

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MASTER ACADEMIQUE EN GENIE MECANIQUE
OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

THEME :
ETUDE THEORIQUE DES STRATIFIES ET PRISE EN
COMPTE DU CISAILLEMENT TRANSVERSE

Présenté par :

Mr. MEZICHE Massin

Mr. NAIT SAADA Amer

Encadré par :

Mr. Arezki DJEBBAR

Promotion 2015/2016



Remerciements

Avant tout, nous remercions Dieu de nous avoir gardés en bonne santé pour mener à bien ce projet de fin d'études, nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faites pour que nous terminions nos études.

Au terme de notre travail nous tenons à remercier aussi notre encadreur, Mr. DJEBBAR pour tous les conseils, supports et l'aide qui nous a apporté tout au long de ce laborieux travail.

Nous remercions les membres du jury qui ont pris de leur temps pour examiner et juger ce travail.

Et finalement, un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce projet.





Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*Mes chers parents que dieu les protège, qui ont
toujours était là derrière moi pour m'encourager et me
faciliter la tâche durant toutes mes études,*

*A mes chers frères qui ont étaient ma plus grande
inspiration depuis ma tendre enfance,*

A mes chères sœurs,

A tous mes amis et collègues sans exception.

MEZICHE Massin





Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- *Mes chers parents.*
- *Mes deux sœurs : Kahina et Tamazouzt.*
- *Ma petite nièce Djamila.*
- *Mon oncle Malek et sa femme Kamila.*
- *Mes cousins.*
- *Mes amis.*
- *Mon camarade Massin.*

NAIT SAADA Amer



SOMMAIRE

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Introduction Générale.....	1
Chapitre I : Définitions et généralités sur les matériaux composites	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Présentation Générale des Matériaux Composites.....	3
I.2.1. Définition d'un composite.....	4
I.2.2. Classification des composites	4
I.2.2.1. Suivant la forme des constituants	4
I.2.2.2. Suivant la nature des constituants.....	5
I.2.3. Constituants des matériaux composites.....	5
I.2.3.1. Les renforts.....	6
I.2.3.2. Les matrices.....	10
I.2.3.3. La matrice organique ou résine.....	10
I.2.3.4. Matrice céramique.....	13
I.2.4. Les interfaces dans les composites.....	14
I.2.5. Influence des paramètres.....	16
I.2.6. Conception des matériaux composites.....	16
I.2.7. Mise en œuvre des matériaux composites.....	17
I.2.8. Architecture des matériaux composites.....	19
I.3. Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés.....	22
I.4. Domaines d'application des matériaux composites.....	23
I.4.1. Les composites dans l'industrie automobile	23
I.4.2. Les composites dans l'aérospatiale	23
I.4.3. Les composites dans la construction navale.....	24
I.5. Recyclage des composites.....	25
I.5.1. Introduction et problématique.....	25
I.5.2. Impératif du recyclage.....	25

Chapitre II : Principales lois de comportement élastique des milieux matériels

II.1. Introduction.....	27
II.2. Etat de contraintes et de déformations dans un solide.....	27
II.2.1. Tenseur des contraintes.....	27
II.2.2. Tenseur des déformations.....	27
II.2.3. Equations de Compatibilité.....	28
II.2.4. Matrice de Rigidité	28
II.3. Matériaux Anisotropes.....	30
II.3.1. Introduction.....	30
II.3.2. Matériau Monoclinique.....	30
II.3.3. Matériau orthotrope.....	31
II.3.4. Matériau isotrope transverse.....	31
II.4. Matériaux Isotropes.....	34
II.4.1. Introduction.....	34
II.4.2. Relation d'élasticité.....	34
II.5. Equations d'équilibre pour un Milieu matériel.....	36

Chapitre III : Introduction au comportement mécanique d'un matériau composite

III.1. Introduction.....	37
III.2. Loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel (UD).....	37
III.2.1. Equation de comportement mécanique d'un pli composite.....	37
III.3. Les caractéristiques du mélange renfort – matrice.....	42
III.4. Calcul des caractéristiques mécaniques de composite.....	43
III.4.1. Module d'Young longitudinal.....	43
III.4.2. Module d'Young transversal.....	44
III.4.3. Module de cisaillement longitudinal.....	45
III.4.4. Coefficient de poisson longitudinal.....	46
III.5. Théorie classique simplifiée des stratifiés.....	47
III.5.1. Théorie classique simplifiée des stratifiés (sans cisaillement transverse).....	49
III.5.1.2. Champ des contraintes.....	50

III.5.1.3. Expression des Résultantes et Moments.....	50
III.5.1.3.1. Résultantes en membrane.....	50
III.5.1.3.2. Comportement en flexion et torsion.....	53
III.5.2. Théorie classique simplifiée des stratifiés (avec cisaillement transverse).....	54
III.5.2.1. Champ des déformations.....	55
III.5.2.2. Champ des contraintes.....	56
III.5.2.3. L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse.....	57
Chapitre IV : Rupture et endommagement des stratifiés composites	
IV.1. Introduction.....	58
IV.2. Mécanismes d'endommagement.....	58
IV.2.1. Les Mécanismes Primaires.....	58
IV.3. Les Modes de rupture.....	61
IV.3.1. La rupture isotrope.....	61
IV.3.2. Le Délaminage.....	62
IV.4. La propagation de la fissure.....	63
IV.5. Les critères de la Rupture.....	64
IV.5.1. Matériaux isotropes.....	64
IV.5.2. Matériaux anisotropes.....	65
Chapitre V : Développement d'un programme de calcul et d'homogénéisation des plaques stratifiés composites.	
V.1. Introduction.....	68
V.2. Séquence de calcul d'un stratifié.....	68
V.2.1. Plaque stratifiée en contraintes planes - vérification à la rupture.....	70
V.2.2. Flexion d'une plaque stratifié avec cisaillement transverse.....	78

Liste des figures

Figure I.1 : Les différentes familles de la matrice.....	10
Figure I.2 : concepts d'interphase (a) et d'interface (b).....	15
Figure I.3 : mécanisme de transfert de charge par cisaillement de la matrice.....	16
Figure I.4 : Ruban UD carbone / verre sur lequel sont mis en évidence la chaîne et la trame.....	17
Figure I.5 : Quelques techniques de mise en œuvre d'un matériau composite.....	18
Figure I.6 : Pli à renforcement unidirectionnel.....	19
Figure I.7 : Constitution d'un stratifié.....	20
Figure I.8 : orientations normalisées des plis.....	20
Figure I.9 : désignation d'un stratifié.....	21
Figure I.10 : schéma définissant le plan moyen.....	21
Figure I.11 : Constitution d'un sandwich.....	22
Figure II.1 : Matériau composite unidirectionnel.....	31
Figure II.2 : plan d'isotropie transverse.....	32
Figure III.1 : Pli à Renforcement unidirectionnel.....	37
Figure III.2 : Cellule élémentaire.....	37
Figure III.3 : Pli composite U.D en-dehors de ses axes principaux.....	40
Figure III.4 schéma simplifié d'une traction longitudinale.....	43
Figure III.5 schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.....	44
Figure III.6 . Schéma par couches d'un essai cisaillement longitudinal.....	45
Figure III.7 . Schéma par couches d'une traction.....	46
Figure III.8 : Schématisation des déformations dans le cas de La théorie classique des stratifiés.....	48
Figure III.9 : Efforts de membrane appliqués sur un stratifié.....	50
Figure III.10 : Géométrie des N-couches du stratifié.....	51
Figure III.11 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.....	53
Figure III.12 : Schématisation des résultantes en cisaillement.....	54

Figure III.8 déformation dans le cas d'un schéma du premier degré avec cisaillement transverse.....	55
Figure IV.1. : Mécanismes d'endommagement observés dans un composite.....	59
Figure IV.2.a : Fissuration transversale de la matrice.....	59
Figure IV.2.b : Fissuration longitudinale de la matrice.....	60
Figure IV.2.c : Rupture de la Fibre.....	60
Figure IV.2.d : Rupture de l'interface.....	60
Figure IV.3 : Processus de rupture intervenant suite à la rupture de fibre dans un composite U.D.....	61
Figure IV.4 : Propagation de la fissure dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice.....	63
Figure IV.5 : Propagation de la fissure dans le cas d'une faible adhérence fibre matrice.....	64
Figure V.1 : Algorithme de calcul d'un stratifié composite.....	69
Figure V.2 : exemple d'application d'une contrainte plane sur une plaque de composite (verre/Epoxyde)..	70
Figure V.3 : Exemple d'application d'une plaque stratifiée de composite (Verre/Epoxyde) sollicitée par des contraintes et des moments.....	78

Liste des tableaux

Tableau I.1 : quelques constituants des composites.....	5
Tableau I.2 : Différents types de fibres de verre filables.....	6
Tableau I.3 : Caractéristiques de la fibre d'aramide (Kevlar).....	7
Tableau I.4 : Caractéristiques générales des principaux renforts.....	8
Tableau I.5 : Caractéristiques mécaniques des fibres.....	9
Tableau I.6 : Comparaison entre les deux résines thermodurcissables (polyesters et époxydes).....	11
Tableau I.7 : Quelques caractéristiques indicatives de matrices.....	12
Tableau I.8 : Critères essentiels des matières TD et TP.....	13

Introduction Générale

Introduction Générale

Les matériaux composites stratifiés ou sandwichs sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel approprié.

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases.

Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir.

La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée. Nous présentons les différents types de matrices et renforts classiquement employés dans l'industrie. Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques.

L'objectif de ce présent travail est de se familiariser avec le calcul de structures composites, en particulier l'étude sera centrée sur le calcul de stratifiés. L'optimisation des épaisseurs des couches et leurs dispositions est un but à atteindre afin d'assurer une résistance de toutes les couches en prenant compte du cisaillement transverse ainsi que l'identification et la discussion des termes de couplage spécifique aux matériaux anisotropes.

Notre mémoire sera scindé en cinq chapitres, à savoir :

- ❖ Le premier chapitre, sera consacré à des généralités sur les matériaux composites et à leurs principaux secteurs d'application.

-
- ❖ Dans le second chapitre, nous rappellerons les principales lois régissant la mécanique des milieux continus.
 - ❖ Les équations de comportement mécanique d'un pli composite et le calcul de ces caractéristiques mécaniques seront bien détaillées dans le chapitre III, ainsi que la présentation de la théorie classique simplifiée des stratifiés avec et sans cisaillement transverse.
 - ❖ Le quatrième chapitre présentera les différents mécanismes d'endommagement des stratifiés composites ainsi que les critères de rupture.
 - ❖ Le développement d'un programme de calcul et d'homogénéisation des stratifiés fera l'objet du dernier chapitre.

Nous terminerons cette étude par une conclusion générale.

Chapitre I

Définitions et généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

Le développement des matériaux composites est né de la volonté d'allier les qualités techniques au besoin d'allègement dans un même matériau, qui par la suite doit s'adapter aux solutions technologiques des problèmes à résoudre.

L'emploi de matériaux plus légers sans perte de solidité et sans augmentation importante des coûts de production est devenu le principal enjeu de la compétition actuelle entre les grandes multinationales industrielles. Cet objectif est en bonne partie à l'origine de la création récente des ensembles métalliques et composites complexes, à cette fin, les chercheurs et les ingénieurs tendent à remplacer progressivement les pièces métalliques par des pièces hétérogènes dans lesquelles des fibres de carbone sont noyées dans une matrice en polymère. La présence des fibres renforce la résistance mécanique du matériau le long de son axe principal ; la présence de polymère assure à la fois la cohésion de l'ensemble et la résistance du matériau à des sollicitations transverses.

I.2. Présentation Générale des Matériaux Composites

Un matériau composite résulte de l'association de deux matériaux différents aussi bien par leur forme que par leurs propriétés mécaniques ou chimiques pour tenter d'accroître leurs performances. Les deux constituants du composite sont la matrice et le renfort, qui en se combinant donnent un matériau hétérogène souvent anisotrope, c'est-à-dire dont les propriétés diffèrent suivant les directions.

Les matériaux constituant le composite sont généralement choisis en fonction de l'application que l'on souhaite en faire par la suite. Les critères de choix peuvent être, par exemple, les propriétés mécaniques requises, la résistance à la chaleur ou à l'eau, ou même la méthode de mise en œuvre.

I.2.1. Définition d'un composite

Un composite est un matériau artificiel moderne dont la structure est composée de deux constituants ou plus, combinés à une échelle microscopique, et qui ne sont pas solubles entre eux. L'un des constituants est appelé « Renfort » noyé dans l'autre constituant appelé « Matrice ». La phase de renforcement du matériau doit être sous la forme de fibres, particules, ou paillettes. La phase matrice du matériau est généralement continue.

Dans le cas le plus générale, il comprend une ou plusieurs phases discontinues de natures différentes ; d'où la nomination de composite hybride.

La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue.

- La phase discontinue est appelée le renfort.
- La phase continue est appelée la matrice.

- a- **Le renfort** : A hautes caractéristiques mécaniques, supportant la charge appliquée.
- b- **La matrice** : Ayant pour rôle de lier le renfort, répartir la charge appliquée et protéger le renfort du milieu extérieur.

En fait, ces deux constituants de base sont liés par une **interface** qu'également on peut appeler interphase, auxquels on ajoute parfois des charges et (ou) des additifs spécifiques.

- L'interface : assure la compatibilité renfort-matrice en transmettant les contraintes de l'un sur l'autre sans déplacement relatif (bonne adhérence en couche fine).
- Les charges : apportent des propriétés particulières ou complémentaires ou encore permettent de rabaisser le prix de revient.
- Les additifs spécifiques : catalyseur, accélérateur de polymérisation, agent toxique, ignifugeant, pigments, (colorants).....etc. [3].

I.2.2. Classification des composites

I.2.2.1. Suivant la forme des constituants

On distingue deux classes :

a- Composites à particules :

On dit qu'un composite est à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimensions privilégiées.

b- Composite à fibre :

On dit qu'un matériau composite est un composite à fibres Si le renfort se trouve sous forme de fibres longues ou courtes.

On distingue aussi, deux grandes classes de composites à fibres.

b-1- Composites de grande diffusion « GD » :

Sont les plus courants, généralement réalisés à partir de fibres de verre et de résines polyester insaturé ou phénolique, destinés à des fabrications de grandes séries.

b-2- Composites à hautes performances « HP » :

Sont surtout des matériaux composites à résines époxydes renforcées par des fibres de verre, de carbone ou d'aramide. Ils possèdent des caractéristiques mécaniques élevées.

I.2.2.2. Suivant la nature des constituants :

Selon la nature de la matrice, on distingue les composites à matrices organiques ou minérale et à matrice métallique.

- **Composites à matrice organique : (résine, charge) avec :**
 - ✓ Des fibres minérales : verre, carbone,.....etc.
 - ✓ Des fibres organiques : Kevlar, polyamides,etc.
 - ✓ Des fibres métalliques : bore, aluminium,.....etc.

- **Composites à matrice métallique : (alliages léger) avec :**
 - ✓ Des fibres minérales : carbure de silicium (SiC),.....etc.
 - ✓ Des fibres métalliques : bore,.....etc.
 - ✓ Des fibres métallo minérales : carbone carbure revêtu de carbure de silicium,.....etc.

- **Composites à matrice minérales (céramique) avec :**
 - ✓ Les fibres métalliques : Bore
 - ✓ Les particules métalliques : Cermet
 - ✓ Les particules minérales : Carbone, Nitrure

1.2.3. Constituants des matériaux composites

Composites			
Matrices (liants)	Élément renforçant	Charge	additifs
Organiques :	Cellulose	Craie	-Catalyseur
Polyester	Verre E, S, R, C, D	Silice-Kaolin	-Accélérateur
Phénoliques	Fibres	Oxyde de titane	-Agent de
Mélamine	Carbone/graphite	Verre /Bille	démoulage
Silicone	Aramide	Fibres courtes	-Ignifugeant
Polyuréthanes	Bore	Poudre	Anti UV
Epoxydes		métallique	-Fongicides.
		Mica	

Tableau I.1 : quelques constituants des composites

1.2.3.1. Les renforts

- Définition :

Les renforts sont les éléments de composites qui apportent les propriétés mécaniques intéressantes. Ils se présentent sous forme de filaments de longueur plus au moins grandes, dont les qualités recherchées sont :

Les caractéristiques mécaniques, légèreté, résistance thermique, compatibilité avec les résines, adaptation aux procédés de mise en œuvre, faible prix.

- Les différents types de renfort :

- **Fibres de verre :**

C'est la plus utilisée en vu son excellent rapport performance mécanique.

Les fibres de verre sont fabriquées à partir d'un mélange à base de silice (Si O₂) qui est fondu à 1200°C puis passée dans une filière en platine, et les filaments sont étirés avant refroidissement à un diamètre de (5 à 13µm) à une vitesse de 60m/s.

En faisant varier la composition du mélange (silice, Kaolin, chaux,etc.) on peut obtenir différents types de verre, dont les principales sont données dans le tableau suivant.

Le verre de type E est le plus utilisé avec environ (99% des qualités totales). [2]

Type	Caractéristiques générales
E	A usage général, bonnes propriétés mécaniques
D	Hautes propriétés diélectriques
A	Hautes tenue en alcali
C	Bonne résistance chimique
R, S	Hautes résistance mécanique

Tableau I.2 : Différents types de fibres de verre filables.

- **Fibres de carbone :**

La fibre de carbone est la plus utilisée pour les composites « HP ». Elle est fabriquée d'une manière organique, en raison de diversité technique de fabrication et du nombre de paramètres entrant en jeu, les fibres produites possèdent les meilleures performances mécaniques vu leurs structures.

On distingue deux groupes :

- Les fibres à haute résistance (HR) ou à haute ténacité (HT) ($\sigma = 2500$ à 3400 MPa en traction, $E = 200\,000$ MPa)
- Les fibres à haut module (HM) : fibre de carbone ($\sigma = 2000$ à 2500 MPa en traction, $E = 400\,000$ à $700\,000$ MPa).

- **Fibres d'aramide (Kevlar) :**

Ce sont des polyamides aromatiques ou (polyaramides) dont la structure est composée de noyau benzénique par synthèse à base de température (-10°C) puis par filage. Un étirage pendant un traitement thermique permet d'augmenter leurs modules d'élasticité. Dont on distingue deux types de fibres d'aramide.

- La fibre haute résistance (HR) Kevlar 29
- La fibre haut module (HM) Kevlar 49.

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49
-Module de young (GPa).	60	130
- Résistance à la traction (MPa)	2700	3600
-Allongement à la rupture (%).	4,5	2
-Masse volumique (Kg/m ³)	1450	1450
-Température max d'utilisation (°C).	200	200
-Température de dégradation (°C).	400	450

Tableau I.3 : Caractéristiques de la fibre d'aramide (Kevlar).

L'utilisation de ces fibres est limitée par leur grande faiblesse en compression, peut être due à la mauvaise adhérence avec les résines.

- **Fibres de bore :**

Obtenues par dépôt chimique de gaz de chlorure de bore (BC) et d'hydrogène (H₂) sur un fil de tungstène de diamètre 13µm chauffé à une température comprise entre 1100°C et 1300°C par effet de joule.

- **Fibres de carbure de silicium :**

Le principe d'élaboration est analogue à celui de la fibre de bore le dépôt résulte de la composition chimique à 1200°C.

- **Autres Fibres :**

Il existe aussi diverses fibres utilisées pour des applications particulières : Bois, coton, papier, amiante, silice, polyester, polyamide,.....etc.

Fibre	∅ du filament ∅ (μ)	Masse spécifique ρ Kg/dm ³	Résistance à la traction σ (Mpa)	Compression (Mpa)	Flexion (MPa)	Module de flexion (MPa)	Allongement A%
Verre E	4-13	2,54-	3200-3500	900	1100	73-74	3-4,8
Verre R	9-10	2,55	3700-4500	1100	1300	86-87	5,4
Carbone HR	7-8	2,48	2700-3500	900-1100	1200	230-250	1,5-1,8
Carbone HM	5-7	1,75-	2700-3500	1300	-	370-430	0,5-0,6
Aramide	100-140	1,78	2300-2500	-	-	390-420	0,7-0,9
Bore	2,2	1,81-	3200-3900	-	-	62-72	5,1-5,4
Silice	14	1,96	900-1000	-	-	5,6	16-18
Polyamide	12	2,63	800-1200	-	-	13,4	14-16
		1,14					
		1,38					

Tableau I.4 : Caractéristiques générales des principaux renforts [2]

Renfort	Ø du filament	Masse volumique	Module d'élasticité longitudinale	Module de cisaillement	Coefficient de poisson	Contraintes de rupture en traction	Allongement à la rupture	Coefficient de dilatation thermique	Conductivité thermique 20°C	Capacité thermique	Température limite d'utilisation
Unités	Ø µm	Kg/m ³	MPa	GPa	µ	σ [MPa]	A%	α °C ⁻¹	λ W/max.°C	CJ/Kg X°C	T° max°C
Verre R à h-p	10	2500	86000		0,2	3200	4	0,3.10 ⁻⁵	1	800	700
Verre E Applications courantes	16	2600	74000	30000	0,25	2500	3,5	0,5.10 ⁻⁵	1	800	700
Kevlar 49	12	1450	130000	12000	0,4	2900	2,3	0,2.10 ⁻⁵	0,03	1400	
Graphite HR Haute	7	1750	230000	50000	0,3	3200	1,3	0,02.10 ⁻⁵	200 (20°) 60	800	>1500
Graphite HM haute module	6,5	1800	390000	20000	0,35	2500	0,6	0,08.10 ⁻⁵	200 (20°) 7 (800°)	900	
Bore	100	2600	400000			3400	0,8	0,4.10 ⁻⁵			500
Alumine	20	3700	380000			1400	0,4		50 (20°) 7	900	>1000
Silicate D'alumine	10	2600	200000			3000	1,5				
Carbure de silicium	14	3450	450000			3000	0,7				
Polyéthylène		960	100000			3000		0,5.10 ⁻⁵			150

Tableau I.5 : Caractéristiques mécaniques des fibres [2]

I.2.3.2. Les matrices

La matrice est composée d'une résine et de charge, du point de vu mécanique, l'ensemble résine/charge se comporte comme un matériau homogène. La matrice constitue l'élément de liaison entre les fibres dont elle permet d'utiliser les propriétés, elle peut généralement constituer l'élément essentiel mécaniques, cette matrice doit être capable de transmettre les sollicitations aux fibres de les lier efficacement et de les protéger. [1]

- **Les différentes familles de matrice :**

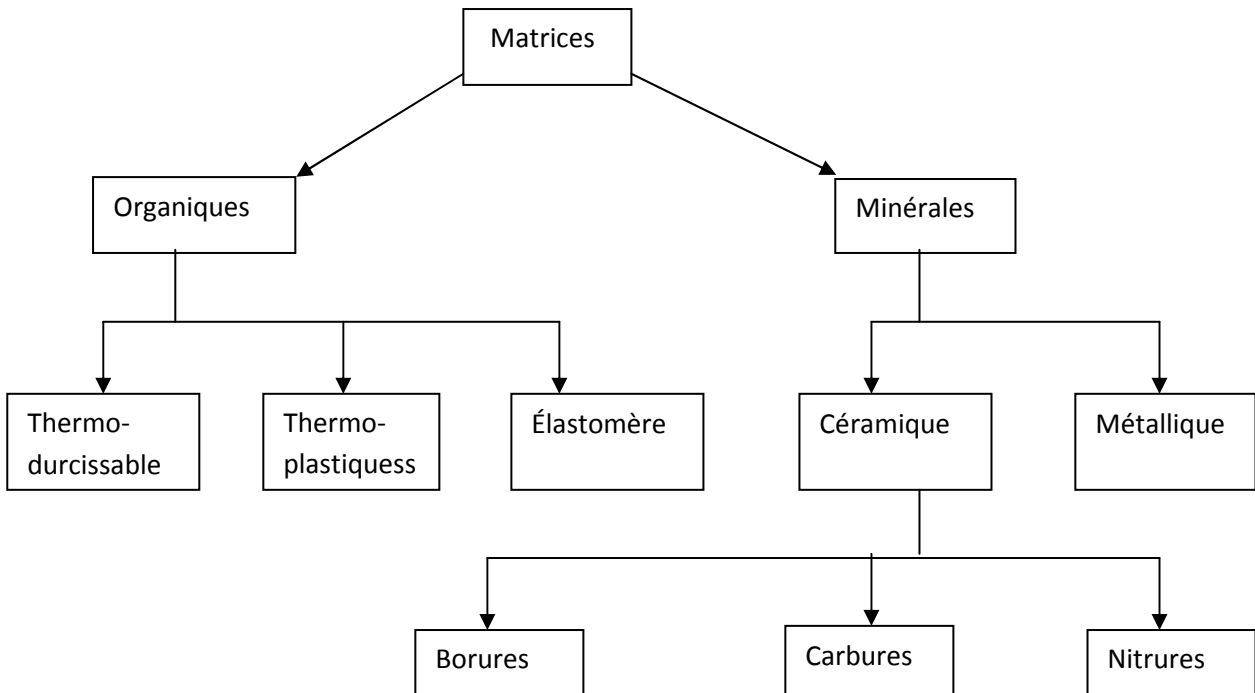


Figure I.1 : Les différentes familles de la matrice.

