

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du

**DIPLÔME DE MAGISTÈRE (ÉCOLE DOCTORALE)**

EN MATHÉMATIQUES

**Option** : Statistique

Par

**Hadda SAIDANE**

Titre

**SUR L'ESTIMATION DES MESURES DE RISQUE**

Membres du Comité d'Examen

Hocine FALLAG	Professeur	UMMTO	Président
Djamel MERAGHNI	Maître de conférences A	UMKB	Rapporteur
Mohand Arezki BOUDIBA	Maître de conférences A	UMMTO	Examinateur
Abdelhakim NECIR	Professeur	UMKB	Membre invité

mai 2012

*A mes très chers parents,  
A tous ceux dont j'ai appris,  
de près ou de loin,  
un peu ou énormément,  
humainement ou professionnellement.*

# Remerciements

Au nom de *DIEU* Le Plus Clément et Le Plus Miséricordieux.

Tout d'abord, je remercie *ALLAH* Le Tout Puissant qui m'a accordée la volonté et le courage pour réaliser ce mémoire.

Mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à Dr. *Djamel MERAGHNI* mon promoteur de mémoire, pour sa grande patience, pour sa disponibilité, pour ses nombreux conseils, pour ses corrections et son appréciation au cours de l'élaboration de ce travail, notamment quant à la portée de la problématique. Il a toujours été présent dans les moments où j'en avais besoin. Je suis profondément reconnaissante pour son soutien infaillible tout le long de ce travail, il me faudrait des pages pour le remercier.

Je suis très heureuse que Monsieur le Pr. *Hocine FALLAG* ait accepté d'examiner ce travail avec diligence et pour l'honneur qu'il m'a faite de présider le jury de cette thèse. Je tiens sincèrement à le remercier pour son accueil et sa disponibilité lors de mon séjour à Tizi-Ouzou.

J'ai de la chance aussi parce que Monsieur le Pr. *Abdelhakim NECIR* ait accepté d'être examinateur de ce travail ainsi que pour l'attention qu'il a porté à mon travail malgré son emploi du temps très chargé.

Je tiens également à remercier Monsieur le Dr. *Mohand Arezki BOUDIBA* pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'adresse mes sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à ma formations de magistère : Mr. *D. MERAGHNI*, Mr. *H. FALLAG*, Mr. *A. NECIR*, Mr. *A. YOUS-FATE*, Mr. *D. HAMADOUCHE*, Mr. *A. DIOP*, Mr. *F. RUGGERI*, Mr. *A. MAKH-LOUF* et à tous mes enseignants.

Je désire exprimer ma sincère reconnaissance à tous les employés du département de Poste Graduation de Tizi-Ouzou, à leur tête Monsieur *A. AOMARI*.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble de mes camarades de magistère, mes amis, mes proches et ma famille (au sens large) qui m'ont soutenue durant ce travail, et spécialement à celles ou ceux, elles ou ils se reconnaîtront, qui m'ont encouragée à finir ce travail et qui m'ont accompagnée dans tous les moments de joie et de tristesse.

Enfin, je ne saurais terminer cette partie sans exprimer ma gratitude à mes parents, mes grands parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont toujours soutenue, encouragé et stimulée pendant mes études. Je n'aurais jamais pu arriver ici, sans l'équilibre, la chaleur, le soutien et le bonheur dans lequel j'ai vécu. Merci !

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
<b>1 Théorie du Risque</b>	<b>4</b>
1.1 Généralités . . . . .	4
1.1.1 Risque . . . . .	4
1.1.2 Types de risque . . . . .	5
1.1.3 Assurance . . . . .	6
1.1.4 Réassurance . . . . .	6
1.1.5 Prime . . . . .	7
1.2 Principes de calcul de prime . . . . .	8
1.3 Mesure de risque . . . . .	9
1.3.1 Définition . . . . .	10
1.3.2 Propriétés désirables d'une mesure de risque . . . . .	10
1.3.3 VaR est-elle une bonne mesure? . . . . .	13
1.3.4 Mesures alternatives à la VaR . . . . .	16
1.4 Mesures de risque par distorsion . . . . .	18
1.4.1 Concepts de mesure de risque par distorsion . . . . .	19
1.4.2 Mesures par distorsion concaves et cohérentes . . . . .	21
1.4.3 Exemples de mesure de risque par distorsion . . . . .	22
<b>2 Théorie des Valeurs Extrêmes</b>	<b>27</b>
2.1 Concepts et définitions . . . . .	27
2.1.1 Cadre d'analyse . . . . .	27
2.1.2 Distributions à queues lourdes . . . . .	29

2.1.3	Distributions à variations régulières . . . . .	29
2.1.4	Statistiques d'ordre . . . . .	30
2.2	Distribution limite de la somme . . . . .	32
2.2.1	Théorème central limite généralisé . . . . .	32
2.2.2	Loi $\alpha$ -stables . . . . .	32
2.2.3	Propriétés des lois $\alpha$ -stables . . . . .	35
2.3	Distribution limite du maximum . . . . .	36
2.3.1	Théorème de Fisher-Tippett . . . . .	36
2.3.2	Distribution $\mathcal{GEV}$ . . . . .	38
2.3.3	Domaines d'attraction du maximum . . . . .	39
2.4	Distribution de Pareto généralisée . . . . .	42
2.5	Estimation des paramètres des $\mathcal{GEV}$ et $\mathcal{GPD}$ par la méthode MV . . . . .	46
2.6	Estimation semi-paramétrique de l'indice de queue et des quantiles extrêmes . . . . .	47
2.6.1	Estimateur de Pickands . . . . .	48
2.6.2	Estimateur de Hill . . . . .	50
2.6.3	Estimateur des moments . . . . .	52
2.6.4	Comparaison entre ces estimateurs . . . . .	54
2.6.5	Choix optimal du $k$ plus grandes observations . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Estimation Empirique des Mesures de Risque</b> . . . . .	<b>56</b>
3.1	L-fonctionnelle . . . . .	56
3.1.1	Mesure de risque comme L-fonctionnelle . . . . .	56
3.1.2	Estimation de la L-fonctionnelle . . . . .	58
3.2	Estimation non-paramétrique . . . . .	62
3.2.1	Value at Risk . . . . .	63
3.2.2	Mesure de risque par distorsion . . . . .	63
3.2.3	Mesures par distorsion particulières . . . . .	64
3.3	Estimation semi-paramétrique . . . . .	69
3.3.1	Value at Risk . . . . .	69
3.3.2	Conditional Tail Expectation . . . . .	70
3.3.3	Proportional Hazard Transform . . . . .	71
3.3.4	Proportional Hazard Transform de réassurance . . . . .	73
3.3.5	Two-Sided Deviation quand $F \in D(\alpha)$ . . . . .	76
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>78</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>79</b>
	<b>Annexe A : Abréviations et Notations</b> . . . . .	<b>86</b>
	<b>Annexe B : Logiciel <i>R</i></b> . . . . .	<b>89</b>

# Table des figures

1.1	Fonction de distorsion de la VaR . . . . .	22
1.2	Fonction de distorsion de la TVaR . . . . .	24
2.1	Densités $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	34
2.2	Densités et distributions de lois des valeurs extrêmes. . . . .	38
2.3	Les données $X_1, \dots, X_{13}$ et les $N_u$ excès correspondants $Y_1, \dots, Y_{N_u}$ au-dessus du seuil $u$ . . . . .	43
2.4	Densités et distributions de lois de Pareto généralisée avec différentes valeurs de $\xi$ . . . . .	44
2.5	Estimateur de Pickands avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour $\xi$ basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi uniform standard ( $\xi = -1$ ). . . . .	49
2.6	Estimateur de Hill avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour $\xi$ basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard ( $\xi = 1$ ). . . . .	52
2.7	Estimateur des moments avec l'intervalle de confiance au niveau 95% de $\xi$ basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Gumbel ( $\xi = 0$ ). . . . .	54
2.8	Estimateur de Hill (trait plein), de Pickands (tirets bleus) et de Moments (tirets magenta) basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard (gauche) et la loi de Cauchy Standard (droite). La ligne horizontale (trait rouge) est la vraie valeur de $\xi$ . . . . .	55
3.1	Estimateur de $\Pi_{CTE}$ basé sur 1000 échantillons de taille 2000 pour la loi de Pareto de paramètre $\xi = 0.65$ avec $p = 0.75$ . La ligne horizontale (trait rouge) est la vraie valeur de $\Pi_{CTE}$ . . . . .	73
3.2	Estimateur de $\Pi_{PHT}$ basé sur 1000 échantillons de taille 2000 pour la loi de Pareto de paramètre $\xi = 0.65$ avec $\varrho = 1.05$ . La ligne horizontale (trait rouge) est la vraie valeur de $\Pi_{PHT}$ . . . . .	74

# Liste des tableaux

1.1	Fonctions de distorsion associées à quelques mesures de risque . . . . .	26
2.1	Moments d'une v.a. suivant une loi stable selon alpha. . . . .	36
2.2	Exemples de distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet. . . . .	40
2.3	Exemples de distributions appartenant au domaine d'attraction de Weibull. . . . .	40
2.4	Exemples de distributions appartenant au domaine d'attraction de Gumbel. . . . .	41
2.5	Estimation ponctuelle de $\xi$ basée sur 100 échantillons de la loi de Pareto avec $\xi \in \{2/3, 1\}$ . . . . .	51
2.6	Estimation par intervalle de confiance au niveau 95% de $\xi$ basée sur 100 échantillons de la loi de Pareto avec $\xi \in \{2/3, 1\}$ . . . . .	52
3.1	Estimation non-paramétrique ponctuelle de la $\Pi_{CTE}$ basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \{1, 2\}$ avec $p \in \{0.75, 0.85, 0.95\}$ . . . . .	65
3.2	Estimation non-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de la $\Pi_{CTE}$ basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \{1, 2\}$ avec $p \in \{0.75, 0.85, 0.95\}$ . . . . .	66
3.3	Estimation non-paramétrique ponctuelle de $\Pi_{PHT}$ basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \{1, 2\}$ avec $\varrho \in \{1.2, 1.5, 1.7\}$ . . . . .	67
3.4	Estimation non-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de la $\Pi_{PHT}$ basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \{1, 2\}$ avec $\varrho \in \{1.2, 1.5, 1.7\}$ . . . . .	68
3.5	Estimation semi-paramétrique ponctuelle de $\Pi_{CTE}$ basée sur 1000 échantillons de taille $n \in \{1000, 2000, 5000\}$ de la loi de Pareto avec $\xi \in \{0.65, 0.70\}$ et $p \in \{0.75, 0.90\}$ . . . . .	71
3.6	Estimation semi-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de $\Pi_{CTE}$ basée sur 1000 échantillons de taille $n \in \{1000, 2000, 5000\}$ de la loi de Pareto avec $\xi \in \{0.65, 0.70\}$ et $p \in \{0.75, 0.90\}$ . . . . .	72
3.7	Estimation semi-paramétrique ponctuelle de $\Pi_{PHT}$ basée sur 1000 échantillons de taille 2000 de la loi de Pareto avec $\xi \in \{0.65, 0.70\}$ et $\varrho \in \{1.05, 1.10\}$ . . . . .	73

3.8	Estimation semi-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de $\Pi_{PHT}$ basée sur 1000 échantillons de taille 2000 de la loi de Pareto avec $\xi \in \{0.65, 0.70\}$ et $\varrho \in \{1.05, 1.10\}$ . . . . .	74
3.9	Estimation semi-paramétrique ponctuelle de $\Pi_{PHT, R_{opt}}$ basée sur 1000 échantillons de taille $n \in \{1000, 2000, 5000\}$ de la loi de Pareto avec $\xi \in \{0.10, 0.25\}$ et $\varrho \in \{1.00, 1.10\}$ . . . . .	75
3.10	Estimation semi-paramétrique par intervalles de confiance au niveau 95% de $\Pi_{PHT, R_{opt}}$ basée sur 1000 échantillons de taille $n \in \{1000, 2000, 5000\}$ de la loi de Pareto avec $\xi \in \{0.10, 0.25\}$ et $\varrho \in \{1.00, 1.10\}$ . . . . .	76

# Introduction

Au cours des siècles, de nombreux événements (risques), qu'il s'agisse de catastrophes naturelles ou d'accidents liés à l'activité humaine, sont inhérents notre vie. Donc, il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes, afin d'en limiter les impacts humains, environnementaux et économiques. Pour cela aussi, les institutions financières (les banques et les compagnies d'assurance) cherchent toujours à des nouvelles règles pour gérer et évaluer ses risques et leurs pertes potentielles et pour équilibrer un investissement risqué.

Pour la gestion de ces risques, plusieurs mesures de risque ont été proposées. Chacune a ses avantages comme elle a ses inconvénients. Il est reconnu que l'approche standard de moyenne-variance, qui a été introduite par *Markowitz* [62] est généralement inadéquate pour le contrôle de risque. Pour cela, d'autres mesures de risque ont été considérées. Par exemple, depuis 1996, le comité de Bâle a proposé d'employer la Value-at-Risk (*VaR*), qui est un quantile de la distribution de profits et pertes (P&L). Depuis lors, beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude des applications de la *VaR* dans le domaine de la gestion du risque. Cependant, de meilleures mesures de risque sont désirées pour la gestion des risques robustes. Ces mesures doivent tenir compte non seulement de la probabilité d'un mauvais événement, mais également de sa grandeur (ampleur). *Artzner et al.* [8] suivent une approche systématique et définissent des mesures de risque cohérentes. Une mesure de risque est cohérente si elle satisfait des axiomes tels que *la monotonocité, l'invariance par translation, l'homogénéité positive et la sous-additivité*. La *VaR* n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne satisfait pas la condition de la *sous additivité*. La convenance de ces axiomes est toujours un sujet pour la discussion, néanmoins, ils établissent un critère pour présenter de nouvelles mesures de risque. Les auteurs ont proposé en particulier de remplacer la *VaR* standard par des mesures de risque alternatives telles l'Expected Shortfall (*ES*), la Conditional Tail Expectation (*CTE*) et la Tail Value-at-Risk (*TVaR*) (voir, par exemple, *Kass et al.* [52], *Dhaene et al.* [26], *Acerbi* [1], *Acerbi et Tasche* ([2] et [3]), *Rockafellar et Uryasev* ([84] et [85]), *Wirth et Hardy* [104] et *Yamai et Yoshida* [107]), où ces mesures de risque permettent de prendre en compte l'ampleur des pertes au-delà de la *VaR*. L'application de ces mesures alternatives a gagné un intérêt croissant dans la littérature et dans l'industrie.

La *VaR* et ses alternatives sont étroitement liées aux mesures de risque par distorsion considérées dans la littérature d'assurance (Wang [96], Wang et Young [100]). La mesure de risque par distorsion (DRM) est un cas spécial de la soi-disant utilité moyenne de

Choquet, c-à-d, une utilité moyenne calculée sous une mesure de probabilité modifiée.

Lorsque les risques sont majeurs et extrêmes (tels les tempêtes, les cyclones, les inondations,...), ils se caractérisent par une énorme gravité malgré leur faible fréquence. Leurs impacts représentent une menace réelle à l'homme, son économie et son environnement. Pour cela chaque institution doit surveiller les valeurs extrêmes (minimum ou maximum) pour pouvoir prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leurs intensités afin d'éviter les faillites retentissantes. La TVE est la technique qui permet de décrire le comportement asymptotique de ces événements extrêmes et rares. Elle sera un outil très utile pour comprendre l'influence de ces événements sur les mesures de risque.

Dans ce mémoire, qui s'articule autour de trois chapitres, on essaie d'étudier quelques unes des mesures de risque les plus connues et leur estimation classique non-paramétrique, par les L-statistiques qui sont des combinaisons linéaires de statistique d'ordre et semi-paramétrique basé sur la théorie des valeurs extrêmes (TVE) qui permet de traiter les situations de risques dangereux.

## Chapitre 1 : Théorie du Risque

Dans ce chapitre, on regroupe des définitions et des résultats aux quels on fait appel dans le troisième chapitre. Il se décompose en quatre sections, dans la première section, on définit le risque et ses différents types, l'assurance, la réassurance et la prime d'assurance. Dans la seconde section, on présente les principes de calcul d'une prime d'assurance qui sont un ensemble de méthodes permettant à une compagnie d'assurance de calculer la prime. Dans la troisième section, on introduit la mesure de risque et ses propriétés désirables. On donne des exemples comme la *VaR* et on se concentre particulièrement sur les mesures alternatives comme l'*ES*, la *TVaR* et la *CTE*. Dans la dernière section, on expose les mesures de risque par distorsion considérées dans la littérature d'assurance.

## Chapitre 2 : Théorie des Valeurs Extrêmes

Ce chapitre, composé de six sections, est consacré à la TVE. Dans la première section, on présente quelques rappels sur les concepts de base tels les fonctions de répartition, des quantiles, les distributions à queues lourdes et celles à variations régulières ainsi que les statistiques d'ordre. La deuxième section est consacrée au modèle alpha-stable qui est une classe riche de distributions possédant la propriété de stabilité par addition et caractérisées par quatre paramètres, ce qui facilite les analyses et les estimations. Dans la troisième section, on donne le résultat fondamental de la TVE et la distribution  $\mathcal{GEV}$  ainsi que les caractéristiques des différents domaines d'attraction du maximum. Puis, dans la quatrième section, on introduit la distribution  $\mathcal{GPD}$  et le théorème de *Balkema-de Haan* [9] et *Pickands* [81] puis dans la cinquième section, on parle sur l'estimation des paramètres de  $\mathcal{GEV}$  et  $\mathcal{GPD}$  par la méthode du MV. Enfin, dans la dernière section, on donne les estimateurs de l'indice de queue et des quantiles extrême tels l'estimateur de Hill, de Pickands et des moments.

### **Chapitre 3 : Estimation Empirique des Mesures de Risque**

Le dernier chapitre est réservé à l'estimation empirique des mesures de risque vues précédemment. La première section est une brève description des L-fonctionnelles et leur estimation. Dans la deuxième section, on donne l'estimation non-paramétrique des mesures de risque. Finalement, dans la troisième section, on s'intéresse à l'estimation semi-paramétrique, via la TVE, de ces mesures de risque.

On ne terminerait pas cette introduction sans mentionner que tous les exemples, présentés dans ce mémoire, sont traités à l'aide du logiciel *R*, version 2.13.0, (voir *Ihaka, R. et Gentleman, R.* [49]) qui est présenté dans l'annexe B.

# Chapitre 1

## Théorie du Risque

Au cours des siècles, de nombreux événements extrêmes à travers le monde, tels que les catastrophes naturelles (tremblements de terre, inondations, violents orages, ...) ou les accidents liés à l'activité humaine (circulation routière, ferroviaire, aérienne ou maritime, guerres, incendies, pollution industrielle ou nucléaire, ...), ont représenté une menace réelle à l'homme, son économie et son environnement. Par conséquent, il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes, afin d'en limiter les effets négatifs. Un risque est défini par la probabilité d'apparition d'un événement rare et par l'ampleur de ses conséquences (probabilité et impact). Un plan d'atténuation des risques s'attachera donc à maîtriser leur probabilité de survenance mais aussi à réduire leur impact.

Historiquement, la notion de risque était liée à celle de probabilité. Apparue au XVII<sup>e</sup>-Siècle dans l'analyse des jeux de hasard, elle fut appliquée au XVIII<sup>e</sup>-Siècle par les assureurs maritimes, pour devenir ensuite partie intégrante des schémas de prise de décision rationnelle associée à toute alternative de probabilités de succès ou d'échec. En 1921, *Frank Knight* [55] introduisit dans son livre "*Risk, Uncertainty and Profit*" la distinction entre risque (pouvant être calculé) et incertitude.

### 1.1 Généralités

#### 1.1.1 Risque

Le risque correspond à l'occurrence d'un fait imprévisible (ou tout au moins incertain) susceptible d'affecter les membres, le patrimoine, l'activité de l'entreprise et de modifier son patrimoine et ses résultats. C'est donc la possibilité de survenance d'un événement susceptible de porter atteinte à l'équilibre naturel. Deux critères corrélés sont caractéristiques du risque : la conjonction d'un aléa (probabilité) et d'une vulnérabilité (conséquences sur les personnes et les biens exposés), ce qui détermine un niveau de risque. Le risque n'est toutefois pas une simple résultante entre aléa et vulnérabilité.

**Définition 1.1.1** (*Risque*)

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité, dans lequel  $\Omega$  représente l'ensemble des états de la nature  $\omega$ ,  $\mathcal{F}$  la  $\sigma$ -algèbre des événements et  $P$  la probabilité induite. Un risque  $X$  est une variable aléatoire (v.a.) réelle définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega). \end{aligned}$$

La convention dans les opérations bancaires est d'employer des variables aléatoires de gain  $X$  positives. Les résultats de la perte seraient alors des variables aléatoires négatives. Dans le domaine de l'assurance, il est habituellement approprié (cependant non essentiel) de supposer que la perte  $X$  est *non négatif* (c-à-d  $X > 0$ ).

### 1.1.2 Types de risque

Les différents types de risques aux quels chacun de nous peut être exposé sont regroupés en 5 grandes familles :

1. *Les risques de la vie quotidienne* (accidents domestiques, accidents de la route,...).
2. *Les risques liés aux conflits* : se sont les risques liés aux situations d'opposition entre deux personnes, groupes ou nations, comme les guerres, les conflits entre deux groupes, les conflits familiaux.
3. *Les risques naturels* : sont des événements dommageables survenant dans un milieu vulnérable, qui peuvent être soit d'*origine géologique* (mouvement de terrain, séisme, volcanisme), soit d'*origine météorologique* (tempêtes, cyclones et précipitations induisant des inondations, avalanches ou feux de forêt, sécheresse,...).
4. *Les risques technologiques* : sont d'origine anthropique, ils regroupent les risques industriel, nucléaire, biologique et rupture de barrage.... L'aléa (ou dysfonctionnement) technologique pouvant être dû à une erreur humaine, une défaillance technique, une réaction parasite ou un facteur externe (catastrophe naturelle, attentat, ...).
5. *Les risques de transports collectifs* (personnes, matières dangereuses) sont des risques technologiques. On en fait cependant un cas particulier car les enjeux varient en fonction de l'endroit où se développe l'accident.

Les trois dernières catégories des risques font partie de ce qu'on appelle le risque majeur (ou extrême) qui est caractérisé par une *faible fréquence* et une *énorme gravité*.

Dans la finance (voir *Clauss, P.* [17]), on distingue traditionnellement trois grands types de risques :

1. *Le risque de marché* : correspondant à tout risque de perte dû aux fluctuations des marchés financiers (baisse des prix des actions, des taux, des devises, volatilités, ...). Ce risque est relatif aux crises que peuvent subir les marchés financiers (crise de 1929, krach de 1987, bulle technologique des années 2000, ...).

2. *Le risque de crédit* : relatif au risque de faillite d'une entreprise qui a contracté des contrats de dettes et qui ne peut rembourser ses créanciers (*Enron, Parmalat, Lehman Brothers*). On peut distinguer deux types de risque de crédit : le *risque de contrepartie* et le *risque de référence*.
3. *Le risque opérationnel* : concernant tous les problèmes relatifs aux opérations de transaction comme les erreurs des opérateurs, les pannes de système, les incendies, les fraudes.

Il à noter que les risques sont pris en charge par des compagnies spécialisées appelées compagnies d'assurance et de réassurance.

### 1.1.3 Assurance

#### Définition 1.1.2 (*Assurance*)

*L'assurance est l'activité qui consiste, en échange de la perception d'une cotisation ou prime, à fournir une prestation prédéfinie, généralement financière, à un individu, une association ou une entreprise lors de la survenance d'un risque.*

La personne morale qui accepte la prise en charge des risques, et perçoit en contrepartie les cotisations ou les primes, est appelée un *assureur*. La personne exposée au risque et qui paye la prime est appelée *assuré*.

L'assurance regroupe traditionnellement deux univers qui sont *les assurances non-vie* appelée aussi assurance-dommage *et les assurances vie*.

### 1.1.4 Réassurance

#### Définition 1.1.3 (*Réassurance*)

*La réassurance est l'assurance de l'assureur ! C'est l'opération par laquelle un assureur direct, appelé la "cédante", cède une partie de ses risques à un réassureur qui en accepte la charge, dans des conditions fixées par un contrat.*

La réassurance est devenue aujourd'hui un acteur important du secteur de l'assurance où elle y joue une influence croissante. Cette montée du rôle des réassureurs est notamment due au fait que la réassurance permet aux assureurs de faire face aux pics de sinistralité exceptionnels du type *Tempêtes Lothar et Martin* de 1999 qui ont frappé l'Europe ou *attentats du World Trade Center* de 2001 aux Etats-Unis. Donc, elle aide finalement l'assureur à surveiller ses risques en lui permettant par exemple de compenser les plus catastrophiques.

Il existe deux formes principales de réassurance qui sont la *réassurance proportionnelle* et la *réassurance non proportionnelle*.

1. *Réassurance proportionnelle* : elle consiste en une participation proportionnelle du réassureur aux gains (primes) et pertes (sinistres) de l'assureur. Dans ce cadre, le réassureur, en contrepartie d'une portion ou partie prédéterminée de la prime

d'assurance facturée par la cédante, indemnise cette dernière contre une portion déterminée des sinistres couverts par l'assureur. Parmi les réassurances proportionnelles on a :

- *Quote part (quota share)* : dans ces traités, le réassureur partage un pourcentage (*proportion*) équivalent des primes et des sinistres du portefeuille de l'assureur. Donc, il n'y a pas d'homogénéité dans la réassurance de ces risques c-à-d, que tous les risques acceptés par l'assureur font l'objet d'un partage proportionnel entre l'assureur et le réassureur.
- *Excédent de plein (surplus share)* : la proportion varie d'un risque à l'autre, elle est calculée risque par risque. Le réassureur prend en charge uniquement la portion de risque dépassant un niveau de capital appelé *plein*<sup>1</sup> ou *ligne* de conservation de la cédante.

2. *Réassurance non proportionnelle* : dans ce système de la réassurance, il n'existe pas une proportion déterminée à l'avance mais le réassureur n'intervient qu'à un certain *seuil* de sinistre ou de perte de l'assureur, appelée la *rétenion* ou la *priorité*, et la limite d'intervention du réassureur appelée la *garantie*. Le réassureur touchera pour cela un pourcentage de la prime. Les traités non proportionnelles sont :

- *Excédent de sinistre (excess of loss)* : ce réassureur prend à sa charge uniquement tout ou une partie du sinistre qui excède la rétenion à concurrence la limite de garantie convenue. La différence entre la limite de la garantie et la rétenion est appelée une *couche*.
- *Excédent de perte (stop-loss)* : le réassureur intervient lorsque l'assureur direct est en perte. Dans ces traités, la rétenion est le seuil de la perte et la limite de la garantie est le plafond.

### 1.1.5 Prime

La prime d'assurance est le prix que le preneur d'assurance (assuré ou assureur direct) doit payer pour pouvoir bénéficier de la couverture d'assurance en cas de sinistre. Cette prime est une prime entièrement technique. Elle est modifiée en fonction de la politique commerciale de la compagnie d'assurances. La prime d'assurance se compose de différentes parties suivantes :

1. *Prime pure* : c'est le montant du sinistre moyen auquel devra faire face l'assureur pour le risque. Mathématiquement, la *prime pure* est égale à l'espérance des pertes  $\mathbb{E}[X]$ .
2. *Chargement de sécurité* : ce montant vient s'ajouter à la prime pure. Il permet à l'assureur de pouvoir résister à la volatilité (fluctuation) naturelle des sinistres.
3. *Chargement pour frais* : ces frais comprennent les frais d'acquisition du contrat (rémunération des intermédiaires), les frais d'encaissement des primes, les frais de

---

<sup>1</sup>Le *plein* est le montant en capital conservé par l'assureur pour son propre compte sur chaque affaire. Il varie selon sa capacité de souscription dans une catégorie déterminée.

gestion (loyers, rémunération du personnel, frais d'expertise et de procès, ...) et les impôts.

4. *Bénificie* : la partie *bénéfice* correspond à la marge (positive ou négative) que l'assureur consent à une population en fonction de ses objectifs commerciaux. Un assureur qui veut attirer les jeunes peut accepter une marge négative sur cette population. En revanche, sur les personnes plus âgées, qui ont moins tendance à résilier, il peut décider d'avoir une marge plus forte.

## 1.2 Principes de calcul de prime

*Les principes de calcul de prime* d'assurance sont l'ensemble des méthodes qui permettent à une compagnie d'assurance de calculer la prime qui doit être payée par un assuré pour se voir garantir un risque. Ces principes correspondent à ce que l'on appelle *mesures de risque* et que l'on présentera en détails dans la section suivante.

Dans ce paragraphe, on donne une liste des principes de calcul de prime qui peuvent être appliqués au niveau de police d'assurance aussi bien qu'au niveau de portefeuille.

On suppose que  $X$  est une v.a. non négative limite. La plupart des principes de calcul de prime peuvent également être appliqués aux réclamations illimitées et probablement négatives. Quand le résultat est une prime infinie, le risque actuel est non assurable.

1. *Prime pure* :  $\pi[X] = \mathbb{E}[X]$ .

Egalement connu comme principe d'équivalence, cette prime est suffisante pour un assureur de risque neutre seulement.

