

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOU D MAMMERI
TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

MÉMOIRE

Présenté par

M^{elle}. OUENDI Massiva

Pour l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Probabilités-Statistique.

Sujet

Les principes d'invariance pour les processus auto-normalisés et applications.

Soutenu publiquement

Devant le jury composé de

<i>M^r</i> . Hocine	FELLAG	Professeur	UMMTO	Président
<i>M^{me}</i> . Dalila	MERABET	MCB	UMMTO	Encadreur
<i>M^{me}</i> . Malika	CHEIKH	MCB	UMMTO	Examineur

Remerciements

En premier lieu, je remercie Dieu tout puissant de m'avoir accordée la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Madame MERABET Dalila. Je la remercie de m'avoir encadrée, orientée, aidée et conseillée.

J'adresse mes sincères remerciements aux enseignants du département mathématiques, spécialité probabilités-statistique. Je souhaite particulièrement remercier Monsieur FELLAG Hocine pour son suivi durant cette formation.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire en acceptant d'examiner mon travail.

Je désire aussi remercier mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes frères et soeurs pour leurs encouragements.

Je remercie mon fiancé Yacine et sa famille, pour leurs soutien inconditionnel.

Enfin je remercie mes amis Dyhia, Lynda, Maamoun qui ont toujours été là pour moi. Leurs encouragements m'ont été d'une grande aide.

Des remerciement très particuliers pour mes deux amies adorées Amal et Khadidja qui m'ont soutenue durant tout mon parcours universitaire.

Table des matières

Table des matières	2
Introduction générale	6
1 Convergence hölderienne de processus stochastiques	10
1.1 Introduction	10
1.2 Les espaces de Banach $H_\alpha[0, 1]$ et $H_\alpha^0[0, 1]$	11
1.2.1 Définitions	11
1.2.2 Analyse fonctionnelle de H_α et H_α^0	11
1.2.3 Processus à trajectoires dans H_α	13
1.2.4 Compacité dans H_α	14
1.3 Convergence faible hölderienne	14
1.4 Equitension hölderienne	15
2 Principe d'invariance pour les variables aléatoires de même loi	20
2.1 Introduction	20
2.2 Cas de suite des variables i.i.d	21
2.2.1 Principe d'invariance dans $D[0, 1]$ et $C[0, 1]$	21
2.2.2 Principes d'invariance dans les espaces H_α	22
2.2.2.1 Lissage polygonal du processus de sommes partielles	22
2.2.2.2 Lissage par convolution du processus de sommes partielles	23
2.3 Principe d'invariance sous dépendance	24
2.3.1 Cas de suite de variables aléatoires α -mélangeantes	24

2.3.2	Cas de suite des variables aléatoires associées	27
3	Principes d'invariance pour les processus de sommes partielles auto-normalisés	31
3.1	Introduction	31
3.2	Principe d'invariance dans $C[0,1]$	33
3.3	Le principe d'invariance dans $D[0,1]$	37
3.4	Principes d'invariance dans H_α	38
4	Application à la détection de rupture épidémique	42
4.1	Introduction	42
4.2	Cas de suite des variables aléatoires i.i.d	44
4.2.1	Convergence de $DI(n, \alpha)$	44
4.2.2	Consistance de $DI(n, \alpha)$	46
4.2.3	Exemple d'application	49
4.3	Cas indépendant non stationnaire	52
4.3.1	Convergence de $DI(n, \alpha)$	52
4.3.2	Consistance de $DI(n, \alpha)$	52
4.4	Cas dépendant stationnaire (α -mélange)	53
4.4.1	Convergence de $DI(n, \alpha)$	53
4.4.2	Consistance de $DI(n, \alpha)$	55
4.4.3	Application	56
4.5	Les statistiques SUI et SDI	59
4.6	Exemple numérique	61
	Conclusion et perspectives	65
A	Le mouvement brownien	66
A.1	Introduction	66
A.2	Le Mouvement brownien	67
A.3	Les accroissements du mouvement brownien	67

A.4	Propriétés du mouvement brownien	68
A.5	Le pont brownien	70
B	Convergence de mesures de probabilités dans les espaces métriques	72
B.1	Introduction	72
B.2	Convergence faible dans un espace métrique	72
B.3	Convergence de processus stochastiques dans $C[0,1]$	75
B.3.1	Définitions et notations	75
B.3.2	Convergence faible et équitension	75
B.4	Convergence de processus stochastiques dans $D[0,1]$	77
B.4.1	Définitions et notations	77
B.4.2	Convergence faible et équitension	78
C	Programmes de simulation sous Matlab	81
	Bibliographie	88

Introduction générale

Le principe d'invariance est un résultat de la théorie des probabilité affirmant qu'un processus construit sur des sommes partielles de variables aléatoires converge en loi et que le processus limite ne dépend pas de la loi de ces variables. Ce résultat est une généralisation du théorème limite central (T.L.C) et est parfois appelé théorème limite central fonctionnel (T.L.C.F) puisque la convergence en loi considérée a lieu dans un espace fonctionnel. Le premier résultat de ce type est connu sous le nom du théorème de Donsker-Prohorov [33]. Ce théorème énonce que pour toute suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes de même loi (i.i.d.) centrées de variance finie, la suite de sommes partielles normalisées

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}S_{[nt]} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i, \quad t \in [0, 1]$$

converge faiblement vers le mouvement brownien standard W , dans l'espace de Skorohod $D[0, 1]$ muni de la métrique uniforme. Une variante de ce résultat est la convergence dans l'espace $C[0, 1]$ vers la même limite, du processus lissé

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1].$$

D'autre part, il est bien connu que le mouvement brownien est à trajectoire hölderienne pour tout ordre $\alpha < \frac{1}{2}$ et l'espace de Hölder possède une topologie plus fine que celle de $C[0, 1]$ ou $D[0, 1]$ (donc possède plus de fonctionnelles continues). Ceci est la motivation principale de Lamperti [24] à étendre le principe d'invariance de Donsker aux espaces de Hölder.

Ce résultat établit la convergence de la suite de processus de sommes partielles lissés, basés sur des variables aléatoires i.i.d. centrées vers le mouvement brownien dans les espaces de Hölder pour tout ordre $\alpha < \frac{1}{2}$. Ce résultat a été étendu au cas de v.a.r. dépendantes (α -mélange et association) par Hamadouche [19]. Le cas indépendant non de même loi est

également traité dans Hamadouche et Taleb [20]. Par ailleurs Achemine et Hamadouche [1] ont établi un principe d'invariance hölderien pour le cas de suites strictement stationnaires de v.a.r vérifiant la notion de dépendance faible introduite récemment par Doukhan et Louhichi [11]. Cette notion est plus générale que le mélange et l'association et permet de traiter ces deux notions dans une approche unifiée.

Dans tous les théorèmes limites classiques de la théorie des probabilités, les sommes partielles sont normalisées par une suite déterministe (b_n) . Le choix classique de $b_n = \sqrt{n}$ pour des variables de carré intégrable est utilisé pour obtenir le théorème limite central ainsi que les principes d'invariance. L'auto-normalisation consiste à remplacer (b_n) par la suite aléatoire

$$V_n = (X_1^2 + \dots + X_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Il y a un grand intérêt dans ce remplacement. La *t*-statistique de Student peut être exprimée en termes de sommes auto-normalisées. En général, il a été établi que l'auto-normalisation améliore les propriétés asymptotiques des sommes de v.a. indépendantes.

Une littérature très riche est consacrée aux théorèmes limites pour les sommes auto-normalisées. Logan et al [28] ont étudié les différentes lois limites des sommes auto-normalisées. Giné, Götze et Mason [10] démontrent que $\frac{S_n}{V_n}$ converge vers une loi gaussienne standard si et seulement si $X_1 \in DAN$, le domaine d'attraction de la loi normale (le cas symétrique a été traité dans Griffin et Mason [17]. Egorov [12] a étudié le cas indépendant non identiquement distribué. Bentkus et Götze [2] ont obtenu la vitesse de convergence des sommes auto-normalisées lorsque $X_1 \in DAN$. Chuprunov [6] a établi des principes d'invariance pour le processus des sommes partielles sous auto-normalisation dans $C[0, 1]$ ou $D[0, 1]$. Račkauskas, Suquet [33] ont amélioré les résultats de Chuprunov pour le cas i.i.d. Ils ont aussi étudié la convergence faible hölderienne dans le cas symétrique et non symétrique. Dans le cas symétrique, on a même une condition nécessaire et suffisante : l'appartenance de X_1 au domaine d'attraction de la loi normale (ce qui est un peu moins restrictif que l'existence d'un moment d'ordre 2). Pour une présentation détaillée des processus auto-normalisés et leurs applications, on peut se référer au livre de De La Péña, Lai et Shao [9]

Les théorèmes limites qui établissent la convergence en loi de processus stochastiques sont très utilisés en statistique (paramétrique et non paramétrique). Ces applications et

procédures statistiques (estimateur, statistique de test,...) sont, en effet, basées sur des fonctionnelles (formes linéaires) continues de trajectoires de processus. Les processus étudiés ont souvent la forme

$$\xi_n(t) = f_n(X_1, X_2, \dots, X_n, t),$$

où X_1, X_2, \dots, X_n est un échantillon de variables aléatoires réelles et f_n des fonctions déterministes. On a alors la propriétés suivante de la convergence

$$\xi_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{\mathcal{L}} \xi \implies h(\xi_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mathcal{L}} h(\xi),$$

pour toute fonctionnelle continue $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ où \mathcal{F} est un espace fonctionnel.

Des exemples de statistiques de test dont la loi asymptotique est obtenue par cette propriété sont

- La statistique de Kolmogorov-Smirnov

$$h(\xi_n) = \sup_{t \in [0,1]} |\xi_n(t)| = \|\xi_n\|_\infty$$

où ξ_n est le processus empirique, cette statistique nous permet de faire des tests d'ajustement.

- Soit

$$UI(n, \alpha) = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{|S(j) - S(i) - S(n)(\frac{j-i}{n})|}{\left| \binom{j-i}{n} \left(1 - \frac{j-i}{n}\right) \right|^\alpha}$$

où $S(0) = 0$ et $S(k) = \sum_{i=1}^k X_i$, $0 < k \leq n$.

- La statistique de test proposée par Levin-Kline [26] pour un problème de détection de rupture épidémique est $T_n = UI(n, 0)$.

- $UI(n, \frac{1}{2})$ est la statistique proposée par Yao [43] pour le cas gaussien.

- $UI(n, \alpha)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ est la statistique proposée par Račkauskas et Suquet [37] pour un problème de détection de rupture épidémique pour des variables aléatoires indépendantes.

- Račkauskas et Suquet [37] ont également proposé la statistique $DI(n, \alpha)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ basée sur les nombres dyadiques pour un problème de détection de rupture épidémique pour des variables aléatoires indépendantes.

Ce résultat a été étendu au cas de variables indépendantes non de même loi et au cas de variables dépendantes (α -mélangeantes) par Graiche, Merabet et Hamadouche [16]. Une application a été donnée pour les tests de ruptures dans la variance.

Des statistiques basées sur les sommes auto-normalisées sont proposées dans Račkauskas et Suquet [37]. En remplaçant les points déterministes $t_k = \frac{k}{n}$ par les variables aléatoires $v_k = \frac{V_k^2}{V_n^2}$ où $V_k^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$, $k = 1, \dots, n$, on obtient les statistiques notées $SUI(n, \alpha)$ et $SDI(n, \alpha)$. La convergence de ces statistiques ne nécessitent pas une condition de moments. Il suffit que X_1 appartienne au domaine d'attraction de la loi normale. Ce qui est beaucoup moins restrictif. D'où l'intérêt de ces statistiques auto-normalisées.

Au premier chapitre de ce mémoire, nous abordons l'étude asymptotique des processus stochastiques dans les espaces de Hölder. Nous rappelons l'essentiel des travaux de Ciesielski [7] sur ces espaces et nous donnons les principaux résultats d'équitension et de convergence dans cet espace.

Le chapitre 2 comprend les résultats obtenus sur le principe d'invariance dans les espaces $D[0, 1]$, $C[0, 1]$ et $H_\alpha[0, 1]$ dans le cas de variables aléatoires indépendantes de même loi ainsi que dans le cas de variables aléatoires dépendantes.

Dans le chapitre 3, se trouvent les résultats de convergence faible du processus de sommes partielles auto-normalisées basées sur des variables aléatoires i.i.d. dans $D[0, 1]$, $C[0, 1]$ et $H_\alpha[0, 1]$. Le principe d'invariance hölderien étant étendu au cas de variables aléatoires indépendantes non de même loi par Račkauskas et Suquet [38].

Au chapitre 4, on donne une application statistique du principe d'invariance hölderien pour la détection de ruptures épidémiques dans les deux cas indépendant ou dépendant. Un exemple numérique est donné pour le test basé sur la statistique SDI .

Quelques propriétés du mouvement brownien sont présentées en annexe A et en annexe B, on rappelle quelques résultats de convergence faible de suite de processus stochastiques.

Chapitre 1

Convergence hölderienne de processus stochastiques

1.1 Introduction

Il est connu que les trajectoires des processus limites habituels comme le mouvement brownien W et le pont brownien B ont une régularité hölderienne pour tout ordre $\alpha < 1/2$. Comme l'espace de Hölder $H_\alpha[0, 1]$ a une topologie fine que celle de $C[0,1]$, on obtient alors plus de fonctionnelles continues de trajectoires pour des applications statistiques. Il est alors légitime d'étudier la convergence faible dans cet espace.

D'abord, on rappelle les travaux de Ciesielski [7] sur les espaces de Hölder, puis on donne les théorèmes essentiels fournissant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une modification à trajectoires presque sûres dans H_α .

On termine le chapitre par les principaux résultats de convergence, de compacité et d'équitension dans H_α^0 du fait que la convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité (équitension).

1.2 Les espaces de Banach $H_\alpha[0, 1]$ et $H_\alpha^0[0, 1]$

1.2.1 Définitions

Nous reprenons les notations de Ciesielski [7] sur les espaces de fonctions hölderiennes sur $[0,1]$.

Définition 1.1. *On appelle espace de Hölder d'ordre α ($0 < \alpha \leq 1$), noté $H_\alpha[0, 1]$, l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, nulle en zéro et telles que*

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0 < |t-s| \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

On note $\omega_\alpha(f, \delta)$ le module de continuité hölderien de f

$$\omega_\alpha(f, \delta) = \sup_{0 < |t-s| \leq \delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

On définit le sous-espace $H_\alpha^0[0, 1]$ de $H_\alpha[0, 1]$ par

$$f \in H_\alpha^0 \Leftrightarrow f \in H_\alpha \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\alpha(f, \delta) = 0.$$

Dans la suite, on abrégera les notations $H_\alpha[0, 1]$ et $H_\alpha^0[0, 1]$ en H_α et H_α^0 .

Remarque 1.1.

- L'espace $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach non séparable pour α mais séparable pour la norme $\|\cdot\|_\beta$, avec $0 < \beta < \alpha$, de plus H_α s'injecte continument dans H_β .
- $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ est un sous-espace fermé, séparable. $(H_\alpha^0[0, 1], \|\cdot\|_\alpha)$.

1.2.2 Analyse fonctionnelle de H_α et H_α^0

Pour obtenir un isomorphisme de Banach, des espaces H_α et H_α^0 avec des espaces de suites, Ciesielski [6] a utilisé la base de Faber-Schauder, obtenue par translations et changements d'échelle dyadiques de fonction triangulaire.

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ 2(1-t), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$, on pose

$$\Delta_n(t) = \Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), t \in [0, 1].$$

On note $\Delta_n(t) = t\mathbf{I}_{[0,1]}(t)$.

La famille $\{\Delta_n\}_{n \geq 1}$ est une base de Schauder de $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ l'espace de fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme du supremum.

De plus $\{\Delta_n, n \geq 0\}$ est une base de Schauder de L'hyperplan fermé $C_0[0, 1]$ des fonctions de $C[0, 1]$, nulles en 0.

Lemme 1.1. (Faber-Schauder) Pour toute fonction f de $C_0[0, 1]$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n(f) \Delta_n(t),$$

avec $\lambda_0(f) = f(1)$ et pour $n = 2^j + k$, ($j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$) :

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f\left(\frac{k+1/2}{2^j}\right) - \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right\}.$$

La série $f(t)$ converge uniformément sur $[0, 1]$, autrement dit, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $C_0[0, 1]$.

Soit l^∞ l'espace de Banach des suites bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|.$$

De même c_0 désignera le sous-espace fermé des suites tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

Rappelons les résultats établis par Ciesielski [7] en remarquant d'abord que toute fonction f de H_α étant dans $C_0[0, 1]$, admet ainsi la décomposition précédente avec convergence de la série $f(t)$ dans $C_0[0, 1]$.

Théorème 1.1. (Ciesielski [7])

Pour toute fonction f de H_α^0 , la série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n(f) \Delta_n(t),$$

converge au sens de la norme $\|\cdot\|_\alpha$. La famille $\{\Delta_n, n \geq 0\}$ est une base de Schauder de $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$.

Théorème 1.2. (Ciesielski [7]) On pose $\Delta_n^\alpha = 2^{-(j+1)}\Delta_n$ pour $n = 2^j + k$ ($j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$) et $\Delta_0^\alpha = \Delta_0$. Les espaces $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ et $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sont isomorphes par les opérateurs S_α et $T_\alpha = S_\alpha^{-1}$ définis comme suit

$$S_\alpha : H_\alpha \rightarrow l^\infty$$

$$f \rightarrow u = (u_n)_{n \geq 0}$$

avec $u_n = 2^{(j+1)\alpha}\lambda_n(f), n \geq 1$ et $u_0 = \lambda_0(f)$.

$$T_\alpha : l^\infty \rightarrow H_\alpha,$$

$$u = (u_n)_{n \geq 0} \rightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Delta_n^{(\alpha)}$$

De plus $\|S_\alpha\|_\alpha = 1$ et

$$\frac{2}{3(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha})} \leq \|T_\alpha\|_\alpha \leq \frac{2}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha})}.$$

Remarque 1.2. L'approximation d'une fonction f par les sommes partielles de sa série de Faber-Schauder n'est autre que son approximation par interpolation linéaire entre des points d'abscisse dyadique. Les lignes polygonales d'interpolation d'une fonction hölderienne jouent un rôle important dans notre travail. Pour contrôler leur norme, le résultat d'analyse élémentaire suivant nous sera utile.

