

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMÈRI - TIZI OUZOU

FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



**PROJET DE FIN D'ÉTUDES**

En vue de l'obtention du diplôme de Master Académique en Génie Mécanique

Option : Energétique

**Thème**

**Influence de la Viscoélasticité dans la Cavitation en  
Milieu Confiné**

Proposé et dirigé par :

Ahmed OUIBRAHIM

Présenté par :

Said AIT SAID

Mounir BENAMARA

Promotion 2016/2017

# REMERCIEMENTS

---

## REMERCIEMENTS

*Avant tout, nous tenons à remercier Dieu qui nous a donné la santé, le courage, la détermination, la volonté, et la puissance pour mener à terme ce travail.*

*Nous voulons également remercier infiniment notre promoteur Monsieur Ahmed OUIBRAHIM de nous avoir donné de son temps, ses conseils et surtout sa patience tout au long de ce présent travail.*

*Nous remercions les membres de jury pour avoir bien voulu procéder à l'analyse de notre mémoire.*

*Nous tenons de même à remercier tous nos enseignants du département de génie mécanique de l'UMMTO pour avoir contribué à notre formation.*

*Nous tenons enfin remercier nos chères familles pour leur soutien en toute circonstance ainsi que tous nos amis pour leurs encouragements.*

# SOMMAIRE

---

**Remerciements**

**Sommaire**

**Annexe**

<b>Nomenclature</b>	1
<b>Introduction générale</b>	4
<b>Chapitre I: Phénoménologie de la cavitation - Existence et problèmes causés</b>	
<b>1 Introduction</b>	6
<b>2 Génération de la cavitation</b>	6
<b>3 Les types de cavitation</b>	7
3.1 Cavitation par poches	7
3.2 Cavitation par bulles isolées	8
3.3 Cavitation par filaments tourbillonnaires	8
3.4 Cavitation de jet	8
<b>4 Domaines impliquant la cavitation</b>	8
4.1 Cavitation maritime	8
4.2 La cavitation dans l'automobile	9
4.3 La cavitation dans les pompes	10
4.4 La cavitation dans les turbines hydrauliques	10
4.5 La cavitation dans les films lubrifiants	10
4.5.1 Cavitation gazeuse (bulles de gaz)	10
4.5.2 Cavitation par vapeur (bulles de vapeur)	11
<b>5 Problèmes causés par la cavitation</b>	11
5.1 Le bruit	11
5.2 Chute de performance	11
5.3 Les vibrations	12
5.4 L'érosion mécanique	12
<b>6 Solutions préconisées pour éviter la cavitation</b>	12
<b>7 Applications de la cavitation</b>	13

# SOMMAIRE

---

## **Chapitre II: Eléments sur les milieux viscoélastiques**

<b>1 Introduction</b>	14
<b>2 Phénomènes observés dans les écoulements de fluides viscoélastiques</b>	15
2.1 Gonflement en sortie de filière (effet "Die-Swell)	15
2.2 Effet Weissenberg	15
2.3 Recirculation dans les écoulements	16
<b>3 Modèles rhéologiques de fluides viscoélastiques</b>	16
3.1 Modèle unidimensionnel de Maxwell	16
3.2 Modèle de Kelvin-Voigt	17
3.3 Lois de comportement tensorielles	18
3.3.1 Lois de type intégral (lois à fonction mémoire)	18
3.3.1.1 Modèle de Lodge	18
3.3.1.2 Modèle de Doi-Edwards	18
3.3.2 Lois de type différentiel ou à dérivation objective	19
3.3.2.1 Modèle généralisé de Maxwell	19
3.3.2.2 Modèle d'Oldroyd	19
3.3.2.3 Modèle d'Oldroyd sur-convecté	20
3.3.2.4 Modèle PTT sur-convecté	20
3.3.2.5 Modèle Giesekus sur-convecté	20

## **Chapitre III : Etudes préliminaire de la cavitation en milieux newtonien**

<b>1 Introduction</b>	21
<b>2 Cavitation dans le film lubrifiant.</b>	21
<b>3 Théorie de la lubrification hydrodynamique.</b>	22
3.1 Paliers lisses	22
3.2 Epaisseur du film lubrifiant	23
3.3 Considérations cinématiques et géométriques	24
3.4 Equations de Navier-stockes bidimensionnelles	25
3.5 Equations de mouvement adimensionnelles	25
3.6 Equation de Reynolds	27
3.6.1 Conditions aux limites	27
3.6.2 Le champs de vitesse	28
3.6.3 le débit de fluide	28
3.6.4 Champ de pression hydrodynamique	28

# SOMMAIRE

---

3.7 Solution de Sommerfeld	30
<b>4 Principe de la cavitation.</b>	<b>31</b>
4.1 Coefficient de pression et nombre de cavitation	31
4.2 Analyse de la courbe de distribution de $C_p$ dans l'espace confiné	33
<b>5 Conclusion</b>	<b>37</b>
<b>Chapitre IV: Cavitation en Milieu Viscoélastique - Influence de la viscoélasticité</b>	
<b>1 Introduction.</b>	<b>38</b>
<b>2 Développement des équations constitutives.</b>	<b>38</b>
<b>3 Equations de mouvement</b>	<b>40</b>
<b>4 Application au cas d'un palier infiniment long.</b>	<b>40</b>
<b>5 Equations adimensionnelles.</b>	<b>41</b>
5.1 Equations constitutives adimensionnelles	41
5.2 Equations de quantité de mouvement adimensionnelles	42
<b>6 Résolution de systèmes d'équations résultant.</b>	<b>43</b>
6.1 Linéarisation des équations	43
6.2 Résolution des équations d'ordre zéro	44
6.3 Résolution des équations d'ordre un	46
6.4 Solutions résultantes	47
6.4.1 Champ de vitesse résultant	47
6.4.2 Champ de pression $p'$ résultant	47
<b>7 Etude de la cavitation.</b>	<b>49</b>
7-1 Coefficient de pression	49
7-2 Analyse des résultats sur l'apparition de la cavitation- Conclusion	50
<b>Conclusion générale</b>	<b>53</b>

## Liste des figures

### Chapitre I

Figure I-1 : Les étapes de l'implosion d'une bulle de vapeur

Figure I-2 : Courbe pression – température

Figure I-3 : Cavitation des hydrofoils et des hélices.

Figure I-4 : Coussinet de bielle érodé par la cavitation

Figure I-5 : Couvercle de pompe à eau érodé par la cavitation

### Chapitre II

Figure II-1 : Comportement élastique et visqueux d'un échantillon viscoélastique

Figure II-2 : Courbes de viscosité des fluides newtoniens et non newtoniens

Figure II-3 : Gonflement en sortie d'une filière

Figure II-4 : Montée d'un fluide viscoélastique le long d'une tige en rotation  
(Effet "Weissenberg")

Figure II-5 : Ecoulement dans une contraction avec recirculation, le fluide à gauche est newtonien ; celui à droite est une solution de polymères

Figure II-6 : Modèle unidimensionnel de Maxwell

Figure II-7 : Modèle de Kelvin-Voigt

### Chapitre III

Figure III-1 : Schématisation d'un palier lisse

Figure III-2 : Section droite du palier

Figure III-3 : Palier développé

Figure III-4: Variation de  $C_p$  pour différentes vitesses de rotation et pour  $\eta = 0.5$

Figure III-5: Variation de  $C_p$  pour une vitesse de 500trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

Figure III-6: Variation de  $C_p$  pour une vitesse de 5000trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

Figure III-7: Variation de  $C_p$  en fonction de la viscosité de lubrifiant

## ANNEXE : Listes des figures et tableaux

---

### Chapitre IV

Figure IV-1: Courbes des différentes contributions  $\lambda = 10^{-4}S$  ( $D_e = 26$ )

Figure IV-2: Courbes de différentes contributions  $\lambda = 3.10^{-4}S$  ( $D_e = 78$ )

### Liste des tableaux

#### Chapitre III

Tableau III-1 : Données de référence

Tableau III-2: Variation de l'entrefer  $e_t$  en fonction de  $\eta$

Tableau III-3: Valeurs de  $C_p$  pour différentes vitesses et pour  $\eta=0.5$

Tableau III-4: Valeurs de  $C_p$  pour une vitesse de 500trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

Tableau III-5: Valeurs de  $C_p$  pour une vitesse de 5000trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

Tableau III-6 : Caractéristiques des lubrifiants utilisés

Tableau III-7: Variation de  $C_p$  et  $(-\sigma)$  en fonction de la viscosité de lubrifiant

# NOMENCLATURE

---

## Lettres latines :

A, M, M'	Points matériels du système.
C	Jeu radial (m).
C <sub>p</sub>	Coefficient de pression
D	Diamètre du palier(m).
d/dt	Dérivée particulière.
e	Excentricité.
e <sub>t</sub>	Entrefer minimum (m).
f <sub>v</sub>	Forces massiques par unité de volumes(N/m <sup>3</sup> ).
f	Composantes des forces de volumes (N/m <sup>3</sup> ).
G	Module d'élasticité (N/m <sup>2</sup> ).
h	Epaisseur de film lubrifiant (m).
K, K <sub>1</sub> , K <sub>2</sub>	Constantes d'intégration.
L	Longueur de palier (m).
N	Vitesse de rotation (tars/s).
O <sub>a</sub>	Centre de l'arbre.
O <sub>c</sub>	Centre de coussinet.
p, p'	Pression hydrodynamique (pa).
p <sub>a</sub>	Pression d'alimentation (Pa).
P <sub>v</sub>	Pression de vapeur (Pa).
Q	Débit volumique (m <sup>3</sup> /s).
R <sub>a</sub>	Rayon de l'arbre(m).
R <sub>c</sub>	Rayon de coussinet(m).
t	Temps (s).
u, v	Composantes du champs de vitesse (m/s).

## NOMENCLATURE

---

U	Vitesse linéaire de l'arbre (m/s).
V	Champ des vitesses (m/s).
x, y, z	Variables d'espaces.

### Lettres Grecques

$\varepsilon$	Paramètre d'échelle (rapport du jeu radial au rayon de l'arbre).
$\lambda$	Temps de relaxation (s)
$\rho$	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )
$\omega$	Vitesse angulaire (rd/s).
$\theta, \psi$	Coordonnées angulaires (rd).
$\phi$	Angle de calage (rd).
$\eta$	Excentricité relative.
$\mu$	Viscosité cinématique (pa.s).
$\nu$	Viscosité dynamique (m <sup>2</sup> /s).
$\tau$	Contrainte de cisaillement (pa).
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement(s <sup>-1</sup> ).
$\nabla$	Opérateur de dérivation (nabla).
$\partial$	Dérivée partielle.
$\Sigma$	Echelles caractéristiques des contraintes.
.	Opérateur produit scalaire.
—	Symbole d'adimensionnalisation.

# NOMENCLATURE

---

## Tenseurs

$\bar{\mathbf{I}}$	Tenseur unité.
$\bar{\mathbf{D}}$	Tenseur des taux de déformation.
$\bar{\mathbf{L}}$	Tenseur gradient des vitesses.
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Tenseur des contraintes.
$\bar{\mathbf{s}}$	Tenseur des contraintes visqueuses.
$\bar{\boldsymbol{\tau}}$	Tenseur des extra-contraintes.

## Nombres adimensionnels

$De$	Nombre de Deborah
$Re$	Nombre de Reynolds
$\sigma$	Nombre de cavitation

## INTRODUCTION GENERALE

---

La cavitation est un phénomène, fréquent et souvent méconnu, qui se produit au niveau des milieux liquides soumis à de fortes variations de pression. Elle est rencontrée dans différents domaines de machines issues en général de l'industrie mécanique tels que les turbopompes, les turbomachines, les hélices marines et sous marines, etc. Depuis la mise en évidence de l'équation de base de la lubrification hydrodynamique par Reynolds en 1886 [1], le problème de cavitation est traité théoriquement, essentiellement. Mais ce n'est que ces dernières années, avec les possibilités d'expériences qui ont pu être développées, que ce problème semble avoir été résolu. Ce phénomène est l'une des avaries qui peuvent survenir sur bien des paliers moteurs lubrifiés en régime hydrodynamique.

De nombreuses études théoriques et expérimentales utilisant des fluides newtoniens ont été menées pour établir les conditions d'apparition et de développement de la cavitation dans les espaces confinés [2 à 7]; d'autres études similaires ont été menées pour des lubrifiants modernes contenant des additifs qui donnent à ces derniers en plus de leurs propriétés visqueuses des propriétés élastiques [8].

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à étudier le phénomène de la cavitation dans un palier lisse lubrifié par un fluide viscoélastique, décrit par le modèle généralisé de Maxwell [9, 10,11]. Les équations obtenues sont liées à un nombre adimensionnel autre que le nombre de Reynolds, appelé le nombre de Deborah, qui caractérise les propriétés viscoélastiques de lubrifiant.

Le présent travail s'articule sur quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la description générale de la cavitation. En premier lieu nous nous sommes efforcés de décrire ce qui la génère et ses différents types. En deuxième lieu, nous avons cité les domaines concernés par ce phénomène ainsi que les problèmes causés. Par la suite, quelques solutions préconisées pour remédier à la cavitation ont été explicitées. Enfin, nous avons cité quelques applications de ce phénomène.

Dans le deuxième chapitre, nous avons jugé important de faire un rappel sur les fluides viscoélastiques. C'est pourquoi nous avons cité quelques phénomènes observés lors des écoulements de ces fluides, ainsi que quelques modèles rhéologiques utilisés pour modéliser leurs comportements.

Dans le troisième chapitre, nous traitons du problème de la cavitation dans un palier lubrifié dans le cas d'un fluide newtonien. En considérant d'abord l'équation de Reynolds en lubrification hydrodynamique, nous avons alors déterminé et calculé les différents paramètres permettant de traiter et d'analyser la cavitation en milieu newtonien.

## INTRODUCTION GENERALE

---

Dans le quatrième chapitre nous avons développé les équations constitutives du modèle généralisé de Maxwell. Eu égard à la complexité des équations de quantité de mouvement associées aux équations constitutives, nous avons dans une première étape procéder à l'analyse dimensionnelles de ces équations en tenant compte des considérations cinématiques et géométriques. Ceci nous a conduits à mettre en évidence par le choix approprié des grandeurs caractéristiques le nombre de Deborah et les équations associées. La résolution du système d'équations obtenues ne pouvant être abordées directement, par leur complexité, nous avons dû procéder grâce à l'analyse dimensionnelle à la linéarisation de ces équations en vue de les résoudre analytiquement, tenant compte justement de l'hypothèse de lubrification. Ainsi, nous avons alors pu aboutir à un système d'équations linéarisées relativement simplifiées. Les résultats trouvés après résolution de ce système d'équations linéarisées sont comparés à ceux trouvés pour des fluides newtoniens. Ceci nous a permis après analyse des résultats d'en déduire à la fin de ce chapitre quelques conclusions relatives à l'influence des propriétés élastiques sur la cavitation.

Enfin, nous avons terminé ce présent travail par une conclusion générale.

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur l'existence de la cavitation, ses causes, ses effets dommageables sur les composants mécaniques dans l'industrie (maritime, automobile, etc.), comment l'éviter et les applications pratiques de la cavitation.

La cavitation est un phénomène qui se produit lorsque les bulles de vapeur se forment dans un liquide en raison d'une chute de pression, puis s'effondrent violemment. C'est habituellement une conséquence des fluides se déplaçant à grande vitesse lorsque la pression locale chute en dessous de la pression de vapeur permettant de vaporiser de petites quantités de liquide [2,12]. Il s'agit généralement d'un problème pour les composants mécaniques tels que les hydrofoils, les hélices de navires, les moteurs automobiles et les pompes centrifuges dans les secteurs de la marine, de l'automobile et des applications industrielles.

La cavitation n'est pas un phénomène totalement indésirable, elle a une application pratique dans l'industrie maritime comme un moyen de réduire la traînée. L'industrie biomédicale étudie son application dans le traitement de certaines maladies telles que le cancer. Même certaines formes de vie marine utilisent la cavitation pour attraper leurs proies.

## 2. Génération de la cavitation

La cavitation est définie comme étant le processus de formation des bulles de vapeur dans un liquide lorsqu'il est soumis à des basses pressions à température ambiante constante. Bien que d'autres facteurs tels que le changement de température, la turbulence et la vitesse jouent un rôle. Lorsque les bulles rentrent dans une région de haute pression (Figure I-1), elles s'effondrent violemment avec assez d'énergie pour éroder le métal. Les dommages d'un seul effondrement de bulle sont presque négligeables ; c'est l'accumulation constante de dégâts pendant de longues périodes qui provoque l'érosion des matériaux.

