VARIABLES
ALÉATOIRES FLOUES

3

On considère la définition de la dominance stochastique des variables aléatoires réelles. Nous pouvons nous retrouver face à des situations où ces dernières sont des variables aléatoires floues, autrement dit leurs valeurs sont des intervalles flous.. d'où le recours aux approches concernant la comparaison d'intervalles flous, par conséquent il y a la combinaison de probabilité et ces dernières. Ce sont en quelque sorte des extensions de ce concept aux variables aléatoires floues. telle que définis dans [Aiche \[2013\]](#)

Donc dans ce qui suit pour les extensions de la dominance stochastique des variables aléatoires floues, nous aurons à combiner probabilité et méthodes de comparaison d'intervalles flous.

3.1 EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX VARIABLES ALÉATOIRES FLOUES EN UTILISANT LEURS α – Coupes

Dans ce cas, la combinaison de probabilité et l'approche qui consiste à comparer les α – coupes des intervalles flous, résultats des expériences aléatoires des variables aléatoires floues, et les nombres réels qui est en quelque sorte la probabilité de comparaison des α – coupes des variables aléatoires floues et les nombres réels a été établie dans [Aiche \[2013\]](#) comme suit :

Définition 11 : [Aiche \[2013\]](#)

soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues et $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. On dit que \tilde{A} est (i, j) stochastiquement dominée par \tilde{B} , on note $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ si $\forall \alpha \in [0, 1]$:

$$P\{\omega : \tilde{A}^\alpha(\omega) >_i x\} \leq P\{\omega : \tilde{B}^\alpha(\omega) >_j x\} \quad \forall x \in]-\infty; +\infty[.$$

ou \tilde{A}^α et \tilde{B}^α sont les α – Coupe de \tilde{A} et \tilde{B} respectivement

Remarque 6 : [Aiche \[2013\]](#)

On sait que si \tilde{A} est une variable aléatoire floue alors son α – Coupe \tilde{A}^α est un intervalle aléatoire, par conséquent la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α – Coupe est équivalente à la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\} : \tilde{A} \leq^{s.d}_{(i,j)} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1] \tilde{A}^\alpha \leq^{s.d}_{(i,j)} \tilde{B}^\alpha.$$

Donc il est bien évident que nous retrouvons pour la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α – Coupe, les mêmes propriétés que celles de la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

3.1.1 Propriétés : [Aiche \[2013\]](#)

De même que pour la dominance stochastique des intervalles aléatoires, $\forall i \in \{0, 1\}$ et $\forall j \in \{3, 4\}$; $\leq^{s.d}_{(j,i)}$ est la plus forte, $\leq^{s.d}_{(i,j)}$ la plus faible, $\leq^{s.d}_{(j,j)}$ et $\leq^{s.d}_{(i,i)}$ sont les intermédiaires.

D'où les implications suivantes :

Proposition 9 : Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues.

$\forall i \in \{1, 2\}$ et $\forall j \in \{3, 4\}$ on a :

1. $\tilde{A} \leq_{(j,i)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(j,j)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{B}$
2. $\tilde{A} \leq_{(j,i)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,i)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{B}$.

Preuve :Aiche [2013]

Évidente, il suffit d'utiliser la remarque 6, i.e. $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$
 $\tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1] \tilde{A}^\alpha \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{B}^\alpha$ et d'appliquer $\forall \alpha \in (0, 1]$ la proposition 5 aux intervalles aléatoires \tilde{A}^α et \tilde{B}^α .

Tenant compte de la remarque 6 , Il est bien évident que pour la transitivité, nous retrouverons les mêmes conditions que celle de la dominance stochastique des intervalles aléatoires comme suit :

3.1.2 Transitivité : Aiche [2013]

soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et v_{af} , l'ensemble des variables aléatoires floues .Deux cas, l'un ou $i = j$ et l'autre ou $i \neq j$ comme suit :

1. Cas ou $i=j$

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq_{(i,i)}^{s.d}$ est la transitive sur v_{af} comme suit :

Proposition 10 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in v_{af}$.

Alors : $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $\tilde{A} \leq_{(i,i)}^{s.d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(i,i)}^{s.d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,i)}^{s.d} \tilde{C}$.

