

N° d'ordre:

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE LMPA



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités & Statistique

Par

MOHAMMEDI YACINE SAMIR

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES AUTOREGRÉSSIFS À COEFFICIENTS ALÉATOIRES

Soutenue le 14 juillet 2022 devant le jury :

ACHEMINE FARIDA	MCA	UMMTO	Présidente
HAMAZ ABDELGHANI	MCA	UMMTO	Encadrant
ATIL LYNDA	MCA	UMMTO	Examinatrice
BOUALAM KARIMA	MCB	UMMTO	Examinatrice
BOUZIANE HOURIA	MAA	UMMTO	Examinatrice

Année Universitaire : 2021/2022

Je voudrais rendre hommage et avoir une pensée pour mon cher oncle parti trop tôt, qui m'a élevé durant toute mon enfance et qui serait fier de l'homme que je suis aujourd'hui ...

REMERCIEMENTS

IL m'est agréable d'adresser mes premiers remerciements à ma famille, qui a toujours cru en moi dans les bons comme dans les mauvais moments, qui ont accompagné mes choix et qui ont tout fait pour me soutenir durant mes années d'études malgré mon parcours un peu particulier, ils ont toujours tout fait pour que je puisse trouver mon bonheur et satisfaction totale dans mes projets.

Sans leurs efforts et leur présence, je ne me serai peut-être jamais inscrit, il faut savoir que pendant près d'un an, j'ai été bloqué et ma plus grande satisfaction est de répondre à ceci en décrochant ce diplôme et en finissant major de promotion de mes trois dernières années d'études au sein de l'université Mouloud Mammeri.

Par la suite, je tiens à remercier sérine qui a toujours été présente dans ma vie quand je n'y croyais plus, qui m'a permis de devenir l'homme que je suis aujourd'hui rempli d'ambitions de rêves et d'espoir et qui a été là à croire en moi et à me relever la tête quand personne n'était présent et qui est ma famille à moi.

Viendrons l'ensemble de mes amis : maria, samir, nissa, idir, manel, nou-nou, koceila, avec qui j'ai partagé des moments incroyables et inoubliables sans qui je n'aurai pas eu le même train de vie que j'ai aujourd'hui.

Je tiens à remercier toute l'équipe de pédagogique du master Probabilités et Statistiques sans exception, ils ont toujours fait preuve de beaucoup d'attentions et d'écoute à l'égard de l'ensemble des étudiants ayant effectués ce master, et je tiens plus précisément à remercier monsieur Youcef Berkoun pour l'effort émis et la passion qu'il m'a retransmis pour les probabilités et les statistiques.

Mes remerciements vont également aux examinateurs pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire parti du jury. Et enfin, vienne mes derniers remerciements pour mon encadreur, un grand Monsieur, Abdelghani Hamaz qui m'a permis de me découvrir une passion pour les séries temporelles à travers les cours qu'il a dispensé, et qui m'a fait l'honneur de guider mon travail et de m'orienter dans mes recherches malgré ses responsabilités de doyen et de me redécouvrir une passion pour l'informatique et la programmation.

Tizi-Ouzou, le 11 septembre 2022.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vii
INTRODUCTION	1
1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES CHRONOLOGIQUES	3
1.1 INTRODUCTION	3
1.2 PROCESSUS STOCHASTIQUES	3
1.3 STATIONNARITÉ	4
1.4 AUGMENTED DICKEY–FULLER TEST	5
1.5 ERGODICITÉ	7
1.6 FONCTION D’AUTOCOVARIANCE	7
1.7 BRUIT BLANC	8
1.8 AUTOCORRÉLATION	8
1.9 SIMULATION DE L’INDICE BOURSIER EN SUISSE LANGAGE R	9
1.10 OPÉRATEUR RETARD ET OPÉRATEUR DIFFÉRENCE	12
1.10.1 Opérateur retard	12
1.10.2 Opérateur différence	12
1.10.3 Opérateur Avance	12
1.11 ESPÉRANCE ET VARIANCE CONDITIONNELLE	12
1.11.1 Espérance Conditionnelle	12
1.11.2 Variance conditionnelle	12
1.11.3 Propriétés générales de l’espérance et la variance conditionnelle	13
1.11.4 Densité spectrale	13
1.12 QUELQUES MODÈLES DE SÉRIES TEMPORELLES	13
1.12.1 Modèle autorégressif AR(p)	13
1.12.2 Modèle Moyenne Mobile MA(q)	14
1.12.3 ARMA(p,q)	14
1.12.4 Modèle ARCH et GARCH(p,q)	14
1.12.5 Modèle AutoRegressive Integrated Moving Average d’ordre (p,q,d)	15
1.13 QUELQUES SIMULATIONS DE MODÈLES	15
2 ÉTUDES DES MODÈLES AUTORÉGRESSIFS À COEFFICIENTS ALÉATOIRES	20
2.1 INTRODUCTION	20
2.2 MODÈLE AUTORÉGRESSIF À COEFFICIENTS ALÉATOIRES	20
2.2.1 Modèle autorégressif à coefficients aléatoires d’ordre 1	20
2.2.2 Modèle autorégressifs à coefficients aléatoires d’ordre p	21
2.3 STATIONNARITÉ DES MODÈLES ALÉATOIRE À COEFFICIENT ALÉATOIRES	22
2.3.1 Solution strictement stationnaire	22

2.3.2	Solution faiblement stationnaire	22
2.4	SIMULATION DE LA TRAJECTOIRE D'UN RCA(1)	26
2.5	SIMULATION D'UN RCA(2)	31
2.6	SIMULATION DES TRAJECTOIRES D'UN MODÈLE RCA(P)	32
3	ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE RCA(1)	33
3.1	INTRODUCTION	33
3.2	ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN RCA(1) PAR LES MOINDRES CARRÉS	33
3.2.1	Consistance et Normalité asymptotique de l'estimateur par la méthode des moindres carrés	36
3.3	ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN RCA(1) PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE	37
3.3.1	Consistance et Normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance	41
3.4	PROGRAMMATION DES MÉTHODES D'ESTIMATION SOUS LE LANGAGE R	42
	CONCLUSION GÉNÉRALE	45
	BIBLIOGRAPHIE	46

LISTE DES FIGURES

1.1	Graphe de l'évolution de l'indice de performance au cours du temps	5
1.2	Résultat de l'étude de la stationnarité de l'ensemble de données collectées	6
1.3	graphe de la série stationnaire de l'indice boursier en Suisse . . .	7
1.4	Graphe d'autocorrélation ACF	10
1.5	Graphe d'autocorrélation partielle PACF	11
1.6	Simulation d'un modèle AR(1)	16
1.7	Autocorrélation et autocorrélation partielle d'un modèle AR(1) .	17
1.8	Simulation d'un modèle MA(1)	18
1.9	Autocorrélation et autocorrélation partielle d'un modèle d'un modèle MA(1)	18
1.10	Simulation d'un modèle ARMA(1,1)	19
1.11	Autocorrélation et autocorrélation partielle d'un modèle ARMA(1,1)	19
2.1	Condition de stationnarité pour un RCA(1)	27
2.2	Simulation d'un RCA(1) $\sigma_\epsilon^2 = 0.2, \mu_\beta = 0.2, \sigma_\beta^2 = 0.4$	27
2.3	Nuages de points, ACF, PACF d'un RCA(1)	28
2.4	ACF d'un RCA(1) se rapprochant le plus de la non stationnarité	29
2.5	Exemple de série stationnaire et non stationnaire témoignant la variation des différents paramètres d'un RCA(1)	30
2.6	Simulation d'un RCA(2)	31
2.7	Simulation d'un RCA(p) pour le cas ou p=2 et phi prenant des valeurs strictement inférieurs à 1	32
3.1	Estimation par la méthode des moindres carrés	42
3.2	Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance	43

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Étude comparative de l'estimation des paramètres avec le critère MSE	44
-----	---	----

INTRODUCTION GÉNÉRALE

DEPUIS l'antiquité l'homme a toujours eu pour objectif de voyager dans le temps ou de réussir à prédire l'avenir et ainsi pouvoir réaliser les meilleures prises de décisions, lui permettant de faire le moins d'erreurs et d'aboutir à un risque de perte quasiment nulle.

L'analyse de séries temporelles et la prédiction de celle-ci seraient comparables dans le monde des mathématiques au calcul de la probabilité d'un événement sachant un événement passé, dans le monde de l'informatique à l'apprentissage automatique des réseaux de neurones (Machine Learning).

Il existe différentes catégories de modèles de séries temporelles parmi elles les plus connues sont :

- Modèles linéaires : $AR(p)$ (Auto-Régressif) et $Ma(q)$ (Moving-Average) une généralisation de ces deux modèles donnent le modèle $ARMA(p,q)$
- Modèles conditionnels : ARCH (Auto-Régressive Conditional Heteroskedasticity) et une forme générale de ce modèle GARCH(p,q)
- Le modèle principal soumis à notre étude est le modèle auto régressif à coefficient aléatoire noté RCA(p)

Les modèles auto-régressifs à coefficients aléatoires ont été principalement introduits par Nicholls and Quinn en 1982, un très grand intérêt leur est porté dans divers domaines d'applications, notamment dans le domaine de l'économétrie, la médecine, la météorologie, le traitement du signal,...

Ce mémoire s'inscrit dans cette thématique et a pour objectif de développer diverses méthodes d'estimations des paramètres des modèles RCA. Il est organisé comme suit.

Le premier chapitre nous permet d'introduire les principales notions de séries temporelles, notamment la notion de processus stochastique et de stationnarité, et un rappel sur les différents modèles sera présenté.

Dans le second chapitre, nous allons introduire le modèle auto régressif à coefficient aléatoire RCA d'ordre 1 et p. On s'intéressera ensuite aux conditions de stationnarité d'un modèle RCA(1) mis en avant par Nicholls and Quinn(1982)[8]. Enfin nous allons mettre en œuvre un programme de simulation permettant de générer les trajectoires un RCA(1) et un RCA(2) et de présenter ces deux modèles avec la variation des différents paramètres .

Dans le dernier chapitre, nous allons introduire la notion d'estimation par les différentes méthodes proposées notamment, par l'estimation des moindres carrés notée (EMC) et l'estimation du maximum de vraisemblance noté (EMV). On évoquera aussi la notion de consistance et la normalité asymptotique de ces estimateurs. Une étude comparative des performances des estimateurs par simulation sera détaillée, et cela, en retenant, l'erreur quadratique comme

critère de comparaison(MSE).

Ce mémoire est achevé par une conclusion portant certaines perspectives futures.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

1

1.1 INTRODUCTION

Dans ce premier chapitre nous avons rappelé les principales notions de base nécessaires pour la maîtrise de la suite du mémoire thématique. Il sera question d'introduire la notion de processus stochastique et de stationnarité tout en donnant la fonction d'autocovariance et d'autocorrélation. Enfin, les principaux modèles et leurs caractéristiques seront mis en exergue. Afin de bien illustrer les caractéristiques de ces modèles, l'étude sera accompagnée par des simulations et traitements de données réelles avec le langage de programmation R. Pour précision, l'illustration se fera à base d'un exemple d'application concret de l'indice boursier suisse [SMI Swiss Market Index (hors réinvestissement des dividendes)].

1.2 PROCESSUS STOCHASTIQUES

Un processus stochastique ou processus aléatoire ou fonction aléatoire représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire.

Définition 1.1 *On appelle processus stochastique ou processus aléatoire toute famille de variables aléatoires X_t . Cela signifie qu'à tout $t \in \mathbb{T}$ est associée une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un ensemble numérique E . On le note $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$. Si \mathbb{T} est dénombrable, on dit que le processus est discret; si \mathbb{T} est un intervalle, on dit que le processus est continue.*

1.3 STATIONNARITÉ

La stationnarité reflète la capacité d'un processus à ne pas dépendre de l'indice temporel.

Définition 1.2 *Un processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit faiblement stationnaire ou encore stationnaire si :*

1. $\mathbf{E}(X_t) = m_t = m < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$
2. $\mathbf{E}(X_t^2) = \sigma_t^2 = \sigma^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$
3. $\text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbf{E}((X_t - \mathbf{E}(X_t))(X_s - \mathbf{E}(X_s))) = \gamma_X(t, s), \quad \forall s, t \in \mathbb{T}.$

Remarque :

On peut remarquer clairement que 3 \implies 2

En posant $t=s$ dans la proposition 3 on a ainsi :

$$\text{Cov}(X_t, X_t) = \text{V}(X_t) = a < \infty$$

et on sait que : $\text{V}(X_t) = \mathbf{E}(X_t^2) - \mathbf{E}(X_t)^2 \iff c = \mathbf{E}(X_t^2) - m^2$

et on aboutit donc : $\mathbf{E}(X_t^2) = c + m^2 = \sigma^2 \implies 2$

Définition 1.3 *Un processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit fortement stationnaire (stationnaire au sens stricte), si les lois finis-dimensionnelles sont invariantes par transition : $\forall h > 0$ et $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ a la même loi que le vecteur $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$. En particulier X_t et X_{t+h} ont la même loi $\forall t, h \in \mathbb{Z}$, (donc la loi ne dépend pas du temps).*

APPLICATION SUR L'INDICE BOURSIER EN SUISSE AVEC R

Dans un premier temps on commence par installer les packages nécessaire à l'importation et au traitement des données des library avec la fonction `install.packages`, les library qui nous intéressent dans notre cas sont `data.series` et `tseries`.

```

1 #installation des packages nécessaire `a l'extraction
2 et l'analyse des données
3 install.packages("tseries")
4 install.packages("dataseries")
5 #Une fois installés, ils doivent être chargés dans la session
6 pour être utilisés.
7 library(tseries)
8 library(dataseries) }
```

Par la suite nous importons les données nécessaires de l'indice boursier suisse[SMI Swiss Market Index (hors réinvestissement des dividendes)] et nous tracerons le graphe de l'indice boursier en suisse.

```

1
2 #Importation des données de la dataserie
3 a=dataseries::ds("ch_snb_capchstocki.gdr",'ts')
4 #fonction pour réaliser le graphe
5 plot(dataseries::ds("ch_snb_capchstocki.gdr","ts"),ylab="Indice de
  performance en suisse",xlab="années",main="Indice Boursier en
  Suisse")