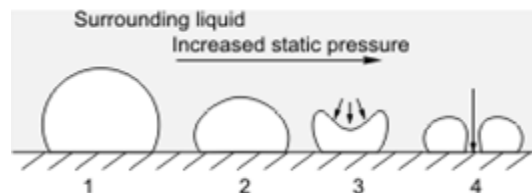


Figure I-1 : Les étapes de l'implosion d'une bulle de vapeur

Comme mentionné précédemment, le mécanisme responsable de l'initiation de la cavitation est la conséquence d'une chute de pression au point de provoquer un changement de phase liquide-vapeur. Cependant, cela ne ressemble pas à un pot d'eau bouillante qui est commun à la plupart d'entre nous. Donc, contrairement à ce que l'on connaît classiquement du phénomène d'ébullition, la cavitation n'est pas due à une

## Chapitre I. Phénoménologie de la cavitation - Existence et problèmes causés

augmentation de la température qui dépasserait la température de vaporisation mais à une baisse de la pression qui devient inférieure à la pression de vapeur pour les conditions de température locale. Dans le diagramme ci-dessous (Figure I-2) relatif à l'eau, on comprend bien que si l'on réduit suffisamment la pression statique à température donnée, l'eau liquide va se transformer en vapeur. Par exemple, il faut atteindre une pression d'environ 20 mbar pour une température ambiante de 20°C.

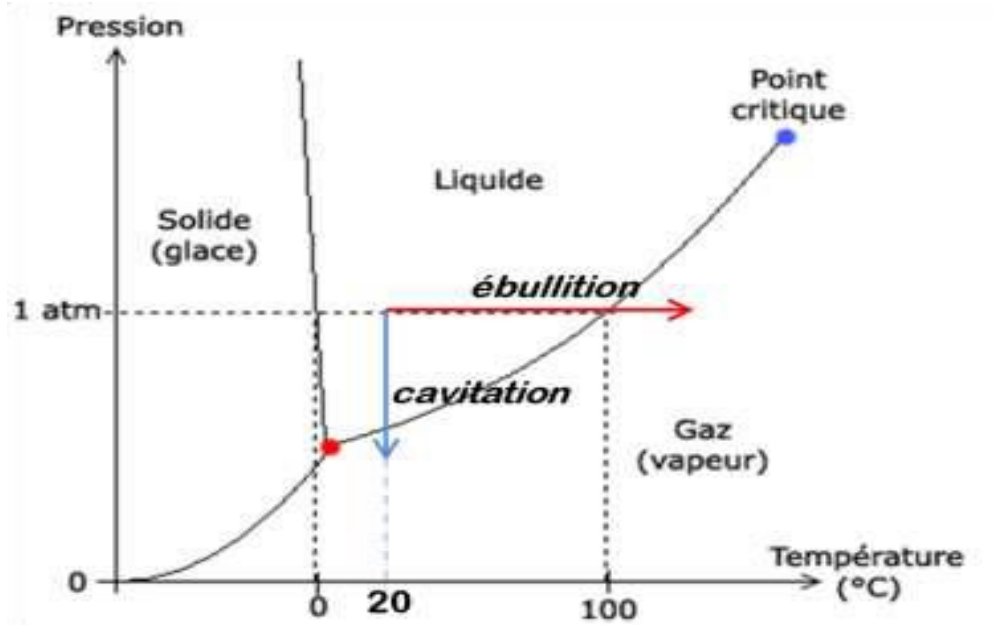


Figure. I-2: courbe pression - température

En outre, la bulle a également tendance à ne pas s'effondrer uniformément dans toutes les directions et, par conséquent, un puissant jet de liquide se forme alors qu'il se précipite pour remplir le vide une fois occupé par la bulle. Malheureusement, la direction du jet est plus susceptible d'être dirigé vers la surface du dispositif qui déclenche le processus, comme les pâles d'une pompe. D'où à la longue de ce processus, on peut aboutir à l'érosion de la pale.

### 3. Les types de cavitation

Il existe plusieurs types de cavitation. Elle prend diverses formes, suivant le mouvement des parois et/ou les propriétés physiques du fluide véhiculé.

#### 3.1. Cavitation par poches

Ce type de cavitation se forme, par exemple, sur les extrados des aubages des pompes ou hélices de propulsion marine. La zone de recirculation à l'aval du décollement favorise la création d'une (ou plusieurs) poche(s).

### 3.2 Cavitation par bulles isolées

Ce type de cavitation se forme à cause du grossissement des germes de cavitation qui sont présents dans le liquide. Ces derniers se trouvent dans une zone de basse pression. Les bulles implosent plus loin dans l'écoulement lorsque la pression remonte.

### 3.3 Cavitation par filaments tourbillonnaires

Une forte vorticité est à l'origine d'une dépression qui engendre ce type de cavitation. Elle est observable dans les zones de fort cisaillement, dans les tourbillons d'extrémité de pales.

### 3.4 Cavitation du jet

Elle se produit lorsqu'un jet liquide pénètre dans un fluide au repos avec une vitesse élevée (injecteurs dans les chambres de combustion). Le fort cisaillement que subit alors la partie latérale du jet engendre la formation de micro-tourbillons au sein desquels la pression est faible, et peut donner lieu à la cavitation.

## 4 Domaines impliquant la cavitation

Le phénomène de la cavitation est rencontré dans plusieurs domaines et parmi ces domaines on peut citer :

### 4.1 Cavitation maritime

Dans les applications marines telles que les hydrofoils, l'eau s'écoule sur l'aile immergée de ce dernier de la même manière que l'air qui s'écoule sur une aile d'avion. La forme spécialement conçue de l'aile provoque l'accélération du fluide qui s'écoule et, par conséquent, crée une région de basse pression. Cette baisse de pression donne naissance à de petites bulles de vapeur qui s'effondrent lorsqu'elles rentrent dans une région de pression plus élevée, lorsqu'elles s'approchent du bord de fuite de l'aile. Il s'agit essentiellement du même mécanisme qui provoque la cavitation sur une hélice. L'hélice se déplace à une vitesse très élevée, ce qui provoque la vaporisation du liquide sur les bords les plus extérieurs et le noyau des vortex (Figure .I-3).

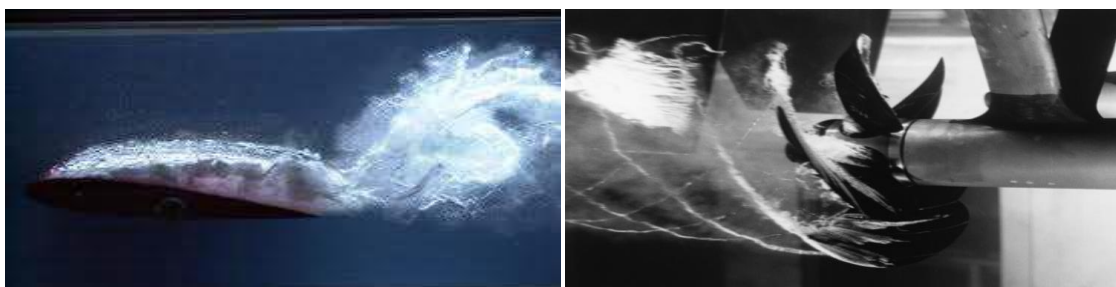


Figure I-3 : Cavitation des hydrofoils et des hélices.

### 4.2 La cavitation dans l'automobile

La cavitation dans l'automobile peut se manifester dans deux parties de moteur:

a) Dans le circuit d'huile lorsque le moteur fonctionne à régime élevé ; la cavitation apparaît alors sur les coussinets des paliers (Figure I-4)



Figure I-4 : Coussinet de bielle érodé par la cavitation

b) Dans le circuit de refroidissement des moteurs (Diesel notamment) fonctionnant dans des conditions thermiques très sévères ; les effets de la cavitation peuvent être catastrophiques comme le percement des chemises, de la culasse et de la pompe à eau (Figure I-5).



Figure I-5: Couvercle de pompe à eau érodé par la cavitation

Mis à part les moteurs diesel, nous savons que les moteurs à gaz souffrent des effets néfastes de la cavitation à mesure que les moteurs deviennent plus petits. Un système de refroidissement peu adapté et plus petit doit assurer la circulation de liquide de refroidissement à des vitesses plus élevées en compensation pour atteindre les mêmes performances qu'un plus grand, ce qui génère ce phénomène.

### **4.3 La cavitation dans les pompes**

Les pompes centrifuges sont souvent victimes de cavitation si la pression locale tombe en dessous de la pression de vapeur de liquide circulant dans la pompe spécifique. La pression de la pompe en mètre d'eau est connue en tant que "Net Pressure Suction Head available (NPSHa)" et c'est la somme de la pression atmosphérique ( $H_a$ ), la distance verticale entre la surface de l'eau et la ligne médiane de la pompe (+/-  $H_z$ ), le frottement dans la pompe ( $H_f$ ), la vitesse d'écoulement de la pompe ( $H_v$ ) Et la pression de vapeur de l'eau à la pression ambiante ( $H_{vp}$ ).

$$NPSHa = H_a + H_z - H_f + H_v - H_{vp}$$

Si le liquide n'est soumis qu'à l'accélération de la pesanteur, il suffit d'assurer qu'elle reste positive en tout point. Par contre, lorsque le fluide est accéléré (dans une pompe notamment), une dépression supplémentaire est créée : il s'agit du NPSH requis qui est donné par le fabricant de la pompe en fonction du débit. Pour éviter le risque de cavitation, le NPSH disponible du circuit doit être supérieur au NPSH requis de la pompe

### **4.4 La cavitation dans les turbines hydrauliques**

Le liquide pénètre dans les turbines hydrauliques à une pression très élevée, cette pression est une combinaison de composantes statiques et dynamiques. La pression dynamique du liquide est liée à la vitesse d'écoulement et la pression statique est la pression réelle du fluide appliquée sur la turbine. La pression statique régit le processus de formation de bulles de vapeur ou d'ébullition. Ainsi, la cavitation peut se produire près des pales rapides de la turbine où la pression dynamique locale augmente en raison de l'action des lames qui provoque une chute de la pression statique. La cavitation se produit également à la sortie de la turbine car le liquide a perdu une partie importante de sa pression et toute augmentation de la pression dynamique entraînera une chute de pression statique ; ce qui cause la cavitation.

### **4.5 La cavitation dans les films lubrifiants**

La rupture du film lubrifiant dans un espace confiné est dû à une diminution de la pression locale du liquide [2 à 8, 12 à 14]. Parmi les causes de ce phénomène on site:

#### **4.5.1 Cavitation gazeuse (bulle de gaz)**

Les huiles minérales sont les lubrifiants les plus utilisés et contiennent généralement de l'air dissous qui représente 8% du volume total à la pression atmosphérique. Une partie de cet air dissous sera libéré lorsque la pression chute au dessous de la pression de saturation. Les gaz dégagés par cette première forme de cavitation se rassemblent en des

bulles d'air relativement grandes qui adoptent une forme et une caractéristique bien définies dans la partie divergente (la forme la plus courante dans les films lubrifiants).

### **4.5.2 Cavitation par vapeur (Bulles de vapeur)**

La deuxième forme de cavitation dans le film lubrifiant se produit lorsque la pression dans la phase liquide est réduite à la pression de vapeur. Cet effet peut se produire dans les paliers opérant à très grandes vitesses.

## **5 Les problèmes causés par la cavitation**

La cavitation a essentiellement des conséquences négatives. Elle se manifeste par différents effets dont les implications sont plus ou moins très dommageables selon son intensité ou selon la préoccupation de l'utilisateur

### **5.1 Le bruit**

La toute première manifestation de la cavitation est l'apparition d'un bruit, plus ou moins fort selon son développement. Cette conséquence est particulièrement préoccupante pour le domaine de la discrétion sous-marine. Elle peut être la signature même d'un sub missile.

Le bruit rayonné est dû aux fluctuations de volume des bulles ou des poches de vapeur. En fonction du développement de la cavitation, il va évoluer de petits crépitements à un bruit qui peut dépasser les limites supportables par l'oreille humaine. Le bruit de cavitation est, de loin, la source la plus importante de bruit liée aux écoulements de liquide.

Comme le bruit de cavitation apparaît bien avant que celle-ci soit visible sous forme de bulles ou de poches, l'analyse acoustique est un outil très utile pour la détection de la cavitation.

### **5.2 Chute de performance**

La seconde manifestation de la cavitation est la chute de performance des équipements. Le développement de la cavitation dans des machines ou des organes hydrauliques peut être tel que les écoulements sont modifiés par la présence des structures cavitantes en créant une obstruction. On observe ainsi une baisse de la hauteur engendrée et du rendement pour une pompe, une baisse de la poussée pour une hélice, une augmentation de la perte de charge et une limitation du débit pour une vanne.

### **5.3 Les vibrations**

La troisième conséquence concerne les vibrations qui sont liées aux fluctuations des structures cavitantes en présence de parois solides. Ces fluctuations génèrent des efforts stationnaires qui se traduisent par des vibrations. Par exemple, la cavitation des hélices d'un bateau engendre des excitations de la ligne d'arbre qui peuvent se répercuter comme vibrations sur les structures du bateau.

### **5.4 L'érosion mécanique**

Enfin, la dernière conséquence est le phénomène d'érosion mécanique. Dans la phase d'évolution des structures cavitantes, le phénomène de collapse des volumes de vapeur est souvent très rapide et génère de très grandes vitesses locales de liquide. Si ce collapse se produit au voisinage d'une paroi, il se forme des jets de liquides dirigés vers la paroi ; ces jets, étant d'une très grande énergie, peuvent engendrer des dommages de type érosion qui, si ce phénomène se multiplie, peuvent aller jusqu'à la destruction physique de la structure

## **6 Les solutions préconisées pour éviter la cavitation**

La cavitation peut être détectée et évitée car les mécanismes qui la génèrent sont bien compris et parce que la cavitation génère une onde de choc qui entraîne une audition et des vibrations mécaniques.

Le moyen le plus simple de réduire la cavitation dans un système de pompage est d'augmenter la pression à la tête de la pompe. Cela peut être réalisé :

- En augmentant la distance verticale entre le réservoir et la pompe.
- En élevant le réservoir ou en abaissant la pompe.
- On peut également augmenter le niveau de liquide dans le réservoir ou pressuriser le réservoir.
- Une meilleure conception de la pompe pour réduire les pertes par friction et réduire les turbulences, cela peut être réalisé en maintenant la longueur de tuyau entre la tête d'aspiration et le premier coude dix fois son diamètre, en minimisant la quantité de raccords.
- Réduction de la température du liquide avec l'isolation thermique ou l'utilisation de systèmes dédiés pour réduire les températures.
- Tous les fabricants de moteurs conviennent que la maintenance est la clé pour identifier et réduire les risques de dommages causés par la cavitation du moteur.
- Les additifs supplémentaires pour le liquide de refroidissement (SCA) disponibles dans le commerce sont recommandés pour les moteurs diesel avec des doublures afin de contrôler les dégâts causés par la cavitation. Ces produits chimiques tels que "Fleetguard ES Coolant", fonctionnent en réagissant chimiquement à la rouille et en formant une couche microscopique auto curable de Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> qui est très dur et résiste aux bulles collantes.

- Dans le cas des hydrofoils et des hélices, l'environnement de travail est moins contrôlable. Les méthodes mentionnées précédemment pour augmenter la pression de la tête ou la température de l'eau ne sont pas réalisables. Ces composants doivent souvent être conçus pour fonctionner sous des conditions de cavitation.

### 7 Applications de la cavitation

La cavitation n'est pas tout à fait négative malgré le fait qu'elle est généralement nocive pour les composants mécaniques dans la plupart des applications. Il existe cependant plusieurs utilisations pratiques de la cavitation.

Le champ biomédical utilise la cavitation ultrasonore pour détruire les calculs rénaux et aide dans les traitements de certaines formes de cancer

La cavitation est également utilisée dans l'industrie pour l'homogénéisation, comme le traitement du lait. La graisse se rassemblerait naturellement à la surface supérieure du lait. Le processus d'homogénéisation répartit uniformément les graisses en les décomposant, créant ainsi un produit uniforme. La cavitation est également en cours de recherche pour une utilisation dans la purification de l'eau." Dynaflow, Inc" a développé un produit appelé "DynaJets" qui utilise la cavitation pour détruire des composants dangereux.

La supercavitation est recherchée par l'industrie maritime comme moyen d'augmenter la vitesse maximale, qu'un corps solide peut atteindre en moyenne. L'objet n'est plus enveloppé par l'eau, mais il est entouré par de la vapeur d'eau. Il se meut donc dans une bulle qu'il recrée au fur et à mesure de son déplacement. Dans ces conditions, presque tous les effets de la friction s'annulent parce qu'il n'y a plus de contact entre la surface du projectile et l'eau : c'est comme si une bulle de vapeur se déplaçait dans l'eau ! Avec cette technique, les torpilles peuvent se mouvoir facilement à plus de 100 m/s (350 km/h). Par comparaison, les torpilles traditionnelles sont limitées à 20 m/s.

Certaines espèces de vie marine utilisent la cavitation comme moyen de prise de proies. Plus précisément, les crevettes mantes et les crevettes à pistolet ont des griffes spécialement développées qui peuvent frapper assez rapidement pour induire la cavitation. Les avantages de cette capacité évolutive sont significatifs, même si la frappe de la griffe manque, l'onde de choc étourdit ou peut-être suffisante pour tuer la proie par elle-même. Ils accélèrent leur griffe aussi vite qu'une balle de calibre 22, ce qui les rend les frappeurs les plus rapides dans le règne animal.