Lemme 1.2. (Hamadouche[19]) Soit f une ligne polygonale sur $[0,1]$, de sommets $(x_i, f(x_i)), (0 \leq i \leq n+1)$ avec $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$. Alors

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

est atteint en deux sommets $s = x_i$ et $t = x_j, 0 \leq i < j \leq n+1$.

1.2.3 Processus à trajectoires dans H_α

Soit $\xi_t, t \in [0,1]$ un processus. Dans ce paragraphe on donne les résultats sur l'existence de modifications à trajectoire On donne aussi les résultats sur l'existence d'une modification des trajectoires presque sûres dans l'espace H_α .

Théorème 1.3. (Kolmogorov [23]) Soit $\xi_t, t \in [0, 1]$ un processus défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{B}, P) et supposons qu'il existe $\delta > 0, c > 0$ et $\gamma > 0$ tels que $\forall \lambda > 0,$

$$P(|\xi_t - \xi_s| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma |t - s|^{1+\delta}},$$

Alors il existe une version de ξ à trajectoires dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Théorème 1.4. (Ibragimov [22])

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+,$ croissante telle que pour tout s, t dans $[0, 1]$

$$\mathbb{E} |\xi_t - \xi_s|^p \leq f^p(|t - s|)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ soient dans H_α est que

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{\alpha+1+1/p}} du < \infty.$$

1.2.4 Compacité dans H_α

La convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastique est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité dans l'espace des mesures de probabilité H_α^0 muni de la topologie de la convergence faible . Par le théorème de Prohorov, cette relative compacité équivaut à l'équité de la suite des lois. Les deux lemmes suivants permettent de caractériser les compacts de H_α^0

Lemme 1.3. (Hamadouche[18])

Si $0 < \alpha < \beta < 1$ et si K est borné dans H^β alors K est relativement compact dans H_α^0

Lemme 1.4. (Suquet[41])

K est relativement compact dans H_α^0 si et seulement si

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \omega_\alpha(f, \delta) = 0.$$

1.3 Convergence faible hölderienne

On considère un processus ξ à trajectoires hölderiennes comme élément aléatoire de l'espace fonctionnel H_α suivant la loi P_ξ . Comme H_α^0 s'injecte continuellement dans $H_\alpha,$ l'étude de la convergence en loi des élément aléatoires de H_α^0 repose sur le résultat suivant

Proposition 1.1. (*Hamadouche[19]*) *La convergence en loi dans H_α^0 d'une suite de processus $(\xi_n, n \geq 1)$, équivaut à l'équitension sur H_α^0 de la suite $P_n = P_{\xi_n}^{-1}$ des éléments aléatoires ξ_n et à la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n .*

Remarque 1.3. *La convergence faible dans H_α^0 entraîne celle dans H_α .*

1.4 Equitension hölderienne

Dans les problèmes de convergence faible de processus dans H_α , nous avons besoin de conditions d'équitension. En raison de cette notion d'équitension, on travaillera sur $(H_\alpha^0, \|\cdot\|)$ qui est un espace polonais. Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α , la convergence en loi sur H_α^0 implique la convergence en loi sur H_α . Une première condition suffisante est donnée par :

Théorème 1.5. (*Kerkyacharin, Roynette [23]*)

Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant pour des constantes $\gamma > 0, \delta > 0$ et $c > 0$:

$$\forall \lambda > 0, P(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma} |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$. Dans les applications, cette condition est utilisée essentiellement sous sa version moment, obtenue via l'inégalité de Markov, à partir de

Corollaire 1.1. (*Lamperti [24]*) *Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant pour des constantes $\gamma > 0, \delta > 0$ et $c > 0$;*

$$E |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq c |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Dans la suite, on énoncera un résultat plus maniable pour la vérification de condition de moments et sur lequel repose les démonstrations de principes d'invariance dans les espaces höldériens H_α^0 .

Théorème 1.6. (*Hamadouche [19]*)

Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus à trajectoires dans H_α^0 , vérifiant les conditions suivantes

a) Il existe $a > 1$, $b > 1$, $c > 0$ et une suite de nombres positifs $(a_n) \downarrow 0$ telles que

$$E | \xi_n(t) - \xi_n(s) |^a \leq c |t - s|^b,$$

pour tout n , s et t tels que $|t - s| \geq a_n$;

b) $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega_\alpha(\xi_n, a_n) > \epsilon\} = 0$$

Alors pour tout $\alpha < a^{-1}(\min(a, b) - 1)$, la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est équitendue dans H_α^0 .

Preuve 1.1. (Hammadouche[19])

On construit un autre processus ζ_n qui interpole linéairement ξ_n aux points $t_k = ka_n$ ($0 \leq k \leq k_n$) avec $k_n = [\frac{1}{a_n}]$ et $t_{k_n+1} = 1$. Les trajectoires de ζ_n sont des lignes polygonales, donc dans H_α^0 , pour tout $\alpha \leq 1$. On utilise alors a) pour montrer l'équitension de $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ et b) pour montrer la convergence en probabilité vers 0 de $\| \xi_n - \zeta_n \|_\alpha$. L'équitension de $(\xi_n)_{n \geq 1}$ s'en déduit facilement via la caractérisation séquentielle de la relative compacité des familles des mesures de probabilité sur un espace polonais (ici H_α^0).

Première étape : Equitension de $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ Pour prouver l'équitension dans H_α^0 , nous nous appuyerons sur la condition suffisante de Kerkyacharin et Roynette, plus précisément, en utilisant le corollaire 1.1 de Lamperti.

Nous souhaitons montrer

$$E | \zeta_n(t) - \zeta_n(s) |^a \leq K |t - s|^\gamma, n \geq 1, s, t \in [0, 1]$$

où $\gamma = \min(a, b)$.

1^{er} cas : Si s et t sont dans le même segment $I_k = [k(a_n), (k+1)a_n]$, ($0 \leq k \leq k_n$), alors $|t - s| \leq a_n \leq 1$ et la définition de ζ_n nous donne

$$| \zeta_n(t) - \zeta_n(s) | = a_n^{-1} |t - s| | \xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1}) |,$$

d'où en prenant les moments d'ordre α et en utilisant (2.3 à vérifier)

$$E(|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|)^a = a_n^{-1} |t - s|^a E(|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|)^a \leq ca_n^{b-a} |t - s|^a .$$

On a $|t - s| \leq a_n \leq 1$, si $b-a < 0$, on majore a_n^{b-a} par $|t - s|^{b-a}$; si $b-a \geq 0$, on majore a_n^{b-a} par 1. Nous obtenons ainsi

$$E|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \leq c |t - s|^\gamma, \gamma = \min(a, b).$$

2^e cas : Si $s \in I_k$ et $t \in I_{k+1}$, on écrit

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \leq |\zeta_n(t) - \zeta_n(t_{k+1})| + |\zeta_n(t_{k+1}) - \zeta_n(s)|,$$

et par convexité, on se ramène à la majoration du 1^{er} cas

$$E(|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|)^a \leq 2^{a-1}c(|t - t_{k+1}|^\gamma + |t_{k+1} - s|^\gamma) \leq 2^{a-1}c |t - s|^\gamma,$$

car $\gamma > 0$, $|t - t_{k+1}| \leq |t - s|$ et $|t_{k+1} - s| \leq |t - s|$.

3^e cas : Si $s \in I_k$ et $t \in I_{k+j}$, avec $j > 1$, on découpe l'accroissement ξ_n en :

$$|\xi_n(t) - \xi_n(s)| \leq |\xi_n(t) - \xi_n(t_{k+j})| + |\xi_n(t_{k+j}) - \xi_n(s)|,$$

Avec l'inégalité de Jensen, la condition a) et le premier cas, on obtient :

$$E(|\xi_n(t) - \xi_n(s)|)^a \leq 3^{a-1}c(|t - t_{k+j}|^\gamma + |t_{k+j} - t_{k+1}|^\gamma |t_{k+1} - s|^\gamma) \leq 3^a c |t - s|^\gamma$$

car $|t - t_{k+j}|$, $|t_{k+j} - t_{k+1}|$ sont inférieurs à $|t - s|$.

Ainsi, l'inégalité de moment est bien vérifiée (avec $K = 3^a c$). L'équation de $\{\xi_n, n \geq 1\}$ en découle.

Deuxième étape : Convergence en probabilité de $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$

Posons $\mathcal{X}_n = \xi_n - \zeta_n$. Nous voulons montrer la convergence en probabilité vers zéro de la suite de variables aléatoires réelles :

$$\|\mathcal{X}_n\|_\alpha = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

Comme à la première étape, nous discutons suivant la localisation de s et t .

1^{er} cas : $s, t \in I_k$. On a

$$\frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\xi_n(t) - \xi_n(s)|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

La trajectoire de ξ_n étant affines sur I_k , on a :

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t - s|^\alpha} = \frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|}{a_n} |t - s|^{1-\alpha},$$

qui est de la forme $f(u) = ku^{1-\alpha}$, $u = |t - s| \in [0, a_n]$.

La fonction f est croissante, son maximum est atteint en $u = a_n$ D'où

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\zeta_n(t_k) - \zeta_n(t_{k+1})|^\alpha}{a_n},$$

$$\frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|}{a_n} \leq \omega_\alpha(\xi_n, a_n),$$

Ce qui implique

$$\frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq 2\omega_\alpha(\xi_n, a_n).$$

2^e cas $s \in I_k, t \in I_{k+1}$. On se ramène au premier cas par l'inégalité triangulaire

$$\frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(t_{k+1})|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\mathcal{X}_n(t_{k+1}) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

Comme

$$|t - s| \geq |t - t_{k+1}|$$

et

$$|t - s| \geq |t - t_{k+1}|,$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha}, \\ & \leq 4 \max_{|t-s|} \frac{|\xi_n(t) - \xi_n(s)|}{|t - s|^\alpha}, \\ & = 4\omega_\alpha(\xi_n, a_n). \end{aligned}$$

3^e cas : $s \in I_k, t \in I_{k+j} (j \geq 1)$,

$$\frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq \frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(t_{k+j})|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\mathcal{X}_n(s) - \mathcal{X}_n(t_{k+1})|}{|t - s|^\alpha} + \frac{|\mathcal{X}_n(t_{k+1}) - \mathcal{X}_n(t_{k+j})|}{|t - s|^\alpha}.$$

Le dernier terme est nul car $\xi_n(t_i) = \zeta_n(t_i)$ pour $0 \leq i \leq k_n$. D'après le premier cas on obtient

$$\frac{|\mathcal{X}_n(t) - \mathcal{X}_n(s)|}{|t - s|^\alpha} \leq 4\omega_\alpha(\xi_n, a_n), 0 \leq s < t \leq 1$$

Finalement, dans tout les cas de figure, $\|\zeta_n - \xi_n\|_\alpha \leq 4\omega_\alpha(\xi_n, a_n)$.

L'hypothèse b) du théorème nous donne alors la convergence en probabilité vers zéro de $\|\zeta_n - \xi_n\|_\alpha$. Ainsi $\{\xi_n, n \leq 1\}$ est équitendue dans H_α^0 .

Chapitre 2

Principe d'invariance pour les variables aléatoires de même loi

2.1 Introduction

Les principes d'invariance dans les espaces $C[0,1]$ et $D[0,1]$ sont connus sous le nom théorème central limite de Donsker-Prohorov. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes de même loi de variance commune σ^2 . On note par ξ_n les lignes polygonales obtenues par interpolation linéaire aux points $(\frac{i}{n}, \frac{s_i}{\sigma\sqrt{n}})$ où $s_i = \sum_{k=1}^i X_k$. Le principe d'invariance de Donsker-Prohorov établit la convergence de ξ_n vers le mouvement Brownien dans l'espace $C[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de norme du suprémum.

Ce théorème s'applique aussi dans $D[0,1]$ lorsqu'il est muni d'une topologie équivalente à celle de Skorohod et qui fait de lui un espace séparable et complet.

Le principe d'invariance dans les espaces de Hölder, pour les variables aléatoires indépendantes, centrées et de même loi, a été démontré par Lamperti. Kerkyacharian et Roynette [23] ont redémontré ce résultat en utilisant la base des fonctions triangulaires de Faber-Schauder et leur condition suffisante d'équitension. Hamadouche [19] a établi que le processus de Donsker-Prohorov lissé par convolution, pour les variables aléatoires indépendantes et de même loi, converge aussi vers le mouvement Brownien.

2.2 Cas de suite des variables i.i.d

2.2.1 Principe d'invariance dans $D[0,1]$ et $C[0,1]$

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définie sur (Ω, \mathcal{B}, P) , indépendantes, centrées et de même loi. On note par $S_i = \sum_{k=1}^i X_k$ la suite de sommes partielles. L'élément aléatoire $\xi_n(\omega)$ de D est défini par

$$W_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) \quad (2.1)$$

Le principe d'invariance de Donsker-Prohorov dans $D[0,1]$ s'énonce comme suit

Théorème 2.1. (*Billingsley[3]*)

Supposons que les variables aléatoires X_i sont indépendantes, de même loi, centrées et de variance commune finie $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$. Alors la suite de fonctions aléatoires (W_n) définie en (2.1) converge en loi vers le mouvement brownien W dans $D[0,1]$.

La preuve se fait en montrant d'abord la convergence des lois fini-dimensionnelles de W_n puis, l'équitension de cette suite de lois sur \mathbb{R} qui est une conséquence du théorème central limite et du théorème de Prohorov (car \mathbb{R} est séparable et complet).

On considère dans ce qui suit le lissage polygonal de processus de sommes partielles. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{B}, P) .

On note par $S_i = \sum_{k=1}^i X_k$ la suite de sommes partielles. On définit l'élément aléatoire ξ_n de $C[0,1]$ par

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} X_{[nt]+1}(\omega). \quad (2.2)$$

Le principe d'invariance dans $C[0,1]$, pour les variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées et de variance finie est donné par le théorème de Donsker-Prohorov.

Théorème 2.2. (*Donsker-Prohorov [3]*)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées et de variance finie $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$. Alors la suite de fonction aléatoire $\xi_n(t, \omega)$ définie en (2.2) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans $C[0,1]$.

2.2.2 Principes d'invariance dans les espaces H_α

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et de variance commune $E(X_j)^2 = \sigma^2$.

On note par ξ_n les lignes polygonales obtenues par interpolation linéaire aux points $(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sigma\sqrt{n}})$ où $S_j = \sum_{k=1}^j X_k$.

2.2.2.1 Lissage polygonal du processus de sommes partielles

Le premier principe d'invariance dans H_α , pour les variables aléatoires indépendantes de même loi est donné par le théorème de Lamperti.

Théorème 2.3. (*Lamperti [24]*) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées, réduites. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ tel que $E |X_j|^\gamma < \infty$.*

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^$, $0 \leq j < n$:*

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{0 < k \leq j} X_k(\omega) + (nt - j)X_{j+1}(\omega) \right], \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n} \quad (2.3)$$

Alors la suite de lois de ξ_n converge faiblement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Lamperti [24] a prouvé la convergence de ξ_n vers W dans H_α^0 en supposant $\mathbb{E} |X_1|^\gamma < \infty$ pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$. *Račkauskas* et *Suquet* [36] ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour le théorème limite central fonctionnel de Lamperti qu'on donne dans le théorème suivant.

Théorème 2.4. (*Račkauskas et Suquet [36]*) *Soit $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors ξ_n converge en loi vers W dans H_α^0 si et seulement si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p(\alpha)} P(|X_1| \geq t) = 0,$$

où

$$p(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}.$$

2.2.2.2 Lissage par convolution du processus de sommes partielles

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées telles que $E(|X_1|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$. On note σ^2 leur variance commune. On pose encore $S_i = \sum_{k=1}^i X_k$ et on considère le processus de sommes partielles normalisé de Donsker-Prohorov

$$\xi_n(t) = \frac{1}{S_n} S_{[nt]}(t), t \in [0, 1], \quad (2.4)$$

[nt]=partie entière de (nt). Soit K une densité de probabilité sur \mathbb{R} telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |u| K(u) du < \infty \quad (2.5)$$

et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro et vérifiant

$$\frac{1}{b_n} = O(n^{\tau/2}), 0 < \tau < \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

On définit la suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de noyaux de convolution par

$$K_n(t) = \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t}{b_n}\right), t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Nous considérons le processus de sommes partielles lissé défini par

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0), t \in [0, 1] \quad (2.8)$$

Le terme correctif $(\xi_n * K_n)(0)$ assure la nullité en zéro du processus ζ_n . Le lemme suivant nous assure que ζ_n est dans $H_{\frac{1}{2}}[0, 1]$.

Lemme 2.1. (*Hamadouche[19]*)

Soit f une fonction mesurable, bornée à support dans $[0, 1]$ et K un noyau de convolution tel que

$$K \in L^1([-1, 1]) \cap L^{\frac{1}{2}}([-1, 1]), \quad (2.9)$$

$$|K(x) - K(y)| \leq \alpha(K) |x - y|, x, y \in [-1, 1], \quad (2.10)$$

pour une certaine constante $\alpha(K)$. Alors la restriction à l'intervalle $[0, 1]$ de $(f * K) - (f * K)(0)$ est dans $H_{\frac{1}{2}}[0, 1]$. Lorsque les conditions énoncées ci-dessus sur K_n sont remplies, on peut énoncer le résultat suivant

Théorème 2.5. (*Hamadouche[19]*)

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées telles que $E(X_1)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$. On suppose que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.6), (2.8), (2.10) et (2.11). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.9) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

On montre l'équitension de la suite des lois de ζ_n en utilisant le théorème (1.7) avec $\alpha_n = 1/n$. Pour la convergence des lois fini-dimensionnelles, on se ramène à celles de ξ_n en montrant que la distance entre $(\zeta_n(t_1), \dots, \zeta_n(t_k))$ et $(\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k))$ tend en probabilité vers zéro.