2. *Principe de l'espérance mathématique ou la prime nette* :  $\pi[X] = (1+\theta)\mathbb{E}[X]$ ,  $\theta > 0$ .

Où cette prime est la prime pure à laquelle on a ajouté le chargement de sécurité qui est égale  $\theta\mathbb{E}[X]$  et le taux de chargement  $\theta$  peut varier en fonction des caractéristiques des assurés.

3. *Principe de la variance* :  $\pi[X] = \mathbb{E}[X] + \theta\text{var}[X]$ ,  $\theta > 0$ .

Où le chargement de sécurité est proportionnel à  $\text{var}[X]$ .

4. *Principe de l'écart-type* :  $\pi[X] = \mathbb{E}[X] + \theta\sqrt{\text{var}[X]}$ ,  $\theta > 0$ .

Ici aussi le  $\theta > 0$  devrait se tenir, pour éviter de devenir ruiné avec la probabilité 1.

5. *Principe exponentiel* :  $\pi[X] = \frac{1}{\theta}\mathbb{E}[\exp(\theta X)]$ ,  $\theta > 0$ .

Où  $\theta$  est appelé *coefficient d'aversion* pour le risque.

6. *Principe de la valeur moyenne* :  $\pi[X] = f^{-1}(\mathbb{E}[f(X)])$ .

Où  $f$  est une fonction continue, convexe, et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Encore, la *prime pure* et la *prime exponentielle* sont des cas spéciaux avec  $f(x) = x$  et  $f(x) = \exp(\theta x)$ ,  $\theta > 0$ .

7. *Principe d'utilité nulle* : dans ce cas  $\pi[X]$  est la solution de l'équation suivante

$$\mathbb{E}[u(\pi[X] - X)] = u(0),$$

où  $u$  est une fonction d'utilité, strictement croissante et concave.

8. *Principe d'Esscher* :  $\pi[X] = \frac{\mathbb{E}[X \exp[\theta X]]}{\mathbb{E}[\exp[\theta X]]}$ ,  $\theta > 0$ .

Cette prime est l'espérance mathématique de la transformation d'Esscher de  $dF(x)$ , qui a comme une densité :

$$dG(x) = \frac{\exp[\theta x] dF(x)}{\int \exp[\theta t] dF(t)}.$$

9. *Principe de distorsion* :  $\pi[X] = \int_0^\infty g(1 - F(x)) dx$ .

On remarque que si  $g(u) = u$ , on obtient la prime pure  $\mathbb{E}[X]$  et si  $g(u) = u^{1/\rho}$ ,  $\rho \geq 1$ , on obtient le principe de la Transformation Proportionnelle du Risque, noté par (*PHT*, Proportional Hazard Transform).

### 1.3 Mesure de risque

Puisque les risques sont inhérents à la vie des projets de développement logiciels et systèmes où ils sont incontournables, il est primordial d'évaluer ces risques et leurs pertes potentielles, par exemple l'assurance repose sur le concept de transfert de risque : moyennant une prime, l'assuré se protège d'un aléa financier. Mesurer le risque assuré s'avère donc inévitable puisque cette information est nécessaire dans le cadre de la tarification pour déterminer les *chargements de sécurité* à ajouter à la *prime pure* (ces mesures de risque sont appelées *les principes de calcul de prime "premium principles"*) et dans une approche de *solvabilité* pour déterminer le niveau des réserves et des fonds propres (c-à-d déterminer le besoin en capital) dont doit disposer l'assureur pour être solvable.

Plusieurs mesures s'offrent à lui. Chacune a ses avantages comme elle a ses inconvénients. Il doit savoir alors laquelle est la plus fiable et la plus pertinente afin de réduire le plus possible le risque de son placement.

Le but de cette section est de donner la définition de la mesure de risque et leurs propriétés désirables et de décrire brièvement plusieurs mesures de risque bien connues comme la Valeur en Risque (*VaR*, Value-at-Risk), ses alternatives telles la *Moyenne de Déficit* (*ES*, Expected Shortfall), la *Valeur en Risque de queue* (*TVaR*, Tail Value-at-Risque) et l'*Espérance Conditionnelle de Queue* (*CTE*, Conditional Tail Expectation) et les plusieurs relations importantes qui se tiennent entre elles.

### 1.3.1 Définition

Mathématiquement, une mesure de risque ou un besoin en capital, d'une variable aléatoire (v.a.) de perte  $X$ , est définie comme une fonction d'une perte aléatoire à un nombre réel.

**Définition 1.3.1** (*Mesure de risque*)

Une mesure de risque est une fonction  $\rho$ , de  $\mathcal{X}$  au  $\mathbb{R}$ , faisant correspondre à un risque  $X$  un nombre réel noté par  $\rho[X]$

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow \rho[X], \end{aligned}$$

où  $\mathcal{X}$  est l'ensemble des v.a.'s  $X$  à valeurs réelles définies sur l'espace mesurable donné  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Une mesure de risque  $\rho[X]$  est interprétée comme le montant minimum qui, additionné à la perte  $X$  en début de période rend la couverture de  $X$  "acceptable". C'est donc le capital dont doit disposer la compagnie pour faire face à une perte financière de montant  $X$ . Alors une mesure de risque, basée sur une v.a. de perte, est conçue pour indiquer à quel point la perte aléatoire est risquée.

**Remarque 1.3.1** *Dans le contexte actuariel, une mesure de risque est définie comme une fonction faisant correspondre à une perte aléatoire non négative une valeur réelle non négative.*

### 1.3.2 Propriétés désirables d'une mesure de risque

#### Mesure de risque cohérente

Le problème de la base axiomatique des mesures de risque a reçu beaucoup d'attention commençant par le papier séminal d'Artzner *et al.* [8], où la définition de la mesure de risque cohérente a été fournie la première fois.

Une mesure de risque *cohérente* est une fonction réelle  $\rho$ , définie sur un espace des v.a.'s, satisfaisant les axiomes qu'on mentionne dans la définition suivante

**Définition 1.3.2** (*Mesure cohérente de risque*).

Une mesure de risque serait cohérente si elle satisfait les quatre axiomes suivants (pour toute  $X, Y \in \mathcal{X}$ ) :

1. *L'invariance par translation :*

$$\rho[X + e] = \rho[X] + e, \quad \text{pour tout } e \in \mathbb{R}.$$

2. *L'homogénéité positive :*

$$\rho[\lambda X] = \lambda \rho[X], \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

3. *La sous additivité* :

$$\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y].$$

4. *La monotonocité* :

$$\rho[X] \leq \rho[Y], \quad \text{si } P(X \leq Y) = 1.$$

Ces axiomes trouvent une interprétation naturelle dans la situation où la mesure de risque doit permettre de définir les besoins en capital

1. *L'invariance par translation* : implique que ajouter une quantité constante  $e$  (positive ou négative) à un risque ajoute le même montant à la mesure de risque. Il implique également que la mesure de risque pour une perte non aléatoire, avec la valeur connue  $e$  est juste la quantité de la perte  $e$ , c-à-d,  $\rho[e] = e$ .
2. *L'homogénéité positive* : signifie que change les unités de la perte ne change pas la mesure de risque, c-à-d, l'homogénéité positive exige que la mesure de risque doit être indépendant d'un changement de monnaie.
3. *La sous additivité* : cet axiome implique que le besoin en capital économique (ou la prime adéquate) de somme des pertes ne sont pas plus grande que la somme de besoin en capital de chaque perte. Ou, en d'autres termes, la sous-additivité représente l'effet de la diversification : une société qui couvre deux risques ne nécessite pas davantage de capitaux que la somme de ceux obtenus pour deux entités distinctes se partageant ces deux risques.
4. *La monotonocité* : désigne que si le montant résultant d'un risque est, au sens presque sûr, inférieur à celui résultant d'un autre risque, le capital nécessaire à couvrir le premier risque ne saurait être supérieur à celui nécessaire pour couvrir le second. Cet axiome, ainsi que l'axiome de *l'invariance par translation* exige également que la mesure de risque doit être aucune moins que la perte minimum, et pas plus grande que la perte maximum.

**Proposition 1.3.1** (*Caractérisation d'une mesure de risque cohérente*)

Une mesure de risque  $\rho$  est cohérente si et seulement s'il existe une famille des mesures de probabilité  $\mathcal{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , tels que

$$\rho[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} \{ \mathbb{E}^P[X] \}, \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

où  $\mathbb{E}^P[X]$  est l'espérance de  $X$  sous la mesure de probabilité  $P$ .

**Mesure de risque convexe**

*Föllmer et Schied* [37] suggèrent que le risque du marché puisse augmenter non-linéairement avec la valeur de la position. Ils ont proposé de détendre les axiomes de la homogénéité et de la sous-additivité positives à la convexité.

**Définition 1.3.3** (*Convexité*)

Une mesure de risque  $\rho$  s'appelle une mesure convexe de risque si elle satisfait

$$\rho[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \leq \alpha\rho[X] + (1 - \alpha)\rho[Y], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

La convexité donne une signification précise à l'idée que la diversification ne devrait pas augmenter le risque c-à-d, le risque de la portefeuille diversifiée est inférieur ou égale que la moyenne pondérée (the weighted average) des différents risques.

**Remarque 1.3.2** Une mesure cohérente est toujours normalisée à  $\rho[0] = 0$ , par homogénéité. En revanche, si une mesure convexe est normalisée à  $\rho[0] = 0$ , alors pour  $\alpha \in [0, 1]$ , on a

$$\rho[\alpha X] = \rho[\alpha X + (1 - \alpha)0] \leq \alpha\rho[X],$$

alors que pour  $\alpha \in [1, +\infty)$ , on a

$$\rho[X] = \rho\left[\frac{1}{\alpha}\alpha X\right] = \rho\left[\frac{1}{\alpha}\alpha X + (1 - \frac{1}{\alpha})0\right] \leq \frac{1}{\alpha}\rho[\alpha X],$$

c-à-d que  $\rho[\alpha X] \geq \alpha\rho[X]$ .

**Autres propriétés d'une mesure de risque**

On rappelle ici les autres principales propriétés d'une mesure de risque citées dans la littérature actuarielle.

1. *Chargement de sécurité* :  $\rho[X] \geq \mathbb{E}[X]$ .  
La mesure de risque (ou la prime) est doit être supérieur ou égale à la prime pure  $\mathbb{E}[X]$ .
2. *Constance* :  $\rho[a] = a$ , pour toute constante réelle  $a$ .  
Cette propriété reflète qu'aucun chargement du risque injustifié.
3. *Non chargement excessif* :  $\rho[X] \leq \max(X)$ ,  $\forall X \in \mathcal{X}$ .  
Cette propriété dit que la mesure de risque (ou la prime) ne devrait pas dépasser la perte maximale.
4. *Objectivité* :  $\rho[X] = \rho[F]$ , où  $F$  est la fonction de répartition (f.r.) de  $X$ .  
Une mesure de risque est dite *objective* lorsqu'elle ne dépend que de  $F$  et non de  $X$  elle-même. L'objectivité assure que  $\rho[X]$  peut être calculée à partir d'un estimation de  $F$ .
5. *L'invariance en loi* :  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ , alors  $\rho[X] = \rho[Y]$ .
6. *Additivité pour des risques indépendants* : si  $X$  et  $Y$  sont indépendants, alors  $\rho[X + Y] = \rho[X] + \rho[Y]$ .

La mesure de risque d'une somme de deux risques indépendants est égale à la somme des mesures de ces deux risques. Cette propriété est une condition raisonnable pour un principe de calcul de prime, puisqu'elle s'assure que l'assuré n'a aucun intérêt en divisant le risque demandant l'assurance à plusieurs assureurs.

7. *Additivité pour des risques comonotone* : si des risques  $X$  et  $Y$  sont comonotone, alors  $\rho[X + Y] = \rho[X] + \rho[Y]$ , où  $X$  et  $Y$  sont comonotone s'il existe un risque  $Z$  et des fonctions faiblement croissantes  $f$  et  $g$  tel que  $X = f(Z)$  et  $Y = g(Z)$  (voir Wang [96]).

### 1.3.3 VaR est-elle une bonne mesure ?

Ces dernières années un concept s'est imposé. C'est celui de la *VaR*, une description concise du risque par un seul chiffre. En fait, c'est en 1993 que le *Groupe des Trente*<sup>2</sup> a recommandé l'usage de la *VaR* comme critère de mesure du risque de marché. D'ailleurs, à la fin de 1994, la mise à disposition gratuite par la banque J.P. Morgan de sa méthodologie et de ses données (dans un document technique intitulé RiskMetrics [71]) a impulsé le mouvement de développement fulgurant de la *VaR*. En l'espace de quelques années, cette mesure est devenue un des modèles les plus importants dans le domaine de la gestion du risque. Le *comité de Bâle*<sup>3</sup> a contribué à accentuer l'intérêt pour cette méthode en la citant nommément au cours de ses travaux exploratoires et réglementaires. De plus, il a récemment imposé aux institutions financières l'utilisation de la *VaR* pour estimer le capital minimal de couverture. Par conséquent, celles-ci ont fortement contribué au développement international de la *VaR* comme outil de la quantification et de la transformation de risque.

#### Définitions

La *VaR* est une approche moderne qui est développée pour répondre au besoin des institutions financières d'une mesure de risque interne dans le cadre de la gestion du risque.

#### Définition 1.3.4 (*Value-at-Risk*)

La *VaR* est le montant des pertes qui ne doivent pas être dépassé pour un niveau de confiance donné sur un horizon de temps donné.

On se donne un horizon de temps  $T$  et un niveau de confiance  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $X_T$  la valeur d'un portefeuille à cet horizon, alors  $VaR[X_T, p]$  vérifie :

$$P(X_T > VaR[X_T, p]) = 1 - p.$$

**Définition 1.3.5** On appelle *VaR* au niveau  $p \in ]0, 1[$  le quantile d'ordre  $p$ , notée par  $VaR_p$  ou par  $VaR[X, p]$ , qui est donnée par la formule suivante

$$VaR_p = VaR[X, p] = x_p, \quad \text{où } P(X \leq x_p) = p,$$

---

<sup>2</sup>Forum international composé de banquiers, d'autorités de contrôle et d'académiciens.

<sup>3</sup>Le comité de Bâle du contrôle bancaire est un comité des autorités de surveillance d'opérations bancaires qui a été établi en 1975, par les gouverneurs des banques centrales des pays du groupe G10 : Allemagne, Belgique, Canada, Etats-Unis, France, Italie, Japon, Luxembourg, Pays-Bas, Royaume-Uni, Suède et Suisse.

ou encore par

$$VaR_p = F^{\leftarrow}(p) := \inf \{x, P(X \leq x) \geq p\}, \quad (1.1)$$

avec  $F^{\leftarrow}(p) = Q(p)$  désigne la fonction de quantile ou l'inverse généralisé de la loi de  $X$ .

En terme économique, la  $VaR$  mesure la perte potentielle observable sur un portefeuille qui peut survenir à la suite de mouvements adverses des prix de marché avec une probabilité donnée sur un horizon de temps  $T$  donné.

### Avantages de la VaR

La  $VaR$  a été considérée comme une mesure standard du risque basée sur des fondements scientifiques solides. Depuis son apparition, cette mesure de risque s'est avérée être un instrument plus flexible que les mesures traditionnelles tels la variance ou la déviation standard et le degré de sensibilité.

1. Elle tend à devenir un indicateur de risque largement utilisée par les établissements financiers car elle résume en un seul numéro tous les risques d'un portefeuille, quelle que soit leur nature (taux de change, actions, ...), grâce à sa globalité. Elle présente l'avantage d'être plus facile à comprendre par des investisseurs qui ne sont pas forcément des spécialistes en techniques de gestion de portefeuille ou de gestion des risques.
2. Les mesures traditionnelles du risque comme la déviation standard et le degré de sensibilité ne donnent pas une perception de l'envergure (l'ampleur) des pertes possibles mais simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne. Par contre, la  $VaR$  permet d'évaluer de manière quantitative la perte potentielle maximale qu'une entité financière peut subir à un niveau de probabilité donné et dans un laps de temps donné.
3. Elle est probabiliste, et fournit à un gestionnaire des risques l'information utile sur les probabilités associées avec montants spécifiques de perte.
4. La  $VaR$  est universel, elle peut être mesurée sur des portefeuilles de n'importe quel type.

### Inconvénients de la VaR

En dépit de son universalité, plusieurs auteurs ont précisé les insuffisances de la  $VaR$

1. La  $VaR$  n'est qu'un montant de perte potentiel et son évaluation peut être assez imprécise.
2. Elle seule d'un niveau prédéterminé  $p$  ne fournit aucune information sur l'épaisseur de la queue supérieur de la fonction de répartition au-delà ce quantile. En d'autres termes, en se concentrant sur la  $VaR$  à un certain niveau, on ignore la sévérité

potentielle du défaut au-delà de ce seuil. Ceci signifie qu'on n'a aucune information sur à quel point les mauvaises choses peuvent devenir dans une situation réelle de stress.

3. Cette mesure de risque peut être très dangereuse et on peut rencontrer des cas où

$$VaR[X, p] \leq \mathbb{E}[X],$$

c-à-d que le montant nécessaire pour être couvert dans 100p% des cas est inférieur de la perte moyenne. Donc la *VaR* ne possède pas de *chargement de sécurité*.

4. *Artzner et al.* [7] ont montré que la *VaR* n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne satisfait pas la condition de *sous additivité* qui déclare qu'une mesure de risque devrait toujours refléter les avantages de la diversification. Alors, la *VaR* comme mesure de risque contredit le principe de la diversification qui stipule que l'agrégation de différents actifs dans un portefeuille permet de réduire le risque et par conséquent, elle ne se comporte pas bien en ce qui concerne l'addition des risques, créant des problèmes sévères d'agrégation.

**Remarque 1.3.3** *La VaR, comme prouver Yamai et Yoshida [106], est sous additive seulement dans le cas restrictif où la distribution de perte est normale (tant que  $p < 0.5$ ), généralement pour les distributions elliptiques, et c'est de recouvrement limité parce que la plupart des distributions de perte ne sont pas elliptiques.*

**Exemple 1.3.1** *(VaR n'est pas sous additive)*

*Ce qui suit est un contre exemple pour la sous additivité de la VaR.*

*On considère les deux risques indépendants suivants la lois de Pareto,  $X \sim \text{Pareto}(1, 1)$  et  $Y \sim \text{Pareto}(1, 1)$ , où*

$$F_X(t) = F_Y(t) = 1 - \frac{1}{t}, \quad t > 1.$$

*On a alors*

$$VaR[X, p] = VaR[Y, p] = \frac{1}{1-p}, \quad \forall p \in [0, 1].$$

*Par l'utilisation de le produit de convolution<sup>4</sup>, on peut vérifier que*

$$P(X + Y \leq t) = 1 - \frac{2}{t} - 2 \frac{\log(t-1)}{t^2}, \quad t > 2.$$

*Puisque*

$$P(X + Y \leq 2VaR[X, p]) = p - \frac{(1-p)^2}{2} \log\left(\frac{1+p}{1-p}\right) < p,$$

---

<sup>4</sup>Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes  $f$  et  $g$ , est une autre fonction, qui se note généralement « $f * g$ » et qui est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

*l'inégalité*

$$VaR[X, p] + VaR[Y, p] < VaR[X + Y, p],$$

*est vraie quel que soit  $p$ , de sorte que la VaR ne peut pas être sous additive dans ce cas.*

*Est-il possible de trouver des mesures cohérentes de risque qui sont aussi souples et flexibles comme la VaR ?*

### 1.3.4 Mesures alternatives à la VaR

Après avoir échoué par son critère de non sous additivité, il s'est avéré que la mesure de risque *VaR* comprend certaines lacunes et qu'elle n'est pas une bonne mesure qui reflète le risque d'un portefeuille parce qu'elle ne nous indique rien au sujet de la taille potentielle de la perte qui la dépasse. Pour alléger les problèmes inhérents à la *VaR*, nombreuses mesures de risque alternatives ont été développées telles l'*ES*, la *CTE* et la *TVaR*, où ces mesures de risque permettent de prendre en compte l'ampleur des pertes au-delà de la *VaR*.

Pour plus détails sur ces mesures alternatives, se référer à *Kass et al.* [52], *Dhaene et al.* [26], *Acerbi* [1], *Acerbi et Tasche* ([2] et [3]), *Rockafellar et Uryasev* ([84] et [85]), *Wirch et Hardy* [104] et *Yamai et Yoshida* [107].

**Définition 1.3.6** (*Expected Shortfall*)

*Pour un risque  $X$ , l'ES au seuil  $p \in ]0, 1[$ , notée par  $ES_p$  ou  $ES[X, p]$ , est définie par*

$$ES_p = ES[X, p] := \mathbb{E}[(X - VaR[X, p])_+], \quad (1.2)$$

*où  $(X - VaR[X, p])_+ := \max\{X - VaR[X, p], 0\}$ .*

Donc, l'*ES* est l'espérance des pertes excessives, prenant la valeur zéro quand les pertes sont moins que la *VaR*. Par exemple, en termes d'assurance, c'est la prime nette dans le cadre d'un contrat d'excédent de perte (stop-loss) (voir le paragraphe 1.1.4) dont la rétention est la *VaR* au niveau  $p$ .

**Définition 1.3.7** (*Conditional Tail Expectation*)

*Pour un risque  $X$ , la CTE au seuil  $p \in ]0, 1[$ , notée par  $CTE_p$  ou par  $CTE[X, p]$ , est définie par*

$$CTE[X, p] := \mathbb{E}[X / X > VaR[X, p]]. \quad (1.3)$$

La *CTE* mesure la taille moyenne du plus haut  $(1-p)100\%$  des valeurs de  $X$ , dépassant la *VaR*, mais elle ignore des valeurs au-dessous de la *VaR*. Cette mesure de risque reflète non seulement la fréquence du défaut, mais également la valeur moyenne du défaut.

Il est évident que la *CTE* sera toujours plus grand ou égal que la *VaR* pour la même valeur de  $p$ , puisque c'est la *VaR* plus la perte moyenne, c-à-d :

$$CTE[X, p] = VaR[X, p] + \mathbb{E}[X - VaR[X, p] / X > VaR[X, p]].$$

Un autre synonyme pour *CTE* qu'on peut rencontrer dans la littérature est la Valeur en Risque Conditionnel, notée par (*CVaR*, Conditional VaR).

**Définition 1.3.8** (*Tail Value at Risk*)

Pour un risque  $X$ , la  $TVaR$  au seuil  $p \in ]0, 1[$ , notée par  $TVaR[X, p]$  ou par  $TVaR_p$ , est définie par la formule suivante

$$TVaR[X, p] := \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X, q] dq. \quad (1.4)$$

Ainsi, la  $TVaR$  est juste la moyenne arithmétique des quantiles de  $X$  (de la  $VaR$ ) de niveau supérieur à  $p$ .

On peut réécrire la  $TVaR$  par la formule suivante

$$TVaR[X, p] = \frac{1}{1-p} \left\{ \mathbb{E}[X] - \int_0^p VaR[X, q] dq \right\}.$$

Il est à noter que  $TVaR[X, 0] = \mathbb{E}[X]$ .

Comme la  $TVaR$  est une fonction croissante du niveau  $p$ , alors

$$TVaR[X, p] \geq VaR[X, p] \quad \text{et} \quad TVaR[X, p] \geq TVaR[X, 0] = \mathbb{E}[X].$$

Donc, cette mesure de risque contient toujours un *chargement de sécurité*.

Le résultat suivant détaille les relations qui peuvent exister entre les quatre mesures de risque définies ci-dessus.

**Théorème 1.3.2** (*La relation entre la VaR, la ES, la TVaR et la CTE*)

Pour  $p \in ]0, 1[$ , on a que

$$1. \quad TVaR[X, p] = VaR[X, p] + \frac{1}{1-p} ES[X, p]. \quad (1.5)$$

$$2. \quad CTE[X, p] = VaR[X, p] + \frac{1}{1-F(VaR[X, p])} ES[X, p]. \quad (1.6)$$

$$3. \quad CTE[X, p] = TVaR[X, F(VaR[X, p])]. \quad (1.7)$$

**Preuve**

1. Soit  $U$  une v.a. uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} ES[X, p] &= \mathbb{E}[(X - VaR[X, p])_+] \\ &= \mathbb{E}[(F^{\leftarrow}(U) - VaR[X, p])_+] \\ &= \int_0^1 (VaR[X, q] - VaR[X, p])_+ dq \end{aligned}$$

De  $VaR[X, q] > VaR[X, p] \iff q > p$  immédiatement, on a que

$$\begin{aligned} ES[X, p] &= \int_p^1 VaR[X, q] dq - VaR[X, p] (1 - p). \\ &= (TVaR[X, p] dp - VaR[X, p]) (1 - p). \end{aligned}$$

Par conséquent  $TVaR$  est donnée par (1.5)

2. On a

$$\begin{aligned} ES[X, p] &= \mathbb{E}[(X - VaR[X, p])_+] \\ &= \mathbb{E}[X - VaR[X, p] / X > VaR[X, p]] P(X > VaR[X, p]) \\ &= \mathbb{E}[X - VaR[X, p] / X > VaR[X, p]] (1 - F(VaR[X, p])) \\ &= (CTE[X, p] - VaR[X, p]) (1 - F(VaR[X, p])). \end{aligned}$$

Alors, on obtient que  $CTE[X, p] = VaR[X, p] + \frac{1}{1 - F(VaR[X, p])} ES[X, p]$ .

3. L'expression (1.7) suit immédiatement de (1.5) et de (1.6).

■

**Proposition 1.3.2** (Charpentier, [13])

La  $TVaR$  est cohérente pour les risques continus et coïncide avec la  $CTE$  c-à-d :

$$CTE[X, p] = TVaR[X, p], \quad p \in ]0, 1[. \quad (1.8)$$

**Preuve** Voir Charpentier [13]. ■

**Proposition 1.3.3** La  $TVaR$  est la plus petite mesure de risque majorant la  $VaR$  qui soit cohérente.

**Remarque 1.3.4** La  $TVaR$ , bien qu'étant cohérente, reflète seulement des pertes dépassant le quantile " $VaR$ ", et par conséquent, elle ignore les pertes au-dessous de  $VaR$ . D'ailleurs, elle ne s'ajuste pas correctement aux pertes extrêmes de basse fréquence et sévérité élevée, car il est basé sur une perte moyenne.

## 1.4 Mesures de risque par distorsion

Les mesures de risque par distorsion sont des mesures attrayantes car elles permettent à l'utilisateur d'obtenir de meilleures mesures de risque à partir de la transformation des originales. L'idée est en effet d'alourdir la queue de la distribution de

la variable aléatoire d'intérêt afin d'engendrer un chargement par rapport à la prime pure. Cette transformation de la fonction de répartition sera effectuée à l'aide d'une fonction de distorsion qui est définie au-dessous. Ces mesures prennent leurs origines dans la *théorie dual de Yaari* [108] et développées avec leurs fonctions de distorsion à partir de la recherche de *Wang* [95] dans les principes de calcul de prime. Elles ont été considérablement étudiées en littérature actuarielle en liaison avec la théorie axiomatique de principe de calcul de prime, voir par exemple, *Denneberg* [23], *Wang, Young et Panjer* [101] et *Wang* [98].

### 1.4.1 Concepts de mesure de risque par distorsion

La mesure de risque par distorsion et leur fonction de distorsion sont définies comme suit :

**Définition 1.4.1** (*Fonction de distorsion*)

On dit que  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de distorsion si :

1.  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ .
2.  $g$  est une fonction non décroissante.

L'objectif de cette fonction de distorsion est de transformer la fonction de survie (notée par  $S$  ou par  $\bar{F}$ )  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  de sorte que quand une mesure de risque est calculée la mesure tordue en résultant reflète plus adéquatement la possibilité et l'impact des événements extrêmes. Plus formellement, la distorsion de  $\bar{F}(x)$  est donnée par la fonction de composition suivante

$$g(\bar{F}(x)) \equiv (g \circ \bar{F})(x).$$

**Définition 1.4.2** (*Mesure de risque par distorsion*)

Soit  $X > 0$  représente une perte d'assurance. La mesure de risque par distorsion associée à la fonction de distorsion  $g$  est la mesure  $\Pi_g$  définie par

$$\Pi_g [X] := \int_0^\infty g(\bar{F}(x)) dx. \quad (1.9)$$

Dans le cas où la perte  $X \in \mathbb{R}$ . La mesure de risque par distorsion  $\Pi_g$  est définie, par l'utilisation de l'intégrale de Choquet <sup>5</sup> (voir *Denneberg* [23]), comme suit

$$\Pi_g [X] := \int_{-\infty}^0 [g(\bar{F}(x)) - 1] dx + \int_0^\infty g(\bar{F}(x)) dx. \quad (1.10)$$

---

<sup>5</sup>Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable,  $\mathcal{X}$  est l'ensemble des v.a.'s  $X$  à valeurs réelles définies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et une fonction monotone  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ . Pour tout  $X \in \mathcal{X}$ , l'intégrale de Choquet, introduite par Choquet en 1953, de  $X$  est définie par :

$$\mu(X) := \int_{-\infty}^0 [\mu(X \geq x) - 1] dx + \int_0^\infty \mu(X \geq x) dx.$$

En plus, si  $g$  est dérivable, par un changement de variable et l'intégration par partie  $\Pi_g[X]$  peut être réécrit comme suit

$$\Pi_g[X] := \int_0^1 F^{\leftarrow}(s)g'(1-s)ds, \quad (1.11)$$

où  $g'$  est la dérivée de  $g$  et  $F^{\leftarrow}(s)$  est la fonction de quantile de  $X$ . Tandis que les expressions (1.9) et (1.10) ont des avantages interprétatifs, la deuxième représentation (1.11) est plus commode pour développer l'estimateur empirique de la mesure de risque par distorsion.

