

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE: RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

OPTION: MÉTHODES ET MODÈLES DE DÉCISION

Présenté par:

M^{elle} **KARICHE Fariza**

et

M^{elle} **BOUDJEMAA Nabila**

Sujet:

Méthodes directes du contrôle optimal: Application sur un véhicule électrique

Devant le jury d'examen composé de:

M. AIDENE Mouhamed;	Professeur;	U.M.M.T.O;	Président
M. MERAKEB Abdelkader;	Maître de conférences B;	U.M.M.T.O;	Rapporteur
Mme. LOUADJ Kahina;	Maître de conférences B;	U.M.M.T.O.	Examinatrice
Mme. MOUSSOUNI Nassima;	Maître de conférences B;	U.M.M.T.O;	Examinatrice

Soutenu le: . /06/2013

Remerciements

Nous remercions le bon Dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et de nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour pouvoir mener notre travail à terme.

On tient à exprimer notre profonde gratitude et nos plus sincères remerciements à M^r MERAKEB Abdelkader pour avoir accepté de nous encadrer, mais aussi pour sa disponibilité, sa gentillesse, et ses précieux conseils dès le début de notre travail.

Toute notre reconnaissance aux membres de jury pour avoir accepté de juger notre travail, nous sommes honoré de la présence de M^r AIDENE Mouhamed, M^{me} LOUADJ Kahina et M^{me} MOUSSOUNI Nassima. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profond respect.

Nos remerciements vont également à tous le personnel du département mathématique, particulièrement tous les enseignants qui nous ont donné des connaissances tout au long de notre cursus, et tous ceux et toutes celles qui ont de près ou de loin contribué à la réalisation de ce modeste travail.

En fin un grand merci à nos chères familles, particulièrement nos parents pour leur protection filiale et leur encouragement, et à tous nos amis(es) et camarades.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

- A mes très chers parents, source d'amour et du courage, qui m'ont éduqué, sacrifié pour que je puisse arriver jusque là et qui m'ont beaucoup soutenu durant mon cursus ;*

- A mes adorables frères : " Sid-Ali et Atmane" ;*

- A ma chère soeur : " Flora" ;*

- A tous les membres de ma famille ;*

- A mes très chers amis(es) ;*

- A tous les gens qui m'aime et m'aide dont je n'ai pas cité les noms.*

- A mes camarades de la promotion 2012-2013.*

- A ma binôme Nabila, ainsi que toute sa famille.*

K. Fariza

Table des matières

Dédicaces	1
Introduction	4
1 Généralités sur les équations différentielles	7
1.1 Introduction	7
1.2 Définitions fondamentales	8
1.3 Classification des équations différentielles du premier ordre	8
1.3.1 Équations à variables séparables	9
1.3.2 Équations différentielles homogènes	9
1.3.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre	10
1.4 Résolution numérique des équations différentielles	12
1.4.1 Problème de Cauchy	12
1.4.2 Définitions essentielles	13
1.4.3 Détermination de la solution approchée d'une EDO du premier ordre	14
1.4.4 Exemple d'application	19
1.5 Conclusion	26
2 Généralités sur la théorie du contrôle optimal	27
2.1 Introduction	27
2.2 Position du problème	27
2.3 Formulation générale d'un problème de contrôle	29
2.4 Ensemble d'accessibilité	30
2.5 Contrôlabilité des systèmes de contrôle linéaires	30
2.6 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	32
2.6.1 Cas sans contrainte sur le contrôle: condition de Kalman	33

2.6.2	Cas avec contrainte sur le contrôle	33
2.7	Contrôlabilité des systèmes non-linéaires	34
2.8	Principe du maximum	34
2.8.1	Principe du maximum de pontryagin	36
2.8.2	Le problème de Mayer-Lagrange	36
2.9	Méthodes de résolution numérique	37
2.9.1	Méthodes indirectes	37
2.9.2	Méthode de tir simple	38
2.9.3	Méthodes directes: Optimisation non-linéaire sous contraintes	39
2.9.4	Résolution numérique: paramétrisation simplifiée du contrôle (découpe par zones)	39
2.9.5	Exemple numérique	40
2.9.6	Résolution à l'aide du logiciel MATLAB:	41
2.9.7	Conclusion	45
3	Optimisation de l'énergie d'un véhicule électrique	46
3.1	Introduction	46
3.2	Constitution d'un véhicule électrique	47
3.3	Modélisation du problème de fonctionnement d'un véhicule électrique	48
3.3.1	Modélisation de la partie électrique	49
3.3.2	Modélisation de la partie mécanique	49
3.4	Application	52
3.4.1	Cas sans contrainte sur la vitesse	56
3.4.2	Cas d'une contrainte sur l'état final de la vitesse	57
3.4.3	Cas d'une contrainte sur l'état permanente sur la vitesse et d'une vitesse finale non nulle	59
3.4.4	Cas d'une contrainte permanente sur la vitesse et d'une vi- tesse finale nulle	60
3.5	Conclusion	60
	Conclusion	62
	Bibliographie	64

Introduction

Optimiser c'est chercher à obtenir la solution la plus efficace d'un problème donné. Dans la vie quotidienne, tout le monde veut avoir de meilleures solutions pour des problèmes donnés, mais comment les avoir ?

En considérant les mathématiques comme un pont, leur but est d'apporter une démarche scientifique à la résolution des problèmes complexes issus du monde réel. L'une des vocations scientifiques est donc de construire des modèles mathématiques (équations), en particulier les modèles liés à des problèmes d'optimisation, et de proposer des méthodes de résolution efficace de ces modèles. L'efficacité de ces méthodes nécessite une connaissance approfondie des caractéristiques du problème réel, et la recherche de propriétés spécifiques du modèle; ainsi le chercheur doit réunir les trois compétences essentielles suivante:

- capacité de modélisation lui permettant de construire un modèle formel à partir d'un problème posé par un spécialiste du terrain;
- capacité de proposer une méthode (algorithme) efficace de résolution du modèle;
- capacité de mettre en œuvre la méthode proposée sur les instances réelles afin d'évaluer la qualité des solutions obtenues et l'efficacité de la méthode.

En mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, aux dérivées partielles, etc.

Pour cette raison, la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines des mathématiques. A l'origine elle est une partie des équations différentielles ordinaires. Le problème d'optimisation en mathématiques implique les spécifications des décisions (conditions ou contraintes) de l'utilisateur et de la formalisation du

concept de la décision optimale. Pour la résolution d'un problème de contrôle optimal, on dispose d'une grande classe de méthode. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode directe, qui consiste à discrétiser le problème de contrôle (l'état et la commande) pour tout instant et on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire, puis résoudre ce problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant par exemple sur des intégrateurs numériques tels que Euler, Runge-kutta, ..., ces deux derniers sont les plus simples à mettre en œuvre.

Ce mémoire est consacré à la résolution d'un problème de contrôle optimal, ayant pour objectif de trouver une meilleure stratégie pour la minimisation de la consommation d'énergie d'un véhicule électrique pendant une période de temps fixée.

Ce présent travail est réparti en trois chapitres, le premier constitue une généralité sur les équations différentielles, et quelques méthodes de résolution les plus utiles pour notre thématique. Le second chapitre est consacré aux problèmes de contrôle optimal, où nous avons présenté les notions essentielles de cette théorie. Après quelques définitions de base, on s'est intéressé à la méthode directe de résolution d'un problème de contrôle optimal via une discrétisation du temps et du contrôle. Un exemple est traité pour illustrer cette technique. Au chapitre trois, un problème de contrôle optimal est étudié. Il s'agit de trouver une stratégie de commande pour la minimisation de l'énergie consommée par un véhicule électrique. La commande étant une tension appliqué sur le moteur électrique qui prend des valeurs continues et bornées. La méthode directe de discrétisation est utilisée et les résultats numériques sont obtenus en utilisant MATLAB^{R2009a}.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale et des perspectives.

*"L'avenir de monsieur est devant lui, et il l'aura
dans le dos à chaque fois qu'il fera demi tour."*

Pierre Dac

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation mettant en jeu une fonction, ainsi qu'un certain nombre de ses fonctions dérivées.

La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n s'écrit:

$$f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

Dans cette écriture n est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation; f est une fonction de $n + 2$ variables; y est une fonction de la variable réelle t à valeur dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n , et $\dot{y}, \dots, y^{(n)}$ sont ses dérivées.

C'est bien sûr cette fonction y qui est inconnue et que l'on cherche à déterminer. Plus précisément le problème est de trouver un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre n et vérifiant l'équation (1.1), c'est à dire:

$$\forall t \in I, f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

où

$$y^{(n)}(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

En fait l'équation de la forme générale (1.1) ci-dessus est peu pratique. on préférera travailler avec des équations plus particulières dites du type "*explicite*" ou "*résolue*"

qui s'écrivent:

$$y^{(n)} = G(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Intégrer l'équation différentielle (1.2), c'est trouver toutes les fonction y vérifiant cette relation.

l'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique, c'est à dire elles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1. Une fonction y qui vérifie la relation (1.2) en tout point de l'intervalle I est appelée *solution*, ou *intégrale* de l'équation différentielle.

Définition 1.2. Le graphe Γ de la fonction y est appelé *courbe intégrale* de l'équation différentielle (1.2).

Définition 1.3. Une équation différentielle est dite autonome lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t , c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme $\dot{y} = f(y)$.

Remarque 1.1. Intégrer l'équation (1.2) revient à trouver toutes les courbes intégrales.

1.3 Classification des équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle de premier ordre est de la forme:

$$\dot{y} = f(t, y)$$

Il y a trois classes principales d'équations différentielles du premier ordre:

1. Équations dont on peut séparer les variables.
2. Équations homogènes où y ne dépend que du rapport y/t .
3. Équations linéaires où y et \dot{y} sont au premier degré.

Ces dernières peuvent être à coefficients constants ou non, sans second membre ou avec second membre, ce sont les équations différentielles de loin les plus utiles, car

on les rencontre constamment dans toutes les branches de la physique (mécanique, électricité, ...).

On remarque que les équations homogènes et les équations linéaires se ramènent aux équations dont on peut séparer les variables.

1.3.1 Équations à variables séparables

Elles sont de la forme $\dot{y} = \frac{f(t)}{g(y)}$, f et g désignant deux fonctions quelconques.

Méthode de résolution:

On commence par remplacer \dot{y} par $\frac{dy}{dt}$, l'équation différentielle s'écrit alors

$$g(y)dy = f(t)dt$$

En intégrant séparément chaque membre, on obtient

$$\int g(y)dy = \int f(t)dt$$

Exemple 1. Résolvons l'équation suivante:

$$t + y\dot{y} = 0$$

On remplace \dot{y} par $\frac{dy}{dt}$ et on obtient:

$$y\frac{dy}{dt} = -t$$

et en intégrant $\int ydy = -\int tdt$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + c$$

où c est une constante quelconque.

1.3.2 Équations différentielles homogènes

Une équation différentielle est dite homogène lorsqu'on peut la mettre sous la forme

$$\dot{y} = f(y/t).$$

Une telle équation ne change pas lorsqu'on remplace t par kt et y par ky , où k est un nombre réel non nul.

Méthode de résolution :

On effectue le changement de la fonction inconnue $x = \frac{y}{t}$ (ou $y = xt$), pour se ramener à une équation à variables séparables.

On obtient ainsi $\dot{y} = \dot{x}t + x$ et en égalant cette expression de \dot{y} avec $f(\frac{y}{t}) = f(x)$, on aboutit à l'équation suivante :

$$\dot{x}t + x = f(x).$$

On peut alors séparer les variables

$$t \frac{dx}{dt} = f(x) - x \iff \frac{dt}{t} = \frac{dx}{f(x) - x} \quad \text{si } f(x) \neq x$$

Si l'on désigne par $F(x)$ une primitive de $\frac{1}{f(x)-x}$, on intégrant les deux membres et on obtient

$$\log \left| \frac{t}{k} \right| = F(x) = \int \frac{dx}{f(x) - x}$$

soit $t = ke^{F(y/t)}$

ou encore sous forme paramétrique

$$\begin{cases} t = ke^{F(x)} \\ y = kxe^{F(x)} \end{cases}$$

k constante arbitraire.

Si x_0 est racine de l'équation $f(x) = x$, la fonction constante $x = x_0$ vérifie l'équation

$$t \frac{dx}{dt} = f(x) - x,$$

alors $y = x_0 t$ est intégrale de l'équation homogène donnée.

1.3.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$a(t)\dot{y} + b(t)y = c(t) \tag{1.3}$$

où a , b et c sont des fonctions données de t , $a(t)$ et $b(t)$ sont appelés coefficients et $c(t)$ le second membre.

On associe à l'équation (1.3), l'équation sans second membre

$$a(t)\dot{y} + b(t)y = 0 \tag{1.4}$$

qui est à variable séparables.

Théorème 1.1. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (1.3) est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre (1.4) et d'une intégrale particulière de l'équation complète (1.3).*

Remarque 1.2. Certaines équations non linéaire se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de Bernoulli

$$\dot{x} = p(t) + q(t)x^\alpha,$$

les fonctions p et q étant continues.