```

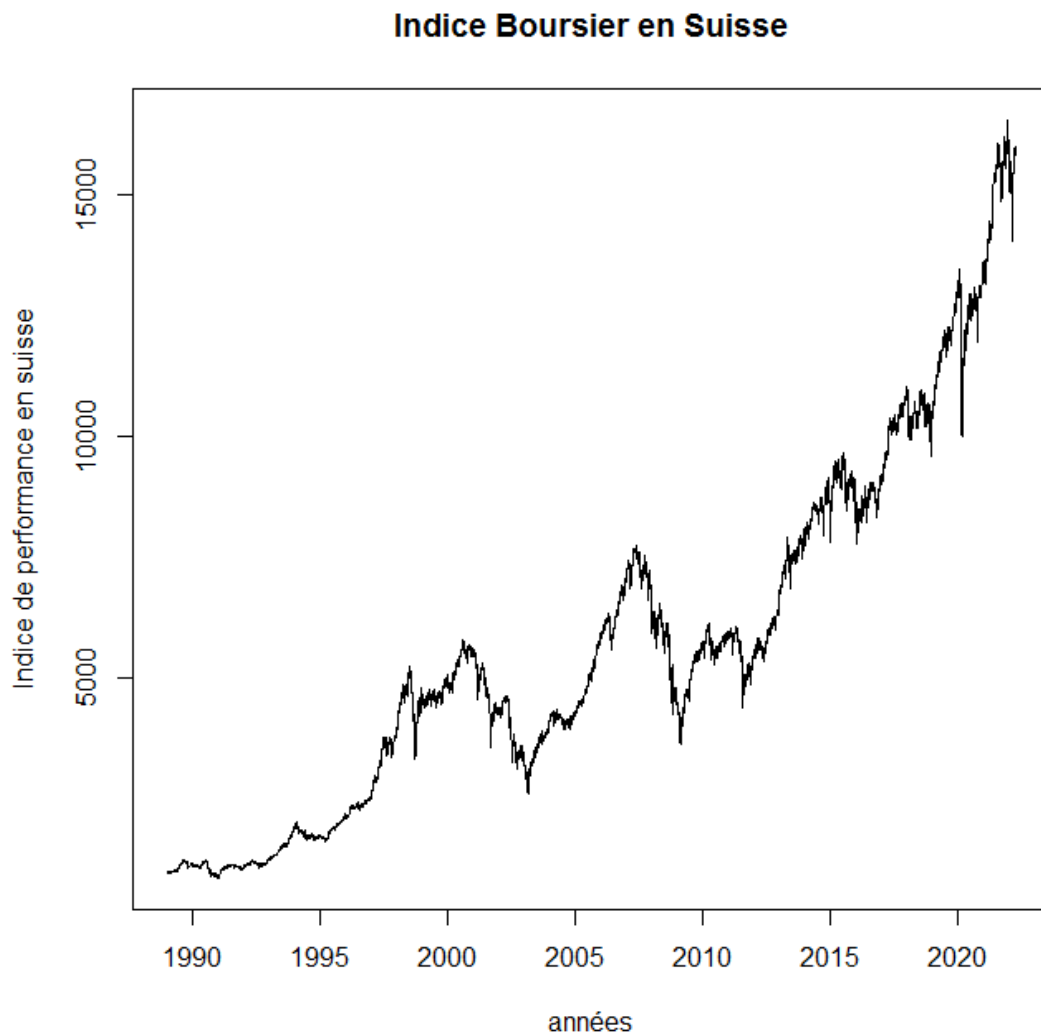


FIGURE 1.1 – Graphe de l'évolution de l'indice de performance au cours du temps

1.4 AUGMENTED DICKEY-FULLER TEST

Le test augmenté de Dickey-Fuller ou test ADF est un test statistique qui vise à savoir si une série temporelle est stationnaire c'est-à-dire si ses propriétés statistiques varient ou pas dans le temps.

On applique la fonction `adf.test` pour étudier la stationnarité des données qu'on a pu extraire

```

1
2 #Étude de la stationnarité
3 adf.test(a)

> adf.test(a)
  Augmented Dickey-Fuller Test

data: a
Dickey-Fuller = -0.96623, Lag order = 20, p-value =
0.9443
alternative hypothesis: stationary
>

```

FIGURE 1.2 – Résultat de l'étude de la stationnarité de l'ensemble de données collectées

On remarque que l'hypothèse alternative est acceptée et donc que cette série n'est pas stationnaire, car la p-value est évaluée à 0.9443 et afin de pouvoir accepter cette hypothèse, il faut que la p-value ≤ 0.05 .

On utilise ainsi la fonction `diff` qui calcule la différence entre des éléments consécutifs du vecteur pour que cette série devienne ainsi stationnaire et on réalise le graphe de la nouvelle série stationnaire.

On écrira alors la nouvelle partie du code ainsi :

```

1
2 #cette série ne semble pas stationnaire
3 b=diff(a)
4 plot(b, ylab="Indice de performance en Suisse",xlab="années", main="
  Indice Boursier en Suisse")

```

Nous remarquons maintenant que la stationnarité s'observe sur le graphe suivant et que nous avons :

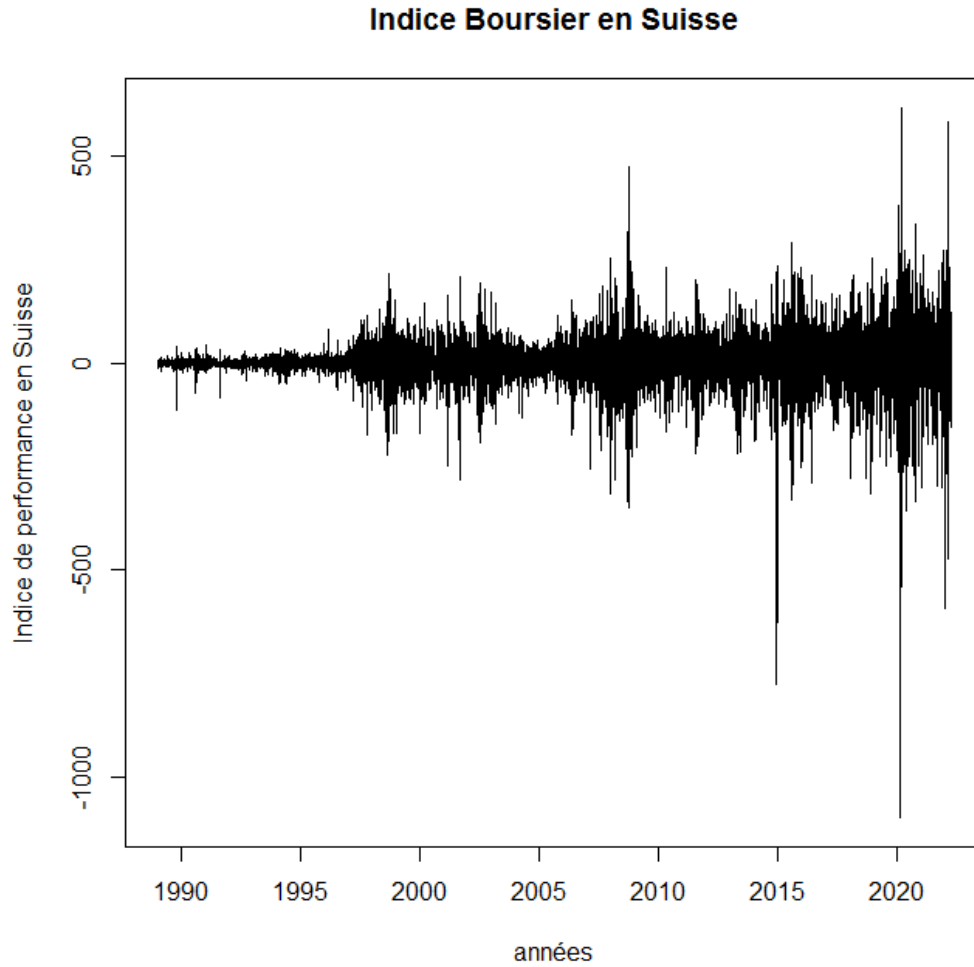


FIGURE 1.3 – graphe de la série stationnaire de l'indice boursier en Suisse

1.5 ÉRGODICITÉ

Théorème 1.1 (Birkoff) *Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit ergodique si :*

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée;

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \phi(X_{p+1}, \dots, X_{p+k}) = \mathbb{E}(\phi(X_1, \dots, X_k))$$

Plus généralement, un processus est dit ergodique si il satisfait la loi forte des grands nombres. Bien évidemment, le concept est plus large mais nous nous contenterons de cette définition.

Remarque : Toute transformation par une application mesurable d'un processus ergodique et stationnaire est ergodique et strictement stationnaire.

1.6 FONCTION D'AUTOCOVARIANCE

Définition 1.4 (Brockwell, P. J., Davis, R. A 2009) *La fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ $h \in \mathbb{Z}$ mesure la covariance entre une variable et cette même variable à des dates différentes, pour un délai h :*

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbf{E}((X_t - \mathbf{E}(X_t))(X_{t+h} - \mathbf{E}(X_{t+h}))). \\ &= \gamma_X(t, t+h) = \gamma(|t+h-t|) = \gamma(h)\end{aligned}$$

Avec : $\gamma(0) = \text{V}(X_t) = \sigma_X^2$.

Propriétés de la fonction d'autocovariance : La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire est une fonction :

1. Paire : $\gamma(-h) = \gamma(h)$, $\forall h \in \mathbb{Z}$.
2. définie semi-positive : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(t_i - t_j) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall t_j \in \mathbb{Z}$.

1.7 BRUIT BLANC

Définition 1.5 *Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc faible où bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 noté :*

$X_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$ ou l'on considère que \mathcal{BB} est une abréviation pour Bruit Blanc. Ainsi on notera la fonction d'autocovariance d'un tel processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Définition 1.6 *Un Bruit Blanc Fort est une suite de variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées de variance finie. Alors si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est i.i.d et de variance finie on dit que c'est un Bruit Blanc Fort.*

1.8 AUTOCORRÉLATION

[Brockwell, P. J., Davis, R. A 2009] L'un des principaux intérêts de la modélisation chronologique d'une expérience aléatoire est sa structure de corrélation temporelle, en d'autres termes sa structure d'autocorrélation. Il existe plusieurs outils permettant de caractériser l'autocorrélation d'une série chronologique.

Définition 1.7 *Soit $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire, la fonction d'autocorrélation d'un tel processus est définie en fonction de la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ et on la note $\rho(h)$:*

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \forall h \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.8 *L'autocorrélation partielle d'ordre h , noté $\tau(h)$, représente le coefficient de corrélation entre :*

- Le résidu $X_t - P_{\mathcal{S}_p\{X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}\}} X_t$ de la régression de X_t par $X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}$
- Le résidu $X_{t-h} - P_{\mathcal{S}_p\{X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}\}} X_{t-h}$ de la régression de X_{t-h} par $X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}$

En d'autres termes on a :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 + X_{t-2} + \dots + \alpha_{h-1} X_{t-h+1} + W$$

$$X_{t-h} = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 + X_{t-2} + \dots + \beta_{h-1} X_{t-h+1} + R$$

On peut écrire alors :

$$\tau(h) = \mathbf{Corr}(W, R) = \mathbf{Corr}(X_t - P_{\bar{S}p\{X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}\}} X_t, X_{t-h} - P_{\bar{S}p\{X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}\}} X_{t-h})$$

Où $P_{\bar{S}p\{X_{t-h-1}, \dots, X_{t-1}\}}$ représente la projection du sous espace fermé du processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Cette fonction mesure le degré de dépendance entre les valeurs d'une série à des instants différents.

L'autocorrélation partielle permet de mesurer la autocorrélation à des instants différents en supprimant l'effet des variables intermédiaires.

Elle sert comme outils de mesure dans l'identification de la partie autorégressif des modèles ARMA.

1.9 SIMULATION DE L'INDICE BOURSIER EN SUISSE LANGAGE R

On reprends le même exemple d'application cité précédemment, et on applique la fonction d'autocorrélation `acf` et la fonction d'autocorrélation partielle `pacf` à ces données stationnaire

```
1 #fonction d'autocorrélation
2 acf(b)
```

Une représentation de la fonction d'autocorrélation simple associées aux données précédemment utilisées pour l'indice boursier financier nous permet d'obtenir ce graphe

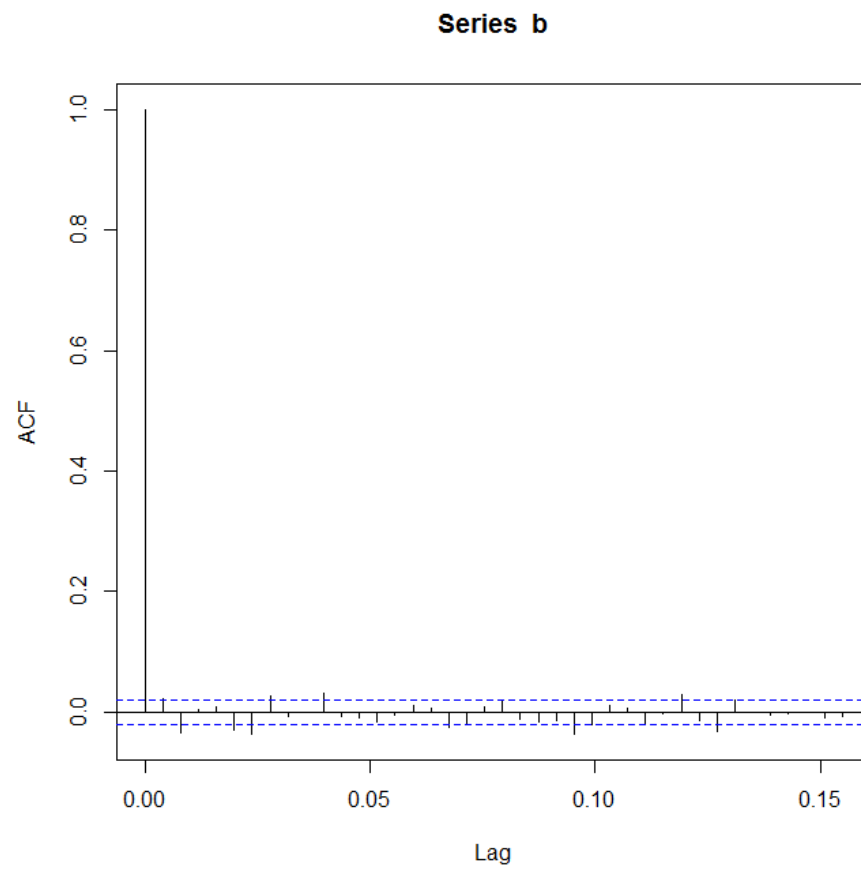


FIGURE 1.4 – Graphe d'autocorrélation ACF

La droite horizontale pointillée sur le graphique issu de la fonction "acf" nous indique le seuil critique au-delà duquel l'autocorrélation est considérée significative.

Toutes les lignes se terminant en dehors de la bande de confiance signifient que la série chronologique présente une autocorrélation dans la période indiquée.