## 1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse aux fluides viscoélastiques. Ces matériaux viscoélastiques sont des matériaux qui concernent le domaine de la rhéologie. Ils possèdent des propriétés à la fois élastiques (temps courts, disons inférieur à  $\lambda$ ), et visqueuses (temps longs, supérieur à  $\lambda$ ). Lorsque l'on jette une boule de "silly putty" (genre de pâte à modeler) sur un mur, elle rebondit (temps court), alors que si on la pose sur un coin de table, elle finit, au bout d'un certain temps, par s'écouler (temps long) (Figure II-1). On définit ainsi le temps caractéristique du matériau,  $\lambda$

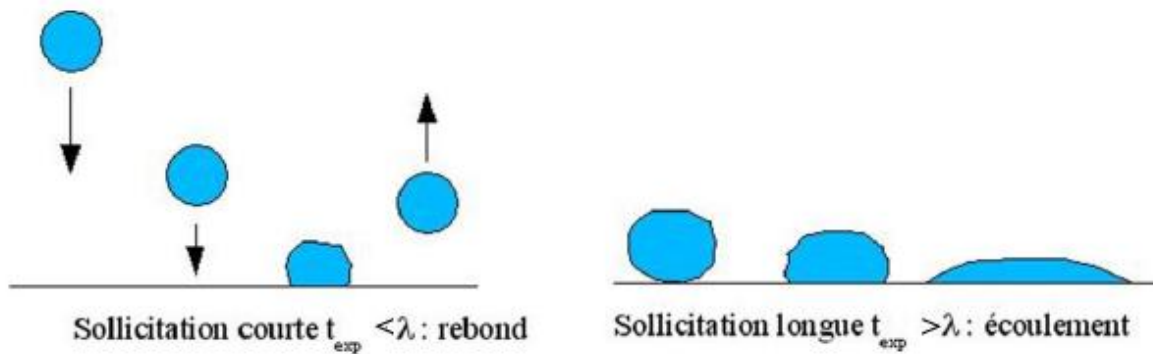


Figure II-1: Comportement élastique et visqueux d'un échantillon viscoélastique

Un aspect très important concerne la viscosité de ces fluides ou matériaux qui est variable et qui dépend en général du gradient de vitesse  $\dot{\gamma}$  (Figure II-2). Si la viscosité de cisaillement chute en fonction du gradient de vitesse : le fluide est dit rhéofluidifiant, si c'est l'inverse le fluide est dit rhéopaisissant.

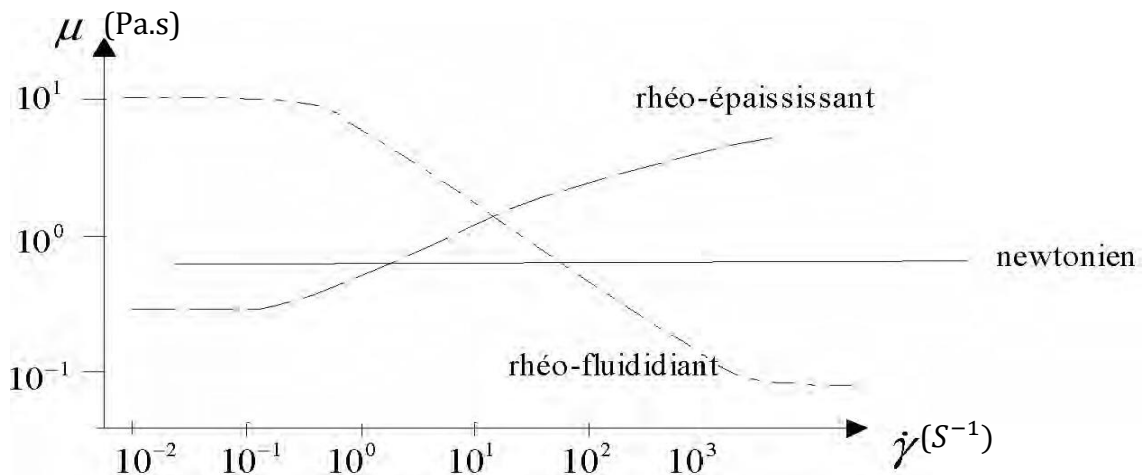


Figure II-2: Courbes de viscosité des fluides newtoniens et non newtoniens

### 2 Phénomènes observés dans les écoulements des fluides viscoélastiques

#### 2.1 Gonflement en sortie de filière (effet "Die swell")

A la sortie d'une filière il se produit un gonflement de fluide, Pour un fluide newtonien le rapport entre le diamètre de l'écoulement aval et celui de la filière de 1,13 en géométrie axisymétrique et de 1,19 en géométrie plane [11], Tandis que pour les polymères fondus ce rapport peut prendre des valeurs plus importantes allant jusqu'à 4 et cela est dû aux effets de contraintes normales développées par le cisaillement en amont.

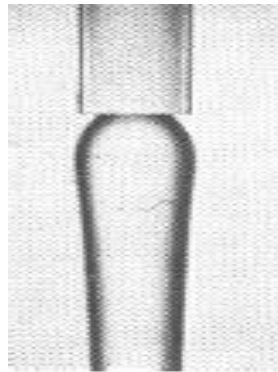


Figure II-3: Gonflement en sortie d'une filière

#### 2.2 Effet Weissenberg

Un fluide newtonien entraîné par une tige tournante possède une surface libre plane, alors qu'un fluide viscoélastique monte le long de la tige (Figure II-4) [9,11], d'autant plus que la vitesse est grande. Cela est lié à la différence des contraintes normales non nulle

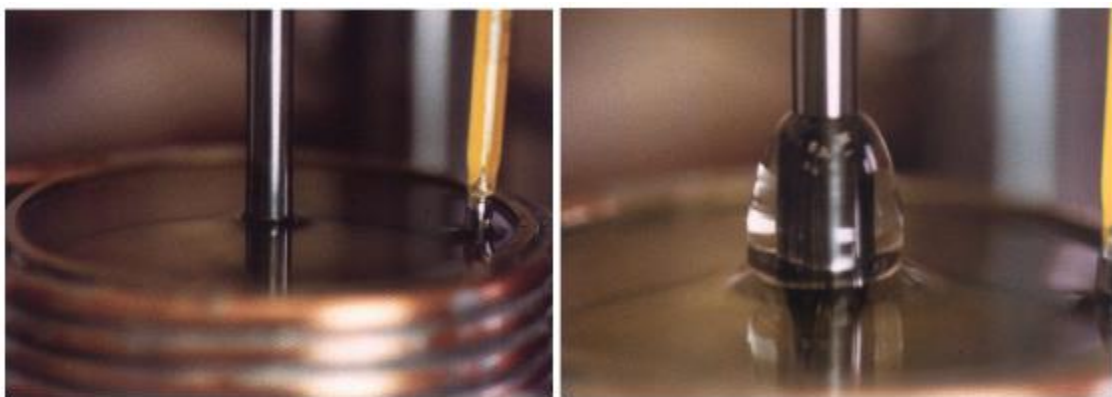


Figure II-4 Montée d'un fluide viscoélastique le long d'une tige en rotation (Effet "Weissenberg")

### 2.3 Recirculations dans les écoulements

L'apparition de recirculations dans l'écoulement d'un polymère dans une contraction (Figure II-5) est liée aux effets élastiques de ce matériau [9]. Notons que la taille des recirculations augmente avec le débit, ou la vitesse d'écoulement car ces effets élastiques se trouvent renforcés, et ils sont contrôlés par le nombre de Deborah  $De = \lambda / t_{exp}$  qui est le rapport entre le temps caractéristique du matériau  $\lambda$  et le temps relié à l'expérience  $t_{exp}$ ;  $L/V$  ou  $V$  et  $L$  sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques.

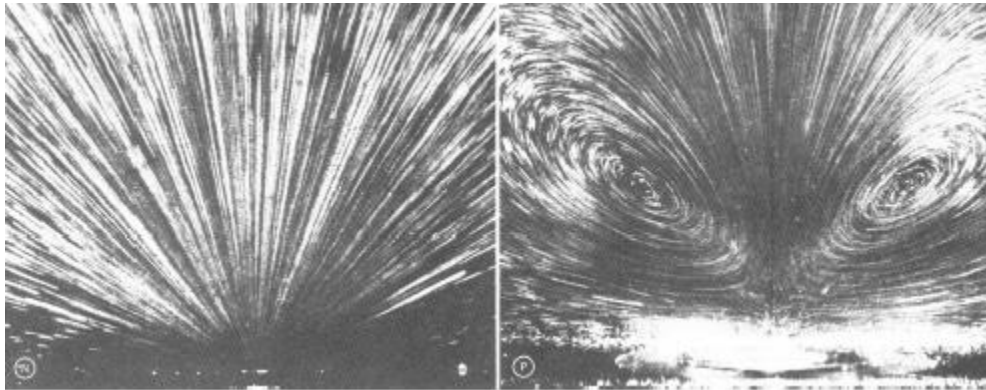


Figure II-5: Ecoulement dans une contraction avec recirculation le fluide à gauche est newtonien ; celui à droite est une solution de polymères

## 3 Modèles rhéologiques de fluides viscoélastiques

### 3.1 Modèle unidimensionnel de Maxwell

On peut représenter le comportement d'un fluide viscoélastique par le modèle unidimensionnel de Maxwell, schématiquement c'est la combinaison d'un ressort et d'un amortisseur disposés en série (Figure II- 6) [9,11].

Le ressort de module  $G$  représente un milieu parfaitement élastique

L'amortisseur de viscosité  $\mu$  représente un milieu parfaitement visqueux

La déformation totale  $\gamma$  est la somme de  $\gamma_1$  du ressort et  $\gamma_2$  de l'amortisseur

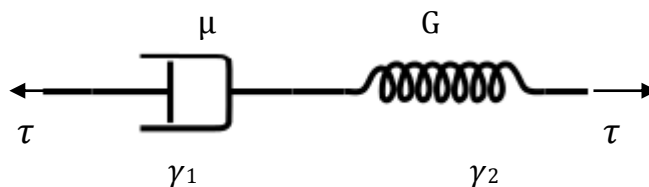


Figure II-6: Modèle unidimensionnel de Maxwell

$$\text{Comportement de ressort : } \tau = G\gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dt} = G \frac{d\gamma_1}{dt}$$

$$\text{Comportement de l'amortisseur : } \tau = \mu \frac{d\gamma_2}{dt}$$

$$\text{Au total } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt}$$

Soit 
$$\frac{1}{\mu} \tau + \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}$$

En posant :  $\lambda = \frac{\mu}{G}$ , on obtient :

$$\tau + \lambda \frac{d\tau}{dt} = \mu \frac{d\gamma}{dt} \tag{II-1}$$

Où :  $\lambda$  représente le temps de relaxation évoqué précédemment.

Cette loi unidimensionnelle ne permet pas de décrire les propriétés observées dans les deux directions perpendiculaires à celle de l'écoulement et, notamment, de l'existence des contraintes normales. Le modèle doit alors être généralisé en utilisant les tenseurs des contraintes, des taux de déformations et leurs dérivées objectives.

### 3.2 Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle comporte les mêmes éléments que la modèle de Maxwell mais dans ce cas sont placés en parallèle (Figure II-7) [9].

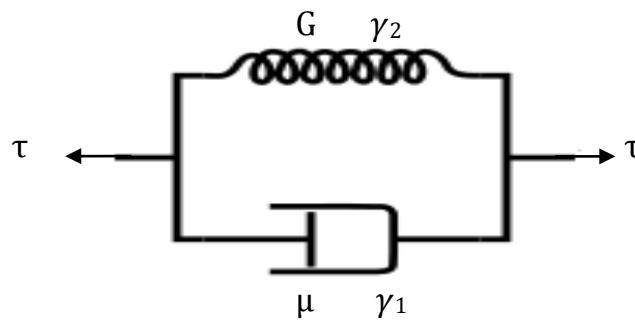


Figure II-7 Modèle de Kelvin-Voigt

Dans ce modèle la déformation de ressort est la même que celle de l'amortisseur

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$$

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} + G\gamma$$

De même que pour le modèle de Maxwell on déduit le temps de relaxation :

$$\lambda = \frac{\mu}{G}$$

On obtient alors :

$$\tau = \lambda \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \tag{II-2}$$

### 3.3 Lois de comportement tensorielles

Les lois de comportement tensorielles des matériaux sont des relations liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations ou taux de déformations. Ce sont des modélisations construites principalement à partir des observations expérimentales et précisées par des considérations mécaniques voire thermodynamiques.

En comportement viscoélastique, on distingue deux grandes classes de lois rhéologiques [9,11]:

- Les lois de comportement de type intégral.
- Les lois de comportement de type différentiel.

#### 3.3.1 Lois de type intégral (lois à fonction mémoire)

Une loi de type intégrale est dite aussi à fonction mémoire signifie que le tenseur des extra-contraintes  $\bar{\tau}$  est lié aux déformations à travers une expression faisant appel à une ou plusieurs intégrales. La forme générale est donnée par l'expression suivante [9,11]:

$$\bar{\tau} = \int_{-\infty}^t m(t-t') \bar{\bar{H}}(t, t') dt' \quad (\text{II-3})$$

Où:  $m(t-t')$  est une fonction scalaire de mémoire,  $t$  le temps présent,  $t'$  le temps passé et  $\bar{\bar{H}}$  est une fonction tensorielle dépendant des déformations.

##### 3.3.1.1 Modèle de Lodge

Il est le plus souvent cité, est obtenu en posant  $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{C}}^{-1}$ , soit donc [9,11]:

$$\bar{\tau} = \int_{-\infty}^t m(t-t') \bar{\bar{C}}_t^{-1}(t') dt'$$

avec :  $\bar{\bar{C}}^{-1}$  est l'inverse de tenseur des dilatations

Où la fonction mémoire  $m(t-t')$  est définie par:

$$m(t-t') = \frac{G}{\lambda} \exp \left[ -\frac{(t-t')}{\lambda} \right]$$

avec :  $\lambda$  un temps de relaxation, et  $G$  un module d'élasticité.

##### 3.3.1.2 Modèle de Doi-Edwards

Il est donné par [9,11] :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 5[I_1 + 2(I_2 + 3.25)^{\frac{1}{2}} - 1]^{-1} \\ \phi_2 &= \phi_1(I_2 + 3.25)^{\frac{1}{2}} \\ m(t-t') &= \frac{96\mu}{\pi^4 \lambda^2} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[ -(2k+1)^2 \frac{t-t'}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

$\phi_1$  et  $\phi_2$  deux fonctions des deux invariants  $I_1$  et  $I_2$

### 3.3.2 Lois de type différentiel ou à dérivation objective

Une loi de comportement est dite objective, si elle obéit au principe d'indifférence matérielle, c'est à dire que, l'expression de cette loi ne change pas par changement de repère. Mathématiquement on peut définir une dérivation d'un tenseur par rapport à un repère, dit convectif, qui se déforme en même temps que la matière. Nous en retenons ici la forme la plus général [9,11].

$$\frac{D\alpha\bar{\tau}}{Dt} = \frac{D\bar{\tau}}{Dt} - \frac{\alpha-1}{2} \left[ (\nabla\bar{V})^T \bar{\tau} + \bar{\tau}(\nabla\bar{V}) \right] - \frac{\alpha+1}{2} \left[ (\nabla\bar{V})\bar{\tau} + \bar{\tau}(\nabla\bar{V})^T \right] \quad (II-4)$$

avec :  $\frac{D\alpha\bar{\tau}}{Dt}$  une dérivée bi tensorielle

$\frac{D}{Dt}$ : Dérivée particulière par rapport au temps

Si  $\alpha=1$ , la dérivée est dite sur-convectée, si  $\alpha=0$ , la dérivée est dite de Jaumann, et si  $\alpha=-1$ , la dérivée est dite sous convectée.