Lorsque α vaut 0 ou 1, l'équation est linéaire.

Sinon, en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t).$$

C'est aussi le cas de l'équation de Ricatti

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}^3$$

qui se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, dès qu'on connaît une solution particulière $x_1(t)$.

En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$ et de remplacer dans l'équation de Ricatti, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante

$$\dot{y} = (2a(t)x_1 + v(t))y(t) + a(t)y^{2(t)}.$$

Remarque 1.3. Les équations linéaires d'ordre p se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1 :

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = 0$$

est équivalente au système

$$\begin{cases} \dot{y} = y_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_{p-2} = y_{p-1} \\ \dot{y}_{p-1} = -a_{p-1}y_{p-1} - \dots - a_1y_1 - a_0y \end{cases}$$

$$\text{En posant : } Y = \begin{pmatrix} y \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{p-1} \end{pmatrix} \text{ on aura } \dot{Y} = AY, \text{ avec : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

1.4 Résolution numérique des équations différentielles

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les équations différentielles et ne sont possible que dans un nombre de cas très limités.

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques, chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles.

1.4.1 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy se formule de la manière suivante :

Trouver $y(t)$ définie et dérivable sur $[a, b]$ et à valeur dans \mathbb{R}^n tel que

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) & t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

où $f(t, y(t))$ est une fonction à valeur réelle définie sur $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, et $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

(t_0, y_0) est appelée condition initiale.

Pour un tel problème, on doit chercher à déterminer la fonction $y(t)$ par des méthodes numériques.

Existence et unicité de solution:

Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) & t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si f est une fonction continue dans $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie la condition de Lipschitz de rapport $K > 0$ suivante :

$$\forall t \in [a, b], \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq k \|y_2 - y_1\|$$

alors le problème avec la condition initiale (t_0, y_0) admet une solution unique dans $[a, b]$ donnée par:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f((s, y(s))) ds$$

La condition de Lipschitz assure l'unicité de la solution. Par exemple, soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y} & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet plusieurs solutions de la forme:

$$y(t) = \begin{cases} (t - a)^2 & \text{pour } t \geq a \\ 0 & \text{pour } t \leq a \end{cases}$$

obtenues pour différentes valeurs du paramètre a , car la fonction $y(t)$ n'est pas lipschitzienne.

Remarque 1.4. L'intervalle de définition d'une solution dépend de la condition initiale par exemple:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^2 & t \in \mathbb{R} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

admet comme solution $y(t) = \frac{-1}{t}$ qui n'est pas définie en $t = 0$ bien que la fonction $f(t, y) = y^2$ soit continue.

1.4.2 Définitions essentielles

Définition 1.4. Soit y une solution de $\dot{y} = f(t, y(t))$.

L'erreur de consistance locale est définie comme la différence entre la solution exacte y et l'approximation numérique obtenue y_n , soit: $E_n = |y(t_n) - y_n|$.

L'erreur de consistance relative à y est :

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_n$$

où N est le nombre de pas de discrétisation.

Remarque 1.5. On dit que la méthode est consistante si pour tout y solution de $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $E_n \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Définition 1.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que la méthode est à l'ordre p si pour tout y solution de $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, on a : $E_n = O(h^p)$.

Ainsi la méthode est consistante si et seulement si elle est à l'ordre 0.

Définition 1.6. La stabilité d'une méthode c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte d'une équation reste bornée.

Remarque 1.6. Si la méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.

1.4.3 Détermination de la solution approchée d'une EDO du premier ordre

Soit y^* la fonction solution de l'équation différentielle $\dot{y} = f(t, y)$ pour $t \in [a, b]$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles égaux de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

Soient $t_0 = a$, $t_1 = a + h$, ..., $t_i = a + ih$, ..., $t_n = b$ les points de subdivision.

Les méthodes exposées ci-dessous permettent de trouver pour $1 \leq i \leq n$ une valeur approchée y_i de $y^*(t_i)$.

Méthode d'Euler

La méthode de Leonhard Euler (1707-1783) est une procédure numérique pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. C'est la plus simple des méthodes mais la moins utilisée en raison de sa faible précision.

Principe de la méthode

En un point quelconque $M(t, y)$ de la courbe intégrale, la pente de la tangente est connue et a pour valeur $m = f(t, y)$.

Le principe de la méthode d'Euler consiste à remplacer sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la courbe intégrale par sa tangente au point M_i d'abscisse t_i .

Soit M_0 le point de coordonnées $t_0 = a$, $y_0 = y(t_0)$.

Sur $[a, t_1]$, on remplace la courbe intégrale par sa tangente en M_0 . Le point M_1 a

donc pour ordonnées $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$.

On recommence sur $[t_1, t_2]$ en partant du point M_1 , on obtient ainsi le point M_2 d'ordonnée $y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$.

Ce qui donne la relation de récurrence : $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n-1$.

D'où la résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Conduit au schéma suivant

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \end{cases}$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante, cette méthode est convergente est de premier ordre car l'erreur de consistance vaut :

$$|y(t_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 f'(c, y_i), \text{ avec } c \in [t_{i-1}, t_i].$$

Mais cette méthode dite explicite est souvent instable c'est le cas si la fonction est linéaire par exemple

$$\dot{y} = f(t, y) = -ay \text{ avec } a > 0$$

Le schéma d'Euler est

$$y_{i+1} = y_i - ahy_i = (1 - ah)y_i$$

est instable dès que $h > \frac{2}{a}$.

Car dans ce cas y_i , tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini.

Méthode de Runge-Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

En utilisant un schéma numérique de la forme

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi(t_i, y_i, h_i) \end{cases}$$

où la fonction d'incrémentation ϕ est approximation de $f(t,y)$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Supposons un entier r , une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$.

L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + \dots + b_r k_r) \\ t_{i+1} = t_i + h \\ k_j = f(t_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)) \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + \dots + b_r = 1$.

Les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A .

Méthode d'ordre 1 ($r=1$)

Pour $b = 1$, $a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$, se réduit à la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 ($r=2$)

Pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2, on suit le principe décrit ci-dessous : remplaçons sur chaque intervalle la courbe intégrale par un arc de parabole (au lieu d'une droite).

Connaissant y_0 ordonnée de M_0 , il faut calculer y_1 ordonnée de M_1 : $y_1 = y_0 + mh$ où m est la pente de $M_0 M_1$.

Pour une parabole, la tangente au point p d'abscisse $\frac{1}{2}(t_0, t_1)$ est parallèle à la corde $M_0 M_1$.

On a donc : $m = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_p)$

y_p n'est pas connu. On calcule une valeur approchée en utilisant la méthode d'Euler sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \frac{h}{2}]$.

On prend donc $m = f[t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)]$.

La formule $y_1 = y_0 + mh$ peut alors s'écrire:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_0, y_0) \\ k_2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \end{cases}$$

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode RK4 utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de y_{i+1} à partir de la valeur de y_i .

On considère un point intermédiaire a d'abscisse $t_i + \frac{h}{2}$ dont la valeur de l'ordonnée est donnée par :

$$y_{ia} = y_i + \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_i\right) \times \frac{h}{2}$$

Soit : $y_{ia} - y_i = \left(\frac{dy}{dt}\right)_i \times \frac{h}{2} = \frac{k_1}{2}$.

Puis un point b d'ordonnée : $y_{ib} = y_i + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ia} \times \frac{h}{2}$.

Soit : $y_{ib} - y_i = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ia} \times \frac{h}{2} = \frac{k_2}{2}$.

On calcule alors l'ordonnée d'un point c d'abscisse $t_i + h$ à l'aide de la relation :

$$y_{ic} = y_i + \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib}\right) \times h.$$

Soit : $y_{ic} - y_i = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib} \times h = k_3$.

Soit : $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ic}$ la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ au point c .

On pose : $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ic} \times h = k_4$.

L'ordonnée définitive y_{i+1} du point d'abscisse $x_i + h$ est donnée par la relation :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)_i + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ia} + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)_{ib} + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{ic} \right] \times h$$

Où : $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$.

La méthode de RK4 est définie par le schéma suivant :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

Remarque 1.7. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient précise.

Pour améliorer l'efficacité du calcul, on utilise des méthodes à pas variable, c'est-à-dire des méthodes dans lesquelles le pas h varie à chaque itération.

Une des méthodes classiques, consiste à employer deux méthodes de Runge-Kutta *emboîtées*, la première méthode d'ordre r sert à calculer la solution approchée, tandis que la seconde d'ordre r' sert à estimer l'erreur de consistance pour contrôler le pas, on dit que la méthode est d'ordre (r, r') .

Méthode Runge-Kutta-Fehlberg :

Une façon de garantir l'exactitude dans la solution d'un système d'équation différentielle est de résoudre le problème en employant la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45 dénoté), qu'est l'une des méthodes emboîtées. Elle est d'ordre 5 pour le calcul de la solution et d'ordre 4 pour le contrôle du pas.

Chaque étape exige l'utilisation des six valeurs suivantes :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1) \\ k_3 = hf(t_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2) \\ k_4 = hf(t_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\ k_5 = hf(t_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \\ k_6 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5) \end{cases}$$

Alors une approximation à la solution du système d'équation différentielle est faite pour suivre une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (1.5)$$

là où les quatre valeurs de fonction k_1, k_3, k_4 et k_5 sont employées. Notez que le k_2 n'est pas employé dans la formule (1.5). Une meilleure valeur pour la solution est déterminée suivant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (1.6)$$

L'erreur est $:\Delta_i = |y_{i+1}^* - y_{i+1}|$, elle est évaluée à chaque pas.

La taille optimale du pas optimale sh peut être déterminée en multipliant les temps scalaires de s avec la taille du pas courant h . Le s scalaire est:

$$s = \left(\frac{tolh}{2\Delta_i}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0.84\left(\frac{tolh}{\Delta_i}\right)^{\frac{1}{4}}$$

où tol est la tolérance spécifique de commande d'erreur.

1.4.4 Exemple d'application

On s'intéresse à illustrer la méthode la plus précise, pour cela prenons un simple exemple pour comparer la méthode d'Euler et celles de Runge-Kutta.

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = 2y + t^2 \text{ sur l'intervalle } [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est :

$$y^* = \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$$

Pour les méthodes de résolution on associe un programme implémenté sous Matlab.

1. *function programme*
2. *clear all;*
3. *clc;*
4. *a=input('Donnez la borne inf de l'intervalle :');*
5. *b=input('Donnez la borne sup de l'intervalle :');*
6. *t(1)=a;*
7. *y(1)=1;*
8. *n=input('donnez le nombre de sous intervalles: ');*
9. *h=(b-a)/n;*
10. *disp('la valeur de h est: ');*
11. *h*
12. *% La méthode exacte:*
13. *Fexacte(1)=1;*
14. *for i=1:n*
15. *t(i+1)=t(i)+h;*
16. *Fexacte(i+1)= exacte(t(i+1));*
17. *end*
18. *disp('la discrétisation du temps :')*
19. *t*

```
20. disp('Les valeurs exactes de la fonction en chaque itération:')
21. Fexacte
22. subplot(221); plot(t,Fexacte,'b'); grid on; title('La méthode exacte');
23. % La méthode d'Euler:
24. for i=1:n
25.     t(i+1)=t(i)+h;
26.     y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
27. end
28. disp('Les valeurs de yi avec la méthode d'Euler:')
29. y
30. subplot(222); plot(t,y,'b'); grid on; title('La méthode d'Euler');
31. % La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:
32. for i=1:n
33.     k1=h*f(t(i),y(i));
34.     k2=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(k1/2));
35.     t(i+1)=t(i)+h;
36.     y(i+1)=y(i)+k2;
37. end
38. disp('Les valeurs de yi avec la méthode RK2:')
39. y
40. subplot(223); plot(t,y,'b'); grid on; title('La méthode RK2');
41. % La méthode de Runge-kutta d'ordre 4:
42. for i=1:n
43.     k1=h*f(t(i),y(i));
44.     k2=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(k1/2));
45.     k3=h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(k2/2));
46.     k4=h*f(t(i)+h,y(i)+k3);
47.     t(i+1)=t(i)+h;
48.     y(i+1)=y(i)+(1/6)[k1+2k2+2k3+k4];
49. end
50. disp('Les valeurs de yi avec la méthode RK4:')
```