2.Cas ou $i \neq j$

Une définition d' une autre forme de transitivité a été établie dans [Aiche \[2013\]](#) comme suit :

Définition 12 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in v_{af}$ et $l, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On dit que la relation $\leq_{(i,j)}^{s.d}$ est (l,k) -transitive sur v_{af} , si $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a :

$\tilde{A} \leq_{(i,l)}^{s.d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(k,j)}^{s.d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{C}$.

On distingue deux cas, l'un ou $k=l$ et l'autre ou $k \neq l$ comme suit :

Cas ou $k=l$

dans ce cas , $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq_{(i,j)}^{s.d}$ est (l,l) -transitive sur v_{af} , $\forall l \in \{1, 2, 3, 4\}$ comme suit :

Proposition 11 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \nu_{af} : \forall i, j, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a
 $\tilde{A} \leq_{(i,l)}^{s,d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(l,j)}^{s,d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s,d} \tilde{C}$.

Preuve

il suffit d'utiliser la remarque 6 et d'appliquer $\forall \alpha \in [0,1]$ la proposition 7 aux intervalles aléatoires \tilde{A}^α et \tilde{B}^α .

Cas ou $k \neq l$

Dans ce cas $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la relation $\leq_{(i,j)}^{s,d}$ est (l,k) -transitive sur ν_{af} , $\forall l \in \{1, 2\}$ et $\forall k \in \{3, 4\}$ comme suit :

Proposition 12 :Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité et $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \nu_{af}$. $\forall l \in \{1, 2\}$ et $\forall k \in \{3, 4\}$ et $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a
 $\tilde{A} \leq_{(i,l)}^{s,d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(k,j)}^{s,d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s,d} \tilde{C}$.

Preuve :Aiche [2013]

Il suffit d'utiliser la remarque 6 et d'appliquer, $\forall \alpha \in [0, 1]$. la proposition 7 du chapitre 2

Remarque 7 :Aiche [2013]

1. Dans le cas ou $i=j$
 - $\leq_{(i,i)}^{s,d}$ est (l,k) -transitive sur ν_{af} pour les mêmes conditions que celles des propositions 11 et 12.
 - Si de plus $l=k$, alors $\leq_{(i,i)}^{s,d}$ est (i,i) -transitive sur $\nu_{af} \Leftrightarrow \leq_{(i,i)}^{s,d}$ est transitive sur ν_{af} .

2. Soient $j \in \{1, 2, 3, 4\}, l=k$ avec $(l,k) \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou $l \neq k$ (avec $l \in \{1, 2\}$ et $k \in \{3, 4\}$ lecteur peut montrer aisément que :

- La (l,k) -transitivité de $\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3, 4\}$ est la plus forte que la (l,k) -transitivité de

$\leq_{(m,j)}^{s,d}, m \in \{1, 2\}$ sur ν_{af} i.e.

$\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3, 4\}$ est (l,k) -transitive sur $\nu_{af} \implies \leq_{(m,k)}^{s,d}, m \in \{1, 2\}$ est (l,k) transitive sur ν_{af}

- La (l,k) -transitivité de $\leq_{(j,i)}^{s,d}, i \in \{1, 2\}$ est plus forte que la (l,k) -transitive de

$\leq_{(j,n)}^{s,d}, n \in \{3, 4\}$ sur ν_{af} i.e.

$\leq_{(j,i)}^{s,d}, i \in \{1, 2\}$ est (l,k) -transitive sur $\nu_{af} \implies \leq_{(j,n)}^{s,d}, n \in \{3, 4\}$ est (l,k) transitive sur ν_{af} .

Par conséquent la (l,k) -transitivité de $\leq_{(i,j)}^{s,d}, i \in \{3, 4\}, j \in \{1, 2\}$ est plus forte que la (l,k) -transitivité de $\leq_{(m,n)}^{s,d}, m \in \{1, 2\}, n \in \{3, 4\}$ sur ν_{af} i.e..

$\leq_{(i,j)}^{s,d}$, $i \in \{3,4\}$, $j \in \{1,2\}$ est (l,k)-transitive sur $\nu_{af} \implies \leq_{(m,n)}^{s,d}$ $m \in \{1,2\}$, $n \in \{3,4\}$ est (l,k)-transitive sur ν_{af} .