#### 3.3.2.1 Modèle généralisé de Maxwell

Une première loi de type différentiel est donnée par Maxwell [9, 10,11]:

$$\bar{\tau} + \lambda \frac{D\alpha\bar{\tau}}{Dt} = 2\mu\bar{D} \quad (II-5)$$

Avec :

$\bar{\tau}$ : Tenseur des extras contraintes

$\lambda$ : Temps de relaxation

$\frac{D\alpha\bar{\tau}}{Dt}$ : Une dérivée bitensorielle

$\mu$ : Viscosité du fluide

$\bar{D}$  : Tenseur des taux de déformations

#### 3.3.2.2 Modèle d'Oldroyd

Oldroyd propose pour sa part une équation de la forme [9,11]:

$$\bar{\tau} + \lambda \frac{D\alpha\bar{\tau}}{Dt} = 2\mu(\bar{D} + \lambda_r \frac{D\alpha\bar{D}}{Dt}) \quad (II-6)$$

$\lambda$  et  $\lambda_r$  étant respectivement les temps de relaxation et de retard avec ( $0 \leq \lambda_r \leq \lambda$ ), le terme  $\lambda_r \frac{D\alpha\bar{D}}{Dt}$  revient en fait à considérer qu'au fluide non newtonien est "ajouté" un solvant newtonien :

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_s + \bar{\tau}_p$$

Avec :

$\bar{\tau}_s$  : contribution newtonienne (solvant)

$\bar{\tau}_p$ : contribution non newtonienne (particules)

$$\bar{\tau}_s = 2\mu_s \bar{D} \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_p + \lambda \frac{D\bar{\tau}}{Dt} = 2\mu_p \bar{D}$$

Où  $\mu = \mu_s + \mu_p$  et  $\mu_s = \mu \frac{\lambda_r}{\lambda}$  ,  $\mu_p = \mu(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda})$

### 3.3.2.3 Modèle d'Oldroyd sur-convecté

Le modèle contravariant, dit d'Oldroyd -B est obtenu en posant  $\alpha=1$  dans (II-4) et (II-6) [9,11].

$$\bar{\tau} + \lambda \left[ \frac{D\bar{\tau}}{Dt} - (\vec{\nabla}\vec{V})\bar{\tau}(\vec{\nabla}\vec{V})^T \right] = 2\mu \left\{ \bar{D} + \lambda_r \left[ \frac{D\bar{D}}{Dt} - (\vec{\nabla}\vec{V})\bar{D} - \bar{D}(\vec{\nabla}\vec{V})^T \right] \right\}$$

Par la suite, d'autres lois sont introduites de la forme :

$$\bar{\tau} + \lambda \frac{D\bar{\tau}}{Dt} + \delta(\bar{\tau}, \bar{D}) = 2\mu \left( \bar{D} + \lambda_r \frac{D\bar{D}}{Dt} \right)$$

$\delta(\bar{\tau}, \bar{D})$  : Étant une fonction non linéaire de  $\bar{\tau}$  et de  $\bar{D}$

On cite notamment les modèles de Gieskus [9,11] et Phan-Tien Tanner dit (PTT) [9,11] (avec ici  $\tau$  correspond à  $\tau_p$ ) :

### 3.3.2.4 Modèle PTT sur-convecté

$$\mu = \mu_s + \mu_p$$

$$\left[ 1 + \varepsilon \frac{\lambda}{\mu_p} \text{Tr}(\bar{\tau}) \right] \bar{\tau} + \lambda \left[ \frac{D\bar{\tau}}{Dt} - (\vec{\nabla}\vec{V})\bar{\tau} - \bar{\tau}(\vec{\nabla}\vec{V})^T \right] = 2\mu_p \bar{D}$$

### 3.3.2.5 Modèle Giesekus sur-convecté

$$\mu = \mu_s + \mu_p$$

$$\left[ 1 + \varepsilon \frac{\lambda}{\mu_p} \bar{\tau} \right] \bar{\tau} + \lambda \left[ \frac{D\bar{\tau}}{Dt} - (\vec{\nabla}\vec{V})\bar{\tau} - \bar{\tau}(\vec{\nabla}\vec{V})^T \right] = 2\mu_p \bar{D}$$

### 1 Introduction

La lubrification hydrodynamique permet d'éviter le contact direct entre deux solides mobiles au moyen d'un film lubrifiant. La formation et le maintien du film lubrifiant imposent l'existence d'une pression dans ce film afin d'équilibrer la charge appliquée entre les parois du mécanisme, la génération de pression par le déplacement relatif des surfaces est la conséquence du mouvement d'entraînement du coin d'huile [11, 15].

Le passage de film lubrifiant dans un espace convergent-divergent permet de modifier sa pression intérieure, qui atteint une valeur inférieure à celle de la pression de saturation de liquide ce qui donne naissance à la cavitation.

Dans ce chapitre nous déterminerons l'expression de coefficient de pression dans le film lubrifiant en utilisant l'équation de Reynolds dans le but d'étudier le phénomène de la cavitation rencontré en lubrification des paliers lisses par un fluide newtonien. Pour ce faire nous prenons le cas d'un palier de pied de bielle d'un moteur thermique pour différentes vitesses de rotation 500trs/min, 1000trs/min, 3000trs/min et 5000trs/min, et voir l'influence de plusieurs paramètres tel que : la vitesse de rotation, la viscosité, l'épaisseur de l'entrefer sur la variation de coefficient de pression et le développement de la cavitation dans l'espace confiné.

### 2 Cavitation dans le film lubrifiant

Reynolds a démontré que, dans des conditions d'écoulement lent et visqueux, un film lubrifiant est en forme de coin grâce à la génération essentielle de pression de support de charge, ce concept physique de coin est l'essence de la théorie de la lubrification hydrodynamique. La présentation des pressions sous-ambiante dans l'espace divergent donne naissance aux formes de cavitation gazeuse et vaporeuse, si la séparation des surfaces d'appui change avec le temps, cela tend à soumettre le film à des pressions sous ambiantes qui provoquent la cavitation (rupture de film d'huile). Dans des conditions où la séparation des surfaces est constante, la pression dans la région divergente est essentiellement constante et égale ou légèrement inférieure aux pressions ambiantes. Donc la distribution de la pression sera symétrique par rapport à la position de l'épaisseur minimale de film.

La théorie du film d'huile hydrodynamique de Reynolds est entièrement acceptée et vérifiée par de nombreux tests. Si les conditions aux limites sont connues, l'équation de lubrification hydrodynamique des films minces peut être résolue exactement ou par des méthodes numériques si toutes les pressions dérivées sont positives, la solution est valide ; mais si une pression est négative et délivre la cavitation, la solution n'est pas valide et doit être rejetée. Ensuite, d'autres conditions aux limites sont nécessaires pour relier la région du film d'huile à la région de cavitation. Dans la plupart des cas pratiques, les pressions sous ambiantes peuvent être négligées et la pression de cavitation peut être supposée la pression de film d'huile la plus basse.

### 3 Théorie de la lubrification hydrodynamique

Dans cette partie nous déterminons l'équation de la lubrification hydrodynamique en premier lieu, en considérant un palier circulaire lubrifié par un fluide visqueux. En deuxième lieu nous essayons de résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux limites appropriés.

L'équation de Reynolds, compte tenu des conditions cinématiques et géométrique, est déduite à partir des équations de la mécanique des milieux continus appliquées à un fluide newtonien :

- **Loi de comportement pour un fluide newtonien incompressible :**

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{s} \quad \text{(III-1)}$$

$\bar{\sigma}$  : Représente tenseur des contraintes

$(-p\bar{I})$  : Représente la pression hydrostatique

$\bar{s} = 2\mu D$ : Désigne le tenseur des contraintes visqueuse (déviateur des contraintes)

- **Conservation de quantité de mouvement :**

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \nabla \cdot \bar{\sigma} + \vec{f}_V \quad \text{(III-2)}$$

$\rho$  : désigne la masse volumique

$\vec{f}_V$  : Forces volumiques

- **L'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible**

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{(III-3)}$$

#### 3-1 Paliers lisses

Les paliers lisses sont les plus simples, constitués d'un arbre en acier tournant dans un alésage en bronze en présence du lubrifiant, on les rencontre généralement dans les moteurs thermiques, les compresseur, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc [11, 15].

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre généralement en acier de rayon  $R_a$  et le coussinet en bronze ou en acier réglé de rayon  $R_c$  et de longueur  $L$ . Ainsi un palier lisse peut être schématisé par deux cercles excentrés de rayon voisins. Il est caractérisé par trois grandeurs : le jeu radial  $C = R_c - R_a$ , le rapport  $R/C$  (ou le jeu relatif) et le rapport  $L/D$  de la longueur au diamètre du palier. La figure III 1 représente les trois phases observées lors de mise en route sous charge d'un palier. Les points  $O_a$  et  $O_c$  représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet, tandis que  $W$  désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre. A l'arrêt (fig III.1-(a)), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance  $O_c O_a$  est égale au jeu radial  $C$ . Au démarrage (fig III.1-(b)), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime

est dit mixte, le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y'a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge (fig.III 1-(c)). Pour une vitesse de rotation stable, et une charge  $W$  constante, le centre de l'arbre  $O_a$  occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet. Si le torseur des forces extérieures se réduit à une force unique  $\vec{w}$  qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles. Deux paramètres sont nécessaires pour positionner  $O_a$  par rapport à  $O_c$ , on utilise la distance habituellement appelée excentricité  $e = O_a O_c$  et l'angle que fait la direction de la charge  $\vec{w}$  avec la ligne des centres  $O_a O_c$  appelé angle de calage  $\phi$ .

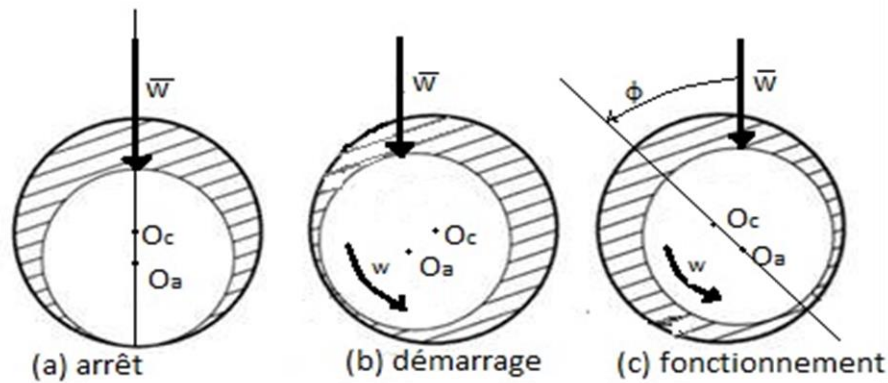


Figure III-1 : Schématisation d'un palier lisse

### 3-2 Epaisseur du film lubrifiant

Considérons une section droite du palier (figure III-2). Un point  $M$  appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire :

$\theta = (\overrightarrow{O_a A}, \overrightarrow{O_a M})$  ; L'épaisseur du film est  $h$  :

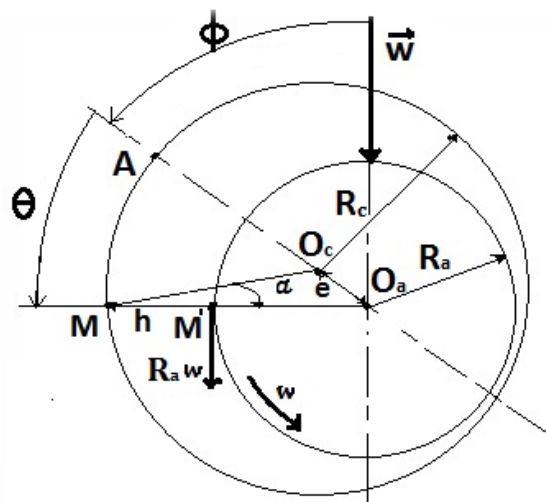


Figure III-2 : Section droite du palier

Où :

$$h = O_a M - R_a = C(1 + \eta \cos \theta) \quad (\text{III-4})$$

avec :  $\eta = \frac{e}{C}$  varie de 0 à 1, représente l'excentricité relative

Lorsque  $\theta = \pi$ ,  $h$  est minimum c'est à dire que :

$$h_{\min} = C(1 - \eta) = e_t \quad (\text{III-5})$$

Tel que  $e_t$  désigne l'entrefer minimum.

On pose

$$\varepsilon = \frac{C}{R_a} \quad (\text{III-6})$$

Les rayons  $R_a$  et  $R_c$  étant très voisins ( $(R_c - R_a)/R_a \cong 10^{-3}$ ), on peut donc négliger la courbure du film et développer l'arbre et l'assimiler à un plan.

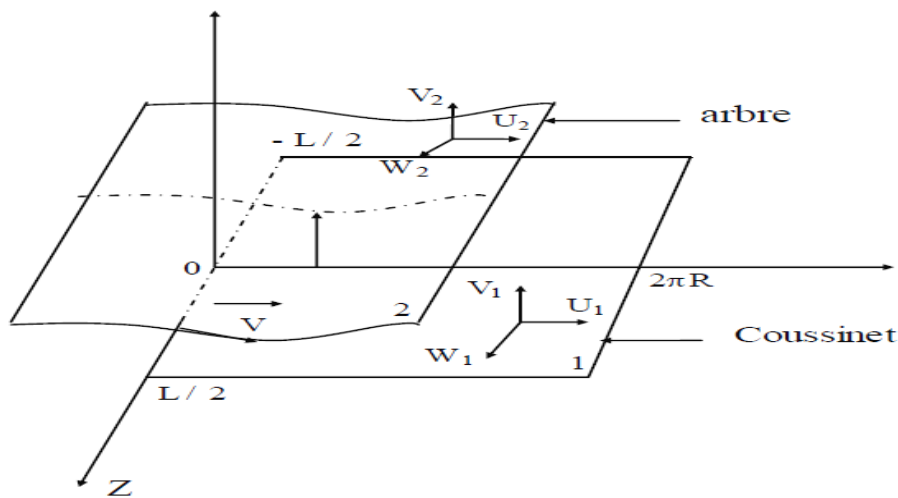


Figure III-3 : palier développé

### 3-3 Considérations cinématiques et géométriques

L'équation de lubrification hydrodynamique de Reynolds est posée en respectant les hypothèses suivantes :

- **Considérations cinématiques:**

1/ Le milieu est continu.

2/ Le fluide est newtonien.

3/ L'écoulement est laminaire, isotherme et permanent.

4/ Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact.

5/ les forces massiques extérieures sont négligeables.

6/ Les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité. Ce qui est vérifié pour autant que l'écoulement est laminaire.

- **Considérations géométriques:**

7/ Le palier est infiniment long, (écoulement plan)

8/ La courbure générale de contact est négligée.

9/ l'épaisseur du film mesurée dans la direction Oy est toujours très faible devant les autres dimensions du contact ; c'est l'hypothèse de la base de la lubrification.

### **3-4 Equations de Navier- Stockes bidimensionnelles**

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est grand, on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique ce calcul s'applique aux paliers tels que L/D>4. On se ramène alors à un écoulement bidimensionnel.

Les équations de continuité (III-2) et de quantité de mouvement (III-3) se ramènent à :

- **Equation de continuité :** 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(III-7)}$$

- **Equations de quantité de mouvement (équations de Navier-Stockes) :**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \quad \text{(III-8)}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \quad \text{(III-9)}$$

### **3-5 Equations de mouvement adimensionnelles**

Afin de rendre les équations (III-7), (III-8) et (III-9) adimensionnelles on considère les variables suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= R\bar{x} \\ y &= C\bar{y} \\ u &= U\bar{u} \\ v &= V\bar{v} \\ p &= p_a + \Delta p \bar{p} \end{aligned} \right| \quad \text{(III-10)}$$

## Chapitre III : Etude préliminaire de la cavitation en milieu newtonien

---

Avec :  $U$  : Représente la vitesse de l'arbre, soit :  $U = \omega R_a$ ,

$P_a$ : Pression d'alimentation

$R_a$ : Rayon de l'arbre

$C$ : Jeu radial entre l'arbre et le coussinet,

$V$ : Echelle caractéristique associée aux vitesses radiales induites par la variation de l'entrefer,

$\Delta p$  : Echelle caractéristique associée à la pression,

### Détermination de l'échelle caractéristique des vitesses radiales $V$

En utilisant l'équation de continuité (III-7) et (III-10), on obtient :

$$\frac{U}{R} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{V}{C} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \quad (\text{III-11})$$

#### Remarque :

Tenant compte de principe de moindre dégénérescence on peut écrire :

$$V = U \frac{C}{R_a} \quad (\text{III-12})$$

En posant :  $\varepsilon = \frac{C}{R_a}$

On en déduit :  $V = \varepsilon U$  (III-13)

On obtient alors l'équation de continuité suivante qui conserve (III-7), c'est-à-dire un choix de  $V$ , qui correspond à une solution riche.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{III-14})$$

Ainsi, les équations de quantité de mouvement adimensionnelles s'écrivent :

$$\varepsilon \left( \frac{UC}{\nu} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\varepsilon \frac{\Delta p}{\rho U^2} \left( \frac{UC}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{III-15})$$

$$\varepsilon^3 \left( \frac{UC}{\nu} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\varepsilon \frac{\Delta p}{\rho U^2} \left( \frac{UC}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{III-16})$$

On en déduit des équations (III-15) et (III-16) le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{UC}{\nu} \quad (\text{III-17})$$

### 3-6 Equation de Reynolds

Tenant compte de l'expression du nombre de Reynolds (III-17), les équations (III-15) et (III-16) s'écrivent alors :

$$\varepsilon R_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\varepsilon \frac{\Delta p}{\rho U^2} R_e \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{III-18})$$

$$\varepsilon^3 R_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\varepsilon \frac{\Delta p}{\rho U^2} R_e \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (\text{III-19})$$

La condition de lubrification hydrodynamique suppose que :

$$\varepsilon \ll 1 \text{ et } \varepsilon R_e \ll 1 \quad (\text{III-20})$$

En utilisant l'hypothèse de lubrification hydrodynamique (III-20), les équations (III-18) et (III-19) deviennent :

$$0 = -\varepsilon \frac{\Delta p}{\rho U^2} R_e \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{III-21})$$

$$0 = -\varepsilon \frac{\Delta p}{\rho U^2} R_e \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{III-22})$$

Par ailleurs en tenant compte de principe de moindre dégénérescence nous posons :

$$\Delta p = \frac{\rho U^2}{\varepsilon R_e} \quad (\text{III-23})$$

Avec l'expression (III-23), les équations (III-21) et (III-22) conduisent finalement à :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{III-24})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{III-25})$$

Tenant compte des échelles caractéristiques (III-10), les équations (III-24) et (III-25) conduisent respectivement aux équations de Reynolds (III-26) et (III-27)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III-26})$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{III-27})$$

#### 3.6.1 Condition aux limites

Les conditions aux limites cinématique sont données par :

$$\begin{cases} y = 0 & \Leftrightarrow u = 0 \\ y = h & \Leftrightarrow u = U \end{cases} \quad (\text{III-28})$$