51. y

52. `subplot(224); plot(t,y,'b'); grid on; title('La méthode RK4');`

53. `function z=exacte(a)`

54. $z = (5/4)\exp(2*a) - (1/2)a^2 - (1/2)a - (1/4);$

55. `function y' = f(a,b)`

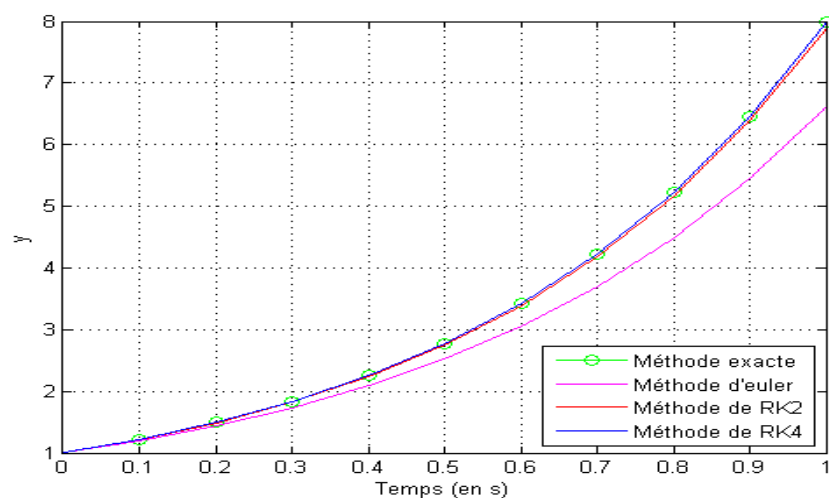
56. $y' = 2b + a^2;$

Le tableau suivant résume les résultats des méthodes appliquées sur l'exemple ci-dessus, avec un pas $h = \frac{1}{10}$:

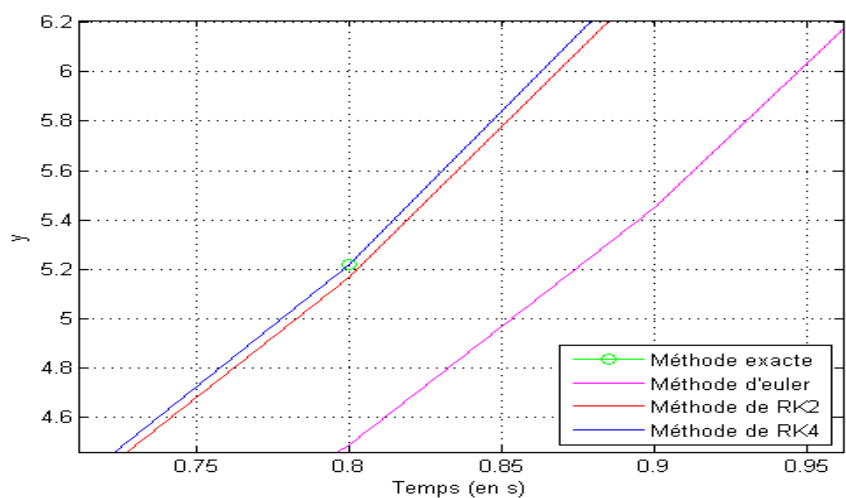
i	x_i	méthode Euler	méthode de RK_2	méthode de RK_4	méthode exacte
0	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.1	1.2000	1.2203	1.2218	1.2218
2	0.2	1.4410	1.4911	1.4948	1.4948
3	0.3	1.7332	1.8257	1.8326	1.8326
4	0.4	2.0888	2.2405	2.2519	2.2519
5	0.5	2.5226	2.7553	2.7728	2.7729
6	0.6	3.0521	3.3942	3.4201	3.4201
7	0.7	3.6986	4.1868	4.2239	4.2240
8	0.8	4.4873	5.1691	5.2212	5.2213
9	0.9	5.4487	6.3849	6.4569	6.4571
10	1	6.6195	7.8880	7.9861	7.9863

TAB. 1.1

Pour bien voir la différence entre les méthodes nous avons regroupé leurs résultats sur un même graphique comportant également la solution analytique.

FIG. 1.1 – *Comparaison des méthodes*

Puis on a fait un zoom pour distinguer les graphes

FIG. 1.2 – *La figure (1.1) avec un zoom*

Dans cette étude nous avons remarqué d'une part que la méthode d'Euler, bien que simple d'application, ne permettait d'approcher la solution qu'avec une faible précision pour un certain pas. La solution serait donc de prendre un pas très petit afin d'obtenir une meilleure approximation de la fonction, ce qui augmenterait considérablement le nombre de calcul. D'autre part, nous avons tenté de résoudre le même problème avec les méthodes Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4. Nous avons tout de suite remarqué que RK4 était bien plus complexe tant au

niveau des calculs, que du codage. Mais cela n'a pas été en vain étant donné que les résultats obtenus sont presque confondus avec la solution analytique, c'est-à-dire elle est la plus précise que les deux autres méthodes.

Résolution du même système avec RKF45:

Un programme RKF45 a été employé avec une tolérance $\epsilon = 10^{-5}$, il a changé la taille du pas automatiquement.

Après l'exécution de ce programme:

1. *function rk45*
2. *epsilon = 0.00001;*
3. *h = 0.1;*
4. *t(1) = 0;*
5. *y(1) = 1;*
6. *i = 1;*
7. *fprintf('Step %d: t = %6.4f, y = %18.5f', i-1, t, y(i));*
8. *while t(i) < 1*
9. *h = min(h, 1-t(i));*
10. *k1 = h*f(t(i),y(i));*
11. *k2 = h*f(t(i)+h/4, y(i)+k1/4);*
12. *k3 = h*f(t(i)+3h/8, y(i)+3k1/32+9k2/32);*
13. *k4 = h*f(t(i)+12h/13, y(i)+1932k1/2197-7200k2/2197+7296k3/2197);*
14. *k5 = h*f(t(i)+h, y(i)+439k1/216-8k2+3680k3/513-845k4/4104);*
15. *k6 = h*f(t(i)+h/2, y(i)-8k1/27+2k2-3544k3/2565+1859k4/4104-11k5/40);*
16. *y(i+1) = y(i) + 25k1/216+1408k3/2565+2197k4/4104-k5/5;*
17. *z(i+1) = y(i) + 16k1/135+6656k3/12825+28561k4/56430-9k5/50+2k6/55;*
18. *R = abs(y(i+1)-z(i+1))/h;*
19. *delta = 0.84*(epsilon/R)^(1/4);*
20. *if R ≤ epsilon*
21. *t(i+1) = t(i)+h;*
22. *i = i+1;*
23. *fprintf('Step %d: t = %6.4f, y = %18.5f', i-1, t(i), y(i));*

```

25.     h = delta*h;
26.     else
27.     h = delta*h;
28.     end
29. plot(t,y,'r');grid on;hold on;
30. end
31. function y' = f(a,b)
32. y' = 2b + a^2;

```

On obtient la figure suivante:

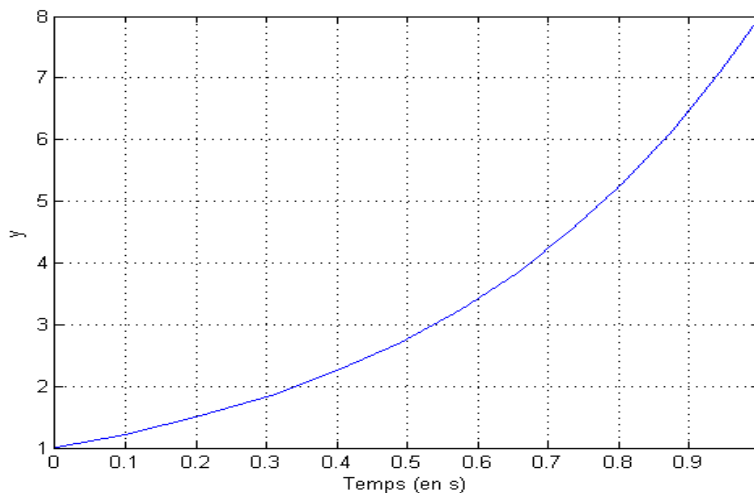


FIG. 1.3 – Méthode de Runge-Kutta-Fehlberg

Et les résultats de chaque itération son résumés ci-dessous

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	0.1000	0.2066	0.3071	0.4014	0.4905	0.5749	0.6554	0.7321	0.8057	0.8763	0.9442	1.0000
y_i	1	1.2218	1.5149	1.8595	2.2587	2.7183	3.2446	3.8436	4.5215	5.2847	6.1396	7.0928	7.9863

TAB. 1.2

Comparaison entre RKF45 et RK4

Un programme RKF45 à été employé avec $\epsilon = 10^{-5}$ pour la tolérance de commande d'erreur. Il à changé la taille du pas automatiquement et a produit les 12 approximations de la solution résumées dans le tableau (1.2).

Un programme RK4 à été employé avec la taille du pas a priori de $h = 0.1$, ce qui a exigé de l'ordinateur de produire 10 approximations au points équidistants dans le tableau (1.1).

On observe la différence dans la figure (1.5) après avoir appliqué un zoom sur la figure (1.4).

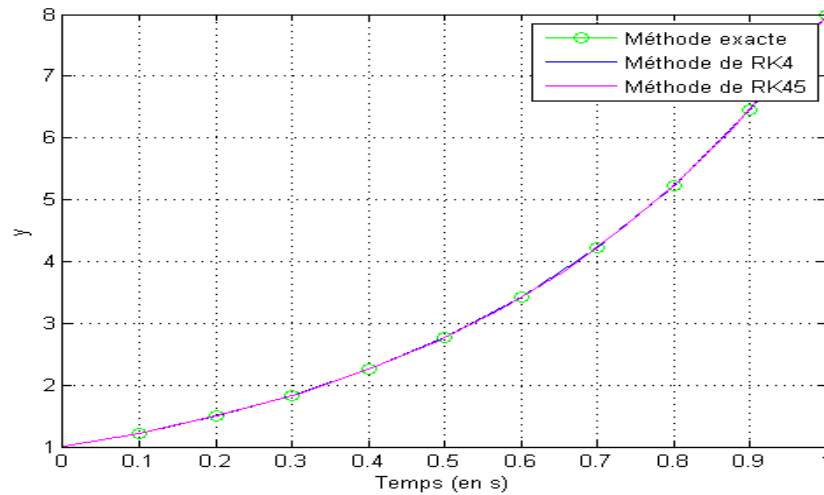


FIG. 1.4 – Comparaison des méthodes exacte, RK4 et RK45

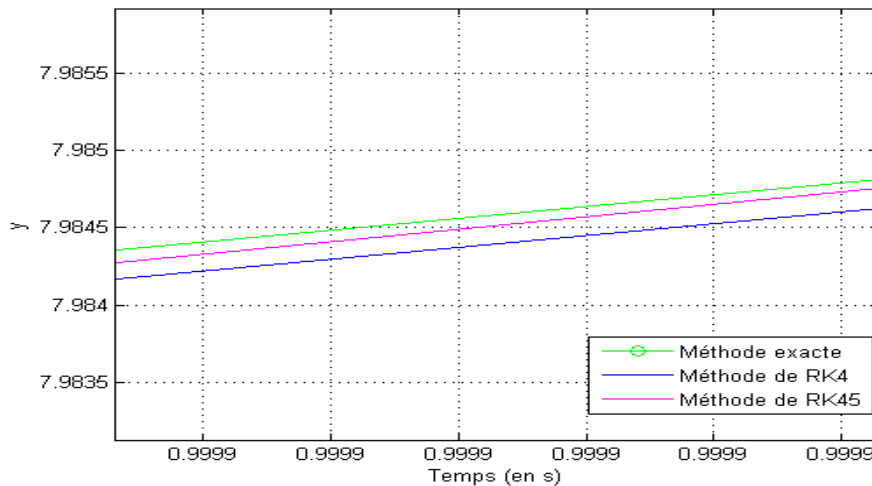


FIG. 1.5 – Figure (1.4) avec un zoom

les approximations au point final sont:

$$y(1) \approx y_{12} = 7.9863 \text{ pour RK45} \quad \text{et} \quad y(1) \approx y_{10} = 7.9861 \text{ pour RK4.}$$

on remarque que y_{12} coïncide avec la solution exacte à 10^{-4} près.

1.5 Conclusion

Les équations différentielles apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur, ainsi que la modélisation des problèmes de contrôle optimal. Trouver la solution d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles est un problème souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique, il est donc nécessaire de recourir à des méthodes numériques.

Chapitre 2

Généralités sur la théorie du contrôle optimal

2.1 Introduction

En mathématique, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratique de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique. La formalisation de cette théorie a posé des questions nouvelles; par exemple dans la théorie des équations différentielles ordinaires, elle a motivé un concept de solution généralisée et a engendré de nouveaux résultats d'existence de trajectoires optimales. La théorie de contrôle optimal est très liée à la mécanique classique et les points forts de cette théorie sont:

- Découverte de méthode de la programmation dynamique et du principe du maximum de pontryagin.
- Stabiliser les systèmes pour les rendre insensible à certains perturbations (stabilisations), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Plus tard sont apparues les fondations de la théorie du contrôle stochastique, la théorie des jeux, le contrôle d'équations aux dérivées partielles.

2.2 Position du problème

- Les variable nommées *variables d'états* seront notées x_i , $i = 1, \dots, n$. On a des systèmes qui évoluent dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de temps

notées: $x_i(t)$.

- Les **variables de contrôle** seront notées $u_j(t)$; $j = 1, \dots, m$, elles doivent être intégrable par rapport à t .
- Les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre nommées **équations d'états** de forme général $\dot{x} = f(t, x, u)$, où \dot{x} est le vecteur dérivé par rapport au temps t de toutes les composantes de x . f est un vecteur fonction de n composantes f_i , $i = 1, \dots, n$.
- L'**ensemble** U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être borné ou sans borne. Dans beaucoup de problèmes de contrôle on peut majorer et minorer les u_j . De plus si $a_j \leq u_j \leq b_j$ on peut remplacer u_j par des constantes en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable, et on aura $-1 \leq v_j \leq 1$.