2.3 Principe d'invariance sous dépendance

2.3.1 Cas de suite de variables aléatoires α -mélangeantes

Dans ce qui suit, nous rappelons la notion de l' α -mélange, appelée aussi mélange fort qui, comme son nom ne l'indique pas est la notion la plus faible. Le livre de Doukhan [10] fournit une étude détaillée des différentes sortes de mélanges.

Définition 2.1. On appelle coefficient de mélange fort (α -mélange) entre deux tribus \mathcal{A} et \mathcal{B} le nombre

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{(A,B) \in (\mathcal{A}, \mathcal{B})} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

Définition 2.2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. On définit le coefficient de mélange fort α_n par

$$\alpha_n = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{n+k}^\infty), k \in \mathbb{N}^*\},$$

où \mathcal{F}_j^l désigne la tribu engendrée par les variables $(X_i, j \leq i \leq l)$.

On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est α -mélangeante ou fortement mélangeante si $\alpha_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers ∞ .

Cette définition a été introduite par Rosenblatt [39].

Remarque 2.1 :

(1) $0 \leq \alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \frac{1}{4}$.

(2) Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite α -mélangeante, alors $(f(X_n))_{n \geq 1}$ est aussi α -mélangeante pour toute fonction mesurable f (Billingsley [3]).

Les inégalités sur les covariances et les inégalités de moments sont nécessaires lors de l'établissement des principes d'invariances hõlderiens.

Théorème 2.6. (Davydov [8]) Soient X et Y deux variables aléatoires centrées et de variances finies. Pour $p, q, r > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$,

$$|Cov(X, Y)| \leq 8 \alpha(X, Y)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}^{\frac{1}{q}} |X|^q \mathbb{E}^{\frac{1}{r}} |Y|^r .$$

Théorème 2.7. (Yokoyama[44]) Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire, α -mélangeante telle que $E(X_1)=0$, $E(|X_1|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$, un $\epsilon > 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} \alpha_n^{\epsilon/(\gamma+\epsilon)} < \infty .$$

Alors, il existe $C > 0$ tel que

$$E |X_1 + X_2 + \dots + X_n |^\gamma \leq Cn^{\gamma/2} .$$

Théorème 2.8. (Shao et Yu [40]) Soient $2 < p < r \leq \infty$, $2 < v \leq r$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite α -mélangeante de variables aléatoires telles que pour tout n , $\mathbb{E}X_n = 0$ et $(\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} < \infty$. On suppose que

$$\alpha_n \leq Cn^{-\theta} \text{ pour } C > 0 \text{ et } \theta > 0 .$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K = K(\varepsilon, r, p, v, \theta, C) < \infty$ tel que

$$\mathbb{E} |S_n|^p \leq K[(nC_n)^{\frac{p}{2}} \max_{i \leq n} (\mathbb{E}|X_i|^v)^{\frac{p}{v}} + n^{(p-(r-p)\theta/r) \vee (1+\varepsilon)} \max_{i \leq n} (\mathbb{E}|X_i|^r)^{\frac{p}{r}}],$$

où

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i , C_n = \left(\sum_{i=0}^n (i+1)^{\frac{2}{v-2}} \alpha_i \right)^{\frac{v-2}{v}} \text{ et } a \vee b = \max(a, b) .$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

i) si $\theta > \frac{v}{v-2}$ et $\theta \geq \frac{(p-1)r}{r-p}$,

$$\mathbb{E} |S_n|^p \leq K [n^{\frac{p}{2}} \max_{i \leq n} (\mathbb{E} |X_i|^v)^{\frac{p}{v}} + n^{1+\epsilon} \max_{i \leq n} (\mathbb{E} |X_i|^r)^{\frac{p}{r}}],$$

ii) si $\theta \geq \frac{pr}{2(r-p)}$

$$\mathbb{E} |S_n|^p \leq K n^{\frac{p}{2}} \max_{i \leq n} (\mathbb{E} |X_i|^r)^{\frac{p}{r}}.$$

Une version du principe d'invariance de Donsker pour des variables fortement mélangées est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.9. (*Odraïra, Yoshihara[31]*) Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite α -mélangeante vérifiant pour des constantes $\gamma > 2$, un $\epsilon > 0$ les conditions suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^{\epsilon/(\gamma+\epsilon)} < \infty,$$

$$\sup_{j \geq 1} E(|X_j|)^{\gamma+\epsilon} < \infty,$$

Alors, $(X_j)_{j \geq 1}$ satisfait le théorème central limite fonctionnel dans $D[0,1]$.

La première extension de principe d'invariance de Lamperti pour des suites stationnaires de variables aléatoires dépendantes est donnée par

Théorème 2.10. (*Hamadouche [19]*) Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire α -mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$, un $\epsilon > 0$ tels que $E(|X_1|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\epsilon/(\gamma+\epsilon)} < \infty.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq j < n$:

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{k=1}^{k=j} X_k + (nt - j)X_{j+1} \right], \text{ si } \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n},$$

où

$$\sigma^2 = E(X_j)^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} Cov(X_1, X_j) < \infty.$$

Les lois de ξ_n convergent faiblement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

On montre l'équitension de la suite des lois des processus ξ_n par le théorème(1.7) alors que la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n vers celles du mouvement brownien se fait par le théorème (2.9).

On considère dans ce qui suit le lissage par convolution du processus de sommes partielles défini par (2.9)

Théorème 2.11. (Hamadouche [19])

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire α -mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\epsilon > 0$ tels que $E(|X_1|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\epsilon/(\gamma+\epsilon)} < \infty,$$

Alors

$$\sigma^2 = EX_1^2 + \sum_{j=2}^{\infty} Cov(X_1, X_j)$$

est finie.

On suppose de plus que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.6),(2.8), (2.10) et (2.11). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.9) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

2.3.2 Cas de suite des variables aléatoires associées

L'association se définit de la manière suivante :

Définition 2.3. Une suite finie de variables aléatoires X_1, \dots, X_n est dite associée si pour toute paire de fonctions croissantes (par coordonnées) $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Cov(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)) \geq 0,$$

bien évidemment lorsque cette covariance existe.

Une famille infinie de variables aléatoires est dite associée si toute sous famille finie est associée.

Cette définition a été introduite par Esary, Proschan et Walkup [13] dont l'objectif était de trouver des applications en fiabilité et en statistique. Elle trouve ses origines dans les travaux de Lehmann [25]. La notion d'association appelée aussi dépendance positive a été développée aussi dans les travaux de Harris [21] et de Fortuin, Kastelyn et Ginibre [14], leurs travaux sont appliqués à la théorie de la percolation et à la mécanique statistique.

Remarque 2.2 : Dans la définition de l'association, on peut remplacer une paire de fonctions croissantes par une paire de fonctions décroissantes puisque

$$\text{Cov}(f(X), g(X)) = \text{Cov}(-f(X), -g(X)).$$

Propriétés

En suivant Esary, Proschan et Walkup [13], on présente dans cette section quelques propriétés basiques de l'association.

(\mathcal{P}_1) Tout sous ensemble d'un ensemble de variables aléatoires réelles associées est encore associé.

(\mathcal{P}_2) Si deux ensembles de variables associées sont indépendants l'un de l'autre, leur union est un ensemble associé.

(\mathcal{P}_3) Tout singleton formé d'une variable aléatoire réelle est associé.

(\mathcal{P}_4) Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est associé et si f_1, \dots, f_k sont des fonctions toutes croissantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} (ou toutes décroissantes), alors le vecteur $Y = (f_1(X), \dots, f_k(X))$ est associé

(\mathcal{P}_5) Si $X^{(k)} = (X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$ est associé pour tout k et si $X^{(k)}$ converge en loi vers $X = (X_1, \dots, X_n)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, alors X est associé.

(\mathcal{P}_6) Tout vecteur aléatoire à composantes indépendantes est associé.

Exemple 1 Soit Γ une courbe croissante dans \mathbb{R}^n , i.e. $\Gamma = \gamma([0, 1])$ où

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

chaque γ_i étant une application croissante de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Soit X un vecteur aléatoire dont la loi est à support dans Γ (autrement dit, $X \in \Gamma$ p.s). Alors X est associé.

Exemple 2 Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur associé et $Y = (X_{n:1}, \dots, X_{n:n})$ le vecteur

de statistiques d'ordre engendré par X (Y est le réarrangement croissant des composantes de X). Alors Y est aussi associé grâce à la propriété 4.

Exemple 3 Tout vecteur gaussien positivement corrélé X i.e.

$$\text{Cov}(X_i, X_j) > 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

est associé. Ce résultat est dû à Pitt [31].

Les résultats suivants sont nécessaires lors de l'établissement des principes d'invariances hölderiens.

Théorème 2.12. (*Birkel[4]*) Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires associées, centrées, telles que $\sup_{j \geq 1} E(|X_j|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$, et un $\epsilon > 0$. On suppose que le coefficient

$$u(n) = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j: |j-k| \geq n} \text{Cov}(X_1, X_k) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\epsilon)/2\epsilon}),$$

Alors il existe une constante b telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\sup_m E(|S_{n+m} - S_m|)^\gamma \leq bn^{\frac{\gamma}{2}}$$

où $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$.

Théorème 2.13. (*Newman, Wright [30]*)

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire des variables aléatoires centrées, de variance finie, associées telles que

$$\sigma^2 = E(X_1) + 2\text{Cov}(X_1, X_j) < +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit le processus :

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^j X_k + (nt - j)X_{j+1} \right), \quad \frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n}, \quad 0 \leq j < n.$$

Alors ξ_n converge faiblement dans $C[0,1]$ vers le mouvement brownien W , dont les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles de W .

L'extension du théorème de Lamperti d'une suite stationnaires de variables aléatoires indépendantes au cas de suite strictement stationnaire, de variables aléatoires associées est établie par les théorèmes suivants :

Théorème 2.14. (*Hamadouche [19]*) Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires associées, centrées, telles que $E(|X_1|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$, et un $\epsilon > 0$.

On suppose que

$$u(n) = \sum_{j \geq n+1} \text{Cov}(X_1, X_k) = O(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\epsilon)/2\epsilon})$$

et

$$0 < \sigma^2 = EX_j^2 + u(1) < \infty.$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Théorème 2.15. Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire associée de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\epsilon > 0$ tels que $E(|X_1|)^{\gamma+\epsilon} < \infty$ et

$$u(n) = 2 \sum_{j \geq n+1}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_j = o(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\epsilon)/2\epsilon})),$$

$$\sigma^2 < EX_1^2 + u(1) < \infty$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.6), (2.8), (2.10) et (2.11). Alors la suite de processus de sommes partielles lissé ζ_n définis par (2.9) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

Chapitre 3

Principes d'invariance pour les processus de sommes partielles auto-normalisés

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons quatre suites de processus de sommes partielles : les lignes polygonales de sommets des points $(k/n, S_k/V_n)$ ou $(V_k^2/V_n^2, S_k/V_n)$ et les fonctions aléatoires étagées correspondantes. Chacune de ces suites converge en loi dans $C[0,1]$ ou $D[0,1]$ vers le mouvement brownien si et seulement si X_1 est dans le domaine d'attraction de la loi normale. Ces résultats contrastent avec les principes d'invariance de Donsker Prohorov classiques pour lesquels la condition nécessaire est $E(X_1^2) < \infty$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., de moyenne nulle et soit $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et $V_k^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ pour $k=1,2,\dots$ avec $S_0 = 0, V_0 = 0$. Pour $V_n = 0$, nous adaptons la convention $S_k/V_n = 0$ pour $k \leq n$. Nous considérons les processus suivants :

- Le processus des lignes polygonales standard (non normalisé)

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, t \in [0, 1].$$

- Le processus des lignes polygonales adaptatif

$$\zeta_n = (\zeta_n(t), t \in [0, 1])$$

Il est défini par interpolation linéaire des points $(V_k^2/V_n^2, S_k/V_n)$, avec $k=0, \dots, n$, et $\zeta_n = 0$ pour $V_n = 0$.

- Le processus de fonctions étagées standard (non normalisé)

$$Wn(t) = S_{[nt]}, t \in [0, 1].$$

- Le processus étagé adaptatif

$$Z_n = (Z_n(t), t \in [0, 1])$$

qui est constant dans tout intervalle $[V_k^2/V_n^2, V_{k+1}^2/V_n^2]$ à chaque fois que $V_n > 0$ et satisfait

$$Z_n\left(\frac{V_k^2}{V_n^2}\right) = \frac{S_k}{V_n}, \quad k = 0, \dots, n$$

tel que $V_n = 0 \text{ si } Z_n := 0$.

Définition 3.1. *On dit que X_1 appartient au domaine d'attraction de la loi normale (DAN), s'il existe une suite $b_n \uparrow \infty$ telle que*

$$b_n^{-1} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \tag{3.1}$$

Remarque 3.1. *Si X_1 appartient à DAN*

$$b_n^{-2} V_n^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} 1. \tag{3.2}$$

On a de plus et pour tout $\tau > 0$, en posant $b_n = n^{-1/2} l_n$ on a

$$nP(|X_1| > \tau l_n \sqrt{n}) \rightarrow 0, \tag{3.3}$$

$$l_n^{-2} E(X_1^2; |X_1| \leq \tau l_n \sqrt{n}) \rightarrow 1, \tag{3.4}$$

$$nE(X_1; |X_1| \leq \tau l_n \sqrt{n}) \rightarrow 0. \tag{3.5}$$

Dans tous les théorèmes limites classiques de la théorie des probabilités, les sommes partielles sont normalisées par une suite déterministe (b_n) . Le choix classique de $b_n = \sqrt{n}$ pour des variables de carré intégrable est utilisé pour obtenir le théorème limite central ainsi que les principes d'invariance. L'auto-normalisation consiste à remplacer (b_n) par la suite aléatoire

$$V_n = (X_1^2 + \dots + X_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Dans cette section, nous nous intéressons au principe d'invariance dans les espaces $C[0,1]$ et $D[0,1]$ des processus de sommes partielles auto-normalisées pour les variables aléatoires i.i.d. avec, $X_1 \in \text{DAN}$, non symétriques.

On montre que ce processus converge vers un mouvement Brownien sur $C[0,1]$ et $D[0,1]$ si et seulement si $X_1 \in \text{DAN}$.

3.2 Principe d'invariance dans $C[0,1]$

Théorème 3.1. (*O'Brien [32]*) X_1 appartient au domaine d'attraction de la loi normale(DAN), si et seulement si

$$V_n^{-1} \max_{1 \leq k \leq n} |X_k| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \quad (3.7)$$

Théorème 3.2. (*Račkauskas et Suquet[33]*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et soit $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et $V_k^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ pour $k=1,2,\dots$ avec $S_0 = 0, V_0 = 0$.

$$\frac{\xi_n}{V_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} W, \quad (3.8)$$

dans l'espace métrique $C[0,1]$, tel que W est le mouvement brownien si et seulement si X_1 appartient au domaine d'attraction de la loi normale.

Preuve 3.2.

Pour montrer la convergence des loi fini-dimensionnelles du processus $V_n^{-1}\xi_n$ vers celles de mouvement brownien W , on considère le processus

$$W_n = (S_{[nt]}, t \in [0, 1]).$$

En appliquant (3.6) on aura

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} V_n^{-1} | \xi_n(t) - W_n(t) | \leq V_n^{-1} \max_{1 \leq k \leq n} | X_k |, \quad (3.9)$$

la convergence des loi fini-dimensionnelles de $V_n^{-1}\xi_n$, découlent de celle du processus $V_n^{-1}W_n$.

Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d \leq 1$ et soit la suite l_n introduite dans la remarque.

De (3.3) pour une suite de variables aléatoires indépendantes et du fait que $l_{[nt]}^2 l_n^{-2}$ converge vers 1 (Rackauskas[13]), on aura

$$l_n^{-1} n^{-1/2} (S_{[nt_1]}, S_{[nt_2]} - S_{[nt_1]}, \dots, S_{[nt_d]} - S_{[nt_{d-1}]}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_d) - W(t_{d-1})). \quad (3.10)$$

De (3.2) et la continuité de

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (x_1, x_2 + x_1, \dots, x_d + \dots + x_1)$$

découle la convergence des lois fini-dimensionnelles de $V_n^{-1}\xi_n$.

Pour l'équitension, on utilise le théorème 8.3 de Billingsley [3]. Comme $\xi_n(0) = 0$, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon, \eta > 0$ il existe $n_0 \geq 1$ et $\delta, 0 < \delta < 1$, tel que

$$\frac{1}{\delta} P\left\{ \sup_{1 \leq i \leq n\delta} V_n^{-1} | S_{k+i} - S_k | \geq \varepsilon \right\} \leq \eta, \quad n \geq n_0, \quad (3.11)$$

pour tout $1 \leq k \leq n$. Soit la variable tranquée

$$Y_i := l_n^{-1} (X_i; X_i^2 \leq \tau^2 l_n^2 n), \quad i = 1, \dots, n,$$

tel que τ sera choisi plus tard.