3.1.3 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires

La dominance stochastique des variables aléatoires floues en utilisant leurs α – **Coupes** a été établie en termes de dominance stochastique des variables aléatoires réelles comme suit :

proposition 13 : Aiche [2013]

soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues et $\tilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha]$, $\tilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \bar{b}^\alpha]$, leurs α – **Coupes** respective avec $\alpha \in (0, 1]$. $\forall i \in \{1, 2\}$ et $\forall j \in \{3, 4\}$, on a les équivalences suivantes :

1. $\tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s,d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1], [\underline{a}^\alpha \leq_{s,d} \underline{b}^\alpha]$.
2. $\tilde{A} \leq_{(i,i)}^{s,d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1], [\underline{a}^\alpha \leq_{s,d} \underline{b}^\alpha]$.
3. $\tilde{A} \leq_{(j,i)}^{s,d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1], [\bar{a}^\alpha \leq_{s,d} \bar{b}^\alpha]$.
4. $\tilde{A} \leq_{(j,j)}^{s,d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1], [\bar{a}^\alpha \leq_{s,d} \bar{b}^\alpha]$.

preuve est dans *Aiche [2013]*.

3.2 EXTENSION DE LA DOMINANCE STOCHASTIQUE AUX VARIABLES ALÉATOIRES FLOUES EN UTILISANT POSSIBILITÉ ET NÉCESSITÉ

Dans ce cas, la combinaison de probabilité et possibilité, et, probabilité et nécessité a été utilisée dans [Aiche \[2013\]](#) pour définir la dominance stochastique des variables aléatoires floues. C'est une généralisation de la définition de la dominance stochastique des intervalles aléatoires aux variables aléatoires floues, compte tenu du fait que possibilité et nécessité généralisent respectivement les relations $>_4$ et $>_1$ des intervalles réels aux intervalles flous. Dans ce qui suit, les abréviations $\alpha - pos$ et $\beta - nec$ représentent respectivement -possiblement et $\beta - ncessairement$. La définition de la dominance stochastique des variables aléatoires floues sous quatre formes, en utilisant possibilité et nécessité a été établie comme suit :

Définition 13 : [Aiche \[2013\]](#)

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0, 1]$,

Dans ce qui suit, les abréviations $\alpha - pos$ et $\beta - nec$ représentent respectivement $\alpha - possiblement$ et $\beta - ncessairement$. On dit que :

1. \tilde{A} est $(\alpha - pos, \beta - nec)$ stochastiquement dominée par \tilde{B} si :
 $P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x \geq \alpha)\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x \geq \beta)\} \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
 On note $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B}$

2. \tilde{A} est $(\alpha - pos, \beta - pos)$ stochastiquement dominée par \tilde{B} si :
 $P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x \geq \alpha)\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x \geq \beta)\} \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
 On note $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}$

3. \tilde{A} est $(\alpha - nec, \beta - nec)$ stochastiquement dominée par \tilde{B} si :
 $P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x \geq \alpha)\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x \geq \beta)\} \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
 On note $\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B}$

4. \tilde{A} est $(\alpha - nec, \beta - pos)$ stochastiquement dominée par \tilde{B} si :
 $P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x \geq \alpha)\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x \geq \beta)\} \forall x \in]-\infty, +\infty[.$
 On note $\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}$

3.2.1 Propriétés : [Aiche \[2013\]](#)

Étant donné que la valeur d'une variable aléatoire floue est un intervalle flou, alors en utilisant les propriétés de possibilité et nécessité de la proposition 14 suivante :

proposition 14 : Aiche [2013]

Quelque soient les intervalles flous \tilde{A} et \tilde{B} , on a :

1. $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) \leq pos(\tilde{A} > \tilde{B})$.
2. $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) > 0 \Rightarrow pos(\tilde{A} > \tilde{B}) = 1$

à savoir que :

$\forall \omega \in \Omega$ et $\forall x \in R, nec(\tilde{A}(\omega) > x) \leq pos(\tilde{A}(\omega) > x)$, il a été établi dans [9] que la forme $\leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d}$ est la plus forte, $\leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d}$ la plus faible et $\leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d}$ et $\leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d}$ sont les intermédiaires.

D'où les implications suivantes :

proposition 15 : Aiche [2013]

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues et $\alpha, \beta \in]0, 1]$,

On a alors :

1. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}$.
2. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}$.

Preuve : Aiche [2013] Étant donné que $\forall \omega \in \Omega, \tilde{A}(\omega)$ et $\tilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous, alors en vertu des propriétés des possibilités et nécessités rappelées à la proposition 14, Nous avons

$\forall x \in R, nec(\tilde{A}(\omega) > x) \leq pos(\tilde{A}(\omega) > x)$ ce qui donne $\forall \alpha \in]0, 1]$ et $\forall x \in R, nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha \Rightarrow pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha$.