**Remarque 1.4.1**

1. L'espérance mathématique de  $X$ , si elle existe, peut être écrite comme suit

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^0 [\bar{F}(x) - 1] dx + \int_0^{\infty} \bar{F}(x)dx,$$

on notera que, dans le cas de la fonction de distorsion d'identité  $g(q) = q$ , la mesure par distorsion  $\Pi_g$  donnée par (1.10) devient correspond à  $\mathbb{E}[X]$ . Alors  $\mathbb{E}[X]$  est l'exemple le plus simple de la mesure de risque par distorsion.

2. Lorsque  $g_1(q) \leq g_2(q)$  quel que soit  $q \in [0, 1]$ , on a alors  $\Pi_{g_1}[X] \leq \Pi_{g_2}[X]$ .
3. La mesure de risque donnée par (1.9) ou par (1.10) peut être interprétée comme une "espérance tordue"  $\mathbb{E}_g[X]$ , évaluée avec une "probabilité tordue" dans le sens de l'intégrale de Choquet (voir Denneberg [23] et Wang [98]), c-à-d :

$$\Pi_g[X] \equiv \mathbb{E}_g[X].$$

En substituant  $\int_0^{S(x)} dg(s)$  à  $g(\bar{F}(x))$  dans (1.9) et en permutant l'intégrale, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 1.4.1** *Quel que soit le risque  $X$ , la mesure de risque par distorsion associée à la fonction de distorsion  $g$  peut s'écrire*

$$\Pi_g[X] = \int_0^1 VaR[X, 1-s] dg(s). \quad (1.12)$$

Ainsi, les mesures de risque par distorsion sont des moyennes pondérées de la VaR.

**Proposition 1.4.2** *(Propriétés de la mesure de risque par distorsion)*

Les propriétés des mesures de risque par distorsion correspondent aux résultats standard suivants au sujet de l'intégrale de Choquet :

1. *Monotonie* : si  $X \leq Y$ , alors  $\Pi_g[X] \leq \Pi_g[Y]$ .

Noter que la propriété de la monotonie assure que  $\Pi_g[X] \leq \max(X)$ .

2. *Homogénéité positive* :  $\Pi_g[\eta X] = \eta \Pi_g[X]$ , pour tout  $\eta \geq 0$ .
3. *Translation invariant* :  $\Pi_g[X + c] = \Pi_g[X] + c$ , pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .
4. *Additivité pour des risques comonotone* : si les deux risques  $X$  et  $Y$  sont comonotone, alors  $\Pi_g[X + Y] = \Pi_g[X] + \Pi_g[Y]$ .
5. Dans le cas générale, les mesures de risque par distorsion ne sont pas additives  $\Pi_g[X + Y] \neq \Pi_g[X] + \Pi_g[Y]$ .
6. *Sous additivité* : si  $g$  est concave, alors  $\Pi_g[X + Y] \leq \Pi_g[X] + \Pi_g[Y]$ .
7. *Superadditivité* : si  $g$  est convexe, alors  $\Pi_g[X + Y] \geq \Pi_g[X] + \Pi_g[Y]$ .
8. Si  $g(q) \geq q$  quel que soit  $q \in [0, 1]$ , on a alors  $\Pi_g[X] \geq \mathbb{E}[X]$ , de sorte que les mesures de risque par distorsion associée à telles fonctions de distorsion contiennent un chargement de sécurité.

### 1.4.2 Mesures par distorsion concaves et cohérentes

Ce paragraphe est consacré pour répondre à la question suivante :

*Est ce que toutes les mesures de risque par distorsion sont cohérentes et dans quelles conditions, ces mesures de risque deviennent cohérentes ?*

Une sous classe des fonctions de distorsion qui est souvent considérée dans la littérature est la classe des fonctions de distorsion concaves.

**Définition 1.4.3** (*Fonction concave*)

Une fonction de distorsion  $g$  serait concave si pour  $y \in (0, 1]$ , il existe des nombres réels  $a_y$  et  $b_y$  et une ligne  $l(x) = a_y x + b_y$ , tels que  $l(y) = g(y)$  et  $l(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in (0, 1]$ .

Une fonction concave de distorsion est nécessairement continue dans  $(0, 1]$ . On suppose qu'également est continue au point 0 de la raison de la convenance. Une mesure de risque avec une fonction concave de distorsion s'appelle alors une *mesure concave par distorsion*.

*Wirch et Hardy* [105] ont prouvé qu'une mesure de risque basée sur une fonction de distorsion est cohérente si et seulement si la fonction de distorsion  $g$  est *concave*. Il peut montrer que si  $g$  est concave la mesure produite de risque soit spectrale (pour plus détails sur la mesure spectrale de risque, voir *Acerbi* [1]). Toutes les fonctions de distorsion produisent des mesures de risque par distorsion qui sont satisfait les critères (les axiomes) de la cohérence ci-dessus sauf le critère de sous additivité. Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour le critère de la sous additivité.

**Théorème 1.4.1** (*Sous additivité (Wirch et Hardy, [105])*)

La mesure de risque par distorsion,  $\Pi_g$  est sous additive si et seulement si  $g$  est une fonction concave.

**Preuve** Voir la démonstration du Théorème 2.2 dans *Wirch et Hardy* [105] page 6. ■

### 1.4.3 Exemples de mesure de risque par distorsion

#### Value-at-Risk

La  $VaR$  correspond à la fonction de distorsion qui est donnée par la formule suivante

$$g_{VaR}(u) = \mathbb{I}_{(u > 1-p)} = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq 1-p, \\ 1, & \text{si } u > 1-p. \end{cases}, \quad \text{où } u \in [0, 1]. \quad (1.13)$$

En effet, soit

$$\begin{aligned} g_{VaR}(\overline{F}(x)) &= \mathbb{I}_{(\overline{F}(x) > 1-p)} \\ &= \mathbb{I}_{(1-F(x) > 1-p)}. \end{aligned}$$

Alors, de  $F(x) < p \iff F^{\leftarrow}(p) > x$ , on a

$$g_{VaR}(\overline{F}(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < F^{\leftarrow}(p), \\ 0, & \text{si } x \geq F^{\leftarrow}(p). \end{cases}$$

Par conséquent, immédiatement, on obtient que

$$\Pi_{g_{VaR}}[X, p] = \int_0^{F^{\leftarrow}(p)} dx = F^{\leftarrow}(p) = VaR[X, p]. \quad (1.14)$$

D'après la figure 1.1 qui représente la fonction de distorsion de la  $VaR$ , on remarque que cette fonction de distorsion est non décroissante et discontinue en raison du saut au  $u = 1 - p$ . Ceci prédétermine que la  $VaR$  n'est pas cohérente. En conséquence, cette mesure de risque ne représente pas une bonne fonction de distorsion (c-à-d  $g_{VaR}$  n'est pas concave).

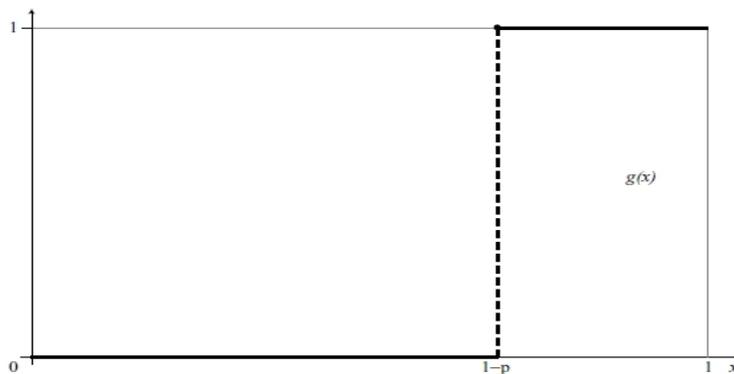


FIG. 1.1 – Fonction de distorsion de la VaR

### Tail VaR (TVaR)

La  $TVaR$  correspond à la fonction de distorsion qui est définie comme suit

$$g_{TVaR}(u) = \min \left\{ \frac{u}{1-p}, 1 \right\}, \quad \text{où } u \in [0, 1], \quad (1.15)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} g_{TVaR}(\bar{F}(x)) &= \min \left\{ \frac{1-F(x)}{1-p}, 1 \right\} \\ &= \begin{cases} 1, & x < F^{\leftarrow}(p), \\ \frac{1-F(x)}{1-p}, & x \geq F^{\leftarrow}(p). \end{cases} \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \Pi_{g_{TVaR}}[X, p] &= \int_0^{F^{\leftarrow}(p)} dx + \frac{1}{1-p} \int_{F^{\leftarrow}(p)}^{\infty} (1-F(x)) dx \\ &= \int_0^{VaR[X, p]} dx + \frac{1}{1-p} \int_{VaR[X, p]}^{\infty} (1-F(x)) dx \\ &= VaR[X, p] + \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[(X - VaR[X, p])_+]. \end{aligned}$$

De la formule (1.5), on obtient que

$$\Pi_{g_{TVaR}}[X, p] = TVaR[X, p]. \quad (1.16)$$

D'après la figure (1.2) qui représente la fonction de distorsion de  $TVaR$ . On observe que cette fonction de distorsion est non décroissante, continue et concave, impliquant que la  $TVaR$  est cohérente, mais n'est pas dérivable à  $u = 1 - p$ . En conséquence, elle ignore l'information potentiellement valable parce qu'elle trace tous les percentiles au-dessous de  $u = 1 - p$  à un point unique "0". En faisant ainsi, elle ne tient pas compte la sévérité des valeurs extrêmes. Ce n'est pas le seul problème avec la fonction de distorsion de la  $TVaR$ . D'une manière primordiale,  $g$  n'emploie pas toute l'information de la distribution de perte (Wang [99]).

Le résultat suivant montre que la  $TVaR$  est la plus petite mesure de risque par distorsion associée à une fonction de distorsion concave et excédant la  $VaR$  de même niveau de probabilité. En d'autres termes, la  $TVaR$  est la plus petite mesure de risque cohérente excédant la  $VaR$ .

**Théorème 1.4.2** (*Caractéristique de la TVaR (Dhaene et al., [26])*)

*Quel que soit le niveau de probabilité  $0 < p < 1$  et le risque  $X$ , on a*

$$TVaR[X, p] = \min \{ \Pi_g[X] \mid g \text{ est concave et } \Pi_g \geq VaR \}.$$

**Preuve** Voir la démonstration du Théorème 9 dans *Dhaene et al. [26]* page 24. ■

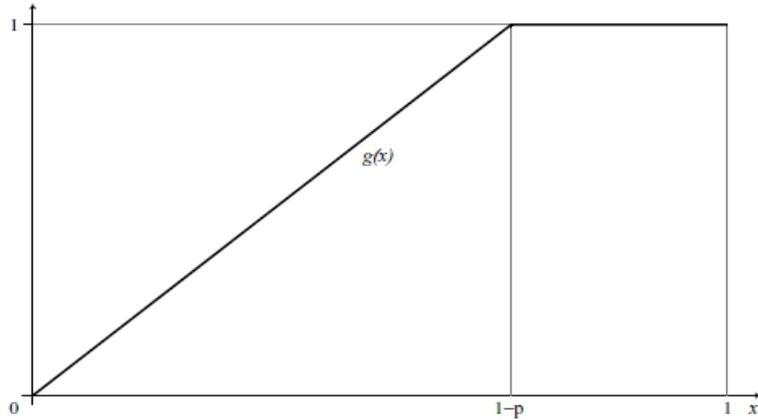


FIG. 1.2 – Fonction de distorsion de la TVaR

### Wang Transform

La mesure de risque Transformation de Wang (en anglais, Wang Transform) a été présentée par *Wang* [98] comme un exemple d’une mesure de risque qui pourrait donner une solution à les problèmes qui sont résultés de la *TVaR* (voir la remarque 1.3.4). Cette mesure de risque a une fonction de distorsion définie par

$$g_{WT}(u) := \Phi(\Phi^{-1}(u) + \lambda), \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

où  $\lambda = \Phi^{-1}(\zeta)$ ,  $0 < \zeta < 1$ , et  $\Phi^{-1}$  est la fonction de quantile de la distribution normale standard  $\Phi$  et  $0 < \zeta \leq 0.5$  est un certain paramètre (on a besoin de  $\zeta \leq 0.5$  afin d’obtenir des mesures de risque concaves par distorsion). La fonction de distorsion  $g$  est, en effet, non décroissante, concave et dérivable tels que  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ .

Cette mesure de risque, notée par  $\Pi_{WT}$  ou par  $\Pi_{g_{WT}}[X, \zeta]$ , est définie comme suit

$$\Pi_{g_{WT}}[X, \zeta] := \int_0^\infty (\Phi(\Phi^{-1}(1 - F(x)) + \Phi^{-1}(\zeta))) dx, \quad (1.18)$$

où  $\zeta$  peut être changé pour faire  $\Pi_{WT}$  plus pointu avec des pertes élevées ou basses. *Wang* [98] a recommandé Wang Transform pour la mesure des risques d’assurance. Cette mesure de risque est cohérente et possède la propriété de chargement de sécurité.

### Proportional Hazard Transform

La mesure de risque Proportional Hazard Transform, notée par  $\Pi_{PHT}$  ou par  $\Pi_{g_{PHT}}[X, \varrho]$ , a été présentée par *Wang* [95], sa fonction de distorsion est

$$g_{PHT}(u) = u^{1/\varrho}, \quad \varrho \geq 1, \quad (1.19)$$

où  $g_{PHT}(u)$  est une fonction dérivable. Alors,  $\Pi_{PHT}$  est définie par

$$\Pi_{g_{PHT}} [X, \varrho] := \int_0^\infty (\bar{F}(x))^{1/\varrho} = \int_0^\infty (1 - F(x))^{1/\varrho}, \quad \varrho \geq 1, \quad (1.20)$$

avec  $\varrho$  appelé le paramètre de distorsion (ou aversion) au risque, il représente le degré de distorsion (les valeurs plus élevées de  $\varrho$  correspondent à un niveau de sécurité plus élevé).

Cette mesure de risque par distorsion est cohérente et satisfait les axiomes désirables pour une mesure de risque étudiée par *Wang, Young et Panjer* [101]. Noter cela, si  $\varrho = 1$  alors  $\Pi_{g_{PHT}}$  est l'espérance mathématique de  $X$ .

### Proportional Hazard Transform de Réassurance

Dans un contrat stop-loss (voir le paragraphe 1.1.4), l'assureur prend à sa charge  $\min(X, R)$  et le réassureur prend  $\max(0, X - R)$  (avec  $R > 0$ , le seuil de la rétention de réassurance du risque  $X$ ). Alors, la mesure Proportional Hazard Transform de réassurance, notée par  $\Pi_{PHT,R}$  ou par  $\Pi_{g_{PHT,R}} [X, \varrho]$ , est définie par :

$$\Pi_{PHT,R} [X, \varrho] := \int_R^\infty (\bar{F}(x))^{1/\varrho} dx.$$

### Wang's Right-Tail Deviation

Dans le cas général dans lequel  $X$  peut prendre n'importe quelle valeur réelle, c-à-d  $X \in \mathbb{R}$ , *Wang* [97] a défini l'Écart de la Queue Droite de Wang, noté par ( $\Pi_{RTD}$ , Right-Tail Deviation), comme suit

$$\Pi_{RTD} [X, r] := \int_{-\infty}^{+\infty} ([1 - F(x)]^r - [1 - F(x)]) dx, \quad 0 < r < 1. \quad (1.21)$$

Ceci peut être exprimé comme

$$\Pi_{RTD} [X, r] = \Pi_{g_1} [X, r] - \Pi_{g_2} [X, r],$$

où  $\Pi_{g_1} [X, r]$ ,  $\Pi_{g_2} [X, r]$  sont données par l'équation (1.10) avec  $g_1(u) = u^r$  et  $g_2(u) = u$ .

### Wang's Left-Tail Deviation

*Wang* [97] a proposé également une mesure de risque de la queue gauche pour les v.a.'s  $X \in \mathbb{R}$ . L'Écart de la Queue Gauche de Wang, noté par ( $\Pi_{LTD}$ , Left-Tail Deviation), est

$$\Pi_{LTD} [X, r] := \Pi_{RTD} [-X, r] = \int_{-\infty}^{+\infty} ([F(x)]^r - F(x)) dx, \quad 0 < r < 1. \quad (1.22)$$

On peut réécrire  $\Pi_{LTD} [X, r]$ , si  $F_{-X}$  est la f.r. de  $(-X)$ , comme suit

$$\Pi_{LTD} [X, r] := \int_{-\infty}^{+\infty} ([1 - F_{-X}(x)]^r - [1 - F_{-X}(x)]) dx. \quad (1.23)$$

### Wang's Two-Sided Deviation

Wang [97] a défini l'Ecart Bilatéral, noté par  $(\Pi_{TSD}, \text{Two-Sided Deviation})$  comme la moyenne de la  $\Pi_{RTD}$  et la  $\Pi_{LTD}$

$$\Pi_{TSD}[X, r] = \Delta_r[X] := \frac{1}{2}(\Pi_{RTD}[X, r] + \Pi_{LTD}[X, r]), \quad 0 < r < 1. \quad (1.24)$$

Donc, on peut résumer les fonctions de distorsion associées à quelques mesures de risque dans le Tableau 1.1

Mesure de risque	Paramètre	Fonction de distorsion
Value-at-Risk	$VaR_p$	$g(x) = \mathbb{1}_{[x \geq p]}$
Tail Value-at-Risk	$TVaR_p$	$g(x) = \min\{x/(1-p), 1\}$
Wang Transform	$WT_\zeta$	$g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(\zeta))$
Proportional Hazard Transform	$PHT_e$	$g(x) = x^{1/e}$

TAB. 1.1 – Fonctions de distorsion associées à quelques mesures de risque

**Remarque 1.4.2** *Il existe dans la littérature un autre type de mesures de risques, appelées les mesures de risque spectrales (voir Acerbi [1]). Une fonction spectrale (ou fonction d'aversion) est  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  décroissante, telle que  $\int_0^1 \phi(t)dt = 1$ . La mesure de risque spectrale induite est*

$$\rho[X] := \int_0^1 F^{\leftarrow}(t)\phi(t)dt. \quad (1.25)$$

*En fait, les mesures de risque par distorsion de fonction de distorsion  $g$  concave (c-à-d les mesures par distorsion cohérentes) sont des mesures spectrales, avec  $g' = \phi$ .*

# Chapitre 2

## Théorie des Valeurs Extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est un thème classique, de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique, qui a été élaboré pour l'évaluation de la probabilité d'occurrence des événements rares. Elle permet d'extrapoler le comportement des queues de distribution à partir des plus grandes observations.

Un des problèmes fondamentaux rencontré en finance concerne la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Le calcul (ou la mesure) des risques est aujourd'hui largement utilisée en finance internationale. Il s'agit par exemple d'éviter les faillites retentissantes et donc d'être capable de prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leur intensité. Il est nécessaire d'être en mesure d'évaluer les possibilités d'apparition des événements rares qui sont caractérisés par une faible fréquence et une énorme gravité. Or avec l'utilisation de la distribution normale, ces événements ont un caractère "prévisible" et rien ne sert pour cela d'étudier leur fréquence. Ainsi, la TVE qui consiste à analyser les occurrences présentant des fréquences très faibles apparaît comme un outil particulièrement bien adapté pour notre étude.

Pour une présentation assez complète du sujet, on renvoie à l'ouvrage de *Embrechts, Klüppelberg et Mikosch* [34] rappelant les principaux résultats théoriques sur la TVE et à *Reiss et Thomas* [82] qui ont proposé un certain nombre d'exemples pratiques, en finance, en assurance et en sciences environnementales.

### 2.1 Concepts et définitions

#### 2.1.1 Cadre d'analyse

On suppose données  $n$  v.a.'s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), copies d'une v.a.  $X$  de f.r.  $F$  définie par :

$$F(x) := P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La queue (de droite) de cette distribution, qu'on notera par  $\bar{F}$ , est définie pour  $x$  grand par :

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x).$$

C'est la probabilité de dépassement  $P(X > x)$ , connue en fiabilité sous le nom de la fonction de survie ou de séjour. La queue de gauche est évaluée par  $F(x)$  pour  $x$  petit.

On définit la somme  $S_n$  et le maximum  $M_n$ <sup>1</sup> de ces v.a.'s par

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

respectivement. Comme les v.a.'s sont i.i.d., alors la f.r. de  $M_n$  s'écrit

$$F_{M_n}(x) = [F(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Malheureusement, il n'est pas possible de déterminer la distribution du maximum à partir de ce résultat. La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la f.r.  $F$ . On s'intéresse alors à sa distribution asymptotique. En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(x)]^n = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_F, \\ 1, & \text{si } x \geq x_F, \end{cases}$$

où

$$x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\},$$

désigne le point terminal à droite (right-end point) de la f.r.  $F$ , avec la convention  $\sup\{\emptyset\} = -\infty$  (où  $\emptyset$  est l'ensemble vide). Il peut être fini ou infini.

On constate que la distribution asymptotique de  $M_n$  est une loi dégénérée, puisque pour certaines valeurs de  $x$ , la probabilité peut être égale à 1 dans le cas où  $x_F$  est fini. Cela ne fournit pas assez d'informations sur le maximum.

Il est souvent intéressant de déterminer les comportements asymptotiques de la somme  $S_n$  et du maximum  $M_n$  convenablement normalisés. Cependant, puisque  $|S_n| \xrightarrow{p.s.} \infty$  et  $M_n \xrightarrow{p.s.} x_F$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on est en droit de se poser les deux questions suivantes :

*Est-ce que  $S_n$  et  $M_n$  convenablement normalisés admettent des distributions limites non dégénérées ? Si oui, quelles sont les formes possibles de ces limites ?*

Dans ce qui suit, on se concentrera sur la question relative au maximum. Cependant, il est instructif de voir comment ces deux sujets sont liés. Par conséquent, on commence par discuter brièvement celui relatif à la somme.

---

<sup>1</sup>On obtient la correspondance entre le minimum et le maximum par la relation suivante :

$$\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, \dots, -X_n\}.$$

Ainsi, tous les résultats qu'on va présenter pour les maxima pourront être transposés pour les minima.

**Remarque 2.1.1** (*Lien entre le maximum et la somme : les lois subexponentielles*)  
 Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de v.a.'s i.i.d., de f.r.  $F$ . La loi correspondant à  $F$  est dite subexponentielle si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > x)} = 1, \quad n \geq 1.$$

Autrement dit, le comportement dans les queues d'une somme est alors essentiellement déterminé par la loi du maximum.

## 2.1.2 Distributions à queues lourdes

**Définition 2.1.1** Une distribution  $F$  est dite à queue lourde si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} (1 - F(x)) = \infty, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

La classe des distributions à variations régulières (voir ci-dessous) constitue un bon exemple de distributions à queues lourdes. Elle inclut des modèles populaires tels ceux de *Pareto*, *Burr*, *Student* et les distributions *Lévy-Stable*, *Log-gamma* très convenables dans l'ajustement des grandes déclarations de sinistre en assurance et des grandes fluctuations des prix en finance, ... pour d'autres exemples, on réfère à l'article de *El-Adlouni et al.* [33].

## 2.1.3 Distributions à variations régulières

**Définition 2.1.2** (*Fonction à variation régulière*)

On dit qu'une fonction  $V$  est à variation régulière au voisinage de l'infini d'indice  $\rho \in \mathbb{R}$ , et on note  $V \in RV_\rho$ , si  $V$  est positive à l'infini et si pour tout  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(t)} = x^\rho. \tag{2.1}$$

Intuitivement, une fonction à variation régulière est une fonction qui se comporte asymptotiquement à la manière d'une fonction puissance.

Dans le cas particulier où  $\rho = 0$ , on dit que  $V$  est une fonction à *variation lente* à l'infini. Comme exemple de fonctions à variations lentes, citons la fonction constante, les fonctions qui tendent vers une constante et la fonction  $\ln(1 + x)$ . Une fonction  $V$  à variation régulière d'indice  $\rho$  peut toujours s'écrire sous la forme  $V(x) = x^\rho \mathcal{L}(x)$ , où  $\mathcal{L}$  est une fonction à variation lente.

## 2.1.4 Statistiques d'ordre

Ce sont des v.a.'s très instrumentales dans la TVE parce qu'elles fournissent des informations sur les queues des distributions.

Pour une étude complète des statistiques d'ordre on peut consulter le livre d'*Arnold, Balakrishnan et Nagaraja* [6].

### Définition 2.1.3 (Statistiques d'ordre)

Les statistiques d'ordre associées à l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sont le réarrangement croissant des éléments de cet échantillon. Elles sont dénotées par  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  et pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , la v.a.  $X_{k:n}$  est appelée la  $k^{\text{ème}}$  statistique d'ordre (ou statistique d'ordre  $k$ ).

La plus petite statistique d'ordre  $X_{1:n}$  (ou statistique du minimum) et la plus grande statistique d'ordre  $X_{n:n}$  (ou statistique du maximum) sont deux statistiques d'ordre particulièrement intéressantes dans l'étude des événements extrêmes.

$$X_{1:n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad X_{n:n} = M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.2)$$

La fonction de répartition de la  $k^{\text{ème}}$  statistique d'ordre  $X_{k:n}$  pour  $1 \leq k \leq n$  est la suivante

$$F_{k:n}(x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour  $X_{1:n}$  et  $X_{n:n}$ , on obtient les deux expressions très simples, pour  $x \in \mathbb{R}$

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad \text{et} \quad F_{n:n}(x) = [F(x)]^n.$$

Les statistiques servent à évaluer la f.r. empirique et la fonction des quantiles empirique d'un échantillon.

### Définition 2.1.4 (Fonction de répartition empirique)

La f.r. empirique de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}},$$

où  $\mathbb{1}_A$  dénote la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ . C'est la proportion des v.a.'s qui sont inférieures ou égales à  $x$ .

On note que  $F_n(x)$  est l'estimateur naturel sans biais de  $F(x)$  (c-à-d  $\mathbb{E}[F_n(x)] = F(x)$ ).

**Proposition 2.1.1** (*Propriétés asymptotiques de  $F_n$* )

1. Par la loi (forte) des grands nombres (LGN)<sup>2</sup> :  $F_n(x) \xrightarrow{p.s.} F(x)$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Le théorème de "Glivenko-Cantelli" assure que cette convergence est uniforme, c-à-d

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{p.s.} 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

3. Selon le théorème central limite (TCL), on a

$$\sqrt{n} (F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x))), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

**Définition 2.1.5** (*Fonction des quantiles*)

La fonction des quantiles associée à  $F$  est l'inverse généralisée de cette fonction définie par

$$Q(s) = F^{\leftarrow}(s) := \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1,$$

avec la convention que  $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ .

**Définition 2.1.6** (*Fonction empirique des quantiles*)

La fonction empirique de quantile de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est définie par

$$Q_n(s) := \inf\{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq s\}, \quad 0 < s < 1. \quad (2.3)$$

**Proposition 2.1.2**

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < X_{1:n} \\ \frac{i-1}{n}, & \text{si } X_{i-1:n} \leq x < X_{i:n}, \quad i = 2, \dots, n. \\ 1, & \text{si } x \geq X_{n:n}, \end{cases}$$

2. Pour  $0 < s < 1$ , on a

$$Q_n(s) = X_{i:n} \quad \text{si} \quad \frac{i-1}{n} < s \leq \frac{i}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

On note que pour  $0 < s < 1$ ,  $X_{[ns]+1:n}$  est le quantile empirique d'ordre  $s$ , où  $[ns]$  désigne la partie entière de  $ns$ .

**Remarque 2.1.2** *En pratique, il est souvent plus commode, non pas de travailler sur la fonction  $F$  elle-même, mais sur la fonction queue  $U$  définie par*

$$U(t) := Q(1 - 1/t), \quad 1 < t < \infty. \quad (2.5)$$

La fonction empirique correspondante est

$$U_n(t) := Q_n(1 - 1/t), \quad 1 < t < \infty.$$

---

<sup>2</sup>Les lois des grands nombres indiquent que lorsque l'on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus les caractéristiques statistiques du tirage (l'échantillon) se rapprochent aux caractéristiques statistiques de la population. Elles sont de deux types ; lois faibles mettant en jeu la convergence en probabilité ( $\mathcal{P}$ ) et lois fortes relatives à la convergence presque sûre ( $p.s.$ ).

## 2.2 Distribution limite de la somme

Cette section est consacrée à la réponse à la question relative à la somme, qu'on peut reformuler comme suit : *peut-on, de façon analogue au théorème central limite (TCL), trouver une v.a. non dégénérée  $Z$  et des suites de normalisation  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  avec  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que :*

$$a_n^{-1}(S_n - b_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z? \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Théorème central limite généralisé

On rappelle que, le TCL classique indique que la somme des v.a.'s indépendantes de variances finies converge vers la distribution normale. Si la condition de variance finie est abandonnée, ce résultat n'est plus valable. Cependant, un théorème connu sous le nom de théorème central limite généralisé (TCL Généralisé) dit que les seules distributions limites possibles, dans (2.6), sont les distributions stables (voir *Nolan* [79]).