Et pour la fonction d'autocorrélation partielle on écrit :

```

1
2 #fonction d'autocorrélation partielle
3 pacf(b)

```

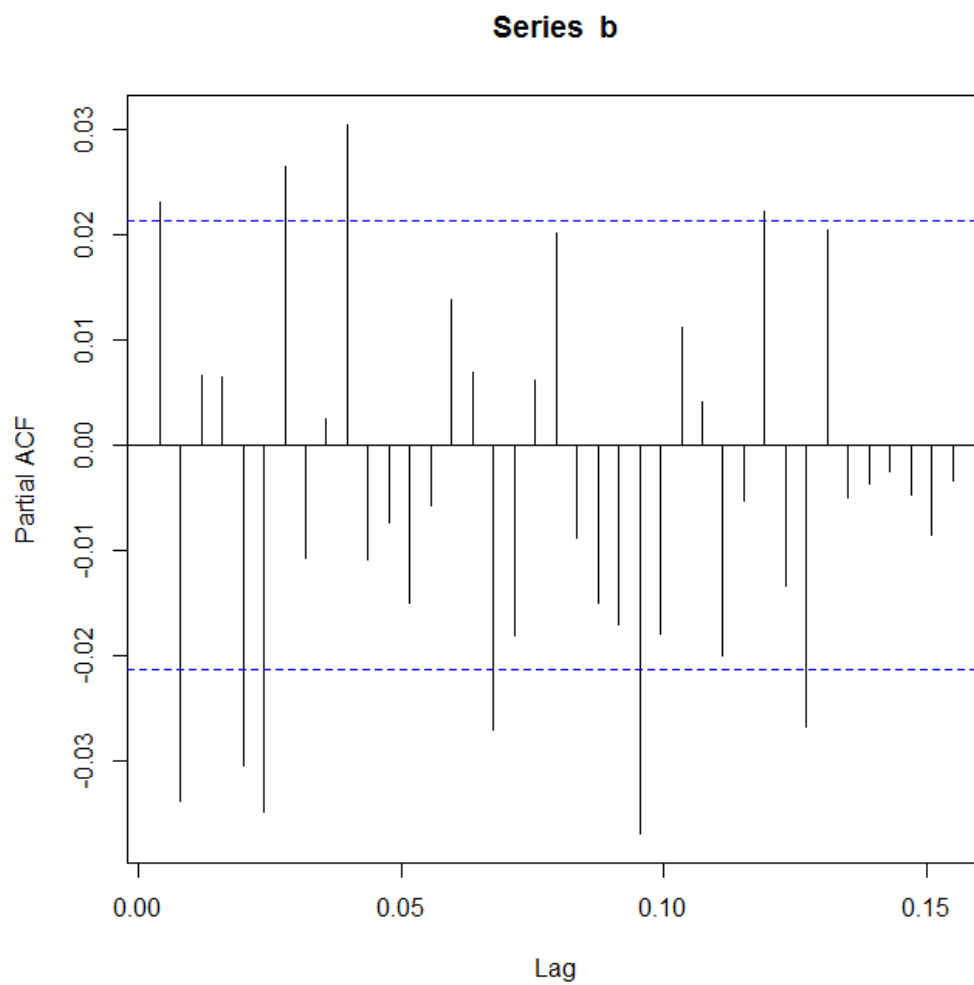


FIGURE 1.5 – Graphe d'autocorrélation partielle PACF

1.10 OPÉRATEUR RETARD ET OPÉRATEUR DIFFÉRENCE

1.10.1 Opérateur retard

Définition 1.9 *L'opérateur retard, notée B décale le processus d'une unité de temps vers le passé :*

$$\mathbb{B}(X_t) = X_{t-1}.$$

Si on appelle n fois cet opérateur, on décalera le processus de n unités de temps :

$$\mathbb{B}(\mathbb{B}(\mathbb{B}(\dots\mathbb{B}(X_t\dots)))) = \mathbb{B}^n(X_t) = X_{t-n}.$$

1.10.2 Opérateur différence

Définition 1.10 *L'opérateur différence, noté Δ fait la différence entre le processus et sa version décalée de une unité de temps. Cet opérateur se construit en fonction de l'opérateur retard :*

$$\Delta(X_t) = X_t - X_{t-1} = X_t - \mathbb{B}(X_t),$$

donc

$$\Delta = \mathbb{I} - \mathbb{B},$$

où \mathbb{I} est l'opérateur Identité c'est à dire que

$$\mathbb{I}(X_t) = X_t.$$

1.10.3 Opérateur Avance

Définition 1.11 *L'opérateur avance, noté F avance le processus d'une unité de temps vers le futur :*

$$\mathbb{F}(X_t) = X_{t+1},$$

Si on appelle n fois cette opérateur, on avancera le processus de n unités de temps :

$$\mathbb{F}(\mathbb{F}(\mathbb{F}(\dots\mathbb{F}(X_t\dots)))) = \mathbb{F}^n(X_t) = X_{t+n}.$$

1.11 ESPÉRANCE ET VARIANCE CONDITIONNELLE

1.11.1 Espérance Conditionnelle

L'espérance conditionnelle permet de calculer ou d'émettre des prévisions optimale d'un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Si elle dépends d'évènements passés alors on l'appellera espérance conditionnelle.

Définition 1.12 (Brockwell, P. J., Davis, R. A 2009)

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_{t-1} \quad \forall s \leq t,$$

où \mathcal{F}_s représente l'ensemble des données collectées jusqu'à l'instant s.

1.11.2 Variance conditionnelle

[Brockwell, P. J., Davis, R. A 2009] La notion de variance conditionnelle est défini à partir de la précédente de l'espérance conditionnelle on notera alors :

$$\mathbb{V}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_s) - (\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s))^2.$$

1.11.3 Propriétés générales de l'espérance et la variance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note \mathbb{B} la sous tribu de \mathcal{A} .

— Pour tous réels a et b et toute variable aléatoire X intégrable on a :

$$\mathbb{E}(aX + b|\mathcal{F}_s) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s) + b.$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X|\mathcal{F}_s).$$

— Pour toutes variable aléatoire X_1 et X_2 intégrable on a :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_s).$$

— Si $X_1 \leq X_2$ p.s alors :

$$\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_s) \leq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_s).$$

où \mathcal{F}_s représente l'ensemble des données collectées jusqu'à l'instant s .

1.11.4 Densité spectrale

Définition 1.13 (Brockwell, P. J., Davis, R. A 2009) Soit $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$. On appelle densité spectrale, quand elle existe, la fonction $f(\cdot)$ définie sur \mathbb{R} par :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{iwh}.$$

C'est donc la transformée de Fourier (discrète) de la fonction $\gamma(\cdot)$ définie sur \mathbb{Z} .

La densité spectrale d'un processus stationnaire $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ de fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ existe dès que l'on a :

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty.$$

1.12 QUELQUES MODÈLES DE SÉRIES TEMPORELLES

1.12.1 Modèle autorégressif AR(p)

Définition 1.14 (Brockwell, P. J. Davis, R. A 2002) On dit qu'un processus stationnaire $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation autorégressive d'ordre p (noté AR(p)) s'il vérifie l'équation récurrente :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

où $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\} \sim \text{IBB}(0, \sigma^2)$ et ϕ_1, \dots, ϕ_p sont des coefficients réelles tel que $\phi_p \neq 0$

$$X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} + \epsilon_t \iff \Phi(B)X_t = \epsilon_t,$$

avec Φ est le polynôme de degré p dont les coefficients sont $(1, -\phi_1, \dots, -\phi_p)$

1.12.2 Modèle Moyenne Mobile MA(q)

Définition 1.15 (Brockwell, P. J. Davis, R. A 2002) *On dit qu'un processus stationnaire $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation Moyenne Mobile d'ordre q (noté MA(q)) s'il vérifie l'équation :*

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

où $\epsilon_t \sim \mathbb{B}\mathbb{B}(0, \sigma^2)$ et $\theta_1, \dots, \theta_q$ sont des coefficients réelles tel que : $\theta_q \neq 0$

$$X_t = \sum_{k=0}^q \theta_k \epsilon_{t-k} \iff X_t = \theta(B) \epsilon_t,$$

où $\theta_0 = 1$ et $\Theta(B)$ est le polynôme de degré q dont les coefficients sont $\{1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q\}$

1.12.3 ARMA(p,q)

On peut notamment combiné ces deux modèles vu précédemment. La combinaison de ces deux modèles introduit la notion de modèle autorégressif-moyenne mobile (ARMA) il est caractérisé par le paramètre p de la partie autorégressif et le paramètre q de la partie moyenne-mobile.

Définition 1.16 (Brockwell, P. J. Davis, R. A 2002) *Un tel Modèle ARMA(p,q) vérifie l'équation :*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \phi_3 X_{t-2} + \dots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

$$\sum_{k=0}^p \phi_k X_{t-k} = \sum_{k=0}^q \theta_k \epsilon_{t-k},$$

avec $\phi_0=1$ et $\theta_0=1$ On pourrait retrouver une écriture polynomiale $\Theta(B)$ et $\Phi(B)$:

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\epsilon_t$$

Avec :

- Φ polynôme de degré p dont les coefficients sont $\{1, -\phi_1, \dots, -\phi_p\}$
- $\Theta(B)$ est le polynôme de degré q dont les coefficients sont $\{1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q\}$

1.12.4 Modèle ARCH et GARCH(p,q)

Généralisation du modèle Auto Régressif Conditionnellement Hétéroscédastique (ARCH), le modèle GARCH (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) a été mis en évidence et développé par Engle en 1982[9]. Principalement utilisé pour prédire la volatilité des marchés financiers ce modèle est utilisé dans la modélisation des séries financières.

Définition 1.17 *On dit qu'un processus $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une représentation ARCH(1) si :*

$$\epsilon_t = \eta_t h_t$$

satisfaisant la condition :

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_t^2}$$

avec $\{\eta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un Bruit Blanc, tel que $\mathbb{E}(\eta_t)=0$ et $\mathbb{V}(\eta_t)=1$ et $\alpha_0 > 0$ et $1 > \alpha_1 > 0$ la composante h_t désigne une variable qui conditionnellement à l'ensemble des valeurs

passées ϵ_t .

Dans ce cas le processus est caractérisé par des autocorrélation nulles et on a donc $\text{COV}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ pour tout $s \neq t$ et on aboutit à la conclusion que les ϵ_t sont non corrélés dans le temps.

Définition 1.18 On dit qu'un processus $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une représentation ARCH(q) si :

$$\epsilon_t = \eta_t h_t$$

satisfaisant la condition :

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2}$$

avec $\{\eta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un Bruit Blanc, tel que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ et $\mathbb{V}(\eta_t) = \sigma_\eta^2$

Définition 1.19 Soit h_t une suite de variables aléatoire indépendantes identiquement distribuées, on dit que ϵ_t est un GARCH(p, q) au sens fort s'il vérifie :

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \eta_t h_t \\ h_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Où les α_i et β_j sont des constantes strictement positive et les h_t une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

1.12.5 Modèle AutoRegressive Integrated Moving Average d'ordre (p, q, d)

Définition 1.20 Un processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus ARIMA(p, d, q) si $\Delta^d X$ est un processus ARMA(p, q).

Δ étant l'opérateur différence vu précédemment défini par : $\delta = 1 - B$.

Un processus ARIMA(p, d, q) peut s'écrire de la manière suivante :

$$(1 - B)^d \Phi(B)X = \Theta(B)\epsilon$$

1.13 QUELQUES SIMULATIONS DE MODÈLES

Cas1 : Modèle AR(1)

```

1 AR1=arima.sim(n=100, list(ar=0.6), sd=3)
2 AR1;
3 plot(AR1) #Graphe d'un Mod'ele AR(1)
4 acf(AR1) #fonction d'autocorrélation
5 pacf(AR1) #fonction d'autocorrélation partielle

```

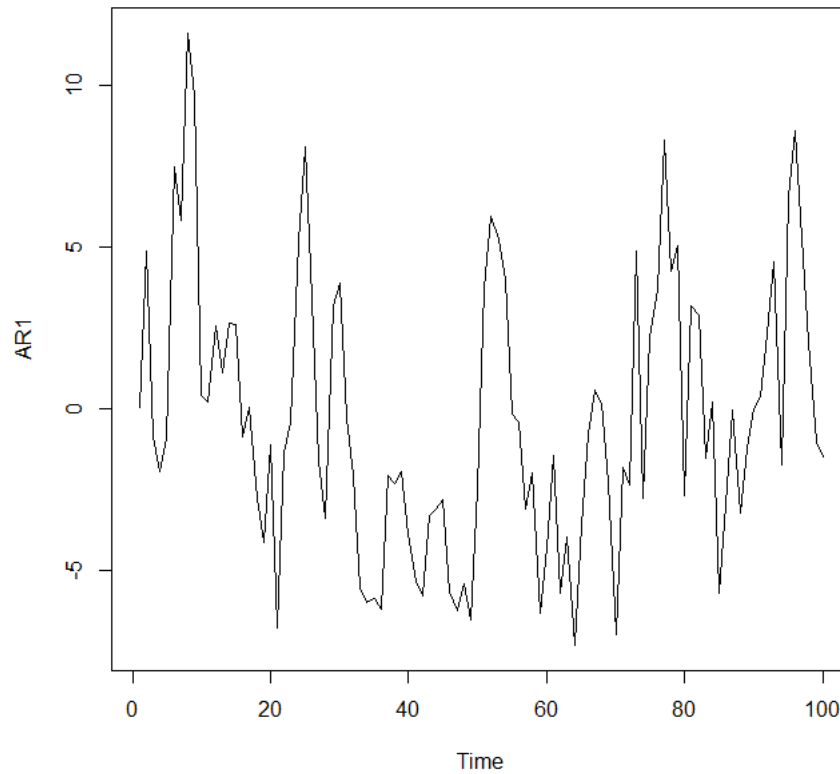


FIGURE 1.6 – Simulation d'un modèle $AR(1)$

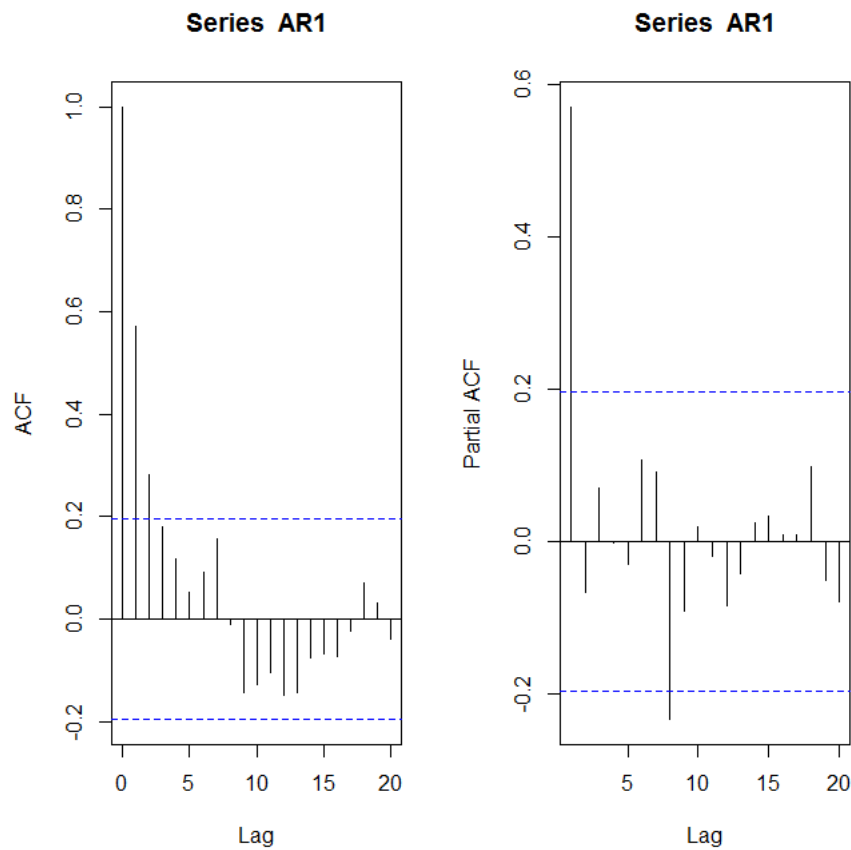
On remarque que le graphe de la fonction d'autocorrélation d'un $AR(p)$ est sinusoïdal amorti et le graphe de la fonction d'autocorrélation partielle s'annule à partir de p dans notre cas $p=1$.

