

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERY DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique système

Présenté par

Melab Dehbia

Abdelli Jugurtha

Thème

Application de la Commande H_{∞} sur un moteur à courant continu

Mémoire soutenu publiquement le 03/10/2024 devant le jury composé de :

M Mourad ALLAD
MCB UMMTO Président

Mme Safia YUCEFI
MA UMMTO Encadrante

Mme Ouiza ADJEMOUT
MA UMMTO Examinatrice

Remerciements

En premier lieu, nous remercions "**Dieu Tout Puissant**" de nous avoir donné la santé, la force et la volonté pour réaliser ce travail.

Nous tenons à remercier nos familles pour leur aide précieuse, notre encadreur **Mme Yousfi Safia** pour ses conseils et orientations.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants qui ont collaboré à notre formation depuis notre premier cycle d'études jusqu'à la fin de notre cycle universitaire.

Nous adressons aussi nos vifs remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer notre projet. Nous leur représentons nos respects et nos plus sincères salutations.

Dédicace

Ce travail est dédié...

À mes chers parents ALI et NAIMA, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

À ma chère sœur LINDA YASMINE, pour son encouragements permanents et son soutien moral,

À mes chers frères IDIR, AHCENE, YAZID, KHALED, NABIL et AMIROUCHE, pour leur soutien, leur affection et la confiance qu'ils m'ont accordée,

À ma chère Tente, GHANIA pour son judicieux conseils, pour son aide et son soutien moral, pour ses judicieux conseils et son aide,

À tous ceux qui m'aiment...

MELAB DEHBIA

Ce travail est dédié...

À Dieu. Pour être mon appui, mon repère, ma solution et mon éternel espoir. Pour la force qu'il me donne, et qu'il donne aux personnes qui m'ont aidé et soutenu. Merci pour toutes les fois où je vous ai imploré et vous m'avez exaucé. Et la meilleure des récompenses sera de voir un jour votre visage plein de Majesté.

À ma très chère mère, Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurais point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

À mon très cher père, Tu as toujours été à mes côtés pour le soutenir et m'encourager. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

À mes chers frères, Massi et mehdi pour leur appui et leur encouragement,

À toute mes chers amis, En particulier : Sliman mazigh soufian Mohamed et marzouk On a passé des moments inoubliables pleins d'humour et de confiance et d'amitié et fidélité, je vous remercie pour votre aide et vos À tous mes collègues de la promotion d'Automatique.

ABDELLI JUGURTHA

Notations

QFT quantitative feedback theory

LTI système invariant dans le temps

SISO système mono-variable

MIMO système multivariable

LQ la commande lineare quadratique

LQR la commande lineare quadratique riccati

LQG la commande lineare quadratique gaussian

P representation du systeme nominal

G fonction de transfert du systeme

K correcteur

W perturbation

U commande du système

Z sortie du système

Table des matières

Table des matières

Table des figures

I	La robustesse et la commande robuste	3
I.1	Introduction	3
I.2	Définition de la robustesse	4
I.3	Types de robustesse	4
I.3.1	La robustesse en stabilité	5
I.3.2	La robustesse en performance	5
I.4	Définition de la commande robuste	5
I.5	Condition sur la Robustesse	6
I.5.1	Condition de la robustesse sur la stabilité	7
I.5.2	Condition de la robustesse sur la performance	7
I.6	Types d'incertitudes	7
I.6.1	Les incertitudes non structurées	8
I.6.2	Les incertitudes structurées	9
I.7	Quelques commandes robuste	10
I.7.1	La commande linéaire quadratique (LQ ou LQR)	10
I.7.2	La Commande LQG (Linear Qua- dratic Gaussian)	12
I.7.3	La commande prédictive	12

I.7.4	Commande adaptative	12
I.7.5	La méthode de synthèse QFT(quantative feedback theory)	13
I.7.6	La commande H_∞	13
I.8	Conclusion	14
II	Commande H_∞ des systèmes linéaire	15
II.1	Introduction	15
II.2	Définition de la Norme H_∞	16
II.2.1	Les propriétés de la norme H_∞ .	17
II.2.2	L'espace L_2	17
II.2.3	La norme H_2	17
II.2.4	La norme H_∞ d'un système . . .	18
II.3	Principe de la commande H_∞	18
II.3.1	Problème de la commande H_∞ stan- dard	20
II.3.2	Problème H_∞ standard sous-optimal	22
II.3.3	Problème H_∞ standard optimal .	22
II.4	Résolution du Problème de Commande H_∞ Linéaire	23
II.4.1	Resolution du probleme de la com- mande H_∞ par la methode de Ric- cati	23
II.4.2	Hypothèses Exigées	24
II.4.3	Hypothèse simplificatrices	25
II.4.4	Résolution du Problème Standard par Équation de Riccati	25
II.4.5	γ -itération	28
II.5	Introduction des fonctions de pondération	29
II.6	Choix des fonctions de pondération . . .	31
II.7	Fonctions de Sensibilité	32
II.7.1	Fonction de Sensibilité S	32

II.7.2	Fonction de Sensibilité Complémentaire T	32
II.7.3	Fonction de Sensibilité Mixte	33
II.8	conclusion	34
III	Application de la commande H_∞ sur un moteur a courant continu	35
III.1	Introduction	35
III.2	Présentation du système de moteur a courant continu	35
III.2.1	Modélisation du moteur a courant continu	36
III.2.2	Les valeurs nominales des paramètres	37
III.2.3	Choix des fonctions de pondération	38
III.3	Calcul de la commande H_∞	39
III.4	Résultat de simulation	40
III.5	Conclusion	47
III.6	Conclusion Générale	48
	Bibliographie	49

Table des figures

I.1	Schéma d'asservissement	6
I.2	Incertitude non structurée	9
I.3	Représentation des incertitudes structurée par blocs	10
I.4	Représentation des incertitudes structurée	10
II.1	problème H_∞ standard	20
II.2	Introduction des fonctions de pondération	29
III.1	Schéma du moteur a courant continu . .	36
III.2	Système avec pondération	39
III.3	Erreur sur la position	41
III.4	Erreur sur la rotation X_2	42
III.5	diagramme de Bode de la fonction de sensibilité S	44
III.6	diagramme de Bode de la sensibilité au bruit de sortie u	46