I.2.3.3. La matrice organique ou résine

La matrice organique ou résine est un des constituants de base du matériau composite, c'est un polymère modifié par différents adjuvants et additifs mécaniques aux fibres et leur protection de l'environnement extérieur.

Elles doivent être facilement déformables, capable de lier efficacement les fibres entre elles (bonne compatibilité), elle joue, cependant, un rôle fondamentale en amortissant les efforts subis par le matériau. Les composites à matrice organique sont, donc, résistant à l'oxydation, à la corrosion et permettent de réaliser des pièces de forme complexes.

Les résines les plus utilisées sont de nature polymériques dont nous pouvons distinguer les deux grandes familles « **Les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables** ».

Ces deux résines possèdent la faculté de pouvoir être façonnées, moulée pour donner soit un produit semi-fini ou un produit fini.

D'autres résines aux propriétés particulières ont été développées récemment, en particulier les résines PEEK (Polyétheréthercétone) et PES (Polyéthersulfone).

- **Classification des résines :**

Les résines sont classées suivant leurs propriétés Physico-chimique qui sont déterminantes pour le choix d'une application industrielle.

On distingue deux grandes familles de résines :

a- Résines thermodurcissables :

Les matières thermodurcissables ne peuvent être mise en forme qu'une seule fois. Après polymérisation sous l'action de la chaleur en présence de catalyseur, ces résines ne peuvent se détruite que par un apport d'énergie thermique grâce à leur structure géométrique.

C'est ainsi que ces résines possèdent des propriétés mécaniques et thermomécaniques plus élevées.

Les principales résines thermodurcissables sont :

- ✓ **Les résines polyester insaturées :**

Sont les plus utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultat :

-D'un faible coût de production.

- De leur adaptation à des procédés de fabrication faciles à mettre en œuvre et à automatiser.

- ✓ **Les résines époxydes :**

Sont les matrices par excellence des composites à haute performance « HP », dans cette optique, elles ne sont pratiquement pas chargées ou très peu afin de pouvoir lier le maximum de fibre (Verre, carbone, aramide, bore).

Résines	Avantages	inconvénient
Polyester	<ul style="list-style-type: none"> -Une bonne rigidité -Une bonne stabilité dimensionnelle -Une bonne mouillabilité des fibres et des tissus -Facilité de mise en œuvre. -Facilité de mise en œuvre. -Bonne tenue chimique. -Faible coût de production. 	<ul style="list-style-type: none"> -Une sensibilité à la fissuration dans le cas des chocs. -Un retrait important de l'ordre 8 à 10% -Mauvais comportement à la vapeur, à l'eau bouillante. - Une dégradation à la lumière par rayon UV -Inflammabilité
époxydes	<ul style="list-style-type: none"> -Bonne propriété mécanique -bonne tenue à la température élevée. -excellente résistance chimique. -Faible retrait au moulage (0,5 à 1%) -Excellente adhérence aux matériaux métalliques. 	<ul style="list-style-type: none"> -Temps de polymérisation long -Coût élevé -sensibilité à la fissuration -Vieillessement thermique et photochimique médiocre.

Tableau I.6 : Comparaison entre les deux résines thermodurcissables (polyesters et époxydes). [1]

b- Les résines thermoplastiques :

Elles forment le groupe le plus important parmi les polymères synthétiques, du fait que ce type polymère passe de l'état rigide à l'état malléable pour une faible élévation de température, ce processus est entièrement réversible, il peut être répété un grand nombre de fois sans modification des propriétés de la résine. De ce fait, ces polymères sont faciles à mettre en œuvre et peuvent être modifiés plusieurs fois.

Les divers thermoplastiques peuvent être renforcées, généralement de la fibre de verre et de carbone et font partie alors des matériaux composites.

Cependant, dans ce domaine, ces résines ont un développement limité.

c- Les résines thermostables :

C'est un polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées (supérieures à 200°C) appliquées de façon continue.

Cette propriété est mesurée en déterminant la température que peut supporter la résine durant 2000 h sans perdre la moitié de ses caractéristiques.

Ici on donne quelques caractéristiques indicatives de matrices.

	Nature	Masse volumique ρ (g/cm)	Contraintes à la rupture σ_R (MPa)	Module d'élasticité longitudinale E(GPa)	Allongement A(%)	T° limite (°C)	A coefficient de dilatation ($10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)
Résines Thermodurcissables	Polyester	1,1 à 1,3	30 à 90	2 à 3,5	2	60 à 200	150
	Polyamide	1,2 à 1,3	80	3	1,5	200 à 300	50
	Silicone	1 à 1,1	20 à 60	3	350	300 à 350	-
	Epoxyde	1,1 à 1,3	30 à 100	2,5 à 4	3 à 30	90 à 200	60
Résines thermoplastiques	Polyamide 6,6	1,14	70 à 85	2,5 à 3	60	80	90
	Polypropylène	0,9	30 à 40	1,2	400	60	110
	polycarbonate	1,2	50 à 70	2,4	80	120	70

Tableau I.7 : Quelques caractéristiques indicatives de matrices.

- Critères essentiels des matrices TD et TP :

	TP	TD
Etat de base	Solide (prêt à l'emploi) Polymérisé	Liquide visqueux Polymériser
Mouillabilité des renforts	Difficile	aisée
Moulage	Chauffage (fusion /ramollissement de fixation)	Chauffage (continu)
Cycle	Court	Plus long (polymérisation)
Tenue au choc	Assez bonne	limitée
Tenue thermique	Réduite sauf nouveau TP thermostables	Meilleur
Chutes de déchet	Recyclables	perdus
Condition de mise en œuvre	Bonne+propreté	Emanation pour méthode humide.

Tableau I.8 : Critères essentiels des matières TD et TP.

d- Les charges et additifs :

✓ Les charges :

Le but de leur présence est de modifier les caractéristiques de matériaux, elles sont utilisées dans les composites à grandes diffusions. Et peuvent remplir différentes fonctions.

✓ Les additifs :

Les additifs interviennent comme :

- Lubrifiant et agent de démoulage.
- Pigment et colorant.
- Agent Anti-retrait.
- Agent Anti-UV.

I.2.3.4. Matrice céramique

Les céramiques sont des matériaux capables de jouer le rôle de matrice dans des matériaux composites et ce, grâce à leurs propriétés intrinsèque (caractère réfractaire, rigidité,...tc.). L'amélioration considérable de la ténacité de matrice céramique constitue une conséquence la plus spectaculaire de leurs renforts.

I.2.4. Les interfaces dans les composites

Les matériaux composites présentent en général de nombreuses interfaces de natures variées. L'importance du rôle mécanique de l'interface dans les phénomènes de renforcement et de rupture (transfert de charge), justifie sa prise en considération comme troisième constituant des composites en plus de la fibre et de la matrice. Le problème réside en effet dans le fait que la notion d'interface est relativement difficile à définir. En raison d'une influence prépondérante de la nature de la liaison fibre-matrice sur le comportement mécanique du matériau, nous allons tenter de faire une petite approche sur la notion d'interface.

- Définition :

L'interface n'est pas une entité bien définie ; c'est un maillon très important au niveau d'un matériau composite ; elle est la surface de jonction entre deux matériaux en contact. C'est l'élément qui conditionne le degré de synergie de l'association fibre/matrice qui s'établit entre les constituants lors de l'élaboration du composite. A l'échelle macroscopique l'interface est une surface sans épaisseur qui peut être classé en deux groupes :

- Les interfaces générées par le procédé de mise en œuvre du matériau. L'interface inter plis, défini par la superposition des plis et intra-plis ou inter-mèches au niveau d'un pli.
- Les interfaces liées à la structure elle-même du composite, créées par l'occasion des composants de base (matrice/renfort) [4].

Des études plus fines, à une échelle microscopique, ont montré que la transition entre la matrice et le renfort n'était pas si brutale et que chaque constituant, de par sa seule présence, modifie de façon plus ou moins importante la structure de l'autre. Le matériau composite ne résulte pas de la simple juxtaposition de ses constituants mais bien de leur association interactive. C'est ainsi que la notion d'interphase apparaît pour désigner la zone interfaciale tridimensionnelle (épaisseur non nulle), ayant une structure et une composition particulières, différentes de celle de la matrice ou de la fibre. L'interphase désigne donc l'aspect microscopique et structural de l'interface. La figure (I.2) représente les concepts de l'interphase (a) et de l'interface (b).

- L'interphase

L'interphase est un milieu continu qui peut être une zone de réaction chimique formée par les constituants du composite lors de son élaboration, une couche d'épaisseur fine (en général de quelques 10 ou 100 nm) [4] et de nature chimique définie, introduite volontairement dans le but de protéger la fibre ou de contrôler la liaison interfaciale, ou bien encore de contribuer à améliorer la compatibilité chimique fibre/matrice. Elle joue un rôle fondamental dans le comportement mécanique des composites car elle est le siège des mécanismes d'interaction entre les fibres et la matrice. Elle permet d'optimiser les phénomènes de déviation de fissures, de transfert de charge fibre/matrice et parfois même de ralentir l'accès de l'oxygène jusqu'à la fibre.

Dans le cas de l'existence de liaisons chimiques, la surface externe de la fibre se trouve également modifiée. Cette surface est de première importance, puisque sa réactivité par rapport à la résine et sa géométrie vont largement conditionner le développement des interactions interfaciales. De plus, les couches externes de la fibre peuvent également comprendre un dépôt (revêtement ou ensimage) réalisé en tant que traitement de surface de la fibre ; à faciliter sa mise

en œuvre et à améliorer les caractéristiques interfaciales. L'interphase obtenue n'en est que plus complexe. La figure (I.2.a) présente le concept d'interphase et (I.2.b) d'interface [4].

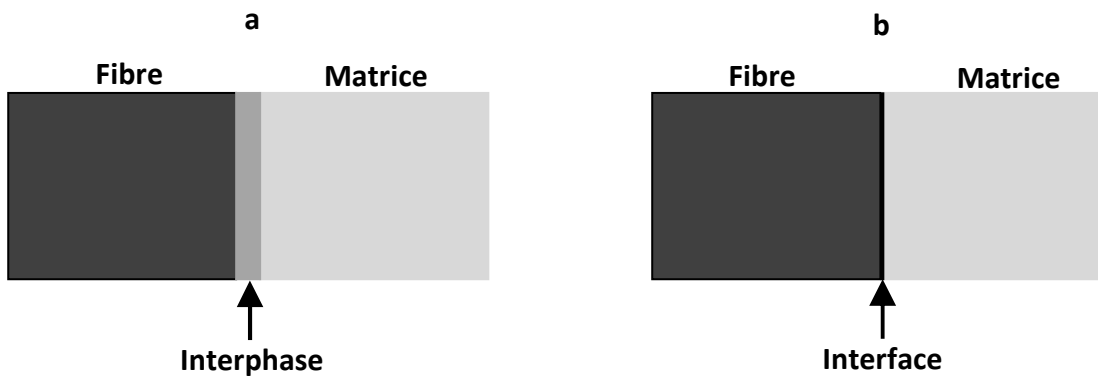


Figure I.2 : concepts d'interphase (a) et d'interface (b). [4]

- Rôle de l'interface

Assure la continuité physique d'un constituant à travers tout le matériau en empêchant, par exemple la formation de porosités ou l'accumulation d'humidité.

Protéger l'une ou l'autre phase : les fissures peuvent ainsi être devisées ou stoppées, l'humidité arrêtée par l'ensimage (fibre de verre) ou la réaction chimique de la matrice sur le renfort ralentie (matrice métallique) ;

Transmet les efforts : les fibres de composites travaillent ensemble et la matrice est là pour répartir et transmettre les efforts aux fibres, mais ces efforts doivent d'abord passer par l'interface ;

L'interface et l'élément qui conditionne le degré de synergie de l'association fibre/matrice. Elle va permettre d'assurer le rôle de transfert de charge.

Son rôle est déterminant lors de la propagation de fissures dans le composite puisque, l'un des constituants ne supporte plus sa part de sollicitation appliquée, celle-ci étant transmise au reste du matériau à travers l'interface.

Considérant par exemple l'effet d'une rupture de fibre figure (I.3) ; la contrainte normale au niveau de la rupture est nulle, et la contrainte de cisaillement au niveau de l'interface fibre/matrice est maximale ; à une distance $x = \delta_f$, le rechargement de la fibre est total alors que la contrainte de cisaillement τ s'annule.

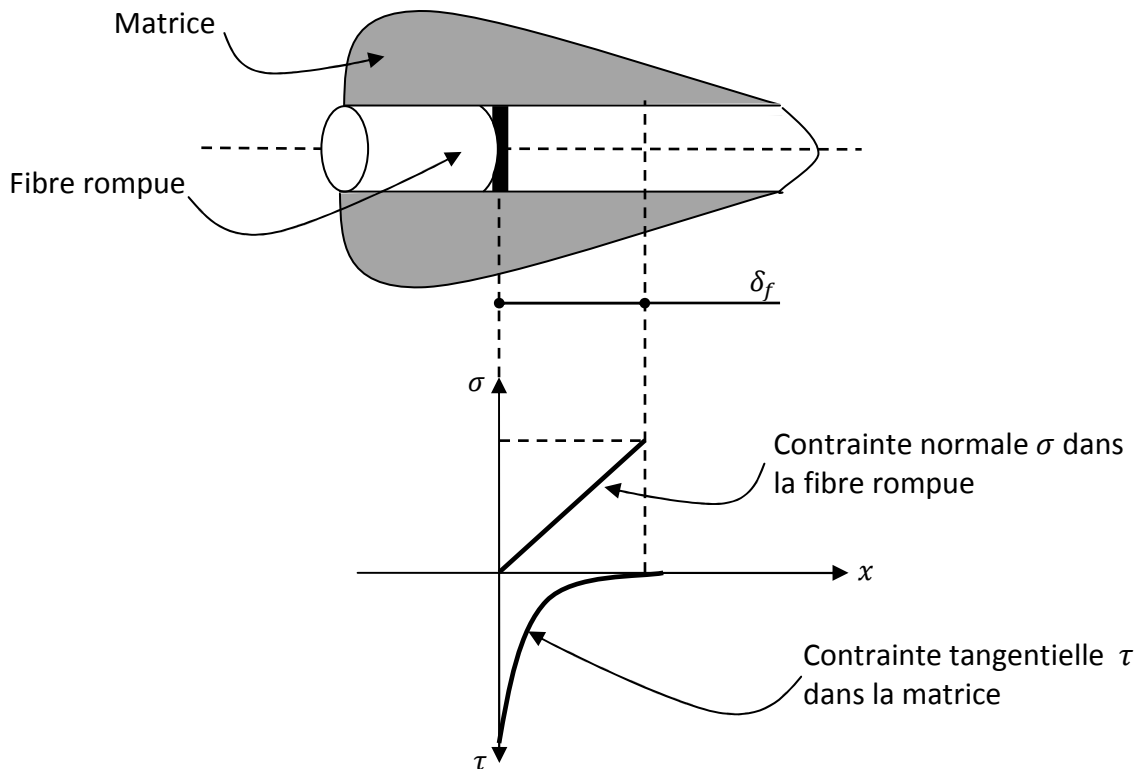


Figure I.3 : mécanisme de transfert de charge par cisaillement de la matrice [4]

✓ Les qualités d'un matériau composite est notamment ses performances mécaniques sont liées à une bonne interface entre la fibre et la résine.

La liaison fibre-matrice doit être choisie avec un grand soin pour contrôler la rupture et la propagation des fissures dans la pièce, d'où l'interface joue un rôle cruciale dans la tenue en service du matériau composite.

I.2.5. Influence des paramètres

Plusieurs paramètres influent sur les propriétés mécaniques des composites :

- L'humidité et la chaleur favorisent le vieillissement des composites.
- Les produits chimiques courants de la mécanique. (Graisse, pétrole .etc.) n'influent pas sur les composites.
- En cas de contact aluminium-fibres de carbone pour lequel les phénomènes galvaniques entraînent des corrosions rapides, les composites ne se corrodent pas.
- Les fumées émises lors de la combustion de certaines matrices peuvent s'avérer toxiques. Cependant les composites ont une meilleure tenue au feu que les alliages.

I.2.6. Conception des matériaux composites

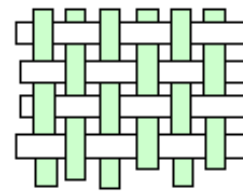
On conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement ; ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif. Pour un composite, on construit sa structure à la demande :

- la nature, la texture, la forme du renfort et son orientation (Figure I.4)
- le taux de renforcement
- la nature de la résine et des charges ou additifs
- la qualité de l'interface renfort-matrice
- la géométrie de la pièce à réaliser
- le procédé de mise en œuvre utilisé

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise pour optimiser le comportement mécanique dans une direction déterminée.



Armure unidirectionnelle



Armure toile ou taffetas

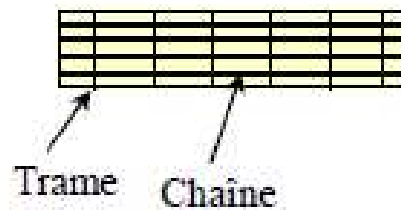


Figure I.4 : Ruban unidirectionnel carbone / verre sur lequel sont mis en évidence la chaîne et la trame

I.2.7. Mise en œuvre des matériaux composites

Les méthodes de mise en œuvre des matériaux composites sont très nombreuses, développés au fil des années par les chercheurs et les entreprises de fabrication.

Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans la rubrique « Composites ».

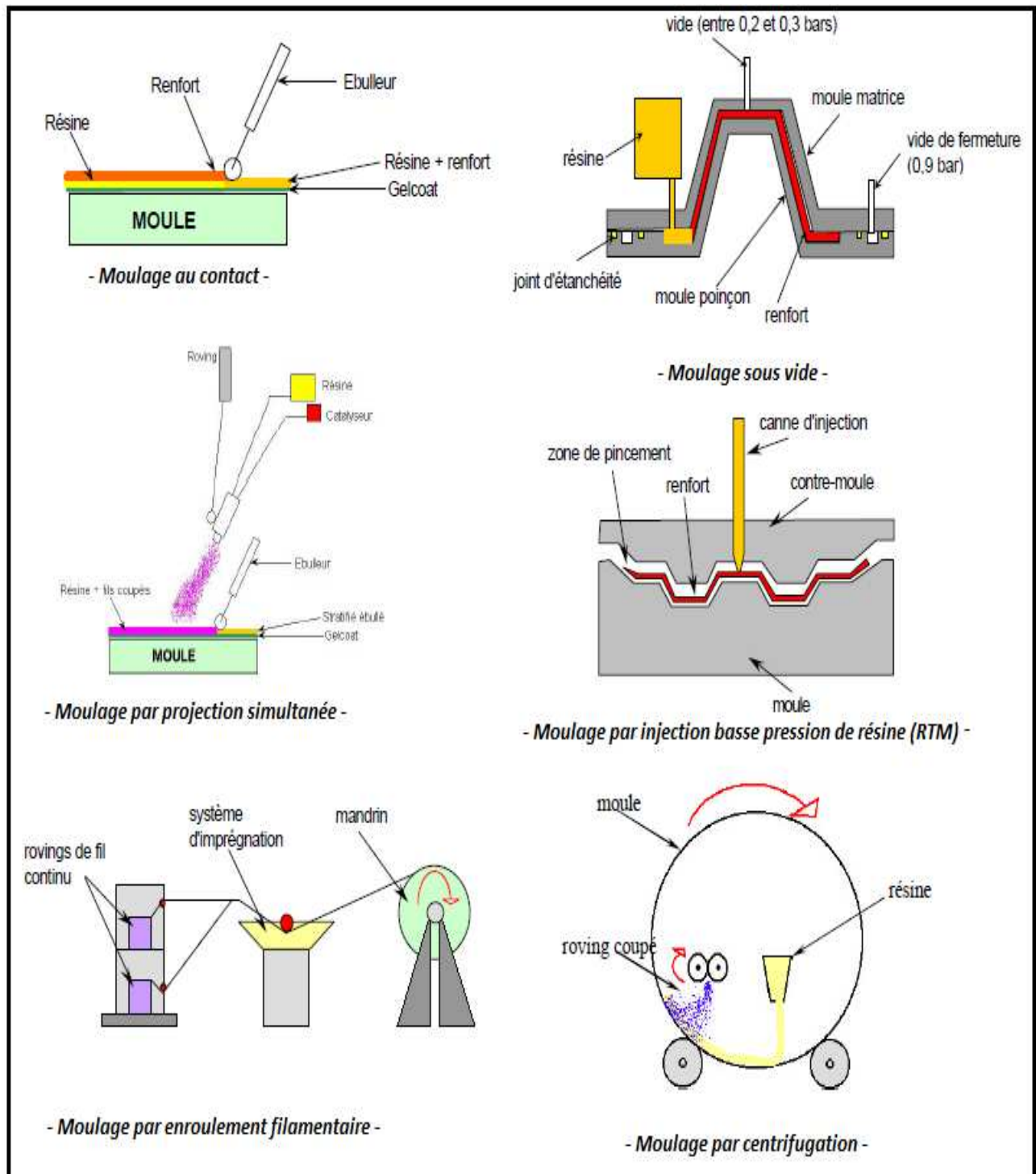


Figure I.5 : Quelques techniques de mise en œuvre d'un matériau composite.