Cas2 : Modèle $MA(1)$

```

1 MA1=arima.sim(n=100,list(ma=-0.7),sd=3)
2 MA1;
3 plot(MA1)#Graphe d'un Mod'ele MA(1)
4 acf(MA1) #fonction d'autocorrélation
5 pacf(MA1) #fonction d'autocorrélation partielle

```

FIGURE 1.7 – Autocorrélation et autocorrélation partielle d'un modèle $AR(1)$

On remarque que le graphe de la fonction d'autocorrélation partielle d'un $MA(q)$ est sinusoïdal amorti et le graphe de la fonction d'autocorrélation s'annule à partir de q .

Cas3 : Modèle $ARMA(1,1)$

```

1 ARMA=arma.sim=arima.sim(n=100,list(ar=1/3,ma=-1/4),sd=1)#simulation d'
  un modele ARMA(1,1)
2 ARMA;
3 plot(ARMA)#afficher une le graphe d'un modele ARMA(1,1)
4 par(mfrow=c(1,2))
5 acf(ARMA)#fonction d'autocorrélation d'un ARMA(1,1)
6 pacf(ARMA)#fonction d'autocorrélation partielle d'un ARMA(1,1)

```

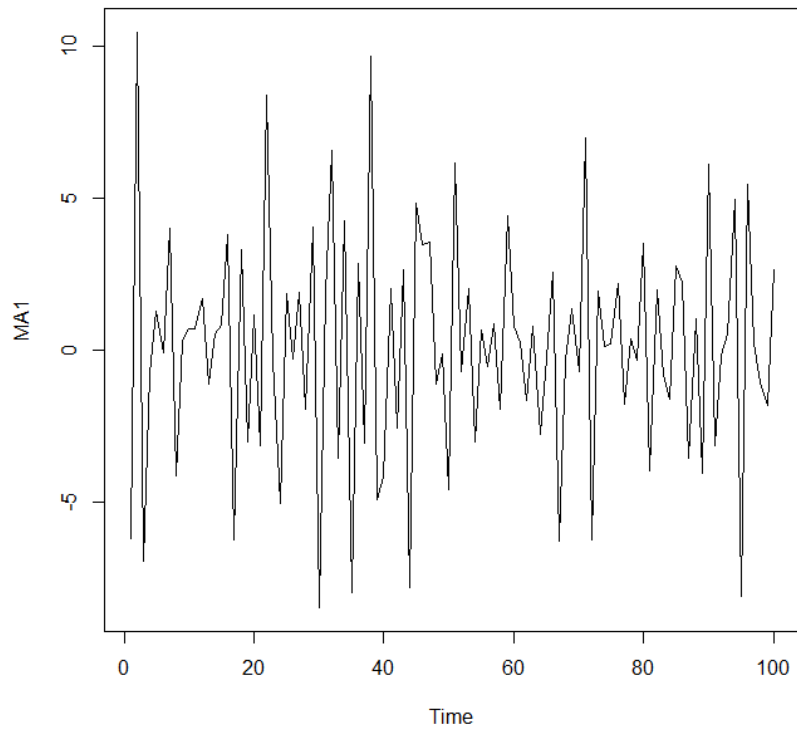


FIGURE 1.8 – Simulation d'un modèle $MA(1)$

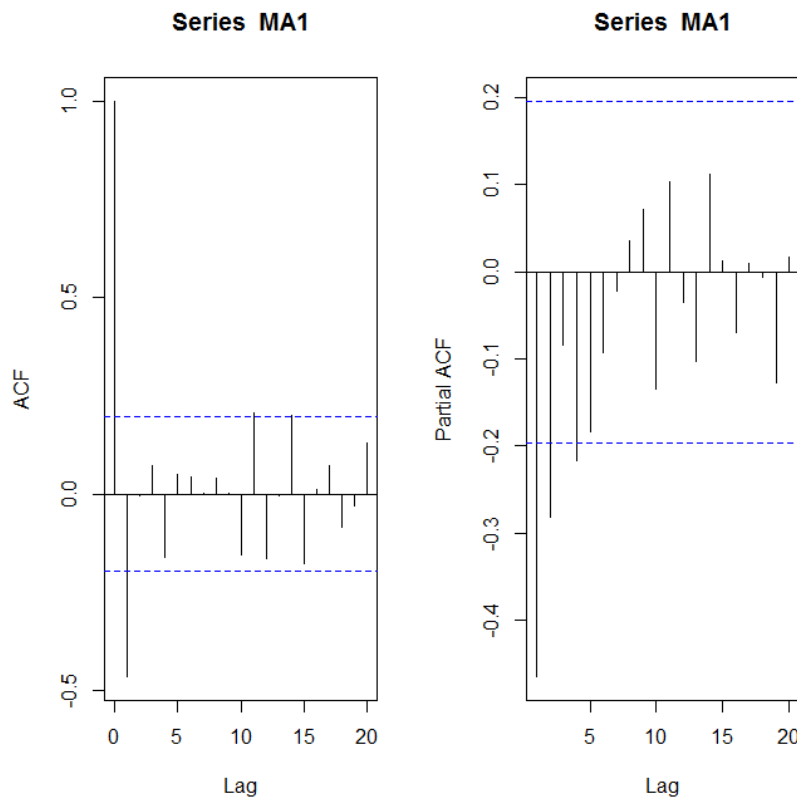


FIGURE 1.9 – Autocorrélation et autocorrélation partielle d'un modèle d'un modèle $MA(1)$

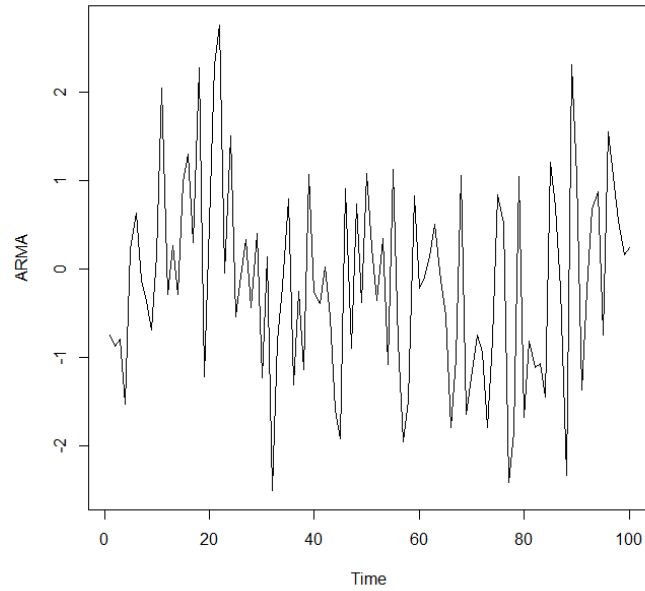


FIGURE 1.10 – Simulation d'un modèle $ARMA(1,1)$

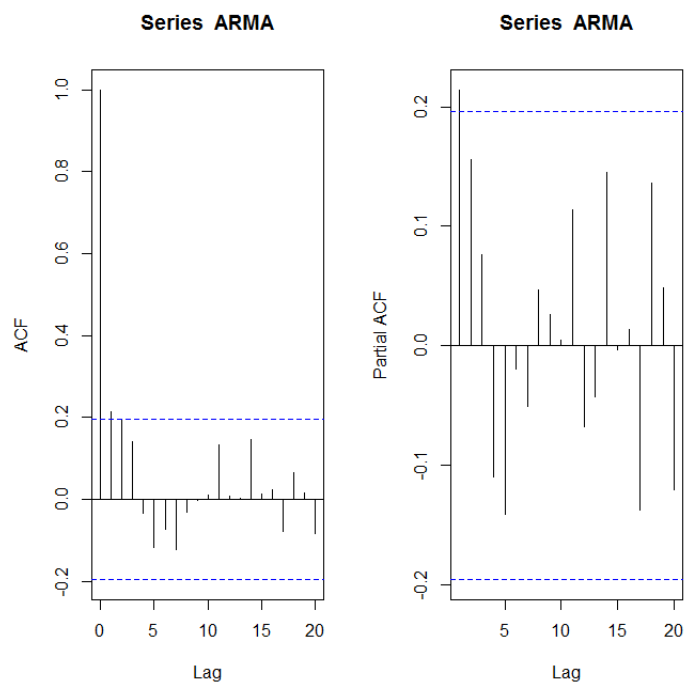


FIGURE 1.11 – Autocorrélation et autocorrélation partielle d'un modèle $ARMA(1,1)$

ÉTUDES DES MODÈLES AUTORÉGRESSIFS À COEFFICIENTS ALÉATOIRES

2

2.1 INTRODUCTION

Lors des 30 dernières années, diverses études ont été portées sur les différents modèles de séries chronologiques. L'un des principaux modèles qui a porté l'attention est l'étude des modèles à coefficients aléatoires mis en avant par Nicholls et Quinn en 1982. On peut remarquer que ce modèle est une extension du modèle AR et sont souvent notés RCA, il est intensivement utilisé dans divers domaines, nous citons l'étude des marchés financiers, biologies, météorologiques, ... etc. Ce second chapitre porte sur l'étude de tels modèles aléatoires à coefficient aléatoires.

Notre objectif est de :

- Définir un modèle autorégressif aléatoire à coefficients aléatoire d'ordre 1 et p .
- Étudier les conditions de stationnarité des modèles autorégressifs aléatoires à coefficients aléatoires.
- Définir les équations de Yules-Walker.
- Simuler les trajectoires d'un RCA(1) et RCA(2) avec le langage R.

2.2 MODÈLE AUTORÉGRESSIF À COEFFICIENTS ALÉATOIRES

Dans un premier temps on commence par définir un modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre p , puis nous allons nous intéresser à un cas particulier qui est l'étude du modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre 1

2.2.1 Modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre 1

On considère deux processus aléatoire $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\beta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- ϵ_t est une suite de variable aléatoire de μ_ϵ et de variance σ_ϵ^2 .
- β_t est une suite de variable aléatoire de moyenne nulle et de variance σ_β^2 .
- β_t et ϵ_t sont indépendantes.

Définition 2.1 Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit autorégressif d'ordre 1 à coefficients aléatoires RCA(1), s'il vérifie l'équation suivante :

$$X_t = (\phi + \beta_t)X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

où $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\beta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfont les conditions suscitées.
Et ϕ est une constante réelles

2.2.2 Modèle autorégressifs à coefficients aléatoires d'ordre p

Définition 2.2 Un modèle autorégressif à coefficient aléatoire d'ordre p noté aussi RCA(p) s'écrit sous cette forme :

$$X_t = \sum_{i=1}^p (\phi_i + \beta_t) X_{t-i} + \epsilon_t,$$

avec $t \in \mathbb{Z}$ $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variable aléatoire indépendantes identiquement distribuées satisfaisants certaines conditions :

- $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$.
- $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$.
- les ϕ_i sont des constant $\forall i=1...n$.
- β_t est une suite de variable aléatoire indépendante identiquement distribuées.

Proposition 2.1 Supposons que le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ admet une représentation RCA(1) et que de plus, $\mu_\beta^2 + \sigma_\beta^2 < 1$ et $\sigma_\epsilon^2 < +\infty$. Alors, le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est strictement stationnaire, causal et également stationnaire au second ordre. Ce qui signifie qu'il existe une suite de nombres ψ_j absolument sommable $\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \right)$ et X_t s'exprime

$$\text{comme } X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}.$$

Remarque : On peut remarquer facilement que RCA(1) et AR(1) partage la même fonction d'autocorrélation et que RCA(1) est juste une extension du modèle AR(1).

Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit autorégressif à coefficients aléatoires RCA(1), s'il vérifie l'équation suivante :

$$X_t = (\beta_t)X_{t-1} + \epsilon_t \text{ si } \phi = 0. \quad (2.2)$$

où $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite i.i.d et (β_t) est également une suite i.i.d indépendante du processus $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$

Lemme : Supposons que :

$$\mathbb{E}(\log^+(\epsilon_0)) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(\log^+(\phi + \beta_0)) < \infty.$$

On en déduit que :

- si $-\infty \leq \mathbb{E}(\log(\phi + \beta_0)) < 0$ alors le processus X_t admet une solution causal strictement stationnaire et ergodique.
- De la même manière si $\mathbb{P}(\epsilon_0) = 1$ et $\mathbb{P}(X_t < \infty) = 1$ alors on a :
 $-\infty \leq \mathbb{E}(\log(\phi + \beta_0)) < 0$.

Où $\log^+(x) = \max(\log(x), 0)$ celle-ci représente la partie positive du logarithme.

2.3 STATIONNARITÉ DES MODÈLES ALÉATOIRE À COEFFICIENT ALÉATOIRES

2.3.1 Solution strictement stationnaire

Le théorème de (P.Billingsley 1961) permettra de démontrer la stationnarité au sens strict.

Lemme : Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique. considérons un processus stochastique $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ avec $Y_t = \phi(\dots, X_{t-1}, X_t, \dots)$, où ϕ est mesurable. Si $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est strictement stationnaire et ergodique, en particulier, si les X_t sont indépendants et identiquement distribués, alors Y est strictement stationnaire et ergodique.

2.3.2 Solution faiblement stationnaire

B.Y.Hwang et I.V.Basawa [1] [6] ont réussi à montrer en se référant aux études et aux documents de Nicholls and Quinn(1982)[3] qu'en satisfaisant certaines conditions notamment :

$\mathbb{E}(\beta_t^2) < 1$,l'équation(2.2) admet une solution stationnaire dans \mathbb{L}^2 qui se note :

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \beta_{t-i} \right) \epsilon_{t-j}$$

Démonstration. On part du modèle (2.2) on a que :

$$X_t = \beta_t X_{t-1} + \epsilon_t.$$

$$X_t = \beta_t(\beta_{t-1} X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t.$$

$$X_t = \beta_t \beta_{t-1} X_{t-2} + (\beta_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t).$$

$$X_t = \beta_t \beta_{t-1} (\beta_{t-2} X_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \beta_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t.$$

$$X_t = \beta_t \beta_{t-1} \beta_{t-2} X_{t-3} + \beta_t \beta_{t-1} \epsilon_{t-2} + \beta_t \epsilon_{t-1} + \epsilon_t.$$

.