Introduction Générale

La conception d'une loi de commande pour réaliser l'asservissement d'un processus nécessite l'utilisation de modèles mathématiques. Cependant, ces modèles sont toujours accompagnés d'incertitudes et d'erreurs de modélisation, car les phénomènes physiques ne peuvent être parfaitement représentés par des modèles mathématiques. Sur la base d'un modèle imparfait, nous allons concevoir une loi de commande pour assurer la stabilité, en utilisant généralement un modèle plus précis que celui employé pour le calcul de la loi de commande. Il est également important de considérer la robustesse de la loi de commande obtenue, c'est-à-dire la capacité à garantir les performances du système (stabilité, précision et rapidité) malgré les perturbations ou les incertitudes liées aux paramètres.

La robustesse d'une commande peut être définie comme la capacité d'un système asservi à maintenir un comportement stable malgré divers phénomènes internes ou externes. Les méthodes classiques de commande PI et PID ont prouvé leur efficacité pour les problèmes de régulation ou de suivi dans les systèmes linéaires. Cependant, lorsque le système est soumis à des incertitudes ou à des exigences de performance élevées, ces commandes robustes classiques deviennent insuffisantes.

Pour répondre aux exigences de performance, il est nécessaire d'utiliser des méthodes de commande robuste telles que la commande prédictive, la méthode de synthèse QFT (Quantitative Feedback Theory), et la commande H_∞ . Dans notre travail, nous nous concentrerons

particulièrement sur la commande H_∞ , car elle offre une solution plus efficace aux problèmes mentionnés précédemment.

Objectif de mémoire

L'objectif de notre travail est de concevoir une loi de commande efficace pour assurer un bon suivi de trajectoire, résister aux perturbations, garantir la stabilité et être robuste face aux incertitudes des paramètres.

Présentation de travail

Ce mémoire est donc organisé en trois parties de la façon suivante

Le premier chapitre, sera consacré à l'étude de la commande robuste en ce qui concerne l'acquisition des outils fondamentales, la présentation des incertitudes (structurées et non structurées) et les axes de robustesse (voir la stabilité et performance robuste).

Le deuxième chapitre consiste à présenter la théorie de la commande H_∞ des systèmes linéaires, voir le problème H_∞ standard et sa présentation et sa résolution par la méthode de Riccati.

Le dernier chapitre est consacré à l'application de commande H_∞ linéaires sur un moteur à courant continue pour mettre en évidence toutes les notions présentées dans les deux chapitres précédents.

Chapitre I

La robustesse et la commande robuste

I.1 Introduction

La conception d'un système d'asservissement se base sur une représentation d'un système réel appelée modèle nominal ou de référence. Ce modèle, dérivé des équations physiques et obtenu par un processus d'identification, est une approximation de la réalité.

Cependant, ce modèle présente des problèmes dynamiques, non-linéarités négligées, incertitudes sur divers paramètres physiques, hypothèses simplificatrices et erreurs de mesure. De plus, certains éléments du système peuvent varier au fil du temps, et des facteurs externes aléatoires peuvent perturber le système d'asservissement. Il est donc insuffisant de compter uniquement sur le modèle de référence. Il faut aussi tenir compte des incertitudes de modélisation et des aléas externes.

La commande robuste se réalise en deux étapes. La première consiste à établir un modèle de connaissance,

utilisant les lois de la physique sous forme mathématique, et un modèle de représentation, reliant les différentes variables du processus. La deuxième étape introduit les incertitudes, structurées et non structurées, et trouve les relations mathématiques pour les intégrer au modèle, assurant ainsi la robustesse du système.

Même si ces incertitudes sont mal connues, des informations sur leurs amplitudes maximales et leurs natures sont généralement disponibles. Cela permet de concevoir des systèmes d'asservissement capables de maintenir des performances fiables malgré les incertitudes et les perturbations[1].

I.2 Définition de la robustesse

On peut définir la robustesse comme la résistance intrinsèque d'un système qui peut s'adapter aux conditions défavorables et maintenir son fonctionnement stable. Autrement dit, les méthodes de la robustesse peuvent garantir de bons résultats malgré les perturbations et les non-linéarités[2].

I.3 Types de robustesse

Le but de la synthèse robuste est le calcul d'un compensateur qui assure la stabilité du système en boucle fermée et garantit un niveau de performances donné pour le système incertain. Cette distinction sur l'objectif de la compensation conduit à définir deux types de

robustesse :

I.3.1 La robustesse en stabilité

Un système est robuste en stabilité s'il reste stable malgré les incertitudes telles que les erreurs de modélisation. Il est important de noter que la stabilité d'un système linéaire ne dépend pas des influences externes, mais plutôt des caractéristiques internes de sa structure [4].

I.3.2 La robustesse en performance

La robustesse en performance des systèmes asservis est indispensable pour garantir leur efficacité même dans des conditions simples et en présence de perturbations. Elle se mesure par leur capacité à maintenir une précision constante tout en réagissant rapidement aux changements de consigne. Cette stabilité dans la précision assure leur fiabilité et leur adaptabilité dans des environnements réels où les conditions peuvent varier. En assurant une performance stable même en présence de perturbations, la robustesse en performance contribue à leur efficacité opérationnelle et à leur capacité à répondre aux exigences de contrôle [4].

I.4 Définition de la commande robuste

La commande robuste est une méthode de contrôle qui garantit les performances et la stabilité d'un sys-

tème malgré les perturbations et les incertitudes liées au modèle mathématique qui le représente.

Elle cherche à minimiser l'écart entre le comportement réel du système et sa représentation théorique, en garantissant des performances stables et en atténuant l'impact des perturbations extérieures [3].