**Théorème 2.2.1** (*TCL Généralisé (Lévy, [58])*)

*Une v.a. non dégénérée  $Z$  est  $\alpha$ -stable pour  $0 < \alpha \leq 2$  si et seulement s'il existe une suite de v.a.'s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. et deux constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que*

$$a_n^{-1}(S_n - b_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

avec  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

La classe des distributions stables ( $\alpha$ -stable, Pareto-stables ou Lévy-stable) a été présentée par Lévy au début des années 1920, pendant ses investigations sur le comportement des sommes de v.a.'s indépendantes (Lévy [58]).

### 2.2.2 Loi $\alpha$ -stables

**Définition 2.2.1** (*Variable aléatoire stable*)

*Une v.a.  $X$  est dite stable ou a une distribution stable si est seulement si, pour tous nombres positifs  $a$  et  $b$  et des copies  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes de  $X$ , il existe deux nombres réels  $c > 0$  et  $d$  tels que :*

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} cX + d. \quad (2.7)$$

*Lorsque  $d = 0$ , on parle de distribution strictement stable.*

Par conséquent, si  $(X_n)$  une suite de v.a.'s réelles i.i.d. stable, alors par (2.7) il existe des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que (pour  $n \geq 1$ ) :

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} a_n X_1 + b_n,$$

ou de manière équivalente  $a_n^{-1}(S_n - b_n) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1$ .

En raison de l'importance de la classe des distributions stables, il est nécessaire de les décrire analytiquement. Leur principal inconvénient est qu'elles ne possèdent pas de formes explicites pour les densités et les fonctions de répartition, sauf dans trois cas qu'on verra par la suite. La manière la plus commune de les décrire se fait par leurs fonctions caractéristiques. Pour une description complète, on peut se référer aux livres de *Zolotarev* [109] qui a étudié les lois  $\alpha$ -stables dans le contexte univarié et *Samorodnitsky and Taqqu* [87] qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié ou on peut consulter le site web "[academic2.american.edu/~jpnolan](http://academic2.american.edu/~jpnolan)".

**Définition 2.2.2** (*Fonction caractéristique*)

La fonction caractéristique (FC) d'une v.a. stable est définie, pour  $t \in \mathbb{R}$ , par

$$\varphi_X(t) := \begin{cases} \exp \left\{ i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right\}, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ i\mu t - \sigma |t| \left[ 1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t| \right] \right\}, & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

où

$$i^2 = -1, \quad \operatorname{sign}(t) := \begin{cases} 1 & \text{quand } t > 0, \\ 0 & \text{quand } t = 0, \\ -1 & \text{quand } t < 0, \end{cases}$$

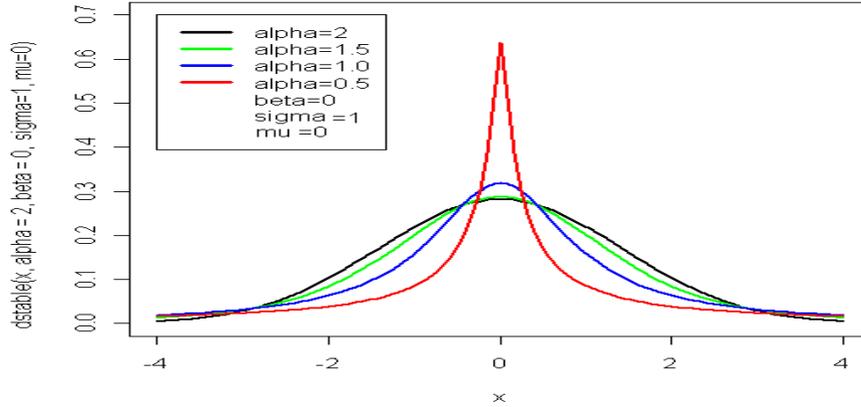
et  $\alpha, \sigma, \beta, \mu$  sont des paramètres réels tels que  $0 < \alpha \leq 2, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1, \mu \in \mathbb{R}$ .

Une v.a. stable  $X$  est donc caractérisée par quatre paramètres :

1.  $\alpha$  est appelé *exposant caractéristique* ou *indice de stabilité*, décrit la forme de la distribution ou le degré d'épaisseur de ses queues. Plus  $\alpha$  est petit, plus les queues sont épaisses. Autrement dit, plus  $\alpha$  est petit, plus on constate l'existence de très grandes fluctuations. Une distribution gaussienne a la valeur maximum de  $\alpha$  soit  $\alpha = 2$ .
2.  $\sigma$  est appelé *paramètre d'échelle*. Plus  $\sigma$  est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre  $\sigma$  permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.
3.  $\beta$  est appelé *paramètre d'asymétrie*. Si  $\beta$  est égal à  $-1$  (resp.  $+1$ ) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp. à droite). Lorsque  $\beta$  vaut zéro alors la distribution est symétrique.
4.  $\mu$  est appelé *paramètre de position ou localisation*. Il correspond, pour  $\alpha$  supérieur à 1, à l'espérance. Si  $\beta = 0$  alors  $\mu$  est la médiane. Dans les autres cas, le paramètre  $\mu$  ne peut pas être interprété.

La distribution Lévy-stable de paramètres  $\alpha, \sigma, \beta$  et  $\mu$  sera dénotée par  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et une v.a. stable  $X$  par  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ . Si  $\beta = \mu = 0$ , la distribution est dite symétrique et dénotée par  $S_\alpha S$ . Dans ce cas, la fonction caractéristique a la forme simple

$$\varphi_X(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha), \quad t \in \mathbb{R}.$$


 FIG. 2.1 – Densités  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\alpha$ 

Si seulement  $\beta = 0$ , on dit que la distribution est symétrique autour de  $\mu$ . Les trois exceptions dont on a parlé plus haut sont :

- La distribution gaussienne  $S_2(\sigma, 0, \mu)$  où  $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right)$ .
- La distribution de Cauchy  $S_1(\sigma, 0, \mu)$  où  $f(x) = \frac{2\sigma}{\pi(4\sigma^2 + (x-\mu)^2)}$ .
- La distribution de Lévy  $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$  où

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} (x - \mu)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x - \mu)}\right) \times \mathbb{1}_{\mu, \infty[}(x).$$

Mais, depuis l'implémentation de la transformée de Fourier rapide (FFT : fast Fourier transform), les densités stables sont devenues faciles à calculer numériquement. On peut approcher par cette méthode la densité

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

**Définition 2.2.3** (*Domaine d'attraction des lois  $\alpha$ -stables*)

On dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction (DA) d'une loi stable d'indice de stabilité  $0 < \alpha \leq 2$  et on note  $F \in D(\alpha)$ , s'il existe deux suites réelles  $A_n > 0$  et  $B_n$  tels que

$$A_n^{-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i - B_n \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

### 2.2.3 Propriétés des lois $\alpha$ -stables

On va rappeler quelques propriétés importantes des v.a.'s stables de loi  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  que on utilisera dans la suite de ce mémoire.

#### Propriétés arithmétiques

##### Proposition 2.2.1

1. Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a.'s stables et indépendantes, avec  $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$  pour  $i = 1, 2$ , alors  $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  où

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

On note que si  $\beta_1 = \beta_2$  alors  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ .

2. Si  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$ .
3. Si  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu), & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ S_1\left(|a| \sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi} a (\log |a|) \sigma \beta\right), & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

4. Si  $0 < \alpha < 2$  et  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$  alors  $-X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$ .

#### Queues lourdes

La classe des distributions  $\alpha$ -stable a des bonnes propriétés de queue lourde.

##### Proposition 2.2.2 (Propriété de queues lourdes)

Soit  $X$  une v.a.r.  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , alors on a, quand  $x \rightarrow \infty$ , les deux résultats suivants

$$\begin{cases} x^\alpha P(X > x) \longrightarrow C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha, \\ x^\alpha P(X < -x) \longrightarrow C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\text{où } C_\alpha := \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1}.$$

Si on note par  $G(x) := P(|X| \leq x) = F(x) - F(-x)$ ,  $x > 0$ , la f.r. de  $Z := |X|$ , alors les relations de (2.8) rapportent que les queues de distribution de  $F \in D(\alpha)$ , pour  $0 < \alpha < 2$ , satisfont les deux conditions suivantes

1. La condition de la variation régulière

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - G(tx))}{(1 - G(t))} = x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

2. La condition d'équilibre de queue, pour  $0 \leq p \leq 1$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} \rightarrow p \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(-x)}{1 - G(x)} \rightarrow 1 - p =: q, \quad (2.9)$$

avec  $p := (1 + \beta)/2$ .

*Mandelbrot* [61] et *Fama* [35] ont montré, dans les premiers travaux, que la loi  $\alpha$ -stable est une bonne candidate pour adapter les séries financières à queues lourdes et également, elle a été proposée comme un modèle pour beaucoup de types de systèmes économiques physiques, pour plus détails sur ce sujet voir *Weron* [103].

### Moments

Soit  $X$  une v.a. de loi  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  avec  $\alpha \in ]0, 2[$  alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &< \infty, \quad \text{si } p \in ]0, \alpha[, \\ \mathbb{E}|X|^p &= \infty, \quad \text{si } p \in [\alpha, \infty[, \end{aligned}$$

si  $\alpha \in ]1, 2[$  alors  $\mathbb{E}(X) = \mu$ . Soit  $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , on a (voir le Tableau 2.1)

$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
$\mathbb{E}(X) = \infty$	$\mathbb{E}(X) = \mu$	$\mathbb{E}(X) = \mu$
$Var(X) = \infty$	$Var(X) = \infty$	$Var(X) = 2\sigma^2$

TAB. 2.1 – Moments d'une v.a. suivant une loi stable selon alpha.

## 2.3 Distribution limite du maximum

Dans cette section on s'intéresse à la réponse de la question relative au maximum. *Peut-on trouver, de façon analogue au théorème central limite (TCL), des constantes de normalisation :  $a_n$  et  $b_n$  avec  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une loi non-dégénérée de distribution  $H$  tels que :*

$$P \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = F^n(a_n x + b_n) \longrightarrow H(x)?$$

*Fisher et Tippett* [36] ont trouvé en 1928 une solution à ce problème au moyen d'un théorème qui est la base de la TVE. Plus tard, ce théorème a été prouvé la première fois, dans la généralité complète, par *Gnedenko* [40].

### 2.3.1 Théorème de Fisher-Tippett

Ce théorème précise les lois limites possibles pour le maximum normalisé  $M_n$ .

**Théorème 2.3.1** (*Fisher-Tippett ou théorème des 3 types extrêmes (Embrechet et al., [34])*).

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  v.a.'s i.i.d. de f.r.  $F$ . S'il existe deux constantes de normalisation  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une distribution limite non dégénérée  $H$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

alors  $H$  appartient à l'une des trois lois limites suivantes :

$$\text{Loi de Fréchet : } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \exp[-(x)^{-\alpha}], & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } \alpha > 0,$$

$$\text{Loi de Weibull : } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^\alpha], & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } \alpha > 0,$$

$$\text{Loi de Gumbel : } \Lambda(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad \text{si } x \in \mathbb{R} \quad \text{et } \alpha = 0,$$

avec  $H$  est la distribution des valeurs extrêmes ( $\mathcal{EVD}$ ) et les trois distributions  $\Phi_\alpha$ ,  $\Psi_\alpha$  et  $\Lambda$  sont appelées les distributions standard des valeurs extrêmes.

Pour une esquisse de la preuve de ce théorème voir *Embrechet et al.* [34] page 122.

Ce Théorème 2.3.1 est vrai pour la majorité des lois usuelles. Il fournit, en quelque sorte, la contrepartie du théorème central limite (TCL) dans le cas des événements extrêmes où la constante  $a_n$  joue le rôle de  $\sigma(X)/\sqrt{n}$  où  $\sigma(X)$  désigne l'écart type de  $X$  et la constante  $b_n$  joue le rôle de l'espérance  $\mathbb{E}[X]$  ( $a_n$  et  $b_n$  sont des paramètres de normalisation). De plus, les constantes  $a_n$  et  $b_n$  ne sont pas uniques. Cependant, contrairement au TCL, où la loi normale est la seule loi limite possible, dans le cas des extrêmes, trois types de loi limite sont possibles.

**Remarque 2.3.1**

1. Chacune des trois distributions des valeurs extrêmes peut s'obtenir par une transformation fonctionnelle de l'autre. Plus précisément, elles sont liées entre elles, pour  $X > 0$ , par les relations suivantes

$$X \sim \Phi_\alpha \iff \ln X^{-\alpha} \sim \Lambda \iff \frac{-1}{X} \sim \Psi_\alpha.$$

2. La loi la plus courante retrouvée dans les données financière est la loi de Fréchet. La loi de Weibull étant écartée car les variations en finance sont rarement bornées. La loi de Gumbel est extrêmement rare également puisqu'on peut démontrer qu'une loi des extrêmes de Gumbel correspond à des répartitions initiaux normale.

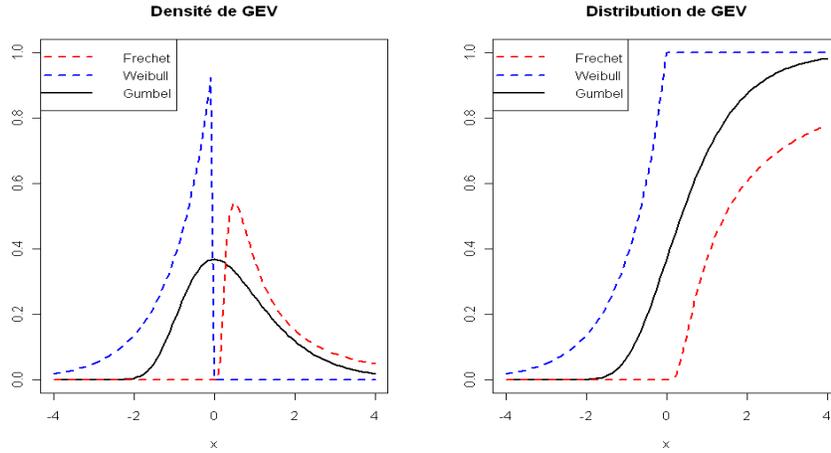


FIG. 2.2 – Densités et distributions de lois des valeurs extrêmes.

### 2.3.2 Distribution $\mathcal{GEV}$

Etant donné qu'il est difficile de travailler avec trois distributions à la fois. Grâce aux travaux de *vonMises* et de *Jenkinson* [50], on a une forme unifiée de la f.r. de la loi  $\mathcal{EV}\mathcal{D}$ .

#### Définition 2.3.1 ( $\mathcal{GEV}\mathcal{D}$ )

La représentation de *von Mises-Jenkinson* de la loi  $\mathcal{EV}\mathcal{D}$  que l'on appelle *loi des valeurs extrêmes généralisée* "Generalized Extreme Value distribution" notée par  $\mathcal{GEV}\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{GEV}$  a pour f.r., pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $1 + \xi x > 0$

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - [1 + \xi x]^{-1/\xi} \right\}, & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp \left\{ - \exp [-x] \right\}, & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\xi$  est un paramètre de forme que l'on appelle l'indice des valeurs extrêmes, noté par ( $\mathcal{EV}\mathcal{I}$ , Extreme Values Index). Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distribution à "queues lourdes".

#### Proposition 2.3.1 ( $\Phi_\alpha$ , $\Psi_\alpha$ et $\Lambda$ en termes de $H_\xi$ )

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x) &= H_{1/\alpha}(\alpha(x-1)), & x > 0. \\ \Psi_\alpha(x) &= H_{-1/\alpha}(\alpha(x+1)), & x < 0. \\ \Lambda(x) &= H_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, une famille paramétrique  $\{H_\xi, \xi \in \mathbb{R}\}$  est présentée. Elle fournit une représentation unifiée commode pour les trois types de distributions limites.

$$H_\xi = \begin{cases} \Phi_{1/\xi} & \text{si } \xi > 0, \\ \Psi_{-1/\xi} & \text{si } \xi < 0, \\ \Lambda & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Pour les v.a.'s non centrées et non réduites, on peut écrire  $H_\xi(x)$  sous une forme plus générale, notée par  $H_{\mu,\sigma,\xi}$ , en remplaçant l'argument  $x$  par  $(x - \mu)/\sigma$  dans (2.11), dans lequel on fait apparaître un *paramètre de position*  $\mu \in \mathbb{R}$  et un *paramètre d'échelle*  $\sigma > 0$ . Pour  $(1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0)$ ,  $H_{\mu,\sigma,\xi}$  s'écrit comme suit (voir *Weissman* [102])

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) := \begin{cases} \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

On peut facilement montrer que la fonction de densité correspondante à  $H_{\mu,\sigma,\xi}$  (pour  $1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0$ ) est

$$h_{\mu,\sigma,\xi}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}-1} H_{\mu,\sigma,\xi}(x), & \text{si } \xi \neq 0, \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Remarque 2.3.2** *Le quantile  $Q(p)$  de la distribution  $H_{\mu,\sigma,\xi}$  est donné par la formule suivante*

$$Q(p) = H_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}(p) := \begin{cases} \mu - \sigma \xi^{-1} \left[ 1 - (-\log p)^{-\xi} \right], & \text{si } \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log(-\log p), & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

*Ce quantile est donc fortement influencé par les deux paramètres  $\sigma$  et  $\xi$ . Intuitivement, on comprend que plus  $\xi$  est grand, plus le quantile est élevé.*

### 2.3.3 Domaines d'attraction du maximum

La recherche du domaine d'attraction peut être considérée comme l'étude réciproque de la recherche de la distribution des valeurs extrêmes associée éventuellement à une distribution. Le problème consiste à répondre à la question suivante

*Etant donné une loi  $H$  de type extrême (donc appartenant à l'une des trois familles Fréchet, Gumbel et Weibull), quels sont les critères vérifiés par une distribution quelconque  $F$  pour que la loi du maximum de la suite des v.a.'s i.i.d. de loi  $F$  converge vers  $H$  ?*

#### Définition

Si  $F$  vérifie le Théorème 2.3.1, on dit alors que  $F$  appartient au domaine d'attraction de  $H_\xi$ .

**Définition 2.3.2** (*Domaine d'attraction du maximum (MDA)*)

On dit qu'une distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction du maximum de la distribution des valeurs extrêmes  $H_\xi$ , notée  $F \in MDA(H_\xi)$ , s'il existe de constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que la condition (2.10) soit vérifiée.

Selon le signe de  $\xi$ , on distingue trois domaines d'attraction

1. Si  $\xi > 0$ , on dit que  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ . Ce domaine d'attraction est celui des distributions à *queues lourdes*, c-à-d qui ont une fonction de survie à *décroissance polynomiale*. Comme exemple de lois appartenant à ce domaine d'attraction on a les lois de *Loglogistic*, de *Pareto*, de *Loggamma*, de *Student*, de *Burr* et de *Fréchet*.
2. Si  $\xi < 0$ , on dit que  $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ . Ce domaine d'attraction est celui des fonctions de survie dont le support est borné supérieurement. Pour ce domaine d'attraction, on trouve les lois *uniforme*, *ReverseBurr*, ...
3. Si  $\xi = 0$ , on dit que  $F \in MDA(\Lambda)$ . Ce domaine d'attraction est celui des distributions à *queues légères*, c-à-d qui ont une fonction de survie à *décroissance exponentielle*. Dans ce domaine d'attraction, on regroupe les lois *normale*, *exponentielle*, *log-normale*, *gamma*, ...

Les trois tableaux suivants (le Tableau 2.2, le Tableau 2.3 et le Tableau 2.4) donnent différents exemples de distributions standards dans ces trois domaines d'attraction.

Distribution	$1 - F(x)$	$\mathcal{EVI}(\xi)$
<i>Pareto</i> $(\alpha)$ , $\alpha > 0$	$x^{-\alpha}$ , $x > 1$	$\frac{1}{\alpha}$
<i>Burr</i> $(\beta, \tau, \lambda)$ , $\beta, \tau, \lambda > 0$	$\left(\frac{\beta}{\beta + x^\tau}\right)^\lambda$	$\frac{1}{\lambda\tau}$
<i>Fréchet</i> $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ , $\alpha > 0$	$1 - \exp(-x^{-\alpha})$	$\frac{1}{\alpha}$
<i>Loggamma</i> $(m, \lambda)$	$\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_x^\infty (\log u)^{m-1} u^{-\lambda-1} du$	$\frac{1}{\lambda}$
<i>Loglogistic</i> $(\beta, \alpha)$ , $\beta > 0$ , $\alpha > 1$	$\frac{1}{1 + \beta x^\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$

TAB. 2.2 – Exemples de distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet.

Distribution	$1 - F(x)$	$\mathcal{EVI}(\xi)$
<i>Uniforme</i> $(0, 1)$	$1 - x$	$-1$
<i>ReverseBurr</i> $(\beta, \tau, \lambda, \tau_F)$ , $\beta, \tau, \lambda > 0$	$\left(\frac{\beta}{\beta + (\tau_F - x)^{-\tau}}\right)^\lambda$	$-\frac{1}{\lambda\tau}$

TAB. 2.3 – Exemples de distributions appartenant au domaine d'attraction de Weibull.

Distribution	$1 - F(x)$	$\mathcal{EVI}(\xi)$
$\text{Gamma}(m, \lambda), m \in \mathbb{N}, \lambda > 0$	$\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_x^\infty (\log u)^{m-1} u^{-\lambda-1} du$	0
$\text{Gumbel}(\mu, \beta), \mu \in \mathbb{R}, \beta > 0$	$\exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right)$	0
$\text{Lognormale}(\mu, \sigma), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\log u - \mu)^2\right) du$	0
$\text{Logistic}$	$\frac{2}{1 + \exp(x)}$	0

TAB. 2.4 – Exemples de distributions appartenant au domaine d’attraction de Gumbel.

### Caractérisation des domaines d’attractions du maximum

Sachant la distribution  $F$ , on voudra connaître à quel domaine d’attraction du maximum elle appartient et quelles sont les constantes de normalisation. La réponse est relativement complexe et n’est pas unique. On indique ici les critères les plus utilisés c-à-d, les conditions sur la f.r.  $F$  pour qu’elle appartienne à l’un des trois domaines d’attraction qui sont définis précédemment.

#### **Théorème 2.3.2** (Domaine d’attraction du maximum de Fréchet)

On dit que  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha), \alpha > 0$ , si et seulement si  $x_F = +\infty$  et la fonction  $1 - F(x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x)$ , où  $\mathcal{L}$  est une fonction à variations lentes à l’infini. Dans ce cas, un choix possible pour les constantes de normalisation  $a_n$  et  $b_n$  est

$$a_n = U(n) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = 0, \quad \forall n > 0.$$

#### **Théorème 2.3.3** (Domaine d’attraction du maximum de Weibull)

On dit que  $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha), \alpha > 0$ , si et seulement si  $x_F < +\infty$  et la fonction  $1 - F^*(x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x)$  avec  $\mathcal{L}$  est une fonction à variations lentes à l’infini et

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ F(x_F - x)^{-1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, un choix possible pour les constantes de normalisation  $a_n$  et  $b_n$  est

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = x_F.$$

Les résultats concernant le domaine d’attraction de la loi de Gumbel sont plus délicats. Pour une présentation exhaustive, se référer au livre de *de Haan et Ferreira* [42]. Avant d’énoncer ces résultats, on rappelle par la définition de la fonction de *von Mises*.

**Définition 2.3.3** (*Fonction de von Mises*)

Une f.r.  $F$  est appelée une fonction de von Mises avec  $a$  est sa fonction auxiliaire, s'il existe  $z < x_F$  tels que

$$\bar{F}(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F,$$

où  $c$  est une constante positive et  $a$  est une fonction positive absolument continue de densité  $a'$  vérifiant  $\lim_{x \uparrow x_F} a'(x) = 0$ .

**Théorème 2.3.4** (*Domaine d'attraction du maximum de Gumbel*)

On dit que  $F \in MDA(\Lambda)$  si et seulement si

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F,$$

où  $c$  et  $g$  sont deux fonctions mesurables satisfont  $c(x) \rightarrow c > 0$  et  $g(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow x_F$  et  $a$  est une fonction positive, absolument continue de densité  $a'$  vérifiant  $\lim_{x \uparrow x_F} a'(x) = 0$ .

Dans ce cas, un choix possible pour les constantes de normalisation  $a_n$  et  $b_n$  est

$$a_n = F^{\leftarrow} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\bar{F}(a_n)} \int_{a_n}^{x_F} \bar{F}(y) dy.$$

## 2.4 Distribution de Pareto généralisée

L'approche basée sur la  $\mathcal{GEV}$  a été critiquée dans la mesure où l'utilisation d'un seul maxima conduit à une perte d'information contenue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. Pour pallier ce problème, *Pickands* [81] a introduit la méthode  $\mathcal{POT}$  (Peaks-over-Threshold) ou méthode des excès au delà d'un certain *seuil* réel  $u$  suffisamment grand, inférieur au point terminal ( $u < x_F$ ). Cette méthode consiste à observer non pas le maximum ou les plus grandes valeurs mais toutes les valeurs des réalisations qui excèdent le seuil élevé  $u$ . Donc, l'idée de base de cette approche consiste à choisir un seuil suffisamment élevé et à étudier les excès au-delà de ce seuil.

On note par  $N_u$  le nombre d'exceedances  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{N_u}}$  qui dépassent le seuil  $u$ . On dénote les  $N_u$  excès correspondants par  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  où  $Y_j := X_{i_j} - u$  pour  $j = 1, 2, \dots, N_u$ , (voir la figure 2.3).

**Définition 2.4.1** (*Fonction de répartition et moyenne des excès*)

Pour tout  $u < x_F$ , et pour tout  $0 < y < x_F - u$ , la fonction

$$F_u(y) := P\{X - u \leq y / X > u\} = 1 - \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)}, \quad (2.14)$$

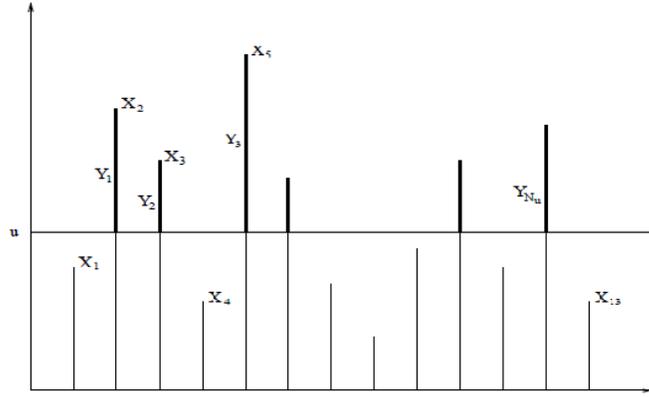


FIG. 2.3 – Les données  $X_1, \dots, X_{13}$  et les  $N_u$  excès correspondants  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  au-dessus du seuil  $u$ .

est appelée la *f.r. des excès au-dessus du seuil  $u$* .

La fonction de moyenne des excès, notée par  $e(u)$ , correspondante est définie par

$$e(u) := \mathbb{E}(X - u | X > u), \quad u < x_F,$$

qui s'exprime également sous la forme

$$e(u) = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^\infty \overline{F}(t) dt, \quad u < x_F.$$

Pour une discussion sur les propriétés de cette fonction ( $e(u)$ ), voir *Embrechts et al.* [34].

#### Remarque 2.4.1

1. Si  $x = y + u$  pour  $X > u$ , on a la représentation suivante :

$$F(x) = [1 - F(u)] F_u(y) + F(u). \quad (2.15)$$

2. Pour une v.a. qui suit une  $G_{\sigma+u\xi, \xi}$  de paramètre  $\xi < 1$ , la moyenne des excès,  $e(u)$ , est linéaire avec  $u$

$$e(u) = \frac{\sigma + u\xi}{1 - \xi}, \quad \sigma + u\xi > 0. \quad (2.16)$$

Une fois le seuil optimal choisi, on construit une nouvelle série d'observations au dessus de ce seuil et la distribution de ces données suit une distribution généralisée de Pareto (*generalized Pareto distribution (GPD)*).

**Définition 2.4.2** (*Distribution de Pareto généralisée*)

La f.r. de Pareto généralisée standard ( $\mathcal{GPD}$ ), notée par  $G_\xi$ , est définie pour  $\xi \in \mathbb{R}$  comme suit

$$G_\xi(y) := \begin{cases} 1 - (1 + \xi y)^{-1/\xi}, & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-y), & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

avec le support

$$\begin{aligned} y &\geq 0, & \text{si } \xi &\geq 0, \\ 0 &\leq y \leq -1/\xi, & \text{si } \xi &< 0. \end{aligned}$$

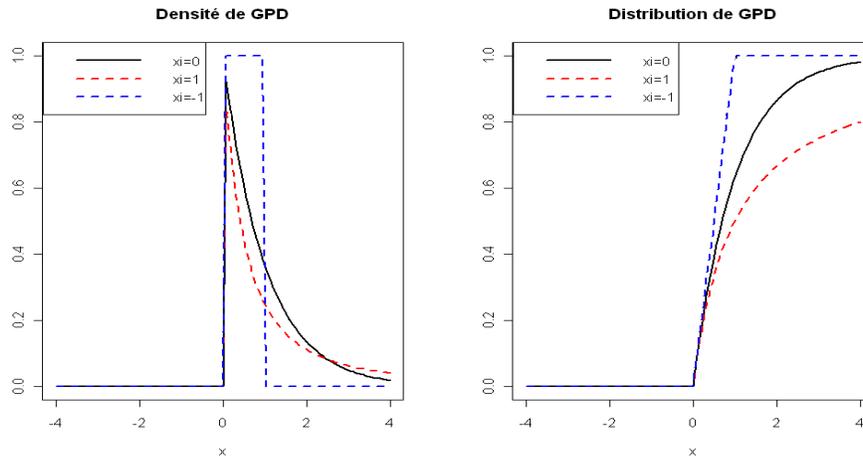


FIG. 2.4 – Densités et distributions de lois de Pareto généralisée avec différentes valeurs de  $\xi$ .