I.2.8. Architecture des matériaux composites

a- Monocouches :

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

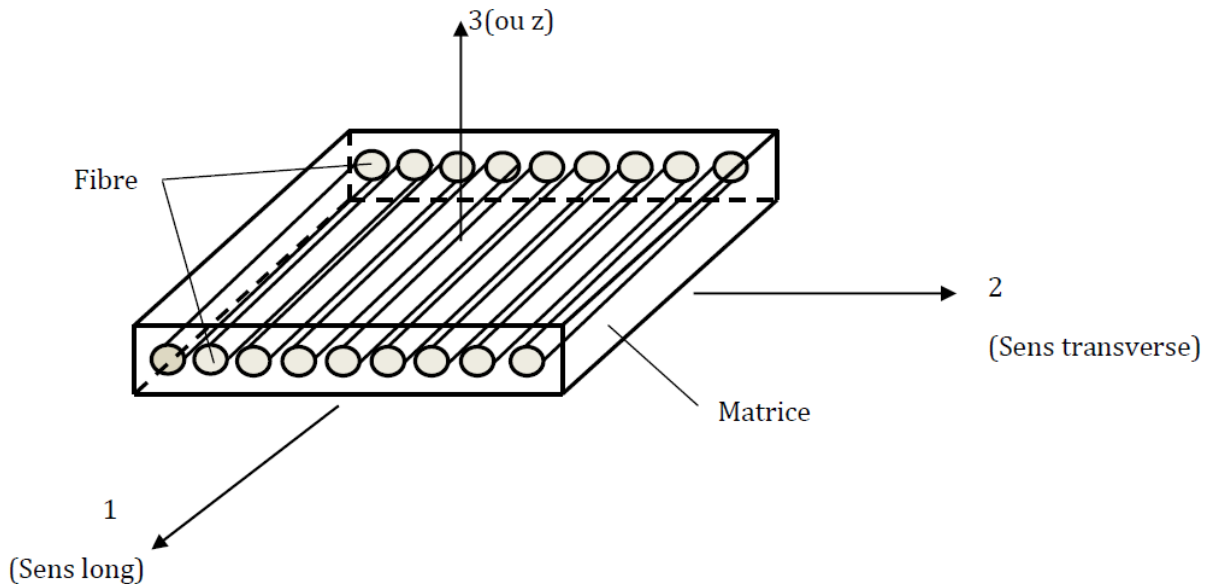


Figure I.6 : Pli à renforcement unidirectionnel

b- Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure I.7). Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

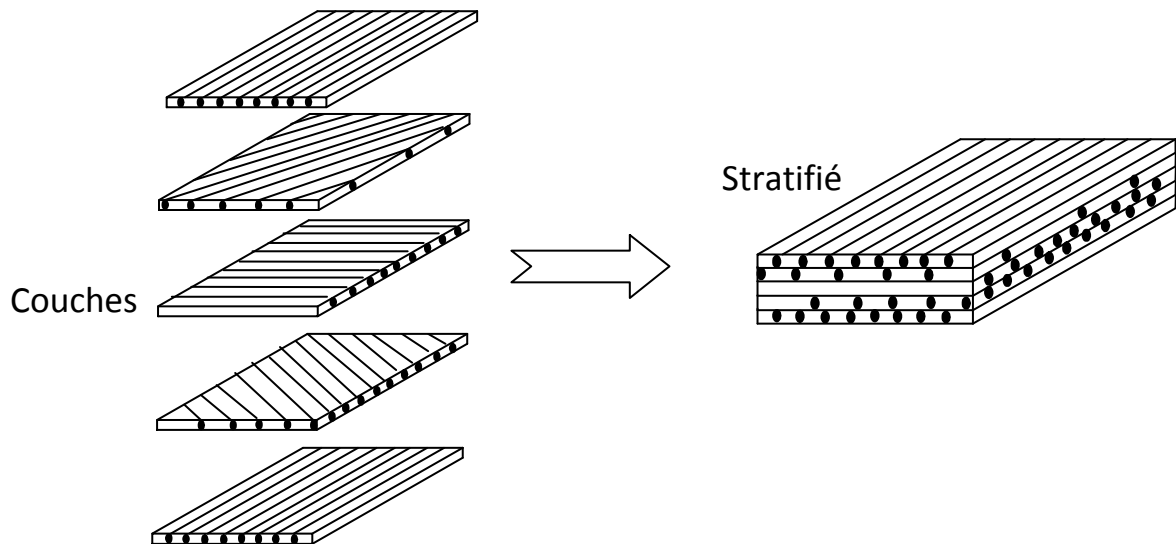


Figure I.7 : Constitution d'un stratifié

- **Code de représentation d'un stratifié : [5]**

Les orientations fréquemment utilisées sont représentées dans la (figure I.8).

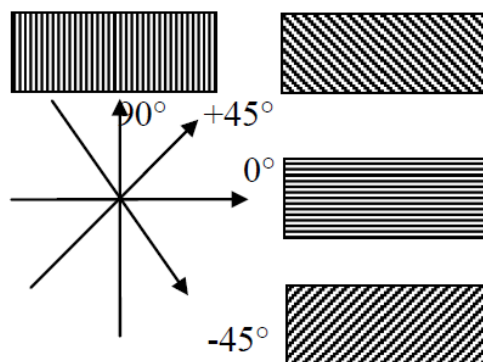


Figure I.8 : orientations normalisées des plis

La direction dite (à 0°) correspond à la direction d'application de l'effort prépondérant, ou à une direction privilégiée de la pièce considérée ou à l'axe des abscisses du repère choisi.

On trouve aussi des réalisations avec des plis à $\pm 30^\circ$ et à $\pm 60^\circ$.

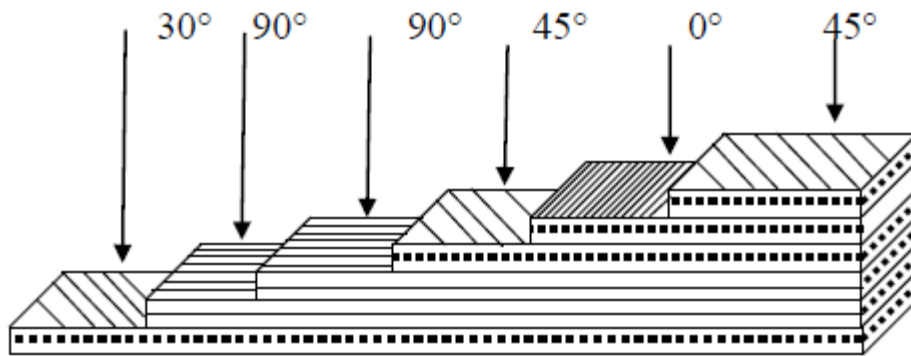


Figure I.9 : désignation d'un stratifié

La (figure I.9) schématise un stratifié code (45/0/45/90²/30)

Le codage se fait comme suite : depuis le pli extrême de coté $Z < 0$ jusqu'au pli extrême de coté $Z > 0$.

- Chaque pli est repéré par son orientation.
- Les plis successifs sont séparés par (/).
- Lorsque plusieurs plis de même direction sont groupés, un chiffre en indice indique le nombre des plis identique.

• **Plan moyen :**

C'est par définition le plan qui sépare en deux moitiés l'épaisseur du stratifié c'est le plan moyen il a pour cote par convention $Z=0$. (Figure I.10)

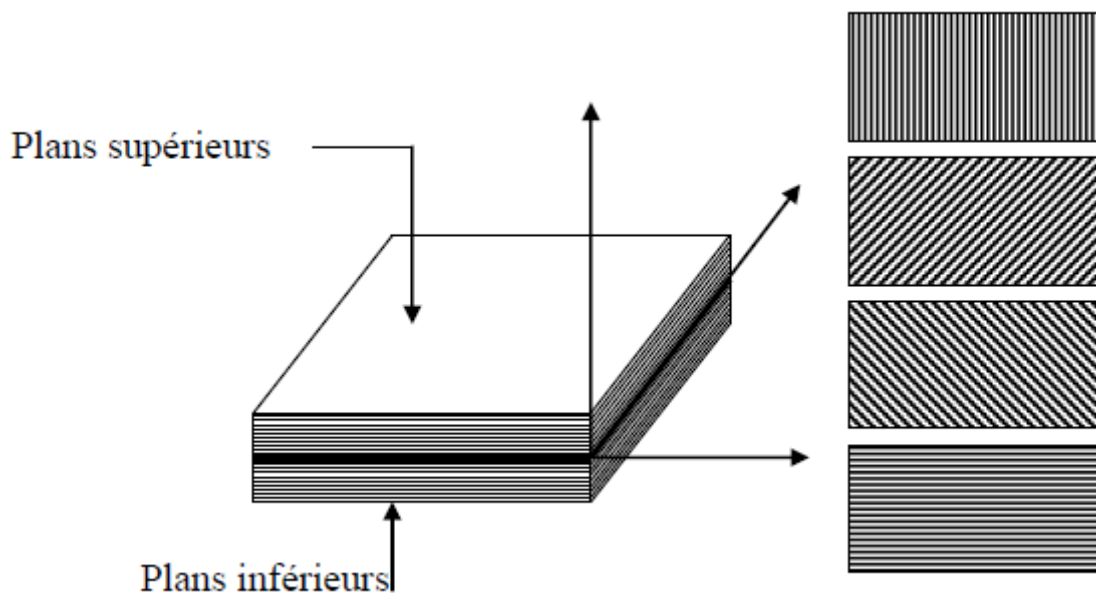


Figure I.10 : schéma définissant le plan moyen

c- Sandwich :

Les matériaux sandwich résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Figure I.11). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

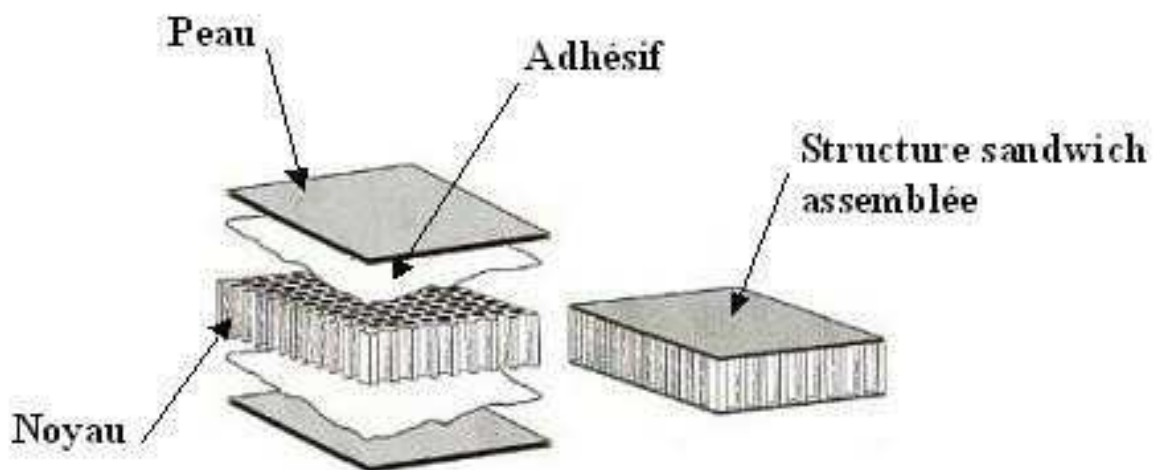


Figure I.11 : Constitution d'un sandwich

I.3. Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés

Le collage est une technique d'assemblage courante consiste en l'adhésion Par attraction moléculaire entre deux parties à coller et un adhésif interposé qui doit assurer la transmission des efforts.

On peut citer pour principaux avantages de ce mode d'assemblage des couches d'un stratifié :

- La répartition des contraintes de liaison sur une surface importante
- La Possibilité d'optimiser la géométrie et les dimensions du collage
- La légèreté de l'assemblage
- Les propriétés d'isolation et d'étanchéité de l'adhésif.

I.4. Domaines d'application des matériaux composites

Les matériaux composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments... Les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire... Sports et loisirs,.etc.

Pour beaucoup d'applications structurales, comme sur les Plates-formes pétrolières offshore, les composites à matrice polymère apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux, du fait principalement de leur légèreté. Pourtant, l'industrialisation de solutions composites est délicate, car les avantages compétitifs sont amoindris par les surcoûts induits, et surtout, par la difficulté à Prévoir l'évolution des propriétés d'usage de ce type de matériaux, notamment sous sollicitations environnementales et mécaniques couplées [11].

I.4.1. Les composites dans l'industrie automobile

Les matériaux organiques composites à matrices thermoplastiques ou thermodurcissables renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés Presque exclusivement Pour satisfaire certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse Pas 10 à 15 % selon les véhicules. Généralement, l'habitacle (habillage intérieur) d'un véhicule est essentiellement constitué de matériaux polymères et de composites, qui à eux seuls représentent environ 50 % de la quantité utilisée sur un véhicule tant en Europe qu'aux États-Unis :

- 48 % pour les véhicules nord-américains en 1994
- 50 à 60 % (y compris les insonorisant) Pour l'ensemble de la gamme actuelle Renault. Les principales applications concernent : la planche de bord et le poste de conduite, les ébénisteries et les habillages de portes, les garnitures de toit, les sièges, la tablette arrière, les tapis de sol et les textiles. Les principales applications concernent aussi les accessoires tels que: les peaux de boucliers, les calandres, les grilles d'auvent, les enjoliveurs de roues, les rétroviseurs, les feux de signalisation, les bras d'essuie-vitre, les baguettes, les becquets, les ailerons, les poignées de porte, etc. [12].

I.4.2. Les composites dans l'aérospatiale

Les constructeurs aéronautiques font de plus en plus appel aux matériaux composites du type matrice polymère/fibres de carbone continues pour réduire la masse des aéronefs. La pénétration de ces matériaux est passée de 20 % pour l'Airbus A340 à plus de 50 % pour le futur Boeing B787.

La réduction des coûts de fabrication à qualité mécanique constante passe par une intégration forte des phases de conception et de fabrication : sélection concomitante des constituants, semi-produits et modes d'assemblage. La Prévision des Performances doit être souple pour une gamme de solutions données. Un essai représentatif du mode de sollicitation considéré comme le plus pénalisant permet une approche quantitative réaliste dans un contexte industriel. L'essai Peut lui-même être en phase de développement lorsqu'il s'agit d'un système original [13].

Les poutres composites à base de fibres occupent une place de plus en plus importante dans la construction d'avions, d'hélicoptères, de missiles, de lanceurs et de satellites, avec, en tête, les composites renforcés par des fibres de carbone (CFRP), dont la masse est composée à 60 % de fibres et à 40 % de résine. Mais il existe également des structures sandwichs et alvéolaires, les stratifiés fibres-métal, les composites à fibres de verre, sans oublier les fibres céramiques destinés notamment aux environnements à température très élevées tels que les moteurs de fusées. Le GLARE composé principalement d'aluminium et de fibre de verre est utilisé en aéronautique. Les composites ont fait leur entrée chez Airbus en 1972 lorsque l'avionneur décide de les utiliser pour les bords d'attaque de la dérive de l'A300B. En 1982, très en avance sur le reste de l'industrie, l'avionneur européen étend leur présence aux déporteurs de sol et aux gouvernes de profondeur et de direction de l'A310-200. Les premières structures primaires, notamment de la dérive de l'A310-300 et de l'empennage horizontal et des volets de l'A320 suivent en 1987. Puis, c'est le tour de la gamme long-courrier avec l'empennage horizontal et vertical -qui servent également de réservoirs de carburant, les gouvernes de profondeur et de direction, les volets, les ailerons, les déporteurs, les trappes d'atterrisseur ainsi que divers éléments de carénage de l'A340. Et la série des innovations révolutionnaires continue ensuite, par exemple avec le développement d'un support de quille en CFRP pour l'A340-500/-600, et surtout avec le bouclier de pressurisation pour ce même modèle, première pièce composite destinée à la partie pressurisée d'un fuselage [14].

I.4.3. Les composites dans la construction navale

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications navales. A partir de 1955, l'apparition des tissés de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement... [15].

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l'eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification [16].

I.5. Recyclage des composites

I.5.1. Introduction et problématique

Les préoccupations environnementales et la pression réglementaire ont poussé les industriels de la filière des matériaux composites à développer des solutions de recyclage et de valorisation, matière, thermique/énergétique ou chimique. Dans un contexte réglementaire, différentes initiatives professionnelles visent à mettre en place des filières de démantèlement / recyclage /valorisation de ces matériaux par secteur d'application ou de manière transversale.

Les matériaux composites à matrice polymère sont utilisés de longue date à grande échelle dans des applications industrielles variées (transport, bâtiment ...). Leur recyclabilité, perçue comme étant difficile ou pour le moins perfectible du fait de leur hétérogénéité et du recours encore fréquent à des matrices thermodurcissables (infusibles après fabrication), peut toutefois constituer un frein à leur pénétration plus large de certains marchés. Certains utilisateurs peuvent en effet être amenés à préférer aux composites des matériaux alternatifs plus facilement recyclables.

Cette famille de matériaux hétérogènes et souvent anisotropes couvre majoritairement les composites à matrices thermodurcissables (massivement polyester insaturé, et dans une moindre mesure époxy, phénolique, polyuréthane, polyamide ...), de plus en plus concurrencés toutefois pas les composites à matrices thermoplastiques (polypropylène, polyamide ...). Les renforts, très majoritairement à base de verre, et dans une moindre mesure à base de carbone ou aramide, sont utilisés sous des formes diverses allant de la fibre (coupée courte ou longue, ou continue) aux tissus et préformes textiles complexes, parfois associés à des charges minérales.

Perçue de ce fait comme étant difficile ou pour le moins perfectible du fait de leur hétérogénéité et de la prédominance actuelle des formulations thermodurcies, la recyclabilité des composites peut toutefois constituer un frein à leur pénétration plus large de certains marchés. Contrairement aux idées reçues, l'apparition sur le marché des « bio » ou « agro » composites associant matrices et renforts issus de ressources renouvelables, végétales en général, ne constitue pas une panacée dans la mesure où le problème de leur recyclage subsiste. Les applications visées pour les composites structuraux sont en effet durables, et dans ce cas, contrairement au secteur de l'emballage, la biodégradabilité des formulations n'est pas un avantage mais plutôt un inconvénient que l'on cherche à pallier.

I.5.2. Impératif du recyclage

Les préoccupations environnementales, à la fois en termes de limitation de l'utilisation de ressources fossiles et de nécessité de gestion des déchets produits, ont conduit à accroître la pression pour recycler les matériaux. La hiérarchie des différentes solutions adoptables est bien établie, avec par ordre de préférence décroissant [6] :

- ❖ la réduction de la masse des déchets par prévention à la source lors de la production ;
- ❖ la réutilisation des produits ;
- ❖ le recyclage des matériaux ;
- ❖ le recyclage d'une partie des constituants des matériaux ;
- ❖ l'incinération des déchets ;

- ❖ avec valorisation matière et énergétique ;
- ❖ avec valorisation énergétique seulement ;
- ❖ sans valorisation énergétique ;
- ❖ la mise en décharge.

À chaque fois qu'il s'avère rentable de recycler, les filières de recyclage de matériaux sont désormais bien établies, gouvernées par des raisons économiques, comme dans le cas de l'industrie des métaux. Les polymères et polymères renforcés (i.e. composites à matrice organique) sont en général moins faciles à recycler, et les incitations économiques sont moins favorables, en particulier tant que la mise en décharge est relativement peu coûteuse. Cas critique, 90 % des déchets de production en composites à matrice thermodurcissable sont encore mis en décharge, avec un coût en forte augmentation et la menace d'une interdiction totale de mise en décharge pour les déchets non « ultimes ». La non-recyclabilité légendaire des composites à matrice thermodurcissable peut amener les utilisateurs à leur préférer des matériaux alternatifs plus facilement recyclables. Afin de pallier la menace qui pèse sur le développement et la pérennité de la filière composites, l'identification et la mise en place de solutions alternatives à la mise en décharge des déchets de production et au-delà des produits en fin de vie est cruciale [6]

Chapitre II

Principales lois de comportement élastique des milieux matériels

II.1. Introduction

Les lois de comportement ont pour objectif de décrire et de prédire le comportement de milieux matériels soumis à des sollicitations extérieures d'origine mécanique ou thermique. Ces lois sont évidemment empiriques. Ces dernières sont contraintes de satisfaire le second principe de la thermodynamique.

Le respect des symétries du milieu matériel étudié est également demandé et aussi de vérifier des conditions liées à la stabilité des équilibres.

II.2. Etat de contraintes et de déformations dans un solide :

Le tenseur des contraintes est une représentation utilisée en mécanique des milieux continus pour caractériser l'état de contrainte, c'est-à-dire les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées du milieu. Ce chapitre présente quelques notions générales portant sur les lois de comportement des milieux anisotropes et plus particulièrement des matériaux orthotropes et isotropes transverses.

II.2.1. Tenseur des contraintes

σ est un tenseur d'ordre 2, à 3 lignes et 3 colonnes. Il est défini localement pour un point M donné, noté σ_{ij} et représenté par la matrice :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1})$$

En statique, le tenseur des contraintes est toujours symétrique, c'est-à-dire que :

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13},$$

II.2.2. Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état de déformation local résultant de contraintes (efforts internes).

Si l'on fait l'hypothèse des petites déformations, on néglige les termes du second ordre et on obtient le tenseur des déformations linéarisé :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{II.2})$$

D'où : $\vec{u}(p)$ est le vecteur de déplacement du point p.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (II.3)$$

II.2.3. Equations de Compatibilité

Ainsi que nous l'avons constaté, les différents tenseur déformations sont issus de la donnée d'un champ vectoriel, le champ de déplacement. Les relations permettent sans ambiguïté de calculer, dans un repère quelconque, les composantes de chacun de ces tenseurs dès lors que l'on connaît les composantes du vecteur déplacement. Ces relations s'appelle les conditions de compatibilité et elles ne sont en fait que les conditions d'intégrabilité au sens de Cauchy pour un système d'équations différentielles.

Dans un système de coordonnées cartésiennes nous avons les relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i \neq j \quad (II.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right), \quad i \neq j \neq k$$

II.2.4. Matrice de Rigidité

La relation d'élasticité linéaire est décrite par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (II.5)$$

Sous la forme matricielle, elle s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.6)$$

$C_{ijkl} = C_{klij}$ Si on considère l'énergie de déformation,

D'où : $C = [C_{ij}]$ est la matrice de rigidité symétrique de 21 composantes indépendantes, exprimée dans la base $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Dans le cas de changement de base, la matrice de rigidité C devient $C' = [C'_{ij}]$, exprimée dans la nouvelle base $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.

Donc :

$$\text{Dans la base } (\vec{e}) : \sigma = C\varepsilon. \quad (II.7)$$

$$\text{Dans la base } (\vec{e}') : \sigma' = C'\varepsilon'. \quad (II.8)$$

$$\text{Sachant que : } \sigma' = T_\sigma^{-1}\sigma \quad \text{et} \quad \varepsilon' = T_\varepsilon^{-1}\varepsilon. \quad (II.9)$$

D'où : T_σ et T_ε sont respectivement les matrices de changement de base (appelé aussi matrice de transformation) des contraintes de déformations.

$$\sigma' = T_\sigma^{-1}\sigma = T_\sigma^{-1}C\varepsilon = T_\sigma^{-1}C T_\varepsilon \varepsilon' \quad (II.10)$$

A partir des deux relations (II.7) et (II.9), on peut exprimer le changement de base de la matrice de rigidité :

$$C' = T_\sigma^{-1}C T_\varepsilon \quad (II.11)$$

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (II.13)$$

II.2.5. Matrice de souplesse (ou de complaisance)

La relation d'élasticité linéaire (II.4) peut être écrite sous la forme inverse, comme :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = S\sigma \quad (II.14)$$

La matrice S est la matrice inverse de la matrice de rigidité C , et s'écrit dans le cas général comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.15)$$

Avec :

$$S = C^{-1} \quad (II.16)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelés constantes de souplesse ou de complaisance.

La relation de changement de base de la matrice de souplesse s'exprime par :

$$S' = T_\varepsilon^{-1} S T_\sigma \quad (II.17)$$

II.3. Matériaux Anisotropes

II.3.1. Introduction

Au sens général du terme, une grandeur physique (macroscopique ou microscopique) est anisotrope, ou isotrope, selon qu'elle dépend ou non de la direction suivant laquelle on la mesure. Ainsi, la densité d'un corps homogène ou la fonction de distribution des vitesses à l'équilibre thermodynamique sont des grandeurs isotropes, tandis que cette même fonction de distribution en régime de transport est anisotrope. Dans cette acception générale, le temps et l'espace étant des grandeurs physiques (puisque mesurables), on parle souvent de leur isotropie ou de leur anisotropie. Par exemple, pour une nappe unidirectionnelle, la résistance et la rigidité sont beaucoup plus grandes dans le sens des fibres que dans les autres directions[17].