### 3.6.2 Le champ de vitesse

En intégrant l'équation (III-26) et en se servant des conditions aux limites (III-28), on obtient l'expression de la vitesse circonférentielle en fonction de gradient de pression qui est une inconnue de problème,

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h y) + \frac{Uy}{h} \quad (\text{III-29})$$

### 3.6.3 Le débit du fluide :

On évalue alors le débit en utilisant l'expression de champ de vitesse décrit par l'équation (III-29)

$$Q = \int_0^h u \, dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 + \frac{Uh}{2} \quad (\text{III-30})$$

Si  $h_m$  est la hauteur du film d'huile au point où la pression est maximale, c'est-à-dire que  $\frac{dp}{dx} = 0$ , le débit en ce point a pour expression

$$Q = \frac{Uh_m}{2} \quad (\text{III-31})$$

Compte tenu de la conservation du débit, on peut égaliser (III-30) et (III-31), on trouve l'expression de la pression hydrodynamique :

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \frac{h-h_m}{h^3} \quad (\text{III-32})$$

### 3.6.4 Champ de pression hydrodynamique :

En utilisant la coordonnée angulaire :

$$\theta = \frac{x}{R} \quad (\text{III-33})$$

En remplaçant  $h$  par son expression (III-4) dans l'équation (III-32), et en tenant compte de (III-33), on obtient:

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\mu RU}{C^2} \left\{ \frac{1}{(1-\eta \cos\theta)^2} - \frac{h_m}{C(1-\eta \cos\theta)^3} \right\} \quad (\text{III-34})$$

En intégrant l'expression (III-34) on aboutit

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{6\mu RU}{C^2} \left\{ \int \frac{d\theta}{(1+\eta \cos\theta)^2} - \frac{h_m}{C} \int \frac{d\theta}{(1+\eta \cos\theta)^3} \right\} + K \\ &= A(I_1 - \frac{h_m}{C} I_2) \end{aligned} \quad (\text{III-35})$$

$$\begin{cases} A = \frac{6\mu Ru}{c^2} \\ I_1 = \int \frac{1}{(1+\eta\cos\theta)^2} d\theta + K_1 \\ I_2 = \int \frac{1}{(1+\eta\cos\theta)^3} d\theta + K_2 \end{cases} \quad (\text{III-36})$$

Pour pouvoir intégrer  $I_1$  et  $I_2$ , nous utilisons le changement de variables de Sommerfeld défini par :

$$1 + \eta\cos\theta = \frac{1-\eta^2}{1-\eta\cos\psi} \quad (\text{III-37})$$

En dérivant l'expression (III-37) on obtient :

$$d\theta = -\frac{(1-\eta^2)\sin\psi}{(1-\eta\sin\psi)^2\sin\theta} d\psi = \frac{\sqrt{(1-\eta^2)}}{(1-\eta\sin\psi)} d\psi \quad (\text{III-38})$$

Tenant compte de (III-37) et (III-38), on peut écrire alors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(1+\eta\cos\theta)^2} d\theta + K_1 = \int \left(\frac{1-\eta\cos\psi}{1-\eta^2}\right)^2 \frac{\sqrt{(1-\eta^2)}}{(1-\eta\cos\psi)} d\psi + K_1 \\ &= \frac{1}{(1-\eta^2)^{3/2}} [\psi - \eta\sin\psi] + K_1 \end{aligned} \quad (\text{III-39})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(1+\eta\cos\theta)^3} d\theta + K_2 = \int \left(\frac{1-\eta\cos\psi}{1-\eta^2}\right)^3 \frac{\sqrt{(1-\eta^2)}}{(1-\eta\cos\psi)} d\psi + K_2 \\ &= \int \frac{(1-\eta\cos\psi)^2}{(1-\eta^2)^{5/2}} d\psi + K_2 \\ I_2 &= \frac{1}{(1-\eta^2)^{5/2}} \int (1 - 2\eta\cos\psi + \eta^2\cos^2\psi) d\psi + K_2 \end{aligned} \quad (\text{III-40})$$

L'intégration de  $I_2$  donne:

$$I_2 = \frac{1}{(1-\eta^2)^{5/2}} \left[ \psi - 2\eta\sin\psi + \frac{\eta^2\psi}{2} + \frac{\eta^2\cos\psi\sin\psi}{2} \right] + K_2 \quad (\text{III-41})$$

On aboutit finalement à l'expression finale de la distribution de la pression hydrodynamique suivante :

$$P(\psi) = \frac{6\mu RaU}{c^2(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \psi - \eta\sin\psi - \frac{h_m}{c} \frac{[\psi - 2\eta\sin\psi + \eta^2\psi/2 + \eta^2\sin\psi\cos\psi/2]}{(1-\eta^2)} \right\} + K \quad (\text{III-42})$$

### 3-7 Solution de Sommerfeld

Pour commencer les calculs dans cette dernière expression, nous calculons d'abord la constante  $\frac{h_m}{c}$  en utilisant bien plus simplement le fait que  $P(\psi)$  est une fonction trigonométrique, plus précisément en considérant la figure (III-2), par exemple la pression en un point du « coin d'huile » ne doit pas avoir changé après rotation de l'arbre de  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ou plus simplement exprimée par :

$$P(\theta) = P(\theta + 2k\pi) \text{ Ou } P(\psi) = P(\psi + 2k\pi),$$

$$\text{C'est-à-dire que } P(\psi) - P(\psi + 2k\pi) = 0 \quad (\text{III-43})$$

En injectant (II-43) dans (II-42), on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\eta^2)^{3/2}} \{ \psi - \eta \sin \psi - (\psi + 2k\pi) - \eta \sin(\psi + 2k\pi) \} - \\ & \frac{h_m}{c} \frac{1}{(1-\eta^2)^{5/2}} \left\{ \begin{array}{l} \psi - 2\eta \sin \psi + \eta^2 \psi / 2 + \eta^2 \cos \psi \sin \psi / 2 - \\ \left[ (\psi + 2k\pi) - 2\eta \sin(\psi + 2k\pi) + \right. \\ \left. \eta^2 \cos(\psi + 2k\pi) \sin(\psi + 2k\pi) / 2 \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (\text{III-44}) \end{aligned}$$

De (III-44), il vient :

$$2k\pi \left\{ \frac{h_m}{c} \frac{(2+\eta^2)}{2(1-\eta^2)^{5/2}} - \frac{1}{(1-\eta^2)^{3/2}} \right\} = 0 \quad (\text{III-45})$$

Pour en déduire finalement :

$$\frac{h_m}{c} = \frac{2(1-\eta^2)}{(2+\eta^2)} \quad (\text{III-46})$$

En injectant (III-46) dans (III-42), on obtient une expression plus simple de la distribution de la pression hydrodynamique, soit :

$$\begin{aligned} P(\psi) &= \frac{6\mu Ra U}{c^2 (1-\eta^2)^{3/2}} \left\{ \psi - \eta \sin \psi - \frac{[2\psi - 4\eta \sin \psi + \eta^2 \psi + \eta^2 \sin \psi \cos \psi]}{(2+\eta^2)} \right\} + K \\ &= \frac{6\mu Ra U}{c^2 (1-\eta^2)^{3/2}} \left\{ \frac{2\eta - \eta^3}{(2+\eta^2)} - \frac{\eta^2 \cos \psi}{(2+\eta^2)} \right\} \sin \psi + K \quad (\text{III-47}) \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable qui conduit à exprimer  $\psi$ , soit :

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \frac{\eta + \cos\theta}{1 + \eta\cos\theta} \\ \sin\psi &= \frac{\sqrt{(1-\eta^2)}}{1 + \eta\cos\theta} \sin\theta\end{aligned}\quad (\text{III-48})$$

On peut alors exprimer (III-47) en fonction de  $\theta$  défini suivant la figure (III-2) :

$$P(\theta) = \frac{6\mu RaU}{C^2} \frac{\eta}{1 + \eta\cos\theta} \left\{ \frac{2 + \eta\cos\theta}{(2 + \eta^2)(1 + \eta\cos\theta)} \right\} \sin\theta + K \quad (\text{III-49})$$

- **Différence de pression relativement à l'amont (et l'aval) :**

La constante  $K$  correspond aux conditions aux limites amont ou aval. L'expression de la distribution de pression (III-49) n'est valable que dans les conditions de « coin d'huile » (espace confiné), les pressions de part et d'autre du « coin d'huile », c'est-à-dire en amont et en aval, sont donc égales.

Il s'ensuit que la constante  $K$  représente la pression  $P_a$  à l'amont ou à l'aval est en quelque sorte une pression d'alimentation, En fait, on va tout simplement mesurer la différence de pression entre l'amont (ou l'aval) et un point de l'espace confiné, c'est-à-dire :

$$P(\theta) - P_a = \Delta P(\theta) = \frac{6\mu RaU}{C^2} \frac{\eta}{1 + \eta\cos\theta} \left\{ \frac{2 + \eta\cos\theta}{(2 + \eta^2)(1 + \eta\cos\theta)} \right\} \sin\theta \quad (\text{III-50})$$

Si on tient compte que la vitesse  $U$  s'exprime par  $U = \omega Ra$ ,  $\omega$  étant la vitesse de rotation de l'arbre, et, l'expression (III-50) devient :

$$\Delta P(\theta) = \frac{6\mu\omega}{\varepsilon^2} \frac{\eta}{1 + \eta\cos\theta} \left\{ \frac{2 + \eta\cos\theta}{(2 + \eta^2)(1 + \eta\cos\theta)} \right\} \sin\theta \quad (\text{III-51})$$

## 4. Principe de la cavitation

### 4.1 Coefficient de pression et nombre de cavitation

Le coefficient de pression  $C_p$  est défini ici par :

$$C_p = \frac{P - P_a}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\Delta P(\theta)}{\frac{1}{2}\rho(\omega Ra)^2} \quad (\text{III-52})$$

Tel que  $P_a$  : Représente la pression d'alimentation.

$U$  : Vitesse de rotation de l'arbre.

Le nombre de cavitation  $\sigma$  est défini comme suit :

### Chapitre III : Etude préliminaire de la cavitation en milieu newtonien

$$\sigma = \frac{P_a - P_v}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (\text{III-53})$$

Il y'a cavitation si:  $C_p = -\sigma$  (condition de cavitation)

Où U désigne la vitesse de rotation de l'arbre qui est égale à  $\omega Ra$

A l'aide de (III-51) on déduit l'expression de la distribution de  $C_p$ , soit :

$$C_p = \frac{12\nu}{\varepsilon^2 Ra^2 \omega} \frac{\eta}{1+\eta \cos\theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos\theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos\theta)} \right\} \sin\theta \quad (\text{III-54})$$

Où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  désigne la viscosité cinématique

En peut aussi exprimer l'expression (III-54) en fonction de nombre de Reynolds soit :

$$C_p = \frac{12}{\varepsilon^2 Re} \frac{\eta}{1+\eta \cos\theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos\theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos\theta)} \right\} \sin\theta \quad (\text{III-55})$$

Tel que :

$$Re = \frac{\omega Ra^2}{\nu} \quad (\text{III-56})$$

D'après l'expression (III-5) :

$$C = \frac{e_t}{(1-\eta)} \quad (\text{III-57})$$

On remplace (III-57) dans l'expression (III-6) on obtient :

$$\varepsilon = \frac{1}{(1-\eta)} \frac{e_t}{Ra} \quad (\text{III-58})$$

En injectant l'expression (III-58) dans (III-54) soit :

$$C_p = \frac{12(1-\eta)^2 Ra}{Re_t e_t} \frac{\eta}{1+\eta \cos\theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos\theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos\theta)} \right\} \sin\theta \quad (\text{III-59})$$

Tel que  $Re_t$  désigne le nombre de Reynolds dans l'entrefer défini comme suite :

$$Re_t = \frac{e_t \omega Ra}{\nu} \quad (\text{III-60})$$

## Chapitre III : Etude préliminaire de la cavitation en milieu newtonien

### 4.2 Analyse de la courbe de distribution de $C_p$ dans l'espace confiné

Pour voir la distribution de  $C_p$  dans l'espace confiné, nous considérons un palier de pied de bielle d'un moteur thermique lubrifié par l'huile SAE 10w40. En premier lieu on fixe  $\eta$  à la valeur de 0.5 et on trace la courbe pour quatre vitesses de rotation. En deuxième lieu on prend deux vitesses séparément : 500 et 5000 trs/min et on trace les courbes de  $C_p$  en variant  $\eta$ . Les données de référence sont représentées dans le tableau III-1 :

Tableau III-1 : Données de référence

Rayon du palier	25	mm
Jeu radial	50	$\mu\text{m}$
Vitesses de rotation	500, 1000, 3000, 5000	trs/min
Pression d'alimentation	1	Mpa
Viscosité dynamique à 100°C	0.01	Pa.s
Masse volumique de lubrifiant	880	$\text{Kg}/\text{m}^3$
Viscosité cinématique	$11,36.10^{-6}$	$\text{m}^2/\text{s}$
Pression d'évaporation de l'huile	657.89	Pa

La variation de l'entrefer  $e_t$  en fonction de  $\eta$  conformément à la relation (III-5) est donnée dans le tableau suivant :

Tableau III-2 : Variation de l'entrefer  $e_t$  en fonction de  $\eta$

$\eta$	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
$e_t(\mu\text{m})$	5	15	25	35	45

Tableau III-3 : Valeurs de  $C_p$  pour différentes vitesses et pour  $\eta=0.5$

N $\theta$	$C_p (\eta=0.5)$				$-\sigma = -\frac{P_a - P_{vap}}{\frac{1}{2}\rho(\omega Ra)^2}$			
	500 (trs/min)	1000 (trs/min)	3000 (trs/min)	5000 (trs/min)	500 (trs/min)	1000 (trs/min)	3000 (trs/min)	5000 (trs/min)
0	0	0	0	0	-1338.722	-334.479	-37.156	-13.377
30	175,059	87,510	29,166	13,710				
60	368,521	184,220	61,397	28,861				
90	591,016	295,443	98,466	46,287				
120	796,188	398,006	132,649	62,355				
150	720,209	360,025	119,990	56,405				
180	0	0	0	0				
210	-720,209	-360,025	-119,990	-56,405				
240	-796,188	-398,006	-132,649	-62,355				
270	-591,016	-295,443	-98,466	-46,287				
300	-368,521	-184,220	-61,397	-28,861				
330	-175,059	-87,510	-29,166	-13,710				
360	0	0	0	0				

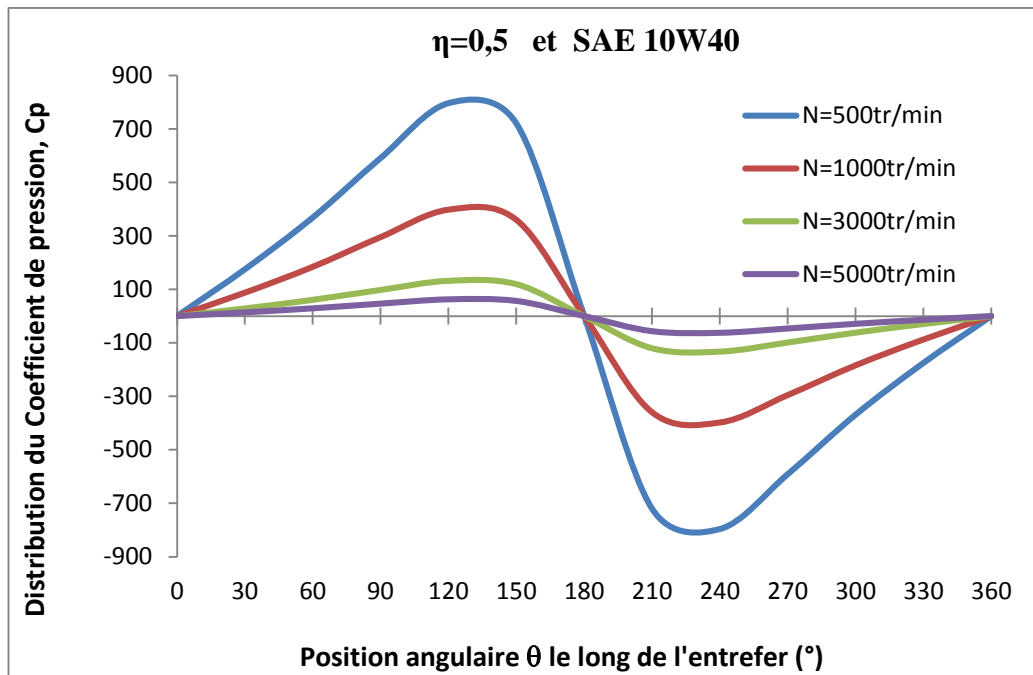


Figure III-4 : Variation de Cp pour différentes vitesses de rotation et pour  $\eta = 0.5$

Le tableau III-3 et la figure III-4 donnent la variation de Cp pour quatre vitesses de rotation 500trs/min, 1000trs/min, 3000trs/min et 5000trs/min et pour  $\eta = 0.5$ . On remarque que Cp diminue quand la vitesse augmente. En calculant le nombre de cavitation correspondant à chaque vitesse on constate que la condition de cavitation n'est pas satisfaite pour 500trs/min tandis que, à partir de 1000trs/min on remarque l'apparition de la cavitation. Dans ce cas la valeur de l'entrefer qui correspond à la valeur de  $\eta$  est 25  $\mu\text{m}$ .