Une forme générale de  $\mathcal{GPD}$ , notée par  $G_{\xi,\mu,\sigma}(y) = G_\xi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$ , est obtenu en remplaçant l'argument  $y$  par  $(y-\mu)/\sigma$  dans (2.17) avec un support doit être ajusté en conséquence, où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  sont respectivement les paramètres de position et d'échelle.

On note que la  $\mathcal{GPD}$  standard correspond le cas où  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ . Lorsque le paramètre de position est nul ( $\mu = 0$ ) et le paramètre d'échelle est arbitraire ( $\sigma > 0$ ), cette distribution joue un rôle important, dans l'analyse statistique des événements extrêmes, en fournissant une approximation appropriée pour l'excès au delà d'un grand seuil. Cette famille spéciale, dénotée par  $G_{\xi,\sigma}(y)$ , est définie comme suit

$$G_{\xi,\sigma}(y) := \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right), & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

où

$$\begin{aligned} y &\geq 0, & \text{si } \xi &\geq 0, \\ 0 \leq y &\leq -\sigma/\xi, & \text{si } \xi &< 0. \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.2**

1. La densité de la distribution  $\mathcal{GPD}$  ( $G_{\xi,\sigma}$ ) s'écrit comme suit

$$g_{\xi,\sigma}(y) := \begin{cases} \sigma^{-1} \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, & \text{si } \xi \neq 0 \\ \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right), & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

2. Le quantile  $Q(p)$  de la distribution  $G_{\xi,\sigma}$ , qui est également la VaR au niveau de confiance élevé  $p$ , est donné par

$$Q(p) = VaR(p) := u + \frac{\sigma}{\xi} \left\{ \left(\frac{n}{N_u p}\right)^{-\xi} - 1 \right\} \quad (2.20)$$

3. Il y'a un rapport simple entre la  $\mathcal{GPD}$  standard ( $G_\xi$ ) et la  $\mathcal{GEV}$  standard  $H_\xi(x)$  tels que

$$G_\xi(x) = 1 + \log H_\xi(x), \quad \text{si } \log H_\xi(x) > -1.$$

*Balkema et de Haan* [9] et *Pickands* [81] ont proposé le théorème ci-après, qui va être le résultat théorique central de la TVE. Ce théorème précise la distribution conditionnelle des excès lorsque le seuil déterministe tend vers le point terminal  $x_F$ .

**Théorème 2.4.1** (*Balkema-de Haan et Pickands (Embrechts et al., [34])*)

Si  $F$  appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes (Fréchet, Gumbel ou Weibull), alors il existe une fonction  $\sigma(u)$  strictement positive et un réel  $\xi$  tels que

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi,\sigma(u)}(y)| = 0. \quad (2.21)$$

où  $G_{\xi,\sigma(u)}$  est la f.r. de la loi de Pareto généralisée et  $F_u$  est la f.r. des excès au delà du seuil  $u$ .

Ce théorème signifie que l'on peut approcher la loi des excès pour un seuil élevé (proche du point terminal) par une loi de Pareto généralisée de variance inconnue (dépendant de  $u$ ).

La preuve du Théorème 2.4.1 doit être trouvée dans *Embrechts et al.* [34].

## 2.5 Estimation des paramètres des $\mathcal{GEV}$ et $\mathcal{GPD}$ par la méthode MV

Il existe plusieurs méthodes d'estimation paramétrique, comme la méthode du maximum de vraisemblance (MV) (*Lehmann et Casella* [57]), la méthode des moments (*Christopeit* [16]) et la méthode des moments de probabilités pondérés (PWM) (*Hosking et al.* [48]). Pour estimer les paramètres des distributions  $\mathcal{GEV}$  et  $\mathcal{GPD}$ , on s'intéresse à la très populaire méthode du MV qui est, sous certaines conditions, la plus efficace (voir *Smith* [91]).

### Estimation des paramètres de $\mathcal{GEV}$

Soit  $\theta = (\mu, \sigma, \xi) \in \Theta \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  où  $\Theta$  est l'espace des paramètres. A partir de la densité de la distribution  $\mathcal{GEV}$  (2.13), on définit la *fonction vraisemblance*, basée sur l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  :

$$L(\theta; X_1, \dots, X_n) := \prod_{i=1}^n h_{\theta}(X_i) \mathbb{1}_{\{1+\xi(x_i-\mu)/\sigma > 0\}}.$$

La fonction *log-vraisemblance* correspondante est

$$l(\theta; X_1, \dots, X_n) := \log L(\theta; X_1, \dots, X_n).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de  $\theta$  est

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) := \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta; X_1, \dots, X_n).$$

Si  $l(\theta; X_1, \dots, X_n)$  admet des dérivées partielles par rapport  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\xi$ , alors l'EMV est souvent obtenu en résolvant les équations suivantes dites *équations de vraisemblance* :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta; X_1, \dots, X_n) = 0, \quad \theta = (\mu, \sigma, \xi).$$

Dans le cas où  $\xi = 0$ , la fonction log-vraisemblance est égale à

$$l(\theta; X_1, \dots, X_n) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}.$$

En dérivant cette fonction relativement aux deux paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  (resp.), on obtient le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} n - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) = 0. \\ n + \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \left( \exp\left\{-\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right\} - 1 \right) = 0. \end{cases}$$

Puisque ce système n'admet pas de solution explicite, les méthodes numériques permettent de trouver une solution approchée. Il est à noter que dans le cas où  $\xi > -1/2$ , *Smith* [91] a démontré les propriétés classiques de l'EMV.

### Estimation des paramètres de $\mathcal{GPD}$

La fonction *log-vraisemblance*  $l_{\xi,\sigma}$  associée à l'échantillon  $(Y_1, \dots, Y_{N_u})$  des excès est obtenue à partir de la densité de la distribution  $\mathcal{GPD}$ , définie en (2.19). Pour  $\xi \neq 0$ , on a

$$l_{\xi,\sigma}(y_1, \dots, y_{N_u}) = -N_u \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \log \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} y_j\right),$$

où  $(y_1, \dots, y_{N_u})$  sont des réalisations de  $(Y_1, \dots, Y_{N_u})$ . L'annulation des dérivées partielles par rapport à  $\xi$  et  $\sigma$  (resp.) conduit au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{1}{N_u} \sum_{j=1}^{N_u} \log \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} y_j\right) & = \xi, \\ \frac{1}{N_u} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \frac{y_j/\sigma}{1 + \xi y_j/\sigma} & = \frac{1}{1 + \xi}, \end{cases}$$

dont les solutions  $(\hat{\xi}_{N_u}, \hat{\sigma}_{N_u})$  représentent les EMV de  $(\xi_{N_u}, \sigma_{N_u})$ . On note que ce système n'a pas de solution explicite, d'où la nécessité d'appliquer des méthodes numériques pour calculer des approximations à  $\hat{\xi}_{N_u}$  et  $\hat{\sigma}_{N_u}$ . Lorsque  $\xi > -1/2$ , *Smith* [91] a démontré la normalité asymptotique des EMV. En effet, quand  $N_u \rightarrow \infty$

$$\sqrt{N_u} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_{N_u} - \xi \\ \frac{\hat{\sigma}_{N_u}}{\sigma} - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_2 \left[ 0, (1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right],$$

avec  $\mathcal{N}_2(\varpi, \Sigma)$  étant la distribution Gaussienne bivariable de vecteur moyen  $\varpi$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ . Ce résultat permet de calculer les bornes de confiance pour les estimateurs du MV.

## 2.6 Estimation semi-paramétrique de l'indice de queue et des quantiles extrêmes

On a vu que pour la majorité des f.r.  $F$  la loi asymptotique du maximum (convenablement normalisé) est une loi des valeurs extrêmes qui étant indexée par le paramètre  $\xi$  (l'indice des valeurs extrêmes).

Dans la littérature de la TVE, on trouve plusieurs techniques semi-paramétriques pour l'estimation de cet indice  $\xi$ . D'un point de vue théorique, toutes ces méthodes partagent les mêmes propriétés de consistance et de normalité asymptotique. Cependant, les études de simulation montrent qu'il y a de grandes différences entre ces estimateurs. En général, il n'y a pas une meilleure méthode dans toutes les situations. Mais, les méthodes les plus utilisées sont celles de *Hill*, de *Pickands* et des *moments*. Ceci est

dû probablement au fait qu'elles sont les plus anciennes. Presque chaque auteur qui est impliqué dans l'estimation de  $\xi$ , est également mené à un estimateur pour le quantile extrême ( $x_p$ ) qui a été basé sur le même raisonnement (hypothèse) que pour l'estimation de  $\xi$ . Le quantile d'ordre  $(1 - p)$  de  $F$  est défini comme suit

$$x_p := F^{\leftarrow}(1 - p) = Q(1 - p) = U(1/p),$$

où, on dit que  $x_p$  est un quantile extrême quand  $p$  tend vers 0 ( $p \downarrow 0$ ).

### 2.6.1 Estimateur de Pickands

Cet estimateur a été introduit par *Pickands* [81]. Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  v.a.'s i.i.d., de f.r.  $F$  appartenant au domaine d'attraction de  $H_\xi$  et  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  les statistiques d'ordre associées.

#### Estimateur de l'indice de queue

On note par  $\widehat{\xi}_n^{(P)}$  l'estimateur de Pickands de  $\xi$ . Alors, étant donnée une suite  $k = k(n)$ , l'estimateur de Pickands est défini comme suit :

**Définition 2.6.1** (*Estimateur de Pickands :  $\xi \in \mathbb{R}$* )

$$\widehat{\xi}_n^{(P)} = \widehat{\xi}_n^{(P)}(k) := \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{X_{n-k+1:n} - X_{n-2k+1:n}}{X_{n-2k+1:n} - X_{n-4k+1:n}} \right). \quad (2.22)$$

Les propriétés asymptotiques de cet estimateur sont discutées par *Dekkers et de Haan* [29].

Sous certaines conditions sur la suite entière  $k$  et la f.r.  $F$ , cet estimateur de  $\xi$  a des bonnes propriétés asymptotiques résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.6.1** (*Propriétés asymptotiques de  $\widehat{\xi}_n^{(P)}$  (*Dekkers et de Haan*, [29])*).

Soient  $F \in MDA(H_\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $k \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$

(a) *Consistance faible :*

$$\widehat{\xi}_n^{(P)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \xi, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(b) *Consistance forte : si  $k/\log \log n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors*

$$\widehat{\xi}_n^{(P)} \xrightarrow{p.s.} \xi, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(c) *Normalité asymptotique : soit  $U(x) = (1/1 - F(x))^{\leftarrow}$  a une dérivée positive  $U'$  et qu'il existe une fonction  $a(\cdot)$  positive tels que, pour  $x > 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{1-\xi} U'(tx) - t^{1-\xi} U'(t)}{a(t)} = (+/-) \log x.$$

Si  $k = o(n/g^{\leftarrow}(n))$ , où  $g(t) := t^{3-2\xi} (U'(t)/a(t))^2$ , alors

$$\sqrt{k} \left( \widehat{\xi}_n^{(P)} - \xi \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\xi)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

avec

$$\sigma^2(\xi) := \begin{cases} \frac{\xi^2 (2^{2\xi+1} + 1)}{[2(2^\xi - 1) \log 2]^2}, & \xi \neq 0, \\ \frac{3}{\log^4 2}, & \xi = 0. \end{cases}$$

Cela permet donc de donner un intervalle de confiance de  $\xi$ . Il est à noter qu'en général l'estimateur de Pickands est biaisé. Pour un échantillon de taille  $n$  fixée, on trace le graphe de  $\widehat{\xi}_n^{(P)}$  comme fonction de  $k$  et on observe ses variations. Sur la Figure 2.5, on constate que pour  $k$  petit, il y'a de grandes oscillations avec un intervalle de confiance large et pour  $k$  grand, on aura un intervalle de confiance plus étroit mais pas centrée sur la vraie valeur.

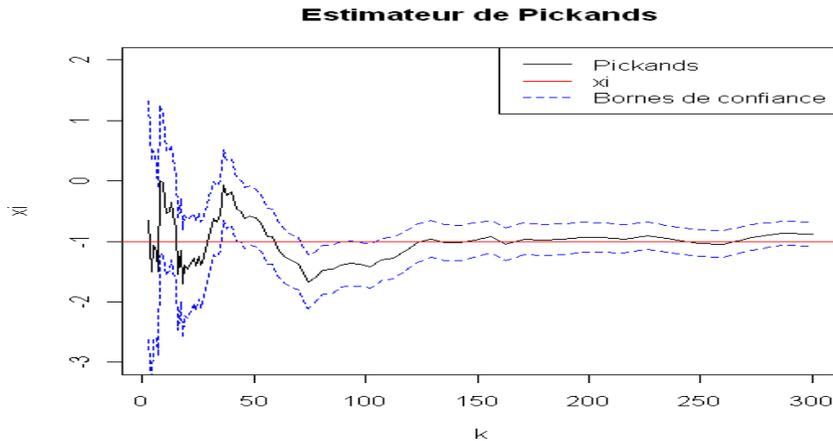


FIG. 2.5 – Estimateur de Pickands avec l'intervalle de confiance au niveau 95% pour  $\xi$  basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi uniform standard ( $\xi = -1$ ).

### Estimateur du quantile extrême

L'estimateur  $\widehat{x}_p^{(P)}$  du quantile  $Q(1-p)$  (pour  $p$  petit) associé à l'estimateur de Pickands est

$$\widehat{x}_p^{(P)}(k) := X_{n-k+1:n} + \frac{\left( \frac{k}{(n+1)p} \right)^{\widehat{\xi}_n^{(P)}(k)} - 1}{1 - 2^{-\widehat{\xi}_n^{(P)}(k)}} (X_{n-k+1:n} - X_{n-2k+1:n}). \quad (2.23)$$

On peut trouver les propriétés asymptotiques de cet estimateur, dans *Dekkers et de Haan* [29].

## 2.6.2 Estimateur de Hill

Cet estimateur qui a été présenté par *Hill* [47] est, de beaucoup, le plus célèbre parmi tous les estimateurs de l'indice de queue, bien que ce ne pourrait pas être le meilleur. Il s'applique seulement dans le cas où l'indice de queue est positif ( $\xi > 0$ ), qui correspond aux distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet ( $F \in MDA(\Phi_{1/\xi})$ ), c-à-d, quand la queue de distribution a une forme de Pareto (distributions à *queues lourdes*).

### Estimateur de l'indice de queue

**Définition 2.6.2** (*Estimateur de Hill :  $\xi > 0$* )

$$\widehat{\xi}_n^{(H)} = \widehat{\xi}_n^{(H)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{n-i+1:n} - \log X_{n-k:n}. \quad (2.24)$$

On note que cet estimateur peut être représenté en terme des espacements de logarithmes des observations

$$\widehat{\xi}_n^{(H)} = \widehat{\xi}_n^{(H)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i (\log X_{n-i+1:n} - \log X_{n-i:n}).$$

Cet estimateur, le plus utilisé en TVE, a été largement étudié. Un grand nombre de travaux théoriques ont été consacrés à l'étude de ses propriétés. Par exemple, sa consistance faible a été prouvée par *Mason* [63], sa consistance forte a été établie par *Deheuvels, Häusler et Mason* [22] et plus récemment par *Necir* [72]. La normalité asymptotique est due entre autres à *Davis et Resnick* [21], *Csörgő et Mason* [18] et *Häusler et Teugels* [46], ...

Avant d'énoncer les résultats sur le comportement asymptotique de l'estimateur de Hill, on définit la condition du second ordre qui renforce la condition de variation régulière du premier ordre (2.1) de la queue de distribution  $\overline{F}$ .

**Définition 2.6.3** (*Fonction à variation régulière au second ordre*)

On dit que  $\overline{F} \in MDA(\Phi_{1/\xi})$ ,  $\xi > 0$ , est à variation régulière au second ordre à l'infini, s'il existe un paramètre  $\rho < 0$  et une fonction  $A$  qui tend vers 0 et ne change pas le signe au voisinage de l'infini tels que pour tout  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)/U(t) - x^\xi}{A(t)} = x^\xi \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad (2.25)$$

où  $\rho$  s'appelle le paramètre de second ordre, si  $\rho = 0$ , on interprète  $(x^\rho - 1)/\rho$  comme  $\log x$ .

**Théorème 2.6.2** (*Propriétés asymptotiques de  $\widehat{\xi}_n^{(H)}$* )

Soient  $F \in MDA(\Phi_{1/\xi})$ ,  $\xi > 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$

(a) *Consistance faible* :

$$\widehat{\xi}_n^{(H)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \xi, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(b) *Consistance forte* : si  $k/\log \log n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\widehat{\xi}_n^{(H)} \xrightarrow{p.s.} \xi, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(c) *Normalité asymptotique* : soit  $F$  vérifie (2.25).

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) = 0, \text{ alors}$$

$$\sqrt{k} \left( \widehat{\xi}_n^{(H)} - \xi \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \xi^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

De nombreux autres estimateurs ont été proposés pour le cas  $\xi > 0$ , pour une revue détaillée voir *Csörgő et Viharos* [19].

**Exemple 2.6.3** (*Loi de Pareto*)

Pour voir la performance de cet estimateur, on a effectué une étude de simulation basée sur 100 échantillons de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{2/3, 1\}$ , on obtient  $\widehat{\xi}_n^{(H)}$  et les bornes de confiance au niveau 95% de  $\xi$  qui sont donnés dans le Tableau 2.5 et le Tableau 2.6 respectivement.

$\xi$	$n$	$k$	$\widehat{\xi}_n^{(H)}$	erreur absolue	erreur relative	rmse
2/3	1000	53	0.589	0.078	0.117	0.084
	3000	133	0.622	0.045	0.068	0.078
	5000	257	0.629	0.038	0.056	0.062
1	1000	57	0.931	0.069	0.069	0.115
	3000	133	0.932	0.068	0.068	0.117
	5000	220	1.117	0.117	0.117	0.136

TAB. 2.5 – Estimation ponctuelle de  $\xi$  basée sur 100 échantillons de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{2/3, 1\}$

Comme l'estimateur de Pickands, l'estimateur de Hill est biaisé. La figure 2.6 illustre le graphe de  $\widehat{\xi}_n^{(H)}$  et l'intervalle de confiance en fonction de  $k$ . On observe que pour  $k$  petit, il y a de grandes oscillations avec un intervalle de confiance large et pour  $k$  grand, l'intervalle de confiance devient plus étroit.

**Estimateur du quantile extrême**

*Weissman* [102] a proposé un estimateur de la quantile extrême  $Q(1 - p)$  quand  $\xi > 0$ , notée par  $\widehat{x}_p^{(H)}$ . Cet estimateur est donné par la formule suivante

$$\widehat{x}_p^{(H)} := \left( \frac{k}{np} \right)^{\widehat{\xi}_n^{(H)}} X_{n-k:n}. \tag{2.26}$$

$\xi$	$n$	$\widehat{\xi}_n^{(H)}$	Intervalle de confiance	longueur	probabilité de couverture
2/3	1000	0.589	0.411 – 0.766	0.355	0.94
	3000	0.622	0.505 – 0.738	0.234	0.90
	5000	0.629	0.542 – 0.716	0.174	0.87
1	1000	0.931	0.666 – 1.196	0.53	0.95
	3000	0.932	0.757 – 1.107	0.350	0.90
	5000	1.117	0.946 – 1.287	0.341	0.95

TAB. 2.6 – Estimation par intervalle de confiance au niveau 95% de  $\xi$  basée sur 100 échantillons de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{2/3, 1\}$

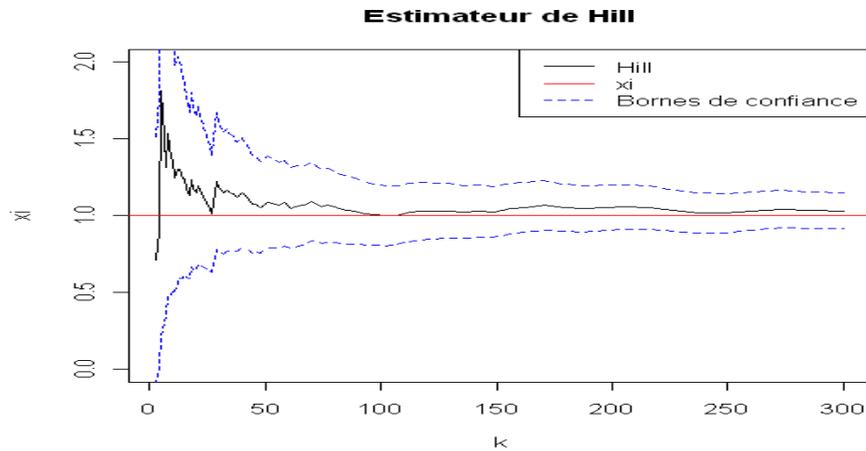


FIG. 2.6 – Estimateur de Hill avec l’intervalle de confiance au niveau 95% pour  $\xi$  basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard ( $\xi = 1$ ).

Les propriétés asymptotiques de  $\widehat{x}_p^{(H)}$  ont été discutées et les intervalles de confiance construits sous certaines conditions sur  $F$ ,  $k$  et  $p$ , par exemple, dans l’article de *Matthys et Beirlant* [65].

### 2.6.3 Estimateur des moments

Un inconvénient de l’estimateur de Hill est qu’il est conçu seulement pour l’indice de queue des distributions à queues lourdes. En 1989, *Dekkers, Einmahl et de Haan* [28] ont proposé l’estimateur des moments comme généralisation directe de l’estimateur de Hill pour  $\xi \in \mathbb{R}$  (une prolongation à n’importe quel type de distribution).

### Estimateur de l'indice de queue

**Définition 2.6.4** (*Estimateur des moments :  $\xi \in \mathbb{R}$* )

$$\widehat{\xi}_n^{(M)} = \widehat{\xi}_n^{(M)}(k) := M_n^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(M_n^{(1)})^2}{M_n^{(2)}} \right)^{-1}, \quad (2.27)$$

avec

$$M_n^{(r)} = M_n^{(r)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\log X_{n-i+1:n} - \log X_{n-k:n})^r, \quad r = 1, 2, \quad (2.28)$$

où  $M_n^{(1)}$  est l'estimateur de Hill  $\widehat{\xi}_n^{(H)}$ .

Les propriétés asymptotiques de cet estimateur ont été étudiées dans *Dekkers, Einmahl et de Haan* [28].

**Théorème 2.6.4** (*Propriétés asymptotiques de  $\widehat{\xi}_n^{(M)}$  (Dekkers, Einmahl et de Haan, [28])*)

Soient  $F \in MDA(H_\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $k \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

(a) *Consistance faible :*

$$\widehat{\xi}_n^{(M)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \xi, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(b) *Consistance forte : si  $k/(\log n)^\delta \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour  $\delta > 0$ , alors*

$$\widehat{\xi}_n^{(M)} \xrightarrow{p.s.} \xi, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(c) *Normalité asymptotique : si les conditions du Théorème 3.1 de Dekkers, Einmahl et de Haan [28] sont satisfaisants et si  $k = o(n/g_1^-(n))$  où  $g_1(t) := t(U(t)/a(t))^2$ , alors*

$$\sqrt{k} \left( \widehat{\xi}_n^{(M)} - \xi \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\xi)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

avec

$$\sigma^2(\xi) := \begin{cases} 1 + \xi^2, & \text{si } \xi \geq 0, \\ (1 - \xi)^2(1 - 2\xi) \left[ 4 - 8 \frac{1 - 2\xi}{1 - 3\xi} + \frac{(5 - 11\xi)(1 - 2\xi)}{(1 - 3\xi)(1 - 4\xi)} \right], & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$

D'après la figure 2.7, qui représente le graphe de  $\widehat{\xi}_n^{(M)}$  et l'intervalle de confiance en fonction de  $k$ , on remarque des oscillations avec un intervalle de confiance large pour  $k$  petit et plus étroit pour  $k$  grand.

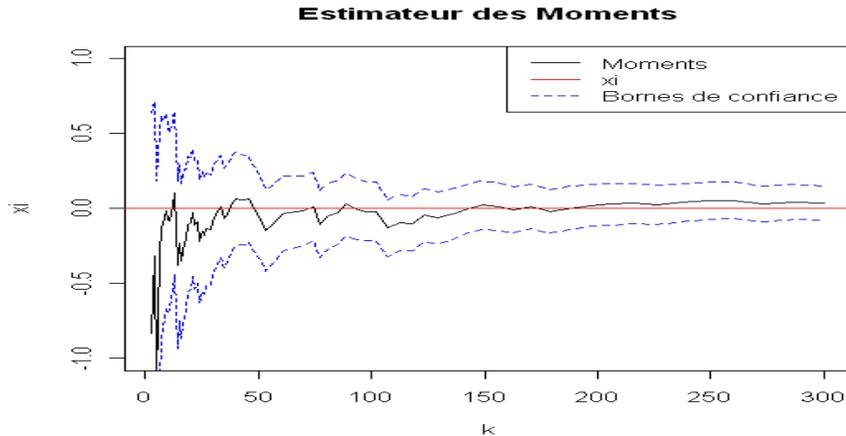


FIG. 2.7 – Estimateur des moments avec l'intervalle de confiance au niveau 95% de  $\xi$  basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Gumbel ( $\xi = 0$ ).

### Estimation du quantile extrême

Un estimateur pour les quantiles extrêmes  $Q(1 - p)$  sur la base de l'estimateur de moments est

$$\hat{x}_p^{(M)}(k) := X_{n-k:n} + \hat{a}_n^{(M)}(k) \frac{\left(\frac{k}{np}\right)^{\hat{\xi}_n^{(M)}(k)} - 1}{\hat{\xi}_n^{(M)}(k)}, \quad \text{pour } k < n, \quad (2.29)$$

avec les choix

$$\hat{a}_n^{(M)}(k) = \frac{M_n^{(1)}(k)}{\rho_1(\hat{\xi}_n^{(M)}(k))} X_{n-k:n},$$

$$\rho_1(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{pour } \xi \geq 0, \\ \frac{1}{1 - \xi}, & \text{pour } \xi < 0. \end{cases}$$

La normalité asymptotique de cet estimateur, dans de diverses conditions sur la queue de la distribution et sur l'ordre limité de  $p = p_n$  pour  $n \rightarrow \infty$ , a été prouvée par *Dekkers, Einmahl et de Haan* [28] et par *de Haan et Rootzén* [44].

### 2.6.4 Comparaison entre ces estimateurs

La question de quel est le meilleur estimateur de l'indice de queue  $\xi$  (ou en d'autres termes, quel estimateur devrait-on employer) n'a pas de réponse définitive. Le tout dépend des valeurs possibles de  $\xi$  et des propriétés précises de la f.r. fondamentale  $F$ . Sur la figure 2.8, qui représente la comparaison entre les trois estimateurs (de Hill, de

Pickands et de moments), il apparaît que l'estimateur de Pickands est le plus moins stable.

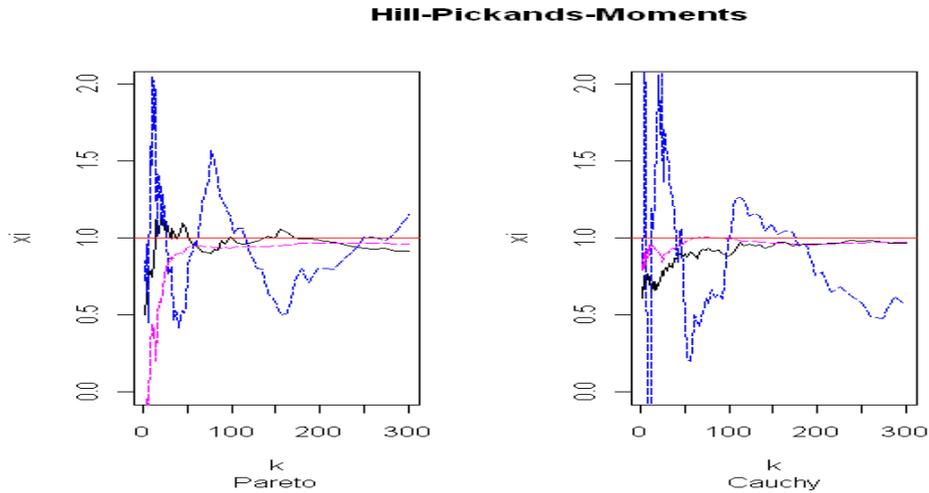


FIG. 2.8 – Estimateur de Hill (trait plein), de Pickands (tirets bleus) et de Moments (tirets magenta) basés sur 100 échantillons de taille 3000 pour la loi de Pareto standard (gauche) et la loi de Cauchy Standard (droite). La ligne horizontale (trait rouge) est la vraie valeur de  $\xi$ .