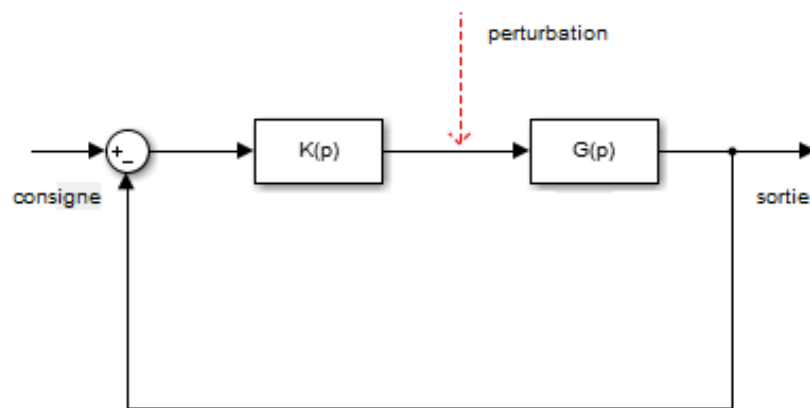


FIGURE I.1 – Schéma d'asservissement

I.5 Condition sur la Robustesse

La commande robuste cherche avant tout à maintenir la stabilité et les performances optimales des systèmes en boucle fermée. Pour juger de sa robustesse, on évalue sa capacité à :

- Poursuite des grandeurs d'entrées.
- Rejet des perturbations
- Tolérer les incertitudes du modèle.
- Bonnes marges de stabilité.

- Minimiser l'impact des bruits de mesure.

Ces critères garantissent que la commande peut fonctionner de manière fiable et efficace, même face à des variations et des imprévus [7].

I.5.1 Condition de la robustesse sur la stabilité

La commande robuste des systèmes multivariables vise à maintenir la stabilité en assurant une bonne marge de cette dernière. Toutefois, la synthèse pour l'obtention des contrôleurs s'effectue sur un modèle nominale, il ne décrit pas toujours le procédé réel avec exactitude et précisions, d'où le recoure a la notion d'incertitude [7].

I.5.2 Condition de la robustesse sur la performance

La robustesse des performances implique le maintien des performances désirées même en présence de perturbations sur les modèles. Le raisonnement pour l'obtention de la robustesse sur les performances est le même pour l'obtention de robustesse sur la stabilité, on utilisent une matrice d'incertitude [7].

I.6 Types d'incertitudes

Les incertitudes peuvent être structurées ou non structurées. Avec une incertitude non structurée, les sources individuelles d'incertitude sont décrites par une seule perturbation qui est une matrice complète compatible

avec P .

Avec une description structurée de l'incertitude, les sources individuelles d'incertitude ne sont pas liées entre elles dans une matrice complète. Au lieu de cela, les sources d'incertitude sont représentées séparément [5].

- P : c'est une représentation du système nominal

I.6.1 Les incertitudes non structurées

Les incertitudes non structurées, également connues sous le nom d'incertitudes dynamiques, font référence aux dynamiques négligées dans le modèle d'un système. Elles sont souvent caractérisées par une borne supérieure, ce qui signifie qu'elles représentent un pire cas possible pour le comportement du système. Lors de la prise en compte de ces incertitudes, il est nécessaire de considérer le scénario le plus défavorable tout en respectant cette borne supérieure. Cela garantit une analyse robuste du système, en tenant compte des variations potentiellement importantes dues à ces incertitudes non structurées. En prenant en compte ces incertitudes de manière appropriée, il est possible de concevoir des stratégies de contrôle plus résilientes et efficaces, capables de maintenir les performances du système même dans des conditions imprévisibles ou défavorables [5].

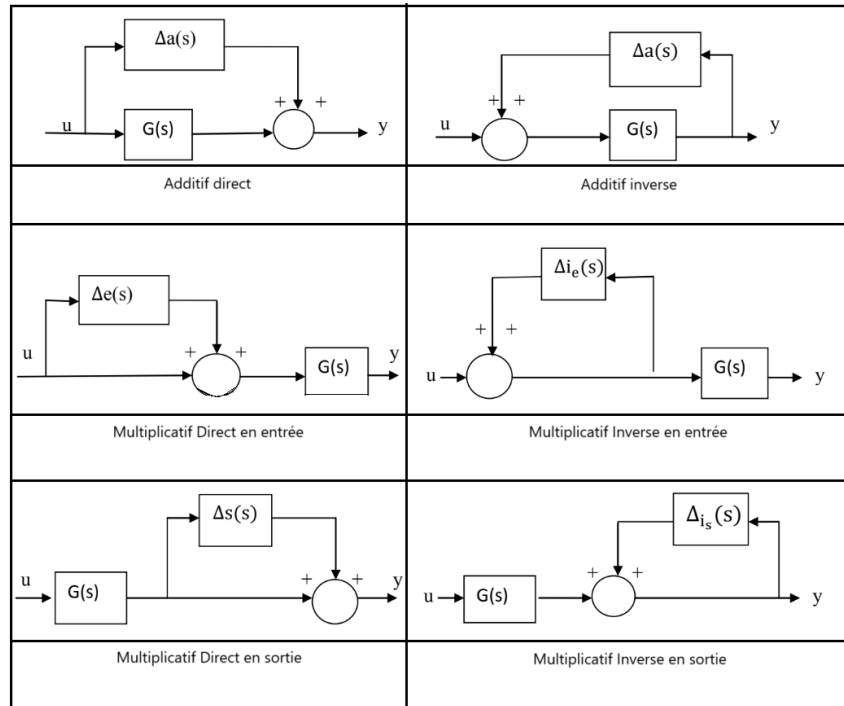


FIGURE I.2 – Incertitude non structurée

I.6.2 Les incertitudes structurées

Les incertitudes structurées, également appelées incertitudes paramétriques, se réfèrent aux variations ou aux erreurs dans les estimations des caractéristiques physiques d'un système. Elles surviennent lorsque nous avons des incertitudes sur les valeurs spécifiques des paramètres qui définissent le système. Ces incertitudes peuvent résulter d'erreurs dans les mesures ou les estimations de ces paramètres. Elles sont particulièrement remarquables lors de la construction de modèles basés sur des équations physiques, où les valeurs des paramètres sont essentielles pour déterminer le comportement du système.