D'où

$$\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \subset \{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\}$$

par conséquent nous obtenons l'inégalité suivante :

$\forall \alpha \in]0, 1]$ et $\forall x \in R, P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\}$ qui nous permet de montrer aisément les deux itemes de la proposition comme suit :

$$\begin{aligned} & 1. \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \\ & \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \Rightarrow \forall x \in R, P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \\ & \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \\ & \text{i.e. } \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B}. -\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in \\ & R, P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \\ & \Rightarrow \forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \\ & \text{i.e. } \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}. \end{aligned}$$

Nous concluons que :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}.$$

$$2.-\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \Rightarrow \forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\}$$

$$i.e.-\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}.$$

$$-\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \Rightarrow \forall x \in R, P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\}$$

$$i.e.-\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}.$$

Nous concluons que :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B}.$$

les propriétés de possibilité et nécessité rappelées à la proposition 7, à savoir que pour ω donné, $\forall x \in R, nec(\tilde{B}(\omega) > x) > 0 \Rightarrow pos(\tilde{B}(\omega) > x) = 1$, ont été utilisées dans [Aiche \[2013\]](#) pour établir le résultat suivants :

proposition 16 : [Aiche \[2013\]](#)

Soient \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues. On a alors :

$$1. \forall q \in \{pos, nec\} \text{ et } \forall \alpha, \beta \in]0, 1], \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, 1-pos)}^{s.d} \tilde{B}.$$

$$2. \forall r \in \{pos, nec\} \text{ et } \forall \alpha, \beta \in]0, 1], \tilde{A} \leq_{(1-pos, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}.$$

Preuve : [Aiche \[2013\]](#) 1. Nous avons $\alpha, \beta \in]0, 1]$ et $\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B}$, i.e.

$$\forall x \in R, P\{\omega : (q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha)\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\}.$$

Étant donné que $\beta \in]0, 1]$, donc $\beta > 0$. Il s'ensuit que $\forall x \in R$.

$$nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta \Rightarrow nec(\tilde{B}(\omega) > x) > 0.$$

Et en vertu des propriétés des possibilité et nécessité rappelées à la proposition 7, nous avons

$nec(\tilde{B}(\omega) > x) > 0 \Rightarrow pos(\tilde{B}(\omega) > x) = 1$. Alors par transitivité, nous obtenons que

$$\forall \beta \in]0, 1], \forall x \in R,$$

$$nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta \Rightarrow pos(\tilde{B}(\omega) > x) = 1. \text{ Donc } \forall x \in R$$

$$P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \beta\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) = 1\}$$

Par conséquent

$$\forall x \in R, P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \Rightarrow \forall x \in R$$

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq$$

$$P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) = 1\},$$

$$i.e. \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, 1-pos)}^{s.d} \tilde{B}$$

2. Nous avons $\tilde{A} \leq_{(1-pos, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}$ i.e.
 $\forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) = 1\} \leq$
 $P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\},$
 Étant donné que $\forall \alpha \in]0, 1]$
 $P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) = 1\} \forall x \in R$
 Il s'ensuit que :
 $\forall x \in R, P\{\omega : pos(\tilde{A}(\omega) > x) = 1\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \Rightarrow,$
 $\forall x \in R, P\{\omega : nec(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\},$
 i.e. $\tilde{A} \leq_{(1-pos, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}.$
 Pour $q, r \in , nec\}, \leq s.d_{(\alpha-q, \beta-r)}$ devient forte selon que α décroît et /ou β croît
 comme suit :

proposition 17 : Aiche [2013]

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux variables aléatoires floues. Alors :

1. $\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma \in]0, 1]$ tels que $\gamma \geq \alpha$, on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

2. $\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \delta \in]0, 1]$ tels que $\delta \leq \beta$, on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \delta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

3. $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1]$ tels que $\gamma \geq \alpha$ et $\delta \leq \beta$, on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \delta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

preuve : Aiche [2013] Nous avons $q, r \in \{pos, nec\}$ et pour tout $\omega \in \Omega, \tilde{A}(\omega)$
 et $\tilde{B}(\omega)$ sont des intervalles flous.