### 2.6.5 Choix optimal du $k$ plus grandes observations

Il est évident que les estimateurs de  $\xi$  sont basés essentiellement sur le nombre de  $k$  plus grandes observations qui sont utilisées dans l'estimation où leurs comportements sont affectés par ce nombre crucial  $k$ . Cependant, le choix de ce nombre crucial  $k$  n'est pas une tâche facile, où le choix de  $k$  plus grandes observations, on se trouve face à l'un des deux cas ou problèmes : la présence d'un biais ou d'une variance élevée. En effet, l'utilisation de trop grand nombre d'observations, dans la procédure d'estimation, entraîne à un biais considérable, tandis que l'emploi de trop petit nombre d'observations mène à une variance substantielle. Pour le choix plus approprié de  $k$  qui permet de donner un équilibre entre les deux cas c-à-d, qui permet d'obtenir un bon estimation de  $\xi$ , plusieurs procédures ont été suggérées dans la littérature mais aucune n'est adoptée d'une manière générale. Pour plus de détails sur ces procédures, on réfère par exemple aux *Dekkers et de Haan* [30], *Drees et Kaufmann* [32], *Danielsson et al.* [20], *Cheng et Peng* [15] et *Neves et Fraga Alves* [78].

# Chapitre 3

## Estimation Empirique des Mesures de Risque

Ce chapitre est consacré à l'estimation de quelques unes des mesures de risque les plus connues, telles la *VaR*, la *CTE*, la *PHT* et la *TSD*. On considère l'estimation classique non-paramétrique, par les L-statistiques qui sont des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre, et l'estimation semi-paramétrique, basé sur la TVE qui permet de traiter les situations de risques dangereux.

Plusieurs mesures de risque peuvent être écrites comme L-fonctionnelles. Cette représentation est plus susceptible pour développer des estimateurs empiriques et construire des intervalles de confiance. En particulier, *Jones et Zitikis* [51] ont montré que les mesures de risque par distorsion telles la *CTE*, la *WT*, la *PHT* et la *TSD* sont de la forme L-fonctionnelle avec des fonctions de poids spécifiques. Pour cette raison, on commence ce chapitre par une brève description des L-fonctionnelles et leur estimation.

### 3.1 L-fonctionnelle

#### 3.1.1 Mesure de risque comme L-fonctionnelle

**Définition 3.1.1** (*L-fonctionnelle*)

Soit  $X$  une v.a. réelle de fonction des quantiles  $Q$ , de la Définition 2.1.5. La L-fonctionnelle correspondante est définie par

$$L_J(X) := \int_0^1 J(s)Q(s)ds, \quad (3.1)$$

où  $J$  est une fonction mesurable définie sur  $[0, 1]$  appelée fonction de poids.

**Proposition 3.1.1** Si la fonction de distorsion  $g$  est dérivable et croissante, alors la mesure de risque  $\Pi_g(X)$ , définie par (1.9) ou (1.10), peut être réécrite comme L-fonctionnelle.

$$\Pi_g[X] = \int_0^1 J(s)Q(s)ds, \quad (3.2)$$

avec  $J(s) := g'(1 - s)$ .

**Preuve** Voir la démonstration du Lemme 2.1 dans l'annexe de *Jones et Zitikis* [51]. ■

**Exemple 3.1.1** (*Tail VaR ou Conditional Tail Expectation*)

La fonction de distorsion de  $\Pi_{TVaR}$  (ou  $\Pi_{CTE}$  si  $F$  est continue) est donnée par l'équation (1.15). Alors

$$J(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq p, \\ (1 - p)^{-1}, & \text{si } s > p. \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc,  $\Pi_{CTE}$  est la  $L$ -fonctionnelle donnée par la formule suivante :

$$\Pi_{CTE} = \frac{1}{1 - p} \int_p^1 Q(s) ds. \quad (3.4)$$

**Exemple 3.1.2** (*Wang Transform*)

La fonction  $J(s)$  qui correspond à la fonction de distorsion de  $\Pi_{WT}$  (donnée par l'équation (1.17)) est

$$J(s) = e^{\lambda\Phi^{-1}(s) - \lambda^2/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Alors,  $\Pi_{WT}$  est la  $L$ -fonctionnelle suivante :

$$\Pi_{WT} = \int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(s) - \lambda^2/2} Q(s) ds. \quad (3.6)$$

**Exemple 3.1.3** (*Proportional Hazard Transform*)

La fonction de distorsion  $g$  de  $\Pi_{PHT}$  est définie par (1.19). Alors

$$J(s) = \varrho^{-1}(1 - s)^{1/\varrho - 1}, \quad \varrho \geq 1, \quad (3.7)$$

et par suite  $\Pi_{PHT}$  peut être réécrite comme  $L$ -fonctionnelle par la formule suivante :

$$\Pi_{PHT} = \varrho^{-1} \int_0^1 (1 - s)^{1/\varrho - 1} Q(s) ds.$$

**Exemple 3.1.4** (*Two Sided Deviation*)

Dans ce cas, la fonction  $J(s)$  est

$$J(s) = \frac{r}{2} ((1 - s)^{r-1} - s^{r-1}). \quad (3.8)$$

La mesure de risque  $\Pi_{TSD}$  peut être réécrite comme suit :

$$\Pi_{TSD} = \Delta_r(X) = \frac{r}{2} \int_0^1 ((1 - s)^{r-1} - s^{r-1}) Q(s) ds.$$

### 3.1.2 Estimation de la L-fonctionnelle

#### Cas de variance finie

L'estimateur naturel de la quantité  $L_J(X)$  est une combinaison linéaire de statistiques d'ordre, appelée L-statistique. Pour plus de détails sur ce type de statistique, on se réfère à *Shorack et Wellner* [89]. En effet, pour un échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de taille  $n \geq 1$  de  $X$ , on remplace, dans la formule (3.1),  $Q(s)$  par son estimateur empirique  $Q_n(s)$  (définie par (2.3)). On obtient alors l'estimateur suivant pour  $L_J(X)$  :

$$\widehat{L}_{J,n}(X) := \int_0^1 J(s)Q_n(s)ds. \quad (3.9)$$

Il est clair que, en vertu de (2.4),  $\widehat{L}_{J,n}(X)$  peut être réécrit, en termes des statistiques d'ordre  $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ , associées à l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , comme suit :

$$\widehat{L}_{J,n}(X) = \sum_{i=1}^n a_{i,n} X_{i:n}, \quad (3.10)$$

où  $a_{i,n} := \int_{(i-1)/n}^{i/n} J(s)ds, i = 1, \dots, n$ .

Le premier théorème général sur la normalité asymptotique de  $\widehat{L}_{J,n}(X)$  a été établi par *Chernoff et al.* [14]. Par la suite, un grand nombre d'auteurs, dont une liste partielle est donnée dans *Necir et Meraghni* [75], ont étudié le comportement asymptotique des L-statistiques. En effet, on a

$$\sqrt{n}(\widehat{L}_{J,n}(X) - L_J(X)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(J)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

à condition que

$$\sigma^2(J) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st)J(s)J(t)dQ(s)dQ(t) < \infty. \quad (3.12)$$

**Remarque 3.1.1** *Pour une fonction  $J$  donnée, la condition (3.12) exclut la classe des distributions à queues lourdes pour lesquelles  $\sigma^2(J)$  est infinie.*

#### Cas de variance infinie ( $F \in D(\alpha)$ )

Le résultat (3.11) n'est rien d'autre que le TCL classique, qui est valable seulement lorsque la variance de  $F$  est finie. Par conséquent, il ne s'applique pas pour des distributions à variances infinies. *Necir et Meraghni* [75] ont proposé un estimateur empirique, basé sur l'estimation des quantiles extrêmes, pour les L-fonctionnelles de ce genre de distributions et plus spécialement de celles appartenant au domaine d'attraction des lois  $\alpha$ -stables, avec  $\alpha \in (1, 2)$ , qu'on note par  $F \in D(\alpha)$ .

### Estimation des quantiles extrêmes

Les quantiles extrêmes gauche et droit d'ordre  $s$  (petit) de la f.r.  $F \in D(\alpha)$  sont deux réels  $x_L$  et  $x_R$  respectivement définis par  $F(x_L) = 1 - F(x_R) = s$ , c-à-d  $x_L := Q_L(s)$  et  $x_R := Q_R(1 - s)$ ,  $s \downarrow 0$ .

Soient  $l = l_n$  et  $k = k_n$  deux suites des nombres entiers satisfaisant

$$1 < l < n, \quad 1 < k < n, \quad l \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad l/n \rightarrow 0 \text{ et } k/n \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Alors, les estimateurs de Weissman pour  $x_L$  et  $x_R$  sont définis pour  $s \downarrow 0$ , comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_L = \hat{Q}_L(s) &:= \left(\frac{l}{n}\right)^{1/\hat{\alpha}_L} X_{l:n} s^{-1/\hat{\alpha}_L}, \\ \hat{x}_R = \hat{Q}_R(1 - s) &:= \left(\frac{k}{n}\right)^{1/\hat{\alpha}_R} X_{n-k:n} s^{-1/\hat{\alpha}_R}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\hat{\alpha}_L = \hat{\alpha}_L(l) := \left(\frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l-1} \log^+(-X_{i:n}) - \log^+(-X_{l:n})\right)^{-1}, \quad (3.15)$$

et

$$\hat{\alpha}_R = \hat{\alpha}_R(k) := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(X_{n-i+1:n}) - \log^+(X_{n-k:n})\right)^{-1}, \quad (3.16)$$

sont deux formes de l'estimateur de Hill (voir *Hill* [47]) pour l'indice de stabilité  $\alpha$  qui pourrait également être estimé, en utilisant, les statistiques d'ordre  $Z_{1:n} \leq \dots \leq Z_{n:n}$  associées à l'échantillon  $(Z_1, \dots, Z_n)$  de  $Z := |X|$ , comme suit :

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(m) := \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(Z_{n-i+1:n}) - \log^+(Z_{n-m:n})\right)^{-1}, \quad (3.17)$$

avec  $\log^+ u = \max(0, \log u)$  et  $m = m_n$  est une suite intermédiaire satisfaisant les mêmes conditions que  $l$  et  $k$ .

### Quelques hypothèses de régularité sur $J$

Pour établir la normalité asymptotique de l'estimateur de la L-fonctionnelle, les hypothèses de régularité suivantes sur la fonction  $J$  sont nécessaires :

(H<sub>1</sub>)  $J$  est différentiable sur  $(0, 1)$ .

(H<sub>2</sub>)  $\lambda := \lim_{s \downarrow 0} J(1 - s)/J(s) < \infty$ .

(H<sub>3</sub>) Les deux fonctions  $J(1 - s)$  et  $J(s)$  sont à variations régulières en zéro d'indice commun  $\delta \in \mathbb{R}$ .

(H<sub>4</sub>) Il existe une fonction  $a(\cdot)$  ne changeant pas le signe au voisinage de zéro telle que :

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{J(ts)/J(s) - x^\delta}{a(t)} = x^\delta \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad \text{pour } x > 0,$$

où  $\rho \leq 0$  s'appelle le paramètre de second ordre.

### Estimation de la L-fonctionnelle

Soient  $F \in D(\alpha)$  avec  $0 < \alpha < 2$ ,  $l = l_n$  et  $k = k_n$  deux suites de nombres entiers satisfaisant (3.13) avec la condition additionnelle

$$l/k \rightarrow \theta < \infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Premièrement, il faut noter que lorsque  $1 + \delta - 1/\alpha > 0$  et puisque  $\hat{\alpha}_L$  et  $\hat{\alpha}_R$  sont des estimateurs consistants de  $\alpha$ , alors on a, pour tout  $n$  grand

$$P(1 + \delta - 1/\hat{\alpha}_L > 0) = P(1 + \delta - 1/\hat{\alpha}_R > 0) = 1 + o(1). \quad (3.18)$$

Le deuxième membre de la relation (3.1) peut être divisé en trois intégrales comme suit :

$$\begin{aligned} L_J(X) &= \int_0^{l/n} J(s)Q(s)ds + \int_{l/n}^{1-k/n} J(s)Q(s)ds + \int_{1-k/n}^1 J(s)Q(s)ds \\ &:= T_{L,n} + T_{M,n} + T_{R,n}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

La substitution de  $\hat{Q}_L(s)$  et  $\hat{Q}_R(1-s)$  pour  $Q_L(s)$  et  $Q_R(1-s)$  dans  $T_{L,n}$  et  $T_{R,n}$  respectivement et l'utilisation de l'hypothèse  $(H_3)$  et (3.18) entraînent, pour tout  $n$  grand

$$\begin{aligned} \int_0^{l/n} J(s)\hat{Q}_L(s)ds &= \left(\frac{l}{n}\right)^{1/\hat{\alpha}_L} X_{l:n} \int_0^{l/n} s^{-1/\hat{\alpha}_L} J(s)ds \\ &= (1 + o(1)) \frac{(l/n)J(l/n)}{1 + \delta - 1/\hat{\alpha}_L} X_{l:n}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{k/n} J(1-s)\hat{Q}_R(1-s)ds &= \left(\frac{k}{n}\right)^{1/\hat{\alpha}_R} X_{n-k:n} \int_0^{k/n} s^{-1/\hat{\alpha}_R} J(1-s)ds \\ &= (1 + o(1)) \frac{(k/n)J(1-k/n)}{1 + \delta - 1/\hat{\alpha}_R} X_{n-k:n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut estimer  $T_{L,n}$  et  $T_{R,n}$  par

$$\hat{T}_{L,n} := \frac{(l/n)J(l/n)}{1 + \delta - 1/\hat{\alpha}_L} X_{l:n} \quad \text{et} \quad \hat{T}_{R,n} := \frac{(k/n)J(1-k/n)}{1 + \delta - 1/\hat{\alpha}_R} X_{n-k:n}, \quad (3.20)$$

respectivement. Pour  $T_{M,n}$ , on remplace  $Q(s)$  par  $Q_n(s)$  et on obtient l'estimateur

$$\hat{T}_{M,n} := \sum_{i=l+1}^{n-k} a_{i,n} X_{i:n},$$

avec les mêmes constantes  $a_{i,n}$  que celles de (3.10). Donc, la forme finale de l'estimateur de  $L_J(X)$  est

$$\widehat{L}_{J,l,k}(X) := \frac{(l/n)J(l/n)}{1 + \delta - 1/\widehat{\alpha}_L} X_{l:n} + \sum_{i=l+1}^{n-k} a_{i,n} X_{i:n} + \frac{(k/n)J(1 - k/n)}{1 + \delta - 1/\widehat{\alpha}_R} X_{n-k:n}. \quad (3.21)$$

**Remarque 3.1.2** *Un estimateur universel de  $L_J(X)$  peut être donné par la formule suivante*

$$\widehat{L}_{J,n}^*(X) := \widehat{L}_{J,l,k}(X) \mathbb{1}_{\{\sigma^2(J)=\infty\}} + \widehat{L}_{J,n}(X) \mathbb{1}_{\{\sigma^2(J)<\infty\}}.$$

**Théorème 3.1.5** *(Normalité asymptotique de  $\widehat{L}_{J,l,k}(X)$ )*

Soit  $F \in D(\alpha)$  avec  $0 < \alpha < 2$ . Pour toute une fonction mesurable  $J$  satisfaisant les hypothèses  $(H_1) - (H_4)$  avec l'indice  $\delta \in \mathbb{R}$  tels que  $1/2 < 1/\alpha - \delta < 1$  et pour toutes suites de nombres entiers  $l$  et  $k$  tels que  $1 < l < n$ ,  $1 < k < n$ ,  $l \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $l/n \rightarrow 0$ ,  $k/n \rightarrow 0$ ,  $l/k \rightarrow \theta < \infty$ , et  $\sqrt{ka}(k/n)A(k/n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{L}_{J,l,k}(X) - L_J(X))}{\sigma_n(J)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.22)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 = \sigma_0^2(\alpha, \delta) := & (\alpha\delta + 1)(\delta + 2 - \alpha) \\ & \times \left( \frac{2\alpha^2 + (\delta\alpha - 1)^2 + 2\alpha(\delta\alpha - 1)}{2((1 + \delta)\alpha - 1)^4} + \frac{1}{(1 + \delta)\alpha - 1} \right) + 1. \end{aligned}$$

Pour construire des intervalles de confiance pour  $L_J(X)$ , le corollaire suivant est plus pratique, car il fournit directement les bornes de confiance.

**Corollaire 3.1.1** *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.5, on a*

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{L}_{J,l,k}(X) - L_J(X))}{(k/n)^{1/2} J(1 - k/n) X_{n-k:n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où

$$\begin{aligned} V^2 = V^2(\alpha, \delta, \lambda, \theta, p) := & \left( 1 + \lambda^{-2} \left( \frac{q}{p} \right)^{-2/\alpha} \theta^{-2\delta+2/\alpha-1} \right) \\ & \times \left( \frac{2\alpha^2 + (\delta\alpha - 1)^2 + 2\alpha(\delta\alpha - 1)}{2((1 + \delta)\alpha - 1)^4} + \frac{1}{(1 + \delta)\alpha - 1} \right) + 1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec  $(p, q)$  définis par l'équation (2.9) et  $(\lambda, \delta)$  sont ceux des hypothèses  $(H_1) - (H_4)$ .

On réfère ceux qui sont intéressés par les preuves du Théorème 3.1.5 et du Corollaire 3.1.1, à l'article de *Necir et Meraghni* [75].

L'expression (3.23) de la variance asymptotique  $V^2$  suggère que l'estimation de  $p$  est aussi bien nécessaire, pour la construction des bornes de confiance pour  $L_J(X)$ . En utilisant la statistique d'ordre intermédiaire  $Z_{n-m:n}$ , de *Haan et Pereira* [43] ont proposé l'estimateur consistant suivant pour  $p$  :

$$\widehat{p}_n = \widehat{p}_n(m) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{\{X_i > Z_{n-m:n}\}}, \quad (3.24)$$

avec  $m = m_n$  est une suite des nombres entiers satisfaisant  $1 < m < n$ ,  $m \rightarrow \infty$  et  $m/n \rightarrow 0$ , quand  $n \rightarrow \infty$  (la même que celle utilisée dans (3.17)).

Soit  $J$  une fonction de poids satisfaisant  $(H_1) - (H_4)$  avec des constantes fixées  $\delta$  et  $\lambda$ . On suppose que, pour  $n$  assez grand, on a une réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de la v.a.  $X$  avec une f.r.  $F$  vérifiant toutes les hypothèses du Théorème 3.1.5. L'intervalle de confiance au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $L_J(X)$  est obtenu à partir les étapes suivantes :

- Choisir les nombres optimaux  $l^*$ ,  $k^*$ ,  $m^*$  des statistiques d'ordre inférieures et supérieures utilisées dans (3.15), (3.16) et (3.17).
- Déterminer  $X_{l^*:n}$ ,  $X_{n-k^*:n}$ ,  $J(l^*/n)$ ,  $J(1 - k^*/n)$  et  $\theta^* := l^*/k^*$ .
- Calculer, en utilisant (3.15) et (3.16),  $\widehat{\alpha}_L^* := \alpha_L(l^*)$  et  $\widehat{\alpha}_R^* := \alpha_R(k^*)$ . Dédurre alors, par (3.21), l'estimateur  $\widehat{L}_{J,l^*,k^*}(X)$ .
- Utiliser (3.17) et (3.24) pour calculer  $\widehat{\alpha}^* := \widehat{\alpha}(m^*)$  et  $\widehat{p}_n^* := \widehat{p}_n(m^*)$ . Dédurre alors, par (3.23), l'écart type asymptotique :

$$V^* := \sqrt{V^2(\widehat{\alpha}^*, \delta, \lambda, \theta^*, \widehat{p}_n^*)}.$$

Finalement, les bornes de confiance au niveau  $(1 - \varsigma)$  de  $L_J(X)$  sont

$$\widehat{L}_{J,l^*,k^*}(X) \pm z_{\varsigma/2} \frac{\sqrt{k^*} V^* X_{n-k^*:n} J(1 - k^*/n)}{n},$$

où  $z_{\varsigma/2}$  est le quantile d'ordre  $(1 - \varsigma/2)$  de la distribution normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$  avec  $0 < \varsigma < 1$ .

## 3.2 Estimation non-paramétrique

Dans cette section, on présentera une méthode empirique pour l'estimation de quelques unes des mesures de risque qui sont mentionnées au-dessus quand la variance est finie. Dans ce cas, on peut utiliser le TCL classique pour construire des bornes de confiance pour ces mesures de risque.

### 3.2.1 Value at Risk

Au premier chapitre, on a vu que la  $VaR$ , définie par (1.1), est la mesure de risque la plus populaire mais pas nécessairement la meilleure. L'estimateur naturel de cette mesure de risque est le quantile empirique  $Q_n(p)$ , défini par (2.4), qui pour  $0 < p < 1$  est égal à  $X_{[np]+1:n}$ . Alors, l'estimateur de  $VaR_p$  est

$$\widehat{VaR}_{p,n} = X_{[np]+1:n}. \quad (3.25)$$

La normalité asymptotique de  $\widehat{VaR}_{p,n}$  est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{VaR}_{p,n}$* )

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon d'une f.r.  $F$  inconnue et soit  $VaR_p$ ,  $p \in ]0, 1[$ , le  $p$ -quantile de  $F$ . Si on suppose que  $F$  est continue et dérivable en  $VaR_p$  de dérivée  $f(VaR_p) > 0$ , alors

$$\sqrt{n} \left( \widehat{VaR}_{p,n} - VaR_p \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{p(1-p)}{f^2(VaR_p)} \right), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Cela permet donc de construire les bornes de confiance au niveau  $(1 - \varsigma)$  de  $VaR_p$  :

$$\widehat{VaR}_{p,n} \pm \frac{z_{\varsigma/2} \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n} f(VaR_p)},$$

où  $z_{\varsigma/2}$  est le quantile d'ordre  $(1 - \varsigma/2)$  de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### 3.2.2 Mesure de risque par distorsion

Puisque la plupart des mesures de risque par distorsion ont pu être écrites sous la forme de L-fonctionnelle (3.1), alors les estimateurs classiques de ces mesures de risque, quand la variance est finie, ont la forme (3.10). En effet, soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  copies i.i.d. d'une v.a.  $X$ , alors l'estimateur de  $\Pi_g[X]$  est la L-statistique suivante :

$$\widehat{\Pi}_{g,n}[X] := \sum_{i=1}^n a_{i,n} X_{i:n}, \quad (3.26)$$

où  $a_{i,n}$  est la même constante que celle de (3.10).

Dans le théorème suivant, on donne la normalité asymptotique de l'estimateur  $\widehat{\Pi}_{g,n}$ .

**Théorème 3.2.2** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{\Pi}_{g,n}$  (Jones et Zitikis, [51])*)

Si  $J$  est une fonction continue sur  $(0, 1)$  vérifie que  $|J(s)| \leq cs^{a-1}(1-s)^{b-1}$ ,  $0 < s < 1$  avec  $a, b > 1/2$  et  $c < \infty$  et si  $\mathbb{E}[|X|^\gamma] < \infty$  pour  $\gamma > 1/(a-1/2)$  et  $\gamma > 1/(b-1/2)$ , on a

$$\sqrt{n} \left( \widehat{\Pi}_{g,n} - \Pi_g \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(J)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

avec

$$\sigma^2(J) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) J(s) J(t) dQ(s) dQ(t) < \infty. \quad (3.28)$$

**Preuve** Voir *Jones et Zitikis* [51]. ■

Par l'utilisation des résultats du Théorème 3.2.2, on peut construire les bornes de confiance asymptotique au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $\Pi_g$ . En effet, on a

$$\widehat{\Pi}_{g,n} \pm \frac{z_{\varsigma/2} \sigma(J)}{\sqrt{n}}.$$

Ces bornes ne s'appliquent pas dans la pratique puisque  $\sigma^2(J)$  dépend de la fonction des quantiles  $Q$  qui est inconnue. Pour remédier à cette situation, *Jones et Zitikis* [51] ont proposé l'estimateur empirique consistant de  $\sigma^2(J)$ , noté par  $\widehat{\sigma}^2(J)$ , obtenu en remplaçant  $Q$  par la fonction empirique des quantiles  $Q_n$  dans (3.28).

$$\widehat{\sigma}^2(J) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_n(i, j) J\left(\frac{i}{n}\right) J\left(\frac{j}{n}\right) [(X_{i+1:n} - X_{i:n})(X_{j+1:n} - X_{j:n})], \quad (3.29)$$

avec

$$c_n(i, j) = \left( \min(i, j) - \frac{i j}{n} \right). \quad (3.30)$$

### 3.2.3 Mesures par distorsion particulières

#### Conditional Tail Expectation

Sous la condition que la f.r.  $F$  est continue et l'hypothèse que  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ , *Brazauskas et al.* [12] ont proposé un estimateur classique de  $\Pi_{CTE}$ . En effet, soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  copies indépendantes d'une v.a.  $X$  de f.r.  $F$  et soit  $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  les statistiques d'ordre associées. En remplaçant,  $Q$  par la fonction empirique des quantiles  $Q_n$  dans (3.4), on construit l'estimateur de  $\Pi_{CTE}$ , noté par  $\widehat{\Pi}_{CTE,n}$ , comme la moyenne des statistiques d'ordre supérieures :

$$\widehat{\Pi}_{CTE,n} := \frac{1}{n - [np]} \sum_{i=[np]+1}^n X_{i:n}, \quad (3.31)$$

La normalité asymptotique de cet estimateur est établie dans le Théorème 3.1 de *Brazauskas et al.* [12], qu'on peut considérer comme corollaire du Théorème 3.2.2 ci-dessus.

**Corollaire 3.2.1** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{\Pi}_{CTE,n}$  (Brazauskas et al., [12])*)  
*Si  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ , alors pour  $p \in (0, 1)$ , on a*

$$\sqrt{n}(1 - p) \left( \widehat{\Pi}_{CTE,n} - \Pi_{CTE} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(p)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

avec

$$\sigma_p^2(J) = \frac{1}{(1-p)^2} \int_p^1 \int_p^1 (\min(s, t) - st) dQ(s)dQ(t). \quad (3.32)$$

**Preuve** Voir la démonstration du Théorème 3.1 de *Brazauskas et al.* [12]. ■

Les bornes de confiance asymptotique au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $\Pi_{CTE}$  sont :

$$\widehat{\Pi}_{CTE,n} \pm \frac{z_{\varsigma/2} \sigma_p(J)}{\sqrt{n}}.$$

On note que, en pratique  $\sigma_p^2(J)$ , qui dépend de la fonction inconnue  $Q$ , est remplacé par son estimateur empirique consistant  $\widehat{\sigma}_p^2(J)$ , dont la formule est obtenue d'après (3.29).

$$\widehat{\sigma}_p^2(J) = \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=[np]}^{n-1} \sum_{j=[np]}^{n-1} c_n(i, j) [(X_{i+1:n} - X_{i:n})(X_{j+1:n} - X_{j:n})],$$

où  $c_n(i, j)$  est défini dans (3.30).

**Exemple 3.2.3** (*Loi exponentielle standard*)

L'estimateur et les bornes de confiance au niveau 95% de  $\widehat{\Pi}_{CTE,n}$ , basés sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \{1, 2\}$  avec  $p \in \{0.75, 0.85, 0.95\}$ , sont donnés dans le Tableau 3.1 et le Tableau 3.2 respectivement.

$\lambda$	$p$	$\Pi_{CTE}$	$\widehat{\Pi}_{CTE}$	erreur absolue	erreur relative	rmse
1	0.75	2.386	2.384	0.002	0.001	0.086
	0.85	2.897	2.894	0.003	0.001	0.112
	0.95	3.996	3.978	0.018	0.004	0.201
2	0.75	1.193	1.194	0.001	0.001	0.041
	0.85	1.449	1.441	0.007	0.005	0.056
	0.95	1.998	1.989	0.009	0.004	0.101

TAB. 3.1 – Estimation non-paramétrique ponctuelle de la  $\Pi_{CTE}$  basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \{1, 2\}$  avec  $p \in \{0.75, 0.85, 0.95\}$

### Wang Transform

L'estimateur de  $\Pi_{WT}$ , noté par  $\widehat{\Pi}_{WT,n}$ , est la L-statistique ayant pour coefficients

$$a_{i,n} = e^{-\lambda^2/2} \int_{(i-1)/n}^{i/n} e^{\lambda\Phi^{-1}(s)} ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

En appliquant le Théorème 3.2.2, on obtient la normalité asymptotique de cet estimateur dans le corollaire suivant :

$\lambda$	$p$	$\Pi_{CTE}$	$\widehat{\Pi}_{CTE}$	bornes de confiance	longueur	probabilité de couverture
1	0.75	2.386	2.384	2.221 – 2.548	0.327	0.94
	0.85	2.897	2.894	2.677 – 3.111	0.434	0.94
	0.95	3.996	3.978	3.594 – 4.362	0.767	0.92
2	0.75	1.193	1.194	1.112 – 1.276	0.163	0.95
	0.85	1.449	1.441	1.334 – 1.549	0.216	0.95
	0.95	1.998	1.989	1.797 – 2.181	0.384	0.92

TAB. 3.2 – Estimation non-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de la  $\Pi_{CTE}$  basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \{1, 2\}$  avec  $p \in \{0.75, 0.85, 0.95\}$

**Corollaire 3.2.2** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{\Pi}_{WT,n}$* )

Si  $\mathbb{E}[|X|^\gamma] < \infty$  pour  $\gamma > 2$ , on a

$$\sqrt{n} \left( \widehat{\Pi}_{WT,n} - \Pi_{WT} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\lambda^2(J)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.33)$$

où, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sigma_\lambda^2(J) = e^{-\lambda^2} \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) e^{(\Phi^{-1}(s) + \Phi^{-1}(t))} dQ(s) dQ(t) < \infty.$$

Les bornes de confiance asymptotique au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $\Pi_{WT}$  sont :

$$\widehat{\Pi}_{WT,n} \pm \frac{z_{\varsigma/2} \sigma_\lambda(J)}{\sqrt{n}}.$$

Comme  $\sigma_\lambda^2(J)$  dépend de la fonction des quantiles  $Q$  qui est inconnue, on la remplace par son estimateur empirique consistant

$$\widehat{\sigma}_\lambda^2(J) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_n(i, j) e^{\lambda \Phi^{-1}(i/n) - \lambda^2/2} e^{\lambda \Phi^{-1}(j/n) - \lambda^2/2} [(X_{i+1:n} - X_{i:n}) (X_{j+1:n} - X_{j:n})],$$

où  $c_n(i, j)$  est défini dans (3.30).