On note par $\tilde{S}_k = Y_1 + \dots + Y_k$, et $\tilde{V}_k = (Y_1^2 + \dots + Y_k^2)$ les processus de sommes partielles auto-normalisées correspondants avec $k=1, \dots, n$. Alors on a,

$$P\left\{ \sup_{1 \leq i \leq n\delta} V_n^{-1} | S_{k+i} - S_k | \geq \varepsilon \right\} \leq A + B + C, \quad (3.12)$$

tels que

$$A := P\left\{ \sup_{1 \leq i \leq n\delta} V_n^{-1} | \tilde{S}_{k+i} - \tilde{S}_k | \geq \varepsilon \sqrt{n/2} \right\},$$

$$B := P\{ \tilde{V}_n < \sqrt{n/2} \},$$

$$C := nP\{|X_1| \geq \tau l_n \sqrt{n}\}.$$

D'après (3.5), on peut choisir n_1 pour que $\sqrt{n} |EY_1| \leq 1/4$, avec $n \geq n_1$ et si de plus $\delta \leq \varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} A &\leq P\left\{\max_{1 \leq i \leq n\delta} \left| \sum_{j=k+1}^{k+i} (Y_j - EY_j) \right| + n\delta |EY_1| \geq \sqrt{n}\varepsilon/2\right\} \\ &\leq P\left\{\max_{1 \leq i \leq n\delta} \left| \sum_{j=k+1}^{k+i} (Y_j - EY_j) \right| \geq \sqrt{n}\varepsilon/4\right\}. \end{aligned}$$

En utilisant l'énigalité de Chebyshev pour $p > 2$, on a pour chaque $1 \leq k \leq n\delta$

$$\begin{aligned} &P\left\{n^{-1/2} \sum_{j=k+1}^{k+n\delta} (Y_j - EY_j) \right| \geq \varepsilon/8\} \\ &\leq \frac{8^p}{\varepsilon^p n^{p/2}} E \left| \sum_{j=k+1}^{k+n\delta} (Y_j - EY_j) \right|^p \\ &\leq \frac{8^p}{\varepsilon^p n^{p/2}} [(n\delta)^{p/2} (EY_1^2)^{p/2} + n\delta E |Y_1|^p]. \end{aligned}$$

Par (3.4), on peut choisir n_2 tel que

$$3/4 \leq (EY_1^2) \leq 3/2 \quad \text{pour } n \geq n_2. \quad (3.13)$$

Alors on a $E |Y_1|^p \leq 2n^{(p-2)/2} \tau^{p-2}$ et en supposant que $\tau \leq \delta^{1/2}$, on obtient

$$\begin{aligned} P\left\{n^{-1/2} \sum_{j=k+1}^{k+n\delta} (Y_j - EY_j) \right| \geq \varepsilon/8\} &\leq \frac{8^p}{\varepsilon^p n^{p/2}} [(n\delta)^{p/2} \tau^{p-2}] \\ &\leq \frac{2 \cdot 16^p \delta^{p/2}}{\varepsilon^p} \end{aligned}$$

Par l'énigalité de Ottaviani on obtient

$$A \leq \frac{\delta \eta}{3}. \quad (3.14)$$

pour $\delta^{p/2} \varepsilon^p / 4(16)^p \text{ et } \delta^{p-2/2} \leq \eta \varepsilon^{p/6} \cdot (16)^p$. D'après (3.1) on a, $n^{-1} E\tilde{V}_n^2 = EY_1^2 \geq 3/4$, pour $n \geq n_2$ d'où

$$B \leq P\{n^{-1} |\tilde{V}_n^2 - E\tilde{V}_n^2| \geq 1/2\} \leq 4n^{-1} EY_1^4 \leq 4\tau^2 EY_1^2 \leq \delta n/3, \quad (3.15)$$

pour $n \geq n_2$ et $\tau^2 \leq \delta n/18$.

Pour terminer, il suffit de choisir n_3 tel que $C \leq \delta n/3$, où $n \geq n_3$.

Théorème 3.3. (*Račkauskas et Suquet [33]*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et soit $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et $V_k^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ pour $k=1,2,\dots$ avec $S_0 = 0, V_0 = 0$.

$$V_n^{-1} \zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W, \quad (3.16)$$

dans $C[0,1]$, si seulement X_1 appartient au domaine d'attraction de la loi normale.

Preuve 3.3.

D'après le théorème (3.2), il suffit de montrer que $\| V_n^{-1} \xi_n - \zeta_n \|_\infty$ tend vers 0 en probabilité, avec $\| f \|_\infty := \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

Nous introduisons la suite θ_n de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui interpole linéairement les points $(k/n, V_k^2/V_n^2)$, $k=0,1,\dots,n$ Pour $V_n > 0$.

Si $V_n = 0$, on prend $\theta_n = I$, l'identité sur $[0,1]$. Par convention $S_k/V_n = 0$ pour $V_n = 0$, on peut donc définir

$$\zeta_n(\theta_n(t)) = V_n^{-1} \xi_n(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.17)$$

Pour tout t dans $[0,1]$,

$$\left| \frac{V_{[nt]}^2}{V_n^2} - \theta_n(t) \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{X_k^2}{V_n^2}. \quad (3.18)$$

Par (3.6) on obtient

$$\sup_{1 \leq t \leq 1} \left| \frac{V_{[nt]}^2}{V_n^2} - \theta_n(t) \right| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \quad (3.19)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{V_{[nt]}^2}{V_n^2} - t \right| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \quad (3.20)$$

D'où

$$\| \theta_n - I \|_\infty \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \quad (3.21)$$

Rappelons que

$$\omega(f; \delta) := \sup\{|f(t) - f(s)|; |t - s| \leq \delta\}$$

est le module de continuité de f dans l'espace $C[0,1]$.

Par(3.16) on a

$$\| V_n^{-1} \xi_n - \zeta_n \|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |V_n^{-1} \xi_n(\theta_n(t)) - \zeta_n(\theta_n(t))| \leq \omega(V_n^{-1} \xi_n; \| \theta_n - I \|_\infty). \quad (3.22)$$

Ce qui implique que pour tout λ positif et $0 < \delta \leq 1$,

$$P(\|V_n^{-1}\xi_n - \zeta_n\|_\infty \geq \lambda) \leq P(\|\theta_n - I\|_\infty > \delta) + P(\omega(V_n^{-1}\xi_n; \delta) \geq \lambda). \quad (3.23)$$

Comme le mouvement Brownien a une version dans $C[0,1]$, pour tout ε positif on peut trouver $\delta \in [0,1]$ telle que $P(\omega(W; \delta) \geq \lambda) < \varepsilon$. Puisque la fonctionnelle ω est continue dans $C[0,1]$, et d'après le théorème (3.2)

$$\limsup P(\omega(V_n^{-1}\xi_n; \delta) \geq \lambda) \leq P(\omega(W; \delta) \geq \lambda). \quad (3.24)$$

Par conséquent, pour $n \geq n_1$ on a $P(\omega(V_n^{-1}\xi_n; \delta) \geq \lambda) \leq 2\varepsilon$.

3.3 Le principe d'invariance dans $D[0,1]$

Nous étudions dans cette section la convergence dans l'espace de Skorohod du processus étagé $V_n^{-1}W_n$ qui fait des sauts aux instants déterministes $t = k/n$ et du processus étagé adaptatif Z_n qui fait des sauts à des instants aléatoires $t = V_k^2/V_n^2$.

Théorème 3.4. (*Račkauskas et Suquet [33]*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle et soit $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et $V_k^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ pour $k=1,2,\dots$ avec $S_0 = 0, V_0 = 0$.

$$V_n^{-1}W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W, \quad (3.25)$$

dans $D[0,1]$ Si seulement si X_1 appartient au domaine d'attraction de la loi normale

Preuve 3.4.

Pour montrer l'équivalence de processus W_n , on fait appel au théorème (15.6) de Billingsley [3] qui nécessite de trouver une fonction continue non décroissante F sur $[0,1]$ telle que

$$P(|W_n(t) - W_n(t_1)| \geq \lambda \mid |W_n(t_2) - W_n(t)| \geq \lambda) \leq \lambda^{-2\gamma} (F(t_2) - F(t_1))^\alpha, \quad (3.26)$$

pour tout $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2$ et pour tout $n \geq 1$ où $\gamma \geq 0$ et $\alpha > 1$

Théorème 3.5. (*Račkauskas et Suquet [33]*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle.

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W, \quad (3.27)$$

dans $D[0,1]$, si et seulement si X_1 appartient au domaine d'attraction de la loi normale

Preuve 3.5.

On utilisera le résultat du théorème (3.3) et l'identité

$$Z_n(u) = V_n^{-1}(\theta_n^{-1}(u)), \quad u \in [0, 1],$$

où

$$\theta_n^{-1}(u) := \sup\{t \in [0, 1]; \theta_n(t) = u\}, \quad u \in [0, 1],$$

est l'inverse généralisé de θ_n introduite dans la preuve du théorème (3.3). On observe que θ_n^{-1} est la fonction càdlàg non décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Le problème est réduit à la convergence en probabilité vers zéro de $\|\theta_n - I\|_\infty$ (voir Billingsley [3] p145) On note alors,

$$\|\theta_n - I\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\theta_n^{-1}(\theta_n(t)) - \theta_n(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |\theta_n^{-1}(\theta_n(t)) - t| + \|\theta_n - I\|_\infty. \quad (3.28)$$

Pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$0 \leq (\theta_n(t)) - t \leq \frac{L_n}{n},$$

où L_n est une variable aléatoire discrète qui calcule le maximum des longueurs d'occurrence consécutives sur les événements $\{X_i = 0\} (1 \leq i \leq n)$.

On note $p = P(X_1 = 0)$. Pour $0 < p < 1$ on a

$$P\left(\frac{L_n}{n} > \varepsilon\right) \leq np^{n\varepsilon-1} = o(1),$$

ce qui donne la convergence en probabilité de $\|\theta_n^{-1} \circ \theta_n - I\|_\infty$ vers 0.

3.4 Principes d'invariance dans H_α

On considère dans ce qui suit le processus de sommes partielles adaptatif ζ_n qui est défini par interpolation linéaire entre les points $(v_k^2/v_n^2 \cdot s_k/v_n)$, avec $k=0, \dots, n$, et $\zeta_n = 0$ pour $v_n = 0$.

Les principes d'invariance sous auto-normalisation sont donnés par les résultats suivants

Théorème 3.6. (Račkauskas, Suquet[33])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Si X_1 symétrique et X_1 appartient à DAN alors

$$v_n^{-1} \zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W, \quad (3.29)$$

dans $H_\alpha^0[0, 1]$ pour $0 < \alpha < 1/2$

Lemme 3.1. *Si $X_1 \in DAN$, alors*

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{v_{[nt]}^2}{v_n^2} - t \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0, \quad (3.30)$$

Preuve 3.6.

La convergence des lois fini-dimensionnelles est établit par le théorème (3.3).

Pour montrer l'équitension du processus Z_n dans l'espace $H_\alpha[0, 1]$, il suffit d'utiliser la deuxième condition de la proposition (7) de [33].

Soit $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$. Par symétrie de X_1 , les deux suites (X_i) et (εX_i) ont la même distribution.

Noter aussi que $\varepsilon_i^2 = 1$, le processus Z_n a la même distribution que le processus aléatoire

\tilde{Z}_n qui est défini linéairement entre les points $(\frac{V_k^2}{V_n^2}, \frac{U_k}{V_n})$,

tel que $U_0 = 0$ et $U_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i X_i$, pour $k \geq 1$.

Par conséquence, il suffit de montrer que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sum_{j > J} 2^j \max_{0 \leq k < 2^j} P(|Z_n((k+1)2^{-j}) - Z_n(k2^{-j})| > \varepsilon \alpha (2^{-j})) = 0 \quad (3.31)$$

pour celà, on estime que

$$\delta(t, h, r) := P(|Z_n(t+h) - Z_n(t)| > r),$$

uniformément en n . On considère d'abord le cas où

$$0 \leq \frac{V_{k-1}^2}{V_n^2} \leq t < t+h \leq \frac{V_k^2}{V_n^2},$$

alors

$$0 \leq h \leq \frac{V_k^2}{V_n^2} - \frac{V_{k-1}^2}{V_n^2} = \frac{X_k^2}{V_n^2}.$$

Par interpolation linéaire

$$|Z_n(t+h) - Z_n(t)| = \frac{|\varepsilon_k X_k|}{V_n} \frac{V_n^2}{X_k^2} h = \left(\frac{V_n}{|X_k|} \sqrt{h} \right) \sqrt{h} \leq \sqrt{h}.$$

Ensuite, on considère

$$0 \leq \frac{V_{k-1}^2}{V_n^2} \leq t < \frac{V_1^2}{V_n^2} \leq \frac{V_l^2}{V_n^2} \leq t+h < \frac{V_{l+1}^2}{V_n^2}$$

Alors,

$$|Z_n(t+h) - Z_n(t)| \leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

tel que

$$\begin{aligned} \delta_1 &:= |Z_n(t+h) - Z_n(V_l^2/V_n^2)| \leq \sqrt{t+h - V_l^2/V_n^2} \leq h, \\ \delta_2 &:= |Z_n(V_l^2/V_n^2) - Z_n(V_k^2/V_n^2)| = V_n^{-1} |U_l - U_k| \leq \frac{|U_l - U_k|}{\sqrt{V_l^2 - V_k^2}} \sqrt{h}, \\ \delta_3 &:= |Z_n(V_k^2/V_n^2) - Z_n(t)| \leq \sqrt{V_k^2/V_n^2 - t} \leq h. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$|Z_n(t+h) - Z_n(t)| \leq \frac{|U_l - U_k|}{\sqrt{V_l^2 - V_k^2}} \sqrt{h} + 2\sqrt{h}. \quad (3.32)$$

On suppose que pour $k=1$, $|U_1 - U_k| (V_l^2 - V_k^2)^{-1/2} := 0$. Alors,

$$\delta(t, h, r) \leq c \exp\{-r^2/(8h)\}, \quad (3.33)$$

avec, $r > 4\sqrt{h}$. Remarquant que dans la formule, les indices l et k sont des variables aléatoires dépendantes en t , h et la suite (X_i) . En appliquant l'inégalité de Hoeffding, on obtient,

$$\delta(t, h, r) \leq c \exp\{-r^2/(8h)\} \quad (3.34)$$

Finalement, pour tout $\epsilon > 0$ on peut écrire

$$\sum_{j=l}^{\infty} 2^j \exp\{-\epsilon 2^j \alpha (2^{-j})\} < \infty, \quad (3.35)$$

Dans le cas des suites de variables aléatoires indépendantes non de même loi nous avons

Théorème 3.7. (*Račkauskas, Suquet[38]*)

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n, \dots sont indépendantes et symétriques alors

$$V_n^{-1} \zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W, \quad (3.36)$$

dans $H_\alpha^0[0, 1]$ pour $0 < \alpha < 1/2$ si et seulement si

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{X_k^2}{V_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{P}} 0, \quad (3.37)$$

Pour le cas non symétrique on peut donner le résultat suivant :

Théorème 3.8. (Račkauskas, Suquet[38]) *Si les deux conditions suivantes sont vérifiées,*

(i) *Pour tout $k \geq 1$, $EX_k = 0$ et il existe un ϵ positif, $\sup_{k \geq 1} E |X_k|^{2+\epsilon} < \infty$,*

(ii) *Il existe T positif tel que $\kappa(T) := \sup_{j \geq 1} P(|X_j| \leq T) < 1$.*

Alors, pour $0 < \alpha < 1/2$,

$$V_n^{-1} \zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} W, \tag{3.38}$$

dans $H_\alpha^0[0, 1]$.

Chapitre 4

Application à la détection de rupture épidémique

4.1 Introduction

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de variables aléatoires de moyennes m_1, m_2, \dots, m_n respectivement. On veut tester l'hypothèse nulle

$$(H_0) : m_1 = m_2 = \dots = m_n,$$

contre l'hypothèse alternative

$$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n \text{ tels que}$$

$$m_1 = \dots = m_{k^*} = m_{m^*+1} = \dots = m_n, \quad m_{k^*+1} = \dots = m_{m^*} \text{ et } m_{k^*} \neq m_{k^*+1}.$$

On note $l^* = m^* - k^*$ la longueur de l'épidémie et on suppose que l^* et $n - l^*$ tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini.

On définit le processus de sommes partielles basé sur les X_i par

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

$$S(0) = 0 \text{ et } S(t) = \sum_{k \leq t} X_k.$$

Pour une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, Donsker et Prohorov ont prouvé que si la variance σ^2 est finie, alors $\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\xi_n$ converge en loi dans $C[0, 1]$

vers le mouvement brownien W .

Par le théorème de conservation de la convergence en loi par image continue, $g(\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\xi_n)$ converge en loi vers $g(W)$, où g est une fonctionnelle continue. Ceci procure de multiples applications statistiques. Un exemple classique est le test de détection de rupture épidémique dans l'espérance d'un échantillon.

Levine et Kline [26] ont proposé la statistique

$$Q_n = \max_{1 \leq i < j \leq n} |S(j) - S(i) - S(n)(\frac{j}{n} - \frac{i}{n})|. \quad (4.2)$$

Pour $g(x) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - (x(1) - x(0))t|$, on a $Q_n = g(\xi_n)$.

Puisque g est continue sur $C[0, 1]$, on a sous l'hypothèse nulle d'un échantillon i.i.d. de variance 1 et d'espérance fixée

$$n^{-\frac{1}{2}}Q_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{0 < t < 1} |B(t)|,$$

où $B(t) = W(t) - tW(1)$ est le pont brownien correspondant à W .

Pour les problèmes de rupture épidémique, on peut utiliser la statistique proposée par Račkauskas et Suquet

$$UI(n, \alpha) = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{|S(j) - S(i) - S(n)(\frac{j-i}{n})|}{\left|(\frac{j-i}{n})(1 - \frac{j-i}{n})\right|^\alpha} \quad (4.3)$$

La fonctionnelle correspondante est

$$h(x) = \sup_{0 < |t-s| < 1} \frac{|x(t) - x(s) - (x(1) - x(0))(t-s)|}{|(t-s)(1 - (t-s))|^\alpha}.$$

h n'est pas continue sur $C[0, 1]$, mais elle est continue sur $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$.

Pour une suite i.i.d. de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, Lamperti a prouvé que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $E|X_1|^p < \infty$, où $p = (\frac{1}{2} - \alpha)^{-1}$, alors $n^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\xi_n$ converge en loi vers W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Ceci nous permet d'avoir la loi limite de $h(n^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\xi_n)$.

On note D_j l'ensemble des nombres dyadiques sur $[0, 1]$ de niveau j :

$$D_0 = \{0, 1\}, \quad D_j = \{(2l-1)2^{-j}, \quad 1 \leq l \leq 2^{j-1}\}, \quad j \geq 1.$$

On note aussi $D = \bigcup_{j \geq 0} D_j$ et $D^* = D \setminus \{0\}$.

Pour $r \in D_j, j \geq 0$, $r^- = r - 2^{-j}$ et $r^+ = r + 2^{-j}$.

Pour toute fonction $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on définit ses coefficients de Schauder $\lambda_r(x)$ par

$$\lambda_r(x) = x(r) - \frac{x(r^+) + x(r^-)}{2}, \quad r \in D_j, \quad j \geq 1,$$

$\lambda_0(x) = x(0)$ et $\lambda_1(x) = x(1)$.