1. Étant donné que $\forall x \in R, \gamma \geq \alpha$, nous avons alors $\forall x \in R,$

$q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma \Rightarrow q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha$ donc

$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : q(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \alpha\} \forall x \in R.$

Il s'ensuit que :

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\}$$

\Rightarrow

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\}.$$

Autrement dit que :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

2. Étant donné que $\gamma \leq \beta$, de la même manière que pour item 1, nous avons

$\forall x \in R,$

$$P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \delta\}$$

Par conséquent $\forall x \in R$

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \Rightarrow$$

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \delta\}$$

Autrement dit que :

$$\tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \delta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

3. Pour $\gamma \geq \alpha$, nous avons montré à l'item 1 que pour tout $q, r \in \{pos, nec\}$ on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} .$$

3. Pour $\gamma \geq \alpha$, nous avons montré à l'item 1 que pour tout $q, r \in \{pos, nec\}$ on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

Par transitivité de l'implication , nous obtenons :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\gamma-q, \delta-r)}^{s.d} \tilde{B}$$

3.2.2 Transitivité : Aiche [2013]

$\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha \in]0, 1]$, la relation $\leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d}$ est transitive sur l' ensemble *vaf* des variables aléatoires floues comme suit :

proposition 18 : Aiche [2013]

Soient $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in vaf$.

Alors $\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha \in]0, 1]$, on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d} \tilde{B} \text{ et } \tilde{B} \leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d} \tilde{C}$$

Preuve . Évidente

a été définie dans Aiche [2013] comme suit :

Définition 14 : Aiche [2013]

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité, $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in vaf$, $q, r, t, s \in \{pos, nec\}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1]$.

On dit que la relation $\leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - s)$ transitive sur $\in vaf$,si :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \text{ et } \tilde{B} \leq_{(\gamma-s, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C} .$$

La relation $\leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur l'ensemble $\in vaf$ pour $\gamma \leq \beta$, comme suit :

proposition 19 : Aiche [2013]

Soient $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ trois variables aléatoires floues.

$\forall q, r, t \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1]$ tels que $\gamma \leq \beta$, on a :

$$\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B} \text{ et } \tilde{B} \leq_{(\gamma-r, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C} .$$

Preuve : Aiche [2013] Nous avons $\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-r)}^{s.d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(\gamma-r, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C}$ i.e. $\forall x \in R$
 $P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\}$ et

$$P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : t(\tilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\}$$

Etant donné que $\gamma \leq \beta$, alors $P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \leq P\{\omega : r(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\}$

Par conséquent, nous obtenons $\forall x \in R$:

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : t(\tilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\}$$

$$\text{i.e. } \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C}$$

La relation $\leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d}$ est ($\beta - nec, \gamma - pos$)-transitive sur *vaf*, pour $\gamma \leq \beta$, comme suit :

proposition 20 : Aiche [2013]

Soient $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in vaf$

$\forall q, t \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1]$ tels que $\gamma \leq \beta$, on a :
 $\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(\gamma-pos, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C}$.

Preuve $\tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B}$ et $\tilde{B} \leq_{(\gamma-pos, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C}$ i.e. $\forall x \in R$

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \text{ et}$$

$$P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : t(\tilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\}$$

Étant donné que $\gamma \leq \beta$, alors $P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \beta\} \leq P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\}$ et étant donné que $nec \tilde{B}(\omega) > x \leq pos \tilde{B}(\omega) > x$, alors
 $P\{\omega : nec(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\} \leq P\{\omega : pos(\tilde{B}(\omega) > x) \geq \gamma\}$

Par conséquent, nous obtenons $\forall x \in R$:

$$P\{\omega : q(\tilde{A}(\omega) > x) \geq \alpha\} \leq P\{\omega : t(\tilde{C}(\omega) > x) \geq \delta\}$$

$$\text{i.e. } \tilde{A} \leq_{(\alpha-q, \delta-t)}^{s.d} \tilde{C}.$$

Remarque 8 : Aiche [2013]

1. Il est bien évident que :

$\forall q, r \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma, \in]0, 1]$: $\leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur vaf pour $\gamma \leq \beta$.

- $\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma, \in]0, 1]$: $\leq_{(\alpha-nec, \alpha-pos)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur vaf pour $\gamma \leq \beta$.

- $\forall q \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha \in]0, 1]$: $\leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d}$ est $(\alpha - q, \alpha - q)$ -transitive sur $vaf \Leftrightarrow \leq_{(\alpha-q, \alpha-q)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur vaf .