II.3.2. Matériau Monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un seul plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une relation d'élasticité linéaire de la forme [17]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.18)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

II.3.3. Matériau orthotrope

L'orthotropie désigne des caractéristiques de symétrie d'un matériau. C'est un cas particulier d'anisotropie. Un matériau est orthotrope s'il possède trois plans de symétrie orthogonaux entre eux. Son comportement élastique est alors défini par neuf modules d'élasticité, son comportement thermique par trois constantes thermiques.

. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une relation d'élasticité linéaire de la forme [18]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \tag{II.19}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

II.3.4. Matériau isotrope transverse

Un matériau est orthotrope de révolution, ou transversalement isotrope, s'il possède un axe de symétrie de révolution et admet une symétrie par rapport à n'importe quel plan passant par cet axe et une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe. Il n'y a alors plus que 5 modules d'élasticité et deux constantes thermiques. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité(ou de souplesse). D'où un matériau composite unidirectionnel qui peut être considéré comme un matériau isotrope transverse (Figure II.1).

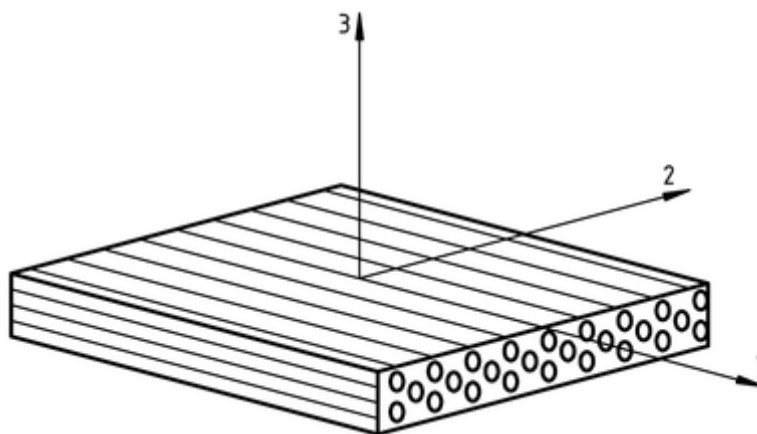


Figure II.1 : Matériau composite unidirectionnel

Si le plan (2, 3) est un plan d'isotropie, les modules d'élasticité de mêmes indices dans les deux bases $R(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $R'(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ qui sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 &= \cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= -\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ont la même valeur quel que soit l'angle α (Fig. II.2).

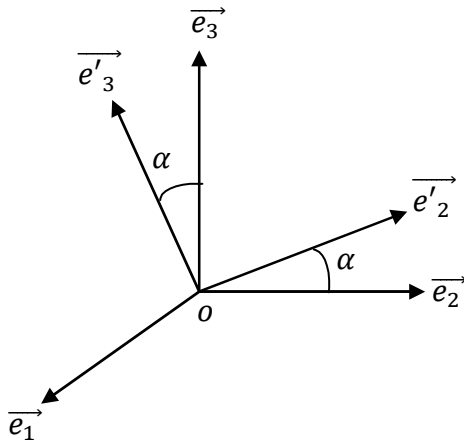


Figure II.2 : plan d'isotropie transverse

La matrice de passage de la base (R) à la base (R') est sous la forme :

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

a pour composantes non nulles :

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 1 \\ \beta_{22} &= \beta_{33} = \cos \alpha \\ \beta_{32} &= -\beta_{23} = \sin \alpha \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les composantes non nulles de β sont:

$$\beta_{11} = 1, \quad \beta_{32} = 1, \quad \beta_{23} = -1$$

La formule de changement de base :

$$C'_{ijkl} = \beta_{pi} \beta_{qj} \beta_{rk} \beta_{sl} C_{pqrs} \tag{2.23}$$

Le développement de la relation (2.22) conduit à :

$$C_{33} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{12}, \quad C_{55} = C_{66} \tag{2.24}$$

et

$$S_{33} = S_{22}, \quad S_{13} = S_{12}, \quad S_{55} = S_{66} \tag{2.25}$$

Compte tenu des relations (II.23) et (II.24), la matrice de rigidité est composée de 6 constantes indépendantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.27)$$

Pour un angle α quelconque, on a :

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 1. \\ \beta_{22} &= \cos \alpha, & \beta_{23} &= -\sin \alpha \\ \beta_{32} &= \sin \alpha, & \beta_{33} &= \cos \alpha \end{aligned} \quad (II.28)$$

On obtient après développement des relations (II.28) donc :

$$2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha C_{22} = 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (C_{23} + 2C_{44}).$$

Cette relation est vérifiée quel que soit l'angle α si on a :

$$C_{22} = C_{23} + 2C_{44} \quad \text{d'où} \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad (II.29)$$

De ce fait, un matériau isotrope transverse est caractérisé par 5 constantes d'élasticité indépendantes. Ainsi la relation d'élasticité linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.30)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (II.31)$$

II.4. Matériaux Isotropes

II.4.1. Introduction

On dit qu'un système est isotrope si aucune de ses propriétés (macroscopiques) ne possède de dépendance directionnelle, c'est-à-dire que, ces propriétés étant toujours représentées par des tenseurs spécifiques (conductivité, constante diélectrique, module d'élasticité), leurs composantes sont invariantes par rapport à une rotation du trièdre de référence (réflexion et inversion incluses). Il suffit qu'une seule propriété soit directionnelle pour que le corps cesse d'être isotrope. L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

$$C_{22} = C_{11}, \quad C_{23} = C_{12}, \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad (II.32)$$

II.4.2. Relation d'élasticité

Un milieu isotope est caractérisé par 2 constantes d'élasticité indépendantes C_{11} et C_{12} qui seront exprimées en introduisant les coefficients de lamé λ et μ [16] :

$$C_{22} = \lambda, \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu, \quad (II.33)$$

$$\text{D'où :} \quad C_{11} = \lambda + 2\mu \quad (II.34)$$

La matrice de rigidité devient comme suit :

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & S_{22} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (II.35)$$

La relation d'élasticité linéaire (II.4) dans un milieu isotope sera exprimée en fonction des constantes de lamé par :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (II.36)$$

D'où :

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad \text{Dilatation Volumique}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{Le tenseur de Kronecker}$$

Les contraintes normales ($i=j$) s'écrivent alors :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad (II.37)$$

Les contraintes tangentielles (de cisaillement) ($i \neq j$) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (II.38)$$

De la relation (II.35), nous déduisons :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

Ou bien :

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} \quad (II.39)$$

Les déformations en fonction des contraintes s'obtiennent facilement à partir des relations (II.35) et (II.37) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right), \quad (II.40)$$

Les déformations normales ($i=j$) s'écrivent alors :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ii} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ii} \sigma_{kk} \right), \quad (II.41)$$

Et les déformations tangentielles :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (II.42)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}, \quad (II.43)$$

De ce fait, on peut exprimer la matrice de rigidité et la matrice de souplesse d'un matériau isotrope en fonction de E et ν par :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ \sigma_{44} = \sigma_{55} = \sigma_{66} &= \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \end{aligned}$$

La détermination de la matrice de souplesse S fait intervenir le calcul de la matrice de C donnée par la relation (II.34) :

$$\begin{aligned} S_{11} = S_{22} = S_{33} &= \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{4\mu^2(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{E} \\ S_{12} = S_{13} = S_{23} &= \frac{\lambda(\lambda + 2\mu) - \lambda^2}{4\mu^2(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{E} \\ S_{44} = S_{55} = S_{66} &= \frac{1}{\mu} = 2 \frac{1+\nu}{E} \end{aligned}$$

La matrice de souplesse s'écrit dans toute base comme :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.44})$$

II.5. Equations d'équilibre pour un Milieu matériel

L'équation d'équilibre pour la dynamique s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + P_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + P_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + P_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

L'équation d'équilibre pour la statique s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{II.46})$$

Sous l'effet des actions imposées (forces volumiques et conditions aux limites), un ensemble ou un corps se déforme. Le problème de la mécanique des solides déformables consiste à rechercher le champ des déplacements $\vec{u}(M, t)$ et le champ des contraintes $\sigma(M, t)$ en tout point M de cet ensemble, vérifiant [19] :

- 1- La relation fondamentale d'équilibre soit pour la dynamique, ou soit pour la statique.
- 2- Les relations déformations-déplacements dans le cas de petites déformations.
- 3- Les conditions de compatibilité.
- 4- Les conditions aux frontières.

La loi de comportement du matériau $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl})$.

Chapitre III

Introduction au comportement mécanique d'un matériau composite

III.1. Introduction

Les recherches menées durant les vingt dernières années permettent de mieux décrire le comportement des matériaux composites à matrice céramique ou organique. De nouvelles lois de comportements permettent de prendre en compte l'évolution de l'endommagement dans les structures industrielles et donc de prévoir leurs défaillances.

III.2. Loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel (UD)

Un composite à renfort unidirectionnel est constitué de fibres parallèles continues orientées dans une direction (sens longitudinal) afin de supporter des efforts importants. Lorsque les fibres sont disposées dans un plan (figure III.1), elles constituent un pli (ou monocouche, ou strate, ou encore nappe). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude.

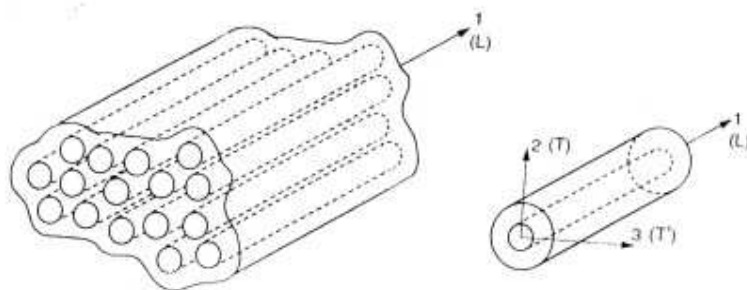


Figure III.1 : Pli à Renforcement unidirectionnel.

III.2.1. Equation de comportement mécanique d'un pli composite

On prend une cellule élémentaire constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (Figure III.2), le composite est considéré comme étant isotrope transverse.

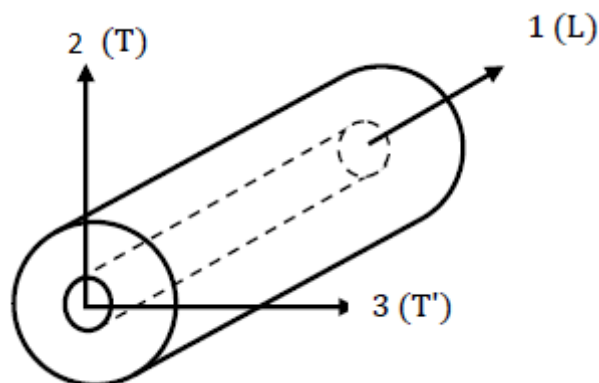


Figure III.2 : Cellule élémentaire.

Le comportement élastique d'un matériau composite UD est décrit par la relation (II.30) à (II.31) du chapitre 2. La loi de Hooke s'écrit suivant la forme indicelle:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Ou la forme inverse donne:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite UD est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{66}$$

Où :

$$S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{66}$$

Ces constantes de rigidité et de souplesse sont interprétées par les modules de l'ingénieur : les modules d'Young E_{11} et E_{22} , le module de cisaillement G_{12} et les coefficients de poisson ν_{12} et ν_{23} , qui sont mesurés dans des essais simples tels que : les essais de traction uni axiale, ou de cisaillement pur.

Les coefficients de souplesse sont liés aux constantes de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité, d'où les lois de comportement des matériaux composites sont basées sur l'utilisation des constantes de souplesse dont les relations s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & ; & & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}} & ; & & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} & . & & & \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Ce type de matériau est isotrope dans le plan normal à la direction des fibres. Il se comporte comme un matériau isotrope transverse pour lequel tout plan passant par un axe privilégié est un plan de symétrie mécanique. La loi de comportement s'écrit en fonction des modules de l'ingénieur comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (III.4)$$

C'est pour le cas d'un état de contraintes planes appliqué à un pli orthotrope unidirectionnel défini dans le plan 1-2, comme indiqué sur la (Figure III.2) .

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou bien :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & 0 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (III .5)$$

Avec :

$$\sigma_i = 0 \quad si \quad i = 3,4,5$$

$$\sigma_i \neq 0 \quad si \quad i = 1,2,6$$

En chaque point M du matériau, la contrainte σ_{zz} ou σ_i est la contrainte principale avec une valeur nulle. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de contraintes planes. La relation (III.5) donnant les composantes du tenseur de déformations en fonction du tenseur des contraintes se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (III.6)$$

Son inverse nous permet d'obtenir la matrice de rigidité réduite :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (III.7)$$

Les constantes de rigidité réduites sont exprimées comme suit :

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad , \quad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad (III.8)$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad , \quad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

Les relations précédentes permettent d'exprimer les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (III.9)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad ; \quad Q_{66} = G_{12}$$

Lorsque l'orientation des fibres ne coïncide pas avec le système d'axe de symétrie matérielle du composite x et y (Figure III.3), les états de contraintes et de déformations sur deux repères orthonormés différents seront définis par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (III.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2\sin \theta \cos \theta & -2\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (III.11)$$

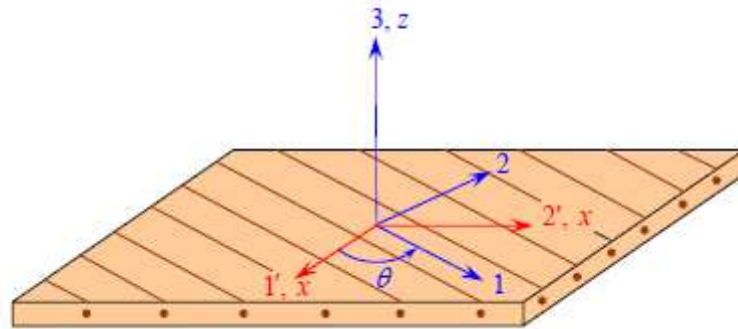


Figure III.3 : Pli composite UD en-dehors de ses axes principaux.

Les équations de transformation de base des contraintes (III.10) et des déformations (III.11) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{\sigma}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{\varepsilon}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

La substitution de la relation (III.10) et (III.11) dans les équations contraintes déformations (III.7), permet d'exprimer la loi de comportement d'un pli composite à renforcement unidirectionnel dans le système d'axes arbitraires x et y.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Avec : $[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]_e$

La relation (III.12) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Dont les rigidités réduites transformées \bar{Q}_{ij} sont données par la relation (III.14):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Par inversion, on peut déterminer la matrice de souplesses transformées $[\bar{S}]$ exprimée toujours dans le système d'axes arbitraires x et y.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Dont les souplesses réduites transformées \bar{S}_{ij} sont données par la relation (III.16):

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} + 2S_{12} - Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{S}_{66} &= 2[2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Le comportement élastique d'un pli dans le système d'axes arbitraires x et y , fait intervenir de nouvelles expressions des souplesses réduites transformées \bar{S}_{ij} :

$$\begin{aligned}\bar{S}_{11} &= \frac{1}{E_x} & ; & \quad \bar{S}_{11} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \\ \bar{S}_{22} &= \frac{1}{E_y} & ; & \quad \bar{S}_{11} = \frac{n_{xy,x}}{E_x} = \frac{n_{x,yx}}{G_{xy}} \\ \bar{S}_{66} &= \frac{1}{G_{xy}} & ; & \quad \bar{S}_{26} = \frac{n_{xy,y}}{E_y} = \frac{n_{y,xy}}{G_{xy}}\end{aligned}\tag{III.17}$$

Avec : $n_{i,j} = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}}$ pour $\tau_{ij} \neq 0$

$n_{ij,i}$, est un coefficient de couplage non classique caractérisant une déformation linéaire dans la direction i causée par un cisaillement dans le plan i - j .

Et : $n_{ij,i} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i}$ pour $\sigma_{ij} \neq 0$

$n_{ij,i}$, est un coefficient de couplage non classique caractérisant une distorsion angulaire dans le plan i - j causée par une contrainte normale dans la direction i .

III.3. Les caractéristiques du mélange renfort – matrice

Il est fondamental pour le concepteur de prévoir et de connaître aussi précisément que possible les caractéristiques géométriques d'un mélange « renfort + matrice » qui est la structure de base des pièces composites, [8].

On qualifie couramment le nom de pli le demi - produit « renfort + matrice » présenté sous forme quasi bidimensionnelle

- ✓ un unidirectionnel + matrice
- ✓ un tissu (chaîne + trame) +matrice.
- ✓ un mat + matrice.
- la teneur en masse de renfort :

On appelle ainsi le rapport : $M_f = \frac{\text{Masse de renfort}}{\text{Masse totale}}$ (III.18)

En conséquence :

- la teneur en masse de matrice est telle que :

$$M_m = \frac{\text{Masse de matrice}}{\text{Masse totale}}\tag{III.19}$$

Ou encore : $M_m = 1 - M_f$ (III.20)

- la teneur en volume de renfort :

$$V_f = \frac{\text{Volume de renfort}}{\text{Volume totale}} \quad (\text{III.21})$$

En conséquence :

- la teneur en volume de matrice est telle que :

$$V_m = \frac{\text{Volume de matrice}}{\text{Volume totale}} \quad (\text{III.22})$$

Ou encore : $V_m = 1 - V_f$ (III.23)

III.4 . Calcul des caractéristiques mécaniques de composite

III.4.1. Module d' Young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale figure (III.4) :

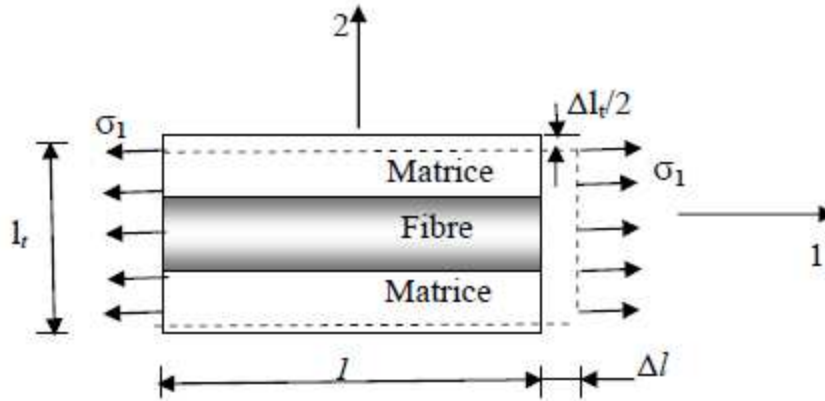


Figure III.4 schéma simplifié d'une traction longitudinale [8].

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$$

Où l est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l \quad (\text{III.24})$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_l \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_l \quad (\text{III.25})$$

La charge totale appliquée est : $F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m$ (III.26)

Où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\sigma_l = \frac{F_1}{S}$ s'écrit :

$$\sigma_l = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (\text{III.27})$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_l = E_l \varepsilon_l \tag{III.28}$$

La combinaison des relations (III.25) et (III.28) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_l = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \tag{III.29}$$

Cette expression est connue sous le nom de loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres.

III.4.2. Module d'Young transversal

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversal ou le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres (figure .III-5).

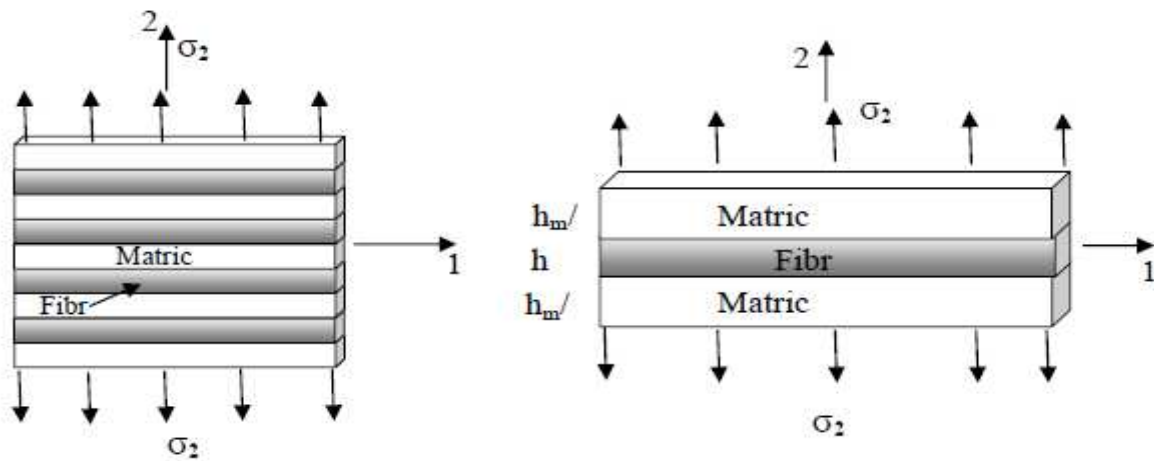


Figure III.5 schématisation par couches d'un composite unidirectionnel [8].

La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f - h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_f}{h_f - h_m} \tag{III.30}$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transversale est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_f = \sigma_m = \sigma_2$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transversale s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \tag{III.31}$$

L'allongement transversal d'une cellule élémentaire est :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m$$

Et la déformation transversale s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (\text{III.32})$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transversale :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (\text{III.33})$$

La combinaison des expressions 31 et 33 conduit à l'expression du module transversal :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1-V_f}{E_m} \quad (\text{III.34})$$

L'expression du module d'Young transversal est :

$$E_T = E_m \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{E_m}{E_f} - 1 \right] V_f} \right] \quad (\text{III.35})$$

III.4.3. Module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal G_{LT} est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la (figure III.6).

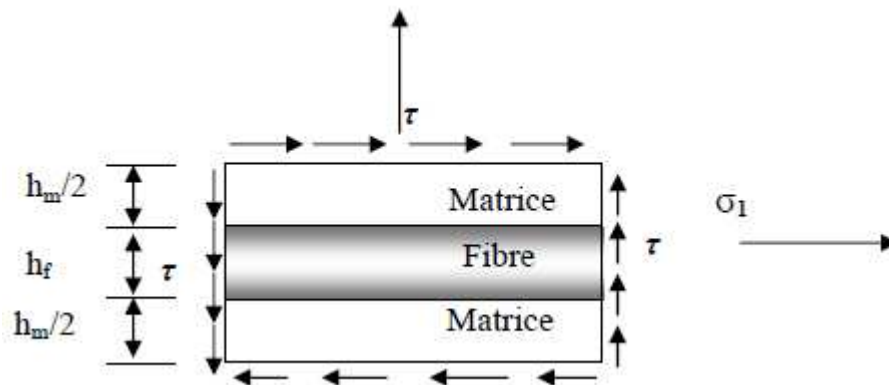


Figure III.6. Schéma par couches d'un essai cisaillement longitudinal [8].

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (\text{III.36})$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m$$

La déformation totale de la cellule est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (\text{III.37})$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT}

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}}$$

En combinant les expressions 36 et 37, nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m} \quad (\text{III.38})$$

L'expression du module de cisaillement longitudinal est :

$$G_{LT} = G_m \left[\frac{1}{(1-V_f) \frac{G_m}{G_{ft}} V_f} \right] \quad (\text{III.39})$$

III.4.4. Coefficient de poisson longitudinal

Le coefficient de poisson est déterminé dans un essai de traction longitudinale, schématisé sur (la figure III.7).