Tableau III-4 : Valeurs de Cp pour une vitesse de 500trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

		Cp					$\sigma = -\frac{P_a - P_{vap}}{\frac{1}{2}\rho(\omega Ra)^2}$
$\eta$	$\theta$	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	
	0	0	0	0	0	0	-1338.722
	30	87,015	188,906	175,059	135,908	58,456	
	60	430,003	417,642	368,521	268,773	106,530	
	90	852,199	748,003	591,016	381,805	132,311	
	120	1890,810	1264,915	796,188	423,328	123,789	
	150	5344,722	1680,839	720,209	303,173	75,861	
	180	0	0	0	0	0	
	210	-5344,722	-1680,839	-720,209	-303,173	-75,861	
	240	-1890,810	-1264,915	-796,188	-423,328	-123,789	
	270	-852,199	-748,003	-591,016	-381,805	-132,311	
	300	-430,003	-417,642	-368,521	-268,773	-106,530	
	330	-87,015	-188,906	-175,059	-135,908	-58,456	
	360	0	0	0	0	0	

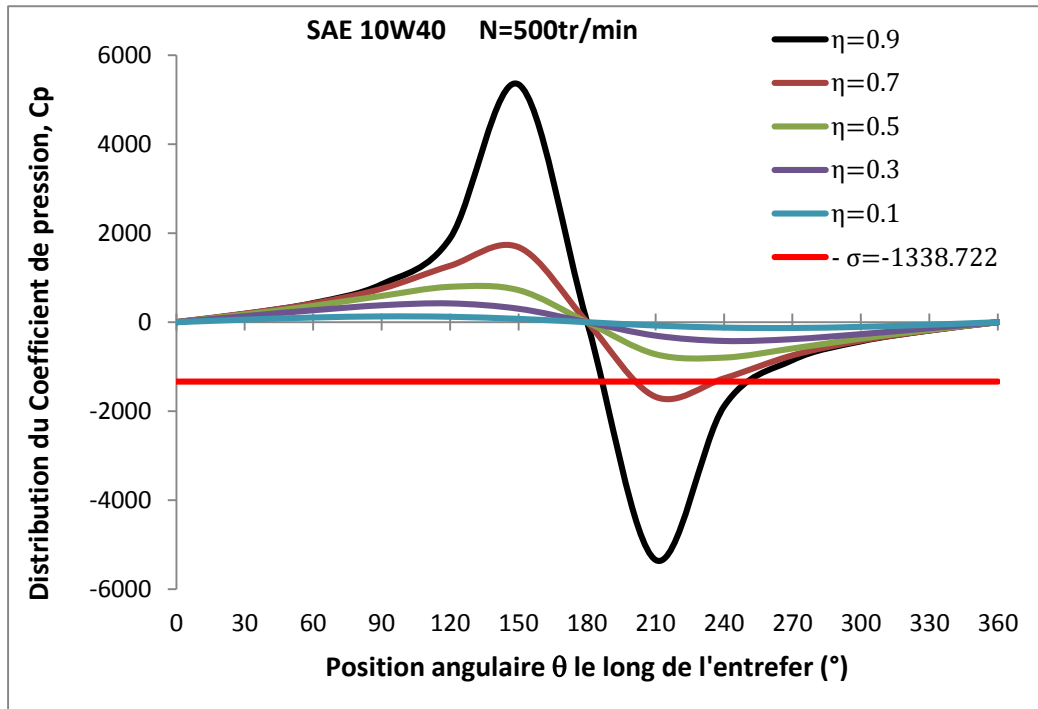


Figure III-5 : Variation de Cp pour une vitesse de 500trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

Tableau III-5 : Valeurs de Cp pour une vitesse de 5000trs/min et différentes valeurs de  $\eta$

		Cp					$\sigma = -\frac{P_a - P_{vap}}{\frac{1}{2}\rho(\omega Ra)^2}$
$\theta \backslash \eta$	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	-13.722	
0	0	0	0	0	0		
30	14,638	14,788	13,710	10,643	4,578		
60	33,658	32,695	28,861	21,047	8,344		
90	66,703	58,557	46,287	29,898	10,363		
120	147,996	99,024	62,355	33,150	9,695		
150	418,339	131,584	56,405	23,741	5,942		
180	0	0	0	0	0		
210	-418,339	-131,584	-56,405	-23,741	-5,942		
240	-147,996	-99,024	-62,355	-33,150	-9,695		
270	-66,703	-58,557	-46,287	-29,898	-10,363		
300	-33,658	-32,695	-28,861	-21,047	-8,344		
330	-14,638	-14,788	-13,710	-10,643	-4,578		
360	0	0	0	0	0		

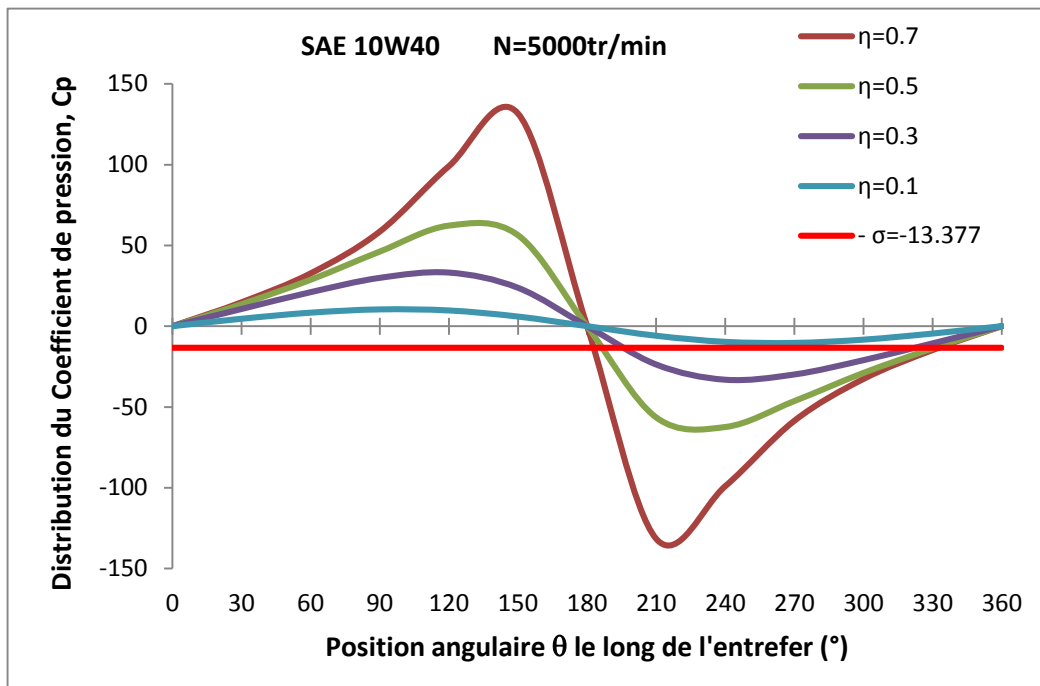


Figure III-6: Variation de Cp pour une vitesse de 5000tr/min et différentes valeurs de  $\eta$

Les tableaux III-4, III-5, et les figure III-5, III-6 donnent la répartition de Cp pour deux vitesses de rotation 500tr/min et 5000tr/min pour différentes valeurs de  $\eta$ . On voit que Cp augmente en augmentant  $\eta$  et on constate aussi que pour une vitesse de 500tr/min la cavitation apparait pour  $\eta = 0,7$ , ce qui correspond à un entrefer minimum supérieur à  $15\mu\text{m}$ . Si on augmente la vitesse jusqu'a 5000tr/min on remarque que la cavitation apparait pour  $\eta = 0.3$  ce qui nous impose un entrefer minimum supérieur à  $35\mu\text{m}$ .

A la fin, pour voir l'influence de la viscosité sur le phénomène étudié nous prenons quatre lubrifiants de viscosité différentes à savoir : l'eau, SAE 10W, SAE 0W20 et SAE 10W40 et on calcule la valeur minimale de  $C_{p\text{min}}$  ainsi que le nombre de cavitation  $\sigma$  tout en fixant la vitesse de rotation de l'arbre à 1000tr/min et le  $\eta$  à 0.5. Les caractéristique des lubrifiants et les valeurs de  $C_{p\text{min}}$  et  $(-\sigma)$  sont données dans les tableaux III-6 et III-7.

Tableau III-6 : Caractéristiques des lubrifiants utilisés

Lubrifiant	Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)
Eau	1000	$10^{-6}$ à 20°C
SAE 10W	881	$5,8 \cdot 10^{-6}$ à 80°C
SAE 0W20	841	$8,7 \cdot 10^{-6}$ à 80°C
SAE 10W40	872.9	$14,5 \cdot 10^{-6}$ à 80°C

Tableau III-7 : Variation de Cp et  $(-\sigma)$  en fonction de la viscosité de lubrifiant

Lubrifiant	$C_{p\text{min}}$	$-\sigma$
Eau	-27.446	-291.475
SAE 0W20	-238.792	-347.166
SAE 10W	-159.195	-331.404
SAE 10W40	-398.005	-334.479

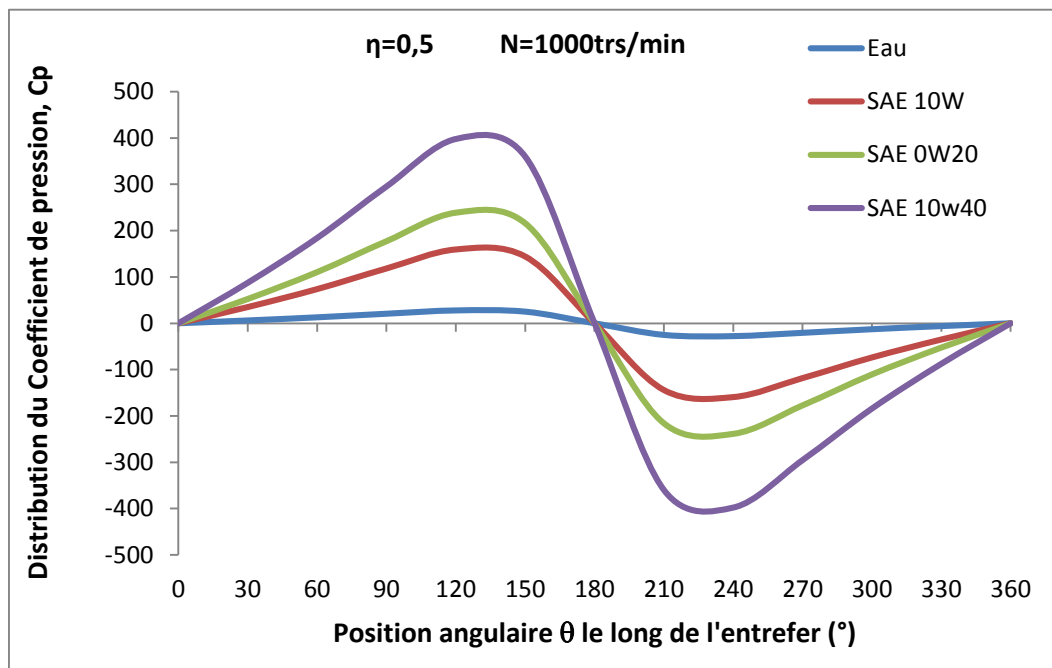


Figure III-7 : Variation de  $C_p$  en fonction de la viscosité de lubrifiant

Le tableau III-7 et la figure III-7 nous donnent l'influence de la viscosité sur l'évolution de  $C_p$  et l'apparition de la cavitation, on remarque que l'augmentation de la viscosité fait augmenter le coefficient de pression  $C_p$ . Concernant la condition de cavitation, elle n'est satisfaite que pour la SAE 10W40

### Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de la cavitation dans des paliers circulaires en lubrification hydrodynamique par des fluides newtoniens. Nous avons pour cela déterminé l'expression de  $C_p$  et avons pu à travers l'analyse identifier les paramètres qui influent sur l'apparition de la cavitation que sont alors les dimensions du rayon de l'arbre, celles de l'entrefer, la vitesse de rotation de l'arbre et enfin la viscosité du lubrifiant.

## 1 Introduction

Dans le chapitre III nous avons abouti à des résultats relatifs à la distribution du coefficient de pression dans le film lubrifiant d'un palier de pied de bielle d'un moteur diesel et avons traité un exemple d'un fluide newtonien tel que l'huile de lubrification SAE 10W40, pour différentes vitesses de rotation de l'arbre de transmission et différents entrefers à différentes valeurs de la vitesse de rotation et l'excentricité relative. Ceci nous a permis de mettre en évidence l'importance de la vitesse de rotation de l'arbre, de la viscosité de lubrifiant, de l'excentricité relative et de l'entrefer sur l'apparition de la cavitation dans le film lubrifiant.

Dans ce chapitre, nous avons adopté la même démarche de calculs et d'analyse que le chapitre III, sauf que dans ce cas le lubrifiant est considéré viscoélastique, avec donc l'élasticité du milieu comme paramètre supplémentaire. Ceci est d'autant plus important que beaucoup d'additifs synthétiques composent désormais les huiles modernes.

Donc pour ce faire nous considérons un fluide lubrifiant dont le comportement viscoélastique peut être décrit par le modèle de Maxwell. L'écoulement dans le palier est tel que schématisé dans les figures III-2 et III-3

## 2 Développement des équations constitutives

Soit les équations constitutives de fluide de Maxwell données par (II-5) :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (IV-1)$$

$$\bar{\tau} + \lambda \frac{D\bar{\tau}}{Dt} = 2\mu\bar{D} \quad (IV-2)$$

$\bar{\tau}$  : Tenseur des contraintes ;

$\lambda$  : Temps de relaxation ;

$\frac{D\bar{\tau}}{Dt}$  : Dérivée particulaire ;

$\mu$  : Viscosité du fluide ;

$\bar{D}$  : Tenseur des taux de déformation.

### • Développement des différents termes de l'expression (IV-2)

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (IV-3)$$

$$\frac{D\bar{\tau}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{V}) \bar{\tau} \quad (IV-4)$$

Tel que  $(\vec{\nabla} \vec{V})$  désigne le tenseur gradient de vitesse, et sa transposée  $(\vec{\nabla} \vec{V})^T$  sont définis comme suit :

$$(\vec{\nabla V}) = \bar{L} = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (IV-5)$$

$$(\vec{\nabla V})^T = \bar{L}^T = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{yx} & L_{zx} \\ L_{xy} & L_{yy} & L_{zy} \\ L_{xz} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (IV-6)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \left( (\vec{\nabla V}) + (\vec{\nabla V})^T \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (IV-7)$$

- **Expressions des composantes des équations constitutives**

En utilisant les expressions (IV-3) à (IV-7), les équations constitutives de fluide de Maxwell s'écrivent :

$$\tau_{xx} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} \right) = 2\mu D_{xx} \quad (IV-8)$$

$$\tau_{xy} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = 2\mu D_{xy} \quad (IV-9)$$

$$\tau_{xz} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 2\mu D_{xz} \quad (IV-10)$$

$$\tau_{yy} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial z} \right) = 2\mu D_{yy} \quad (IV-11)$$

$$\tau_{yz} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 2\mu D_{yz} \quad (IV-12)$$

$$\tau_{zz} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} + u \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial y} + w \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = 2\mu D_{zz} \quad (IV-13)$$

### 3 Equations de mouvement

Les équations générales du mouvement sont données par l'équation de conservation de la masse (III-3) et l'équation de quantité de mouvement (III-2),

- **Equation de continuité :** 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (IV-14)$$

- **Equation de quantité de mouvement :**

La projection de l'équation de quantité de mouvement (III-2) sur les axes du mouvement, compte tenu de (IV-1), nous donne :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \quad (IV-15)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (IV-16)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z \quad (IV-17)$$

### 4 Application au cas d'un palier infiniment long

En considérant un palier infiniment long, ceci correspond à un écoulement bidimensionnel et les variables de l'écoulement sont x et y, donc les équations de mouvement (IV-14) à (IV-17) et les équations (IV-8) à (IV-13), se réduisent à :

- **Equation de continuité :** 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (IV-18)$$

- **Equations de quantité de mouvement :**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (IV-19)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (IV-20)$$

- **Equations constitutives:**

$$\tau_{xx} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (IV-21)$$

$$\tau_{xy} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (IV-22)$$

$$\tau_{yy} + \lambda \left( u \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + v \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (IV-23)$$

## 5 Equations adimensionnelles

Afin d'adimensionnaliser les équations (IV-18) à (IV-23) on considère les échelles caractéristiques données par (III-10), en relation avec la géométrie (figures. III-2 et III-3) et la cinématique de l'écoulement envisagé, puis on procède de la même façon que dans le chapitre III. On obtient, en plus des équations (III-10) à (III-13), les équations constitutives et de la quantité de mouvement adimensionnelles.