2. Soient $q, r, t \in \{pos, nec\}$ et $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1]$ avec $\gamma \leq \beta$, le lecteur peut montrer aisément que :

- La $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité de $\leq_{(\alpha-nec, \delta-t)}^{s.d}$ est plus forte que la $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité de $\leq_{(\alpha-nec, \delta-t)}^{s.d}$ sur vaf i.e.

$\leq_{(\alpha-nec, \delta-t)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur $vaf \Rightarrow \leq_{(\alpha-pos, \delta-t)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur vaf

- La $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité de $\leq_{(\alpha-q, \delta-pos)}^{s.d}$ est plus forte que la $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité de $\leq_{(\alpha-q, \delta-nec)}^{s.d}$ sur vaf i.e.

$\leq_{(\alpha-q, \delta-pos)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur $vaf \Rightarrow \leq_{(\alpha-q, \delta-nec)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur vaf .

- Par conséquent la $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité de $\leq_{(\alpha-nec, \delta-pos)}^{s.d}$ est plus forte que la $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité de $\leq_{(\alpha-pos, \delta-nec)}^{s.d}$ sur vaf i.e.

$\leq_{(\alpha-nec, \delta-pos)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur $vaf \Rightarrow \leq_{(\alpha-pos, \delta-nec)}^{s.d}$ est $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitive sur vaf .

Ces implications restent valides si nous remplaçons la $(\beta - r, \gamma - r)$ -transitivité par la $(\beta - nec, \gamma - pos)$ -transitivité.

3.2.3 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires réelles

proposition 22 :

[Aiche \[2013\]](#)

soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues .On a alors $\forall \alpha, \beta \in (0, 1)$:

1. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \bar{a}^\alpha \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$.
2. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \bar{a}^\alpha \leq_{s.d} \bar{b}^\beta$.
3. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \underline{b}^{1-\beta}$.
4. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq_{s.d} \bar{b}^\beta$.

preuve Voir dans [Aiche \[2013\]](#) .

3.2.4 Expressions en termes de dominance stochastique des intervalles aléatoires

Corollaire 1 : [Aiche \[2013\]](#)

Soient \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues .Alors $\forall \alpha, \beta \in (0, 1), \forall i \in \{1, 2\}$ et $\in \{3, 4\}$ on a :

1. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}^\alpha \leq_{(j,i)}^{s.d} \tilde{B}^{1-\beta}$.
2. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}^\alpha \leq_{(j,i)}^{s.d} \tilde{B}^\beta$.
3. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}^{1-\alpha} \leq_{(i,i)}^{s.d} \tilde{B}^{1-\beta}$.
4. $\tilde{A} \leq_{(\alpha-nec, \beta-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}^{1-\alpha} \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{B}^\beta$.

Preuve Voir dans [Aiche \[2013\]](#)

3.2.5 Expressions en termes de dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α – Coupes

A partir de la remarque 5 et du Corollaire 1 , les expressions de la dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant possibilité et nécessité en termes de dominance stochastique des variables aléatoires floues utilisant leurs α – Coupes ont été établies comme suit

Corollaire 2 : Aiche [2013]

Soient \tilde{A}, \tilde{B} deux variables aléatoires floues $\forall i \in \{1, 2\}$ et $\forall j \in \{3, 4\}$ on a :

1. $\forall \alpha \in (0, 1) \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, (1-\alpha)-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \leq_{(j,i)}^{s.d} \tilde{B}$
2. $\forall \alpha \in (0, 1) \tilde{A} \leq_{(\alpha-pos, \alpha-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \leq_{(j,j)}^{s.d} \tilde{B}$
3. $\forall \alpha \in (0, 1) \tilde{A} \leq_{((1-\alpha)-nec, (1-\alpha)-nec)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \leq_{(i,i)}^{s.d} \tilde{B}$
4. $\forall \alpha \in (0, 1) \tilde{A} \leq_{((1-\alpha)-nec, \alpha-pos)}^{s.d} \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \leq_{(i,j)}^{s.d} \tilde{B}$

Preuve Voir dans Aiche [2013]

CONCLUSION GÉNÉRALE

On a vu dans ce travail que l'aléa et le flou ne sont pas mutuellement exclusives, qu'ils peuvent se trouver combinés. Pour cela les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de cette combinaison.