.

.

$$X_t = \prod_{j=0}^{p-1} \beta_{t-j} X_{t-p} + \sum_{j=1}^{p-1} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \beta_{t-i} \right) \epsilon_{t-j} + \epsilon_t.$$

Et donc d'après l'inégalité de B.tchebychev, lorsque $p \rightarrow \infty$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\prod_{j=0}^{p-1} \beta_{t-j} X_{t-p}| > \epsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}(\prod_{j=0}^{p-1} \beta_{t-j} X_{t-p})^2}{\epsilon^2} \\ \mathbb{P}(|\prod_{j=0}^{p-1} \beta_{t-j} X_{t-p}| > \epsilon) &\leq \frac{\prod_{j=0}^{p-1} \mathbb{E}(\beta_{t-j} X_{t-p})^2}{\epsilon^2} \\ \mathbb{P}(|\prod_{j=0}^{p-1} \beta_{t-j} X_{t-p}| > \epsilon) &\leq \frac{\prod_{j=0}^{p-1} \mathbb{E}(\beta_{t-j}^2) \mathbb{E}(X_{t-p}^2)}{\epsilon^2} \\ \mathbb{P}(|\prod_{j=0}^{p-1} \beta_{t-j} X_{t-p}| > \epsilon) &\leq \frac{(\sigma_\beta^2 + \beta)^p + \mathbb{E}(X_{t-p}^2)}{\epsilon^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

comme ces deux hypothèses sont :

- $\mathbb{E}(X_{t-p}) < \infty$.
- $\sigma_\beta^2 + \mu_\beta^2 < 1$.

Il en résulte que $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire et ergodique.

□

Théorème 2.1 (Wang, S.Y, and Basawa 1993) *On considère l'équation suivante :*

$$X_t = \beta_t X_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.3)$$

où $\{(\beta_t, \epsilon_t), t \in \mathbb{Z}\}$, est une suite de vecteur aléatoire strictement stationnaire et ergodique avec :

$$\mathbb{E}(\ln|\beta_t|) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(\ln|\epsilon_t|) < \infty$$

Si $\mathbb{E}(\ln|\beta_t|) < 0$. Alors il existe une solution X_t strictement stationnaire et ergodique pour l'équation (2.3), et telle que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, X_t est mesurable par rapport à $\mathbf{F}_n = \sigma(\{\beta_n, \epsilon_n\}, n \leq t\}$ la tribu engendrée par $\{(\beta_n, \epsilon_n), n \leq t\}$

Démonstration. Supposons que

$$\mathbb{E}(\ln|\beta_t|) = \alpha < 0.$$

On définit la suite (T_j) avec $j \in \mathbb{N}$ par :

$$T_0 = \epsilon_t \text{ et } T_j = \prod_{i=0}^{j-1} \beta_{n-i} \epsilon_j, \text{ pour } j \geq 1$$

Soit $S_r = \sum_{j=0}^r T_j$ on a :

$$\begin{aligned} \ln(|T_j|) &= \ln \prod_{i=0}^{j-1} |\beta_{t-i}| |\epsilon_j|. \\ \ln(|T_j|) &= \ln|\epsilon_j| + \sum_{i=0}^{j-1} \ln|\beta_{t-i}|. \end{aligned}$$

En divisant dans l'équation par $\frac{1}{j}$ on obtient :

$$\frac{1}{j} \ln(|T_j|) = \frac{1}{j} \ln|\epsilon_{t-j}| + \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \ln|\beta_{t-i}|.$$

Par la définition du processus ergodique, on obtient :

$$\frac{1}{j} \ln(|T_j|) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(\ln(|\beta_t|)).$$

Soit

$$|T_j|^{\frac{1}{j}} \xrightarrow{p.s.} e^{\mathbb{E}(\ln|\beta_t|)} = e^\alpha < 1.$$

A présent posons toutes les réalisations pour lesquelles la convergence est vérifiée on les note T_j^* comme $\exp \alpha < 1$ il existe alors $0 < \delta < 1$ vérifiant :

$$T_j^* < \delta^j < 1 \quad \forall j \in \mathbb{R}_\delta.$$

On en déduit que la somme $\sum_{j=0}^r |T_j^*|$ converge et par conséquent $S_r = \sum_{j=0}^r T_j$ converge presque sûrement quand $r \rightarrow \infty$

On décide de poser maintenant :

$$X_t^* = \lim_{r \rightarrow \infty} S_r,$$

$$X_t^* = \lim_{r \rightarrow \infty} (\epsilon_t + \sum_{j=1}^r T_j),$$

$$X_t^* = \epsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \beta_{t-i} \epsilon_j.$$

Ainsi nous pouvons conclure que X_t est une solution Fn mesurable pour l'équation (2.3).

De plus l'hypothèse de départ nous dit qu'on a $\{\beta_t, \epsilon_t\}$ une suite de vecteur strictement stationnaire et ergodique, en utilisant le Lemme, nous pouvons en conclure que X_t^* est strictement stationnaire et ergodique.

□

Théorème 2.2 (Dazhe Wang 2004) Soit $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre 1 défini précédemment par l'équation(2.2) et $\{\epsilon_t, \beta_t\}$ soumis aux conditions initiales.

Si les $\{\epsilon_t, \beta_t\}$ ont des distributions normales, alors une condition suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique est :

$$\ln \sigma_\beta^2 < \zeta + \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{1 - \exp -\lambda(1 - \omega^2)}{1 - \omega^2} d\omega, (2.4)$$

où $\zeta \approx 0.57721$, ζ est considéré comme la constante de Euler et $\lambda = \frac{\mu_\beta^2}{2\sigma_\beta^2}$

Démonstration. Soit les données suivantes :

- $e_t = \epsilon_t + \alpha$
- $\beta_t = \mu_\beta + \sigma_\beta w_t$ avec $w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Il est clair que $\{(\epsilon_t, \beta_t), t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite strictement stationnaire et ergodique comme démontré dans le théorème 2.1

il est important de remarquer que :

$$\mathbb{E}(\epsilon_t) < \infty \text{ et } \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) < \infty.$$

Pour pouvoir faire appel à la définition 2.2 nous devons montrer avant tout que :

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) = \mathbb{E}(\ln |\mu_\beta + \sigma_\beta w_t|) < 0.$$

On se retrouve face a deux cas, le cas ou μ_β est nul et le cas ou μ_β diffère de 0
Cas 2 : $\mu_\beta = 0$ on aura alors :

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) = \mathbb{E}(\ln |\sigma_\beta w_t|)$$

En utilisant les règles de bases logarithmiques on a :

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) = \mathbb{E}(\ln |\sigma_\beta|) + \mathbb{E}(\ln |w_t|)$$

comme w_t est une variable aléatoire donc son espérance existe et comme $\mathbb{E}(\sigma_\beta)$ est à valeur réelles donc :

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) = \ln |\sigma_\beta| + \mathbb{E}(\ln |w_t|),$$

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) = \frac{\ln |\sigma_\beta|^2}{2} + \mathbb{E}(\ln |w_t|),$$

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) = \frac{\ln |\sigma_\beta|^2}{2} - \frac{1}{2}(\zeta + \ln 2),$$

par conséquent $\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) < 0$.

Cas 2 : $\mu_{\beta_t} \neq 0$ on aura alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) &= \mathbb{E}(\ln |\mu_\beta + \sigma_\beta w_t|) \\ \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) &= \mathbb{E}(\ln (|\mu_\beta| |1 + \frac{\sigma_\beta w_t}{\mu_\beta}|)) \\ \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) &= \mathbb{E}(\ln (|\mu_\beta|)) + \mathbb{E}(\ln (|1 + \frac{\sigma_\beta w_t}{\mu_\beta}|)) \\ \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) &= \ln (|\mu_\beta|) + \mathbb{E}(\ln (|1 + \frac{\sigma_\beta w_t}{\mu_\beta}|)) \\ \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) &= \frac{1}{2} \ln (|\mu_\beta|^2) + \mathbb{E}(\ln (|1 + \frac{\sigma_\beta w_t}{\mu_\beta}|)) \\ \mathbb{E}(\ln |\beta_t|) &= \frac{1}{2} \ln (|\mu_\beta|^2) + \mathbb{E}(\ln (|1 + Z|)) \end{aligned}$$

Où $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_\beta^2}{\mu_\beta^2})$ En utilisant l'évaluation de $\mathbb{E}(|Z + 1|)$, dans [7] on obtient :

$$\mathbb{E}(\ln |\beta_t|) < 0 \iff \ln \sigma_\beta^2 < \zeta + \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{1 - \exp -\lambda(1-\omega^2)}{1-\omega^2} d\omega$$

□

2.4 SIMULATION DE LA TRAJECTOIRE D'UN RCA(1)

Nous allons utiliser le langage R pour simuler dans un premier un modèle autoregressif coefficients aléatoires d'ordre 1 soumis aux principales conditions de stationnarités citées auparavant.

Bien évidemment on se place dans les conditions les conditions de stationnarité.

```

1 #simulation d'un modele autoregressif `a coefficient aléatoire d'ordre
  1
2 RCA1=function(betat, sigmae, sigmabeta, n) {
3 #Condition de stationnarité générale:
4 if(betat^2+sigmabeta^2<1) {
5 print("condition principale de la stationnarité vérifié")}
6 else{ print("pas de stationnarité") }
7 #programme du modele autoregressif `a coefficient aléatoire d'ordre 1
8 x=rep(0, n)
9 eps=rnorm(n, 0, sigmae)
10 b=rnorm(n, betat, sigmabeta)
11 x[1]=eps[1]
12 x[2]=(b[2])*x[1]+eps[2]
13 for( i in 3:n)
14 x[i]=(b[i])*x[i-1]+eps[i]
15 return(x)
16 }

```

Après avoir émis l'ensemble des conditions de stationnarité d'un RCA(1) on se décide d'appliquer la fonction RCA1 pour générer n réalisations des données gouvernées par ce modèle ,et ceux, en variant les paramètres.

On écrit alors :

```

1 x1=RCA1(0.5, 0.2, 0.5, 1000)
2 x2=RCA1(0.25, 0.81, 0.8, 1000)
3 x3=RCA1(0.2, 0.2, 0.4, 1000)
4 x4=RCA1(0.5, 0.01, 0.95, 1000)
5 x5=RCA1(0.8, 0.9, 0.7, 1000)

```

Et on obtient :

```

> x1=RCA1(0.5,0.2,0.5)
[1] "condition principale de la stationnarité vérifié"

> x2=RCA1(0.25,0.81,0.8)
[1] "condition principale de la stationnarité vérifié"

> x3=RCA1(0.2,0.2,0.4)
[1] "condition principale de la stationnarité vérifié"

> x4=RCA1(0.5,0.01,0.95)
[1] "pas de stationnarité"

> x5=RCA1(0.8,0.9,0.7)
[1] "pas de stationnarité"

```

FIGURE 2.1 – Condition de stationnarité pour un $RCA(1)$

Si on veut simuler un $RCA_1(0.2,0.2,0.4,n=1000)$ on obtient un ensemble de données :

```

[1] -1.081414e-01 -3.104238e-01 -2.134530e-01 -1.442211e-01 -1.384866e-01
[6] -2.220333e-01 -1.735605e-01 -1.288780e-01 3.807001e-02 1.588066e-03
[11] -1.546586e-01 1.903456e-01 2.103335e-01 1.510994e-02 -4.040470e-02
[16] 2.440847e-01 3.696833e-02 -9.357146e-03 1.117992e-01 -1.208747e-01
[21] 5.777586e-05 -2.084641e-01 -5.881612e-01 -7.387044e-01 2.195448e-01
[26] 8.671758e-02 9.682384e-02 3.981837e-01 -3.851840e-01 -3.736098e-01
[31] -3.796751e-01 -9.314180e-03 8.929786e-02 -1.086355e-01 -6.770444e-01
[36] -4.456509e-01 4.410485e-03 3.091510e-02 1.966225e-01 1.039483e-01
[41] -1.848961e-01 1.291038e-01 7.184394e-02 1.057871e-01 -1.453932e-01
[46] -6.614393e-02 -2.327435e-02 1.361782e-01 -1.177428e-01 -5.072367e-02
[51] 6.237086e-01 6.497692e-01 -1.154201e-02 -2.863306e-02 4.693471e-02
[56] -5.174245e-01 -3.485231e-01 -2.881993e-01 -2.406226e-01 -2.573835e-01
[61] -3.126104e-01 8.860659e-02 1.089911e-01 5.722335e-02 2.304171e-01
[66] 1.362974e-02 1.166055e-01 -5.051151e-01 -4.317203e-01 -4.172324e-01
[71] -3.376014e-01 -5.305324e-01 -2.311192e-01 6.511000e-02 -1.750042e-01
[76] -2.758879e-02 8.968144e-03 1.236426e-01 -3.579978e-01 -1.652803e-01
[81] -2.755200e-02 -1.559738e-01 -2.625590e-01 -3.851298e-01 -3.039716e-01
[86] 9.786200e-02 1.120227e-01 2.171428e-01 1.043518e-01 2.618908e-01
[91] 1.555378e-01 1.369864e-01 -1.049666e-01 1.402619e-01 2.690366e-01
[96] 3.685488e-01 6.384640e-01 3.672327e-01 5.186850e-01 7.208204e-01
[101] 5.644167e-01 4.709407e-01 7.838348e-01 1.357893e-01 -4.076434e-01
[106] -4.536137e-01 -4.818941e-01 -4.012597e-01 -3.771006e-01 -2.272973e-01
[111] -7.359138e-02 -1.942451e-01 1.108847e-01 -4.255741e-02 1.965527e-01
[116] 1.822697e-01 1.920548e-01 2.549358e-01 2.200908e-01 8.355601e-03
[121] -2.063561e-01 9.479418e-02 -1.605848e-01 1.357218e-01 -2.088241e-01
[126] -9.091597e-01 -1.282542e-01 -2.045252e-01 1.376157e-01 -2.562590e-01
[131] -1.499084e-01 1.623666e-01 2.503271e-01 3.893156e-01 6.284300e-01
[136] 2.577344e-01 -1.204931e-01 -3.067591e-01 -9.710750e-02 -4.548251e-02
[141] -3.238796e-01 2.228421e-01 -5.547480e-02 1.058420e-01 3.732301e-01
[146] 4.118679e-01 -2.085347e-01 -2.698309e-01 -1.361729e-01 -1.325591e-01
[151] -9.810010e-02 -1.178902e-01 -1.623382e-01 -1.113798e-01 8.996697e-03
[156] -1.798269e-01 -7.981343e-02 2.029299e-01 1.559043e-01 3.887927e-01
[161] 2.885335e-01 1.355941e-01 -1.085049e-01 -7.708935e-02 -2.477600e-01