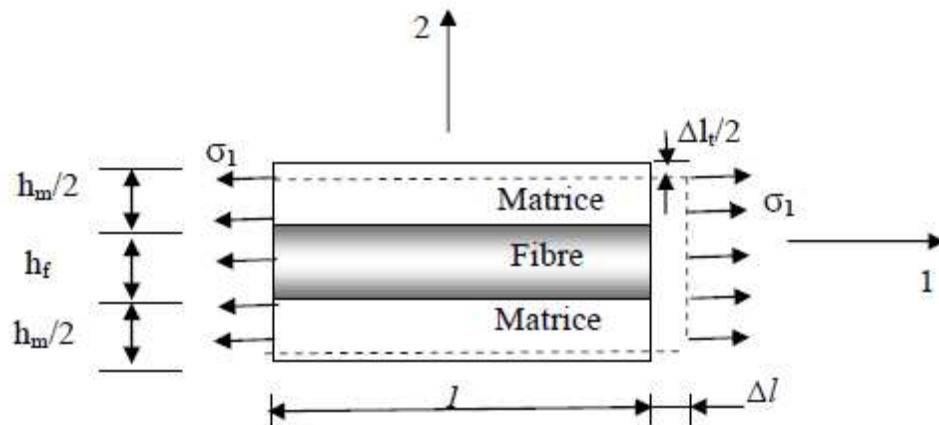


Figure III.7. Schéma par couches d'une traction [8].

Les déformations transversales dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1$$

L'allongement transversal de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon h_m - \nu_f \varepsilon h_f$$

Et la déformation transversale s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_m - h_f} = -[v_m(1 - v_f) + v_f V_f] \varepsilon_1$$

D'où l'expression du coefficient de poisson :

$$v_{LT} = v_f V_f + v_m(1 - V_f) \quad (\text{III.40})$$

III.5. Théorie classique simplifiée des stratifiés

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré. Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont donc nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{III.41})$$

Cela implique donc :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen. L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés, est schématisé sur la figure III.8.

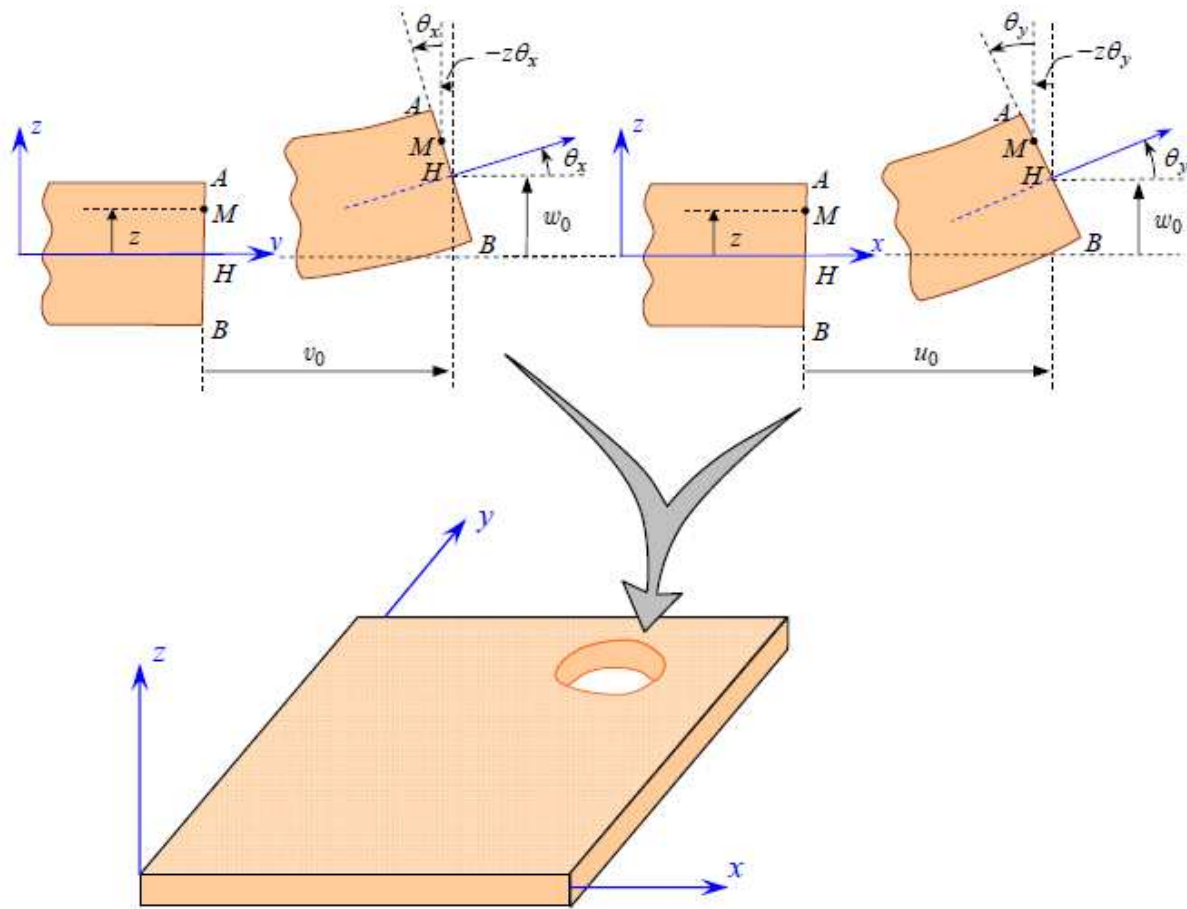


Figure III.8 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés.

III.5.1. Théorie classique simplifiée des stratifiés (sans cisaillement transverse)

III.5.1.1. Champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit, en tenant compte des expressions (III.42) :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
 \epsilon_{zz} &= 0, \\
 \gamma_{xz} &= 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{III.44}$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le champ des déformations est la superposition :

- **des déformations en membrane :**

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (**oxy**) des points ce plan :

- **Des déformations en flexion et torsion :**

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y)$$

$k(x, y)$: est appelée (matrice des courbures) de la plaque stratifiée en flexion :

Le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M)$$

Tel que :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

III.5.1.2. Champ des contraintes :

les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \bar{Q}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (\text{III.47})$$

Sachant que : $\bar{Q}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k$

où \bar{Q}_k est la matrice de rigidité réduite de la couche k . En tenant compte de (III.46), les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.48}$$

Ou bien :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon^0(x, y) + z \bar{Q}_k k(x, y) \tag{III.49}$$

La matrice $\sigma_k(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche k :

$h_{k-1} \leq z \leq h_k$. la matrice de rigidité réduite varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

III.5.1.3. Expression des Résultantes et Moments :

III.5.1.3.1. Résultantes en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $\mathbf{N}(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz,$$

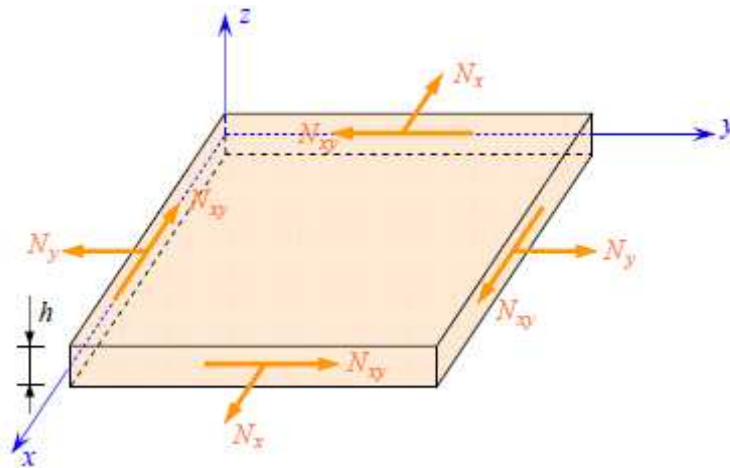


Figure III.9 : Efforts de membrane appliqués sur un stratifié.

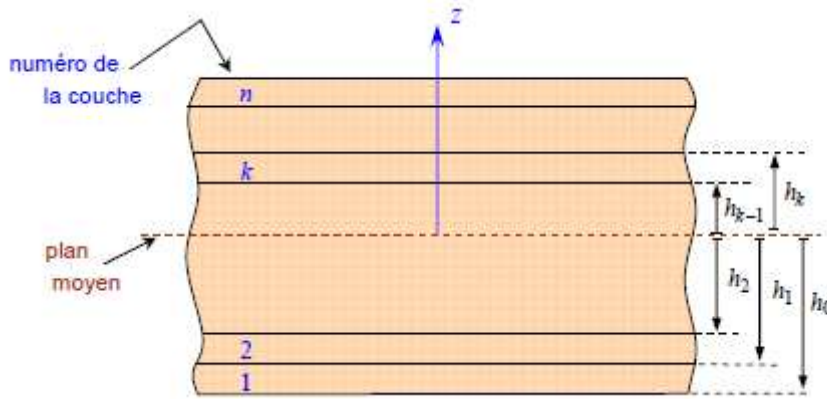


Figure III.10 : Géométrie des N-couches du stratifié.

Les composantes N_x, N_y, N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure III.9 .

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{III.50}$$

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (III.50) sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{III.51}$$

Où h_{k-1} et h_k sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre k et $k-1$ dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la Figure III.10.

La substitution de l'équation (III.48) dans l'équation (III.51) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right] dz \tag{III.52}$$

Puisque la matrice $[\bar{Q}]_k$ n'étant pas en fonction de la distance z , $[\varepsilon^0]$ et $[k]$ sont indépendantes de z et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (III.52) peut alors être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.53})$$

Dont les coefficients A_{ij} sont appelés les rigidités de membrane :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{Q}_k$$

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] \quad ; \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k \quad (\text{III.54})$$

Les coefficients B_{ij} sont appelés les rigidités de couplage :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k$$

$$\mathbf{B} = [B_{ij}] \quad ; \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k \quad (\text{III.55})$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane ($\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$) (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion (k_x, k_y, k_{xy}).

III.5.1.3.2. Comportement en flexion et torsion :

- Résultantes en flexion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (\text{III.56})$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure (III.11)

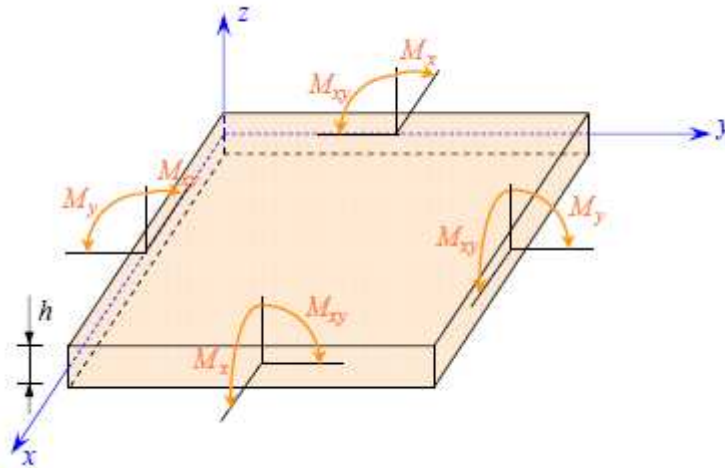


Figure III.11 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k k(x, y)] dz \quad (III.57)$$

Ce qui conduit à :

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) \bar{Q}_k \right] k(x, y) \quad (III.58)$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$M_f(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D k(x, y) \quad (III.59)$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.60)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \bar{Q}_k \quad (III.61)$$

$D = [D_{ij}]$: La matrice de rigidité en flexion

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

III.5.2. Théorie classique simplifiée des stratifiés (avec cisaillement transverse)

- Résultantes en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (\text{III.62})$$

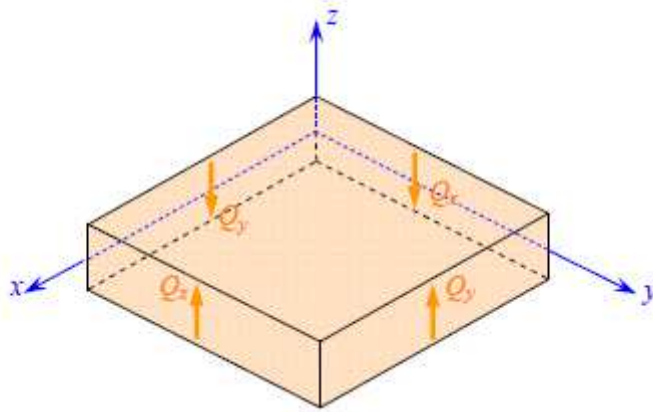


Figure III.12 : Schématisation des résultantes en cisaillement.

Comme les résultantes en membranes et les résultantes en flexion, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

La multiplication des deux premières équations d'équilibre (II.45) par z puis les intégrer suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales de mouvement relatives aux résultantes en flexion :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{III.63})$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} - \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{III.64})$$

Avec P_x et P_y les composantes des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z P_x dz \quad \text{et} \quad P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z P_y dz \quad (\text{III.65})$$

La grandeur I_{xy} est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (oxy) du stratifié localisé aux points (x, y) et ayant des côtés égaux à l'unité, et s'écrit :

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^N \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (\text{III.66})$$

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième des équations (II.45) conduit à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{III.67}$$

D'où : q est la différence entre les composantes de pression exercées sur chaque face du stratifié :

$$\sigma_{zz}(h/2) \text{ et } \sigma_{zz}(-h/2)$$

Avec :

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz$$

Une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant notée (III.68):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \tag{III.68}$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, l'équation (III.68) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{III.69}$$

III.5.2.1. Champ des déformations :

Le tenseur des déformations en point M du stratifié est donc :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

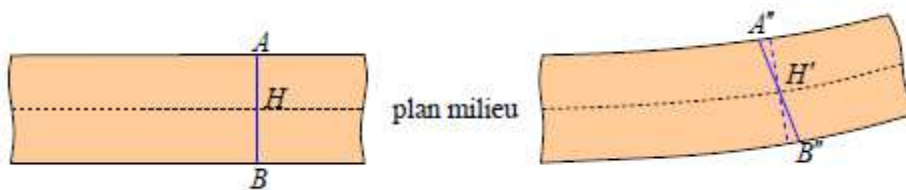


Fig. III.8 déformation dans le cas d'un schéma du premier degré avec cisaillement transverse [8].

Et la matrice des déformations comporte cinq composantes non nulles : [9] et [10]

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Le champ des déformations peut être sous- divisé en deux champs :

- Le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{mf}(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M)$$

$$\varepsilon_{mf}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (III.70)$$

- Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (III.71)$$

III.5.2.2. Champ des contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation générale :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \dots \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & \vdots & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & \vdots & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (III.72)$$

Module de cisaillement transversal, d'après [10] :

$$G_{TT} = G_m \left[1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + \frac{7G_m}{3}}{2k_m + \frac{8G_m}{3}} (1 - V_f)} \right] \quad (III.73)$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}$$

III.5.2.3. L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.74})$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (c'_{ij})_k e_k \quad (\text{III.75})$$

➤ **Stratifiés équilibrés :**

Les structures stratifiées équilibrées comportent le même nombre de plis dans chacune des directions θ et $-\theta$. Il y a alors découplage entre les déformations de tension et les déformations de cisaillement plan. Les termes A_{16} et A_{26} sont nuls.

$$\widehat{\mathbf{N}} = \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{Y}} \quad \text{Soit :} \quad \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ \sqrt{2}N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & 0 \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \sqrt{2}\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.76})$$

Les \bar{A}_{ij} sont indépendants de l'ordre de l'empilement des plis. En effet pour ces stratifiés on a dans le cas de couches à $\pm\theta$ les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{16}(\theta) &= -\bar{Q}_{16}(-\theta) \\ \bar{Q}_{26}(\theta) &= -\bar{Q}_{26}(-\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_{16} = 0 \\ \bar{A}_{26} = 0 \end{cases}$$

➤ **Stratifiés à symétrie miroir :**

Les structures stratifiées à symétrie miroir comportent un nombre de plis pair dans chacune des directions, repartis de manière symétrique par rapport au plan moyen de la plaque stratifiée. Le comportement de membrane est découplé du comportement de flexion-torsion :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{N}} \\ \widehat{\mathbf{M}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{Y}} \\ \widehat{\mathbf{K}} \end{pmatrix} \quad \text{Avec :} \quad \widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{16} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{26} \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{26} & \bar{A}_{66} \end{bmatrix}$$

Où les \bar{A}_{ij} sont indépendants de l'ordre de l'empilement des plis.

➤ **Stratifiés équilibrés à symétrie miroir :**

Ce type de structures stratifiées comporte à la fois les propriétés des stratifiés équilibrés et les propriétés des structures stratifiées à symétrie miroir. Il y a alors découplage entre les déformations de tension et les déformations de cisaillement plan. Les termes A_{16} et A_{26} sont nuls. Le comportement de membrane est découplé du comportement de flexion-torsion.

Chapitre IV

Rupture et endommagement des stratifiés composites

IV.1. Introduction

Les défaillances mécaniques des structures en matériaux composites sont d'une tout autre nature que celles des constructions métalliques.

L'endommagement des pièces est le résultat de l'amorçage de plusieurs fissures à l'échelle microscopique (microfissures).

Les causes d'endommagement les plus préoccupantes sont les concentrations de contraintes autour des entailles et des trous.

Le comportement mécanique des matériaux composites à hautes performances est au plan macroscopique, quasi élastique est très largement linéaire, avec un allongement à rupture à l'ordre de 1%.une comparaison brutale avec les matériaux métalliques élastoplastiques pour lesquels l'allongement à rupture est de l'ordre de 10 % conduirait à penser que les matériaux composites doivent être classés dans les solides fragiles.

Ce qui n'est pas vrai, car bien qu'étant quasi élastique, la rupture des composites est précédé par un endommagement microscopique.

IV.2. Mécanismes d'endommagement

IV.2.1. Les Mécanismes Primaires

On appelle mécanismes primaires de l'endommagement potentiels d'un matériau hétérogène, notamment les composites à base de polymères soumis à une sollicitation mécanique, l'endommagement des fibres, celui de la matrice ou la décohésion entre ces deux derniers.

Les premiers endommagements observables au microscope optique apparaissent au niveau de la matrice du composites aux environs de tiers de la charge à la rupture. L'endommagement des renforts ne se produit qu'au moment de la rupture. Entre ces deux stades d'endommagement, il existe un troisième qui résulte de l'interaction fibres/matrices qui est la fissuration de l'interface. L'assemblage de ces divers mécanismes élémentaires conduit le matériau à la rupture finale.

Ces mécanismes s'étendent suivant la nature du matériau et les conditions de sollicitation imposées. [19]

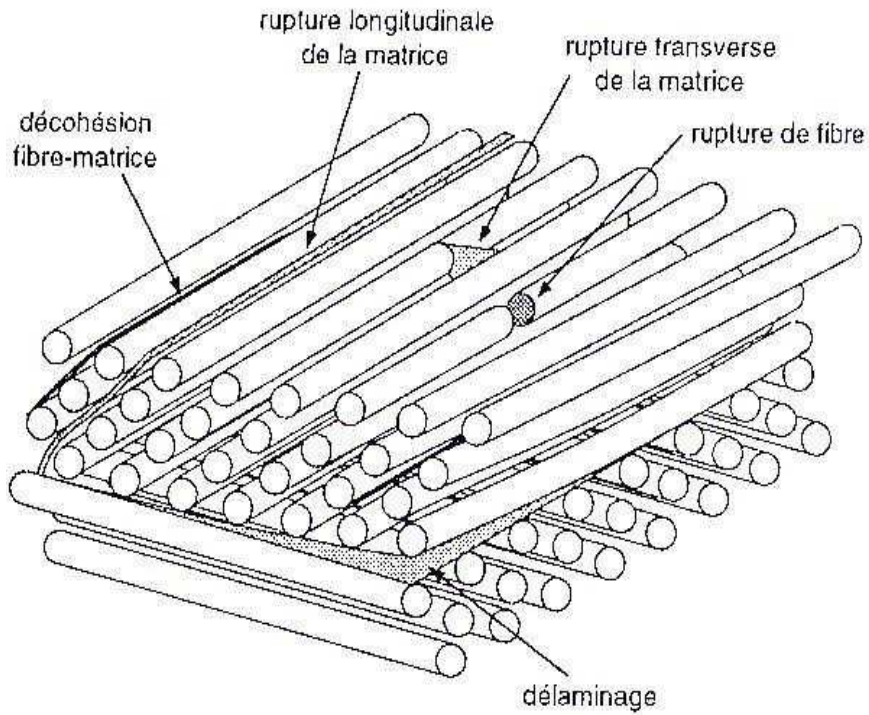


Figure IV.1. : Mécanismes d’endommagement observés dans un composite.

➤ La fissuration matricielle :

La complexité des matériaux composites, conduit à plusieurs types d’endommagements à l’échelle microscopique.

Les microfissures se produisant au sein de la matrice, apparaissent aux niveaux des porosités et des inclusions, soit par fissuration transversale (figure 3.2.a), soit par fissuration longitudinale (figure 3.2.b).

Ce dernier mode de rupture se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à celle de cisaillement. Cette fissuration se propage selon la direction perpendiculaire à la sollicitation et elle peut provoquer une décohésion fibre-matrice.

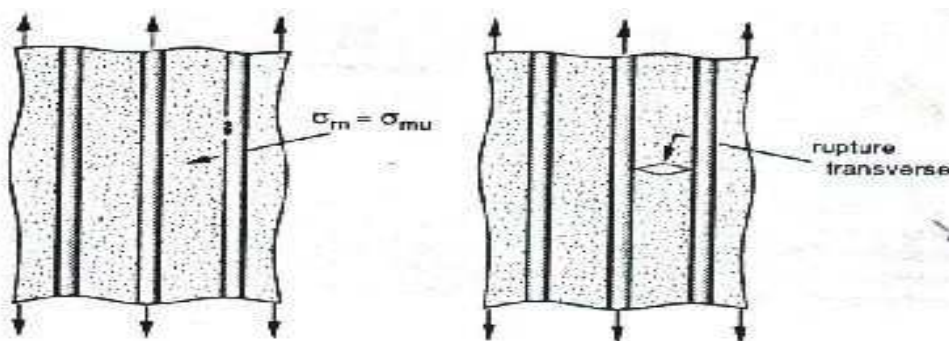


Figure IV.2.a : Fissuration transversale de la matrice.

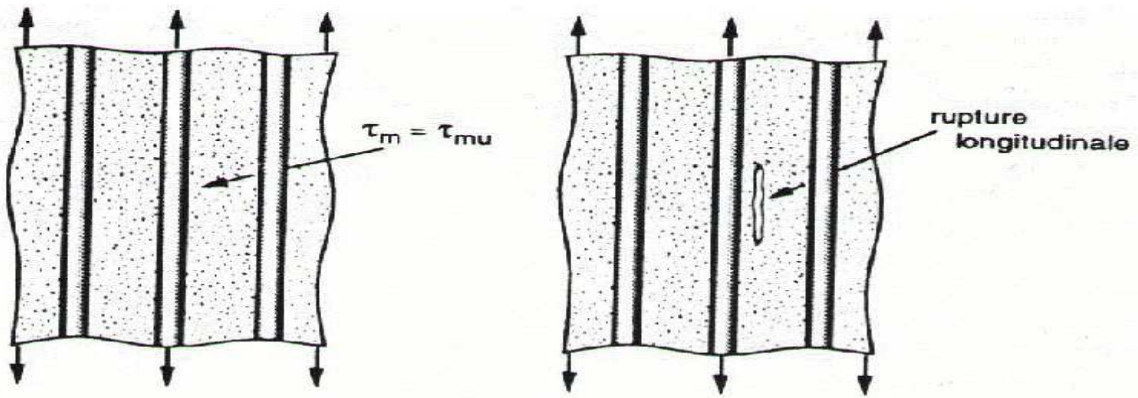


Figure IV.2.b : Fissuration longitudinale de la matrice.