Račkauskas et Suquet [37] ont également proposé la statistique $DI(n, \alpha)$ définie par

$$DI(n, \alpha) = \max_{1 < 2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} \left| S(nr) - \frac{1}{2}S(nr^+) - \frac{1}{2}S(nr^-) \right|. \quad (4.4)$$

Ils ont considéré la variable aléatoire

$$DI(\alpha) = \sup_{j \geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} \left| W(r) - \frac{1}{2}W(r^+) - \frac{1}{2}W(r^-) \right|. \quad (4.5)$$

L'intérêt des statistiques hölderiennes est de permettre la détection de courtes épidémies. La statistique Q_n détecte seulement des épidémies de longueur l^* de l'ordre d'au moins $n^{\frac{1}{2}}$, alors que $UI(n, \alpha)$ et $DI(n, \alpha)$ détectent des épidémies de longueur l^* d'ordre n^δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

$UI(n, \alpha)$ et $DI(n, \alpha)$ ont le même comportement asymptotique mais les $DI(n, \alpha)$ sont les plus intéressantes car leur loi limite est connue, c'est la loi de la norme hölderienne séquentielle du pont brownien (Račkauskas, Suquet [37]).

4.2 Cas de suite des variables aléatoires i.i.d

4.2.1 Convergence de $DI(n, \alpha)$

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de variance finie σ^2 .

Sous l'hypothèse

(H'_0) : Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées avec une

moyenne μ_0 .

On a le résultat suivant

Théorème 4.1. (Račkauskas et Suquet [37]) *On suppose que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et*

$$P(|X_1| > t) = o(t^{-p}), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty \text{ avec } p = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^{-1} \quad (4.6)$$

alors

$$\sigma^{-1} n^{-1/2} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha). \quad (4.7)$$

telle que $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$.

La preuve du théorème 4.1 est basée sur les résultats suivants.

Lemme 4.1. (Račkauskas, Suquet [37]) *Soit $(\eta_n)_{n \geq 1}$ une suite tendue de variables aléatoires sur un espace de Banach séparable B et g_n, g des fonctionnelles continues de B dans \mathbb{R} . On suppose que g_n converge vers g dans B et $(g_n)_n$ est équicontinue. Alors*

$$g_n(\eta_n) = g(\eta_n) + o_P(1).$$

Lemme 4.2. (Račkauskas, Suquet [37]) *Soit $(B, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et*

$q : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle vérifiant

(a) *q est sous-additive : $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, $x, y \in B$.*

(b) *q est symétrique : $q(-x) = q(x)$, $x \in B$.*

(c) *Pour une certaine constante C , $q(x) \leq C \|x\|$, $x \in B$.*

Alors q satisfait la condition de Lipschitz

$$|q(x + y) - q(x)| \leq C \|y\|, \quad x, y \in B. \quad (4.8)$$

Et si \mathcal{F} est un ensemble de fonctionnelles q vérifiant (a), (b) et (c) avec la même constante C , alors (a), (b) et (c) sont aussi vérifiées pour $g(x) = \sup\{q(x), q \in \mathcal{F}\}$, qui vérifie alors la condition (4.8).

Preuve 4.1. : *On note que*

$$DI(n, \alpha) = \max_{1 < 2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(S_n.)|, \quad (4.9)$$

où (S_n) est le processus discontinu $(S(nt), 0 \leq t \leq 1)$ défini par

$$S(nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k.$$

Ce processus peut s'écrire aussi $S(nt) = \xi_n(t) - (nt - [nt])X_{[nt]+1}$, pour lequel

$$|\lambda_r(S_n) - \lambda_r(\xi_n)| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|.$$

En utilisant cette estimation dans (4.9), on obtient

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) = g_n(\sigma^{-1}n^{-1/2}\xi_n) + Z_n, \quad (4.10)$$

où $g_n(x) = \max_{1 < 2^j \leq n} \max_{r \in D_j} \frac{|\lambda_r(x)|}{2^{-j\alpha}}$, $x \in H_\alpha^0$ et les Z_n vérifiant

$$|Z_n| \leq \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \quad (4.11)$$

Les fonctionnelles $q_r(x) = \frac{|\lambda_r(x)|}{(r-r^-)^\alpha}$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 avec la même constante $C = 1$ et on a de même pour $g_n = \max_{1 < 2^j \leq n} \max_{r \in D_j} q_r$ et $g = \sup_{j \geq 1} \max_{r \in D_j} q_r$.

Avec (4.10), (4.11) et le lemme 4.1 on aura

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) = g(\sigma^{-1}n^{-1/2}\xi_n) + o_P(1)$$

et la convergence de $\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha)$ vers $DI(\alpha)$ est donnée par le théorème de conservation de la convergence en loi par image continue.

4.2.2 Consistance de $DI(n, \alpha)$

Soit $(H'_A) : X_i = \begin{cases} m_c + X'_i & \text{si } i \in I_n = \{k^* + 1, \dots, m^*\} \\ X'_i & \text{si } i \in I_n^c = \{1, \dots, n\} \setminus I_n, \end{cases}$

où $m_c \neq 0$ et X'_i satisfait (H'_0) .

La consistance de rejeter (H'_0) contre (H'_A) pour des grandes valeurs de $DI(n, \alpha)$ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 4.2. (Račkauskas et Suquet [37]) *Supposons que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n1/2h_n^{1-\alpha}|m_c| = +\infty, \quad (4.12)$$

où $h_n = \min\{\frac{l^*}{n}, 1 - \frac{l^*}{n}\}$, alors sous (H'_A)

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

Preuve 4.2. *1^{er} cas :* $\frac{l^*}{n} \leq \frac{1}{2}$ ($h_n = \frac{l^*}{n}$).

On pose $S'_n = \sum_{i=1}^n X'_i$ et on introduit les cardinaux
 $a_{n,r} = |I_n \cap]nr^-, nr]|$ et $b_{n,r} = |I_n \cap]nr, nr^+]|$.

On peut écrire

$$\lambda_r(S_n) = \lambda_r(S'_n) + \frac{1}{2}(a_{n,r} - b_{n,r})m_c.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} |\lambda_r(S_n)| &= \left| \frac{1}{2}(a_{n,r} - b_{n,r})m_c + \lambda_r(S'_n) \right| \\ &\geq \frac{1}{2}|a_{n,r} - b_{n,r}||m_c| - |\lambda_r(S'_n)|. \end{aligned}$$

D'après Račkauskas et Suquet [37], on a

$$\max_{1 \leq 2^j \leq nr \in D_j} \max_{r \in D_j} \frac{|a_{n,r} - b_{n,r}|}{2^{-j\alpha}} \geq \frac{l^*}{2(\frac{4l^*}{n})^\alpha} = \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+1}(\frac{l^*}{n})^\alpha}.$$

En utilisant l'inégalité

$$\max(f - g) \geq \max f - \max g, \quad \forall f, g \geq 0,$$

on aura

$$DI(n, \alpha) \geq \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+2}(\frac{l^*}{n})^\alpha}|m_c| - DI'(n, \alpha).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) &\geq \sigma^{-1}n^{-1/2} \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+2}(\frac{l^*}{n})^\alpha}|m_c| - \sigma^{-1}n^{-1/2}DI'(n, \alpha) \\ &= \frac{ns_n^{-1}h_n^{1-\alpha}}{2^{2\alpha+2}}|m_c| - \sigma^{-1}n^{-1/2}DI'(n, \alpha). \end{aligned}$$

Par le théorème 4.1, $\sigma^{-1}n^{-1/2}DI'(n, \alpha)$ est stochastiquement bornée et d'après (4.12), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} +\infty.$$

2^{ème} cas : $\frac{l^*}{n} > \frac{1}{2}$ ($h_n = 1 - \frac{l^*}{n}$).

a) Si $t_{k^*} \geq 1 - t_{m^*}$ ($t_{k^*} \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2$).

Il existe un unique j tel que $0 < 2^{-j-1} < t_{k^*} \leq 2^{-j} \leq 1/2 < t_{m^*}$. On pose $r_0 = 2^{-j} \in D_j$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\lambda_{r_0}(S_n) &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} X_k - \sum_{nr_0 \leq k \leq nr_0^+} X_k \\ &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nt_{k^*}} X'_k + \sum_{nt_{k^*} \leq k \leq nr_0} (X'_k + m_c) - \sum_{nr_0 \leq k \leq nr_0^+} (X'_k + m_c) \\ &= [(nr_0 - nr_0^-) + (nr_0^- - nt_{k^*}) - (nr_0^+ - nr_0)]m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n) \\ &= (nr_0^- - nt_{k^*})m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |\lambda_{r_0}(S_n)| &\geq \frac{1}{2} |nr_0^- - nt_{k^*}| |m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)| \\ &\geq \frac{1}{4} n(1 - \frac{l^*}{n}) |m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\max_{1 \leq 2^j \leq n} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(S_n)| \geq \frac{1}{4} n(1 - \frac{l^*}{n}) |m_c| \max_{1 \leq 2^j \leq n} 2^{j\alpha} - \max_{1 \leq 2^j \leq n} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(S'_n)|$$

et

$$DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4} n (1 - \frac{l^*}{n}) n^\alpha |m_c| - DI'(n, \alpha).$$

Par suite

$$DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4} n (1 - \frac{l^*}{n})(1 - \frac{l^*}{n})^{-\alpha} |m_c| - DI'(n, \alpha).$$

Finalement

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4}n \sigma^{-1}n^{-1/2}h_n^{1-\alpha} |m_c| \sigma^{-1}n^{-1/2}DI'(n, \alpha).$$

b) Si $t_{k^*} < 1 - t_{m^*}$ ($1 - t_{m^*} \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2$)

On fixe j par $1 - 2^{-j} \leq t_{m^*} < 1 - 2^{-j-1}$ et on choisit $r_0 = 1 - 2^{-j} \in D_j$. On a alors

$$\begin{aligned} 2\lambda_{r_0}(S_n) &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} X_k - \sum_{nr_0 \leq k \leq nr_0^+} X_k \\ &= \sum_{nr_0^- \leq k \leq nr_0} (X'_k + m_c) - \sum_{nr_0 \leq k \leq nt_{m^*}} (X'_k + m_c) - \sum_{nt_{m^*} \leq k \leq nr_0^+} X'_k \\ &= (nr_0 - nr_0^- - nt_{m^*} + nr_0) m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n) \\ &= n(1 - t_{m^*})m_c + 2\lambda_{r_0}(S'_n). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |\lambda_{r_0}(S_n)| &\geq \frac{1}{2}n(1 - t_{m^*}) |m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)| \\ &\geq \frac{n}{4}(1 - \frac{l^*}{n}) |m_c| - |\lambda_{r_0}(S'_n)|. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4}n (1 - \frac{l^*}{n})^{1-\alpha} |m_c| - DI'(n, \alpha).$$

Par suite

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4}n \sigma^{-1}n^{-1/2}h_n^{1-\alpha} |m_c| - \sigma^{-1}n^{-1/2}DI'(n, \alpha).$$

Par le théorème 4.1, $\sigma^{-1}n^{-1/2}DI'(n, \alpha)$ est stochastiquement bornée et d'après (4.12), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$\sigma^{-1}n^{-1/2}DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} +\infty.$$

4.2.3 Exemple d'application

Comme exemple d'application du théorème 4.1 dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, Račkauskas et Suquet [37] ont considéré la détection

de rupture de fonction de répartition, de fonction caractéristique et de matrice de covariance.

Notre objectif est de donner une application du théorème 4.3 pour la détection de rupture de variance dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes non de même loi.

Test de rupture de variance

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de variables aléatoires de variances $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ respectivement. On veut tester l'hypothèse nulle

$$(H_0) : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 = \tilde{\sigma}^2,$$

contre l'hypothèse alternative

$$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n \text{ tels que}$$

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_{k^*}^2 = \sigma_{m^*+1}^2 = \dots = \sigma_n^2, \sigma_{k^*+1}^2 = \dots = \sigma_{m^*}^2 \text{ et } \sigma_{k^*}^2 \neq \sigma_{k^*+1}^2.$$

On définit alors

$$V_n(s) = \sum_{1 \leq k \leq ns} (X_k^2 - \tilde{\sigma}^2), \quad s \in [0, 1].$$

On considère la statistique de test

$$\nu(n, \alpha) = \max_{1 \leq 2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(V_n)|.$$

En notant $\Psi(u) = P(|\lambda_r(W)| \leq u)$ et $\bar{s}_n^2 = \sum_{i=1}^n (EX_i^4 - \tilde{\sigma}^4)$, on obtient sous l'hypothèse (H'_0) le résultat suivant.

Proposition 4.1. *Supposons que*

$$\forall A > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n P(|X_i^2 - \tilde{\sigma}^2| > A \frac{\bar{s}_n}{n^\alpha}) = 0, \quad (4.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\max_{1 \leq k \leq n} (\mathbb{E}(X_k)^4 - \tilde{\sigma}^4)}{\bar{s}_n^2} = 0 \quad (4.14)$$

et pour $q > \frac{1}{1/2-\alpha}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{s}_n^{q(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}(X_k)^4 - \tilde{\sigma}^4)^{-\alpha q} \mathbb{E} |X_k^2 - \tilde{\sigma}^2|^q = 0. \quad (4.15)$$

Alors

$$\bar{s}_n^{-1} \nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} DI(\alpha) \text{ for all } 0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}.$$

La Preuve est basée sur le théorème 4.3 avec les variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n définies par $Y_i = X_i^2 - \tilde{\sigma}^2$.

Proposition 4.2. *Supposons que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \bar{s}_n^{-1} h_n^{1-\alpha} |\bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2| = +\infty, \quad (4.16)$$

où $h_n = \min\{\frac{l^*}{n}, 1 - \frac{l^*}{n}\}$. Alors sous (H'_A) , on a

$$\bar{s}_n^{-1} \nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

Preuve 4.3. *On va vérifier les conditions du théorème 4.5 pour les variables aléatoires $Y_i = X_i^2 - \tilde{\sigma}^2$ et $m_c = \bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2$. On a*

$$Y_i = X_i^2 - \tilde{\sigma}^2 = \begin{cases} (\bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2) + X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n = \{k^* + 1, \dots, m^*\}, \\ X_i^2 - \tilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c = \{1, \dots, n\} \setminus I_n. \end{cases}$$

On pose

$$Y'_i = \begin{cases} X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n, \\ X_i^2 - \tilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c. \end{cases}$$

On aura alors

$$Y_i = \begin{cases} m_c + Y'_i & \text{si } i \in I_n \\ Y'_i & \text{si } i \in I_n^c \end{cases}$$

Sous (H'_A) , $m_c = \bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2 \neq 0$ et les Y'_i sont indépendantes et centrées (donc vérifient l'hypothèse (H'_0)). Ceci implique que les Y_i sont sous l'hypothèse (H'_A) .

D'après le théorème 4.5, on aura

$$\bar{s}_n^{-1} \nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

4.3 Cas indépendant non stationnaire

4.3.1 Convergence de $DI(n, \alpha)$

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de variances $(\sigma_i^2)_{i \geq 1}$, on note $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Sous l'hypothèse

(H'_0) : Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et centrées.

On a le résultat suivant

Théorème 4.3. (*Hamadouche, Graiche et Merabet [16]*)

Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2}{s_n^2} = 0, \quad (4.17)$$

et pour $q > \frac{1}{1/2 - \alpha}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{q(2\alpha-1)} \sum_{k=1}^n \sigma_k^{-2\alpha q} E |X_k|^q = 0. \quad (4.18)$$

Si de plus

$$\forall A > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(|X_i| > A \frac{s_n}{n^\alpha}) = 0. \quad (4.19)$$

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, on a

$$s_n^{-1} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha).$$

La preuve du théorème (4.3) elle est analogue à celle du théorème (4.1) en utilisant le lemme suivant

Lemme 4.3. (*Graiche, Merabet et Hamadouche [16]*)

Sous les hypothèses (4.13) et (4.14), on a

$$s_n^{-1} \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W$$

dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$.

4.3.2 Consistance de $DI(n, \alpha)$

Soit (H'_A) : $X_i = \begin{cases} m_c + X'_i & \text{si } i \in I_n = \{k^* + 1, \dots, m^*\} \\ X'_i & \text{si } i \in I_n^c = \{1, \dots, n\} \setminus I_n, \end{cases}$

où $m_c \neq 0$ et X'_i satisfait (H'_0) .

La consistance de rejeter (H'_0) contre (H'_A) pour des grandes valeurs de $DI(n, \alpha)$ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 4.4. (*Graiche, Merabet et Hamadouche [16]*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ns_n^{-1} h_n^{1-\alpha} |m_c| = +\infty, \quad (4.20)$$

où $h_n = \min\{\frac{l^*}{n}, 1 - \frac{l^*}{n}\}$, alors sous (H'_A)

$$s_n^{-1} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

4.4 Cas dépendant stationnaire (α -mélange)

4.4.1 Convergence de $DI(n, \alpha)$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Sous l'hypothèse

(H'_0) : La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est strictement stationnaire, de moyenne 0 et α -mélangeante. On a le résultat suivant.

Théorème 4.5. (*Graiche, Merabet et Hamadouche [16]*) *Supposons qu'il existe $\gamma > 2$ et $\epsilon > 0$ tels que*

$$E|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty.$$

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$, on a

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha),$$

où $\sigma^2 = E(X_1^2) + 2 \sum_{j=2}^{\infty} cov(X_1, X_j) < +\infty$.

La preuve du théorème 4.5 est basée sur les lemmes 4.1 et 4.2 et le théorème (2.10)

Preuve 4.4. *On note que*

$$DI(n, \alpha) = \max_{1 \leq 2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(S_n.)|, \quad (4.21)$$

où $(S_n.)$ est le processus discontinu $(S(nt), 0 \leq t \leq 1)$ défini par

$$S(nt) = \sum_{k=1}^{[nt]} X_k.$$

Ce processus peut s'écrire aussi $S(nt) = \xi_n(t) - (nt - [nt])X_{[nt]+1}$, pour lequel $|\lambda_r(S_n.) - \lambda_r(\xi_n)| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|$.