Si U est borné et les variables de contrôle ne peuvent prendre que des valeurs extrêmes -1 ou 1, chaque changement est brusque (on perd la continuité), ces contrôles sont de type Bang-Bang.

Commande Bang-bang

Soit U l'ensemble de commande et U_e l'ensemble de points extrémaux de U . La commande admissible u est dite Bang-bang si $u \in U_e$ c'est-à-dire u prend les valeurs extrémales de U , ensemble borné. Ainsi, par exemple, si on a $|u(t)| \leq 1$, les commandes Bang-bang sont telles que $u(t) = \pm 1$.

- La **fonction coût** où l'objectif est généralement d'écrit par la formule suivante :

$$J(x, u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^T f_0(t, x, u) dt.$$

Cette fonction coût a deux parties: $g(T)$ est le coût terminal. $\int_{t_0}^T f_0(t, x, u) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution (définie par les variables d'états), elle dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

Pour résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif d'où la nécessité d'une définition du problème en termes physiques. En connaissant la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleure commande qui optimise l'objectif. Par exemple, chercher une commande en temps optimal revient à réaliser l'objectif d'un processus dans le temps le plus court. A l'aide des commandes $u(t) \in U$ on désire faire de sorte que le système suive une trajectoire déterminée, ou atteigne un état fixe, ou minimise le long d'une trajectoire un ou plusieurs critères (énergétique, économiques,...) donnés à l'avance.

2.3 Formulation générale d'un problème de contrôle

On appelle problème de contrôle optimal, tout problème noté (P) de type:

$$\begin{cases} \min J(u(t)) = g(x(T)) + \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \\ u(t) \in U, \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

ici:

- $J(u)$ est le critère de qualité (fonction objectif), c'est une fonction d'efficacité à optimiser pour chaque commande sur l'intervalle T . Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système est exécuté de la façon la plus souhaitable. Donc choisir une mesure de performance, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système.
- $x(t) = (x_j, j \in J) \in \mathbb{R}^n$ un n -vecteur représentant la position (l'état) du système à l'instant $t \in [t_0, T]$.
- x_0 est la position initiale.
- x_1 est la position finale.
- $u(t)$ est une commande, la classe des commandes admissibles $U \in \mathbb{R}^m$ est constitué de fonctions mesurables $u(t)$:

$$U = \{u(t), t \in [t_0, T]\}.$$

Chaque commande transfère l'objet du point de départ x_0 en un point de l'ensemble d'arrivée $G(T)$.

2.4 Ensemble d'accessibilité

Considérons le système:

$$\forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t); x(0) = x_0. \quad (2.2)$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par

$$Acc(x_0; T) = \{x_u(T) / u \in L^\infty([0, T], \Omega)\}$$

où $x_u(t)$ est la solution du système (2.2) associée au contrôle u .

Autrement dit $Acc(x_0; T)$ est l'ensemble des extrémités terminales des solutions de (2.2) au temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u .

Théorème 2.1. *Considérons le système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n*

$$\forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t); \quad x(0) = x_0$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est compact. Soient $T > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t \in [0, T]$, $Acc(x_0; T)$ est un compact, convexe, et varie continûment avec t sur $[0, T]$.

Avant d'entamer la résolution du problème (2.1), on doit d'abord vérifier s'il est contrôlable ou pas.

2.5 Contrôlabilité des systèmes de contrôle linéaires

Pour certains types de problème, avant leur résolution, on s'intéresse à l'existence de leurs solutions. Elle consiste à faire passer le système d'un état initial x_0 à un état final x_1 prescrit en un temps fini. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère. Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{sur }]0, +\infty[\\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

On suppose que f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipchitz de sorte qu'on puisse assurer l'existence d'une solution unique de (2.3) notée: $x[u, x_0](\cdot)$.

Un problème de contrôle consiste en :

1. une classe de contrôles admissibles : U_{ad} .
2. une EDO de la forme (2.3) décrivant l'état du système.
3. une famille d'ensembles cibles: τ .

Définition 2.1. Soit x_0 dans \mathbb{R}^n ; si on peut trouver $u \in U_{ad}$ et $t_1 > 0$ tels que $x[u, x_0](t_1) \in \tau(t_1)$, on dit que u envoie x_0 à la cible; le système est dit **contrôlable**.

On peut alors se poser plusieurs questions:

- Trouver l'ensemble des états initiaux $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que l'on peut envoyer à la cible, c'est-à-dire l'ensemble des états initiaux contrôlables. On a alors un problème de **contrôlabilité**.
- Si on connaît un état initial contrôlable x_0 , un deuxième problème est un problème de *synthèse* : trouver et décrire au moins un contrôle qui réalise la jonction de x_0 à la cible et plus généralement décrire une méthode constructive de calcul d'un contrôle pour un x_0 contrôlable donné.
- Quand il n'y a pas unicité du contrôle, on peut aussi chercher le meilleur relativement à un critère (ou coût) donné. C'est alors un problème de **contrôle optimal**.

En pratique, on se borne à l'étude sur un intervalle $[0, T]$ avec un ensemble cible fixe τ .

Définition 2.2. Le système (2.3) est dit contrôlable si on peut le ramener d'un état initial donné vers un état final prescrit en un temps fini.

Le système est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T)$$

Il est dit contrôlable en temps T si $\mathbb{R}^n = \text{Acc}(x_0, T)$.

Dans le cas linéaire, le système du problème (2.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \quad (2.4)$$

où $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Les systèmes linéaires auquel on va s'intéresser sont de la forme suivante:

$$\forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t); x(0) = x_0, \quad (2.5)$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} , A , B , r sont trois applications localement intégrables sur I , $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

L'ensemble des contrôles u et l'ensemble des applications mesurables sont localement bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielle nous assurent que, pour tout contrôle u , le système (2.5) admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue.

Soit $M(\cdot) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène : $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = Id$. Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I , alors $M(t) = e^{tA}$.

La solution $x(\cdot)$ du système (2.5) associée au contrôle u est donnée par:

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds \quad (2.6)$$

pour tout $t \in I$.

Cette application dépend de u donc si on change la fonction u , on obtient une autre trajectoire $t \rightarrow x(t)$ dans \mathbb{R}^n .

2.6 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas, la matrice $M(t) = e^{tA}$, et la solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$

$$x(t) = e^{tA}(x_0 + \int_0^t e^{-sA}(B(s)u(s) + r(s))ds). \quad (2.7)$$

2.6.1 Cas sans contrainte sur le contrôle: condition de Kalman

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité.

Théorème 2.2. *On suppose que $U = \Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle).*

Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps t (quelconque) si et seulement si la matrice:

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \quad \text{est de rang } n.$$

La matrice C est appelée matrice de kalman, et la condition $\text{rg } C = n$ est appelée condition de kalman.

Remarque 2.1. La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

2.6.2 Cas avec contrainte sur le contrôle

Dans le cas où le contrôle u est contraint d'appartenir à un sous ensemble $U \in \mathbb{R}^m$, les propriétés de contrôlabilité globale sont reliés aux propriétés de stabilité de la matrice A .

Il est clair que si:

1. $r = 0$ et $0 \in \Omega$
2. la condition de Kalman est vérifiée,
3. la matrice A est stable (toutes les valeurs propres, de la matrice A sont de partie réelle strictement négative).

Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en temps fini. Dans le cas mono-entrée $m = 1$, on a le résultat suivant.

Théorème 2.3. *Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0. Considérons le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $u(t) \in \Omega$. Alors tout point de \mathbb{R}^n peut être conduit à l'origine en*

temps fini si et seulement si la paire (A,b) vérifie la condition de Kalman de la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

2.7 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et de dimension infinie a suscité depuis près de cinquante ans une littérature considérable, les auteurs ont considéré des généralisations de $\dot{x} = Ax + Bu$. Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non-linéaires:

Proposition 2.1. *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, f(x_0, u_0) = 0. \quad (2.8)$$

On note $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$. Si $\text{rang}(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n$, alors le système (2.8) est localement contrôlable en x_0 .

En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

2.8 Principe du maximum

Le principe du maximum est utilisé dans la théorie du contrôle optimal pour trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre, en présence de contraintes portant sur l'état ou les commandes d'entrée. Il a été formulé par le mathématicien soviétique Lev Semenovich Pontryagin en 1956, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations, et développé par la suite par ses élèves et collaborateurs (Pontryagin 1961).

Le principe du maximum de Pontryagin est un principe qui donne une condition nécessaire d'optimalité pour les systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires, il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimal pour l'envoi d'une fusée sur la lune.

Les trajectoires optimales sont sélectionnées parmi une famille de trajectoires dites extrémales qui sont des solutions d'un système hamiltonien généralisé.

Soit le système dynamique suivant:

$$\dot{x}(t) = f(t,x,u)$$

et la fonctionnelle à optimiser:

$$J(u) = \int_{t_0}^T f^\circ(t,x,u)dt \rightarrow \min_u, \\ x(0) = x_0 \in M_0, x(t_1) = x_1 \in M_1 \quad u \in U, t \in [t_0, T]$$

où $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur $[t_0, T]$.

$f^\circ(t,x,u)$: fonction coût définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, T]$.

Définition 2.3. On définit la fonction hamiltonienne $H(t,x,p,p_0,u)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ dans \mathbb{R} par

$$H(t,x,p,p_0,u) = p_0 f^\circ(t,x,u) + \langle p, f(t,x,u) \rangle = \sum_{i=0}^n p_i f^i(t,x,u) \quad (2.9)$$

Le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p,u) = f(t,x,u) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p,u) = -p_0 \frac{\partial f^\circ}{\partial x}(t,x,p) - p \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,p) \end{cases} \quad (2.10)$$

est dit système hamiltonien. Si on prend arbitrairement une commande admissible (continue par morceaux) $u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, et la condition initiale $x(t_0) = x_0$, nous pouvons ainsi trouver la trajectoire $x(t)$ correspondante à $u(t)$ satisfaisant au système (2.10) et ensuite, nous trouvons les solutions $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$ satisfaisant au système (2.9).

Pour des valeurs fixes de p et x , H sera une fonction de $u \in U$ soit alors:

$$M(t,x,p) = \max_{u \in U} H(t,x,p,u)$$

Si la fonction H atteint son maximum en un point $u \in U$ alors : $M(t,x,p)$ représente le maximum de la fonction H pour p et x fixes.

2.8.1 Principe du maximum de pontryagin

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire d'optimalité, c'est le principe du maximum de pontryagin.

Théorème 2.4. *Soit $u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, une commande admissible du problème, et $x(t)$ la trajectoire correspondante à $u(t)$ et telle que $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_1$. Pour que la commande $u(t)$ et la trajectoire $x(t)$ soient optimales, il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction $p(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t))$ solution de (2.10), continue et identiquement non nul appelé vecteur adjoint, et un réel $p_0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p_0)$ soit non trivial, et tels que, pour tout $t \in [0, T]$ on a:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)). \end{cases}$$

Satisfaisant aux conditions de principe du maximum

$$\max_u H(t, x(t), p(t), p_0, u) = H(t, x^*(t), p(t), p_0, u^*(t)).$$

correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$ tel que:

i. $\forall t$, $t_0 \leq t \leq T$, la fonction $H(t, x(t), p(t), u)$ de la variable $u \in U$ atteint au point $u = u(t)$ son maximum, c'est-à-dire:

$$H(T, x(T), p(T), u) = M(T, x(T), p(T)).$$

ii. A l'instant final T soient vérifiées les relations:

$$\begin{aligned} p_0(T) &\leq 0 \\ M(T, x(T), p(T)) &= 0 \end{aligned}$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [6].

Remarque 2.2. Si les conditions du théorème sont satisfaites par une seule trajectoire joignant x_0 à x_1 , il est clair que la trajectoire optimale doit exister, on peut espérer que la trajectoire trouvée est précisément optimale.

2.8.2 Le problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût

$$J(t,x) = \int_0^t f^\circ(s,x(s),u(s))ds + g(s,x(s)) \quad (2.11)$$

où le temps final t n'est pas fixé, soit M_1 une variété de \mathbb{R}^n . Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(0) = x_0.$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble U des contrôles admissibles sur $[0, T]$, telle que $x(T) \in M_1$, et de plus $x(\cdot)$ minimise sur $[0, T]$ le coût (2.11).

Théorème 2.5. (principe du maximum: cas de Mayer-Lagrange)

Si le contrôle u est optimal sur $[0, T]$ alors il existe une application $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ absolument continue, et un réel $p_\circ \leq 0$, tel que le couple $(p(\cdot), p_\circ)$ est non trivial, et:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t),p_\circ,u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),p(t),p_\circ,u(t)), \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t,x(t),p(t),p_\circ,u(t)) &= 0, \end{aligned}$$

2.9 Méthodes de résolution numérique

Les problèmes de contrôle optimal, en général, n'ont pas toujours de solutions analytique. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre.

Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes.

En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équations non linéaire.

2.9.1 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, et qui numériquement se ramènent à une méthode de tir (tir simple ou tir multiple). Le choix de ces méthodes s'explique par leurs avantages

à savoir, la bonne rapidité de convergence (quand il y a convergence) et leur grande précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal.

2.9.2 Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimale suivant:

$$\begin{cases} \min J(u(t)) = g(x(T)) + \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \\ u(t) \in U, x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Et supposons que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme:

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \text{ où } z(t) = (x(t), p(t)), \quad (2.13)$$

et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$.

Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z} = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0.$$

Et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème (2.12) aux valeurs limites est alors équivalent à $G(z_0) = 0$, c'est-à-dire il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Remarque 2.3. Si le temps final T est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant T comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\frac{dT}{dt} = 0$. On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutation. Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité

sur le Hamiltonien.

Remarque 2.4. Le PMP tel qu'il est énoncé prend en compte les contraintes sur le contrôle mais ne prend pas compte d'éventuelles contraintes sur l'état de la forme $h_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, k$, où les fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 . Ce problème est en effet beaucoup plus difficile.

2.9.3 Méthodes directes: Optimisation non-linéaire sous contraintes

Les méthodes directes sont les méthodes les plus évidente lorsqu'on aborde un problème de commande optimale. En discrétisant l'état et la commande dans le problème donné, on se ramène à un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie (N variables). La forme:

$$x_{i+1} = x_i + h_i * f(t_i, x_i, u_i)$$

représente la version discrète de l'équation d'état $\dot{x} = f(t, u(t))$, discrétisée en utilisant par exemple la méthode d'Euler explicite. Pour résoudre ce problème, on suppose que le temps est subdivisé de manière égale, tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, le pas de discrétisation étant noté $h = t_{i+1} - t_i$. On suppose que la commande reste constante par morceau durant le pas de temps h , les contraintes sur la commande ou sur l'état sont appliquées sur les valeurs discrétisées.

2.9.4 Résolution numérique: paramétrisation simplifiée du contrôle (découpe par zones)

Dans la méthode directe, les paramètres du contrôle u sont les u_i , $i = 0, \dots, N - 1$. La difficulté est de définir la commande u d'une façon simple, à l'aide d'un nombre restreint de paramètre.

Donc le problème sert à optimiser une commande en fonction du temps, on peut imposer des zones de fonctionnement pour le moteur électrique (par exemple). Dans un second temps, une loi de gestion d'énergie propre à chaque zone pourra être définie, permettant une utilisation de cette stratégie en temps-réel. Cette paramétrisation permet de réduire grandement la taille du problème d'optimisation.

Cela conduit donc au problème de programmation non linéaire suivant:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), & i = 0, \dots, N-1 \\ \min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N) , \\ u_i &\in U, i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Remarque 2.5. Cette méthode est très simple à mettre en œuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.

2.9.5 Exemple numérique

Soit: $\ddot{x} = u$, équation du mouvement d'un véhicule roulant sur une route sans frottement.

Les conditions initiales sont: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, et les conditions finales sont: $x(t_f) = 0.5$, $y(t_f) = 0$.

On cherche la meilleure commande pour ramener la voiture de x_0 à x_f tout en minimisant notre fonctionnelle u^2 .

On fait un changement de variable:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= u \end{aligned}$$

et on aura le problème de contrôle optimal formulé comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(u) = \min_u \int_0^{t_f} u^2(t) dt \\ \text{s.c.} \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \\ x(t_f) = 0.5, \quad y(t_f) = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

2.9.6 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB:

On se ramène à un problème de discrétisation, la résolution de ce problème est effectué sous Matlab, on utilise la méthode d'Euler et de Runge-kutta d'ordre 4 respectivement, implémentées avec la routine *fmincon.m*.

1. *function Direct-Euler*
2. *clear all; close all; clc;*
3. *global tf*
4. *n=100; tf=2; % n: nombre de pas de discétisation, tf: temps final*
5. *uinit=2*rand(n,1)-1; % initialisation aléatoire du contrôle*
6. *xinit=uinit; % point de départ pour fmincon*
7. *Lb=-ones(n,1); ub=ones(n,1); % contraintes sur le contrôle $\text{abs}(u) \leq 1$*
8. *options=optimset('Display', 'iter', 'Algorithm', 'active-set');*
9. *[res,Fval,exitflag]=fmincon(@fobj,xinit,[],[],[],[],Lb,ub,@cond,options);*
10. *fprintf('contrôle ');*
11. *format compact*
12. *res'*
13. *fprintf('EXITFLAG=%g ',exitflag); % convergence de l'algorithme;*
14. *% tracé des courbes optimales*
15. *x(1)=0; y(1)=0;*
16. *for i=1:n-1 % boucle d'Euler*
17. *x(i+1)=x(i)+(tf/n)*y(i);*
18. *y(i+1)=y(i)+(tf/n)*res(i);*
19. *end*
20. *subplot(221); plot(linspace(0,tf,n),x(1:n),'b'); title('trajectoire de x');*
21. *subplot(222); plot(linspace(0,tf,n),y(1:n),'b'); title('trajectoire de y');*
22. *subplot(223); plot(linspace(0,tf,n),res(1:n),'b'); title('contrôle');*
23. *=====*
24. *function [c,ceq]=cond(u)*
25. *global tf;*
26. *n=length(u);*

```

27.  $x_f=0;y_f=0$ ;
28. for  $i=1:n-1$  % boucle d'Euler
29.    $x_f=x_f+(t_f/n)*y_f$ ;
30.    $y_f=y_f+(t_f/n)*u(i)$ ;
31. end
32.  $c=0$ ; % pas de contraintes inégalités
33.  $ceq=[x_f-0.5,y_f]$ ; % on impose la condition finale  $x_f=0.5$  et  $y_f=0$ 
34. =====
35. function  $val=fobj(u)$ 
36. global  $t_f$ ;
37.  $n=length(u)$ ;
38.  $val=0$ ;
39. for  $i=1:n$  % boucle d'Euler
40.    $val=val+(t_f/n)*u(i)^2$ ;
41. end

```

Les résultats sont donnés dans les figures (2.1):

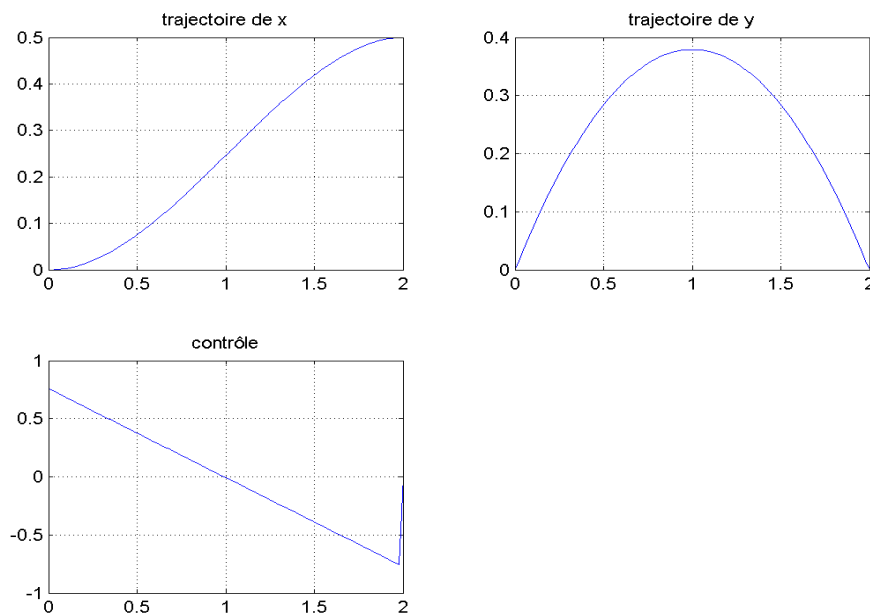


FIG. 2.1 – Méthode d'Euler

```

1. function Direct-RK4
2. clear all; close all; clc;
3. global tf
4. n=100; tf=2; %n: nombre de discétisation, tf: temps final;
5. uinit=2*rand(n,1)-1; % initialisation aléatoire du contrôle
6. xinit=uinit; % point de départ pour fmincon
7. Lb=-ones(n,1); ub=ones(n,1); % contraintes sur le contrôle
8. options=optimset('Display', 'iter', 'Algorithm','active-set');
9. [res,Fval,exitflag]=fmincon(@fobj,xinit,[],[],[],[],Lb,ub,@cond,options);
10. fprintf('controle ');
11. format compact
12. res'
13. fprintf('EXITFLAG=%g ',exitflag);
14. % tracé des courbes optimales
15. x(1)=0; y(1)=0;
16. for i=1:n-1 % boucle RK4
17.   k11=tf/n*y(i);
18.   k21=tf/n*(y(i)+k11/2);
19.   k31=tf/n*(y(i)+k21/2);
20.   k41=tf/n*(y(i)+k31);
21.   x(i+1)=x(i)+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
22.   k12=tf/n*res(i);
23.   k22=tf/n*(res(i)+k12/2);
24.   k32=tf/n*(res(i)+k22/2);
25.   k42=tf/n*(res(i)+k32);
26.   y(i+1)=y(i)+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
27. end
28. subplot(221); plot(linspace(0,tf,n),x(1:n),'b'); title('trajectoire de x');
29. subplot(222); plot(linspace(0,tf,n),y(1:n),'b'); title('trajectoire de y');
30. subplot(223); plot(linspace(0,tf,n),res(1:n),'b'); 'contrôle';
31. =====

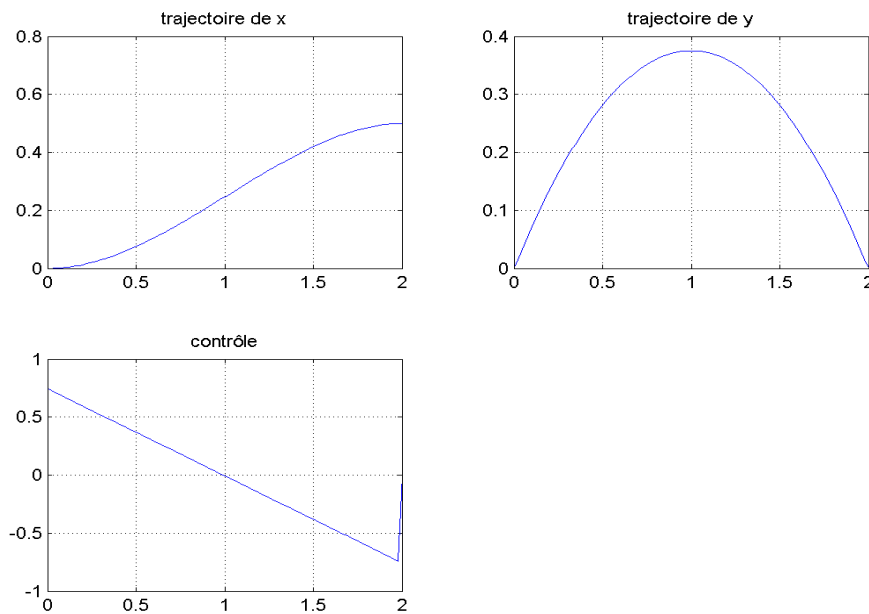
```

```

32. function[c,ceq]=cond(u)
33. global tf;
34. n=length(u);
35. xf=0; yf=0;
36. for i=1:n-1 % boucle RK4
37.   k11=tf/n*yf;
38.   k21=tf/n*(yf+k11/2);
39.   k31=tf/n*(yf+k21/2);
40.   k41=tf/n*(yf+k31);
41.   xf=xf+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
42.   k12=tf/n*u(i);
43.   k22=tf/n*(u(i)+k12/2);
44.   k32=tf/n*(u(i)+k22/2);
45.   k42=tf/n*(u(i)+k32);
46.   yf=yf+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
47. end
48. c=0; % pas de contraintes inégalités
49. ceq=[xf-0.5,yf]; % on impose la condition finale xf=0.5 et yf=0
50. =====
51. function val=fobj(u)
52. global tf;
53. n=length(u);
54. val=0;
55. for i=1:n % boucle RK4
56.   k11=(tf/n)*u(i)2;
57.   k21=(tf/n)*(u(i)2+k11/2);
58.   k31=(tf/n)*(u(i)2+k21/2);
59.   k41=(tf/n)*(u(i)2+k31);
60.   val=val+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
61. end

```

Les résultats sont donnés dans les figures (2.2):

FIG. 2.2 – Méthode de RK_4

2.9.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a parlé de la théorie du contrôle optimal qui a commencé dans les années 50, avec la formalisation du principe du maximum de Pontryagin et le développement des méthodes de résolution. De nos jours les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches dans de nombreux domaines; tel que l'aérospatiale (problèmes de transfert orbital de planification des vols), l'automatique et la robotique (problèmes de coordination de mouvements des robots) et le problème de l'automobile (véhicule électrique). Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de la minimisation de la consommation de l'énergie d'un véhicule électrique.