➤ La Rupture des fibres :

La rupture de fibre intervient lorsque la contrainte de traction σ_f dans une fibre atteint la contrainte à la rupture σ_{fr} de la fibre. Elle se produit souvent dans les plis les moins désorientés par rapport à la direction de sollicitation. L'excès d'effort provoquera la rupture des constituants voisins. (Figure IV.2.c)

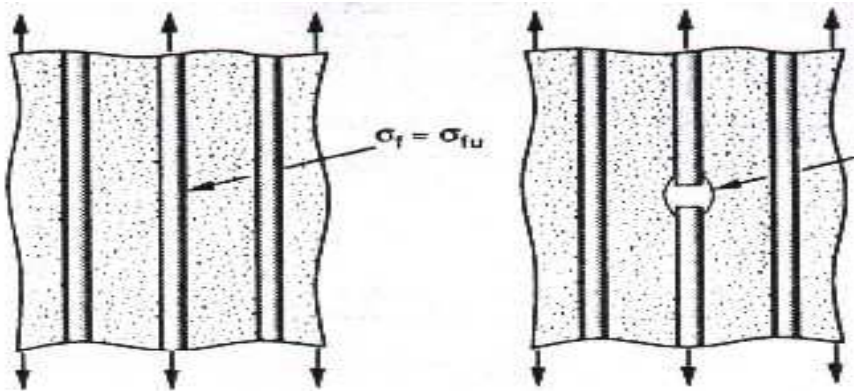


Figure IV.2.c : Rupture de la Fibre

➤ Endommagement de l'interface [5]

La rupture par décohésion de l'interface fibre matrice se produit lorsque la contrainte de décohésion est inférieure à la contrainte en cisaillement à la rupture

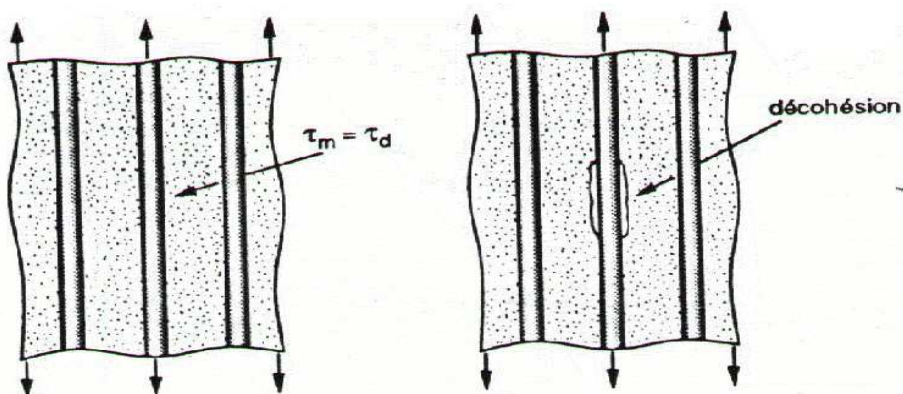


Figure IV.2.d : Rupture de l'interface.

Tous ces dommages sont internes, les critères d'endommagement et de rupture des composites doivent nécessairement tenir compte de l'aspect tridimensionnel. Pour cela l'étude de l'endommagement fait appel à des moyens classiques (ex : microscopie) mais aussi à des moyens d'observation spécifiques comme la radiographie, la tomographie ou l'holographie qui permettent, mieux que la microscopie, des observations tridimensionnelles.

Enfin, il convient de souligner l'ambiguïté de la notion d'endommagement dans les composites car toutes les microfissures qui apparaissent dans la matrice ne conduisent pas toujours à un affaiblissement de la résistance résiduelle du composite. A priori, une microfissure de la résine doit être vue comme une altération ou une modification de la géométrie avant d'être vu comme un dommage.

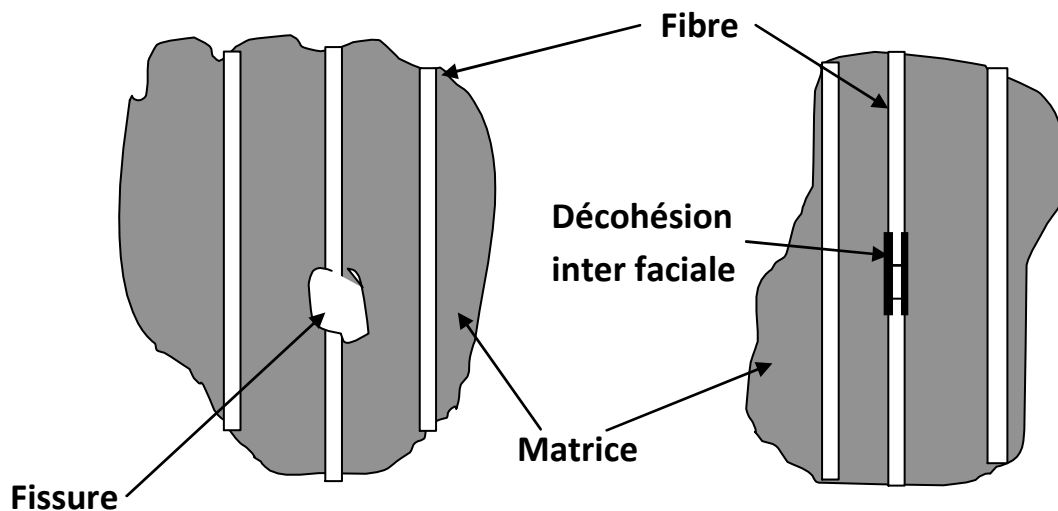


Figure IV.3 : Processus de rupture intervenant suite à la rupture de fibre dans un composite unidirectionnel

IV.3. Les Modes de rupture

IV.3.1. La rupture isotrope

L'application des critères de la mécanique linéaire de la rupture est tentée dans le cas de la rupture de plaques en matériaux composites entaillées ou bien dans le cas de dédoublement des composites par délaminage. D'un côté, la situation sera simplifiée grâce à leurs comportements quasi élastiques, mais aussi compliqué d'un autre à cause de leur anisotropie. [20]

Pour échapper aux difficultés posées par l'anisotropie des composites, les études sont souvent portées par l'utilisation de l'énergie dissipée G d'où l'on pourra tirer éventuellement un facteur d'intensité de contraintes K .

Des analyses très raffinées, sur la mécanique de la rupture, ont été effectuées pour le développement d'une formule, plus généralisée, qui s'applique à n'importe quel matériau et qui donne l'expression de sa contrainte critique de la rupture :

$$\sigma = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}} \quad (\text{IV.1})$$

Où G_c est l'énergie dissipée nécessaire pour que la fissure se propage d'une longueur unitaire. K , qui est déterminé par l'équation suivante :

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{EG_c} \quad (\text{IV.2})$$

Cette équation s'applique lorsque l'éprouvette est mince, rectangulaire, et lorsque la longueur de la fissure est très faible devant les dimensions de l'éprouvette.

Dans le cas général nous avons :

$$K = \alpha\sigma\sqrt{\pi a} \quad (\text{IV.3})$$

Où α est un paramètre qui dépend de la géométrie de l'éprouvette.

La relation $K = \sqrt{EG}$ permet de calculer K à partir d'une mesure de G , tant que le comportement d'un matériau sera essentiellement linéaire.

Tout changement de mode conduit à une grande complexité du problème.

De fait, l'anisotropie n'est pas un obstacle à l'application de la mécanique de la rupture aux composites, hormis quelques cas particuliers, comme les composites unidirectionnel sollicité en traction selon la direction des fibres.

Il est clair qu'à l'échelle microscopique, les métaux sont fortement anisotropes à cause de la désorientation des grains, la répartition des éléments de symétrie étant par nature plus aléatoire que dans les composites.

Enfin, l'anisotropie à l'échelle macroscopique qui compte dans l'analyse énergétique de la rupture. De plus, l'effet de la plasticité sur la fissuration qui rend l'application de la mécanique de la rupture délicate dans certains métaux, est quasi négligeable pour les matériaux composites à hautes performances.

IV.3.2. Le Délaminage

Il existe une différence fondamentale dans la rupture des matériaux composites comparée à celle des matériaux métalliques. Lorsqu'une force de traction est appliquée sur une éprouvette métallique non entaillée, la rupture se produit perpendiculairement à la force appliquée alors que, dans le matériau composite, l'endommagement principal se produit parallèlement à cette même force à cause de la faiblesse des interfaces entre les plis. Ce phénomène s'appelle Délaminage. [5]

Le processus de délaminage est le résultat d'une chronologie de divers types d'endommagement. Les propriétés mécaniques de la matrice et de la fibre ainsi que les propriétés adhésives et cohésives de l'interface gèrent cette chronologie en révélant des types d'endommagement fréquemment rencontrés comme la micro fissuration de la matrice, la rupture des fibres et la rupture des interfaces.

L'endommagement par délaminage inter laminaire se traduit par une décohésion plane interfaciale qui produit un dédoublement de l'épaisseur du composite.

Ce type de dommage, a fait l'objet de traitement par la mécanique de la rupture sous des sollicitations de tension et de cisaillement, ce qui a montré l'intérêt de se limiter à l'application du concept du taux d'énergie dissipé G au délaminage.

IV.4. La propagation de la fissure

La propagation de la fissure diffère suivant la nature de l'interface fibre matrice. Dans le cas d'une adhérence fibre matrice élevée, la rupture initiée, soit par rupture des fibres, soit par rupture de la matrice, induit en front de fissure des concentrations de contraintes conduisant à une propagation de la fissure successivement dans les fibres et dans la matrice.

La rupture observée est de type fragile, il est également possible d'observer une jonction, par rupture longitudinale de la matrice ou par décohésion fibre-matrice, de deux fissures adhérentes dans des zones différentes.

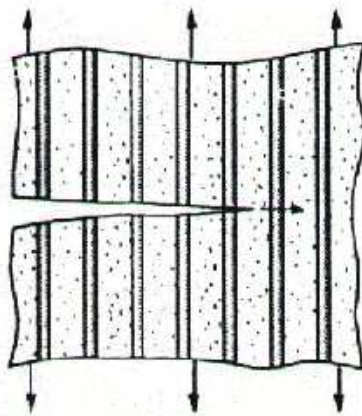


fig.12.8.1

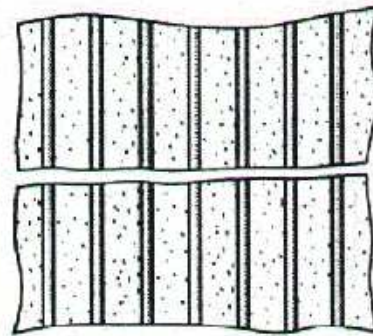


fig. 12.8.2

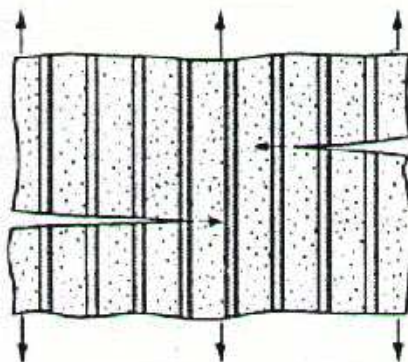


fig. 12.8.3

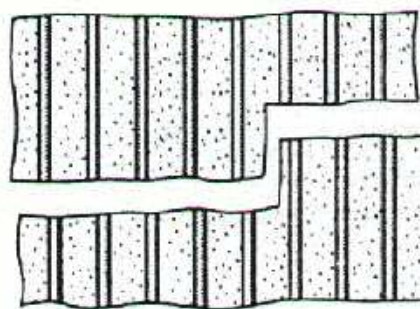


fig 12.8.4

Figure IV.4 : Propagation de la fissure dans le cas d'une forte adhérence fibre-matrice.

Dans le cas d'une faible adhérence fibre matrice, la propagation transverse de la fissuration peut être schématisée de la manière suivante :

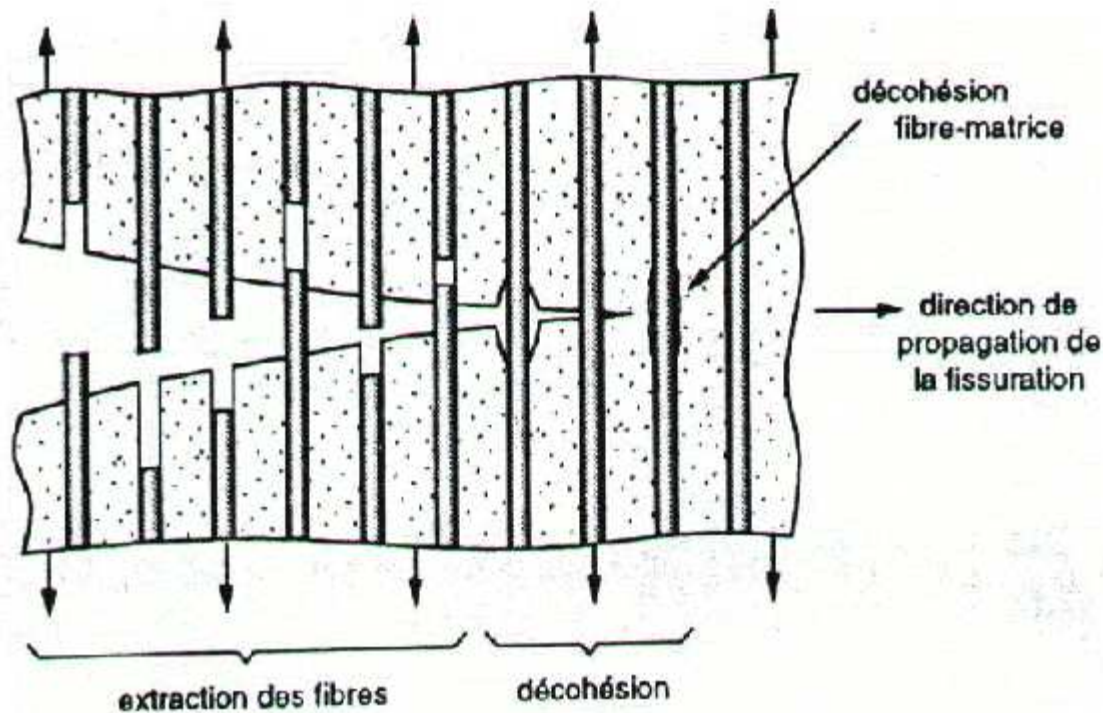


Figure IV.5 : Propagation de la fissure dans le cas d'une faible adhérence fibre matrice.

IV.5. Les critères de la Rupture

IV.5.1. Matériaux isotropes

Les critères limites de dimensionnement en chargement monotone ou critères de rupture reposent sur l'hypothèse d'un comportement élastique fragile. Ils sont en général déduits des critères de limite d'élasticité utilisés notamment pour l'analyse du comportement en plasticité des matériaux métalliques :

- dans le cas unidimensionnel (traction) cette vérification se réduit à assurer $|\sigma_{11}| \leq \sigma_e$ avec σ_e , limite élastique en traction ;
- dans le cas tridimensionnel, il faut vérifier un critère de limite d'élasticité qui s'écrit $f(\sigma) \leq \sigma_e$, ou est une fonction réelle, la fonction seuil élastique.

Il existe un grand nombre de critères, certains sont valables pour des matériaux isotropes fragiles (fontes, béton), d'autres, pour des matériaux ductiles (alliages cuivreux, alliages d'aluminium, aciers doux). Il n'existe pas de critères universels valables pour tous les matériaux. [21]

➤ Critère de Rankine :

Ce critère s'applique plutôt aux matériaux fragiles. Ce critère ne considère que la limite d'élasticité (ou de rupture) est atteinte lorsqu'une, au moins, des contraintes principales atteint une valeur limite obtenue par test uni-axial, de traction ou de compression : [21]

$$\sup(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) \leq \sigma_{Te} \quad (IV.4)$$

➤ **Critère de Tresca :**

Ce critère s'applique plutôt aux matériaux ductiles. Des essais sur des matériaux ductiles confirment que le début de la plastification en traction a lieu suivant des plans inclinés à 45° par rapport à la direction de chargement. Cette direction correspond à un état de contrainte de cisaillement maximum. Si τ_e est la contrainte tangentielle de cisaillement, alors : [21]

$$\frac{1}{2} \sup |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \tau_e \quad \text{ou} \quad \sup |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \sigma_e \quad (\text{IV.5})$$

➤ **Critère de Von Mises :**

Ce critère s'applique également aux matériaux ductiles. Notant qu'un état de contrainte hydrostatique change seulement le volume et non la forme du matériau, la partie hydrostatique du tenseur des contraintes est telle que :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma_D, \sigma_D)} \leq \sigma_e \quad \text{avec} \quad \sigma_{ijD} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \delta_{ij} \quad (\text{IV.6})$$

et :

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\sigma_D, \sigma_D)} \\ \sigma_D &= \sigma - \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} \bar{I} \\ \sigma_{eq} &\leq \sigma_y \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

IV.5.2. Matériaux anisotropes

➤ **Critère de contrainte maximale :** [21]

Ce critère relativement rustique reste très utilisé pour rechercher une première solution technologique dans la conception d'une pièce composite. En contrainte plane, le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^t} \leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{11} \geq 0; & \quad \frac{|\sigma_{11}|}{\sigma_{11}^c} \leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{11} \leq 0 \\ \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^t} \leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{22} \geq 0; & \quad \frac{|\sigma_{22}|}{\sigma_{22}^c} \leq 1 \quad \text{si} \quad \sigma_{22} \leq 0 \\ \frac{|\sigma_{12}|}{\sigma_{12}^r} \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Les valeurs ultimes des contraintes sont notées σ_{22}^t .

➤ Critère de déformation maximale :

Ce critère est utilisé conjointement au critère en contrainte :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^t} \leq 1 \text{ si } \varepsilon_{11} \geq 0 ; \quad & \frac{|\varepsilon_{11}|}{\varepsilon_{11}^c} \leq 1 \text{ si } \varepsilon_{11} \leq 0 \\ \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^t} \leq 1 \text{ si } \varepsilon_{22} \geq 0 ; \quad & \frac{|\varepsilon_{22}|}{\varepsilon_{22}^c} \leq 1 \text{ si } \varepsilon_{22} \leq 0 \\ \frac{|\varepsilon_{12}|}{\varepsilon_{12}^r} \leq 1 \end{aligned} \quad (IV.9)$$

➤ Critères énergétiques :

Critère de Hill

Ce critère est utilisé pour définir le domaine d'élasticité d'un matériau orthotrope :

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{23}^2 \leq 1 \quad (IV.10)$$

On suppose la base d'orthotropie $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ connue. Pour identifier ce critère, il faut réaliser suivant les axes d'orthotropie, trois expériences de traction et trois expériences de cisaillement qui permettent d'écrire les relations suivantes :

- trois essais de traction : $F + G = \frac{1}{\sigma_{11}^{e2}}$, $F + H = \frac{1}{\sigma_{22}^{e2}}$ et $F + G = \frac{1}{\sigma_{33}^{e2}}$
- trois essais de cisaillement : $2L = \frac{1}{\sigma_{12}^{e2}}$, $2M = \frac{1}{\sigma_{13}^{e2}}$ et $2N = \frac{1}{\sigma_{23}^{e2}}$

Il suffit d'exploiter les essais pour identifier les six paramètres du critère F, G, H, L, M, N en fonction des limites d'élasticité du matériau considéré. Il faut noter que lorsque $F=G=H=L=M=N$, le critère de Hill correspond à celui de Von Mises. Le critère s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{33}^e}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{11}^{e2}} + \frac{1}{\sigma_{22}^{e2}} - \frac{1}{\sigma_{33}^{e2}}\right) \sigma_{11}\sigma_{22} \\ & - \left(\frac{1}{\sigma_{11}^{e2}} - \frac{1}{\sigma_{22}^{e2}} + \frac{1}{\sigma_{33}^{e2}}\right) \sigma_{11}\sigma_{33} - \left(-\frac{1}{\sigma_{11}^{e2}} + \frac{1}{\sigma_{22}^{e2}} + \frac{1}{\sigma_{33}^{e2}}\right) \sigma_{22}\sigma_{33} \\ & \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{13}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{\sigma_{23}^e}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (IV.11)$$

où les caractéristiques injectées dans le critère sont les limites élastiques. D'un point de vue conception, lors du dimensionnement des structures, les valeurs limites dans le critère sont généralement les contraintes enregistrées à rupture.[21]

➤ Critère de Hill en contraintes planes :

On considère un état de contraintes planes dans le plan (\vec{N}_1, \vec{N}_2) , le critère se réduit à :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^e}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_{11}^{e2}} + \frac{1}{\sigma_{22}^{e2}} + \frac{1}{\sigma_{33}^{e2}}\right) \sigma_{11}\sigma_{22} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e}\right)^2 = 1 \quad (IV.12)$$

➤ **Critères de Tsai-Hill :**

Le critère proposé par Tsai-Hill correspond au critère de Hill écrit en contrainte plane dans

le cas d'un matériau isotrope transverse. Ce critère ne tient pas compte des différences de comportement en traction et en compression. Dans la base d'orthotropie connue, le critère s'écrit :

$$F(\sigma_{22})^2 + G(\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{12}^2 \leq 1 \quad (\text{IV.13})$$

Pour identifier ce critère, il faut réaliser suivant les axes d'orthotropie, deux expériences de traction et une expérience de cisaillement comme suit : [21]

- deux essais de traction : $G + H = \frac{1}{\sigma_{11}^e{}^2}$ et $F + H = \frac{1}{\sigma_{22}^e{}^2}$
- un essai de cisaillement : $2L = \frac{1}{\sigma_{12}^e{}^2}$ et $H = \frac{1}{2\sigma_{11}^e\sigma_{22}^e}$

Les valeurs caractéristiques du matériau sont accompagnées de l'exposant e .

Le critère est classiquement utilisé sous la forme :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^e}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^e\sigma_{22}^e}\right) + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^e}\right)^2 = 1 \quad (\text{IV.14})$$

➤ **Critère Hoffman :**

Ce critère généralise dans le cas tridimensionnel, le critère de Hill. Il est utilisé pour définir le domaine d'élasticité d'un matériau orthotrope en tenant compte des limites en compression :

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{23}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} + R\sigma_{33} \leq 1 \quad (\text{IV.15})$$

On suppose la base d'orthotropie $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ connue. Pour identifier ce critère, il faut réaliser suivant les axes d'orthotropie, trois expériences de traction, trois expériences de compression et trois expériences de cisaillement.

Pour ce qui concerne la modélisation des matériaux composites, la mécanique de l'endommagement fournit actuellement un outil extrêmement puissant à la disposition des mécaniciens des structures, intégrant par l'introduction de variables internes judicieusement choisies, l'essentiel des phénomènes mécaniques de dégradation dans le comportement.

L'analyse des matériaux composites par la mécanique de l'endommagement suppose une nouvelle approche de l'étude des composites, tant sur le plan expérimental que théorique.[21]

Chapitre V

**Développement d'un
programme de calcul et
d'homogénéisation des plaques
stratifiés composites**

V.1. Introduction :

Ce chapitre porte sur l'optimisation de stratifiés en utilisant les équations de la théorie classique des stratifiés présentées au chapitres précédents. Un programme de calcul est développé en se basant sur un algorithme.

Ce programme est développé avec le logiciel MATLAB et le détail du code est donné à l'annexe.

V.2. Séquence de calcul d'un stratifié

Dans cette étape on détaille les étapes nécessaires à mener à bien le calcul d'un stratifié, une fois sa composition connue (matériaux des plis et séquence d'empilement) et lorsque le même stratifié est soumis à un état de sollicitation mécanique et thermique connu.

Un exemple numérique est développé à la fin, En vue de vérifier et valider le processus de calcul global du programme développé, il est nécessaire de passer par des exemples types d'applications qu'on peut trouver dans la littérature spécialisée.