Beaucoup de travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa dans un contexte d'optimisation. Dans ce travail, nous nous sommes intéressées sur l'extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues.

En premier lieu, nous avons traités les notions de base de la théorie des ensembles flous, des probabilités et la combinaison de l'aléa et le flou.

En second lieu, étudié l'extension de la dominance stochastique de premier ordre aux intervalles aléatoires.

Et en dernier lieu, nous avons traité l'extension de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues en utilisant α – coupes et possibilité, nécessité.

Ce travail nous a permis d'approfondir nous connaissances dans la dominance stochastique aux variables aléatoires floues.

BIBLIOGRAPHIE

- Farid Aiche. *Sur l'optimisation floue stochastique*. PhD thesis, Tizi-Ouzou, 1995.
- Farid Aiche. *Comparaison d'intervalles flous pour la programmation multi-objectifs dans l'incertain*. PhD thesis, Toulouse 3, 2013.
- Mr AICHE et al. *Sur la programmation linéaire multi-objectif floue stochastique*. PhD thesis, Université de Tizi Ouzou-Mouloud Mammeri, 2013.
- EE Ammar. On fuzzy random multiobjective quadratic programming. *European Journal of Operational Research*, 193(2) :329–341, 2009.
- Bernadette Bouchon-Meunier. *La logique floue et ses applications*. 1995.
- Bernadette Bouchon-Meunier et Christophe Marsala. *Logique floue : principes, aide à la décision*. Hermes-Lavoisier, 2003.
- MOKEDDEM Diab. *Contrôle Flou des Processus Biotechnologiques à Base d'Algorithmes Génétiques*. PhD thesis, université de Jijel, 2010.
- D Dubois et H Prade. Analysis of fuzz information, vol. 2, chapter fuzzy numbers : an overview. *CRC-Press, Boca Raton*, 1988.
- Didier Dubois et Henri Prade. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of systems science*, 9(6) :613–626, 1978.
- P Fishburn. *Interval orderings*. Willey, New-York, 1987.
- Maged George Iskander. A suggested approach for possibility and necessity dominance indices in stochastic fuzzy linear programming. *Applied Mathematics Letters*, 18(4) :395–399, 2005.
- Huibert Kwakernaak. Fuzzy random variables—ii. algorithms and examples for the discrete case. *Information sciences*, 17(3) :253–278, 1979.
- Jun Li, Jiuping Xu, et Mitsuo Gen. A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients. *Mathematical and Computer Modelling*, 10(1) :33–44, 1982.
- A.F Shapiro. Fuzzy random variables, insurance. *Mathematics and Economics*, 10(1) :1060, 2008.
- Ronald R Yager. On the lack of inverses in fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(1) :73–82, 1980.
- Lotfi Aliasker Zadeh. Fuzzy sets, information and control, vol. 8. *Google Scholar Google Scholar Digital Library Digital Library*, pages 338–353, 1965.

على تقدير نماذج الانحدار الذاتي

من خلال النظر في علاقات الترتيب الأربعة بين حدود فترات الأعداد الحقيقية ،
والهيمنة العشوائية من الدرجة الأولى ، وعلاقة ترتيب القيمة بين متغيرين عشوائيين ،
استأنفنا الامتداد المباشر لهذه المفاهيم إلى فترات عشوائية. يمكن تخصيص هذه المفاهيم
لفترات ضبابية مستندة إلى هذه الامتدادات وعلى العلاقات القيمة بين الفترات غير
الواضحة ، نستأنف الامتداد المباشر للهيمنة العشوائية إلى المتغيرات العشوائية الغامضة

Résumé

En considérant les quatre relations d'ordre entre les bornes d'intervalles de nombres réels, la dominance stochastique du premier ordre, et la relation d'ordre valuée entre deux variables aléatoires, nous avons repris l'extension directe de ces concepts aux intervalles aléatoires. Ces notions peuvent être spécialisées aux intervalles flous en basant sur ces extensions et sur les relations valuées entre des intervalles flous , nous reprenons l'extension directe de la dominance stochastique aux variables aléatoires floues .

Abstract

By considering the four order relations between the bounds of intervals of real numbers, the stochastic dominance of the first order, and the valued order relation between two random variables, we resumed the direct extension of these concepts to random intervals . These notions can be specialized to fuzzy intervals basing on these extensions and on the valued relations between fuzzy intervals, we resume the direct extension of stochastic dominance to fuzzy random variables.