En tenant compte de ces incertitudes structurées, nous pouvons mieux comprendre les limites de nos modèles et améliorer nos prédictions en conséquence, même en reconnaissant les incertitudes inhérentes dans les caractéristiques physiques du système [5].

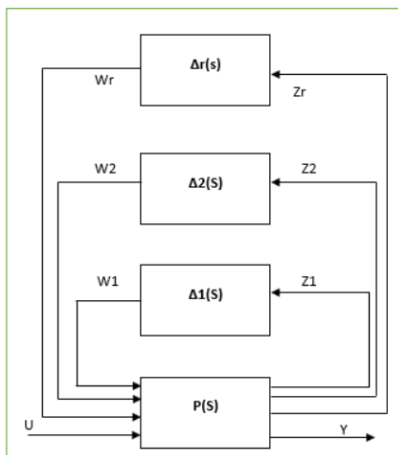


FIGURE I.3 – Représentation des incertitudes structurée par blocs

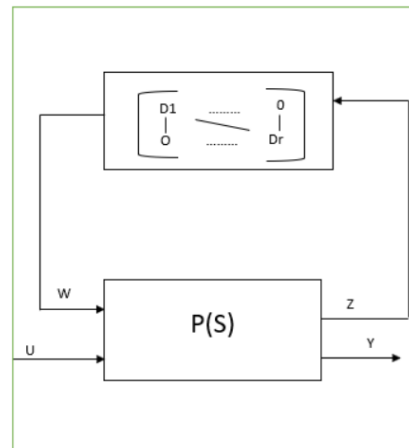


FIGURE I.4 – Représentation des incertitudes structurée

I.7 Quelques commandes robuste

Dans la littérature, il existe plusieurs types de commande robuste on cite a titre d'exemple :

I.7.1 La commande linéaire quadratique (LQ ou LQR)

La commande linéaire quadratique (LQ ou LQR) est une méthode qui vise à calculer la matrice de gains pour

un retour d'état. Cette approche, initiée par Kalman à travers trois articles fondamentaux entre 1960 et 1964, a été enrichie par de nombreux autres chercheurs par la suite. LQR signifie "linear quadratic regulator", ce qui indique que le système est linéaire et que la commande est quadratique. Son objectif est de minimiser une fonction de coût quadratique, basée sur les énergies de la commande et de la sortie.

Dans le cadre d'un système linéaire stationnaire, nous considérons une équation d'état de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

où x est l'état, u est la commande, et A et B sont des matrices constantes appartenant respectivement à $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{R}^{n \times m}$.

Le critère de performance associé à la commande LQR est défini comme suit :

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

où Q et R sont des matrices de pondération symétriques réelles, semi-définies positives et définies positives respectivement. Ces matrices sont choisies de manière à accorder une pondération relative aux variables d'état et à la loi de commande.

L'objectif de la commande LQR est de minimiser ce critère de performance, qui est quadratique en l'état x et la commande u . Son but est de ramener l'état à sa valeur d'équilibre, de préférence aussi rapidement que possible après une perturbation, tout en respectant les contraintes spécifiées dans un cahier des charges[9]

I.7.2 La Commande LQG (Linear Quadratic Gaussian)

La commande LQG est une méthode permettant de calculer la matrice de gains d'une commande par retour d'état, en visant spécifiquement la réduction des bruits blancs. Elle est appliquée à des systèmes dont l'état n'est pas directement mesuré. Cette approche combine un contrôleur LQ (Linear Quadratic) avec un estimateur de Kalman. La commande LQG garantit une certaine robustesse de la boucle fermée [8].

I.7.3 La commande prédictive

La commande prédictive consiste à utiliser un modèle numérique pour envisager son développement dans un intervalle de temps déterminé en prenant compte les informations disponibles à l'heure actuelle, son objectif est de projeter la sortie du système dans un futur proche en se basant sur son état actuel et en utilisant des méthodes de modélisation de pointe [10].

I.7.4 Commande adaptative

La commande adaptative réagit de manière automatique et dynamique aux variations observées dans le processus.

L'objectif de la commande adaptative est d'assurer une adaptation automatique et continue du régulateur des boucles de commande, permettant ainsi de maintenir un niveau de performance stable malgré les changements

des paramètres du processus au fil du temps [11].

I.7.5 La méthode de synthèse QFT(quantitative feedback theory)

Initialement développée par le professeur Isaac Horowitz dans les années 1970, elle permet de prendre en compte l'incertitude portant sur le procédé par des domaines d'incertitude fréquentiels, et construit pour un ensemble de fréquences sur le diagramme de black-nicols. Cette modélisation totalement structurée de l'incertitude permet d'obtenir des commandes a la fois robustes et aussi perforantes que possible.

I.7.6 La commande H_∞

C'est une approche de conception de commande qui vise a garantir la stabilité asymptotique de système en atténuant l'impact des entrées extérieur sur les sorties des systèmes.

Ses entrées sont constitués des signaux de consigne et éventuellement des perturbations liées a l'environnement du système. La synthèse H_∞ , est basé sur une commande robuste qui résiste aux perturbations et aux incertitudes.

I.8 Conclusion

Ce chapitre a établi les bases nécessaires pour comprendre la commande robuste. Nous avons défini les concepts clés de la robustesse et exploré les différents types d'incertitudes pouvant affecter un système de contrôle. Nous avons également discuté des conditions nécessaires pour garantir que le système reste stable et performant, même face à ces incertitudes.

Cette approche nous prépare à approfondir les techniques spécifiques de commande robuste, telles que la méthode H_∞ , dans les chapitres suivants, pour concevoir des systèmes de contrôle capables de maintenir leurs performances malgré les défis réels.