Chapitre 3

Optimisation de l'énergie d'un véhicule électrique

3.1 Introduction

Les problématiques environnementales liées aux consommations croissantes d'énergie ont animé et animent encore aujourd'hui les débats scientifiques et politiques. Le véhicule électrique s'impose comme une solution stratégique pour affronter l'un des plus grands défis de notre avenir énergétique.

L'histoire du véhicule électrique commence en Europe au début du *XIX^{ème}* siècle. Après l'invention de la batterie primaire par Volta en 1800 et la démonstration du principe du moteur électrique en 1821 par Faraday, la première voiture électrique a été construite en 1834 en Grande Bretagne par un mécanicien nommé Thomas Davenport. Depuis 1980 les constructeurs de véhicules, de batteries, de moteurs électriques, groupent actuellement leurs efforts de recherche, pour prendre en charge les différents services de l'environnement mondiale.

La solution électrique répond aux exigences de la circulation urbaine, par son absence de pollution gazeuse et de nuisance sonore.

Le développement des véhicules électriques exigera des solutions de gestion de l'énergie, et le coût est un autre objet de préoccupation du consommateur, qui peut se demander quel impacts aura la recharge de son véhicule sur sa facture énergétique et qui devra en assumer la charge financière. Donc il a besoin d'un système de contrôle ou de surveillance à distance, qui peut donner les informations dont il a besoin pour optimiser l'utilisation, la charge et les coûts énergétiques des véhicules. Ce chapitre concerne la conduite des stratégies de contrôle associées à

l'optimisation de la consommation d'énergie d'un véhicule électrique sur un cycle de conduite donné. Nous discutons sur une formulation de ce type de problèmes de contrôle optimal, et sur la façon d'approcher la solution de ce problème par une technique de discrétisation.

3.2 Constitution d'un véhicule électrique

Le véhicule électrique intègre une batterie HT (Haute tension) dont le volume et la masse sont importants (environ 300 kg). Cela permet une répartition des masses favorisant la stabilité dynamique du véhicule. Ce mode de motorisation nécessite des composants qui n'ont rien de commun avec ceux utilisés en motorisation thermique.

La batterie : La batterie de traction est un générateur électrochimique. Son principe de fonctionnement est identique à celui des batteries de démarrage et d'éclairage que nous connaissons.

Toutefois, en raison de son aptitude à générer de très forts courants, pendant des durées importantes, il est très différent des autres batteries, par sa technologie de fabrication, sa gestion de charge et de décharge. Un générateur électrochimique stocke de l'énergie sous forme chimique et la restitue sous forme électrique.

Moteur : Toute l'énergie consommée dans un moteur électrique est transformée en mouvement, donc il chauffe nettement moins que le moteur thermique. La durée de vie d'un moteur électrique est nettement supérieure à celle d'un moteur thermique. On utilise dans notre prototype le moteur de type RL classique à courant continu, qui a des efficacités énergétiques excellentes et de plus, ils sont très légers.

Convertisseur (générateur) : Le convertisseur électronique permet de faire varier la tension aux bornes du moteur et par conséquent la vitesse. Il s'agit d'une interface entre la batterie et le moteur électrique.

La transmission mécanique : Permet de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique afin de mouvoir le véhicule.

3.3 Modélisation du problème de fonctionnement d'un véhicule électrique

Avec une présence importante au début de l'histoire de l'automobile, le véhicule électrique est réapparu ces derniers temps comme une solution potentielle au remplacement du véhicule conventionnel. Même s'il n'est pas encore en mesure de s'imposer sur le marché des véhicules particuliers, il reste sans conteste une bonne solution mais à la condition de disposer d'une source d'énergie embarquée performante.

Les véhicules autonomes électriques utilisent la seule énergie électrique des batteries, cette énergie est utilisée pour alimenter un ou plusieurs moteurs électriques de traction.

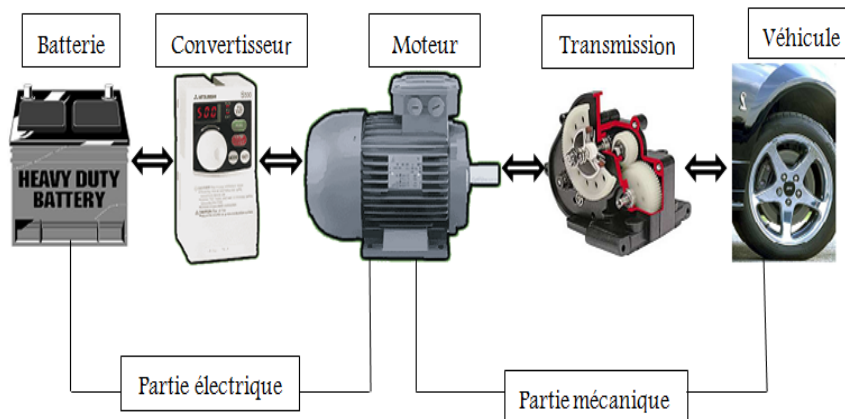


FIG. 3.1 – Chaîne de traction standard

La figure (3.1) représente le lien de traction standard entre les différentes composantes de la constitution du véhicule en question. La modélisation de cette chaîne de transmission se compose de deux parties: la partie électrique en liaison avec la batterie, le convertisseur et le moteur; la partie mécanique en liaison avec la transmission et le véhicule. Chaque partie est décrite par une équation différentielle, une pour le courant dans le moteur et une pour la vitesse.

3.3.1 Modélisation de la partie électrique

Le moteur est alimenté par un convertisseur. La tension délivrée par le convertisseur peut se mettre sous la forme :

$$V_m = u \times V_{alim} \quad \text{avec } u \in \{-1, +1\}.$$

Cependant, contrairement au modèle étudié dans [2], on considère le contrôle u continu sur l'intervalle $[-1, +1]$.

Le courant délivré par la batterie sera alors :

$$i_{alim} = u \times i_m.$$

La maille sur le circuit moteur nous permet d'écrire l'équation suivante :

$$V_m = R_m \cdot i_m + L_m \cdot \frac{d i_m}{dt} + k_m \times \Omega_m.$$

D'où

$$\frac{d i_m}{dt} = \frac{u \cdot V_{alim} - R_m i_m - K_m \Omega_m}{L_m}. \quad (3.1)$$

Sous cette forme, il sera facile de l'intégrer par une méthode numérique tel que Runge-Kutta. Cependant, la particularité de cette équation est d'être couplée à la partie mécanique par le terme :

$$K_m \cdot \Omega_m.$$

Le couple fournie par le moteur est proportionnel au courant et peut s'écrire :

$$C_m = K_m \cdot i_m.$$

3.3.2 Modélisation de la partie mécanique

La vitesse du moteur et celle des roues sont liées par le rapport de transmission :

$$K_r = \frac{\Omega_m}{\Omega_{roue}}.$$

Les forces appliquées au véhicule sont :

La force roulement : $F_{roul} = M \times g \times R_f$.

La force aérodynamique : $F_{aero} = \frac{1}{2} \times p \times S \times C_x \times V^2$.

La force liée à la pente : $F_{pente} = M \times g \times \sin(\frac{\pi}{180} \theta)$.

La somme des forces est donc :

$$F_{tot} = F_{roul} + F_{aero} + F_{pente}.$$

Le couple résistant dû à ces forces est donc :

$$C_{roue} = F_{tot} \times r.$$

Ce couple résistant peut être ramené au niveau du moteur avec la formule suivante :

$$C_{résistant} = \frac{C_{roue}}{K_r}.$$

Finalement on obtient l'équation suivante :

$$C_{résistant} = \frac{(M.g.R_f + \frac{1}{2}p.S.C_x.V^2 + M.g.\sin(\frac{\pi}{180}\theta))r}{K_r}.$$

L'inertie total ramené au moteur est la somme de l'inertie propre du moteur et l'inertie du véhicule ramené au coté moteur :

$$J = J_m + \frac{M.r^2}{K_r^2}.$$

L'équation différentielle de la vitesse est de la forme :

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = C_m - C_{résistant}.$$

Cette équation est liée à celle du courant par le terme: $C_m - C_{résistant}$.

D'où :

$$\frac{d\Omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{j} (K_m \cdot i_m(t) - \frac{r}{K_r} (MgK_f + \frac{1}{2}pSC_x(\frac{\Omega_m r}{K_r})^2)). \quad (3.2)$$

Pour connaître la position du véhicule, nous pouvons la déduire de l'équation différentielle suivante :

$$V = \frac{dpos(t)}{dt} = \frac{\Omega_m(t) \times r}{K_r}. \quad (3.3)$$

Remarque 3.1. La vitesse linéaire du véhicule sera obtenue à partir de la vitesse du moteur: $V = \frac{\Omega_m}{K_m} \times 3.6$ donnée en (km/h).

L'énergie instantanée consommée par le véhicule est de la forme :

$$\frac{dE}{dt} = V_{atim} \cdot u(t) \cdot i_m(t) + R_{bat} \cdot u^2(t) \cdot i_m^2(t).$$

$V_m i_m(t)$ est la puissance délivrée par le moteur.

On ajoutera l'énergie consommée par la batterie qui vaut $R_{bat}.i_{alim}^2$.
 Au cours de déplacement sur le cycle de temps $[0, t_f]$ on obtient:

$$E(t_f, i_m, u) = \int_0^{t_f} (u(t).i_m(t).V_{alim} + R_{bat}.u^2(t).i_m^2(t))dt. \quad (3.4)$$

Finalement on obtient le problème du contrôle optimal du véhicule électrique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{i_m(t), \Omega(t), pos(t), u(t)} E(t_f, i_m, u) \\ \text{s.c.} \\ i_m'(t) = \frac{u(t)V_{alim} - R_m i_m(t) - K_m \Omega(t)}{L_m} \\ \dot{\Omega}(t) = \frac{1}{J} \left(K_m i_m(t) - \frac{r}{K_r} \left(MgK_f + \frac{1}{2} \rho S C_x \left(\frac{\Omega(t)r}{K_r} \right)^2 \right) \right) \\ pos'(t) = \frac{\Omega(t)r}{K_r} \\ |i_m(t)| \leq 150 \\ |\Omega(t)| \leq \frac{K_r}{3.6 \times r} \times V_l \\ -1 \leq u(t) \leq 1 \\ (i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (i_m^0, \Omega^0, pos^0) \in \mathbb{R}^3 \\ (i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Les variables d'états sont:

- i_m le courant traversant le moteur.
- Ω la vitesse de rotation du moteur.
- pos est la position du véhicule.

Le contrôle u est compris entre -1 et 1 . Dans ce problème, nous avons des contraintes sur les variables d'état: $|i_m(t)| \leq 150$ afin de limiter le courant dans le moteur pour écarter la possibilité de le détruire; et un déplacement contraint $|\Omega(t)| \leq \frac{K_r}{3.6 \times r} \times V_l$, où V_l désigne la vitesse limite autorisée (donnée en km/h) pour effectuer un trajet. Les autres termes sont des paramètres physiques fixes représentés dans le tableau (3.1).

Paramètres	Signification	Valeur
K_r	Rapport de réduction	10
ρ	Densité de l'air	1.293 kg/m^3
C_x	Coefficient aérodynamique	0.4
S	Surface frontale du véhicule	2 m^2
r	Rayon de la roue	0.33 m
K_f	Coefficient de frottement aux roues	0.03
K_m	Coefficient du couple moteur	0.27
R_m	Résistance de l'induit	0.03 Ohms
L_m	Inductance de l'induit	0.05 H
M	Masse du véhicule	250 kg
g	Constante de la gravité	9.81
J	Inertie du moteur	$M \times r^2 / K_r^2$
V_{alim}	Tension alimentation batterie	150 volts
R_{bat}	Résistance de la batterie	0.05 Ohms

TAB. 3.1 – Paramètres du véhicule.

Dans le problème de la minimisation de la consommation d'énergie d'un véhicule électrique sur un cycle connu à l'avance l'utilisation de la méthode indirecte basée sur le PMP ne permet pas d'obtenir des solutions. On propose une méthode directe pour résoudre ce problème qui aboutit à un problème discrétisé qui est résolu en utilisant l'intégrateur numérique RK4, avec les hypothèses faites sur les contraintes terminales imposées sur les trajectoires.

Ce problème est soumis aux conditions aux limites. Les conditions initiales sont données par le point de départ (i_m^0, Ω^0, pos^0) au temps initial $t_0 = 0$, et l'ensemble cible \mathcal{T} au temps final t_f fixé, mais une ou deux variables peuvent ne pas être fixées: par exemple, seulement la position finale égale à $100m$ est requise.

3.4 Application

Dans notre cas la méthode est évaluée pour un déplacement de 100 mètres, et un cycle de temps $t_f = 10$ secondes, avec une initialisation $(i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (0, 0, 0)$; et les conditions finales suivantes $(i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{100\}$.

Pour comparer les résultats lors des variations de contraintes sur la vitesse on a fait des tests pour des simulations sur un programme implémenté sous Matlab en

utilisant `fmincon.m`.