### Proportional Hazard Transform

L'estimateur de  $\Pi_{PHT}$ , noté par  $\widehat{\Pi}_{PHT,n}$ , est la L-statistique avec les coefficients

$$a_{i,n} = \varrho^{-1} \int_{(i-1)/n}^{i/n} (1-s)^{1/\varrho-1} ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad \varrho \geq 1.$$

La normalité asymptotique de cet estimateur, en appliquant le Théorème 3.2.2, est obtenue dans le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.3** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{\Pi}_{PHT,n}$* )  
 Si  $1 < \varrho < 2$  et  $\mathbb{E}[|X|^\gamma] < \infty$  pour  $\gamma > 2\varrho/(2 - \varrho)$ , on a

$$\sqrt{n} \left( \widehat{\Pi}_{PHT,n} - \Pi_{PHT} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\varrho^2(J)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

où

$$\sigma_\varrho^2(J) = \varrho^{-2} \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st)(1 - s)^{1/\varrho-1}(1 - t)^{1/\varrho-1} dQ(s)dQ(t) < \infty.$$

Les bornes de confiance asymptotique au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $\Pi_{PHT}$  sont

$$\widehat{\Pi}_{PHT,n} \pm \frac{z_{\varsigma/2} \sigma_\varrho(J)}{\sqrt{n}}.$$

Ces bornes ne s'appliquent pas non plus dans la pratique puisque  $\sigma_\varrho^2(J)$  dépend de la fonction inconnue  $Q$ . D'après (3.29), on obtient l'estimateur empirique consistant de  $\widehat{\sigma}_\varrho^2(J)$

$$\widehat{\sigma}_\varrho^2(J) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_n(i, j) [\varrho^{-1}(1 - i/n)^{1/\varrho-1}] [\varrho^{-1}(1 - j/n)^{1/\varrho-1}] [(X_{i+1:n} - X_{i:n})(X_{j+1:n} - X_{j:n})],$$

avec  $c_n(i, j)$  défini par la formule (3.30).

**Exemple 3.2.4** (*Loi exponentielle standard*)

L'estimateur et les bornes de confiance au niveau 95% de  $\Pi_{PHT}$ , basés sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \{1, 2\}$  avec  $\varrho \in \{1.2, 1.5, 1.7\}$ , sont résumés dans le Tableau 3.3 et le Tableau 3.4 respectivement.

$\lambda$	$\varrho$	$\Pi_{PHT}$	$\widehat{\Pi}_{PHT}$	erreur absolue	erreur relative	rmse
1	1.2	1.200	1.200	0.000	0.006	0.039
	1.5	1.500	1.490	0.010	0.006	0.051
	1.7	1.700	1.666	0.034	0.020	0.077
2	1.2	0.600	0.597	0.003	0.005	0.019
	1.5	0.750	0.733	0.017	0.022	0.085
	1.7	0.850	0.843	0.007	0.008	0.045

TAB. 3.3 – Estimation non-paramétrique ponctuelle de  $\Pi_{PHT}$  basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \{1, 2\}$  avec  $\varrho \in \{1.2, 1.5, 1.7\}$

$\lambda$	$\varrho$	$\Pi_{PHT}$	$\hat{\Pi}_{PHT}$	bornes de confiance	longueur	probabilité de couverture
1	1.2	1.200	1.200	1.126 – 1.275	0.148	0.96
	1.5	1.500	1.490	1.393 – 1.588	0.196	0.90
	1.7	1.700	1.666	1.557 – 1.776	0.219	0.80
2	1.2	0.600	0.597	0.560 – 0.634	0.074	0.96
	1.5	0.750	0.733	0.595 – 0.871	0.276	0.92
	1.7	0.850	0.843	0.763 – 0.922	0.159	0.90

TAB. 3.4 – Estimation non-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de la  $\Pi_{PHT}$  basée sur 500 échantillons de taille 1000 de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \{1, 2\}$  avec  $\varrho \in \{1.2, 1.5, 1.7\}$

### Proportional Hazard Transform de réassurance

*Necir et Boukhetala* [73] ont proposé un estimateur non-paramétrique de  $\Pi_{PHT, R_{opt}}$  pour une valeur fixée  $\varrho \geq 1$  et un seuil optimal de la rétention  $R_{opt} := F^{\leftarrow}(1 - k/n)$  où  $k = k_n \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  avec comme estimateur de  $R_{opt}$  la valeur  $\hat{R}_{opt} := X_{n-k:n}$ . Cet estimateur, noté par  $\hat{\Pi}_{PHT, \hat{R}_{opt}}^{(npar)}$ , basé sur la distribution empirique de l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , est donné par la formule suivante

$$\hat{\Pi}_{PHT, \hat{R}_{opt}}^{(npar)} := \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n}\right)^{1/\varrho} \{X_{n-i+1:n} - X_{n-i:n}\}.$$

**Théorème 3.2.5** (*Normalité asymptotique de  $\hat{\Pi}_{PHT, \hat{R}_{opt}}^{(npar)}$  (*Necir et Boukhetala*, [73])*)

*Si on suppose que (2.25) est satisfaite avec  $t^{-1/\varrho}U(t) \rightarrow 0$ , pour une valeur fixée  $\varrho \geq 1$  et  $0 < \xi < 1/\varrho$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Alors pour  $k = k_n \rightarrow \infty$ ,  $k/n \rightarrow 0$  et  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow 0$ . On a, quand  $n \rightarrow \infty$*

$$\frac{(k/n)^{-1/\varrho} k^{1/2}}{X_{n-k:n}} \left\{ \hat{\Pi}_{PHT, \hat{R}_{opt}}^{(npar)} - \Pi_{PHT, R_{opt}} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2(\varrho; \xi)),$$

avec

$$\sigma_1^2(\varrho; \xi) = \xi^2 \left[ \varrho^{-2} \frac{2}{(2\lambda + 1)(\lambda + 1)} - \varrho^{-1} \frac{2}{\lambda + 1} + 1 \right],$$

où  $\lambda := 1/\varrho - \xi$ .

Pour la démonstration du Théorème 3.2.5, voir *Necir et Boukhetala* [73].

### Two-Sided Deviation

L'estimateur de  $\Pi_{TSD}$ , noté par  $\hat{\Pi}_{TSD, n}$ , est la L-statistique de coefficients

$$a_{i, n} = \frac{r}{2} \int_{(i-1)/n}^{i/n} ((1-s)^{r-1} - s^{r-1}) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

La normalité asymptotique de cet estimateur est obtenue, en appliquant le Théorème 3.2.2, dans le corollaire suivant

**Corollaire 3.2.4** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{\Pi}_{TSD,n}$* )  
 Pour  $1/2 < r < 1$  et si  $\mathbb{E}[|X|^\gamma] < \infty$  pour  $\gamma > 1/(r - 1/2)$ , on a

$$\sqrt{n} \left( \widehat{\Pi}_{TSD,n} - \Pi_{TSD} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_r^2(J)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

où

$$\sigma_r^2(J) = \frac{r^2}{4} \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) ((1-s)^{r-1} - s^{r-1}) ((1-t)^{r-1} - t^{r-1}) dQ(s) dQ(t) < \infty.$$

### 3.3 Estimation semi-paramétrique

Depuis le début des années 1900, les gens qui travaillent dans la gestion des risques ont souvent modélisé leurs observations par la distribution normale. Cependant, les études empiriques concluent que les données financières et actuarielles montrent des écarts systématiques par rapport à la normalité et ont habituellement des queues plus lourdes que le modèle gaussien. Par conséquent, il est d'intérêt de supposer que la f.r.  $F$  est à queue lourde (voir la Définition 2.1.1). Ces distributions à queues lourdes ont des variances infinies alors, dans ce cas, on ne peut pas employer le TCL classique pour construire les intervalles de confiance pour les mesures de risque. Ici, des nouveaux estimateurs, basés sur l'estimation des quantiles extrêmes, ont été proposés.

#### 3.3.1 Value at Risk

Une approche alternative pour estimer la  $VaR$  dans le cas où la variance est infinie consiste à appliquer la TVE. Pour cela, on exploite le Théorème 2.4.1 de *Balkema-de Haan et Pickands*. En effet, si  $u$  est suffisamment grand la loi conditionnelle de  $X - u$  sachant  $X > u$  suit une distribution de Pareto généralisée, de paramètres  $\xi$  et  $\sigma$  (ces derniers pouvant être estimés par la méthode de maximum de vraisemblance). En prenant comme seuil  $u$  la statistique d'ordre intermédiaire  $X_{n-k:n}$ , avec  $k$  suffisamment grand, et en notant les estimateurs du maximum de vraisemblance de la loi de Pareto généralisée sur l'échantillon  $\{X_{n-k+1:n} - X_{n-k:n}, \dots, X_{n:n} - X_{n-k:n}\}$  par  $\widehat{\xi}_{N_u}$  et  $\widehat{\sigma}_{N_u}$  (voir la section 2.5), on obtient

$$\widetilde{VaR}_{p,n} := X_{n-k:n} + \frac{\widehat{\sigma}_{N_u}}{\widehat{\xi}_{N_u}} \left( \left( \frac{k}{np} \right)^{\widehat{\xi}_k} - 1 \right). \quad (3.36)$$

On peut aussi utiliser de l'estimateur de Hill, si  $\xi > 0$ , pour aboutir à

$$\widetilde{VaR}_{p,n} := X_{n-k:n} \left( \frac{k}{np} \right)^{\widehat{\xi}_n^{(H)}}, \quad (3.37)$$

où  $\widehat{\xi}_n^{(H)}$  est l'estimateur de Hill, donné par l'équation (2.24). Il est à noter que l'on peut remplacer  $\widehat{\xi}_n^{(H)}$  par l'estimateur de Pickands (2.23), l'estimateur des Moments (2.29) ou n'importe quel autre estimateur consistant de  $\xi$ .

### 3.3.2 Conditional Tail Expectation

L'hypothèse  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$  est restrictive comme le montre l'exemple suivant. On suppose que  $F$  est la f.r. de Pareto d'indice  $\xi > 0$ , c-à-d,  $1 - F(x) = x^{-1/\xi}$  pour tout  $x \geq 1$ . On se concentre sur le cas où  $\xi < 1$ , parce que quand  $\xi \geq 1$  on a  $\Pi_{CTE} = +\infty$  pour  $p \in (0, 1)$ . La normalité asymptotique du Corollaire 3.2.1 couvre seulement les valeurs de  $\xi \in (0, 1/2)$  en raison de l'hypothèse  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Quand  $\xi \in [1/2, 1)$ , on a  $\mathbb{E}[X^2] = \infty$  mais, néanmoins, la  $\Pi_{CTE}$  est bien définie et finie puisque  $\mathbb{E}[X] < \infty$ . Les mêmes remarques se tiennent pour d'autres distributions à queues lourdes comme la distribution de Pareto.

*Necir et al.* [77] ont construit un estimateur alternatif de la  $\Pi_{CTE}$ , qui tient en compte les différentes propriétés asymptotiques des quantiles modérés et élevés dans le cas des distributions à queues lourdes. Sous l'hypothèse que  $\xi \in (1/2, 1)$ , cet estimateur alternatif, noté par  $\widetilde{\Pi}_{CTE,n}$ , est donné comme suit

$$\widetilde{\Pi}_{CTE,n} := \frac{1}{1-p} \int_p^{1-k/n} Q_n(s) ds + \frac{kX_{n-k:n}}{n(1-p)(1-\widehat{\xi}_n)},$$

où  $\widehat{\xi}_n$  est l'estimateur de Hill de l'indice de queue  $\xi$  donné par (2.24).

Le théorème ci-dessous, établit la normalité asymptotique du nouveau estimateur  $\widetilde{\Pi}_{CTE,n}$ .

**Théorème 3.3.1** (*Normalité asymptotique de  $\widetilde{\Pi}_{CTE,n}$  (Necir et al., [77])*)

*Soit  $F$  est une f.r. satisfaite la condition (2.25) avec  $\xi \in (1/2, 1)$ . Alors pour une suite des entiers  $k = k(n) \rightarrow \infty$  tels que  $k/n \rightarrow 0$  et  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On a, pour  $p \in (0, 1)$*

$$\frac{\sqrt{n}(1-p) \left( \widetilde{\Pi}_{CTE,n} - \Pi_{CTE} \right)}{(k/n)^{1/2} X_{n-k:n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\xi)), \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

où  $\sigma^2(\xi)$  est donnée par la formule

$$\sigma^2(\xi) = \frac{\xi^4}{(1-\xi)^2(2\xi-1)}.$$

Ce Théorème 3.3.1 permet de construire les bornes de confiance de  $\Pi_{CTE}$ . Pour construire ces bornes de confiance, on suit les deux étapes suivantes : premièrement, on choisit le nombre  $k^*$  optimal des statistiques d'ordre qui sont utilisées dans l'estimation (voir le sous section 2.6.5). Après avoir déterminé  $X_{n-k^*:n}$  et calculé l'estimateur de Hill, on

calcule alors les valeurs correspondantes de  $\tilde{\Pi}_{CTE,n}$  et  $\sigma^2(\hat{\xi}_n)$  qu'on note par  $\tilde{\Pi}_{CTE,n}^*$  et  $\sigma^{2*}(\hat{\xi}_n)$ . Finalement, par l'utilisation du Théorème 3.3.1 on arrive aux les bornes de confiance au niveau  $(1 - \varsigma)$ , de  $\Pi_{CTE}$

$$\tilde{\Pi}_{CTE,n}^* \pm z_{\varsigma/2} \frac{(k^*/n)^{1/2} X_{n-k^*:n} \sigma^*(\hat{\xi}_n)}{\sqrt{n}(1-p)}. \quad (3.38)$$

**Exemple 3.3.2** (*Loi de Pareto*)

Pour illustrer la qualité de ces bornes de confiance, on a effectué une étude de simulation basée sur 1000 échantillons de la loi de Pareto d'indice  $\xi \in \{0.65, 0.70\}$  et  $p \in \{0.75, 0.90\}$ , on obtient  $\tilde{\Pi}_{CTE,n}$  et les bornes de confiance de  $\Pi_{CTE}$  au niveau 95% dans le Tableau 3.5 et le Tableau 3.6) respectivement

$p$	$\xi$	$\Pi_{CTE}$	$n$	$\tilde{\Pi}_{CTE,n}$	erreur absolue	erreur relative	rmse
0.75	0.65	7.035	1000	7.226	0.191	0.027	0.519
			2000	6.882	0.153	0.022	0.241
			5000	7.022	0.013	0.002	0.172
	0.70	8.797	1000	8.269	0.528	0.060	0.724
			2000	9.238	0.441	0.050	0.730
			5000	8.923	0.126	0.014	0.520
0.90	0.65	12.762	1000	13.000	0.238	0.019	0.925
			2000	12.304	0.459	0.036	0.805
			5000	12.301	0.462	0.036	0.534
	0.70	16.706	1000	16.039	0.667	0.040	1.068
			2000	16.379	0.327	0.020	0.953
			5000	16.874	0.168	0.010	0.520

TAB. 3.5 – Estimation semi-paramétrique ponctuelle de  $\Pi_{CTE}$  basée sur 1000 échantillons de taille  $n \in \{1000, 2000, 5000\}$  de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.65, 0.70\}$  et  $p \in \{0.75, 0.90\}$

### 3.3.3 Proportional Hazard Transform

Pour les distributions à queues lourdes avec une variance infinie ( $\mathbb{E}[X^2] = \infty$ ), la normalité asymptotique de l'estimateur de  $\Pi_{PHT}$  du Théorème 3.2.3 ne peut pas être obtenue par les résultats classiques. Pour cela, *Necir et Meraghni* [74] ont proposé, en appliquant la TVE, un estimateur alternatif pour cette mesure de risque et ils ont établi sa normalité asymptotique. Cet estimateur, noté par  $\tilde{\Pi}_{PHT,n}$ , est donné par la formule suivante :

$$\tilde{\Pi}_{PHT,n} := \sum_{i=k+1}^n a_{i,n} X_{n-i+1:n} + \frac{(k/n)^{1/q} X_{n-k:n}}{1 - \varrho \hat{\xi}_n},$$

$p$	$\xi$	$\Pi_{CTE}$	$n$	$\tilde{\Pi}_{CTE,n}$	bornes de confiance	longueur	probabilité de couverture
0.75	0.65	7.035	1000	7.226	6.569 – 7.883	1.314	0.89
			2000	6.882	6.498 – 7.267	0.768	0.85
			5000	7.022	6.805 – 7.239	0.434	0.81
	0.70	8.797	1000	8.269	7.423 – 9.115	1.692	0.67
			2000	9.238	8.557 – 9.919	1.362	0.70
			5000	8.923	8.506 – 9.340	0.834	0.78
0.90	0.65	12.762	1000	13.000	11.429 – 14.572	3.143	0.94
			2000	12.304	11.400 – 13.207	1.807	0.61
			5000	12.301	11.748 – 12.853	1.104	0.70
	0.70	16.706	1000	16.039	14.314 – 17.765	3.451	0.76
			2000	16.379	14.794 – 17.965	3.171	0.88
			5000	16.874	15.978 – 17.770	1.792	0.87

TAB. 3.6 – Estimation semi-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de  $\Pi_{CTE}$  basée sur 1000 échantillons de taille  $n \in \{1000, 2000, 5000\}$  de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.65, 0.70\}$  et  $p \in \{0.75, 0.90\}$

où  $\hat{\xi}_n$  est l'estimateur de Hill de  $\xi$ , donné par (2.24) et  $a_{i,n} := \varrho^{-1} \int_{(i-1)/n}^{i/n} s^{1/\varrho-1} ds$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\varrho \geq 1$ .

**Théorème 3.3.3** (Normalité asymptotique de  $\tilde{\Pi}_{PHT,n}$  (Necir et Meraghni, [74]))  
 Soit  $F$  est une f.r. satisfaisant (2.25) avec  $\xi > 1/2$  et de fonction des quantiles  $Q(\cdot)$  continûment dérivable sur  $[0, 1)$ . Soit  $k = k(n) \rightarrow \infty$ ,  $k/n \rightarrow 0$  et  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour  $1 \leq \varrho < 1/\xi$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}}{(k/n)^{1/\varrho-1/2} Q(1-k/n)} \left( \tilde{\Pi}_{PHT,n} - \Pi_{PHT} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\varrho; \xi)), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

avec

$$\sigma^2(\varrho; \xi) = \frac{\xi^2 (2\xi^2 \varrho^3 + \xi^2 \varrho^2 - 4\xi \varrho^2 - 2\xi \varrho + \varrho^2 + 2\varrho + 1)}{(1 - \varrho\xi)^4} + \frac{2\xi^2 (2\xi \varrho - \xi^2 \varrho^2 - 2\xi \varrho^2 - \varrho^2 + 2\varrho - 1)}{(\varrho\xi + \varrho - 1) (2 - \varrho - 2\varrho\xi) (1 - \varrho\xi)^2}.$$

Ce Théorème 3.3.3, à travers les mêmes étapes que pour  $\Pi_{CTE}$ , permet de construire des bornes de confiance pour  $\Pi_{PHT}$  au niveau  $(1 - \varsigma)$  qui sont donnée par la formule suivante :

$$\tilde{\Pi}_{PHT,n}^* \pm z_{\varsigma/2} \frac{(k^*/n)^{1/\varrho-1/2} \sigma^* X_{n-k^*:n}}{\sqrt{n}}.$$

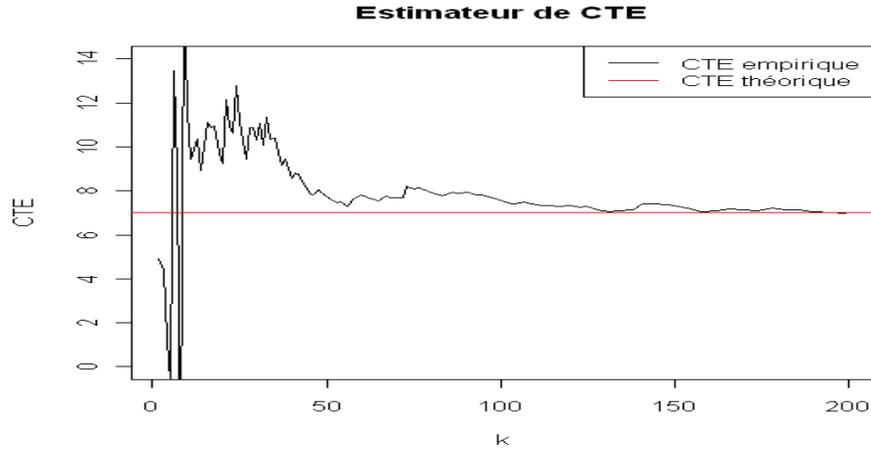


FIG. 3.1 – Estimateur de  $\Pi_{CTE}$  basé sur 1000 échantillons de taille 2000 pour la loi de Pareto de paramètre  $\xi = 0.65$  avec  $p = 0.75$ . La ligne horizontale (trait rouge) est la vraie valeur de  $\Pi_{CTE}$

### Exemple 3.3.4 (Loi de Pareto)

Pour étudier la performance de ces bornes de confiance, on a réalisé une étude de simulation basée sur 1000 échantillons de taille 2000 de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.65, 0.70\}$  et  $\varrho \in \{1.05, 1.10\}$ , on obtient  $\tilde{\Pi}_{PHT,n}$  et les bornes de confiance au niveau 95% (voir le Tableau 3.7 et le Tableau 3.8)

$\xi$	$\varrho$	$\Pi_{PHT}$	$\tilde{\Pi}_{PHT,n}$	erreur absolue	erreur relative	rmse
0.65	1.05	3.150	3.106	0.044	0.014	0.088
	1.10	3.509	3.208	0.301	0.081	0.323
0.70	1.05	3.774	3.406	0.368	0.098	0.373
	1.10	4.348	3.995	0.353	0.081	0.437

TAB. 3.7 – Estimation semi-paramétrique ponctuelle de  $\Pi_{PHT}$  basée sur 1000 échantillons de taille 2000 de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.65, 0.70\}$  et  $\varrho \in \{1.05, 1.10\}$

### 3.3.4 Proportional Hazard Transform de réassurance

Necir et al. [76] ont proposé, via la TVE, un estimateur semi-paramétrique de  $\Pi_{PHT,R_{opt}}$ , pour une valeur fixée  $\varrho \geq 1$  et  $\hat{R}_{opt} := X_{n-k:n}$ , qui est donné par

$$\tilde{\Pi}_{PHT,\hat{R}_{opt}} := (k/n)^{1/\varrho} \frac{\varrho}{1/\hat{\xi}_n - \varrho} X_{n-k:n}, \quad \text{pour } \hat{\xi}_n < 1/\varrho,$$

$\xi$	$\varrho$	$\Pi_{PHT}$	$\tilde{\Pi}_{PHT,n}$	bornes de confiance	longueur	probabilité de couverture
0.65	1.05	3.150	3.106	2.352 – 3.859	1.507	1.00
	1.10	3.509	3.208	2.372 – 4.044	1.672	1.00
0.70	1.05	3.774	3.406	2.695 – 4.116	1.420	1.00
	1.10	4.348	3.995	2.879 – 5.112	2.232	0.94

TAB. 3.8 – Estimation semi-paramétrique par intervalle de confiance au niveau 95% de  $\Pi_{PHT}$  basée sur 1000 échantillons de taille 2000 de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.65, 0.70\}$  et  $\varrho \in \{1.05, 1.10\}$

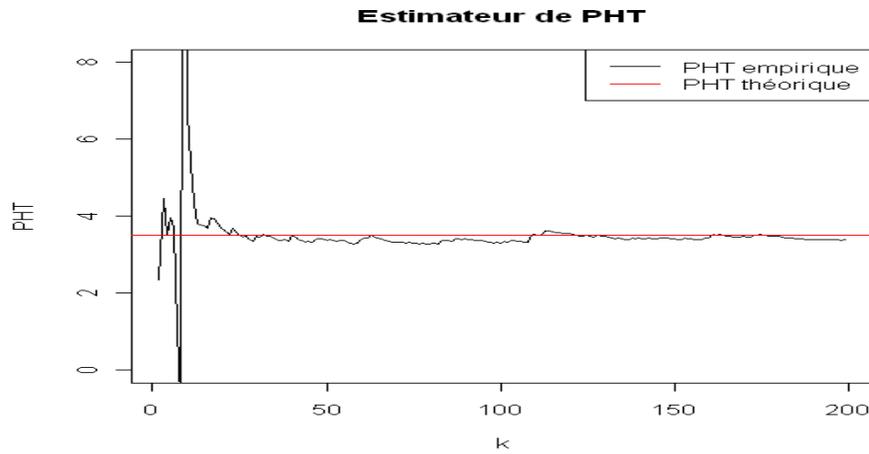


FIG. 3.2 – Estimateur de  $\Pi_{PHT}$  basé sur 1000 échantillons de taille 2000 pour la loi de Pareto de paramètre  $\xi = 0.65$  avec  $\varrho = 1.05$ . La ligne horizontale (trait rouge) est la vraie valeur de  $\Pi_{PHT}$

où  $\hat{\xi}_n$  est l'estimateur de Hill de  $\xi$ .

La normalité asymptotique de cet estimateur a été prouvée par *Necir et al.* [76].

**Théorème 3.3.5** (Normalité asymptotique de  $\tilde{\Pi}_{PHT, \hat{R}_{opt}}$  (*Necir et al.*, [76]))

Si on suppose que (2.25) est vérifiée avec  $t^{-1/\varrho}U(t) \rightarrow 0$ , pour une valeur fixée  $\varrho \geq 1$  et  $0 < \xi < 1/\varrho$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Alors pour  $k = k_n \rightarrow \infty$ ,  $k/n \rightarrow 0$  et  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow 0$ . On a, quand  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(k/n)^{-1/\varrho} k^{1/2}}{X_{n-k:n}} \left\{ \tilde{\Pi}_{PHT, \hat{R}_{opt}} - \Pi_{PHT, R_{opt}} \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_2^2(\varrho; \xi)),$$

avec

$$\sigma_2^2(\varrho; \xi) = \frac{\varrho \xi (\xi^2 - 2\xi^3 \varrho + \xi^4 \varrho^2 + 1)}{(1 - \varrho \xi)^2}.$$

Ce Théorème 3.3.5 permet de construire des bornes de confiance au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $\Pi_{PHT,R_{opt}}$ . Ces bornes de confiance seront obtenues à travers les deux étapes suivantes :

- Choisir, par l'algorithme de *Cheng et Peng* [15], le nombre  $k^*$  optimal des statistiques d'ordre supérieures qui sont utilisées dans l'estimation.
- Calculer les valeurs correspondantes de  $\widehat{R}_{opt}$ ,  $\widehat{\xi}$ ,  $\widetilde{\Pi}_{PHT,\widehat{R}_{opt}}$  et  $\sigma_2(\varrho; \widehat{\xi})$ , notées par  $R^*$ ,  $\widehat{\xi}^*$ ,  $\widetilde{\Pi}_{PHT,R^*}$  et  $\sigma_2(\varrho; \widehat{\xi}^*)$ .

Alors, les bornes de confiance au niveau  $(1 - \varsigma)$  pour  $\Pi_{PHT,R_{opt}}$  seront

$$\widetilde{\Pi}_{PHT,R^*} \pm z_{\varsigma/2} \frac{(k^*/n)^{1/\varrho} R^* \sigma_2(\varrho; \widehat{\xi}^*)}{\sqrt{k^*}}.$$

**Exemple 3.3.6** (*Loi de Pareto*)

L'estimateur et les bornes de confiance au niveau 95% de  $\Pi_{PHT,R_{opt}}$  basés sur 1000 échantillons de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.10, 0.25\}$  et  $\varrho \in \{1.00, 1.10\}$  sont donnés dans le Tableau 3.9 et le Tableau 3.10.