```

FIGURE 2.2 – Simulation d'un $RCA(1)$ $\sigma_\epsilon^2 = 0.2, \mu_\beta = 0.2, \sigma_\beta^2 = 0.4$

Dans cette troisième partie d'étude nous allons utiliser une fonction permettant de regrouper le graphe du nuage de point de x_3 , d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle de x_3

```

1 par(mfrow=c(3,1))
2 plot(x3) #graphe de nuages de points
3 acf(x3) #fonction d'autocorrélation
4 pacf(x3) #fonction d'autocorrélation partielle
    
```

Ceci nous permettra d'obtenir l'ensemble de ces graphes :

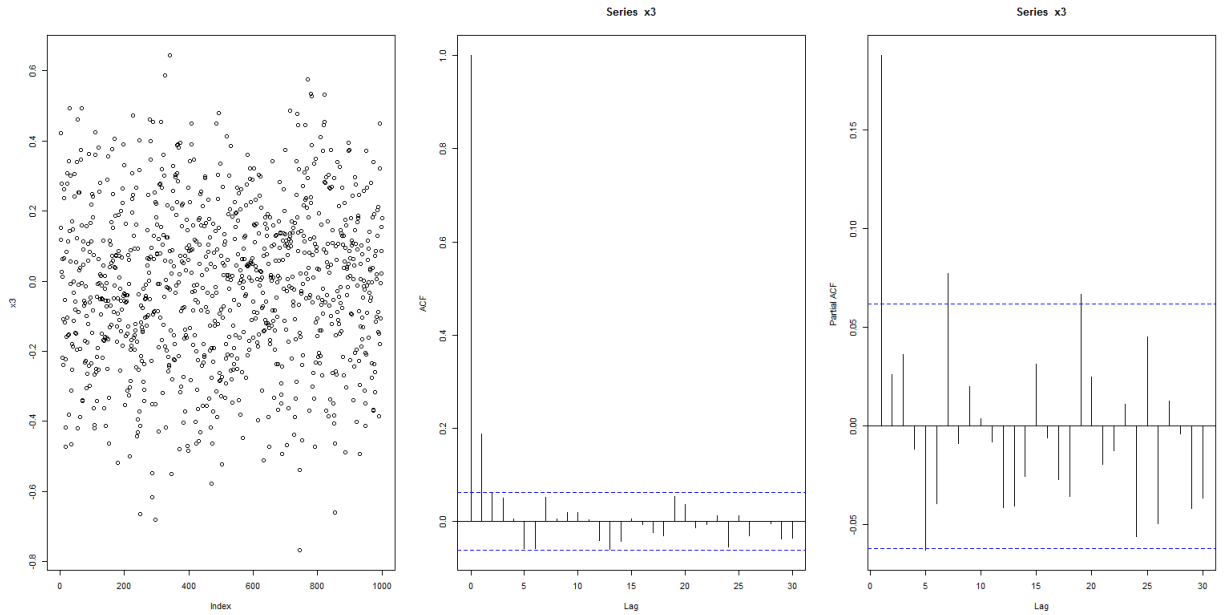


FIGURE 2.3 – Nuages de points, ACF, PACF d'un RCA(1)

Nous allons à présent prendre un exemple de $RCA(1)$ qui se rapproche le plus de la non stationnarité, on remarque que l'étude de la fonction d'auto-corrélation montre que les points s'éteignent lentement ce qui est vrai car la condition de stationnarité est proche de l'unité

```
1 x6=RCA1(0.85,0.9,0.45)  
2 acf(x6)
```

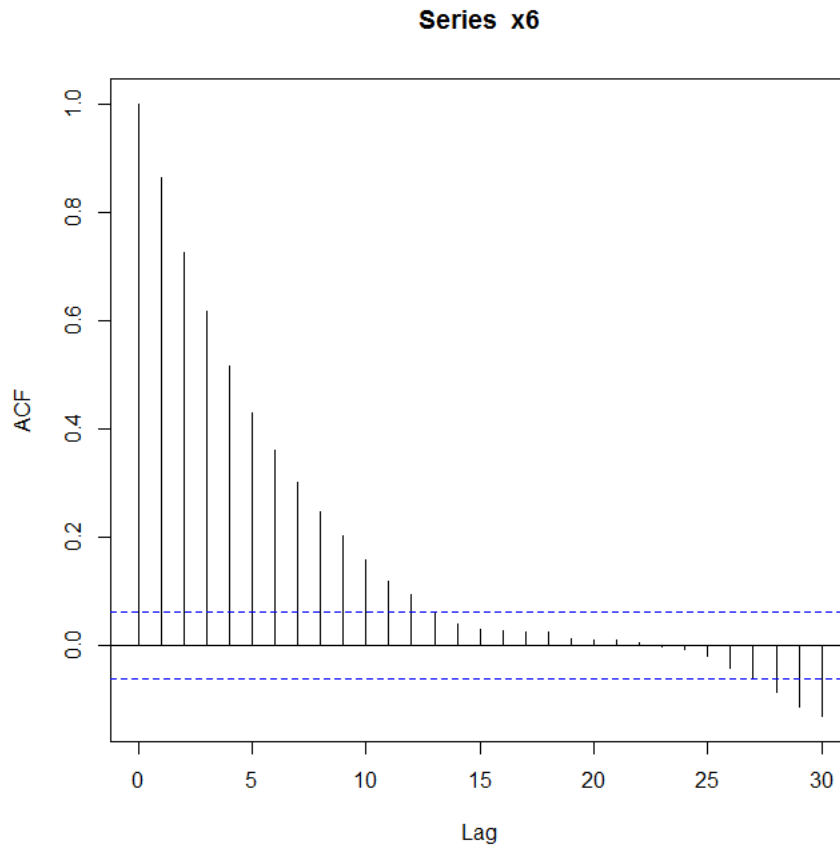


FIGURE 2.4 – ACF d'un $RCA(1)$ se rapprochant le plus de la non stationnarité

Une comparaison des différentes séries temporelles suivant la variation des paramètres du modèle RCA(1); nous allons alors modéliser 5 graphes on écrit alors $RCA_1 = (\beta_t, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\beta^2)$

et on aura :

$$x_1 = RCA_1(\beta_t = 0.5, \sigma_\varepsilon^2 = 0.2, \sigma_\beta^2 = 0.5)$$

$$x_2 = RCA_1(\beta_t = 0.25, \sigma_\varepsilon^2 = 0.8, \sigma_\beta^2 = 0.81)$$

$$x_3 = RCA_1(\beta_t = 0.2, \sigma_\varepsilon^2 = 0.2, \sigma_\beta^2 = 0.4)$$

$$x_4 = RCA_1(\beta_t = 0.5, \sigma_\varepsilon^2 = 0.01, \sigma_\beta^2 = 0.95)$$

$$x_5 = RCA_1(\beta_t = 0.8, \sigma_\varepsilon^2 = 0.9, \sigma_\beta^2 = 0.7)$$

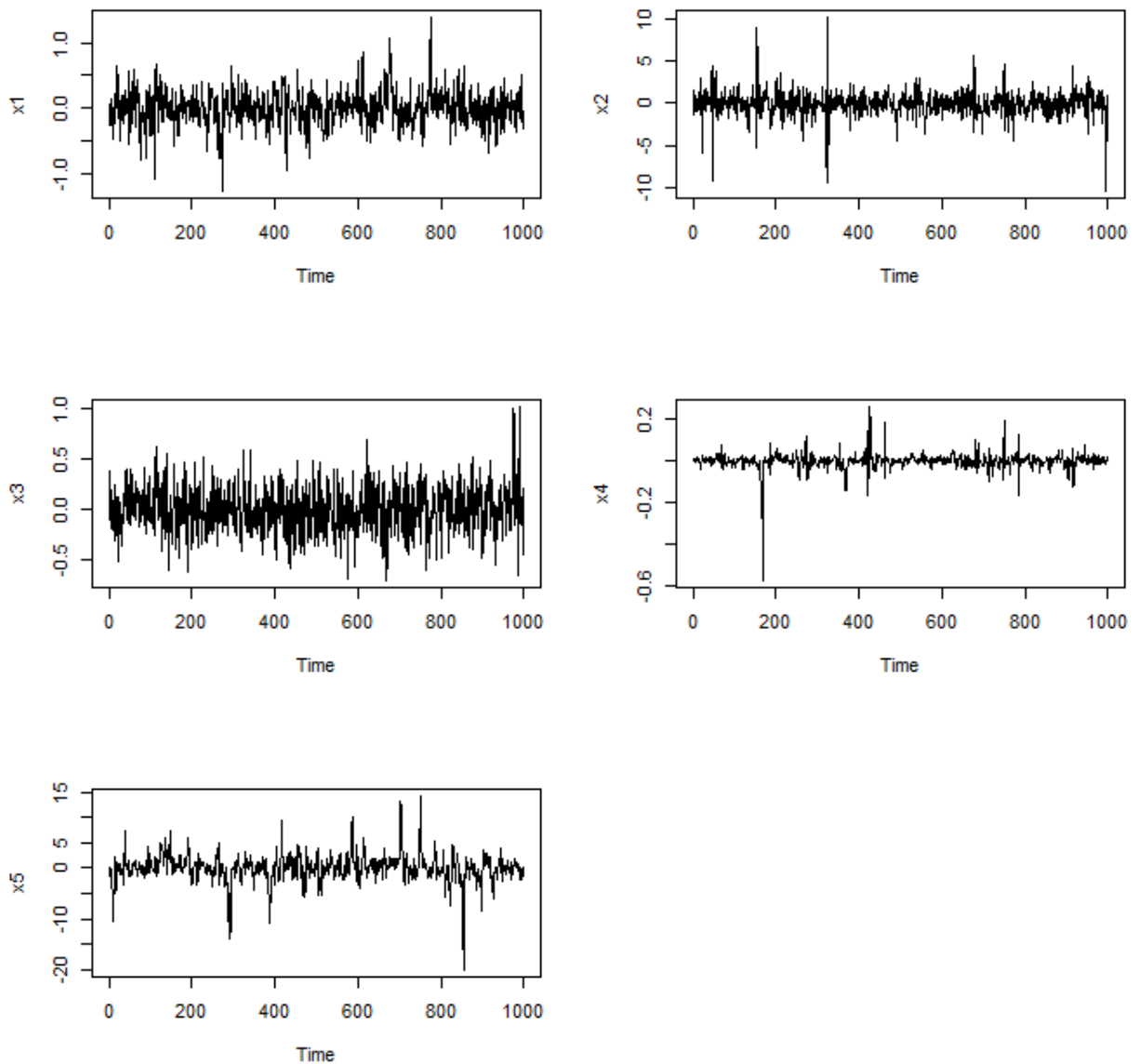


FIGURE 2.5 – Exemple de série stationnaire et non stationnaire témoignant la variation des différents paramètres d'un RCA(1)

2.5 SIMULATION D'UN RCA(2)

```

1 RCA2=function(phi1,phi2,meanbetat,sigmaeps,sigmabetat,n){
2 x=rep(0,n)
3
4 eps=rnorm(n,0,sigmaeps)
5 b=rnorm(n,meanbetat,sigmabetat)
6 for( i in 3:n)
7 x[i]=(phi1+b[i])*x[i-1]+ (phi2+b[i])*x[i-2]+eps[i]
8 print(x)
9 }
10
11 X1=RCA2(phi1=0.2, phi2=0.4,meanbetat=0,sigmaeps=1,sigmabetat=1,n=1200)
12 plot.ts(X1)
13 X=RCA2(phi1=0.2, phi2=0.4,meanbetat=0.12,sigmaeps=0.84,sigmabetat=0.8,
14         n=1200)
15 X2=RCA2(phi1=0.2, phi2=0.4,meanbetat=0,sigmaeps=1,sigmabetat=1,n=1200)
16 par(mfrow=c(2,1))
17 plot.ts(X2)
18 plot.ts(X)

```

Ces deux programmes informatique nous permet de générer les trajectoires d'un RCA(2) et un RCA(p), en faisant varier les paramètres, on obtient les deux graphes de séries temporelles suivant :

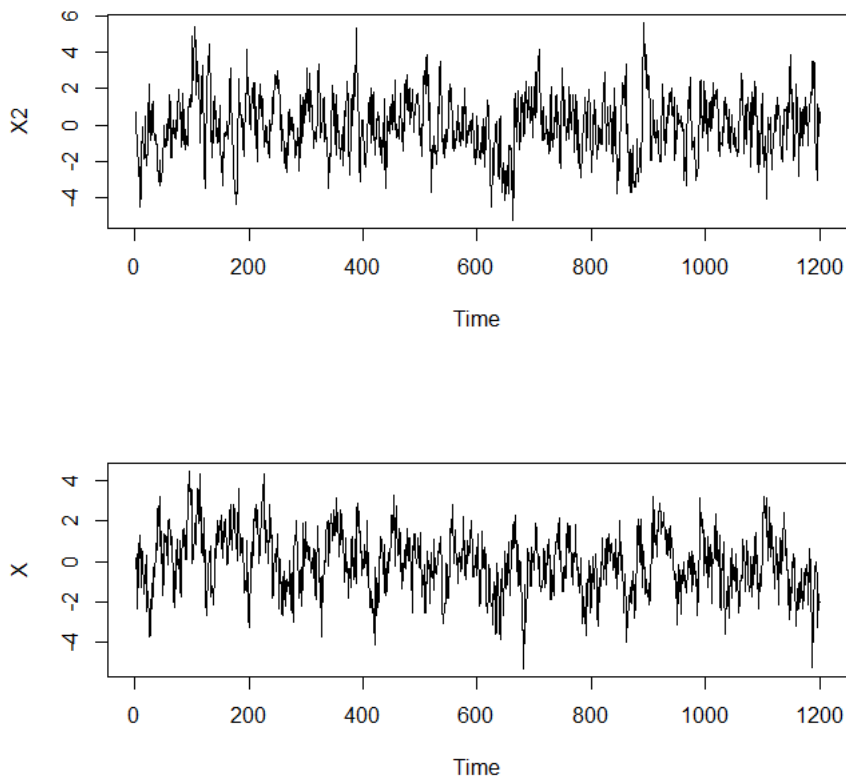


FIGURE 2.6 – Simulation d'un RCA(2)

2.6 SIMULATION DES TRAJECTOIRES D'UN MODÈLE RCA(P)

```

1 RCAP=function(p,meanbetat=0,sigmaeps=1,sigmabetat=1,n){
2 x=rep(0,n)
3 phi=runif(p,0,1)
4 eps=rnorm(n,0,sigmaeps)
5 b=rnorm(n,meanbetat,sigmabetat)
6 for( i in p+1:n){
7 for(j in 1:p){
8 x[i]=(phi[j]+b[i])*x[i-1]+eps[i]
9 }
10 }
11 print(x)
12 }
13 t1=RCAP(2,meanbetat=0,sigmaeps=1,sigmabetat=1,n=150)
14 plot.ts(t1)