Programme:

```

1. function direct
2. % Discretisation directe en utilisant fmincon.m du problème minimisation
   de
3. % l'énergie d'un véhicule électrique, le problème étant de joindre (0,0,0)
   a (- , - ,100)
4. clear all; close all; clc;
5. global tf
6. param-véhicule;
7. tf=10;
8. n=100; % Nombre de pas de discretisation
9. xinit = zeros(n,1); % Initialisation nulle; Point de départ pour fmincon
10. lb=-ones(n,1);ub=ones(n,1); %Contrainte sur le contrôle  $abs(u) \leq 1$ 
11. options=optimset('Display','iter','Algorithm','active-set','MaxFunEvals',
   100000);
12. [res, Fval, exitflag]=fmincon(@fobj, xinit, [], [], [], [], lb, ub, @cond,
   options);
13. fprintf('Contrôle ')
14. format short
15. res';
16. fprintf('EXITFLAG = %g ',exitflag);
17. =====
18. % Calcul des trajectoires optimales
19. z(1,1:4)=0;
20. % Methode RK4
21. for i=1:n
22. k11=tf/n*(a11*z(i,1) + a12*z(i,2) + b11*res(i));
23. k21=tf/n*(a11*z(i,1) + a12*z(i,2) + b11*res(i) + k11/2);
24. k31=tf/n*(a11*z(i,1) + a12*z(i,2) + b11*res(i) + k21/2);
25. k41=tf/n*(a11*z(i,1) + a12*z(i,2) + b11*res(i) + k31);

```

```

26     z(i+1,1)=z(i,1) + (k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)/6;
27.    k12=tf/n*(a21*z(i,1) + a22*z(i,2)^2 - Froul);
28.    k22=tf/n*(a21*z(i,1) + a22*z(i,2)^2 - Froul + k12/2);
29.    k32=tf/n*(a21*z(i,1) + a22*z(i,2)^2 - Froul + k22/2);
30.    k42=tf/n*(a21*z(i,1) + a22*z(i,2)^2 - Froul + k32);
31.    z(i+1,2)= z(i,2) + (k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)/6;
32.    z(i+1,5)=z(i+1,2)*3.6*r/Kr;
33.    k13=tf/n*(a32*z(i,2));
34.    k23=tf/n*(a32*z(i,2) + k13/2);
35.    k33=tf/n*(a32*z(i,2) + k23/2);
36.    k43=tf/n*(a32*z(i,2) + k33);
37.    z(i+1,3)= z(i,3) + (k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43)/6;
38.    k14=tf/n*(z(i,1)*Valim*res(i) + Rbat*z(i,1)^2*res(i)^2);
39.    k24=tf/n*(z(i,1)*Valim*res(i) + Rbat*z(i,1)^2*res(i)^2 + k14/2);
40.    k34=tf/n*(z(i,1)*Valim*res(i) + Rbat*z(i,1)^2*res(i)^2 + k24/2);
41.    k44=tf/n*(z(i,1)*Valim*res(i) + Rbat*z(i,1)^2*res(i)^2 + k34);
42.    z(i+1,4)=z(i,4) + (k14 + 2*k24 + 2*k34 + k44)/6;
43. end
44. subplot(321); plot(linspace(0,tf,n),z(1:n,1)); title('Courant du moteur A');
    grid on;
45. subplot(322); plot(linspace(0,tf,n),z(1:n,5)); title('Vitesse véhicule km/h');
    grid on;
46. subplot(323); plot(linspace(0,tf,n),z(1:n,3)); title('Position du véhicule m');
    grid on;
47. subplot(324); plot(linspace(0,tf,n),z(1:n,4)); title('Énergie consommée J');
    grid on;
48. subplot(325); plot(linspace(0,tf,n),res(1:n)); title('Contrôle'); grid on;
49.    fprintf('courant du moteur A = %f',z(n,1));
50.    fprintf('vitesse du véhicule km/h = %f',z(n,5));
51.    fprintf('position du véhicule m = %f',z(n,3));
52.    fprintf('énergie consommée J = %f',z(n,4));

```

```

53. =====
54. function [c, ceq] = cond(u) % conditions terminales et contraintes sur
    l'état
55. param-véhicule;
56. global tf
57. n=length(u);
58. z1f(1)=0; z2f=0; z3f=0;
59. % ... la méthode RK4
60. for i=1:n-1
61.     k11=tf/n*(a11*z1f(i) + a12*z2f + b11*u(i));
62.     k21=tf/n*(a11*z1f(i) + a12*z2f + b11*u(i) + k11/2);
63.     k31=tf/n*(a11*z1f(i) + a12*z2f + b11*u(i) + k21/2);
64.     k41=tf/n*(a11*z1f(i) + a12*z2f + b11*u(i) + k31);
65.     z1f(i+1)=z1f(i) + (k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)/6;
66.     k12=tf/n*(a21*z1f(i) + a22*z2f2 - Froul);
67.     k22=tf/n*(a21*z1f(i) + a22*z2f2 - Froul + k12/2);
68.     k32=tf/n*(a21*z1f(i) + a22*z2f2 - Froul + k22/2);
69.     k42=tf/n*(a21*z1f(i) + a22*z2f2 - Froul + k32);
70.     z2f = z2f + (k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)/6;
71.     z2fc =z2f*3.6*r/Kr;
72.     k13=tf/n*(a32*z2f);
73.     k23=tf/n*(a32*z2f + k13/2);
74.     k33=tf/n*(a32*z2f + k23/2);
75.     k43=tf/n*(a32*z2f + k33);
76.     z3f= z3f + (k13 + 2*k23 + 2*k33 + k43)/6;
77. end
78. c= z1f.2-1502; % On impose la contrainte sur l'état abs(z1f)≤150;
79. % z2fc.2-502; % On impose la contrainte sur l'état abs(z2fc)≤50;
80. ceq= z3f-100; % On impose la condition finale z3f=100m
81. =====
82. function energie = fobj(u) % fonction objectif à minimiser

```

```

83. param-vehicule;
84. global tf
85. n=length(u);
86. im=0; om=0; energie=0;
87. %... la methode RK4
88. for i=1:n
89.   k11=tf/n*(a11*im + a12*om + b11*u(i));
90.   k21=tf/n*(a11*im + a12*om + b11*u(i) + k11/2);
91.   k31=tf/n*(a11*im + a12*om + b11*u(i) + k21/2);
92.   k41=tf/n*(a11*im + a12*om + b11*u(i) + k31);
93.   im = im + (k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)/6;
94.   k12=tf/n*(a21*im + a22*om2 - Froul);
95.   k22=tf/n*(a21*im + a22*om2 - Froul + k12/2);
96.   k32=tf/n*(a21*im + a22*om2 - Froul + k22/2);
97.   k42=tf/n*(a21*im + a22*om2 - Froul + k32);
98.   om = om + (k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)/6;
99.   energie = energie + tf/n*(im*Valim*u(i) + Rbat*im2*u(i)2);
100. end

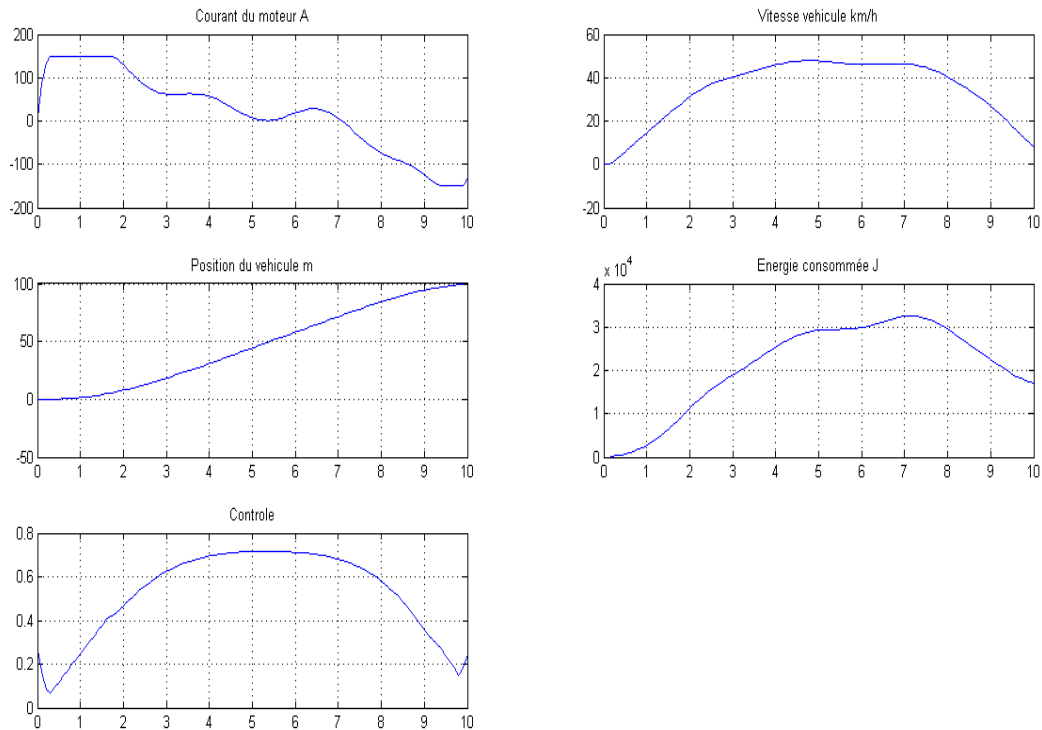
```

3.4.1 Cas sans contrainte sur la vitesse

Dans cette simulation la vitesse est libre. Après l'exécution du programme on obtient les solution suivante:

- La vitesse finale du véhicule est $V_f = 7,91 \text{ km/h}$
- Le courant du moteur est $i_m = -130,99 \text{ A}$
- La distance parcourue est $pos(10) = 99,76 \text{ m}$
- L'énergie minimale $E_{min}(10) = 16981,63 \text{ j}$

La figure (3.2) illustre les solution obtenues :

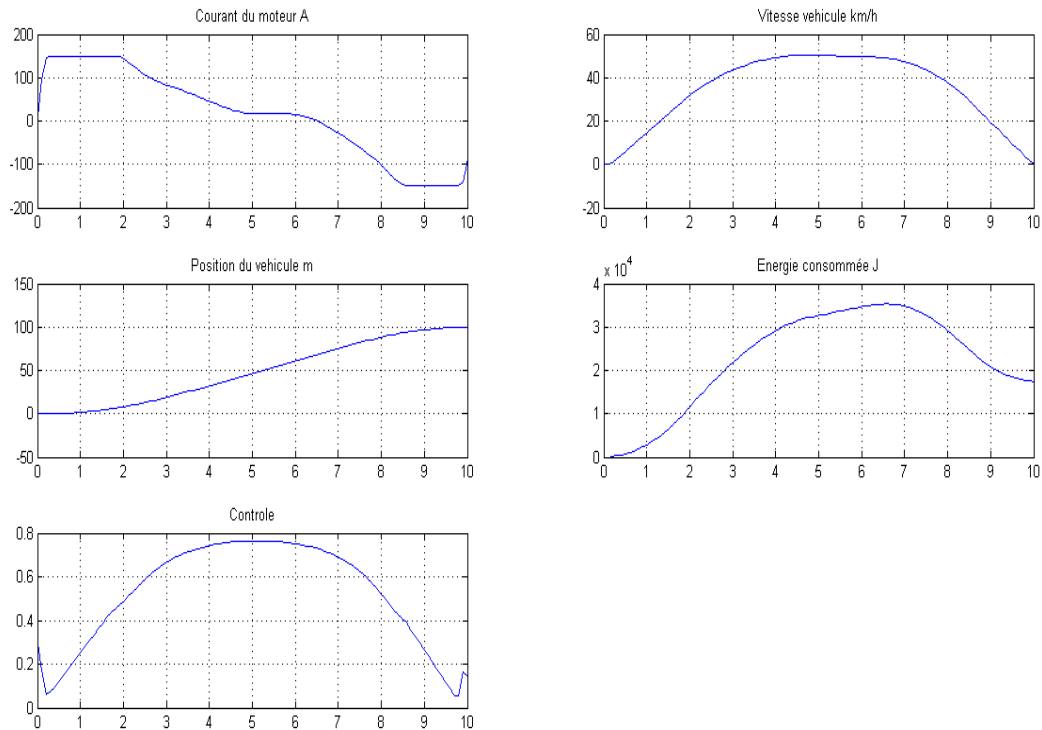

 FIG. 3.2 – Cas: V_f libre

3.4.2 Cas d'une contrainte sur l'état final de la vitesse

La vitesse finale dans la figure (3.2) n'est pas égale à zéro. Cependant notre programme peut prendre en compte ce paramètre. Pour comparer les solutions, on simule les mêmes instances précédentes en ajoutant une contrainte sur la vitesse finale, c'est-à-dire, un déplacement de 100 mètre et un cycle $t_f = 10$ secondes avec une vitesse finale nulle:

$$(i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (0, 0, 0); (i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in T = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{100\}.$$

Il faut noter aussi que notre programme est modifié à la ligne 80 en ajoutant une contrainte supplémentaire sur l'état final de la vitesse, donc elle devient `ceq=[z2fc(end)-0; z3f-100]; .`

FIG. 3.3 – Cas: $V_f = 0$

Dans ce cas la consommation minimale de l'énergie est plus élevée que dans le cas où l'on ne considère pas la contrainte sur la vitesse finale.