Chapitre II

Commande H_∞ des systèmes linéaire

II.1 Introduction

La commande H_∞ est une méthode puissante et largement utilisée en théorie de contrôle pour la conception de systèmes robustes. Cette approche permet de modéliser et d'analyser les matrices de transfert des systèmes en boucle fermée tout en intégrant divers objectifs de performance et de robustesse. Contrairement à d'autres méthodes de commande classique, la commande H_∞ est particulièrement efficace pour traiter les incertitudes et les perturbations dans les systèmes dynamiques, ce qui la rend idéale pour des applications où la robustesse est cruciale.

Dans ce chapitre, nous allons explorer les notions fondamentales de la commande H_∞ linéaire, ainsi que les méthodes de résolution associées, notamment par le biais des équations de Riccati. Nous débuterons par une introduction aux normes utilisées dans les critères à op-

timiser, qui sont essentielles pour formuler et résoudre les problèmes de commande H_∞ [12].

II.2 Définition de la Norme H_∞

Cas monovariante (SISO) : Pour un système monovariante, la norme H_∞ correspond au maximum de $|G(j\omega)|$, ce qui est illustré par le diagramme de Bode. Cette définition est valable car un système monovariante ne possède qu'une seule valeur singulière. Soit $G(p)$ la matrice de transfert, la norme est alors donnée par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \{|G(j\omega)|\}.$$

Cas multivariante (MIMO) : Dans le cas multivariante, la norme H_∞ est définie comme le maximum de la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert $G(j\omega)$:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)).$$

Pour un signal d'entrée d'énergie bornée, la norme H_∞ peut également être exprimée par analogie avec le cas monovariante :

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \left(\frac{\|S\|_2}{\|w\|_2} \right).$$

Ici, S représente le signal de sortie du système, et la notation $\|S\|_2$ désigne la norme H_2 du signal. Cela mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle $G(j\omega)$. Ainsi, le gain d'un système multivariante peut être défini comme suit [6] :

$$\sigma(G(j\omega)) \leq \frac{\|S(p)\|_2}{\|w(p)\|_2} \leq \sigma_{\max}(G(j\omega)).$$

- S : représente le signal de sortie du système.

II.2.1 Les propriétés de la norme H_∞

Propriété 1 : Une propriété fondamentale que vérifie la norme $\|\cdot\|_\infty$ est

$$\|F \cdot G\|_\infty \leq \|F\|_\infty \|G\|_\infty \quad (\text{II-1})$$

Propriété 2 :

$$\left\| \frac{F(p)}{G(p)} \right\|_\infty \geq \sup(\|F(p)\|_\infty, \|G(p)\|_\infty) \quad (\text{II-2})$$

Propriété 3 :

$$\|F(p) \cdot G(p)\|_\infty \geq \sup(\|F(p)\|_\infty, \|G(p)\|_\infty) \quad (\text{II-3})$$

II.2.2 L'espace L_2

L'espace L_2 est l'ensemble des fonctions vectorielles $X(p)$, ou $p \notin C$, de dimensions n et de carré sommable sur l'axe imaginaire. c'est-à-dire que l'intégrale du carré de leurs valeurs soit finie[13].

II.2.3 La norme H_2

La norme H_2 d'un système linéaire stationnaire S , caractérisé par sa fonction de transfert $G(s)$, est définie mathématiquement comme suit :

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|_F^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

La norme $\|G\|_2$ est une mesure de la performance et de la robustesse du système dans le domaine de la

théorie du contrôle. Elle évalue la capacité du système à minimiser l'énergie des signaux d'entrée aléatoires ou des perturbations externes [13].

II.2.4 La norme H_∞ d'un système

La norme H_∞ d'un système est une mesure de sa sensibilité maximale aux perturbations externes. Elle indique la capacité du système à maintenir son comportement stable et contrôlé même en présence de perturbations importantes. En d'autres termes, elle évalue le maximum de l'amplification possible entre une perturbation d'entrée et la réponse du système.

La norme H_∞ est définie comme suit [14]

$$\|G\|_{H_\infty} = \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|$$

où $\|G(j\omega)\|$ est le gain du système en fonction de la fréquence ω .

II.3 Principe de la commande H_∞

La commande H_∞ propose une solution (si elle existe) au problème de contrôle en tenant compte de plusieurs contraintes. Elle intègre des spécifications définies dans le cahier des charges, lequel peut contenir quatre catégories de spécifications :

- **suivi de trajectoire de référence (consigne) :** il s'agit d'étudier l'influence du signal de référence sur le signal d'erreur.
- **atténuation de signaux de perturbation :** il s'agit d'étudier l'influence de la perturbation sur le signal d'erreur.
- **atténuation du bruit de mesure :** il s'agit d'étudier l'influence des signaux de bruit sur le signal de commande et le signal de sortie.
- **commande modérée :** il s'agit d'étudier l'influence des signaux de référence et de signal de perturbation sur le signal de commande.

Il est essentiel d'assurer la stabilité interne du système en boucle fermée.

D'abord, il faut convertir les spécifications du domaine temporel (comme le temps de réponse et l'erreur statique) en domaine fréquentiel. Ensuite, on utilise ces spécifications pour créer des modèles fréquentiels qui servent de pondérations pour la synthèse H_∞ .

Le problème est formulé en tenant compte des objectifs de la commande et du modèle de système à contrôler [15].

II.3.1 Problème de la commande H_∞ standard

Considérez le diagramme fonctionnel présenté dans la figure II.1

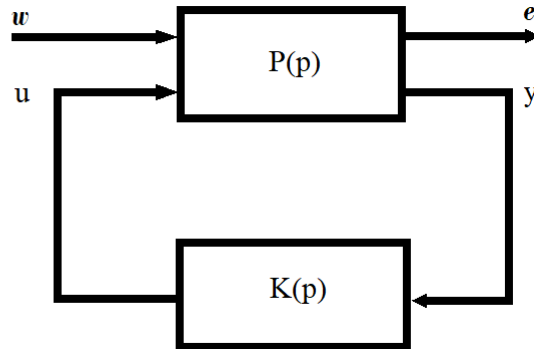


FIGURE II.1 – problème H_∞ standard

Ce "mécanisme" est un système comportant 2 données d'entrées et 2 données de sorties. L'ensemble w représente toutes les entrées extérieures, telles que les indicateurs de référence, perturbation. Le vecteur u représente les commandes. Les sorties e représentent les erreurs de régulation, qu'on souhaite maintenir à 0. Enfin y représente les informations de mesures disponibles pour développer la commande.