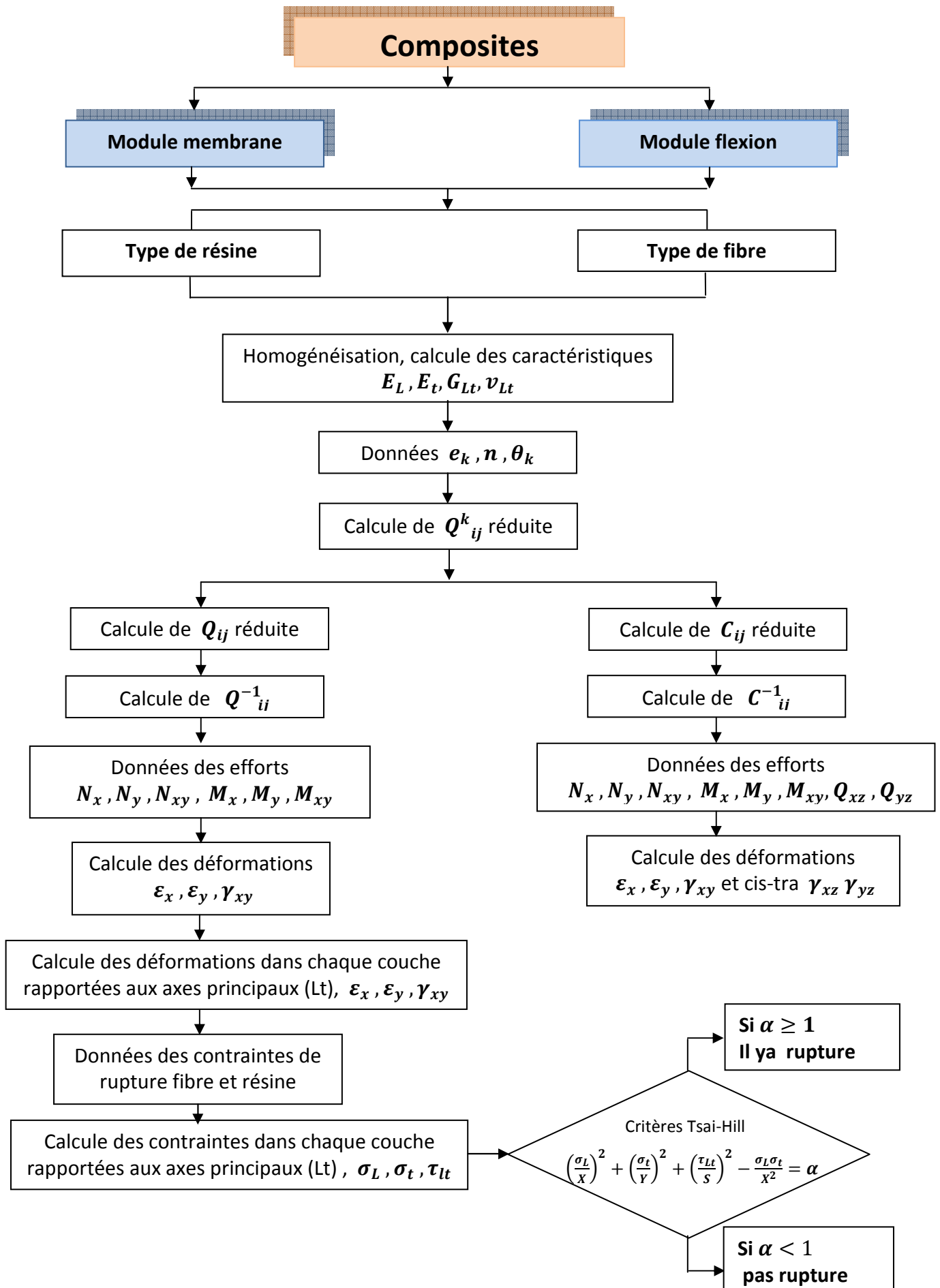


Figure V.1 : Algorithme de calcul d'un stratifié composite.

V.2.1. Plaque stratifiée en contraintes planes - vérification à la rupture

➤ Exemple 1 :

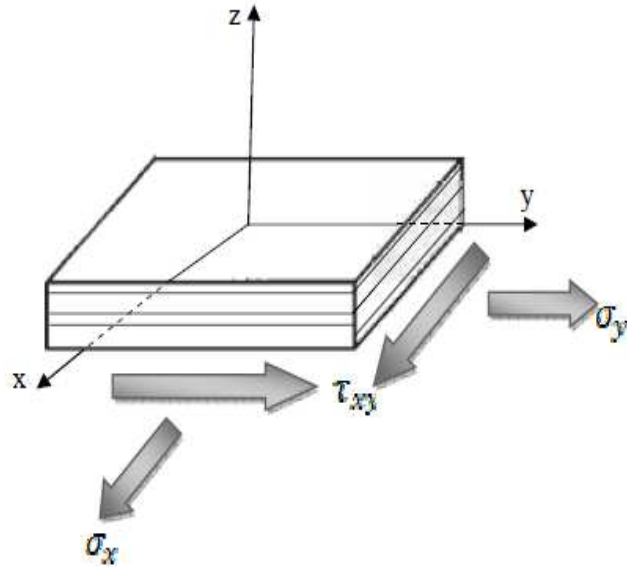


Figure. V.2 : exemple d'application d'une contrainte plane sur une plaque de composite (verre/Epoxyde).

1) - on considère le cas d'une plaque de matériau composite forme d'une matrice en époxyde et des fibres de verre, de quatre(4) plis de même épaisseur (=2mm) orientés comme suit : [30, 15,-15,-30].

❖ Résolution :

A. Calcule des déformations planes :

D'après les données du problème, on peut choisir directement le composite Verre(E)/Epoxyde, ses données sont disponibles et données par la loi des mélange (homogénéisé), tel que :

- Les caractéristiques mécaniques homogénéisés du composite, après introduction du taux volumique en fibres V_f . $\implies E_L, E_t, G_{Lt}, \nu_{Lt}, \nu_{tL}$.
formules : (III.29) jusqu'à (III.40).

```

Command Window

E1c =

    46200

E2c =

    1.0310e+004

G12c =

    3.7037e+003

NU12c =

    0.3100

NU13c =

    0.0702

fx >> |
    
```

- Les constantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux. ($E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{33}$). Formule : (III.3)

```

Command Window

Q_ax =

    1.0e+004 *

    4.7212    0.3266    0
    0.3266    1.0536    0
    0         0         0.3704

fx
    
```

- Nombre de couches [4].
- L'orientation et l'épaisseur de chaque couche $\implies (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4); (e_1, e_2, e_3, e_4)$

```

Command Window

>> tetha1=(pi/6);
tetha2=(pi/12);
tetha3=-(pi/12);
tetha4=-(pi/6);
e1=2;
e2=2;
e3=2;
e4=2;
fx >> |
    
```

- L'épaisseur totale du stratifié. [h (mm) = 8].
- La matrice des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en dehors de ses axes principaux $[\bar{Q}_{ij}]_H$. formule : (III.14)

```

Command Window

Q_hax1 =

1.0e+004 *

3.1218    1.0091   -1.1881
1.0091    1.2880   -0.4000
-1.1881   -0.4000    1.0529
fx >> |
    
```

```

Command Window

Q_hax2 =

1.0e+004 *

4.2481    0.5541   -0.8525
0.5541    1.0717   -0.0644
-0.8525   -0.0644    0.5979
fx >> |
    
```

```

Command Window

Q_hax3 =

1.0e+004 *

4.2481    0.5541    0.8525
0.5541    1.0717    0.0644
0.8525    0.0644    0.5979
fx >> |
    
```

```

Command Window

Q_hax4 =

1.0e+004 *

3.1218    1.0091    1.1881
1.0091    1.2880    0.4000
1.1881    0.4000    1.0529
fx >> |
    
```

- La matrice inverse des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en dehors de ses axes principaux $[Q'_{ij}]_H$. Formule : (III.16)
- Calcul des déformations $[\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$ dans chaque couche (en chaque pli, 1, 2, 3 et 4) rapportées aux axes principaux (l, t) . Formule : (III.15).

✓ Calcul de [A],[B],[D] :

[A] : formule (III.54)

```
Command Window
A_ij =
1.0e+005 *
2.9479    0.6253   -0.0000
0.6253    0.9439    0
0          0        0.6603
(N/mm)
fx >> |
```

[B] : formule (III.55)

```
Command Window
B_ij =
1.0e+005 *
0.0000    0    1.7668
0          0    0.5058
1.7668    0.5058    0
(N)
fx >> |
```

[D] : formule (III.61)

```
Command Window
D_ij =
1.0e+006 *
1.3920    0.4063    0
0.4063    0.5380    0
0          0        0.4250
(N.mm)
fx >> |
```

✓ Matrice de rigidité de l'équation constitutive [ABD] :

```

Command Window
ABD =

1.0e+006 *

0.2948      0      0.0625      0.0000      0.1767      0
0           0      0.0944      0.1767      0.0506      0
0.0625      0.0944      0.0625      0           0           0
0.0000      0.1767      0           1.3920      0           0.4063
0.1767      0.0506      0           0           0           0.5380
0           0           0           0.4063      0.5380      0.4063
fx >>
    
```

- En combinant les résultats précédents, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix} \quad (V. 1)$$

- Ayant pour données les sollicitations :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (N/mm)$$

- En inversant la formule (V.1) on calcul les déformations $\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix}$.

```

Command Window
EPS_K =

0.0024
-0.0019
0.0044
0.0004
0.0001
-0.0006
fx >>
    
```

- D'où :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ -0.0019 \\ 0.0044 \\ 0.0004 \\ 0.0001 \\ -0.0006 \end{bmatrix}$$

- Ainsi les déformations dans les couches dans les axes (x,y) de référence sont déduites de la formule (III.45).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ -0.0019 \\ 0.0044 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0001 \\ -0.0006 \end{bmatrix} Z$$

- ✓ Déformations dans chaque couche rapportée aux axes principaux de la couche :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_K = A_K + B_K \cdot Z$$

$$A_K = [T]_\varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} ; \quad B_K = [T]_\varepsilon \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 0.0032 \\ -0.0027 \\ -0.0014 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0845 \\ 0.4700 \\ -0.5337 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -4 \text{ mm} \leq Z \leq -2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 0.0032 \\ -0.0027 \\ 0.0017 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.2438 \\ 0.3107 \\ -0.6549 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -2 \text{ mm} \leq Z \leq 0 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0005 \\ 0.0060 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.5441 \\ 0.0104 \\ -0.3855 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 0 \text{ mm} \leq Z \leq 2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} -0.0006 \\ 0.0011 \\ 0.0059 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.6047 \\ -0.0502 \\ -0.0670 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 2 \text{ mm} \leq Z \leq 4 \text{ mm}$$

- ✓ Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repéré principale du stratifié (x,y):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_K = A_{1K} + B_{1K} \cdot Z$$

$$A_{1K} = [\bar{Q}]_K \begin{bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} ; \quad B_{1K} = [\bar{Q}]_K \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 2.0805 \\ -17.9706 \\ 26.2356 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21.4361 \\ 8.3957 \\ -11.7894 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -4 \text{ mm} \leq Z \leq -2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 52.1115 \\ -9.7563 \\ 7.6609 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 23.4115 \\ 4.1970 \\ -7.1953 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -2 \text{ mm} \leq Z \leq 0 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 127.9819 \\ -4.0243 \\ 45.5478 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13.1697 \\ 3.4232 \\ 0.0126 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 0 \text{ mm} \leq Z \leq 2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 107.8195 \\ 17.6300 \\ 67.4675 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.1622 \\ 3.5899 \\ -0.8597 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 2 \text{ mm} \leq Z \leq 4 \text{ mm}$$

✓ Contraintes dans chaque couche rapportée aux axes principaux de la couche :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_K = A_{2K} + B_{2K} \cdot Z$$

$$A_{2K} = [T]_\sigma \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} ; \quad B_{2K} = [T]_\sigma \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \cdot 4$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 19.7884 \\ -35.6785 \\ 4.4354 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.9660 \\ 21.8657 \\ -11.5414 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -4 \text{ mm} \leq Z \leq -2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 51.7976 \\ -9.4424 \\ -8.8324 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18.5267 \\ 9.0818 \\ -11.0349 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -2 \text{ mm} \leq Z \leq 0 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 96.3653 \\ 27.5923 \\ 72.4471 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12.5105 \\ 4.0824 \\ 2.4475 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 0 \text{ mm} \leq Z \leq 2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 26.8436 \\ 98.6059 \\ 72.7869 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.0136 \\ 3.7385 \\ 1.1170 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 2 \text{ mm} \leq Z \leq 4 \text{ mm}$$

- Représentation de la distribution des déformations et des contraintes dans l'épaisseur du stratifié .

B. Vérification à la rupture dans chaque couche :

- Critères de Tsai-Hil.
 - Les contraintes de rupture de fibre de matrice.
 - caractéristiques de résistance de chaque pli X, Y_C, Y_t, S .
 - X : Contrainte de rupture en traction suivant L
 - Y_C : Contrainte de rupture en compressions suivant t
 - Y_t : contrainte de rupture en traction suivant t.
 - S : contrainte de rupture en cisaillement suivant Lt .

$$X = \sigma_{L\text{rup}} = \sigma_{f\text{rup}} \times V_f \quad (1500 \sim 2000) \text{ Mpa}$$

$$Y_{\text{traction}} = \sigma_{t\text{rup}(\text{traction})} \quad (20 \sim 60) \text{ Mpa}$$

$$Y_{\text{compression}} = \sigma_{t\text{rup}(\text{compression})} \quad (100 \sim 50) \text{ Mpa}$$

$$S = \tau_{Lt} = \tau_{Lt(\text{matrice})}$$

- Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes principaux (l,t) dont la vérification à la rupture de chaque couche ; tel que :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{Lt}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_t}{X^2} = \alpha$$

- Couche k_1 : $\alpha < 1$ donc pas de rupture au niveau du pli n°1. ($\alpha_1 = 0,1071$)
- Couche k_2 : $\alpha < 1$ donc pas de rupture au niveau du pli n°2. ($\alpha_1 = 0,00099$)
- Couche k_3 : $\alpha < 1$ donc pas de rupture au niveau du pli n°3. ($\alpha_1 = 0,0121$)
- Couche k_4 : $\alpha < 1$ donc pas de rupture au niveau du pli n°4. ($\alpha_1 = 0,0518$)

V.2.2. Flexion d'une plaque stratifiée avec cisaillement transverse

Exemple 2 :

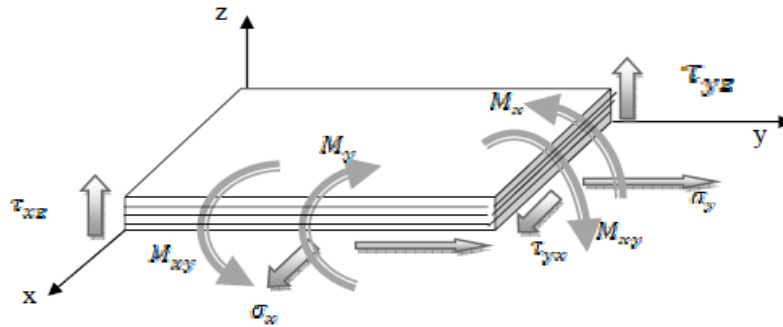


Figure. V.3 : Exemple d'application d'une plaque stratifiée de composite (Verre/Epoxyde) sollicitée par des contraintes et des moments.

2) on considère le cas d'une plaque de matériau composite forme d'une matrice en époxyde et des fibres de verre, de quatre(4) plis de même épaisseur (=2mm) orientés tel que : [30, 15,-15,-30].

Sollicitée par des contraintes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ et des contraintes de cisaillement transverse τ_{yz}, τ_{xz} .

- Choix du composite : Les caractéristiques mécaniques homogénéisés du composite, après introduction du taux volumique en fibres $V_f \implies E_L, E_t, G_{Lt}, \nu_{Lt}, \nu_{tL}$. formules : (III.29) jusqu'à (III.40).
- L'orientation et l'épaisseur de chaque couche $\implies (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4); (e_1, e_2, e_3, e_4)$
- La matrice des Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel, en dehors de ses axes principaux $[\bar{Q}_{ij}]$.

NB : Le composite étant le même que celui choisi dans l'exemple 1, les précédentes étapes de calcul seront les mêmes pour l'exemple 2.

- Calcul des déformations $[\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$ dans chaque couche (en chaque pli, 1, 2, 3 et 4) rapportées aux axes principaux (l, t) . Formule : (III.15).

✓ Calcul de [A],[B],[D] :

[A] : formule (III.54)

[B] : formule (III.55)

[D] : formule (III.61)

[F] : formule (III.75)

$$\begin{aligned}
 - [C'_{ij}] &= \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \\
 - C'_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta, \\
 - C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \cos \theta \sin \theta, \\
 - C'_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta. \\
 C_{44} &= G_{TT} \\
 C_{55} &= G_{LT}
 \end{aligned}$$

- Les modules de cisailment dans les directions (TT'), (LT') $\implies (G_{TT}), (G_{LT})$.
 $G_{TT} \implies$ Formule (III.75).
 $G_{LT} \implies$ Formule (III.39).

```
Command Window
F_ij =
1.0e+004 *
3.7787    0
0    3.1166
fx >> |
```

✓ Matrice de rigidité de l'équation constitutive [ABDF] : formule (III.74)

```
Command Window
ABDF =
1.0e+006 *
0.2948    0    0.0625    0.0000    0.1767    0    0    0
0    0    0.0944    0.1767    0.0506    0    0    0
0.0625    0.0944    0.0625    0    0    0    0    0
0.0000    0.1767    0    1.3920    0    0.4063    0    0
0.1767    0.0506    0    0    0    0.5380    0    0
0    0    0    0.4063    0.5380    0.4063    0    0
0    0    0    0    0    0    0    0.0378    0
0    0    0    0    0    0    0    0    0.0312
fx
```

- En combinant les résultats précédents, l'équation constitutive du stratifié s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ K \\ \gamma_c \end{bmatrix} \tag{V. 2}$$

- Ayant pour données les sollicitations :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 250 \\ 100 \\ 50 \\ 25 \\ 125 \\ -40 \end{bmatrix} \quad (N/mm)$$

En inversant la formule (V.2) on calcul les déformations $\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \\ \gamma_c \end{bmatrix}$.

```
Command Window
EPS_K_Gama =
0.0024
-0.0019
0.0044
0.0005
0.0001
-0.0005
0.0033
-0.0013
fx >> |
```

- D'où :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ -0.0019 \\ 0.0044 \\ 0.0005 \\ 0.0001 \\ -0.0005 \\ 0.0033 \\ -0.0013 \end{bmatrix}$$

NB : les déformations membrane-flexion s'expriment donc par la Formule (III.70).

Seules les expressions de courbures sont modifiées et Le champ des déformations en cisaillement transverse .

- Ainsi les déformations dans les couches dans les axes (x,y) de référence sont déduites de la formule (III.70).

- Déformations en membrane-flexion :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ -0.0019 \\ 0.0044 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0001 \\ -0.0006 \end{bmatrix} Z$$

- Déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0033 \\ -0.0013 \end{bmatrix}$$

- ✓ Déformations dans chaque couche rapportée aux axes principaux de la couche :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_K = A_K + B_K \cdot Z$$

$$A_K = [T]_\varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} ; \quad B_K = [T]_\varepsilon \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 0.0032 \\ -0.0027 \\ -0.0014 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1417 \\ 0.4121 \\ -0.5775 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -4 \text{ mm} \leq Z \leq -2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 0.0032 \\ -0.0027 \\ 0.0017 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.3042 \\ 0.2496 \\ -0.6353 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -2 \text{ mm} \leq Z \leq 0 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0005 \\ 0.0060 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.5656 \\ -0.0118 \\ -0.2704 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 0 \text{ mm} \leq Z \leq 2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} -0.0006 \\ 0.0011 \\ 0.0059 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.5945 \\ -0.0407 \\ 0.0546 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 2 \text{ mm} \leq Z \leq 4 \text{ mm}$$

- Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repéré principale du stratifié (x,y):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_K = A_{1K} + B_{1K} \cdot Z$$

$$A_{1K} = [\bar{Q}]_K \begin{bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} ; \quad B_{1K} = [\bar{Q}]_K \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_K(M) = \bar{Q}_K \varepsilon_{mf}(x, y) + Z \cdot \bar{Q}_K \cdot K(x, y) \quad (V.3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 4.2832 \\ -17.1161 \\ 25.0170 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21.5059 \\ 7.9435 \\ -11.3410 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -4 \text{ mm} \leq Z \leq -2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 54.5152 \\ -9.3347 \\ 6.9164 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24.4948 \\ 3.8943 \\ -7.1031 \end{bmatrix} \cdot Z \quad -2 \text{ mm} \leq Z \leq 0 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 129.3126 \\ -3.6838 \\ 45.5398 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15.5794 \\ 3.2207 \\ 0.8507 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 0 \text{ mm} \leq Z \leq 2 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 108.5267 \\ 17.9810 \\ 67.3608 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.0807 \\ 3.7602 \\ 0.3302 \end{bmatrix} \cdot Z \quad 2 \text{ mm} \leq Z \leq 4 \text{ mm}$$

- Les contraintes de cisaillement τ_{yz}, τ_{xz} dans chaque couche exprimés dans le repéré principale du stratifié (x,y):

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{V.4})$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 15.9316 \\ -6.8780 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 16.3806 \\ -5.8598 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 15.6030 \\ -3.8556 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 14.5848 \\ -3.40660 \end{bmatrix}$$

Conclusion Générale

Conclusion Générale

L'engouement créés par les matériaux composites dans les secteurs de la construction et du transport n'est plus à démontrer, ces derniers permettent l'obtention de structures moins onéreuses, plus résistantes, plus légères. C'est pour cette raison qu'une course constante à l'innovation et à la recherche dans ce domaine à été lancé depuis presque deux décennies. Les matériaux composites actuels répondent parfaitement aux critères demandés, et le large choix des constituants nécessaires à leur élaboration ouvre un vaste spectre de propriétés mécaniques.

L'objectif principal de notre travail était de se familiariser avec le calcul de structures composites, et plus particulièrement l'étude s'est concentrée sur le calcul de stratifiés et notamment le développement d'un programme de calcul et d'homogénéisation des plaques stratifiés composites.

Le programme développé nous a permis, à travers deux exemples d'applications, de valider le processus de calcul d'un stratifié développé dans notre mémoire ainsi que les lois de comportement en élasticité plane et en flexion. Les résultats concernant la vérification à la rupture des stratifiés a également donné grande satisfaction.

A la lumière du travail accompli, nous pouvons conclure que malgré les hautes performances et la fiabilité que procurent les matériaux composites, leur point faible reste le cisaillement induit dans les structures composites stratifiées, car ces dernières sont souvent ruinées par ce phénomène via divers modes et mécanismes.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **R. BEN NASIL ; M. FAREZ.** Mémoire de fin d'études ingénieur « Etude comparative des essais de caractérisation mécanique des matériaux composites unidirectionnelle ».
- [2] **D. TALEB ; REMIDI.** Mémoire de fin d'études (D.E.U.A) « Conception d'un banc d'essai de flambement pour matériaux composites à matrice organique », 2003.
- [3] **Technologie des composites**, éditions HERMES, Paris 1990.
- [4] **TEKLAL FATIHA.** Mémoire de magister « Etude micromécanique des interfaces dans les composites a matrice organique : cas des éprouvettes modèles », 2010.
- [5] **Jean-Marie BERTHELOT.** Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ; 4eme édition, Ed TEC&DOC, Lavoisier, 2005.
- [6] **A.ZAIDI.** Mémoire de magister « Etude du comportement de matériaux composites à matrice polymère en fatigue (effet du vieillissement) », 2014.
- [7] **DANIEL Gray .**Matériaux composites ; édition Eyrolles 3 ;pp. 51-61 (2001).
- [8] **Jean-Marie BERTHELOT.** Matériaux composites « comportement mécanique et analyse des structures » ; 3eme édition, Technique & Documentation (1999).
- [9] **E. REISSNER.** « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates » . Journal of applied Mechanics, 12, pp. 69-77 (1945).
- [10] **R.D. Mandlin.** « Influence of rotator inertia and shear on flexural motions of isotopic, elastic plates». Journal of applied Mechanics, 18, pp. 336-343 (1950).
- [11] **M.Chatain**, «Présentation Générale des Matériaux Composites», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, M 5 000.
- [12] **A.Giocosa**, «Les composites dans l'industrie automobile», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, A 5 600.
- [13] **J.Molimard, A.Vautrin, J.M.Béraud, P.Henrat**, «contribution à la conception d'une structure en matériaux composites en milieu industriel», 18^{ème} Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007.
- [14] **J.Cinquain**, «Les composites en aérospatiale», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, A 5 645.
- [15] **P.Parneix, J.Liu, D.Lucas**, «Les matériaux composites en construction navale militaire», Communication présentée lors de la réunion des spécialistes RTO AVT sur «Les structures composites à bas coût», Norvège, 2001.
- [16] **P.Parneix, D.Lucas**, «Les matériaux composites en construction navale militaire», Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites, A 5 660.