On pose :

$$\tau_{ij} = \Sigma_{ij} \bar{\tau}_{ij} \quad (IV-24)$$

Avec  $\Sigma_{ij}$  : Echelles des contraintes à déterminer

### 5-1 Equations constitutives adimensionnelles

En injectant les équations (IV-24) et (III-10) dans le système d'équations constitutives (IV-21) à (IV-23), on obtient :

$$\Sigma_{xx} \left( \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon \frac{\lambda U}{c} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = 2\varepsilon \frac{\mu U}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (IV-25)$$

$$\Sigma_{xy} \left( \bar{\tau}_{xy} + \varepsilon \frac{\lambda U}{c} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = \frac{\mu U}{c} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (IV-26)$$

$$\Sigma_{yy} \left( \bar{\tau}_{yy} + \varepsilon \frac{\lambda U}{c} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = 2\varepsilon \frac{\mu U}{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-27)$$

Il vient de cette adimensionnalisation le groupe adimensionnel suivant :

Le nombre de Deborah :

$$D_e = \frac{\lambda U}{c}$$

En introduisant ce groupe adimensionnel dans les équations constitutives précédentes, celles-ci se simplifient et s'écrivent :

$$\Sigma_{xx} \left( \bar{\tau}_{xx} + \varepsilon D_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = 2\varepsilon \frac{\mu U}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (IV-28)$$

$$\Sigma_{xy} \left( \bar{\tau}_{xy} + \varepsilon D_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = \frac{\mu U}{c} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (IV-29)$$

$$\Sigma_{yy} \left( \bar{\tau}_{yy} + \varepsilon D_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = 2\varepsilon \frac{\mu U}{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-30)$$

D'après les équations adimensionnelles (IV-28) à (IV-30) on peut poser :

$$\Sigma_{xx} = \mu \frac{U}{C} D_e \quad \Sigma_{xy} = \mu \frac{U}{C} \quad \Sigma_{yy} = \varepsilon \mu \frac{U}{C} \quad (IV-31)$$

On remplace par les échelles des contraintes (IV-31) dans les équations constitutives (IV-28) à (IV-30) on trouve :

$$\bar{\tau}_{xx} + \varepsilon D_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{y}} \right) = 2\varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (IV-32)$$

$$\bar{\tau}_{xy} + \varepsilon D_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \quad (IV-33)$$

$$\bar{\tau}_{yy} + \varepsilon D_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \right) = 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-34)$$

## 5-2 Equations de quantité de mouvement adimensionnelles

On procède de la même façon que les équations constitutives et en injectant les échelles caractéristiques des contraintes (IV-31) dans les équations (IV-19), (IV-20), on obtient les équations de quantité de mouvement adimensionnelles suivantes :

$$\varepsilon \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\varepsilon \frac{\Delta p'}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \varepsilon D_e \left( \frac{v}{UC} \right) \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{v}{UC} \right) \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-35)$$

$$\varepsilon^2 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\Delta p'}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{y}} + \varepsilon \left( \frac{v}{UC} \right) \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon \left( \frac{v}{UC} \right) \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-36)$$

Il vient de cette adimensionnalisation le groupe adimensionnel suivant :

Le nombre de Reynolds :  $R_e = \frac{UC}{\nu}$

En multipliant l'équation (IV-35) par le nombre de Reynolds ( $R_e$ ), et l'équation (IV-36) par le produit ( $\varepsilon R_e$ ), celles-ci s'écrivent :

$$\varepsilon R_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\Delta p' \frac{\varepsilon R_e}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}} + \varepsilon D_e \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-37)$$

$$\varepsilon^3 R_e \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\Delta p' \frac{\varepsilon R_e}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}} \quad (IV-38)$$

Le principe de moindre dégénérescence impose d'écrire :

$$\Delta p' = \frac{1}{\varepsilon R_e} \rho U^2 \quad (IV-39)$$

Tenant compte de (IV-39) et de l'hypothèse de lubrification (III-20), les équations (IV-37) et (IV-38) se simplifient et s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon D_e \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV-40})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{IV-41})$$

D'où les deux équations (IV-40) et (IV-41) se réduisent à :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon D_e \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{IV-42})$$

## 6 Résolution du système d'équations résultant

### 6.1 Linéarisation des équations.

Etant donné la complexité des équations finales de quantité de mouvement associées aux équations constitutives et tenant compte de l'hypothèse de lubrification hydrodynamique, nous considérons rechercher des solutions linéarisées. Ainsi, on pose les solutions associées aux champs de vitesse et de contraintes comme étant de forme suivantes en retenant seulement les termes d'ordre 0 et 1 [11] :

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \varepsilon D_e \bar{u}_1 + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad (\text{IV-43})$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \varepsilon D_e \bar{v}_1 + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad (\text{IV-44})$$

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \varepsilon D_e \bar{p}_1 + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad (\text{IV-45})$$

$$\bar{\tau}_{xx} = \bar{\tau}_{xx0} + \varepsilon D_e \bar{\tau}_{xx1} + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad (\text{IV-46})$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy0} + \varepsilon D_e \bar{\tau}_{xy1} + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad (\text{IV-47})$$

$$\bar{\tau}_{yy} = \bar{\tau}_{yy0} + \varepsilon D_e \bar{\tau}_{yy1} + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad (\text{IV-48})$$

On remplace par les équations (IV-43) à (IV-48) dans l'équation de continuité (IV-18), les équations constitutives (IV-32) à (IV-34), et l'équation de quantité de mouvement (IV-42), on obtient :

Système d'ordre zéro

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{IV-49})$$

$$\frac{d\bar{p}'_0}{d\bar{x}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{xy_0}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV-50})$$

$$\bar{\tau}_{xx_0} = 0 \quad (\text{IV-51})$$

$$\bar{\tau}_{xy_0} = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV-52})$$

$$\bar{\tau}_{yy_0} = 2 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV-53})$$

Système d'ordre un

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{IV-54})$$

$$\frac{d\bar{p}'_1}{d\bar{x}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{xy_1}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx_0}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{IV-55})$$

$$\bar{\tau}_{xx_1} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{\tau}_{xx_0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{\tau}_{xx_0}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{IV-56})$$

$$\bar{\tau}_{xy_1} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{\tau}_{xy_0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{\tau}_{xy_0}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV-57})$$

$$\bar{\tau}_{yy_1} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy_0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy_0}}{\partial \bar{y}} = 2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} \quad (\text{IV-58})$$

**6-2 Résolution des équations d'ordre zéro**

En injectant l'équation (IV-52) dans (IV-50), on obtient l'équation de Reynolds suivante

$$\frac{d\bar{p}'_0}{d\bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{IV-59})$$

On remarque à l'ordre zéro, l'équation (IV-59) est la même pour le cas d'un fluide newtonien

• **Conditions aux limites**

Les conditions aux limites cinématiques correspondantes au premier terme de la vitesse  $\bar{u}_0$ , s'écrivent :

$$\begin{array}{l|l} \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{u}_0 = 0 & \\ \bar{y} = \bar{h} \Rightarrow \bar{u}_0 = 1 & \end{array} \quad \text{(IV-60)}$$

En intégrant l'équation (IV-59), et en tenant compte des conditions aux limites (IV-60), on obtient le champ de vitesse adimensionnel suivant :

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}} \right) (\bar{y}^2 - \bar{h}\bar{y}) + \frac{\bar{y}}{\bar{h}} \quad \text{(IV-61)}$$

Le débit est donné par l'expression suivante :

$$Q = \int_0^h u \, dy \quad \text{(IV-62)}$$

En considérant un développement de débit Q en retenant seulement les termes d'ordre 0 et 1 :

$$Q = Q_0 + \varepsilon D_e Q_1 + 0((\varepsilon D_e)^2) \quad \text{(IV-63)}$$

On pose :

$$h_i = \frac{Q_i}{2C} \quad \text{(IV-64)}$$

Donc le débit de premier terme de la vitesse  $\bar{u}_0$  est donné par :

$$\bar{Q}_0 = \frac{Q_0}{UC} = \frac{h_0}{2C} = \int_0^{\bar{h}} \bar{u}_0 d\bar{y} = \left[ -\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}} \right] + \frac{\bar{h}}{2} \quad \text{(IV-65)}$$

D'où le premier terme du gradient de pression s'écrit :

$$\frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}} = \frac{6C^2}{h^2} - \frac{6C^2 h_0}{h^3} \quad \text{(IV-66)}$$

En injectant l'expression (IV-66) dans (IV-61), ce qui donne :

$$\bar{u}_0 = H\bar{y}^2 - L\bar{y} \quad \text{(IV-67)}$$

Tel que :

$$H = 3C^2 \left( \frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3} \right) \quad \text{(IV-68)}$$

$$L = C \left( \frac{3h_0}{h^2} - \frac{2}{h} \right) \quad \text{(IV-69)}$$

La composante  $\bar{v}_0$  de la vitesse est déterminée à partir de l'équation de continuité (IV-49) en tenant compte de (IV-67) à (IV-69) :

$$\bar{v}_0 = -\frac{1}{3} \frac{dH}{d\bar{x}} \bar{y}^3 - \frac{1}{2} \frac{dL}{d\bar{x}} \bar{y}^2 \quad (IV-70)$$

Avec :

$$\frac{dH}{d\bar{x}} = 3C^2 \left( -\frac{2}{h^3} - \frac{3h_0}{h^4} \right) \frac{dh}{d\bar{x}} \quad (IV-71)$$

$$\frac{dL}{d\bar{x}} = 2C \left( \frac{1}{h^2} - \frac{3h_0}{h^3} \right) \frac{dh}{d\bar{x}} \quad (IV-72)$$

### 6-3 Résolution des équations d'ordre un

Pour trouver les solutions d'ordre un de système d'équations (IV-54) à (IV-58), on remplace les contraintes d'ordre zéro par leurs expressions (IV-51) à (IV-53) dans (IV-56) à (IV-58), on trouve :

$$\bar{\tau}_{xx_1} = 0 \quad (IV-73)$$

$$\bar{\tau}_{xy_1} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{y}} - \left( \bar{u}_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{v}_0 \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (IV-74)$$

$$\bar{\tau}_{yy_1} = 2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} - 2 \left( \bar{u}_0 \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{v}_0 \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (IV-75)$$

En injectant les expressions (IV-51) et (IV-74) dans (IV-55), on trouve :

$$\frac{d\bar{p}_1}{d\bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{y}^2} - \left( \frac{\partial^3 \bar{u}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{u}_0 \frac{\partial^3 \bar{u}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{y}^2} + \bar{v}_0 \frac{\partial^3 \bar{u}_0}{\partial \bar{y}^3} \right) \quad (IV-76)$$

Ou bien sous cette forme :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{y}^2} = \left[ \frac{d\bar{p}_1}{d\bar{x}} - \frac{dL}{d\bar{x}} L \right] \quad (IV-77)$$

- **Condition aux limites cinématique**

Les conditions aux limites cinématiques du deuxième terme de la vitesse  $\bar{u}_1$  sont données comme suit :

$$\begin{array}{l} \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{u}_1 = 0 \\ \bar{y} = \bar{h} \Rightarrow \bar{u}_1 = 0 \end{array} \quad (IV-78)$$

Pour déterminer l'expression du champ de vitesse  $\bar{u}_1$ , on intègre l'expression (IV-77) et en se servant des conditions aux limites cinématiques (IV-78), on obtient :

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\bar{p}_1}{d\bar{x}} - \frac{dL}{d\bar{x}} L \right] \bar{y} (\bar{y} - \bar{h}) \quad (\text{IV-79})$$

L'expression de débit adimensionnel du deuxième terme de la vitesse  $\bar{u}_1$ :

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{UC} = \frac{h_1}{2C} = \int_0^{\bar{h}} \bar{u}_1 d\bar{y} = - \left[ \frac{d\bar{p}_1}{d\bar{x}} - \frac{dL}{d\bar{x}} L \right] \frac{\bar{h}^3}{12} \quad (\text{IV-80})$$

Donc on déduit le deuxième terme du gradient de pression :

$$\frac{d\bar{p}_1}{d\bar{x}} = \left( -6 \frac{C^2 h_1}{h^3} + \frac{dL}{d\bar{x}} L \right) \quad (\text{IV 81})$$

## 6-4 Solutions résultantes

### 6-4-1 Champ de vitesse résultant

La solution résultante  $\bar{u}$  de la vitesse s'écrit :

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \varepsilon D_e \bar{u}_1 = \xi_1 \bar{y}^2 + \xi_2 \bar{y} \quad (\text{IV 82})$$

Tel que

$$\xi_1 = H - 3\varepsilon D_e \frac{C^2 h_1}{h^3} = 3C^2 \left( \frac{1}{h^2} - \frac{h_e}{h^3} \right) \quad (\text{IV-83})$$

$$\xi_2 = L + 3\varepsilon D_e \frac{Ch_1}{h^2} = C \left( \frac{3h_e}{h^2} - \frac{2}{h} \right) \quad (\text{IV-84})$$

Avec

$$h_e = h_0 + \varepsilon D_e h_1 \quad (\text{IV 85})$$

Ou  $h_e$  désigne le facteur du débit résultant qui sera déterminé par la condition au limite sur les contraintes.

### 6-4-2 Champ de pression $\bar{p}'$ résultant

Le gradient de pression résultant est obtenu en combinant les équations (IV-45), (IV-66), (IV-81) et (IV-85), et faisant les approximations suivantes :  $H \approx \xi_1$  et  $L \approx \xi_2$  :

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{x}} + \varepsilon D_e \frac{d\bar{p}_1}{d\bar{x}} = \frac{6C^2}{h^2} - \frac{6C^2 h_e}{h^3} + \varepsilon D_e \xi_2 \frac{d\xi_2}{d\bar{x}} \quad (\text{IV-86})$$

L'intégration de l'équation (IV -84), nous donne l'expression de la pression résultante  $\bar{p}'$  :

$$\bar{p}' = 6C^2 \left[ \int \frac{d\bar{x}}{h^2} - h_e \int \frac{d\bar{x}}{h^3} \right] + \frac{1}{2} \varepsilon D_e \xi_2^2 + K \quad (IV-87)$$

En utilisant la coordonnée angulaire (III-33) et en remplaçant h par son expression (III-4) dans l'équation (IV -85), on obtient :

$$\bar{p}' = \left[ \int \frac{6d\theta}{(1+\eta\cos\theta)^2} - \frac{h_e}{C} \int \frac{6d\theta}{(1+\eta\cos\theta)^3} \right] + \frac{1}{2} \varepsilon D_e C^2 \left( \frac{9h_e^2}{h^4} - \frac{12h_e}{h^3} + \frac{4}{h^2} \right) + K \quad (IV-88)$$

Où K et  $\frac{h_e}{C}$  sont des constantes d'intégration qui seront déterminées à partir des conditions aux limites sur la pression hydrodynamique. Afin de pouvoir intégrer l'expression (IV-88), nous utilisons le changement de variable de Sommerfeld donné par (III-37).

Dans ce cas la pression  $p'$  s'écrit :

$$p' = \frac{\mu RaU}{C^2} \left\{ \frac{6}{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ \psi - \eta \sin\psi - \frac{h_e}{C} \frac{[\psi - 2\eta \sin\psi + \eta^2 \psi/2 + \eta^2 \sin\psi \cos\psi/2]}{(1-\eta^2)} \right] + \varepsilon D_e \left( \frac{9h_e^2}{2C^2} \frac{(1-\eta\cos\psi)^2}{(1-\eta^2)^2} - \frac{6h_e}{C} \frac{(1-\eta\cos\psi)}{(1-\eta^2)} + 2 \right) \frac{(1-\eta\cos\psi)^2}{(1-\eta^2)^2} + K \right\} \quad (IV-89)$$

### **Solution de Sommerfeld**

Pour déterminer les constante  $\frac{h_e}{C}$  et K on suppose que le palier alimenté à la pression  $P_a$  par l'intermédiaire d'une rainure axiale de largeur nulle (infiniment simple) située à l'abscisse  $\theta = 0$  sur le coussinet. Les conditions de Sommerfeld sont données comme suit :

$$p'(\theta = 0) = p'(\theta = 2\pi) = P_a \text{ ou } p'(\theta = 0) - p'(\theta = 2\pi) = 0 \quad (IV-90)$$

En injectant (IV-90) dans (IV-89), on obtient alors :

$$\frac{h_e}{C} = 2 \frac{(1-\eta^2)}{(2+\eta^2)} \quad (IV-91)$$

$$K = \frac{P_a}{\left(\frac{\mu RaU}{C^2}\right)} - 2\varepsilon D_e \left[ \frac{1-3\eta-\eta^2}{(1+\eta)(2+\eta^2)} \right]^2 \quad (IV-92)$$

En injectant (IV-91) et (IV-92) dans (IV-89), on obtient une expression plus simple de la distribution de la pression hydrodynamique, soit :

$$P' = \frac{\mu Ra U}{c^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{6}{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ \psi - \eta \sin \psi - \frac{[2\psi - 4\eta \sin \psi + \eta^2 \psi + \eta^2 \sin \psi \cos \psi]}{(2+\eta^2)} \right] + \\ & \varepsilon D_e \left[ 18 \frac{(1-\eta \cos \psi)^2}{(2+\eta^2)^2} - 12 \frac{(1-\eta \cos \psi)}{(2+\eta^2)} + 2 \right] \frac{(1-\eta \cos \psi)^2}{(1-\eta^2)^2} \\ & - 2 \varepsilon D_e \left[ \frac{1-3\eta-\eta^2}{(1+\eta)(2+\eta^2)} \right]^2 \end{aligned} \right\} + P_a \quad (IV-93)$$

En utilisant le changement de variable qui conduit à exprimer  $\psi$  :

$$1 - \eta \cos \psi = \frac{1-\eta^2}{1+\eta \cos \theta} \quad (IV-94)$$

En remplaçant par (IV-94) dans (IV-93), on trouve

$$P' = \frac{\mu Ra U}{c^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{6\eta}{1+\eta \cos \theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos \theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} \right\} \sin \theta + \\ & \varepsilon D_e \left( 18 \frac{(1-\eta^2)^2}{(2+\eta^2)^2(1+\eta \cos \theta)^2} - 12 \frac{(1-\eta^2)}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} + 2 \right) \frac{(1-\eta^2)^2}{(1-\eta^2)^2(1+\eta \cos \theta)^2} \\ & - 2 \varepsilon D_e \left[ \frac{1-3\eta-\eta^2}{(1+\eta)(2+\eta^2)} \right]^2 \end{aligned} \right\} + P_a \quad (IV-95)$$

## 7 Etude de la cavitation

### 7-1 Coefficient de pression

L'expression de pression s'exprime dans ce cas :

$$C_{P'} = \frac{P' - P_a}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{\Delta P'(\theta)}{\frac{1}{2} \rho (\omega Ra)^2} \quad (IV-96)$$

Tel que :  $P_a$  : Représente la pression d'alimentation.