Sous sa forme la plus simple, le problème H_∞ est un problème de représentation de perturbation. Il consiste à diminuer la conséquence d'une perturbation w sur le fonctionnement du système. le signal w est considéré d'énergie finie et sa taille est évalué en critère l_2 . Son effet sur le système est mesuré par la norme l_2 d'un ensemble "cout" S .

Finalement, on peut intervenir sur le système par une commande $u = K(p)y$ qui minimise l'effet de w sur S .

La partition de la matrice de transfert $P(p)$ peut être devisé sous ensembles structures, sous la forme : [18].

$$\begin{pmatrix} e \\ y \end{pmatrix} = P(p) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(p) & P_{12}(p) \\ P_{21}(p) & P_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

avec : $u = K \cdot y$

- u : commande du système
- w : perturbation
- y : sortie mesurée
- e : la sortie régulière
- K : correcteur

Calcul des valeurs de e et y :

$$e = P_{11}(p) \cdot w + P_{12}(p) \cdot u$$

$$y = P_{21}(p) \cdot w + P_{22}(p) \cdot u$$

En éliminant u et y de ces équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\ell(P, K) &= P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \\ e &= \mathcal{F}_\ell(P, K)\omega \end{aligned}$$

- F_l : représente la transformation linéaire fractionnaire

II.3.2 Problème H_∞ standard sous-optimal

Considérons $\gamma > 0$ et un système $P(p)$ donné. Nous devons trouver un correcteur $K(p)$ qui :

- Stabiliser le système de la Figure 2-1 (c'est-à-dire que tous les pôles du système en boucle fermée doivent avoir une partie réelle strictement négative).
- Assurer que la norme infinie du système en boucle fermée est inférieure à γ :

$$\|F_l(P(p), K(p))\|_\infty < \gamma.$$

Les correcteurs satisfaisant ces deux conditions sont qualifiés de sous-optimaux[13].

II.3.3 Problème H_∞ standard optimal

Pour un système $P(p)$ donné, nous cherchons à déterminer un correcteur $K(p)$ qui :

- Stabilise le système de manière interne.
- Minimise la norme infinie du système en boucle fermée :

$$\min_{K(p)} \|F_l(P(p), K(p))\|_\infty.$$

Les correcteurs qui obtiennent la plus petite valeur de γ possible sont appelés optimaux[13].

II.4 Résolution du Problème de Commande H_∞ Linéaire

Il existe plusieurs approches pour le calcul et la résolution du correcteur robuste H_∞ . Parmi celles-ci, nous pouvons citer l'approche basée sur la résolution des équations de Riccati, qui se ramène à une contrainte sur la norme H_∞ , la synthèse par inégalités matricielles linéaires (LMI) qui fournit une autre méthode pour résoudre le problème standard, ainsi que la méthode utilisant la paramétrisation de Youla [19].

II.4.1 Résolution du problème de la commande H_∞ par la méthode de Riccati

Dans les sections suivantes, nous présenterons la résolution du problème H_∞ standard par la méthode des équations de Riccati. La formulation *LFT* et l'approche par variable d'état offrent un cadre méthodologique riche pour la résolution de problèmes de commande, notamment dans le cadre de la synthèse H_∞ . Nous allons donc reprendre ici les notations usuelles pour la forme standard exprimée en espace d'état sous la forme suivante : [3].

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(p) & P_{12}(p) \\ P_{21}(p) & P_{22}(p) \end{bmatrix}$$

Dans cette étude, les approches choisies pour résoudre le problème standard nécessitent la vérification d'un certain nombre d'hypothèses présentées dans la section suivante.

II.4.2 Hypothèses Exigées

(H1) Hypothèse 1 : La paire (A, B_u) est stabilisable et la paire (C_y, A) est détectable .

- Cette hypothèse classique est nécessaire pour toute méthode utilisant les variables d'état. Elle garantit l'existence d'une loi de commande $K(s)$ qui stabilise le système en boucle fermée.

(H2) Hypothèse 2 : $\text{rang}(D_{eu}) = n_u$ et $\text{rang}(D_{yw}) = n_y$

- Ces conditions sont suffisantes pour assurer que la matrice de transfert du correcteur soit propre.

(H3) Hypothèse 3 : $\forall w \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_e & D_{eu} \end{bmatrix} = n + n_u$

- Cette hypothèse garantit que le transfert $P_{e \rightarrow u}$ (c'est-à-dire P_{12}) n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

(H4) Hypothèse 4 : $\forall w \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + n_y$

- Cette hypothèse garantit que le transfert $P_{y \rightarrow w}$ (c'est-à-dire P_{21}) n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Il est important de noter que la première hypothèse est commune à toutes les méthodes de commande, tandis que les autres sont spécifiques à la méthodologie H_∞ . Ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées.

II.4.3 Hypothèse simplificatrices

Pour obtenir des expressions plus simples, nous introduisons les conditions supplémentaires suivantes, qui sont des hypothèses simplificatrices :

$$D_{ew} = D_{yu} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$D_{eu}^T (C_e D_{eu}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_u} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2})$$

$$\begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

II.4.4 Résolution du Problème Standard par Équation de Riccati

Cette méthode, également connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, a émergé à la fin des années

1980. En général, elle est mise en œuvre numériquement sur des calculateurs. La commande H_∞ linéaire repose sur la résolution d'une série d'équations de Riccati, et demeure aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée et la plus fiable sur le plan numérique.