Le calcul effectué donne une énergie $E_{min} = 17295,45 J$ pour une position $pos = 100 m$ et une vitesse finale $V_f = 0 km/h$.

Comme le véhicule démarre et termine par une vitesse nulle, celui-ci passe forcément par une phase de récupération de l'énergie électrique.

Le courant a une intensité maximale au deux premières secondes et termine par sa valeur minimale à la fin du cycle pour que le véhicule soit en mesure d'être ramené à l'arrêt (vitesse finale nulle). Par ailleurs, la courbe modulée de la commande possède une allure proportionnelle à celle de la vitesse.

3.4.3 Cas d'une contrainte sur l'état permanente sur la vitesse et d'une vitesse finale non nulle

Notre programme peut aussi prendre en compte la contrainte sur le paramètre de la vitesse de déplacement. On considère les données précédente en ajoutant une contrainte sur la variable d'état $\Omega(t)$ en posant $V_l = 50 \text{ km/h}$ qui indique une limitation de la vitesse autorisée pour effectuer ce trajet. De manière analogue, la vitesse finale V_f est maintenue à 30 km/h . Les condition aux bornes s'écrivent $(i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (0, 0, 0); (i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \times \{\frac{k_r}{3,6 \times r} \times 30\} \times \{100\}$. Notre programme ainsi modifié à la ligne 79 en activant la contrainte sur l'état de la vitesse, il donne une énergie $E_{min} = 25030,69 \text{ J}$ pour une position $pos = 100 \text{ m}$ et une vitesse finale $V_f = 30 \text{ km/h}$.

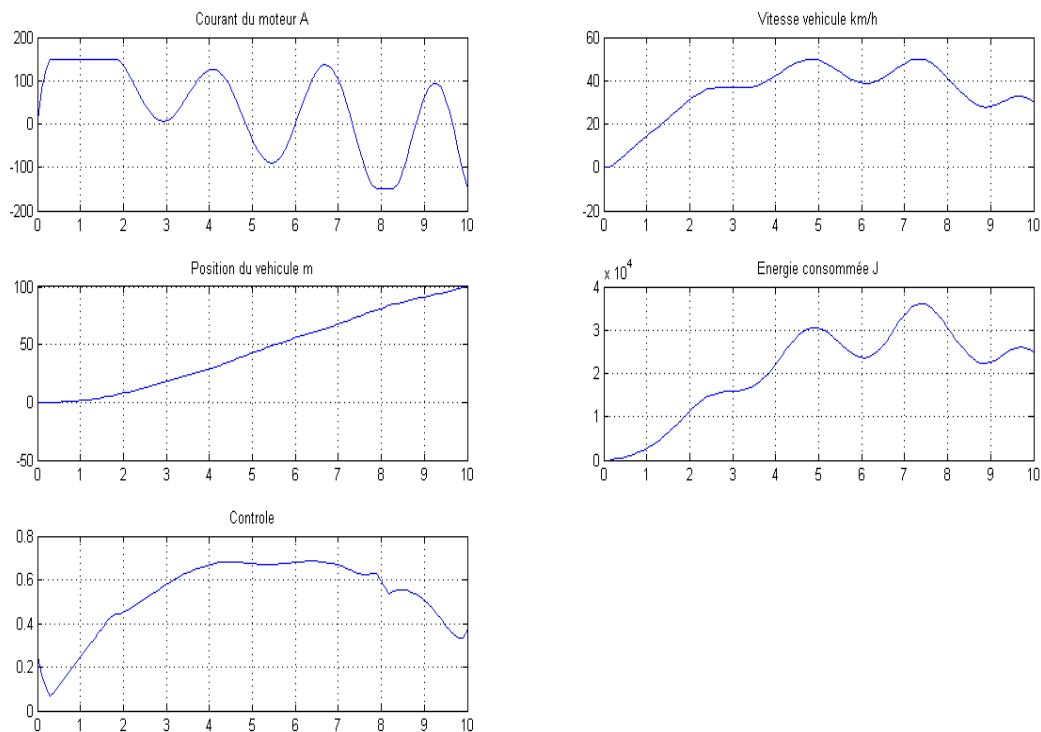


FIG. 3.4 – Cas: $V_f = 30$ avec $|V| \leq 50$

On remarque que la courbe de l'énergie passe par des phases de récupération de l'énergie électrique.

3.4.4 Cas d'une contrainte permanente sur la vitesse et d'une vitesse finale nulle

Si on reprend les tests précédents en imposant une vitesse finale nulle. Les conditions aux bornes s'écrivent $(i_m(0), \Omega(0), pos(0)) = (0, 0, 0)$; $(i_m(t_f), \Omega(t_f), pos(t_f)) \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{100\}$.

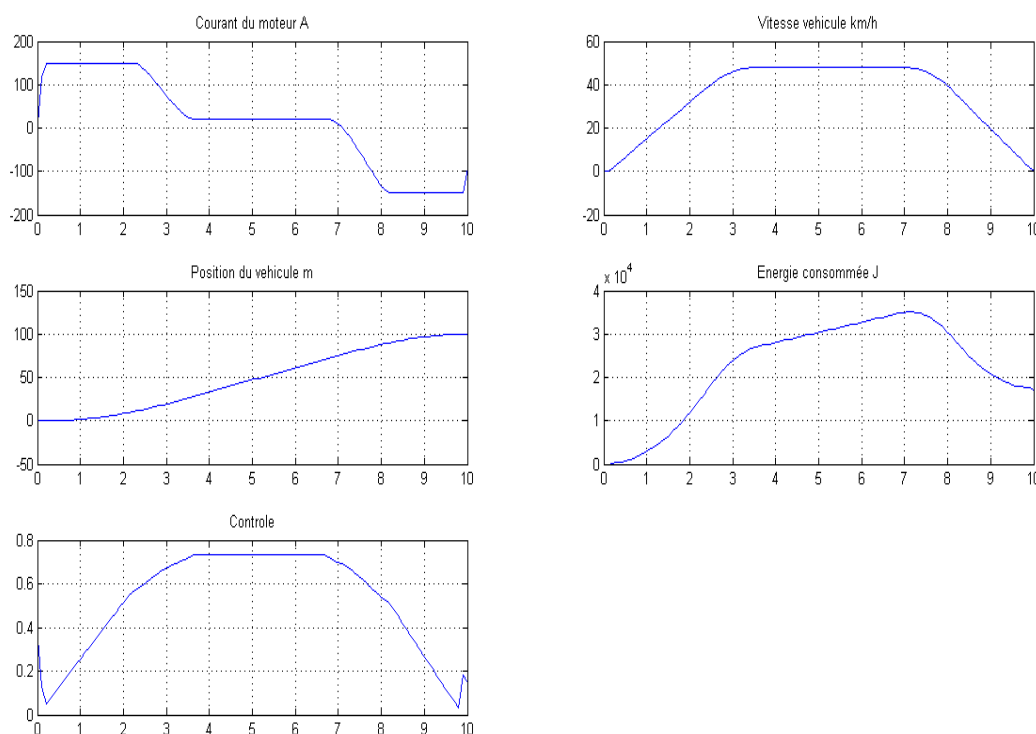


FIG. 3.5 – Cas: $V_f = 0$ avec $|V| \leq 48$

Les valeurs obtenues dans ce cas sont: $E_{min} = 17221,31 J$ pour une position $pos = 100 m$ et une vitesse finale $V_f = 0 km/h$.

3.5 Conclusion

Le problème de gestion de l'énergie d'un véhicule électrique à été exprimé comme un problème de commande optimale, qu'on a résolu, en utilisant une méthode

directe basée sur la technique de discrétisation. L'objectif de notre travail est de trouver la commande optimale pour amener le véhicule d'un état initial donné vers un état final prescrit tout en minimisant un indice de performance désigné par la consommation de l'énergie électrique du véhicule.

Conclusion

Du fait de normes de plus en plus contraignantes, et d'une prise de conscience globale concernant le réchauffement climatique, les véhicules électriques sont fréquemment présentés comme une solution efficace pour lutter contre la pollution de l'air, la réduction des émissions de CO₂, ainsi que la raréfaction des réserves de pétroles. C'est d'ailleurs pour ces raisons que l'industrie automobile intensifie ses efforts afin de rendre le transport routier moins dépendant du carburant.

L'objectif de ce travail a été de résoudre un problème de contrôle optimal d'un véhicule, en minimisant l'énergie consommé avec une méthode directe. Pour ce faire, on a présenté d'abord une introduction générale aux équations différentielles, car la modélisation d'un système de contrôle peut avoir recours à des équations différentielles, et on a abordé quelques méthodes numériques de résolution, puis on a comparé entre ces méthodes pour illustrer la plus précise.

Par la suite, on a parlé de la notion de la théorie du contrôle optimal et nous avons développé certains éléments de base de cette théorie et présenté une méthode de résolution à savoir la méthode directe qui consiste à transformer un problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie en discrétisant l'état et le contrôle. Ensuite nous avons modélisé le problème du véhicule électrique et on a fait des simulations sous Matlab pour illustrer les résultats.

Enfin, on termine par des perspectives, qui sont basés sur l'aspect pratique (*problème d'autonomie*). Les consommateurs ont besoin de savoir quelle distance ils peuvent parcourir après une recharge complète des batteries, où ils peuvent recharger (chez eux? Au travail? Dans des lieux publics comme des centres commerciaux? et

combien de temps cela va prendre. Une fois que les consommateurs auront surmonté les obstacles à l'adoption d'un véhicule électrique, ils pourront tirer profit d'un mode de transport plus propre, plus silencieux et plus économique sans faire de concession à la sécurité ou à la commodité.

Bibliographie

- [1] A. Munnier, "*Théorie des équations différentielles ordinaire*", 2006/2007.
- [2] A. Merakeb. "*Optimisation multicritères en contrôle optimal: Application au véhicule électrique*". Thèse de doctorat, université de Tizi-Ouzou, 2011.
- [3] ANFA, poisson technique, "*Véhicules électriques et hybrides*", édité avec le concours de l'éducation nationale. Edition 2011.
- [4] Brian Stout. "*Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles*". Université de provence, 2007.
- [5] C. Gilormini, G. Hirsch. "*Equations différentielles*", Edition Masson, 1980.
- [6] E. Trélat. "*Contrôle optimal: Théorie & applications*", vuibert, collection: "*mathématiques concrètes*", 2005.
- [7] E. Trélat. "*Théorie du contrôle optimal et application en aéronautique*", université d'Orléans, UFR sciences, Fédération Denis Poisson, labo, MAPMO, UMR 6628 Route de chartres, Bp 6759, 45067 Orléans Cedex 2. 2008.
- [8] G. Rousseau, "*Véhicule hybride et commande optimale*". Thèse de doctorat, université de l'école des mines de paris, spécialité mathématiques et automatique, 19 décembre 2008.
- [9] Jaan Kiusalaas. "*Numerical methods in enginnering whith MATLAB*", Cambridge, 2005.
- [10] J. Bernard, Delpart, T. M. Guerra, F. Buechi. "*Fuel cell hybrid vehicules: Global optimisation based on optimal control theory*", International Review of Electrical Engineering, 1. 2006.
- [11] J. Macki, A. Stauss. "*Introduction to optimal control theory*", Springer verlag (second printing), 1995.
- [12] J. Quinet. "*Elémentaire de mathématiques supérieures, tome 4: Equations Différentielles*", Edition Dunod. 1977.

-
- [13] L. Pontriaguine, V. Boltiansky et E. Mitchenko. *"Théorie mathématique des processus optimaux"*. Edition de la littérature mathématique physique, Moscou 1961.
- [14] L. S. Pontriagin. *"Mathematical theory of optimal processus"*, interscience, New York 1962.
- [15] M. Kant. *"Motorisation d'un véhicule électrique"*, université de Compiègne RGE n°103, pp.29-38, novembre 1993.
- [16] M. Marty, D. Dixneuf et D. Garcia Gilabert, *"Principes d'électrotechnique"*, DUNOD, Paris.2005.
- [17] P. Periyaswamy, ph vollet. *"Le véhicule électrique:vers une gestion de l'énergie intelligente"*. Livre blanc, Schneider Electric Industries SAS, february 2011.
- [18] R. E. Kalman, *"Mathématique description of lineair dynamical systems"*, J. SIAM control, 1, 152-192.1963.
- [19] R. Trigui, F. Badin, P. Maillard, A. Mailfert, *"Etude de l'usage réel d'un véhicule utilitaire électrique"*. Revue transport et sécurité n°50, p.p 17-32, mars 1996.
- [20] R. Vinter. *"Optimal control, systems and control:foundations and applications"*, Birkhänsér Boston, Inc, Boston, MA. 2000.
- [21] V. I. Arnold. *"Toutes les mathématiques"*, Edition Ellipses. 2004.
- [22] V. Meşter, *"Conception optimale systématique des composants des chaînes de traction électrique"*. Thèse de doctorat, école centrale de lille, spécialité génie électrique. 22 mai 2007.