$\xi$	$\varrho$	$n$	$\Pi_{PHT,R_{opt}}$	$\widetilde{\Pi}_{PHT,R^*}$	erreur absolue	erreur relative	rmse
0.10	1.00	1000	0.007	0.007	0.000	0.018	0.003
		2000	0.007	0.008	0.000	0.057	0.004
		5000	0.007	0.007	0.000	0.070	0.003
	1.10	1000	0.011	0.011	0.000	0.040	0.005
		2000	0.011	0.011	0.000	0.061	0.005
		5000	0.011	0.010	0.001	0.056	0.005
0.25	1.00	1000	0.036	0.037	0.000	0.009	0.013
		2000	0.034	0.034	0.000	0.020	0.013
		5000	0.033	0.035	0.002	0.048	0.013
	1.10	1000	0.053	0.058	0.005	0.107	0.018
		2000	0.051	0.050	0.001	0.032	0.022
		5000	0.052	0.050	0.002	0.026	0.019

TAB. 3.9 – Estimation semi-paramétrique ponctuelle de  $\Pi_{PHT,R_{opt}}$  basée sur 1000 échantillons de taille  $n \in \{1000, 2000, 5000\}$  de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.10, 0.25\}$  et  $\varrho \in \{1.00, 1.10\}$

$\xi$	$\varrho$	$n$	$\Pi_{PHT,R_{opt}}$	$\tilde{\Pi}_{PHT,R^*}$	bornes de confiance	longueur	probabilité de couverture
0.10	1.00	1000	0.007	0.007	0.001 – 0.013	0.012	0.91
		2000	0.007	0.008	0.003 – 0.012	0.009	0.70
		5000	0.007	0.007	0.004 – 0.009	0.005	0.48
	1.10	1000	0.011	0.011	0.002 – 0.020	0.018	0.95
		2000	0.011	0.011	0.005 – 0.018	0.013	0.75
		5000	0.011	0.010	0.006 – 0.014	0.008	0.48
0.25	1.00	1000	0.036	0.037	0.017 – 0.057	0.040	0.86
		2000	0.034	0.034	0.020 – 0.047	0.027	0.62
		5000	0.033	0.035	0.026 – 0.044	0.018	0.43
	1.10	1000	0.053	0.058	0.028 – 0.089	0.061	0.92
		2000	0.051	0.050	0.031 – 0.069	0.038	0.49
		5000	0.052	0.050	0.038 – 0.063	0.025	0.43

TAB. 3.10 – Estimation semi-paramétrique par intervalles de confiance au niveau 95% de  $\Pi_{PHT,R_{opt}}$  basée sur 1000 échantillons de taille  $n \in \{1000, 2000, 5000\}$  de la loi de Pareto avec  $\xi \in \{0.10, 0.25\}$  et  $\varrho \in \{1.00, 1.10\}$

### 3.3.5 Two-Sided Deviation quand $F \in D(\alpha)$

*Necir et Meraghni* [75], via la TVE, ont proposé un estimateur asymptotiquement normal pour  $\Delta_r(X)$ , quand  $1/(r+1/2) < \alpha < 1/r$ , qui est donné par la formule suivante

$$\widehat{\Delta}_r(X) = -\frac{r(l/n)^r}{2r - 2/\widehat{\alpha}_L} X_{l:n} + \sum_{j=l+1}^{n-k} a_{j:n}^{(r)} X_{j:n} + \frac{r(k/n)^r}{2r - 2/\widehat{\alpha}_R} X_{n-k:n}, \quad (3.39)$$

avec

$$a_{j:n}^{(r)} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{-r} - \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)^{-r} - \left(\frac{j}{n}\right)^{-r} + \left(\frac{j-1}{n}\right)^{-r} \right], \quad j = 1, \dots, n,$$

et  $\widehat{\alpha}_L, \widehat{\alpha}_R$  sont les mêmes que ceux dans (3.15) et (3.16) respectivement.

**Théorème 3.3.7** (*Normalité asymptotique de  $\widehat{\Delta}_r(X)$  (*Necir et Meraghni*, [75])*)

Soit  $F \in D(\alpha)$  avec  $0 < \alpha < 2$  tels que  $1/(r+1/2) < \alpha < 1/r$ . Alors, pour toutes suites de nombres entiers  $k$  et  $l$  telles que  $1 < k < n$ ,  $1 < l < n$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow \infty$ ,  $k/n \rightarrow 0$ ,  $l/n \rightarrow 0$ ,  $l/k \rightarrow \theta < \infty$  et  $\sqrt{ka}(k/n)A(k/n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{\Delta}_r(X) - \Delta_r(X))}{(k/n)^{r-1/2} X_{n-k:n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V_r^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (3.40)$$

avec

$$V_r^2 = \frac{r^2}{4} \left( 1 + \left( \frac{q}{p} \right)^{-2/\alpha} \theta^{2/\alpha - 2r + 1} \right) \times \left( \frac{2\alpha^2 + (r\alpha - \alpha - 1)^2 + 2\alpha(r\alpha - \alpha - 1)}{2(r\alpha - 1)^4} \right) + 1. \quad (3.41)$$

où  $(p, q)$  sont définies en (2.9).

**Preuve** Voir *Necir et Meraghni* [75]. ■

# Conclusion

Un des problèmes fondamentaux rencontrés en finance et en assurance concerne la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Pour cela les mesures du risque prennent aujourd'hui une part importante, et de plus en plus prépondérante dans la gestion des investissements. Ce mémoire est consacré à l'analyse de quelques unes des mesures de risque les plus utilisées telles la  $VaR$ , la  $CTE$ , la  $TVaR$  et plus généralement les mesures de risques par distorsion. L'objectif principal était d'estimer ces mesures de risque par la méthode empirique (non-paramétrique et semi-paramétrique). L'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs proposés, dont notamment la normalité asymptotique, permis de construire les bornes de confiance pour ces différentes mesures à laquelle on s'est intéressé.

Un certain nombre de risques peuvent être qualifiés de "risques extrêmes", car ils présentent une probabilité d'occurrence très faible (ou un temps de retour très élevé). Ils correspondent à des événements rares. A première vue, on pense à la théorie des valeurs extrêmes comme outil permettant de modéliser ce type d'événements. Cependant, il est parfois difficile d'utiliser cette théorie comme une procédure statistique robuste et les difficultés apparaissent particulièrement lorsque l'on veut modéliser et mesurer des événements tellement rares qu'ils n'ont jamais été observés.

Au terme de ce travail, on peut conclure que chaque mesure de risque offre ses propres avantages et inconvénients. En outre, on peut dire qu'il n'existe pas de mesure de risque universelle qui soit meilleure que toutes les autres ou qui soit pertinente à toutes les situations.

# Bibliographie

- [1] Acerbi, C. (2002). Spectral Measures of Risk : A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. *Journal of Banking and Finance* **26**, 1505 – 1518.
- [2] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). Expected Shortfall : A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk. *Economic Notes* **31** (2), 379 – 388.
- [3] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). On the Coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking and Finance* **26**, 1487 – 1503.
- [4] Adam, E. (2001). *L'Analyse Fractale des Marchés Financiers*. Finama Asset Management.
- [5] Albrecht, P. (2004). Risk Measures. *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons.
- [6] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. Wiley, New York.
- [7] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *Risk* **10**, 68 – 71.
- [8] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk., *Mathematical Finance* **9** (3), 203 – 228.
- [9] Balkema, A.A. and de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. *Annals of Probability* **2**, 792 – 804.
- [10] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J. and Teugels, J. (2004). *Statistics of Extremes-Theory and Applications*. Wiley, England.
- [11] Benlagha, N., Grun-Réhomme, M. et Vasechko, O. (2009). Les Sinistres Graves en Assurance Automobile : Une Nouvelle Approche par la Théorie des Valeurs Extrêmes. *Revue MODULAD* **39**.
- [12] Brazauskas, V., Jones, B.L., Puri, M.L. and Zitikis, R. (2008). Estimating Conditional Tail Expectation with Actuarial Applications in View. *Journal of Statistical Planning and Inference* **138**, 3590 – 3604.
- [13] Charpentier, A. (2010). *Mesures de Risque*. Université Rennes 1, France.
- [14] Chernoff, H., Gastwirth, J. L. and Johns, M.V. (1967). Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation. *Annals of Mathematical Statistics* **38**, 52 – 72.

- [15] Cheng, S. and Peng, L. (2001). Confidence Intervals for the Tail Index. *Bernoulli* **7**, 751 – 760.
- [16] Christopeit, N. (1994). Estimating Parameters of an Extreme Value Distribution by the Method of Moments. *Journal of Statistical Planning and Inference* **41**, 173 – 186.
- [17] Clauss, P. (2010). Statistique des Risques Extrêmes : Application à la Mesure du Risque de Marché. [http : //www. ensai. fr/ userfiles/ Atelier \\_Genie% 20 Stat. pdf.](http://www.ensai.fr/userfiles/Atelier_Genie%20Stat.pdf)
- [18] Csörgő, S. and Mason, D.M. (1985). Central Limit Theorems for Sums of Extreme Values. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **98**, 547 – 558.
- [19] Csörgő, S. and Viharos, L. (1998). Estimating the Tail Index. *Asymptotic Methods in Probability and Statistics*. (ed. Szyszkowicz, B.), North Holland, 833 – 881.
- [20] Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L. and de Vries, C.G. (2001). Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation. *Journal of Multivariate Analysis* **76**, 226 – 248.
- [21] Davis, R. and Resnick, S.I. (1984). Tail Estimates Motivated by Extreme Value Theory. *Annals of Statistics* **12**, 1467 – 1487.
- [22] Deheuvels, P., Häusler, E. and Mason, D.M. (1988). Almost Sure Convergence of the Hill Estimator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **104**, 371 – 381.
- [23] Denneberg, D. (1994). *Non-Additive Measures and Integrals*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [24] Denuit, M. et Delwarde, A. (2000). *Mathématique de l'Assurance Non-Vie, Tome I : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque*. Institut des Sciences Actuarielles.
- [25] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. and Laeven, R. (2006). Risk Measurement with Equivalent Utility Principles. *Statistics and Decision* **24**, 1–25.
- [26] Dhaene, J., Vanduffel, S., Tang, Q., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. (2003). Solvency Capital, Risk Measures and Comonotonicity : A Review, Research Report OR 0416. Department of Applied Economics, K. U. Leuven.
- [27] Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Tang, Q. and Vyncke, D. (2006). Risk Measures and Comonotonicity : A Review. *Stochastic Models* **22**, 573 – 606.
- [28] Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J. and de Haan, L. (1989). A Moment Estimator for the Index of an Extreme-Value Distribution. *Annals of Statistics*, **17** (4), 1833 – 1855.
- [29] Dekkers, A.L.M. and de Haan, L. (1989). On the Estimation of the Extreme Value Index and Large Quantile Estimation. *Annals of Statistics* **17** (4), 1795 – 1832.

- [30] Dekkers, A.L.M. and de Haan, L. (1993). Optimal Choice of Sample Fraction in Extreme Value Estimation. *Journal of Multivariate Analysis* **47**, 173 – 195.
- [31] Dowd, k. and Blake, D. (2006). After VaR : The Theory, Estimation and Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures. *The Journal of Risk and Insurance* **73** (2), 193 – 229.
- [32] Drees, H. and Kaufmann, E. (1998). Selecting the Optimal Sample Fraction in Univariate Extreme Value Estimation. *Stochastic Processes and their Applications* **75**, 149 – 172.
- [33] El-Adlouni, S., Bobée, B. et Ouarda, T. B. (2007). Caractérisation des Distributions à Queue Lourde pour l'Analyse des Crues. Rapport technique no r-929, INRS-ETE, Université du Québec.
- [34] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin.
- [35] Fama, E.F. (1965). The Behavior of Stock Market Prices. *Journal of Business* **38**, 34 – 105.
- [36] Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C. (1928). Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **24**, 180 – 190.
- [37] Föllmer, H. and Schied, A. (2002). Convex Measures of Risk and Trading Constraints. *Finance and Stochastics* **6** (4), 429 – 447.
- [38] Gauthier, C. and Pistre, N. (2005). Événement Extrêmes sur les Spreads de Crédit. Ensaë, Working Paper.
- [39] Gençay, R., Selçuk, F. and Ulugülyağcı, A. (2002). High Volatility, Thick Tails and Extreme Value Theory in Value-at-Risk Estimation. *Insurance : Mathematics and Economics* **33**, 337 – 356.
- [40] Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire. *Annales de Mathématiques* **44**, 423 – 453.
- [41] Gouriéroux, C. and Liu, W. (2006). Sensitivity Analysis of Distortion Risk Measures. Working Paper.
- [42] de Haan, L. and Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory : An Introduction*. Springer-Verlag, New York.
- [43] de Haan, L. and Pereira, T.T. (1999). Estimating the Index of a Stable Distribution. *Statistics and Probability Letters* **41** (1), 39 – 55.
- [44] de Haan, L. and Rootzén, H. (1993). On the Estimation of High Quantiles. *Journal of Statistical Planning and Inference* **35**, 1 – 13.
- [45] Hardy, M.R. (2006). *An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications*. The Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries.
- [46] Häusler, E. and Teugels, J.L. (1985). On Asymptotic Normality of Hill's Estimator for the Exponent of Regular Variation. *Annals of Statistics* **13**, 743 – 756.

- [47] Hill, B.M. (1975). A simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. *Annals of Statistics* **3**, 1163 – 1174.
- [48] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F. (1985). Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments. *Technometrics* **27**, 251 – 261.
- [49] Ihaka, R. and Gentleman, R. (1996). R : A Language for Data Analysis and Graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics* **5** : 299 – 314.
- [50] Jenkinson, A. F. (1955). The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) values of Meteorological Elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* **81**, 158 – 171.
- [51] Jones, B.L. and Zitikis, R. (2003). Empirical Estimation of Risk Measures and Related Quantities. *North American Actuarial Journal* **7** (4), 44 – 54.
- [52] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory, Using R*. Springer-Verlag, Berlin.
- [53] Kaiser, T. and Brazauskas, V. (2006). Interval Estimation of Actuarial Risk Measures. *North American Actuarial Journal* **10** (4), 249 – 268.
- [54] Kim, J.H.T. and Hardy, M.R. (2009). Estimating the Variance of Bootstrapped Risk Measures. *ASTIN Bulletin* **39** (1), 199 – 223.
- [55] Knight, F.H. (1921). *Risk, Uncertainty, and Profit*. Houghton Mifflin Company, Boston.
- [56] Landsman, Z. and Sherris, M. (2001). Risk Measures and Insurance Premium Principles. *Insurance : Mathematics and Economics* **29**, 103 – 115.
- [57] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer.
- [58] Lévy, P. (1925). *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars.
- [59] Liebwein, P. and Purvis, K. (2005). *Reinsurance. Riva-Property & Casualty Simulation Game*.
- [60] Lindskog, F. (200). *The Mathematics and Fundamental Ideas of Extreme Value Theory*. Department of Mathematics, ETH Zentrum, CH-8092 Zürich, Switzerland.
- [61] Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of business* **36**, 394 – 419.
- [62] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance* **7**, 77 – 91.
- [63] Mason, D.M. (1982). Laws of Large Numbers for Sums of Extreme Values. *Annals of Probability* **10**, 756 – 764.
- [64] Mathlouthi, I. et Zenaidi, A. (2008). *Théorie des Valeurs Extrêmes vs. Méthodes Classiques de Calcul de la VaR : Application au Tunindex*. Institut des Hautes Etudes Commerciales, Carthage, Tunisie.

- [65] Matthys, G. and Beirlant, J. (2003). Estimating the Extreme Value Index and High Quantiles with Exponential Regression Models. *Statistica Sinica* **13**, 853 – 880.
- [66] McLeish, D. L. and Reesor, R. M. (2003). Risk, Entropy, and the Transformation of Distributions. *North American Actuarial Journal* **7**, 128 – 144.
- [67] McNeil, A.J. (1999). Extreme Value Theory for Risk Managers. Department of Mathematics, ETH Zentrum, CH-8092 Zürich.
- [68] Meraghni, D. (2008). Modelling Distribution Tails. Thèse de Doctorat, Université de Biskra, Algérie.
- [69] Meraghni, D. and Necir, A. (2006). Computing Confidence Bounds for the Mean of a Levy-Stable Distribution. *Proceeding in Computational Statistics* (Edited by Alfredo Rizzi and Maurizio Vichi), 1285 – 1291. Physica-Verlag, Springer, ISBN : 3 – 7908 – 1708 – 2.
- [70] von Mises, R. (1936). La Distribution de la plus Grande des  $n$  Valeurs. Selected papers, American Mathematical Society, 271 – 294.
- [71] Morgan, J.P. (1996). Risk Metrics-Technical Documents, 4th Edition, New York.
- [72] Necir, A. (2006). A functional law of the iterated logarithm for kernel type estimators of the tail index. *Journal of Statistical and Planning Inference* **136**, 780 – 802.
- [73] Necir, A. and Boukhetala, K. (2004). Estimating the Risk Adjusted Premium of the Largest Reinsurance Covers. *Proceeding in Computational Statistics* (Edited by Jaromir Antoch), 1577 – 1584. Physica-Verlag, Springer, ISBN : 3 – 7908 – 1554 – 3.
- [74] Necir, A. and Meraghni, D. (2009). Empirical Estimation of the Proportional Hazard Premium for Heavy-Tailed Claim Amounts. *Insurance : Mathematics and Economics* **45**, 49 – 58.
- [75] Necir, A. and Meraghni, D. (2010). Estimating L-Functionals for Heavy-Tailed Distributions and Applications. *Journal of Probability and Statistics*, ID 707146.
- [76] Necir, A., Meraghni, D. and Meddi, F. (2007). Statistical Estimate of the Proportional Hazard Premium of Loss. *Scandinavian Actuarial Journal* **3**, 147 – 161.
- [77] Necir, A., Rassoul, A. and Zitikis, R. (2010). Estimating the Conditional Tail Expectation in the Case of Heavy-Tailed Losses. *Journal of Probability and Statistics*, ID 956838.
- [78] Neves, C. and Fraga Alves, M.I. (2004). Reiss and Thomas' Automatic Selection of the Number of Extremes. *Computational Statistics and Data Analysis* **47**, 689 – 704.
- [79] Nolan, J.P. (2009). Stable Distributions-Models for Heavy Tailed Data. Department of Mathematics and Statistics, American University.

- [80] Offutt, E.J., Kharoufeh, J.P. and Deckro, R.F. (2006). Distorted Risk Measures with Application to Military Capability Shortfalls. *Military Operations Research-Alexandria* **11** (4), 25 – 40.
- [81] Pickands III, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *The Annals of Statistics* **3**, 119 – 131.
- [82] Reiss, R.D. and Thomas, M. (2007). *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser, Basel.
- [83] Riboulet, G. et Roncalli, T. (1999). *Les Mesures des Risques de Marché-les Aspects Méthodologiques*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.
- [84] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk, *The Journal of Risk* **2** (3), 21 – 41.
- [85] Rockafellar, R.T. and Uryasev, S. (2002). Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance* **26**, 1443 – 1471.
- [86] Roncalli, T. (2002). *Théorie des Valeurs Extrêmes ou Modélisation des Evènements Rares pour la Gestion des Risques*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.
- [87] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S. (1994). *Stable non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York.
- [88] Sereda, E., Bronshtein, E., Rachev, S., Fabozzi, F., Sun, W. and Stoyanov, S. (2009). Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization. In J. Guerard (ed.), *The Handbook of Portfolio Construction : Contemporary Applications of Markowitz Techniques*, Springer, New York, 649 – 674.
- [89] Shorack, G.R. and Wellner, J.A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*. John Wiley & Sons, New York.
- [90] Smith, R.L. (1985). Maximum Likelihood Estimation in a Class of Non Regular Cases. *Biometrika* **72**, 67 – 90.
- [91] Smith, R.L. (1987). Estimating Tails of Probability Distributions. *Annals of statistics* **15**, 1174 – 1207.
- [92] Song, Y. and Yan, J.-A. (2006). *Risk Measures with Comonotonic Subadditivity or Convexity and Respecting Stochastic Orders*. Chinese Academy of Sciences, Beijing, China.
- [93] Thérond, P.E. (2007). *Mesure et Gestion des Risques d'Assurance : Analyse Critique des Futurs Référentiels Prudentiel et d'Information Financière*. Thèse de Doctorat, Université de Claude Bernard-Lyon 1, France.
- [94] Tsourti, Z. and Panaretos, I. (2001). Extreme Value Index Estimators and Smoothing Alternatives : Review and Simulation Comparison. *Munich Personal RePEc Archive* **6384**.
- [95] Wang, S. (1995). Insurance Pricing and Increased Limits Ratemaking by Proportional Hazard Transforms. *Insurance : Mathematics and Economics* **17**, 43 – 54.

- [96] Wang, S. (1996). Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. *ASTIN Bulletin* **26** (1), 71 – 92.
- [97] Wang, S. (1998). An Actuarial Index of the Right-Tail Risk. *North American Actuarial Journal* **2** (2), 88 – 101.
- [98] Wang, S. (2000). A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks. *Journal of Risk and Insurance* **67** (1), 15 – 36.
- [99] Wang, S. (2001). A Risk Measure that Goes Beyond Coherence. Institute of Insurance and Pension Research, Research Report 01 – 18, University of Waterloo, Canada.
- [100] Wang, S. and Young, V. R. (1998). Ordering Risks : Expected Utility Theory versus Yaari's Dual Theory of Risk. *Insurance : Mathematics and Economics* **22**, 145 – 161.
- [101] Wang, S., Young, V.R. and Panjer, H.H. (1997). Axiomatic Characterization of Insurance Prices. *Insurance : Mathematics and Economics* **21** (2), 173 – 183.
- [102] Weissman, I. (1978). Estimation of Parameters and Large Quantiles Based on the  $k$  Largest Observations. *Journal of the American Statistical Association* **73**, 812 – 815.
- [103] Weron, R. (2001). Lévy-Stable Distributions Revisited : Tail Index  $> 2$  does not Exclude the Levy-Stable Regime. *International Journal of Modern Physics C* **12** (2), 209 – 223.
- [104] Wirch, J.L. and Hardy, M.R. (1999). A Synthesis of Risk Measures for Capital Adequacy. *Insurance : Mathematics Economics* **25**, 337 – 347.
- [105] Wirch, J.L. and Hardy, M.R. (2001). Distortion Risk Measures : Coherence and Stochastic Dominance. Working Paper.
- [106] Yamai, Y. and Yoshihara, T. (2002). Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (3) : their Validity under Market Stress. IMES Discussion Paper No 2002-E-2, Bank of Japan.
- [107] Yamai, Y. and Yoshihara, T. (2002c). Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk (2) : Expected Utility Maximization and Tail Risk. *Monetary and Economic Studies* **20** (2), Bank of Japan, 95 – 115.
- [108] Yaari, M.E. (1987). The Dual Theory of Choice Under Risk. *Econometrica* **55**, 95 – 115.
- [109] Zolotarev, V.M. (1986). One-dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

# Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>
<i>al.</i>	autres.
c-à-d	c'est à dire.
<i>CTE</i>	Espérance Conditionnelle de Queue.
<i>CVaR</i>	Valeur en Risque Conditionnel.
<i>DRM</i>	mesure de risque par distorsion
<i>EMV</i>	estimateur du maximum de vraisemblance.
<i>ES</i>	Moyenne de Déficit.
$\mathcal{EVD}$	distribution des valeurs extrêmes.
$\mathcal{EVI}$	indice des valeurs extrêmes.
$\mathbb{E}[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. $X$ .
exp	exponentiel.
$F$	fonction de répartition.
$F_n$	fonction de répartition empirique.
$F^{\leftarrow}$	inverse généralisé de $F$ ou fonction des quantiles.
<i>FFT</i>	transformée de Fourier rapide.
<i>f.r.</i>	fonction de répartition.
$\mathcal{GEVD}$	distribution de valeurs extrêmes généralisée.
$\mathcal{GPD}$	distribution de Pareto généralisée
$H_\xi$	famille de la lois de valeurs extrêmes généralisée.
<i>i.i.d.</i>	indépendantes et identiquement distribuées.
$\mathbb{1}_A$	fonction indicatrice de l'ensemble $A$ .
$\Lambda$	loi de Gumbel.
$\mathcal{L}$	fonction à variation lente.
$L_J(X)$	L-fonctionnelle.
<i>LGN</i>	loi des grands nombres.
<i>LTD</i>	Ecart de la Queue Gauche.

$MDA$	domaine d'attraction du maximum.
$M_n = X_{n:n}$	maximum de $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
$\mu$	espérance ou moyenne d'une v.a.
$N_u$	nombres des excès qui dépassent du seuil $u$ .
$\mathcal{N}(0, 1)$	loi normale standard, ou distribution gaussienne standard.
$\omega$	état de la nature.
$\Omega$	ensemble de l'états de la nature.
$(\Omega, \mathcal{F})$	espace mesurable.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	espace probabilisé.
$\phi$	fonction spectrale.
$PHT$	Transformation Proportionnelle du Risque.
$PWM$	moments de probabilités pondérés.
$\Pi_g[X]$	mesure de risque par distorsion associée à $g$ .
$POT$	pics au-delà d'un seuil.
$\Phi_\alpha$	loi de Fréchet.
$p.s.$	prèsque sûre.
$\Psi_\alpha$	loi de Weibull.
$Q$	fonction des quantiles.
$Q_n$	fonctions des quantiles empirique.
$\mathbb{R}$	ensemble des valeurs réelles.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des valeurs réelles positives.
$resp.$	respectivement.
$rmse$	racine de l'erreur quadratique moyenne.
$\rho[X]$	mesure de risque.
$RTD$	Ecart de la Queue Droite.
$S = \bar{F}$	fonction de survie.
$\sigma^2$	variance d'une v.a.
$sign.$	signe.
$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	loi stable de paramètre $\alpha$ , $\sigma$ , $\beta$ et $\mu$ .

$S_n$	somme arithmétique.
$\sup A$	supremum de l'ensemble $A$ .
$TCL$	Théorème Centrale Limite.
$TSB$	Ecart Bilatéral.
$TVaR$	Valeur en Risque de Queue.
$TVE$	théorie des valeurs extrêmes.
$u$	seuil.
$v.a.$	variable aléatoire.
$v.a.r.$	variable aléatoire réelle.
$v.a.'s$	variables aléatoires.
$VaR$	Valeur en Risque.
$var(X)$	variance mathématique du v.a. $X$ .
$\varphi_X(x)$	fonction caractéristique de $X$ .
$WT$	transformation de Wang.
$\mathcal{X}$	ensemble des risques.
$(X_1, X_2, \dots, X_n)$	échantillon de taille $n$ de $X$ .
$X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$	statistiques d'ordre associées à $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
$X_{1:n}$	minimum de $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
$x \wedge y$	$\min(x, y)$ .
$x_F$	point terminal.
$x_p$	quantile d'ordre $p$ .
$[x]$	partie entière de $x$ .
$ \cdot $	valeur absolue.
$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$	égalité en loi.
$:=$	égalité par définition.
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	converge en distribution.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	converge en loi.
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	converge en probabilité.
$\xrightarrow{p.s.}$	convergence presque sûre.

## Annexe B : Logiciel *R*

*R* est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. *R* a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données,... Plusieurs paquets, tels *evd*, *evir*, *extRemes*, *fExtremes* et *POT*, sont destinés à l'analyse des valeurs extrêmes, et pour le traitement des problèmes d'assurance il y a le paquet *actuar*.

Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Un élément clé dans la mission de développement de *R* est le *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à la distribution de *R*, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CRAN est situé en Autriche à Vienne, on peut y accéder par l'URL : "<http://cran.r-project.org/>". Les autres sites du CRAN, appelés sites miroirs, sont répandus partout dans le monde.

*R* est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "<http://www.R-project.org/>". Il est souvent présenté comme un clone de *S* qui est un langage de haut niveau développé par les *AT&T Bell Laboratories* et plus particulièrement par *Rick Becker*, *John Chambers* et *Allan Wilks*. *S* est utilisable à travers le logiciel *S-Plus* qui est commercialisé par la société *Insightful* (<http://www.splus.com/>).

# Résumé

Une mesure de risque (il en existe plusieurs) est un moyen défini pour permettre d'évaluer le degré d'une telle exposition. Pour cela les mesures du risque prennent aujourd'hui une part importante. L'estimation de cette mesure devient donc une tâche centrale dans le processus de gestion du risque. Les stratégies adoptées à cette fin reposent sur différentes méthodologies les unes plus appropriées que les autres.

Dans ce travail, il est demandé de passer en revue quelques unes des mesures de risque les plus populaires, de discuter et éventuellement comparer les différentes approches de leur estimation. Un accent particulier sera mis sur la méthode basée sur la théorie des valeurs extrêmes permettant de traiter les situations de risques dangereux. Des applications sur des données simulées sont exigées.

**Mots clés** : mesure de risque, fonction de distorsion, statistiques d'ordre, valeurs extrêmes, estimateur de Hill, consistance, normalité asymptotique, L-fonctionnelle, L-statistique, Valeur en Risque.

# Abstract

A risk measure (there exists several) is a means defined for permit to evaluate the degree of such an exhibition. For that, risk measures take a big part today. The estimate of this measures thus becomes a central task in the process of risk management. The strategies adopted with this fine rest on various methodologies the ones more suitable than the others.

In this work, it is asked to review some of most popular risk measures, to discuss and possibly compare the various approaches of their estimate. A special emphasis will be put on the method based on the extreme value theory making it possible to treat the situations of dangerous risks. Applications on simulated data are required.

**Key words** : risk measure, distortion function, order statistics, extreme values, Hill estimator, consistency, asymptotic normality, L-functional, L-statistic, Value at Risk.