L'équation de Riccati est donnée par :

$$XA + A^T X - PX + Q = 0 \quad (\text{II.4})$$

avec :

$$P = P^T \quad \text{et} \quad Q = Q^T \quad (\text{II.5})$$

La solution stabilisante X , si elle existe, sera une matrice symétrique telle que $(A - PX)$ soit une matrice stable (c'est-à-dire que ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative). Une telle solution sera notée :

$$X = \text{Ric}(A - P, -Q, -A^T) \quad (\text{II.6})$$

Il est maintenant possible d'écrire le théorème suivant qui permet de trouver un contrôleur pour le problème sous-optimal.

Théorème II.1 : Sous les hypothèses H_1 à H_4 , le problème standard a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies :

- i) La matrice

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_\omega B_\omega^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{bmatrix}$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

- iv) Il existe une matrice symétrique $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$.
- v) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$, où ρ désigne le module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

La recherche du γ optimal est effectuée par dichotomie, en testant, à chaque itération, l'existence d'une solution $K(s)$ pour le γ défini (défini plus loin).

Les algorithmes couramment implantés fournissent une solution appelée correcteur central. Cependant, il existe une infinité de solutions au problème sous-optimal pour un γ fixé. Ce théorème nécessite donc la solution de deux équations de Riccati, et la dernière condition établit un lien entre ces deux solutions. Enfin, la solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

Théorème II.2 : Sous les conditions du théorème II.1, le correcteur central (correspondant à $\Phi(s) = 0$) qui stabilise le système de manière interne et satisfait $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$, est décrit par la LFT :

$$K(s) = F_l(K_a(s), \Phi(s)) \quad (\text{II.7})$$

où $\Phi(s) \in RH_\infty$ est une matrice de transfert de dimension $n_u + n_y$, arbitraire et vérifiant $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$, et $K_a(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante :

$$A \begin{bmatrix} x_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

$$\dot{x}_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\text{II.9})$$

Correcteur Central : Le correcteur correspondant à $\Phi(s) = 0$, appelé correcteur central, admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} x_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\infty & -B_u^T X_\infty \\ Z_\infty Y_\infty C_y^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Le théorème II.1 ne fournit pas une expression explicite de la valeur optimale γ_{\min} . Cette valeur est approximée par dichotomie en utilisant les résultats du théorème II.1 (procédure de γ -itération). En pratique, on cherche donc la valeur de γ la plus petite possible. Le correcteur central est ensuite calculé en appliquant le théorème II.2.

II.4.5 γ -itération

L'algorithme de γ -itération permet d'approcher par dichotomie la valeur optimale de γ , en suivant les étapes suivantes :

- Choisir deux valeurs γ_{\inf} et γ_{\sup} ainsi qu'une tolérance η . γ_{\inf} doit être telle que l'une des conditions du théorème II.1 ne soit pas vérifiée, tandis que toutes doivent l'être pour γ_{\sup} .
- Tester les conditions pour $\gamma = \frac{\gamma_{\inf} + \gamma_{\sup}}{2}$. Si elles sont vérifiées, poser $\gamma = \gamma_{\sup}$; sinon, poser $\gamma = \gamma_{\inf}$.
- Si la différence entre les deux dernières valeurs de γ est supérieure à η , retourner à la deuxième étape.
- Calculer le correcteur central pour la dernière valeur de γ vérifiant les conditions.

En dehors de l'approche fondée sur les équations de Riccati et des techniques utilisant des représentations de transfert, il existe une approche plus récente pour la résolution du problème H_∞ , qui repose sur les techniques d'inégalités matricielles linéaires (*LMI*).

II.5 Introduction des fonctions de pondération

Pour atteindre les objectifs de stabilité et de performance, nous introduisons des fonctions de pondération sous forme de filtres sur différents signaux. Ces filtres permettent de privilégier certaines plages de fréquences selon le signal concerné.

Nous considérons le schéma de la figure suivante :

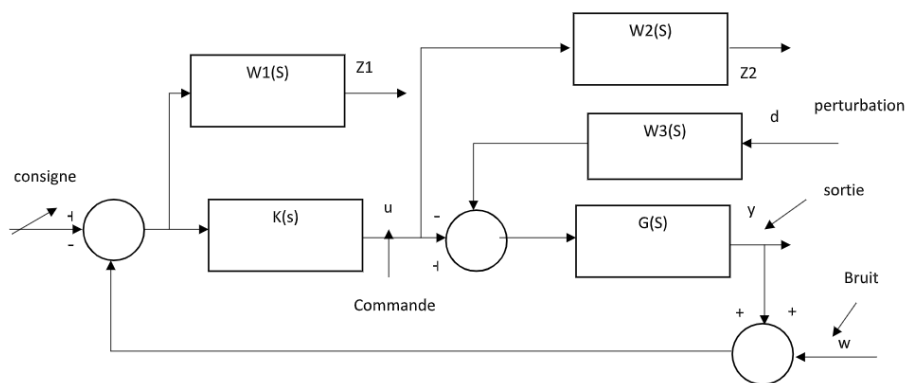


FIGURE II.2 – Introduction des fonctions de pondération

- La commande u par $W_1(p)$,
- L'erreur est pondérée par le filtre $W_2(p)$,

- L'entrée de perturbation par $W_3(p)$.

Les signaux r et d sont les entrées, tandis que z_1 et z_2 sont les sorties souhaitées. Nous obtenons ainsi le transfert suivant :

$$\begin{bmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(p)S_y(p) & W_1(p)S_y(p)G(p)W_3(p) \\ W_2(p)K(p)S_y(p) & W_2(p)K(p)S_y(p)G(p)W_3(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(p) \\ d(p) \end{bmatrix} \quad (\text{II-12})$$

où S_y représente la fonction de sensibilité en sortie sous la forme suivante :

$$S_y = (1 + GK)^{-1}$$

Le problème H_∞ associé est le suivant :

Déterminer un nombre $\gamma > 0$ et un correcteur $K(p)$ qui stabilise le système en boucle et assure :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1S_y & W_1S_yGW_3 \\ W_2KS_y & W_2KS_yW_3 \end{bmatrix} \right\| < \gamma \quad (\text{II-11})$$

L'avantage de cette approche est que les filtres $W_1(p)$, $W_2(p)$, et $W_3(p)$ modèlent les différents transferts S_y .