En utilisant cette estimation dans (4.17), on obtient

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) = g_n(\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n) + Z_n, \quad (4.22)$$

où $g_n(x) = \max_{1 \leq 2^j \leq n} \max_{r \in D_j} \frac{|\lambda_r(x)|}{2^{-j\alpha}}$, $x \in H_\alpha^0$ et les Z_n vérifiant

$$|Z_n| \leq \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{n})^\alpha} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| = \frac{2}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|. \quad (4.23)$$

On a

$$P\left(\frac{1}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > \varepsilon\right) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > \varepsilon \sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}\right) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| > \varepsilon \sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

D'où

$$P\left(\frac{1}{\sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \max_{1 \leq i \leq n} |X_i| > \varepsilon\right) \leq n P(|X_1| > \varepsilon \sigma n^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

On a

$$\forall p, t^p P(|X_1| > t) \leq t^p \frac{\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon}}{t^{\gamma+\varepsilon}} = t^{p-\gamma-\varepsilon} E|X_1|^{\gamma+\varepsilon}.$$

Comme $E|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$, alors pour $p = (\frac{1}{2} - \alpha)^{-1}$, $t^p P(|X_1| > t)$ tend vers 0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$. Ce qui veut dire que $P(|X_1| > t) = o(t^{-p})$. Ainsi on a la convergence en probabilité vers 0 de $\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|X_i|}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$.

Les fonctionnelles $q_r(x) = \frac{|\lambda_r(x)|}{(r-r^-)^\alpha}$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 avec la même constante $C = 1$ et on a de même pour $g_n = \max_{1 \leq 2^j \leq n} \max_{r \in D_j} q_r$ et $g = \sup_{j \geq 1} \max_{r \in D_j} q_r$. Avec (4.18), (4.19) et le lemme 4.1 on aura

$$\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) = g(\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \xi_n) + o_P(1)$$

et la convergence de $\sigma^{-1} n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha)$ vers $DI(\alpha)$ est donnée par le théorème 4.2.

4.4.2 Consistance de $DI(n, \alpha)$

$$\text{Soit } (H'_A) : X_k = \begin{cases} m_c + X'_k & \text{si } k \in I_n = \{k^* + 1, \dots, m^*\} \\ X'_k & \text{si } k \in I_n^c = \{1, \dots, n\} \setminus I_n, \end{cases}$$

où $m_c \neq 0$ et X'_k satisfait (H'_0) .

La consistance de rejeter (H'_0) contre (H'_A) pour des grandes valeurs de $DI(n, \alpha)$ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 4.6. (*RAC̄kauskas et Suquet [37]*) *Supposons que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha} |m_c| = \infty, \quad (4.24)$$

où $h_n = \min\{\frac{l^*}{n}, 1 - \frac{l^*}{n}\}$, alors sous (H'_A)

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

Preuve 4.5. *D'après la preuve du théorème 4.2, on a*

1^{er} cas : $\frac{l^*}{n} \leq \frac{1}{2}$ ($h_n = \frac{l^*}{n}$).

$$DI(n, \alpha) \geq \frac{n(\frac{l^*}{n})}{2^{2\alpha+2}(\frac{l^*}{n})^\alpha} |m_c| - DI'(n, \alpha).$$

Par conséquent

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}} h_n^{1-\alpha}}{2^{2\alpha+2}} |m_c| - n^{-\frac{1}{2}} DI'(n, \alpha).$$

Par le théorème 4.6, $n^{-\frac{1}{2}} DI'(n, \alpha)$ est stochastiquement bornée et d'après (4.16), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$n^{-\frac{1}{2}} DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} +\infty.$$

$$\frac{1}{2} (h_n = 1 - \frac{l^*}{n})$$

a) Si $t_{k^*} \geq 1 - t_{m^*}$ ($t_{k^*} \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2$),

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4}n^{\frac{1}{2}}h_n^{1-\alpha} |m_c| - n^{-\frac{1}{2}}DI'(n, \alpha).$$

b) Si $t_{k^*} < 1 - t_{m^*}$ ($1 - t_{m^*} \geq (1 - \frac{l^*}{n})/2$),

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n, \alpha) \geq \frac{1}{4}n^{\frac{1}{2}}h_n^{1-\alpha} |m_c| - n^{-\frac{1}{2}}DI'(n, \alpha).$$

Par le théorème 4.5, $n^{-\frac{1}{2}}DI'(n, \alpha)$ est stochastiquement bornée et d'après (4.21), le coefficient de $|m_c|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$n^{-\frac{1}{2}}DI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} +\infty.$$

4.4.3 Application

Test de rupture de variance

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de variables aléatoires de variances $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ respectivement. On veut tester l'hypothèse nulle

$$(H_0) : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 = \tilde{\sigma}^2,$$

contre l'hypothèse alternative

$$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n \text{ tels que}$$

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_{k^*}^2 = \sigma_{m^*+1}^2 = \dots = \sigma_n^2, \quad \sigma_{k^*+1}^2 = \dots = \sigma_{m^*}^2 \text{ et } \sigma_{k^*}^2 \neq \sigma_{k^*+1}^2.$$

On définit alors

$$V_n(s) = \sum_{1 \leq k \leq ns} (X_k^2 - \tilde{\sigma}^2), \quad s \in [0, 1].$$

On considère la statistique de test

$$\nu(n, \alpha) = \max_{1 \leq 2^j \leq n} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(V_n)|.$$

En notant $\Psi(u) = P(|\lambda_r(W)| \leq u)$, on obtient sous l'hypothèse (H_0') le résultat suivant

Proposition 4.3. *Supposons qu'il existe $\gamma > 4$ et $\epsilon > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{4}-1} (\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty.$$

Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\nu(n, \alpha) \leq u\} = \Psi_\alpha(u), \quad \forall u > 0, \text{ où}$$

$$\Psi_\alpha(u) = \prod_{j=1}^{\infty} [\Psi(2^j \alpha u)]^{2^{j-1}}.$$

Preuve 4.6. *On utilise le théorème 4.6 avec les variables aléatoires Y_1, Y_2, \dots, Y_n définies*

$$\text{par } Y_k = X_k^2 - \tilde{\sigma}^2, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sous (H'_0) , la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est strictement stationnaire α -mélangeante de coefficient de mélange $\hat{\alpha}_n \leq \alpha_n$.

Pour $\gamma > 4$ et $\epsilon > 0$

$$|Y_1|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} = |X_1^2 - \tilde{\sigma}^2|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq (|X_1^2| + \tilde{\sigma}^2)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}}.$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$(|X_1^2| + \tilde{\sigma}^2)^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}-1} [|X_1|^{\gamma+\epsilon} + \tilde{\sigma}^{\gamma+\epsilon}],$$

d'où

$$\mathbb{E}|Y_1|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq 2^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}-1} [\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} + \tilde{\sigma}^{\gamma+\epsilon}].$$

Puisque $E|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty$, alors $E|Y_1|^{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}} < +\infty$.

On a également

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\hat{\alpha}_n)^{\frac{\epsilon}{\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{4}-1} (\alpha_n)^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty.$$

Les conditions du théorème 4.7 sont ainsi vérifiées pour la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ avec $\gamma > 4$ et $\epsilon > 0$. Par suite pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$ et $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma+\epsilon}$ c.à.d. pour tout $\alpha < \min(\frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}, \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma+\epsilon}) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\gamma}$, on a

$$\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} DI(\alpha),$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\nu(n, \alpha) \leq u\} = P\{DI(\alpha) \leq u\}, \quad \forall u > 0$$

et

$$P\{DI(\alpha) \leq u\} = P\{\sup_{j \geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(W)| \leq u\}.$$

Puisque les $\lambda_r(W)$ sont des variables aléatoires i.i.d., on a

$$\begin{aligned} P\{\sup_{j \geq 1} \frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(W)| \leq u\} &= \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{2^{-j\alpha}} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(W)| \leq u\right) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} P(\max_{r \in D_j} |\lambda_r(W)| \leq 2^{j\alpha}u) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} [P(|\lambda_r(W)| \leq 2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} [\Psi(2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}. \end{aligned}$$

En posant $\Psi_\alpha(u) = \prod_{j=1}^{\infty} [\Psi(2^{j\alpha}u)]^{2^{j-1}}$, on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{\sigma^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\nu(n, \alpha) \leq u\} = \Psi_\alpha(u), \quad \forall u > 0.$$

Si on note $\bar{\sigma}^2$ la variance des variables aléatoires durant l'épidémie, on a le résultat de consistance suivant.

Théorème 4.7. Soit $u_n = n^{\frac{1}{2}}h_n^{1-\alpha}$, on suppose que sous (H'_A) ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n |\bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2| = +\infty. \quad (4.25)$$

Alors

$$n^{-\frac{1}{2}}\nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

Preuve 4.7. On va vérifier les conditions du théorème 4.7 pour les variables aléatoires $Y_i = X_i^2 - \tilde{\sigma}^2$.

La condition (4.20) est satisfaite en posant $m_c = \bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2$.

On a

$$Y_i = X_i^2 - \tilde{\sigma}^2 = \begin{cases} (\bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2) + X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n = \{k^* + 1, \dots, m^*\}, \\ X_i^2 - \tilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c = \{1, \dots, n\} \setminus I_n. \end{cases}$$

$$\text{On pose } Y'_i = \begin{cases} X_i^2 - \bar{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n, \\ X_i^2 - \tilde{\sigma}^2 & \text{si } i \in I_n^c. \end{cases}$$

On aura alors

$$Y_i = \begin{cases} m_c + Y'_i & \text{si } i \in I_n, \\ Y'_i & \text{si } i \in I_n^c. \end{cases}$$

Sous (H_A) , $m_c = \bar{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2 \neq 0$ et les Y'_i sont strictement stationnaires, de moyenne 0 et $\hat{\alpha}$ -mélangeantes ($\hat{\alpha} < \alpha$) (donc vérifient l'hypothèse (H'_0)). D'après le théorème 4.6, on a

$$n^{-\frac{1}{2}}\nu(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty.$$

4.5 Les statistiques SUI et SDI

Pour introduire les statistiques adaptatives auto-normalisées, nous allons restreindre l'hypothèse nulle en supposant que $\mu_0 = 0$.

Pour tout $A \subset \{1, \dots, n\}$, nous définissons

$$V^2(A) := \sum_{i \in A} X_i^2.$$

$V_k^2 = V^2(\{1, \dots, k\})$, $V_0^2 = 0$. Pour simplifier les notations, nous notons v_k les points aléatoires de $[0, 1]$

$$v_k := \frac{V_k^2}{V_n^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Pour $\alpha \in]0, 1/2[$, nous définissons la statistique

$$SUI(n, \alpha) = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|S(j) - S(i) - S(n)(v_j - v_i)|}{(v_j - v_i)\alpha} \quad (4.26)$$

Introduisons pour $t \in [0, 1]$,

$$\tau_n(t) := \max\{i \leq n; V_i^2 \leq tV_n^2\}$$

et

$$J_n := \log_2(V_n^2/X_{n:n}^2) \quad \text{avec} \quad X_{n:n} := \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|.$$

Nous définissons maintenant $SDI(n, \alpha)$

$$SDI(n, \alpha) := \max_{1 \leq j \leq J_n} \frac{1}{(2^{-\alpha j})} \max_{r \in D_j} |S(\tau_n(r)) - \frac{1}{2}S(\tau_n(r^+)) - \frac{1}{2}S(\tau_n(r^-))| \quad (4.27)$$

Théorème 4.8. (Račkauskas et Suquet [37])

Supposons que sous (H'_0) , $\mu_0 = 0$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée

a) Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont symétriques et appartiennent au domaine d'attraction de la loi normale.

b) Il existe $\varepsilon > 0$, telle que $\mathbb{E} |X_1|^{2+\varepsilon} < \infty$.

Alors, pour $0 < \alpha < 1/2$, on a

$$V_n^{-1}SDI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} UI(\alpha) \quad (4.28)$$

et

$$V_n^{-1}SDI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L} DI(\alpha) \quad (4.29)$$

La consistance est donnée par les résultats suivants

Théorème 4.9. (Račkauskas et Suquet [37]) Sous l'hypothèse $H_A(\mu_0 = 0)$, pour une suite de variables aléatoires qui satisfait

$$S(\mathbb{I}_n) = l^* \mu_1 + O_p(l^{*1/2}), \quad S(\mathbb{I}_n^c) = O_p((n - l^*)^{1/2}) \quad (4.30)$$

et

$$V^2(\mathbb{I}_n)/l^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} b_1$$

. et

$$V^2(\mathbb{I}_n^c)/(n - l^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} b_0$$

.

Où b_1 et b_0 des constantes.

Supposons que l^*/n converge vers une limite $c \in [0, 1]$ et quand $c=0$ ou 1 , supposons de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2}(h_n^{1-\alpha}) = \infty, \text{ avec } h_n := \frac{l^*}{n} \left(1 - \frac{l^*}{n}\right). \quad (4.31)$$

Alors

$$V_n^{-1}SUI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty. \quad (4.32)$$

Remarque 4.1. Dans le théorème (4.10), il est facile de vérifier les hypothèses (4.25) et (4.26) même dans les cas de dépendance faible (mélanges ou association). Sous l'indépendance des variables X_i (pas nécessairement *i.i.d*), il est suffisant d'avoir

$$\sup_{k \geq 1} E |X_k|^{2+\varepsilon} < \infty,$$

$$EV^2(\mathbb{I}_n)/l^* \rightarrow b_1,$$

et

$$EV^2(\mathbb{I}_n^c)/(n - l^*) \rightarrow b_0.$$

Cela découle de la condition de Lindeberg pour le théorème central limite. [37]

Théorème 4.10. (Račkauskas et Suquet [37]) Soit $X'_i := X_i - E(X_i)$. Sous H_A , on suppose que les variables aléatoires X_i sont *i.i.d*. telles que $\mu_0 = 0$. Si $E |X'_1|^{2+\varepsilon} < \infty$ pour $\varepsilon > 0$, alors

$$V_n^{-1}SDI(n, \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} +\infty \quad (4.33)$$

Remarque 4.2. Les théorèmes (4.9) et (4.11) sont prouvés en utilisant le principe d'invariance höldérien pour les processus de somme partielles auto-normalisées. Pour le cas symétrique dans le FCLT höldérien, la condition de moment fini reste un problème ouvert.

4.6 Exemple numérique

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de variables aléatoires indépendantes de loi normale $N(\delta_i, 1)$, $(\delta_i \geq 0)$. On veut tester l'hypothèse nulle

$$(H_0) : \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0,$$

contre l'hypothèse alternative

$(H_A) : \exists 1 < k^* < m^* < n$ tels que

$$\delta_1 = \dots = \delta_{k^*} = \delta_{m^*+1} = \dots = \delta_n = 0, \quad \delta_{k^*+1} = \dots = \delta_{m^*} = \delta > 0.$$

On simule 1000 échantillons de taille n de loi normale $N(0,1)$. Le tableau suivant donne les valeurs de la statistique $T_n = SDI(n, a)$ pour quelques valeurs de n et a . C étant la valeur critique donnée par la table de la loi limite de T_n (Račkauskas, Suquet [54]) au seuil $\alpha = 0.05$. La région critique est définie par

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / T_n > C\}.$$

n	T_n		
	$a = 0.1$ ($C = 1, 12$)	$a = 0.3$ ($C = 1.42$)	$a = 0.4$ ($C = 1.76$)
10	0.8396	0.8783	1.0269
50	0.6454	0.8517	1.0670
100	0.6218	1.0004	0.9585
500	0.6033	1.0777	1.1202
1000	0.6537	1.0271	1.1341
10000	0.69092	1.0845	1.1293

Table 4.1 : Valeurs de T_n sous H_0 .

On remarque que sous H_0 , les valeurs de la statistique T_n ne dépassent pas le seuil fixé pour $a=0.1$, $a=0.3$ et $a=0.4$ d'où la convergence sous H_0 .

Si on simule 1000 échantillons de taille $n = 100$ sous (H_A) , on obtient quelques valeurs de la statistique T_n présentées dans la table 4.2 pour différentes valeurs de a , δ et $l^* = m^* - k^*$ au seuil $\alpha = 0.05$.

l^*	δ	T_n		
		$a = 0.1$ ($C = 1, 12$)	$a = 0.3$ ($C = 1.42$)	$a = 0.4$ ($C = 1.76$)
5	0.5	0.4951	1.0304	0.9331
	1	0.7219	1.1302	1.0939
	1.5	0.7960	1.4163	1.3868
	2	1.2738	1.9760	1.4985
	2.5	1.5231	1.9816	1.7641
10	0.5	0.3840	1.0800	0.9501
	1	0.8562	1.1656	1.3465
	1.5	1.3100	1.3000	0.5567
	2	1.4832	1.6728	2.0412
15	0.5	0.6212	0.6259	0.6897
	1	0.6928	0.9015	1.0940
	1.5	0.9583	0.9978	1.1227
	2	1.1583	1.9618	1.7717

Table 4.2 : Valeurs de T_n sous H_A .

On remarque bien que la statistique T_n détecte même des courtes épidémies (pour δ plus petit). Dans ce qui suit on introduit la statistique de Levine-Kline auto-normalisée définie par $SQ_n = \max_{i,j \geq 1} |S(j) - S(i) - S(n)(v_j - v_i)|$ où $v_i = \frac{V_i^2}{V_n^2}$ et $V_n^2 = \sum X_j$

Afin de comparer les deux statistiques T_n et $Z_n = V_n^{-2}SQ_n$, où Q_n est la statistique de Levine-Kline, on simule 1000 échantillons de loi normale $N(\delta, 1)$ de taille $n = 60$. La table 4.3 donne les valeurs de T_n pour $a = 0.25$ et Z_n avec $\alpha = 0.05$.

l^*	δ	T_n ($C = 1, 32$)	Z_n ($C = 1.50$)
2	3	1.2147	1.3328
	3.5	1.3292	1.4265
	4	1.4427	1.4930
	4.5	1.5873	1.5881
5	0.5	0.9220	1.1419
	1	1.0296	1.2581
	1.5	1.1167	1.4400
	2	1.3822	1.6177
8	0.5	0.9632	1.1740
	1	1.1357	1.4183
	1.5	1.3836	1.7189
10	0.5	0.9993	1.2142
	1	1.2653	1.5146
	1.5	1.6332	1.9154
20	0.5	1.0062	1.3666
	1	1.3015	2.0021
	1.5	1.6912	2.7377
30	0.5	1.0360	1.3692
	1	1.3670	1.9807

Table 4.3 : Comparaison entre T_n et Z_n .