```

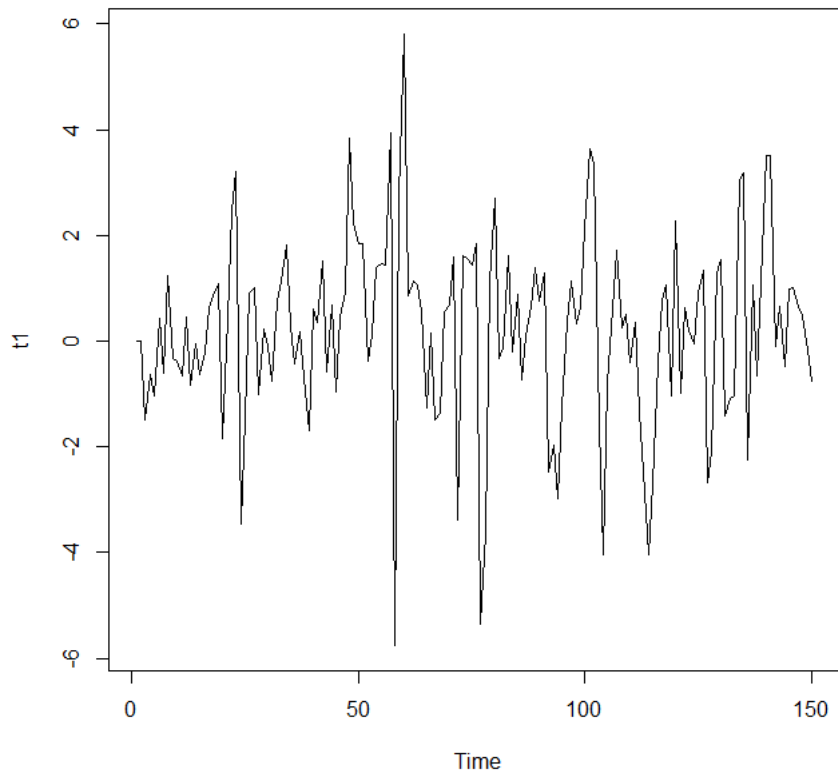


FIGURE 2.7 – Simulation d'un RCA(p) pour le cas où $p=2$ et ϕ prenant des valeurs strictement inférieures à 1

ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MODÈLE RCA(1)

3

3.1 INTRODUCTION

L'objectif de ce troisième chapitre est d'aborder les principales méthodes d'estimations d'un modèle autoregressif à coefficient aléatoire, notamment l'estimation par la méthode des moindres carrés et le maximum de vraisemblance. L'accent est mis sur la consistance et la normalité de ces estimateurs. Nous considérons le cas particulier d'un RCA(1).

$$X_t = (\phi_1 + \beta_t)X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (3.1)$$

- $\{\beta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de variable aléatoire indépendantes identiquement distribuées de moyenne μ_β et de variance σ_β^2 .
- $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de variable aléatoire indépendantes identiquement distribuées de moyenne 0 et de variance σ_ϵ^2 .

3.2 ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN RCA(1) PAR LES MOINDRES CARRÉS

D Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ la tribu engendrée par les observations du processus jusqu'à l'instant t , on a :

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}((\beta_t + \phi_1)X_{t-1} + \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}).$$

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}((\beta_t + \phi_1)X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}). \quad (3.2)$$

Comme β_t et ϵ_t sont indépendantes de \mathcal{F}_{t-1} et X_{t-1} est \mathcal{F}_{t-1} mesurable : D'autre part on sait que :

- $\mathbb{E}(X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}$.
- $\mathbb{E}(\beta_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$.
- $\mathbb{E}(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$.

En remplaçant dans (3.2) on peut déduire que

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \phi_1 X_{t-1}.$$

En développant cette expression on aura :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \beta_t X_{t-1} + \epsilon_t.$$

En posant $w_t = \beta_t X_{t-1} + \epsilon_t$.

Soit $w_t = X_t - \phi_1 X_{t-1}$, on pourra écrire :

$$\mathbb{E}(w_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t - \phi_1 X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})$$

$$\mathbb{E}(w_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(\phi_1 X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})$$

$$\mathbb{E}(w_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Ainsi de la même manière nous pouvons écrire que :

$$\mathbb{E}(w_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}((X_t - \phi_1 X_{t-1})^2 | \mathcal{F}_{t-1}),$$

$$\mathbb{E}(w_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t^2 - 2\phi_1 X_t X_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}),$$

$$\mathbb{E}(w_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - 2\phi_1 \mathbb{E}(X_t X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) + \mathbb{E}(\phi_1^2 X_{t-1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}),$$

car :

$$\mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}((\beta_t + \phi_1)^2 X_{t-1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - 2\mathbb{E}(\epsilon_t(\beta_t + \phi_1) X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}).$$

comme on a :

$$\mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}^2 \phi_1^2 + X_{t-1}^2 \mathbb{E}(\beta_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}).$$

$$\mathbb{E}(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}^2 (\sigma_\beta^2 + \phi_1^2) + \sigma_\epsilon^2.$$

Ainsi on peut conclure que :

$$\mathbb{E}(w_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}^2 (\sigma_\beta^2 + \phi_1^2) + \sigma_\epsilon^2 + \phi_1^2 X_{t-1}^2 - 2\phi_1^2 X_{t-1}^2.$$

$$\mathbb{E}(w_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2.$$

En considérant un échantillon (X_0, X_1, \dots, X_n) , nous estimons $\hat{\phi}_1$ en minimisant $\sum_{t=1}^n w_t^2$ par rapport à ϕ_1 ,

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n w_t^2}{\partial \phi_1} = \frac{\partial \sum_{t=1}^n (X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{\partial \phi_1}.$$

Nous commençons par développer le terme de droite à fin de pouvoir dériver en fonction de ϕ_1 :

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n w_t^2}{\partial \phi_1} = \frac{\partial (\sum_{t=1}^n X_t^2 - 2\phi_1 \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t + \phi_1^2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2)}{\partial \phi_1}.$$

En dérivant en fonction de ϕ_1 on a :

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n w_t^2}{\partial \phi_1} = \sum_{t=1}^n (-2X_{t-1} X_t + 2\phi_1 X_{t-1}^2).$$

Ce qui est intéressant de faire est de pouvoir estimer $\hat{\phi}_1$, on dérive alors une seconde fois on remarque que :

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n w_t^2}{\partial \phi_1} = \sum_{t=1}^n (-2X_{t-1}X_t + 2\phi_1 X_{t-1}^2).$$

$$\frac{\partial^2 \sum_{t=1}^n w_t^2}{\partial^2 \phi_1} = 2 \sum_{t=1}^n (X_{t-1}^2) > 0.$$

Comme les conditions nécessaires sont vérifiées et que la seconde dérivée est strictement positive, on peut alors écrire :

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n w_t^2}{\partial \phi_1} = 0.$$

Ceci est équivalent à dire que :

$$\sum_{t=1}^n (-2X_{t-1}X_t + 2\hat{\phi}_1 X_{t-1}^2) = 0.$$

On en déduit ainsi de la même manière :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

La deuxième étape de l'estimation des moindres carrés consiste à former le résidu \hat{w}_t à partir de l'estimateur $\hat{\phi}_1$, et ainsi de pouvoir minimiser par rapport σ_ϵ^2 et σ_β^2 .

$$\hat{w}_t = X_t - \hat{\phi}_1 X_{t-1},$$

$$\mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2) = \sum_{t=1}^n (\hat{w}_t^2 - (\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2))^2.$$

En dérivant par rapport à ces deux paramètres on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial \sigma_\beta^2} = \frac{\partial \sum_{t=1}^n (\hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2)^2}{\partial \sigma_\beta^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial \sigma_\beta^2} = -2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 (\hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2),$$

On voit de la même manière que la seconde dérivée est strictement positive :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial^2 \sigma_\beta^2} = \frac{\partial(-2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 (\hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2))}{\partial \sigma_\beta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial^2 \sigma_\beta^2} = 2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^4 > 0.$$

Il y'a lieu de résoudre :

$$\frac{\partial \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial \sigma_\beta^2} = 0,$$

$$-2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 (\hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \hat{\sigma}_\beta^2 X_{t-1}^2) = 0.$$

On peut en déduire que :

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^4}.$$

A présent nous estimons $\hat{\sigma}_\epsilon$ de la même manière :

$$\frac{\partial \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial \sigma_\epsilon^2} = \frac{\partial \sum_{t=1}^n (\hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2)^2}{\partial \sigma_\epsilon^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{l}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\beta^2)}{\partial \sigma_\epsilon^2} = -2 \sum_{t=1}^n (\hat{w}_t^2 - \sigma_\epsilon^2 - \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2) = 0,$$

$$n \hat{\sigma}_\epsilon^2 = \sum_{t=1}^n (\hat{w}_t^2 - \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2).$$

Ainsi nous pouvons conclure que :

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{w}_t^2 - \hat{\sigma}_\beta^2 X_{t-1}^2)}{n}.$$

3.2.1 Consistance et Normalité asymptotique de l'estimateur par la méthode des moindres carrés

(Nicholls, D.F. and Quinn, B.G 1981)[8] On cherche à déterminer la loi asymptotique de $\hat{\phi}_1$. La première étape consiste à voir que l'estimateur $\hat{\phi}_1$ est consistant et que l'on a :

$$\hat{\phi}_1 \xrightarrow{p.s} \frac{\gamma(0)}{\gamma(1)} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Avec :

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{(1 - \phi_1 - \sigma_\beta^2)} \quad \text{et} \quad \gamma(h) = \phi_1^h \gamma(0) \quad \forall h \in \{0, 1, \dots, h\}.$$

Afin de pouvoir déterminer la loi asymptotique de $\hat{\mu}_\beta$ certaines conditions doivent immédiatement être appliquées notamment :

- ϵ_t et β_t sont des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- $\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$.

Ce qui prouve que le processus X_t est markovien.

Pour pouvoir montrer que $\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$ on doit vérifier que $\mathbb{E}(\beta_t^4) < 1$.

Théorème 3.1 (Nicholls, D.F. and Quinn, B.G 1981) *Sous les conditions établies précédemment nous avons :*

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_1 - \phi_1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v^2),$$

avec :

$$v^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2 \mathbb{E}(X_0^2) + 2\sigma_{\epsilon\beta}^2 \mathbb{E}(X_0^3) + \sigma_\beta^2 \mathbb{E}(X_0^4)}{\gamma(0)^2}.$$

3.3 ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN RCA(1) PAR LE MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Pour pouvoir faire une estimation du maximum de vraisemblance sur un modèle autoregressif à coefficient aléatoire d'ordre 1. On considère alors $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ strictement ergodique et stationnaire et \mathcal{F}_t mesurable avec :

$$X_t = (\phi_1 + \beta_t)X_{t-1} + \epsilon_t.$$

satisfaisant certaines conditions :

- $\{(\phi_1, \sigma_\beta^2) \in \mathcal{D}\}$ où \mathcal{D} est un ensemble fermé contenu dans la région de stationnarité strict et l'ergodicité donnée par l'inégalité :
 $\sigma_\beta^2 < \zeta + \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{1 - \exp(-\theta(1-\omega^2))}{1-\omega^2} d\omega$.
- $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\beta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont des suites de variables aléatoires indépendantes de paramètres respectives : $(0, \sigma_\epsilon^2)$ et $(0, \sigma_\beta^2)$.

Les principales propriétés de l'espérance conditionnelle nous permettent d'écrire :

$$\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}) = \mathbb{E}((\beta_t + \phi_1)X_{t-1} | X_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t | X_{t-1}) = \phi_1 X_{t-1}.$$

L'application de ses propriétés à la variance nous permet d'écrire :

$$\mathbb{V}(X_t | X_{t-1}) = \mathbb{V}((\beta_t + \phi_1)X_{t-1} | X_{t-1}) + \mathbb{V}(\epsilon_t | X_{t-1}) = \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\epsilon^2.$$

Nous fixons X_0 et nous dérivons la fonction de vraisemblance en supposant la normalité de ϵ_t et β_t . On pourra écrire la fonction de vraisemblance conditionnel par rapport à X_0 :

$$f_n(X_1, X_2, \dots, X_n | X_0) = \prod_{t=1}^n f(X_t | X_{t-1}).$$

$$f_n(X_1, X_2, \dots, X_n | X_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{2(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2)}\right)$$

$$\cdot f_n(X_1, X_2, \dots, X_n | X_0) = L(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2).$$

On considère une nouvelle fonction L prenant comme paramètres $(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2)$ pour faciliter la notation.

On se décide maintenant de prendre le logarithme de la fonction $L(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2)$ on notera cette fonction \bar{l} car c'est plus facile de minimiser cette fonction que de maximiser L .

On aura alors :

$$\bar{l}(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2) = -\frac{2}{n} \ln(L(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2)) - \ln(2\pi),$$

$$\bar{l}(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2) = -\frac{2}{n} \ln\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{2(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2)}\right)\right] - \ln(2\pi),$$

$$\bar{l}(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2) = -\frac{2}{n} \left(-\frac{n}{2} \ln 2\pi + \ln\left(\prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2}\right)^2\right) + \ln\left(\exp\left(-\frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{2(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2)}\right)\right) - \ln(2\pi)\right),$$

$$\bar{l}(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\beta^2 X_{t-1}^2)}.$$

On se décide de minimiser maintenant la fonction $\bar{l}(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2)$; pour que rien ne porte à confusion et comme on va dériver cette fonction par rapport aux paramètre ϕ_1 et on se décide de poser $\tau = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\epsilon^2}$.

On a alors :

$$\bar{l}(\sigma_\epsilon^2, \phi_1, \sigma_\beta^2) = g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2).$$

Avec :

$$g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2) = \ln(\sigma_\epsilon^2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau X_{t-1}^2) + \frac{1}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)}.$$

En dérivant la fonction $g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)$ en fonction de ϕ_1 on obtient :

$$\frac{\partial g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)}{\partial \phi_1} = -\frac{2}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{X_{t-1}(X_t - \phi_1 X_{t-1})}{(1 + \tau X_{t-1}^2)}.$$

Notre objectif désormais est de pouvoir résoudre cette équation(3.3) et pouvoir porter une estimation au paramètre ϕ_1

$$\frac{\partial g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)}{\partial \phi_1} = 0. \quad (3.3)$$

On commence par résoudre (3.3) et essayer de trouver l'estimateur $\hat{\phi}_1$ on écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)}{\partial \phi_1} &= 0, \\ \frac{2}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t X_{t-1})}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} &= \frac{2}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{\phi_1 X_{t-1}^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)}. \end{aligned}$$

On peut ainsi déduire que :

$$\hat{\phi}_1 = \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t X_{t-1})}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} \right] \cdot n \sum_{t=1}^n \left(\frac{X_{t-1}^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} \right)^{-1}$$

Ainsi nous avons aboutit à une estimation du paramètre $\hat{\phi}_1$.
L'estimation du maximum de vraisemblance permet de porter une estimation sur l'ensemble des paramètres. $(\hat{\phi}_1, \hat{\sigma}_\beta^2, \hat{\sigma}_\epsilon^2)$.