$U$  : Vitesse de rotation de l'arbre qui est égale à  $\omega Ra$ .

A l'aide de (IV-95) on déduit l'expression de la distribution de  $C_{P'}$ , soit :

$$C_{P'} = \frac{4\nu}{\varepsilon^2 Ra^2 \omega} \left\{ \begin{aligned} & 3 \frac{\eta}{1+\eta \cos \theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos \theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} \right\} \sin \theta + \\ & \varepsilon D_e \left( 9 \frac{(1-\eta^2)^2}{(2+\eta^2)^2(1+\eta \cos \theta)^2} - 6 \frac{(1-\eta^2)}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} + 1 \right) \frac{(1-\eta^2)^2}{(1-\eta^2)^2(1+\eta \cos \theta)^2} \\ & - \varepsilon D_e \left[ \frac{1-3\eta-\eta^2}{(1+\eta)(2+\eta^2)} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (IV-97)$$

Où :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  désigne la viscosité cinématique, et  $C = \varepsilon Ra$

On peut aussi exprimer l'expression (IV-95) en fonction du nombre de Reynolds  $R_{et}$ , en tenant compte de la relation (IV-58) :

$$C_{P'} = \frac{4(1-\eta)^2 Ra}{R_{et} e_t} \left\{ \begin{array}{l} 3 \frac{\eta}{1+\eta \cos \theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos \theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} \right\} \sin \theta + \\ \varepsilon D_e \left( 9 \frac{(1-\eta^2)^2}{(2+\eta^2)^2(1+\eta \cos \theta)^2} - 6 \frac{(1-\eta^2)}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} + 1 \right) \frac{1}{(1+\eta \cos \theta)^2} \\ - \varepsilon D_e \left( \frac{1-3\eta-\eta^2}{(1+\eta)(2+\eta^2)} \right)^2 \end{array} \right\} \quad (IV-98)$$

Tel que  $R_{et}$  désigne le nombre de Reynolds dans l'entrefer défini par :

$$R_{et} = \frac{e_t \omega Ra}{\nu}$$

On peut décomposer l'expression de  $C_{P'}$  en deux parties : une partie newtonien  $C_{P'_0}$  et une partie non newtonien  $C_{P'_1}$ , autrement dit :

$$C_{P'} = C_{P'_0} + C_{P'_1} \quad (IV-99)$$

Tel que :

$$C_{P'_0} = \frac{12(1-\eta)^2 Ra}{R_{et} e_t} \frac{\eta}{1+\eta \cos \theta} \left\{ \frac{2+\eta \cos \theta}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} \right\} \sin \theta \quad (IV-100)$$

$$C_{P'_1} = \frac{4(1-\eta)^2 Ra}{R_{et} e_t} \varepsilon D_e \left[ \begin{array}{l} \left( 9 \frac{(1-\eta^2)^2}{(2+\eta^2)^2(1+\eta \cos \theta)^2} - 6 \frac{(1-\eta^2)}{(2+\eta^2)(1+\eta \cos \theta)} + 1 \right) \frac{1}{(1+\eta \cos \theta)^2} - \\ \left( \frac{1-3\eta-\eta^2}{(1+\eta)(2+\eta^2)} \right)^2 \end{array} \right] \quad (IV-101)$$

## 7-2 Analyse des résultats sur l'apparition de la cavitation - Conclusion

Pour voir l'influence de l'élasticité sur l'apparition de la cavitation dans l'espace confiné, on refait les mêmes calculs que ceux menés dans le chapitre III. Pour fixer les idées et mettre en évidence l'apparition de la cavitation en cas extrême, pour ce faire, on considère alors la vitesse de rotation maximum de l'arbre, soit ici  $N = 5000 \text{tr/min}$ . Dans l'étude préliminaire en milieu newtonien, menée au chapitre précédent, nous avons analysé les différentes valeurs de l'excentricité relative et avons déduit que la valeur optimum que l'on peut associer pour une cavitation contrôlée est pour  $\eta = 0.3$ . Enfin, il est évident que dans le cas de la viscoélasticité, le temps de relaxation est le paramètre essentiel, ses valeurs vont essentiellement affecter en plus ou en moins la contribution élastique au regard de la contribution visqueuse. Si bien que ce paramètre est pris en

## Chapitre IV : Cavitation en Milieu Viscoélastique - Influence de la viscoélasticité.

compte à travers la valeur du nombre de Deborah qui tient compte aussi de l'importance du taux de cisaillement et bien sûr de la contrainte de cisaillement aussi. Les courbes ci-dessous ont été déterminées à la lumière de ces précisions, notamment dans le choix optimum des paramètres susceptibles d'influencer la cavitation.

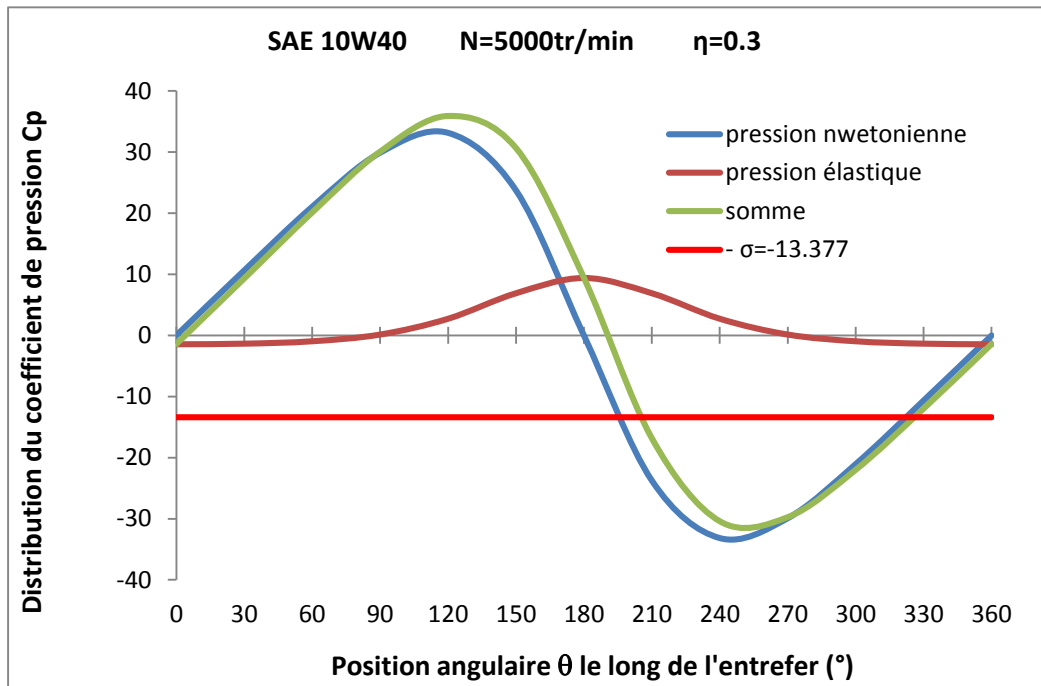


Figure IV-1 : Courbes des différentes contributions pour  $\lambda = 10^{-4}S$  ( $D_e = 26$ )

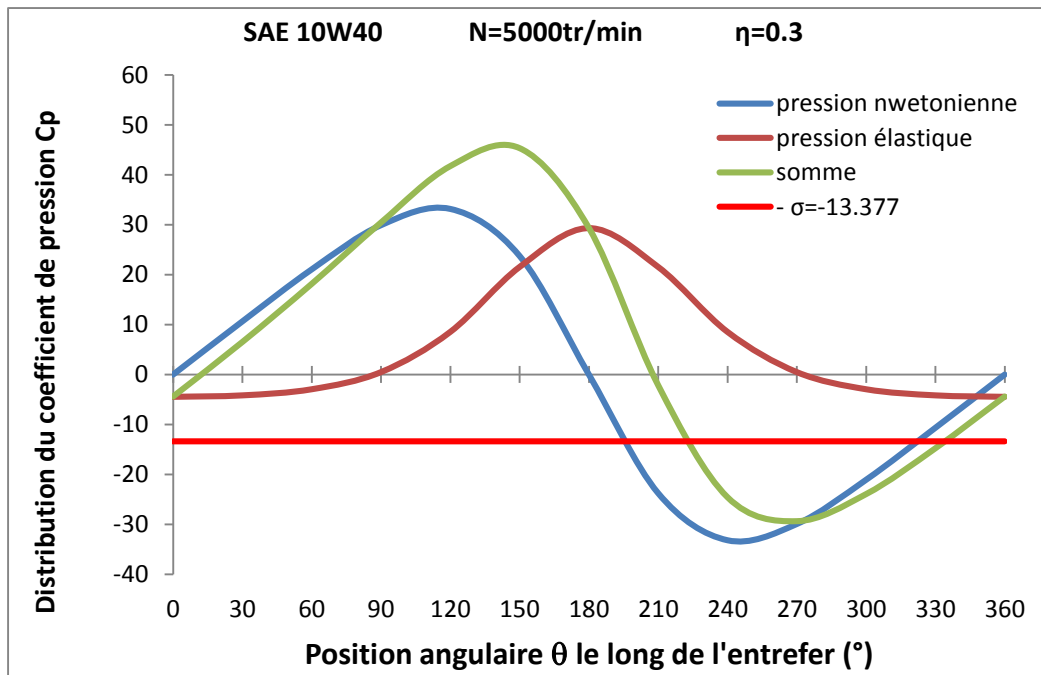


Figure IV-2 Courbes de différentes contributions  $\lambda = 3.10^{-4}S$  ( $D_e = 78$ )

## Chapitre IV : Cavitation en Milieu Viscoélastique - Influence de la viscoélasticité.

---

Les figures IV.1 et IV.2 représentent les distributions de pression (ici les coefficients de pression) concernant à la pression totale et celles relatives à la contribution purement visqueuse et à la contribution élastique au champ de pression totale. On notera que la contribution élastique dépend de la valeur du nombre de Deborah. Elle est une fonction croissante du nombre de Deborah comme l'indiquent le passage de la figure IV. (De = 26) à la figure IV.2 (De =78).

Dans l'analyse, par rapport à l'apparition de la cavitation, il est très intéressant de noter que par rapport à la contribution purement visqueuse, la contribution élastique est bien moins exposée à l'apparition de la cavitation qu'elle semble donc retardé intrinsèquement.

Quand on considère la pression totale née de la somme des deux contributions, on notera qu'à faible nombre de Deborah, la viscoélasticité a très peu d'influence sur l'apparition de la cavitation. Par contre avec l'augmentation du nombre de Deborah lié en fait au temps de relaxation du lubrifiant c'est-à-dire à son élasticité, l'influence de la viscoélasticité est très notable. Cette influence se manifeste sur le retard de l'apparition de la cavitation déplacée loin de l'entrefer minimale.

## Conclusion générale

---

Ce présent travail s'est intéressé à la cavitation dans les milieux confinés en lubrification hydrodynamique dans le cas d'un palier de pied de bielle. En premier lieu nous avons utilisé un fluide newtonien où la viscosité est le seul paramètre mécanique du milieu, et en deuxième lieu nous avons considéré un lubrifiant non newtonien viscoélastique.

Les lubrifiants modernes contiennent des additifs qui augmentent leurs propriétés naturelles et aussi leurs confèrent de nouvelles propriétés physiques ou chimiques. Dans ce présent travail nous nous sommes intéressés à étudier une de ces propriétés physiques qui est l'élasticité, et voir son influence sur l'apparition de la cavitation dans le film lubrifiant.

Pour ce faire, nous avons choisi le modèle généralisé de Maxwell et nous avons développé les équations constitutives correspondantes en tenant compte des considérations cinématiques et géométriques cas bidimensionnel. Par la suite nous avons passé à l'adimensionnalisation de ces équations en prenant en considération les différentes échelles associées aux différents paramètres adimensionnels, et en tenant compte aussi de l'hypothèse de lubrification il nous a été possible de résoudre le système d'équations.

Ainsi, nous avons pu déterminer l'expression du champ de vitesse et la distribution du champ de pression. Nous nous sommes ensuite intéressés aux calculs du coefficient de pression et du nombre de cavitation.

En représentant les différents résultats dans des courbes faisant apparaître la contribution newtonienne (effets visqueux) ainsi que la contribution non newtonienne (effets élastiques), nous avons pu voir l'influence de l'élasticité sur l'apparition de la cavitation. Pour appréhender l'influence de l'élasticité, nous avons représenté ces différentes contributions pour différentes valeurs de temps de relaxation qui caractérise l'élasticité du milieu. En fait c'est le nombre de Deborah qu'il faut considérer car il représente à la fois la contribution élastique du milieu et l'importance du cisaillement de ce milieu c'est-à-dire la contrainte de cisaillement à laquelle il est soumis. Ceci nous a permis de montrer que la contribution élastique est d'autant plus importante que le nombre de Deborah est grand

Enfin quand on considère dans leur ensemble les contributions visqueuses et élastiques à la fois, nous constatons aux fortes conditions de cavitation, que la viscoélasticité retarde la cavitation en la déplaçant au-delà de l'entrefer minimale par rapport au cas purement newtonien.

L'étude menée dans ce travail montre finalement l'intérêt de la contribution élastique, autrement dit l'influence des propriétés viscoélastiques d'un lubrifiant dans la cavitation.

## References bibliographiques

---

- [1] J. L. LIGIER : Lubrification des Paliers Moteurs. Institut Français du Pétrole, 1997
- [2] A. OUIBRAHIM, Daniel H. FRUMAN et Roland. GAUDEMER. Cavitation dans des espaces très confinés. Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Groupe Phénomènes d'Interface, 91120 Palaiseau, France, 1995
- [3] A. BOUDIA, R. GAUDEMER, A. OUIBRAHIM, D. H. FRUMAN. Cavitation dans les espaces très confinés : quelques exemples. Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 1997
- [4] LEIF. FLOBERG. Experimental investigation of cavitation regions in journal bearings. Report No. 16 from the Institute of Machine Elements Chalmers University of Technology Gothenburg, Sweden, 1961
- [5] LEIF FLOBERG. On Hydrodynamique lubrification with special reference to sub-cavity pressures and number of streamers in cavitation regions. Lund Institute of Technology, 1965
- [6] C. M. TAYLOR. Separation cavitation in lightly loaded fluid film bearing with both surfaces in motion. Journal Mechanical engineering science, IMechE 1974, Vol 16 No 3
- [7] D. DOWSON. Cavitation in lubricating films. Tribology August 1968, 1, p 153- 156
- [8] A. OUIBRAHIM, D. H. FRUMAN and R. GAUDEMER. Vapour cavitation in very confined spaces for Newtonian and non-Newtonian fluids. Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Groupe Phénomènes d'Interface, 91120 Palaiseau, France, 1996
- [9] A. OUIBRAHIM. Cours Fluides Complexes-Rhéologie. Université de Tizi ouzou (UMMTO) 2014-2015
- [10] M. GUEMMADI and A. OUIBRAHIM. Generalized Maxwell Model as Viscoelastic Lubricant in Journal Bearing. Université M'hamed Bouguerra, Boumerdès, Algeria, 2011
- [11] M. ALLOUCHE. Fluides Viscoélastiques dans les Ecoulements Confinés. Influences sur la Lubrification- Application aux paliers. Thèse de Magister, Université de Tizi ouzou (UMMTO), 2002
- [12] D. DOWSON, C. M. TAYLOR. Cavitation in bearings. Institute of Tribology, Department of Mechanical Engineering, the University of Leeds, Leeds LS2 9JT, England, 1979
- [13] A. OUIBRAHIM, D. H. FRUMAN et R. GOUDEMER. Etude d'une machine pour cavitation en lubrification hydrodynamique cas de l'écoulement confiné entre cylindre en rotation et un plan fixe. Rapport ENSTA 1994.
- [14] C. M. TAYLOR. Separation cavitation in lightly loaded fluid film bearing with both Surfaces in motion. Journal Mécanique Engineering science, Mèche 1974, Vol 16 No 3
- [15] A. OUIBRAHIM. Lubrification Hydrodynamique-quelques éléments. Université de Tizi ouzou (UMMTO), 2016