On remarque qu'il est plus intéressant d'utiliser la statistique T_n pour les courtes épidémies.

Conclusion et perspectives

Après un rappel de la notion de la convergence faible (en loi) dans des espaces métrique, $C[0,1]$, $D[0,1]$ (espace de Skorohod), Nous avons introduit l'alternative des espaces hölderiens aux cadres fonctionnels précédents. Cela est motivé par le souci de disposer de plus de fonctionnelles continues de trajectoires en vue d'applications statistiques.

Nous avons passé ensuite, en revue tous les principes d'invariance hölderiens déjà établis pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et les résultats étendus au cas de suite stationnaire de variables aléatoires dépendantes.

Nous avons consacré le troisième chapitre pour rappeler les principes d'invariance pour les processus de sommes partielles auto-normalisées, dans l'objectif de travailler sur la détection de ruptures épidémiques en exploitant les statistiques de test normalisées SQ_n et SDI .

Les perspectives de ce travail sont diverses. D'abord on peut étendre les principes d'invariance sous auto-normalisation au cas de variables dépendantes. Etant donné que l'espace de Hölder $H_\alpha[0, 1]$ a une topologie plus fine que celle de $C[0,1]$, on peut étudier davantage d'applications statistiques de la convergence faible dans le cas hölderien (détection de ruptures, tests épidémiques,...). On peut s'intéresser aux problèmes de détection de ruptures épidémiques pour d'autres caractéristiques ou paramètres statistiques dans le cas hölderien (moyenne, quantile, variance, écart type, ...). Les nombreuses applications courantes de la convergence en loi dans $C[0,1]$ pour les problèmes de détection de rupture peuvent être envisagées dans le cas hölderien avec d'autres fonctionnelles pour obtenir d'autres statistiques de test et estimateurs du point de rupture ayant des propriétés plus intéressantes (efficacité, biais, convergence...). Il est aussi intéressant d'envisager des applications numériques de toute les applications statistiques citées ci-dessus (sur des données réelles ou simulées).

Annexe A

Le mouvement brownien

A.1 Introduction

Le mouvement brownien est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle crucial dans la théorie des processus stochastiques.

Un botaniste anglais, Robert Brown, décrit en 1827 le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au 19^{ème} siècle, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est très irrégulier et ne semble pas admettre de tangente. En 1900, Louis Bachelier introduit le mouvement Brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la bourse, mais sa démarche est ensuite oubliée jusqu'à vers les années 1960. En 1905, Albert Einstein construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse. Dans la même année, le physicien polonais Smoluchowski décrit le mouvement brownien comme limite de trajectoires aléatoires.

En 1923, l'américain Norbert Wiener construit rigoureusement une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues réelles. Il étudie, de manière mathématique, la continuité et non-dérivabilité des trajectoires du mouvement brownien. Il définit également l'intégrale de Wiener (l'intégrale par rapport au mouvement brownien).

A.2 Le Mouvement brownien

Nous rappelons ici la définition et les propriétés du mouvement brownien. Pour plus de détail on confère [3].

Définition A.1. Soit $(\xi_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien continu adapté de fonction de moyenne

$$\mathbb{E}(\xi_t) = \mu t$$

et de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(\xi_t - \mu t)(\xi_s - \mu s) = \sigma^2(s \wedge t) \quad \forall s, t \geq 0$$

$s \wedge t = \min(t, s)$. Tout processus de ce type est appelé mouvement brownien.

Pour tout mouvement brownien $(\xi_t)_{t \geq 0}$, on peut se ramener au mouvement canonique par le changement de variable

$$\xi_t \rightarrow \frac{\xi_t - \mu t}{\sigma} = \zeta_t.$$

Alors on aura

$$\mathbb{E}(\zeta_t) = 0, \text{cov}(\zeta_t, \zeta_s) = \mathbb{E}\zeta_t\zeta_s = s \wedge t \quad \forall s, t \geq 0.$$

A.3 Les accroissements du mouvement brownien

Proposition A.1. (Bezeznik [5]) Soit ξ_t un mouvement brownien. Alors, pour tous $0 \leq s < t$, $\xi_t - \xi_s$ suit une loi normale $N(0, t-s)$.

Pour la preuve voir (Bezeznik [5]). La proposition précédente implique que le mouvement brownien est à accroissement stationnaires.

Proposition A.2. (Bezeznik [5]) Pour tout $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ les accroissements

$$\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$$

sont indépendants.

A.4 Propriétés du mouvement brownien

Regularité de trajectoires

Théorème A.1. (Kolmogorov-Centsov) Soit ξ_t un processus sur l'espace probabilisé (Ω, A, P) tel que $\forall s, t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} |\xi_t - \xi_s|^\alpha \leq c |t - s|^{1+\beta}$$

où α, β sont des constantes positives, alors il existe un processus $(\tilde{\xi}_t)$ de (ξ_t) qui est continu dont les trajectoires sont presque sûrement localement γ -höldérienne tel que

$$P[\tilde{\xi}_t = \xi_t] = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

$$P\left\{\omega \in \Omega \quad \sup_{(s,t) \in [0,1], 0 < |t-s| < h} \frac{|\tilde{\xi}_t(\omega) - \tilde{\xi}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right\} = 1$$

où h est une variable aléatoire positive, $\delta > 0$ est une constante et $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}$.

Cas du mouvement brownien Pour $s < t$, $\xi_t - \xi_s$ suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $(t-s)$, et donc $\xi_t - \xi_s$ est de même loi que $\sqrt{t-s}T$, où T suit une loi normale $N(0,1)$. Donc pour α

Invariance du mouvement brownien

soit W_t un mouvement brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements browniens :

1. $-W_t$ (C'est la propriété de symétrie du mouvement brownien)
2. $\frac{1}{\sqrt{c}}W_t$, (C'est la propriété d'autosimilarité du mouvement brownien).
3. $W_{t+s} - W_s$, s positif. (C'est la propriété d'invariance par translation du temps du mouvement brownien).
4. W' défini par $W'_0 = 0, W'_t = t(W'_{\frac{t}{t}})$ (C'est la propriété d'invariance par inversion du temps du mouvement brownien).

Propriété de Markov

Le mouvement brownien est un processus de Markov c'est-à-dire, Pour tout $t \leq s$ et $A \in B(\mathbb{R})$ avec $F_t = \sigma W_\tau, \tau \leq t$

$$P\{W_s \in A | F_t\} = P\{W_s \in A | W_t\}$$

Preuve A.1. *Il suffit de vérifier que $\forall k, \forall t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq s$ on a*

$$P\{W_s \in A \mid W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}\} = P\{W_s \in A \mid W_{t_k}\}$$

$W_s - W_{t_k}, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1} - W_{t_0}$ sont indépendants donc la loi de W_s conditionnellement aux écart $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1} = W_{t_1} - W_{t_0}$, W_{t_1} est une loi gaussienne de variance $(s - t_k)$, centrée en t_k , ce qui implique

$$P\{W_s \in A \mid \mathcal{F}_t\} = P\{W_s \in A \mid W_t\}$$

a) Propriété de Markov simple

Pour $t \geq 0$ on note F_t la tribu engendrée par un mouvement brownien W_t , le processus $(W_{t+t'} - W_t)_{t' \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien indépendant de F_t .

b) Propriété de Markov fort

Notre but est d'étendre la propriété de Markov simple au cas où l'instant est remplacé par un temps τ .

Définition A.2. *Une variable aléatoire τ a valeur dans $[0, \infty]$ est un temps d'arrêt si*

$$\forall t \geq 0, \quad \{\tau \geq t\} \in F_t.$$

Théorème A.2. *(Propriété de Markov fort) Soit τ un temps d'arrêt, alors le processus $W_{\tau+t} - W_\tau$ est un mouvement brownien indépendant de F_τ .*

Théorème A.3. *(Loi de logarithme itéré) Pour presque tout ω on a*

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = 1,$$

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = -1.$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = 1,$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}}} = -1.$$

Propriétés des martingales

Proposition A.3. *Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien, alors les processus suivants sont des martingales pour la famille $(F_t)_{t \geq 0}$*

1. $(W_t)_{t \geq 0}$;
2. $(W_t^2 - t)_{t \geq 0}$;
3. $[\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2})]_{t \geq 0}$, $\lambda > 0$.

A.5 Le pont brownien

Un élément aléatoire X de $C[0,1]$ est gaussien si ses lois fini-dimensionnelles sont des vecteurs gaussiens. Dans $C[0,1]$, la loi gaussienne d'un élément aléatoire X est complètement définie par le moment $\mathbb{E}(X(t))$ et par le moment du produit $\mathbb{E}(X(s)X(t))$, $0 \leq s, t \leq 1$ puisqu'ils déterminent les lois fini-dimensionnelles.

Or on sait que pour le mouvement brownien W on a :

$$\mathbb{E}(W_t) = 0$$

$$\mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t.$$

Dans le cadre de l'étude des lois empiriques, on cherche à avoir un élément aléatoire gaussien B qui remplit les deux conditions :

- i)** $\mathbb{E}(B_t) = 0$,
- ii)** $\mathbb{E}(B_t B_s) = s(1-t)$ si $s < t$.

Il existe plusieurs manières de montrer l'existence d'un tel élément. Dans Billingsley[3] il est construit comme suit :

$$B_t = W_t - tW_1$$

L'élément aléatoire B_t ainsi défini est appelé brownien. Comme W_t et W_1 sont des éléments aléatoires gaussiens, B_t est aussi un élément aléatoire gaussien. De plus

$$B_0 = B_1 = 0,$$

$$\mathbb{E}(B_t) = 0,$$

$$\mathbb{E}\{(B_t - B_s)^2\} = (t - s)(1 - (t - s))si \quad s < t,$$

$$\mathbb{E}\{(B_{s_2} - B_{s_1})(B_{t_2} - B_{t_1})\} = -(s_2 - s_1)(t_2)si \quad s_1 \leq s_2 \leq t_1 \leq t_2.$$

Le pont brownien admet les mêmes propriétés que le mouvement brownien.

Annexe B

Convergence de mesures de probabilités dans les espaces métriques

B.1 Introduction

La convergence faible d'une suite de processus stochastiques dans les espaces fonctionnels équivaut à la convergence des lois finies dimensionnelles de cette suite et de la relative compacité de la suite des mesures associées à cette suite de processus. Cette relative compacité induit l'équitension de cette suite de lois et la réciproque est vraie si l'espace est séparable et complet.

Pour cela, après un rappel des définitions de la convergence faible, on énoncera des critères d'équitension et de convergence faible pour chacun des espaces métriques $C[0,1]$ et $D[0,1]$.

B.2 Convergence faible dans un espace métrique

Soit E un espace métrique muni d'une distance d , \mathcal{A} la tribu des boréliens engendrée par les ouverts de E , P une loi de probabilité sur (E, \mathcal{A})

Définition B.1. Soient P_n, P des mesures de probabilités sur (E, \mathcal{A}) on dit que (P_n) converge étroitement ou faiblement vers P , si pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et

bornée sur E on a,

$$\int_E f dP_n \rightarrow \int_E f dP, \quad n \rightarrow \infty$$

Si (P_n) converge étroitement vers P , la limite est unique.

- Il est important de remarquer que la convergence faible dépend seulement de la topologie de l'espace E et non de la métrique l'ayant générée.
- Soit A un sous ensemble de \mathcal{A} et δA sa frontière. Si $P(\delta A) = 0$ alors A est l'ensemble de continuité de P .

Les divers résultats relatifs aux propriétés de la convergence faible découlent essentiellement des deux théorèmes suivants :

Théorème B.1. (Portmanteau Billingsley[3]) Soient P_n et P des mesures (lois) de probabilités sur (E, \mathcal{A}) . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $P_n \Rightarrow P$ étroitement.
- Pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lipschizienne (uniformément continue sur E) et bornée on a :

$$\int_E f dP_n \rightarrow \int_E f dP, \quad n \rightarrow \infty$$

- Pour tout ouvert $O \subset \mathcal{A}$, on a :

$$\liminf_n P_n(O) \geq P(O)$$

- Pour tout fermé $F \subset \mathcal{A}$, on a :

$$\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$$

- Pour tout ensemble de continuité A de P on a :

$$\lim_n P_n(A) = P(A)$$

Soit X une application de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{B}, P) dans un espace métrique E . Si X est mesurable, on dit que X est un élément aléatoire de E .

Définition B.2. On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ d'éléments aléatoires de E , converge vers l'élément aléatoire X dans E , si la loi de probabilité P_n de X_n converge faiblement vers la loi de probabilité P de X ($P_n \Rightarrow P$) dans E et on écrit $X_n \xrightarrow{L} X$ dans E .

Théorème B.2. (Billingsley [3]) *Supposons que E est séparable et les éléments aléatoires X_n et Y_n ont le même domaine de définition.*

Si $X_n \xrightarrow{L} X$ et $\delta(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$, alors $Y_n \xrightarrow{L} X$.

Théorème B.3. (Billingsley [3]) *soit f une fonction mesurable dont l'ensemble des points de discontinuité est noté par D_f .*

Si $(P_n \Rightarrow P)$ et $P(D_f) = 0$, alors $P_n f^{-1} \rightarrow P f^{-1}$.

Soit X un élément aléatoire de E et $f(X)$ un élément aléatoire de E' .

Du théorème précédent on déduit.

Corollaire B.1. (Billingsley [3]) *Si $X_n \xrightarrow{L} X$ et $P(X \in D_f) = 0$, alors*

$$f(X_n) \xrightarrow{L} f(X).$$

Corollaire B.2. (Billingsley [3]) *Si $X_n \xrightarrow{P} a$ et si f est continue en a , alors*

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(a).$$

Dans ce qui suit, on donne quelques résultats de relative compacité et d'équitension dans les espaces métriques.

Définition B.3. *Une suite de mesures $(P_n)_{n \geq 1}$ sur (E, \mathcal{A}) est tendue, si pour tout ϵ positif, il existe un compact K_ϵ tel que $P(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$. En d'autres termes, P est tendue si et seulement si elle admet un support σ -compact.*

Soit Π une famille de lois de probabilité sur (E, \mathcal{A}) . On dit que Π est équitendue si pour tout ϵ positif, il existe un compact K tel que $P(K) > 1 - \epsilon$, pour tout $P \in \Pi$

La famille Π est dite relativement compacte si de toute suite d'élément de Π on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Un des principaux résultats sur la relative compacité est le théorème de **Prohorov**.

Théorème B.4. (Prohorov [33])

Si la famille Π des lois de probabilité définie sur E est équitendue, alors elle est relativement compacte.

Théorème B.5. *la réciproque de dernier théorème est vraie sur un espace E séparable et complet.*

Autrement dit, si Π est relativement compacte, alors elle est équitendue.

B.3 Convergence de processus stochastiques dans $C[0,1]$

B.3.1 Définitions et notations

On note par $C = C([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme définie par la distance entre deux fonctions comme suit

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty} = \sup_t |f(t) - g(t)|, f, g \in C([0, 1])$$

$C([0,1])$ est séparable et complet pour la topologie uniforme.

Définition B.4. On définit le module de continuité d'un élément f de $C([0,1])$ par

$$\omega_f(\delta) = \omega(f, \delta) = \sup_{|t-s|<\delta} |f(t) - f(s)|, 0 < \delta \leq 1.$$

Remarque B.1. 1. $f \in C$ si et seulement si $\omega_f(\delta) \rightarrow 0$ (quand $\delta \rightarrow 0_+$)

2. Pour tout $0 < \delta < 1$, l'application $f \rightarrow \omega_f(\delta)$ est continue (car lipschitzienne) sur C

B.3.2 Convergence faible et équitension

$C([0,1])$ muni de la topologie uniforme est séparable et complet, donc la convergence faible est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles et à l'équitension.

Théorème B.6. (Billingsley [3]) Soient P_n et P des lois de probabilités sur (C, \mathcal{A}) . Si les lois fini-dimensionnelles de P_n convergent vers celles de P et la suite P_n est équitendue alors

$$P_n \Rightarrow P.$$

Théorème B.7. (Billingsley [3])

La suite de probabilités (P_n) est équitendue si et seulement si les deux conditions sont satisfaites :

i) pour tout $\epsilon > 0$, $\exists M > 0$ et n_0 tels que

$$P_n\{f : |f(0)| > M\} \leq \epsilon, \forall n \geq 1.$$

ii) pour tout ϵ et ϵ' positifs, $\exists \delta \in (0, 1)$ et n'_0 tels que

$$P_n\{f : \omega_f(\delta) > \epsilon\} \leq \epsilon', \quad \forall n \geq n'_0$$

Théorème B.8. Pour tout $\epsilon > 0$, $\exists M$ tels que

$$P_n\{f : |f(0)| > M\} \leq \epsilon \text{ pour } n \geq 1$$

pour tout $\epsilon, \eta > 0$, $\exists \delta \in (0, 1)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{1}{\delta} P_n\{f : \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |f(t) - f(s)| \geq \epsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0$$

Exemple B.1. Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{B}, P) . on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_0 = 0$, on définit la fonction aléatoire ξ_n par :

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])X_{[nt+1]}(\omega)), t \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

Le théorème ci-dessous donne sous quelle condition cette suite de fonctions aléatoires est équitendue.

Théorème B.9. Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions aléatoires définie ci-dessus, Cette suite est équitendue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ et un entier n_0 tels

$$P\{\max_{i \leq 1} |S_{k+i} - S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leq \frac{\epsilon}{\lambda^2} \text{ pour tout } k$$

Le cas de convergence de la suite de fonctions aléatoires $\xi_n(t, \omega)$ lorsque les variables aléatoires sont iid, est résolu par le théorème de Donsker-Prohorov dont une extension au cas de variables non identiquement distribuées.