BIBLIOGRAPHIE

- [17] Viorel SERGIESCO, « ISOTROPIE & ANISOTROPIE », *Encyclopædia Universalis* [en ligne],
- [18] V.Vasiliev, E.Morosov, « Mechanics and Analysis of Composite Materials », Elsevier Science.Ltd, Oxford-UK, 2001.
- [19] Jean-Marie BERTHELOT. Matériaux composites « Comportement mécanique et analyse des structures », Tec & Doc, Paris, 2005.
- [20] S. SAHRI. Mémoire de Magister « Etude du comportement mécanique d'un matériau composite thermoplastique (PP)/Verre : Effet de différents milieux », 2012.
- [21] LAURENT GORNET. « Généralités sur les matériaux composites », Ecole d'ingénieur. édition HAL (archives-ouvertes.fr), 2008.

Annexe

```

% % % % % % % % % % % COUCHE N°1 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha1);s=sin(tetha1);
T_sig1=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]sigma
T_eps1=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]epsilon
Tsig_i1=inv(T_sig1);
Teps_i1=inv(T_eps1);
Q_hax1=(Tsig_i1)*(Q_ax)*(T_eps1), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax1=inv(Q_hax1), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% % % % % % % % % % % COUCHE N°2 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha2);s=sin(tetha2);
T_sig2=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]sigma
T_eps2=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]epsilon
Tsig_i2=inv(T_sig2);
Teps_i2=inv(T_eps2);
Q_hax2=(Tsig_i2)*(Q_ax)*(T_eps2), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax2=inv(Q_hax2), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% % % % % % % % % % % COUCHE N°3 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha3);s=sin(tetha3);
T_sig3=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]sigma
T_eps3=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]epsilon
Tsig_i3=inv(T_sig3);
Teps_i3=inv(T_eps3);
Q_hax3=(Tsig_i3)*(Q_ax)*(T_eps3), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax3=inv(Q_hax3), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% % % % % % % % % % % COUCHE N°4 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha4);s=sin(tetha4);
T_sig4=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]sigma
T_eps4=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]epsilon
Tsig_i4=inv(T_sig4);
Teps_i4=inv(T_eps4);
Q_hax4=(Tsig_i4)*(Q_ax)*(T_eps4), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax4=inv(Q_hax4), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']

% Matrice de rigidité en membrane du stratifié
A_ij=2*((Q_hax1)+(Q_hax2)+(Q_hax3)+(Q_hax4)),

% Matrice de rigidité en couplage du stratifié
B_ij=0.5*[Q_hax1*(Z1^2-Z0^2)]+0.5*[Q_hax2*(Z2^2-Z1^2)]+0.5*[Q_hax3*(Z3^2-
Z2^2)]+0.5*[Q_hax4*(Z4^2-Z3^2)],

% Matrice de rigidité en Flexion du stratifié
D_ij=(1/3)*[Q_hax1*(Z1^3-Z0^3)]+(1/3)*[Q_hax2*(Z2^3-Z1^3)]+(1/3)*[Q_hax3*(Z3^3-
Z2^3)]+(1/3)*[Q_hax4*(Z4^3-Z3^3)],

```

```
% matrice de rigidité
```

```
ABD= zeros(6:6);
```

```
ABD(1,1)=A_ij(1);
ABD(1,2)=A_ij(3);
ABD(1,3)=A_ij(2);
ABD(3,1)=A_ij(2);
ABD(3,2)=A_ij(5);
ABD(2,3)=A_ij(5);
ABD(2,1)=A_ij(3);
ABD(2,2)=A_ij(6);
ABD(3,3)=A_ij(4);
ABD(1,4)=B_ij(1);
ABD(2,4)=B_ij(3);
ABD(4,2)=B_ij(3);
ABD(3,5)=B_ij(5);
ABD(5,3)=B_ij(5);
ABD(2,6)=B_ij(5);
ABD(6,2)=B_ij(5);
ABD(2,5)=B_ij(6);
ABD(5,2)=B_ij(6);
ABD(3,4)=B_ij(2);
ABD(4,3)=B_ij(2);
ABD(1,5)=B_ij(3);
ABD(5,1)=B_ij(3);
ABD(1,6)=B_ij(2);
ABD(6,1)=B_ij(2);
ABD(4,1)=B_ij(1);
ABD(3,6)=B_ij(4);
ABD(6,3)=B_ij(4);
ABD(4,4)=D_ij(1);
ABD(4,5)=D_ij(3);
ABD(5,4)=D_ij(3);
ABD(5,5)=D_ij(6);
ABD(4,6)=D_ij(2);
ABD(6,4)=D_ij(2);
ABD(5,6)=D_ij(5);
ABD(6,5)=D_ij(5);
ABD(6,6)=D_ij(4)
```

```
ABDInverse= inv(ABD) % inverse de la matrice de rigidité (souplesse)
```

```
% dans notre cas, le sollicitation est la traction simple
```

```
% On a comme données :
```

```
% Vecteur des sollicitations N_M
```

```
Nx=1000;
```

```
Ny=500;
```

```
Nxy=250;
```

```
Mx=0;
```

```
My=0;
```

```
Mxy=0;
```

```
N_M=[Nx
      Ny
      Nxy
      Mx
      My
      Mxy]
```

```

% Vecteur des déformations  $\epsilon_k$  :
EPS_K=ABDInverse*N_M

EPS_x=EPS_K(1);
EPS_y=EPS_K(2);
EPS_xy=EPS_K(3);
K_x=EPS_K(4);
K_y=EPS_K(5);
K_xy=EPS_K(6);

EPS_membrane=[EPS_x
               EPS_y
               EPS_xy];
K_courbure=[K_x
             K_y
             K_xy];

% Déformations et contraintes en chaque couche:

% % % % % % % % % % % COUCHE N°1 % % % % % % % % % % %
% Déformations dans le repère de la couche(L,T,LT)
c=cos(tetha1);s=sin(tetha1);
T1=[c^2 s^2 s*c;s^2 c^2 -s*c;-2*s*c 2*s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de passage vers
le repère (L,T,LT)
T1_prime=[c^2 s^2 2*s*c;s^2 c^2 -2*s*c;-s*c s*c (c^2-s^2)] % % Matrice de
passage vers le repère (L,T,LT)
% EPS_30=T1*EPS_membrane+T1*K_courbure*z
A_1=T1*EPS_membrane
B_1=T1*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repère principale du %
% stratifié :
% SIG_30=Q_hax1*EPS_membrane+Q_hax1*K_courbure*z
A_k1=Q_hax1*EPS_membrane
B_k1=Q_hax1*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche rapportées aux axes principaux de la
% couche considérée :
% SIGprime_30=T1_prime*A_k1+T1_prime*B_k1*z
A_2k1=T1_prime*A_k1
B_2k1=T1_prime*B_k1

% % % % % % % % % % % COUCHE N°2 % % % % % % % % % % %
% Déformations dans le repère de la couche(L,T,LT)
c=cos(tetha2);s=sin(tetha2);
T2=[c^2 s^2 s*c;s^2 c^2 -s*c;-2*s*c 2*s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de passage vers
le repère (L,T,T')
T2_prime=[c^2 s^2 2*s*c;s^2 c^2 -2*s*c;-s*c s*c (c^2-s^2)] % % Matrice de
passage vers le repère (L,T,T')
% EPS_15=T2*EPS_membrane+T2*K_courbure*z
A_2=T2*EPS_membrane
B_2=T2*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repère principale du %
% stratifié :
% SIG_15=Q_hax2*EPS_membrane+Q_hax2*K_courbure*z
A_k2=Q_hax2*EPS_membrane
B_k2=Q_hax2*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche rapportées aux axes principaux de la
% couche considérée :
% SIGprime_15=T2_prime*A_k2+T2_prime*B_k2*z
A_2k2=T2_prime*A_k2
B_2k2=T2_prime*B_k2

```



```

% % % % % VERIFICATION A LA RUPTURE DE LA COUCHE N°2 % % % % % % % % % %
% Calcul de SIGprime_15° pour une valeur de Z_inf=-2 ou Z_sup=0 :
SIGl_k2=T2_prime(1)*A_k2(1)+0*T2_prime(1)*B_k2(1);
SIGt_k2=T2_prime(2)*A_k2(2)+0*T2_prime(2)*B_k2(2);
SIGlt_k2=T2_prime(3)*A_k2(3)+0*T2_prime(3)*B_k2(3);
alpha=(SIGl_k2/R_l)^2+(SIGt_k2/R_t)^2+(SIGlt_k2/R_clt)^2-
((SIGl_k2*SIGt_k2)/((R_l)^2)),
if alpha<1
    'PAS_DE_RUPTURE',
else
    'IL_Y_A_RUPTURE',
end

% % % % % VERIFICATION A LA RUPTURE DE LA COUCHE N°3 % % % % % % % % % %
% Calcul de SIGprime_-15° pour une valeur de Z_inf=0 ou Z_sup=2 :
SIGl_k3=T3_prime(1)*A_k3(1)+2*T3_prime(1)*B_k3(1);
SIGt_k3=T3_prime(2)*A_k3(2)+2*T3_prime(2)*B_k3(2);
SIGlt_k3=T3_prime(3)*A_k3(3)+2*T3_prime(3)*B_k3(3);
alpha=(SIGl_k3/R_l)^2+(SIGt_k3/R_t)^2+(SIGlt_k3/R_clt)^2-
((SIGl_k3*SIGt_k3)/((R_l)^2)),
if alpha<1
    'PAS_DE_RUPTURE',
else
    'IL_Y_A_RUPTURE',
end

% % % % % VERIFICATION A LA RUPTURE DE LA COUCHE N°4 % % % % % % % % % %
% Calcul de SIGprime_-30° pour une valeur de Z_inf=2 ou Z_sup=4 :
SIGl_k4=T4_prime(1)*A_k4(1)+4*T4_prime(1)*B_k4(1);
SIGt_k4=T4_prime(2)*A_k3(2)+4*T4_prime(2)*B_k4(2);
SIGlt_k4=T4_prime(3)*A_k4(3)+4*T4_prime(3)*B_k4(3);
alpha=(SIGl_k4/R_l)^2+(SIGt_k4/R_t)^2+(SIGlt_k4/R_clt)^2-
((SIGl_k4*SIGt_k4)/((R_l)^2)),
if alpha<1
    'PAS_DE_RUPTURE',
else
    'IL_Y_A_RUPTURE',
end

```



```

G_tt=Gme*(1+(Vf/(w+v))),
% % % % % % % % % % % COUCHE N°1 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha1);s=sin(tetha1);
T_sig1=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]6
T_eps1=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]3
Tsig_il=inv(T_sig1);
Teps_il=inv(T_eps1);
Q_hax1=(Tsig_il)*(Q_ax)*(T_eps1), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax1=inv(Q_hax1), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% Matrice de rigidité [C_ij] du stratifié :
C45_prime1=(Gltc-G_tt)*c*s;
C44_prime1=G_tt*(c)^2+Gltc*(s)^2;
C55_prime1=G_tt*(s)^2+Gltc*(c)^2;
Cij_prime1=[C44_prime1 C45_prime1
             C45_prime1 C55_prime1]
% % % % % % % % % % % COUCHE N°2 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha2);s=sin(tetha2);
T_sig2=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]6
T_eps2=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]3
Tsig_i2=inv(T_sig2);
Teps_i2=inv(T_eps2);
Q_hax2=(Tsig_i2)*(Q_ax)*(T_eps2), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax2=inv(Q_hax2), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% Matrice de rigidité [C_ij] du stratifié :
C45_prime2=(Gltc-G_tt)*c*s;
C44_prime2=G_tt*(c)^2+Gltc*(s)^2;
C55_prime2=G_tt*(s)^2+Gltc*(c)^2;
Cij_prime2=[C44_prime2 C45_prime2
             C45_prime2 C55_prime2]
% % % % % % % % % % % COUCHE N°3 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha3);s=sin(tetha3);
T_sig3=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]6
T_eps3=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]3
Tsig_i3=inv(T_sig3);
Teps_i3=inv(T_eps3);
Q_hax3=(Tsig_i3)*(Q_ax)*(T_eps3), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax3=inv(Q_hax3), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% Matrice de rigidité [C_ij] du stratifié :
C45_prime3=(Gltc-G_tt)*c*s;
C44_prime3=G_tt*(c)^2+Gltc*(s)^2;
C55_prime3=G_tt*(s)^2+Gltc*(c)^2;
Cij_prime3=[C44_prime3 C45_prime3
             C45_prime3 C55_prime3]
% % % % % % % % % % % COUCHE N°4 % % % % % % % % % % %
c=cos(tetha4);s=sin(tetha4);
T_sig4=[c^2 s^2 -2*s*c;s^2 c^2 2*s*c;s*c -s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de
transformation de base [T]6
T_eps4=[c^2 s^2 -s*c;s^2 c^2 s*c;2*s*c -2*s*c (c^2-s^2)];% Matrice de
transformation de base [T]3
Tsig_i4=inv(T_sig4);

```

```

Teps_i4=inv(T_eps4);
Q_hax4=(Tsig_i4)*(Q_ax)*(T_eps4), % Matrice de rigidité réduites transformées en
hors axes [Q']
S_hax4=inv(Q_hax4), % Matrice de souplesses réduites transformées en hors axes
[S']
% Matrice de rigidité [C_ij] du stratifié :
C45_prime4=(Gltc-G_tt)*c*s;
C44_prime4=G_tt*(c)^2+Gltc*(s)^2;
C55_prime4=G_tt*(s)^2+Gltc*(c)^2;
Cij_prime4=[C44_prime4 C45_prime4
            C45_prime4 C55_prime4]
% Matrice de rigidité en membrane du stratifié
A_ij=2*((Q_hax1)+(Q_hax2)+(Q_hax3)+(Q_hax4)),

% Matrice de rigidité en couplage du stratifié
B_ij=0.5*[Q_hax1*(Z1^2-Z0^2)]+0.5*[Q_hax2*(Z2^2-Z1^2)]+0.5*[Q_hax3*(Z3^2-
Z2^2)]+0.5*[Q_hax4*(Z4^2-Z3^2)],

% Matrice de rigidité en Flexion du stratifié
D_ij=(1/3)*[Q_hax1*(Z1^3-Z0^3)]+(1/3)*[Q_hax2*(Z2^3-Z1^3)]+(1/3)*[Q_hax3*(Z3^3-
Z2^3)]+(1/3)*[Q_hax4*(Z4^3-Z3^3)],

% Matrice de rigidité en cisaillement du stratifié
F_ij=2*((Cij_prime1)+(Cij_prime2)+(Cij_prime3)+(Cij_prime4)),

% matrice de rigidité

ABDF= zeros(8:8);

ABDF(1,1)=A_ij(1);
ABDF(1,2)=A_ij(3);
ABDF(1,3)=A_ij(2);
ABDF(3,1)=A_ij(2);
ABDF(3,2)=A_ij(5);
ABDF(2,3)=A_ij(5);
ABDF(2,1)=A_ij(3);
ABDF(2,2)=A_ij(6);
ABDF(3,3)=A_ij(4);
ABDF(1,4)=B_ij(1);
ABDF(2,4)=B_ij(3);
ABDF(4,2)=B_ij(3);
ABDF(3,5)=B_ij(5);
ABDF(5,3)=B_ij(5);
ABDF(2,6)=B_ij(5);
ABDF(6,2)=B_ij(5);
ABDF(2,5)=B_ij(6);
ABDF(5,2)=B_ij(6);
ABDF(3,4)=B_ij(2);
ABDF(4,3)=B_ij(2);
ABDF(1,5)=B_ij(3);
ABDF(5,1)=B_ij(3);
ABDF(1,6)=B_ij(2);
ABDF(6,1)=B_ij(2);
ABDF(4,1)=B_ij(1);
ABDF(3,6)=B_ij(4);
ABDF(6,3)=B_ij(4);
ABDF(4,4)=D_ij(1);
ABDF(4,5)=D_ij(3);
ABDF(5,4)=D_ij(3);
ABDF(5,5)=D_ij(6);
ABDF(4,6)=D_ij(2);

```

```

ABDF(6,4)=D_ij(2);
ABDF(5,6)=D_ij(5);
ABDF(6,5)=D_ij(5);
ABDF(6,6)=D_ij(4);
ABDF(7,7)=F_ij(1);
ABDF(7,8)=F_ij(2);
ABDF(8,7)=F_ij(3);
ABDF(8,8)=F_ij(4)

ABDFInverse= inv(ABDF) % inverse de la matrice de rigidité (souplesse)

% dans notre cas, le sollicitation est la flexion simple
% On a comme données :
% Vecteur des sollicitations N_M
Nx=1000;
Ny=500;
Nxy=250;
Mx=100;
My=50;
Mxy=25;
Qyz=125;
Qxz=-40;

N_M_Q=[Nx
        Ny
        Nxy
        Mx
        My
        Mxy
        Qyz
        Qxz]

% Vecteur des deformations Epsilon_k_gama :
EPS_K_Gama=ABDFInverse*N_M_Q

EPS_x=EPS_K_Gama(1);
EPS_y=EPS_K_Gama(2);
EPS_xy=EPS_K_Gama(3);
K_x=EPS_K_Gama(4);
K_y=EPS_K_Gama(5);
K_xy=EPS_K_Gama(6);
Gama_yz=EPS_K_Gama(7);
Gama_xz=EPS_K_Gama(8);

EPS_membrane_f=[EPS_x
                  EPS_y
                  EPS_xy],
K_courbure=[K_x
             K_y
             K_xy],
Gama_cis=[Gama_yz
           Gama_xz],

% Déformations et contraintes en chaque couche:

% % % % % % % % % % COUCHE N°1 % % % % % % % % % %
% Déformations dans le repère de la couche(L,T,LT)
c=cos(tethal);s=sin(tethal);
Tl=[c^2 s^2 s*c;s^2 c^2 -s*c;-2*s*c 2*s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de passage vers
le repère (L,T,LT)

```

```

T1_prime=[c^2 s^2 2*s*c;s^2 c^2 -2*s*c;-s*c s*c (c^2-s^2)] %% Matrice de
passage vers le repère (L,T,LT)
% EPS_30=T1*EPS_membrane_f+T1*K_courbure*z
A_1=T1*EPS_membrane_f
B_1=T1*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repère principale du %
% stratifié :
% SIG_30=Q_hax1*EPS_membrane_f+Q_hax1*K_courbure*z
A_k1=Q_hax1*EPS_membrane_f
B_k1=Q_hax1*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche rapportées aux axes principaux de la
% couche considérée :
% SIGprime_30=T1_prime*A_k1+T1_prime*B_k1*z
A_2k1=T1_prime*A_k1
B_2k1=T1_prime*B_k1
% Contraintes de cisaillement Tau_yz et Tau_xz dans chaque couche exprimés dans
le repère principale du stratifié :
Tau_K1=Cij_prime1*Gama_cis

% % % % % % % % % % % COUCHE N°2 % % % % % % % % % % %
% Déformations dans le repère de la couche(L,T,LT)
c=cos(tetha2);s=sin(tetha2);
T2=[c^2 s^2 s*c;s^2 c^2 -s*c;-2*s*c 2*s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de passage vers
le repère (L,T,LT)
T2_prime=[c^2 s^2 2*s*c;s^2 c^2 -2*s*c;-s*c s*c (c^2-s^2)] %% Matrice de
passage vers le repère (L,T,LT)
% EPS_30=T2*EPS_membrane_f+T2*K_courbure*z
A_2=T2*EPS_membrane_f
B_2=T2*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repère principale du %
% stratifié :
% SIG_30=Q_hax2*EPS_membrane_f+Q_hax2*K_courbure*z
A_k2=Q_hax2*EPS_membrane_f
B_k2=Q_hax2*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche rapportées aux axes principaux de la
% couche considérée :
% SIGprime_30=T2_prime*A_k2+T2_prime*B_k2*z
A_2k2=T2_prime*A_k2
B_2k2=T2_prime*B_k2
% Contraintes de cisaillement Tau_yz et Tau_xz dans chaque couche exprimés
% dans le repère principale du stratifié :
Tau_K2=Cij_prime2*Gama_cis

% % % % % % % % % % % COUCHE N°3 % % % % % % % % % % %
% Déformations dans le repère de la couche(L,T,LT)
c=cos(tetha3);s=sin(tetha3);
T3=[c^2 s^2 s*c;s^2 c^2 -s*c;-2*s*c 2*s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de passage vers
le repère (L,T,LT)
T3_prime=[c^2 s^2 2*s*c;s^2 c^2 -2*s*c;-s*c s*c (c^2-s^2)] %% Matrice de
passage vers le repère (L,T,LT)
% EPS_30=T3*EPS_membrane_f+T3*K_courbure*z
A_3=T3*EPS_membrane_f
B_3=T3*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repère principale du %
% stratifié :
% SIG_30=Q_hax3*EPS_membrane_f+Q_hax3*K_courbure*z
A_k3=Q_hax3*EPS_membrane_f
B_k3=Q_hax3*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche rapportées aux axes principaux de la
% couche considérée :
% SIGprime_30=T3_prime*A_k3+T3_prime*B_k3*z
A_2k3=T3_prime*A_k3

```

```

B_2k3=T3_prime*B_k3
% Contraintes de cisaillement Tau_yz et Tau_xz dans chaque couche exprimés
% dans le repère principale du stratifié :
Tau_K3=Cij_prime3*Gama_cis

% % % % % % % % % % COUCHE N°4 % % % % % % % % % %
% Déformations dans le repère de la couche(L,T,LT)
c=cos(tetha4);s=sin(tetha4);
T4=[c^2 s^2 s*c;s^2 c^2 -s*c;-2*s*c 2*s*c (c^2-s^2)]; % Matrice de passage vers
le repère (L,T,LT)
T4_prime=[c^2 s^2 2*s*c;s^2 c^2 -2*s*c;-s*c s*c (c^2-s^2)] % % Matrice de
passage vers le repère (L,T,LT)
% EPS_30=T3*EPS_membrane_f+T3*K_courbure*z
A_4=T4*EPS_membrane_f
B_4=T4*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche exprimés dans le repère principale du %
% stratifié :
% SIG_30=Q_hax4*EPS_membrane_f+Q_hax4*K_courbure*z
A_k4=Q_hax4*EPS_membrane_f
B_k4=Q_hax4*K_courbure
% Contraintes dans chaque couche rapportées aux axes principaux de la
% couche considérée :
% SIGprime_30=T4_prime*A_k4+T4_prime*B_k4*z
A_2k4=T4_prime*A_k4
B_2k4=T4_prime*B_k4
% Contraintes de cisaillement Tau_yz et Tau_xz dans chaque couche exprimés
% dans le repère principale du stratifié :
Tau_K4=Cij_prime4*Gama_cis

```