On a alors d'une façon similaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)}{\partial \sigma_\epsilon^2} &= 0 \quad (3.4) \\ \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} + 0 - \frac{1}{n(\sigma_\epsilon^2)^2} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} &= 0 \\ \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \left(1 - \frac{1}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

on en déduit donc :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)}\right) &= 0 \\ \frac{1}{n\sigma_\epsilon^2} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} &= 1 \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)} &= \hat{\sigma}_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

On considère à présent la fonction $\bar{g}(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)$ tel que :

$$\bar{g}(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2) = \inf_{\sigma_\epsilon^2} g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2) - 1$$

En minimisant la fonction et en remplaçant σ_ϵ^2 par ce que l'on a trouvé dans (3.5) on a alors : $g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)$

$$\inf_{\sigma_\epsilon^2} g(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2) = \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)}\right) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau X_{t-1}^2) + 1$$

Et donc on peut réécrire $\bar{g}(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2)$:

$$\bar{g}(\phi_1, \tau, \sigma_\epsilon^2) = \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(X_t - \phi_1 X_{t-1})^2}{(1 + \tau X_{t-1}^2)}\right) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(1 + \tau X_{t-1}^2)$$

De la même manière $\hat{\tau}$ est obtenu en minimisant $\bar{g}(\hat{\phi}_1, \tau, \hat{\sigma}_\epsilon^2)$ par rapport τ et enfin on pourra déduire $\hat{\sigma}_\beta^2 = \hat{\sigma}_\epsilon^2 \hat{\tau}$

3.3.1 Consistance et Normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ une solution de (2.1) telle que $\mathbb{E}(|\phi + \beta_1|) < \infty$, alors l'estimateur du maximum de vraisemblance qu'on notera $\hat{\phi}_{mv} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} \phi$ est faiblement consistant pour θ .

A présent, nous présentons un autre résultat de (Aue et Horvath 2011) [5] qui établit la normalité asymptotique de $\hat{\phi}_{mv}$. Nous commençons d'abord par la première composante $\hat{\phi}_{mv,1}$

Théorème 3.2 (Aue et Horvath 2011) Soit X_t une solution de (2.1) telle que $\mathbb{E}(\log^+|\phi + \beta_1|) < \infty$ alors :

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_{mv,1} - \phi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2),$$

où :

$$\theta^2 = \begin{cases} \sigma_\beta^2 & \text{si } \mathbb{E}(\log|\phi + \beta_1|) \geq 0 \\ \frac{4}{\alpha^2(2,1)} [\sigma_\beta^2 \alpha(4,2) + \sigma_\epsilon^2 \alpha(2,2)] & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec :

$$\alpha(k, N) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1^k}{(\sigma_\beta^2 X_1^2 + \sigma_\epsilon^2)^N}\right) \text{ avec } k = 0, 1, 2, \dots, 2N \text{ et } N \in \mathbb{N}$$

A partir du théorème (3.2) il peut être remarqué que la normalité asymptotique $\hat{\theta}_{mv,1} - \phi$ est valable sans aucune restriction sur la stationnarité du modèle (2.1).

On remarque aussi que la variance asymptotique θ^2 est différente dans le cas stationnaire et non stationnaire.

Ainsi [AUE et HORVATH] ont proposé l'estimateur de $\hat{\theta}^2$ de θ^2 qui fonctionne dans le cas stationnaire et non stationnaire

$$\hat{\alpha}(k, N) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{X_t^k}{(\hat{\phi}_{mv,2} X_t^2 + \hat{\phi}_{mv,3})^N}$$

Si toutes les conditions présentées dans le théorème précédent sont vérifiées alors nous pouvons conclure que :

$$\sqrt{n} \left(\frac{\hat{\phi}_{mv,1} - \phi}{\hat{\theta}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

3.4 PROGRAMMATION DES MÉTHODES D'ESTIMATION SOUS LE LANGAGE R

Après avoir aboutit à des résultats sur le plan théorique en estimant les différents paramètres d'un RCA(1) par la méthode des moindres carrés on se décide de modéliser cela d'un point de vue informatique on a alors :

```

1 Estimationmc2<-function(x){ # estimation par les MCO
2 n=length(x)
3 z=rep(0,n-1)
4 y=x[2:n]
5 y1=x[1:n-1];y1
6 z=(y1)^2;z
7 phimc=sum(y*y1)/sum(z)
8 sigmabetamc=sum(y1^2*((y1-phimc*y)^2-sigmaepsilonmc))/(sum(z^2))
9 sigmaepsilonmc=sum((y-phimc*y1)^2-sigmabetamc*z)/n
10 return(f=list(phimc=phimc,sigmabetamc=sigmabetamc,sigmaepsilonmc=
11 sigmaepsilonmc))
12 }
13 sigmaepsilonmc=0.5
14 Estimationmc2(RCA1(0.25,0.81,0.8,1000))

```

On remarque qu'avec un petit exemple d'application aléatoire on aboutit à des résultats. A présent nous allons passer à une autre méthode d'estimation d'un

```

$phimc
[1] 0.1984213

$sigmabetamc
[1] 0.9388387

$sigmaepsilonmc
[1] 0.83798858

```

FIGURE 3.1 – Estimation par la méthode des moindres carrés

RCA(1) notamment l'estimation des paramètres par le maximum de vraisemblance :

```

1 Estimationmvr<-function(x){
2 n=length(x)
3 muepsilonmvr=rep(0,n)
4 z=rep(0,n-1)
5 y=x[2:n]
6 {
7 y1=x[1:(n-1)];y1
8 z=(y1)^2;z
9 phimvr=sum((y*y1)/(1+tau*z))/sum(z/(1+tau*z))
10 sigmaepsilonmvr=(1/n)* (sum((y-phimvr*y1)^2)/(sum(1+tau*z)))
11 sigmabetamvr=(-sum(((y-phimvr*y1)^2)*z)+sigmaepsilonmvr*sum(z))/(sum(z^2))
12 return(f=list(phimvr=phimvr,sigmaepsilonmvr=sigmaepsilonmvr,
13 sigmabetamvr=sigmabetamvr))
14 }
15 }
16 tau=0.98
17 Estimationmvr(c(0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.8))
18 Estimationmvr(RCA1(0.25,0.81,0.8,1000))

```

Dans ce cas on a fixé $\tau=0.98$ car $\tau = \frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_\epsilon^2}$ Pour pouvoir aboutir à des résultats de ces estimations il faut fixer deux paramètres dans notre programme notamment $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ et $\hat{\sigma}_\beta^2$

```
$phimvr
[1] 0.6561434

$sigmaepsilonmvr
[1] 0.0006714636

$sigmabetamvr
[1] -0.4085748
```

FIGURE 3.2 – Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

A présent comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous allons mettre avant un critère de comparaison des paramètres des deux estimateurs.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)$$

```
1 MSE=function(phi,meanbetat,sigmabetat,sigmaepsilon,n){
2
3 MSEphiMc=((phi-(Estimationmc2(RCA1(meanbetat,sigmabetat,sigmaepsilon,n
4 ))$phimc))^2)/n ;
5 MSEsigmaepsilonMc=((sigmaepsilon-(Estimationmc2(RCA1(meanbetat,
6 sigmabetat,sigmaepsilon,n))$sigmaepsilonmc))^2)/n ;
7 MSEsigmaepsilonmvr=((sigmaepsilon-(Estimationmvr(RCA1(meanbetat,
8 sigmabetat,sigmaepsilon,n))$sigmaepsilonmvr))^2)/n ;
9 MSEsigmabetamc=((sigmabetat-(Estimationmc2(RCA1(meanbetat,sigmabetat,
10 sigmaepsilon,n))$sigmabetamc))^2)/n ;
11 MSEsigmabetamvr=((sigmabetat-(Estimationmvr(RCA1(meanbetat,sigmabetat,
12 sigmaepsilon,n))$sigmabetamvr))^2)/n ;
13
14 print(return(f=list(MSEphiMc=MSEphiMc,MSEphimvr=MSEphimvr,
15 MSEsigmaepsilonmvr=MSEsigmaepsilonmvr,MSEsigmaepsilonMc=
16 MSEsigmaepsilonMc,MSEsigmabetamvr=MSEsigmabetamvr,MSEsigmabetamc=
17 MSEsigmabetamc)))
18 }
```

Il faut maintenant réaliser un tableau significative de comparaison du MSE des différentes méthodes et faire varier le n.

Nous avons choisi plusieurs valeurs de ϕ, σ_{β}^2 et σ_{ϵ}^2 , tout en s'assurant que la condition de stationnarité est vérifié.

Les valeurs reportées sur le tableau pour chaque n, correspondent aux moyennes.

TABLE 3.1 – Étude comparative de l'estimation des paramètres avec le critère MSE

variation n	MSE par les moindres carrés	MSE par le maximum de vraisemblance
n	MSE($\hat{\phi}_{mc}$) MSE($\hat{\sigma}_{\beta,mc}^2$) MSE($\hat{\sigma}_{\varepsilon,mc}^2$)	MSE($\hat{\phi}_{mvr}$) MSE($\hat{\sigma}_{\beta,mvr}^2$) MSE($\hat{\sigma}_{\varepsilon,mvr}^2$)
n=500	0.0871 0.0381 0.072	0.017 0.027 0.049
n=600	0.0642 0.0302 0.071	0.0110 0.0214 0.00410
n=800	0.0610 0.0266 0.043	0.0094 0.0193 0.0372
n=1000	0.0531 0.0189 0.039	0.0072 0.0102 0.0241
n=1500	0.0284 0.0102 0.0107	0.0019 0.0098 0.0093

Conclusion de la simulation. Il ressort clairement du tableau de simulation que :

- L'estimation de la méthode du maximum de vraisemblance est plus performant que le l'estimation par la méthode des moindres carrés par rapport au critère MSE.
- En effet, les valeurs du MSE du Maximum de vraisemblance sont plus petite que celle des moindres carrés, et cela apparaît fortement lorsque la taille de l'échantillon augmente pour les trois estimateurs.
- Bien évidemment on constate que le MSE des trois paramètres pour les deux méthodes est une fonction décroissante de n (c'est à dire plus la taille de l'échantillon augmente plus le MSE diminue).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au cours de ce mémoire, nous avons développé l'idée de pouvoir estimer un modèle autoregressif aléatoire à coefficient aléatoire. Pour se faire, nous avons commencé dans le premier chapitre par rappeler les principales définitions et pré-requis nécessaires des séries temporelles, notamment la notion de stationnarité, l'autocovariance, l'autocorrélation tout en accompagnant par des codes R qui permettent la manipulation des différents packages une partie et pour clore ce premier chapitre nous avons fait un rappel des modèles les plus utilisés et rencontrés.

Dans le second chapitre, nous avons défini un processus autoregressif à coefficient aléatoire, et nous avons consacré notre études aux particularités du modèle $RCA(1)$, en mettant en avant les conditions nécessaires à la stationnarité. Le travail de ce chapitre s'est soldé par une simulation directe des trajectoire d'un $RCA(1)$, $RCA(2)$ et d'un $RCA(p)$ suivant la variation des paramètres, en affichant la variation des trajectoire en fonction des paramètres ou encore ACF ou la PACF.

Le troisième chapitre met l'accent sur l'estimation des paramètres d'un $RCA(1)$, en appliquant les 2 méthodes les plus utilisées et les plus connues; l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance notée (EMV), et, l'estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés noté (EMC).

Nous avons donc implémentée cette dernière sur le logiciel R afin d'évaluer les performances des estimateurs obtenus sur des échantillons de taille finis. Une étude comparative des performances des estimateurs par simulation est effectué en prenant comme critère de comparaison l'erreur quadratique moyenne. Comme perspectives futures et dans la continuité directe de notre travail de mémoire :

- Nous pouvons notamment tenter d'estimer des paramètres des modèles spatiaux autoregressifs à coefficient aléatoire.
- Envisager un autre critère de comparaison lorsque les moments n'existe pas(critère de proximité de Pitman . . .)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.Y. Hwang and I.V. Basawa,. Explosive random coefficient AR(1) processes and related asymptotics for least squares estimation. *Journal of Time Series Analysis*, 26, pages 807-824, 2005.
- [2] Patrick Billingsley. The lindeberg-levy theorem for martingales. *Proceedings of the American mathematical Society*, 12(5), pages 788-792,1961.
- [3] D.F. Nicholls and B.G. Quinn. *Random Coefficient Autoregressive Models : An introduction*, volume 11. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] Dazhe Wang.Frequentist and bayesian analysis of random coefficient autoregressif models.2004.
- [5] A. Aue and L. Horvath. Quasi-likelihood estimation in stationary and non stationary autoregressive models with random coefficients. *Statistica Sinica*, pages 973-999, 2011.
- [6] Hwang, S.Y, and Basawa, I.v. : Asymptotic inference for a gene-ralized first order random coefficient autoregressive process. 1993.
- [7] Quinn, B.G. : A note on the existence of strictly stationary so-lutions to bilinear equations. *Journal of Time Series Analysis*, 3(4), pages 249-252, 1982.
- [8] Nicholls, D.F. and Quinn, B.G : The estimation of random coefficient autoregressive models. II. *Journal of time series analysis*, 2, pages 185-203. 1981
- [9] Engle, R.F : Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, pages 987-1007.1982.
- [10] Brockwell, P. J. Davis, R. A : *Introduction to time series and forecasting*, New York, NY : Springer New York,(Eds.), 2002.
- [11] Brockwell, P. J., Davis, R. A : *Time series : theory and methods*, Springer science business media, 2009.

Résumé

Nous nous proposons d'étudier les propriétés statistique des estimateurs (Maximum de Vraisemblance, Moindres Carrés, ...) des paramètres du modèle autoregressifs à coefficients aléatoires, et ce, en distinguant le cas stationnaire du non stationnaire.

Sous certaines conditions, qui sont considérées minimales, il sera question de démontrer la consistance et la normalité asymptotique de ces estimateurs. Le bien fondé de la théorie sera complété par une étude de simulation afin de mettre en évidence les caractéristiques de ces estimateurs.

Abstract

We propose to study the statistical properties of the estimators (Maximum Likelihood, GMM, ...) of the parameters of the autoregressive model with random coefficients, and this, by distinguishing the stationary case from the non-stationary one.

Under certain conditions, which are considered minimal, it will be a question of dismantling the consistency and the asymptotic normality of these estimators. The validity of the theory will be supplemented by a simulation study in order to highlight the characteristics of these estimators.