Théorème B.10. (Donsker-Prohorov) Supposons que, X_1, X_2, \dots , sont des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2$ Lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite de fonctions aléatoires $(\xi_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers B , où $B := (B_t, t \in [0, 1])$ désigne le mouvement brownien standard. Autrement dit, $L(X^{(n)})$ converge étroitement vers la mesure de Wiener sur C .

Remarque B.2. Rappelons que la mesure de Wiener est l'unique mesure de probabilité sur C , sous laquelle le processus des coordonnées $(\pi_t, t \in [0, 1])$ est un mouvement brownien.

B.4 Convergence de processus stochastiques dans $D[0,1]$

B.4.1 Définitions et notations

L'espace $C[0,1]$ n'est pas adapté à l'étude de processus stochastiques présentant des saut (processus basé sur la fonction de répartition empirique F_n).

On note par $D=D[0,1]$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, continues à droite et admettant une limite à gauche (càdlàg).

Définition B.5. On définit le module de continuité de $f \in D$ par

$$\omega_f(\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1-\delta} \omega_f[t, t + \delta]$$

où

$$\omega_f(T_0) = \sup_{s, t \in T_0} |f(t) - f(s)|, T_0 \subset [0, 1]$$

on définit un autre module de continuité ω'_f par

$$\omega'_f(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{0 < i \leq r} \omega_f[t_{i-1}, t_i], \quad 0 < \delta < 1$$

où l'infimum est pris sur toutes les subdivisions $\{t_i\}$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1, \\ t_i - t_{i-1} > \delta, & i=1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

Lemme B.1. Soit $f \in D$

(i) Pour tout ϵ positif, il existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ tels que $\omega_f([t_{i-1}, t_i]) < \epsilon$, $\forall i$.

(ii) Il existe une suite (f_n) d'éléments dans D qui sont des fonctions "en escalier", telle que

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

(iii) Pour tout ϵ positif, il n'existe qu'un nombre fini de $t \in [0, 1]$ tel que la taille de saut dépasse ϵ

On définit maintenant une distance sur D . Le choix naturel est de prendre la distance uniforme : $d_0(f, g) := \|f - g\|_\infty$, f et $g \in D$, qui rend alors l'espace (D, d_0) bien complet mais pas séparable.

En effet,

Soit $f^{(u)}(t) := \mathbf{1}_{[0, u[}(t)$, $t \in [0, 1]$ alors $A := \{f^{(u)}, u \in [0, 1]\}$ est une partie non-dénombrable de D telle que $d_0(f^{(u)}, f^{(v)}) = 1$ si $u \neq v$

Définition B.6. (*Distance de Skorokhod*) Soient $f, g \in D$. Alors $d_0(f, g)$ est définie comme l'infimum de ϵ tel qu'il existe $\lambda \in \Lambda$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| &= \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda^{-1}(t) - t| < \epsilon \\ \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(\lambda(t))| &= \sup_{t \in [0, 1]} |f(\lambda^{-1}(t)) - g(t)| < \epsilon \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$d_0(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_\infty \vee \|f - g \circ \lambda\|_\infty \},$$

avec :

$I : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ désigne l'application identité.

et

$$\Lambda := \{ [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ continue et strictement croissante}, \lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1 \}$$

Remarque B.3. Cette distance d_0 fait de l'espace $D[0, 1]$ un espace séparable.

Définition B.7. On définit la distance \tilde{d}_0 entre f et g de D qui est équivalente à d_0 (ie : $d_0(f_n, f) \rightarrow 0$ si et seulement si $\tilde{d}_0(f_n, f) \rightarrow 0$), telle que l'espace (D, \tilde{d}_0) est complet, par

$$\tilde{d}_0(f, g) := \min_{\lambda \in \Lambda} (\|\lambda\|, \|f(t) - g(\lambda(t))\|)$$

où, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\|\lambda\| := \sup_{s, t \in [0, 1], s \neq t} \left| \log \left(\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right) \right|$$

B.4.2 Convergence faible et équitension

Etant donné une loi de probabilité P sur l'espace (D, \mathcal{D}) , on note par T_p l'ensemble des points $t \in [0, 1]$ pour lesquels la projection π_t défini par

$$\pi_{t_1, \dots, t_k} : D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$f \rightarrow^\pi (f(t_1), \dots, f(t_k))$$

est continu presque par tout.

Si $0 < t < 1$ alors $t \in T_p$ si et seulement si $P(S_t) = 0$ où $S_t = \{f : f(t) \neq f(t-)\}$ Il est clair que 0 et 1 appartiennent à T_p .

Quelques résultats d'équitension et de convergence faible dans $D[0,1]$ sont présentés dans les théorèmes suivants :

Théorème B.11. (Billingsley [3]) Soit (P_n) une suite de lois de probabilités sur (D, \mathcal{D}) telle que

i) La suite (P_n) est équitendue.

ii) $P_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \Rightarrow P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$

alors,

$$P_n \Rightarrow P.$$

Théorème B.12. (Billingsley[3]) La suite de lois (P_n) est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées

i) Pour tout $\eta > 0$, il existe a tel que

$$(P_n)\{f : \sup_t |f(t)| > a\} \leq \eta, n \geq 1$$

ii) pour tout ϵ et η positifs, il existe δ , avec $0 < \delta < 1$, et un entier n_0 tel que

$$(P_n)\{f : \omega'_f(\delta) \geq \epsilon\} \leq \eta, n \geq n_0.$$

Lorsqu'on remplace le module de continuité $\omega'_f(\delta)$ par le module de continuité $\omega_f(\delta)$ qui s'approprie aussi à $C=C[0,1]$, on a le résultat ci-dessous.

Théorème B.13. Supposons que les assertions suivantes sont vérifiées :

i) Pour tout $\eta > 0$, il existe a tel que

$$(P_n)\{f : |f(0)| > a\} \leq \eta, n \geq 1$$

ii) pour tout ϵ et η positifs, il existe δ , avec $0 < \delta < 1$, et un entier n_0 tel que

$$(P_n)\{f : \omega_f(\delta) \geq \epsilon\} \leq \eta, n \geq n_0.$$

CHAPITRE B. Convergence de mesures de probabilités dans les espaces métriques

Alors la suite (P_n) est équitendue. De plus, si il existe $n' \subset n$ telle que $(P_{n'})$ converge vers P , alors $P(C)=1$.

Voici maintenant un résultat de convergence faible (loi) pour une suite d'éléments aléatoires de $D[0,1]$

Théorème B.14. Soient X_n et X des éléments aléatoires de $D[0,1]$ tels que

- i) $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \rightarrow^{\mathcal{L}} (X(t_1), \dots, X(t_k))$
- ii) $P\{X(1) \neq X(1-)\} = 0$
- iii) $P\{|X_n(t) \neq X_n(t_1)| \geq \lambda, |X_n(t_2) \neq X_n(t)| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^{2\gamma}} [F(t_2) - F(t_1)]^{2a}$, avec $t_1 < t < t_2$, $n \geq 1$ et $\gamma \geq 0$, $a > \frac{1}{2}$, F fonction continue non décroissante sur $[0,1]$.

Alors

$$X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$$

Annexe C

Programmes de simulation sous Matlab

Le programme utilisé pour simuler les statistiques SDI et SQI sous (H_A) avec $n=60$,
 $l^* = 5$ et $\delta = 1$

```
n=100;  
a=0.3;  
p=20;  
q=25;  
delta=1  
rep=1000;  
for i=1 :p  
x(i)=randn;  
 $Y(i) = (x(i))^2$ ;  
for i=p+1 :q  
x(i)=randn+delta;  
 $Y(i) = (x(i))^2$ ;  
for i=q+1 :n  
x(i)=randn;  
 $Y(i) = (x(i))^2$ ;
```

```

end
end
end
x
Y
S=cumsum(x);
V=cumsum(Y);
abs(x)
B = (max(abs(x)))2;
k = floor(log2(V(n)/B));
for j = 2 : k
    for l = 2 : 2(j - 1)
        for i = 1 : n
            if V(i) <= ((2 * l) - 1)/(2j) * V(n)
                tau(j,l) = i;
            end
            tau(j,l);
            max(tau(j,l))
            S1(j,l) = S(max(tau(j,l)))
            if V(i) <= ((2 * (l - 1))/(2j)) * V(n)
                tau1(j,l)=i;
            end
            tau1(j,l);
            max(tau1(j,l))
            S2(j,l)=S(max(tau1(j,l)))
            if V(i) <= ((2 * l)/(2j)) * V(n)
                tau2(j,l)=i;
            end
            tau2(j,l);
            max(tau2(j,l))

```

```

S3(j, l) = S(max(tau2(j, l))
D1(j, l) = (2j * a) * abs(S1(j, l) - (1/2) * S2(j, l) - (1/2) * S3(j, l));
end
end
end
D1;
D2=max(D1);
D3=max(D2);
for j=1 :k
for i=1 :n
if V(i) <= ((1/(2j)) * V(n))
tau3(j)=i
end
tau3(j);
max(tau3(j))
S11(j) = S(max(tau3(j))
S11(j)
if V(i) <= ((2/(2j)) * V(n))
tau4(j)=i
end
tau4(j)
max(tau4(j))

```

```

S12(j) = S(max(tau4(j)))
S12(j)
D4(j) = (2j * a) * abs(S11(j) - (1/2) * S12(j));
end
end
D4
D5=max(D4);
for rep=1 :rep;
DY(rep)= max(D3,D5);
DY(rep)
T = V(n)c - 1/2) * mean(DY(rep))
Pour SQI
n=100;
a=0.3;
p=20;
q=25;
delta=1
rep=1000;
for i = 1 : p
x(i) = randn;
Y(i) = (x(i))2;
for i = p + 1 : q
x(i) = randn + delta;
Y(i) = (x(i))2;
for i = q + 1 : n
x(i) = randn;
Y(i) = (x(i))2;
end
end
end
end

```

```

x
Y
S=cumsum(x);
V=cumsum(Y);
for i = 2 : n
    for j = 1 : i - 1
        S(j);
        S(i);
        S(n);
        Q1 = abs(S(i) - (1/2) * S(j) - ((i - j)/n) * S(n));
    Q1
    end
    end
    Q2 = max(Q1);
    Q(rep) = max(Q2);
    Q;
    end
    Q = n^(1/2) * mean(Q)
    Q
    end
    end

```

```
Pour DI
n=60;
a=0.1;
p=20;
q=25;
delta=1;
k = floor(log2(n));
for rep=1 :1000;
for i=1 :p
x(i)=randn;
for i=p+1 :q
x(i)=randn+delta;
for i=q+1 :n
x(i)=randn;
end
end
end
x
```

```

S=cumsum(x);
for j=2 :k
    for l = 2 : 2(j - 1)
        S1 = S(floor(n * (((2 * l) - 1)/2j)));
        S3 = S(floor((2 * n * (l))/2j));
        S2 = S(floor((2 * n * (l - 1))/2j));
        D1 = (2(j * a)) * abs(S1 - (1/2) * S2 - (1/2) * S3);
    D1
end
end
D2=max(D1);
D3=max(D2);
for j=1 :k
    S11(j) = S(floor(n/2j));
    S12(j) = S(floor((2 * n)/2j));
    D4(j) = (2(j * a)) * abs(S11(j) - (1/2) * S12(j));
    D4
end
D5=max(D4);
D5
DY(rep)= max(D3,D5);
DY
end
T = n(- 1/2) * mean(DY)
end

```

Bibliographie

- [1] Achemine F and Hamadouche D., Lamperti's invariance principle for weak dependent sequences in Hölder spaces, *Journal of Probability and statistical Science* Vol 8, N=2 p 125-141(2010).
- [2] Bentkus V., Götze F., The Berry-Esseen bound for student statistic, *Ann. Probab.* 24(1996), 491-503.
- [3] Billingsley P. , *Convergence of probability measures*, J. Wiley, New York, 1968
- [4] Birkel T., On the convergence rate in the central limit theorem for associated processes. *Ann. Proba.* 16 (1988), 1685-1698.
- [5] Brezniak, Z. and Zastwaniak, T., *Basic stochastic processes : a course through exercises.* (1958). Springer undergraduate mathematics series.
- [6] Chuprunov, A.n., On convergence of random polygonal lines under Student-type normalisation, *Theory. Probab. Appl.* 41 (1997), 756-761.
- [7] Ciesielski Z. , On the isomorphisms of the spaces H_α and m , *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* , 8(1960), 217-222.
- [8] Davydov Y. , Weak convergence of discontinuous processes to continuous ones *Th. of Probab. and math . Stat., Proc. of the seminar dedicated to the memory of Kolmogorov*, March-May 1993, St.Petersbourg(I.Ibragimov, A. Zaitser, Eds.), Gordon and Breach, 1996, 15-16.
- [9] De la Péña V.h., Lai T.l., Shao Q.m., *Self normalized processes : Limit theory and statistical applications.* Probability and its applications. Springer-Verlag Berlin
- [10] Doukhan P., *Mixing : properties and examples*, *Lecture Notes in Statistics* 85, Springer Verlag (1994).
- [11] Doukhan P., Louhichi S., A new weak dependence condition and applications to moments inequalities, *Stochastic Process. Apl.* 84 (1999), 313-342.

- [12] Egorov V.a., On the asymptotic behavior of self-normalized sums of random variables, Theory. Probab. Appl. 41(1997), 542-548.
- [13] Esary J., Proschan F., Walkup D., Association of random variables with applications, Ann. Math. Statis. 38 (1967), 1466-1474
- [14] Fortuin C., Kastelyn P., Ginibre J., Correlation inequalities on some ordered sets, Comm. Math. Phys., 22 (1971), 89-103.
- [15] Giné, E., Götze, F., Mason, D.m., 1997. When is the Student t-statistic asymptotically standard normal Ann. Probab. 25, 1514–1531.
- [16] Graiche F., Merabet D., Hamadouche D., Testing epidemic change in the variance, Pub. IRMA Lille, Vol.71, N V (2011), 1-20.
- [17] Griffin P.s., Mason D.m., On the asymptotic normality of self-normalized sums. Proc. Cambridge Philos. Soc. 109 (1996), 597-610 (1991)
- [18] Hamadouche D., Weak convergence of smoothed empirical process in Hölder spaces, Stat. Prob. Letters, 36(1998), 393-400.
- [19] Hamadouche, D., Invariance principles in Hölder spaces. Portugaliae Mathematica, 57, (2000) 127-151.
- [20] Hamadouche, D., Taleb Y., Hölderian version of Donsker-Prohorov's invariance principle. I.A.E.N.G. Int. J. Appl. Math. 39 (2009), 01, 1-8
- [21] Harris T.E., A lower bound for critical probability in a certain percolation process, Proc. Cam. Phil. Soc. 59 (1960), 13-20
- [22] Ibragimov I., Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 289(1979) ,545-547.
- [23] Kerkycharin G. and Roynette B. , Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito Nisio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I,312(1991), 877-882.
- [24] Lamperti J. , On convergence of stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc., 104(1962), 430-435.
- [25] Lehmann E. L., Some concepts of dependence, Ann. Math. Statist., 37 (1966), 1135-1153.
- [26] LEVIN, B. and Kline, J., CUSUM tests of homogeneity. Stat. Med. 4 (1985) 469–488
- [27] Loeve, M., Probability Theory II, 4th Edition, New York, 1963.
- [28] Logan, B.F., Mallows, C.L., Rice, S.O., Shepp, L.A., 1973. Limit distributions of self-

- normalized sums. *Ann. Probab.* 1, 788–809.
- [29] Louichi S., Weak convergence for empirical processes of associated sequences, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Proba. Stat.* 36, 5 (2000), 547-567
- [30] Newman, C.m. and Wright, A.L., An invariance principle for certain dependent sequences, *Ann. Probab.*, 9 (1981), 671-675.
- [31] Odaïra, H. and Yoshihara, K.L., Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 24 (1972), 259-269.
- [32] O’Brien, G.L., 1980. A limit theorem for sample maxima and heavy branches in Galton–Watson trees. *J. Appl. Probab.* 17, 539–545.
- [31] Pitt L., Positively Correlated Normal Variables are Associated. *Ann. Proba.* 10 (1982), 496-499.
- [33] Prohorov Y.V., Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theor. Prob. Appl.* 1(1956), 157-214.
- [34] Prohorov Y.V., Rosanov Y., Rosanov Y., *Théorie des probabilités. (Notions fondamentales. Théorèmes limites. Processus aléatoires)*, M., Naouka, 1973.
- [33] Račkauskas, A., Suquet, Ch., Invariance principles for adaptive self-normalized partial sums processes. *Stochastic Processes and their Applications* 95 (2001) 63–81
- [35] Račkauskas, A., Suquet, Ch., On the hölderian functional central limit theorem for iid.rondom elements in Banakh space, *Limit Theorem in Probability and Statistics, Balatonlelle 1999*(I.Berkes, E. Csaki, M.Csörgö, eds) *Janos Bolyai Mat. Soc. ,Budapest*, (2002), vol 2, 485-498.
- [36] Račkauskas, A., Suquet, Ch., Necessary and sufficient condition for the Hölderian functional central limit theorem, *Journal of Theoretical Probability*, 17(1), 221–243 (2004).
- [37] Račkauskas, A., Suquet, Ch., Hölder norm test statistics for epidemic change. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 126, Issue 2,(2004), 495-520.
- [38] Račkauskas, A., Suquet, Ch., Invariance Principle Under Self-Normalization for Non-identically Distributed Random Variables.
- [39] Rosenblatt M., A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 42 (1956), 43-47
- [40] Shao Q.M, Yu H., Weak convergence for weighted empirical processes of dependent

- sequences, The Annals of Probability Vol. 24, Number 4 (1996), 2098- 2127.
- [41] Suquet Ch., Tightness in schauder decomposable Banach spaces. Translation of A.M.S., Proceeding of the st Petersburg Math.Soc., 5 (1995).
- [42] Suquet Ch., Tightness in Schauder décomposable Banach spaces Translation of A.M.S., Proceedings of the St Petersburg Math. Soc. ,5(1996).
- [43] Yao, Q., Tests for change-points with epidemic alternatives, Biometrika 80 (1993), 179-191.
- [44] Yokoyama, R., Moment bounds for stationary mixing sequences, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 52 (1980), 45-57.