Si (II-12) est vérifiée, alors les propriétés suivantes s'appliquent :

$$\|S_y\| < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S_y(j\omega)| \prec |W(j\omega)| \quad (\text{II-12a})$$

$$\|S_y\| < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |W_s(j\omega)S_y(j\omega)| \prec |W(j\omega)| \quad (\text{II-12b})$$

$$\|S_y\| < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S_y(j\omega)W(j\omega)| \prec |W(j\omega)W(j\omega)| \quad (\text{II-12c})$$

$$\|S_y\| < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |W(j\omega)S_y(j\omega)W(j\omega)| < |W(j\omega)W(j\omega)|$$

(II-12d)

Ainsi, la réponse fréquentielle de chaque fonction S_y est contrainte par un gabarit défini par les filtres choisis.

II.6 Choix des fonctions de pondération

Le choix de la fonction de pondération pour les fonctions de sensibilité est appelé modélisation de la boucle fermée ou modelage de la fonction de sensibilité, modeler de la fonction de sensibilité permet d'obtenir une boucle fermée dont le comportement est proche de celui attendu.

En se basant de modèles prédéterminés pour modéliser les transformations en boucle fermée, permet de spécifier Initialement des objectifs de performance et de robustesse. Le choix des pondérations se déduit des spécifications dérivées du cahier des charges, qui intègrent généralement des critères de performance suivantes [17] :

- gabarit fréquentiel
- gabarit temporel
- amortissement de mode souple
- critères énergétiques (peut-être exprimé par une norme H_2)

Les spécifications de robustesse peuvent provenir les problèmes suivant :

- connaissance de modèle sur une plage limite de fréquence
- erreur d'identification

- erreur de modélisation
- erreur due a la réduction/simplification d'un modèle
- description d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire
- description d'un modèle LPV par un modèle LTI

II.7 Fonctions de Sensibilité

II.7.1 Fonction de Sensibilité S

La fonction de sensibilité S est comme une boîte à outils mathématique qui nous indique comment les changements dans ce que nous voulons (la consigne) et les perturbations extérieures affectent la sortie du système ainsi que les erreurs. En d'autres termes, elle montre à quel point notre système est sensible aux variations de la consigne et aux perturbations. Mathématiquement, nous pouvons la représenter par l'expression :

$$S = \frac{1}{1 + GK}$$

Cette expression nous aide à comprendre comment notre système réagit aux différentes entrées et à quel point il est sensible à ces changements [7].

- G : fonction de transfert du système
- K : fonction de transfert du correcteur

II.7.2 Fonction de Sensibilité Complémentaire T

La fonction de sensibilité complémentaire, notée T , représente la relation entre la référence et la sortie. Sa

formule mathématique est définie par :

$$T = \frac{GK}{1 + GK}$$

En d'autres termes, la fonction de sensibilité complémentaire T prend en compte l'effet intégré de la fonction de transfert en boucle fermée (G) et du contrôleur (K) [6].

II.7.3 Fonction de Sensibilité Mixte

L'étude présentée dans le premier chapitre a permis de dégager trois conditions essentielles pour assurer la stabilité et des performances robustes :

$$\|W_1 S\|_\infty < 1 \quad (\text{II.11})$$

$$\|W_2 T\|_\infty < 1 \quad (\text{II.12})$$

$$\|W_3 K S\|_\infty < 1 \quad (\text{II.13})$$

Ces trois conditions peuvent être condensées en une seule, sous la forme :

$$\max(\|W_1 S\|_\infty, \|W_2 T\|_\infty, \|W_3 K S\|_\infty) < 1 \quad (\text{II.14})$$

où W_1 , W_2 , et W_3 sont des fonctions de pondération dont nous examinerons les détails plus tard. Les normes $\|T\|_\infty$ et $\|K S\|_\infty$ ont souvent des impacts similaires. Par conséquent, inclure ces deux termes dans le critère est souvent redondant. Nous nous concentrerons donc sur la résolution d'un des deux problèmes suivants :

$$\max(\|W_1 S\|_\infty, \|W_3 K S\|_\infty) < 1 \quad (\text{II.15})$$

ou

$$\max(\|W_1 S\|_\infty, \|W_2 T\|_\infty) < 1 \quad (\text{II.16})$$

En pratique, il est généralement plus pertinent de résoudre le second problème. Ces formulations sont regroupées sous le concept de **sensibilité mixte** [6].

II.8 conclusion

Ce chapitre explore la commande H_∞ comme une méthode robuste pour concevoir des systèmes de contrôle performants et résilient. Comparée à d'autres approches, elle se distingue par sa capacité à garantir la stabilité et la performance, même dans des conditions extrêmes. Nous avons examiné comment cette approche intègre divers objectifs de performance et de robustesse, ainsi que les méthodes pour spécifier ces objectifs à travers le choix des fonctions de pondération.

De plus, nous avons discuté une des techniques de résolution du problème H_∞ qui est la méthode basée sur la résolution des équations de Riccati. En mettant l'accent sur la simplicité et l'applicabilité pratique, ce chapitre offre une vue d'ensemble claire et accessible de la commande H_∞ et de son importance dans la conception de systèmes de contrôle efficaces.

Chapitre III

Application de la commande H_∞ sur un moteur a courant continu

III.1 Introduction

Dans ce chapitre nous utiliserons les différentes théorèmes vu dans les chapitres précédentes ainsi que la méthodes de calcule du correcteur H_∞ . Pour tester la robustesse de commande H_∞ , on a choisit un modèle d'un moteur a courant continu. Dans l'application de cette commande nous utiliserons la méthode baser sur les équations de Riccati.

III.2 Présentation du système de moteur a courant continu

On considèreront le moteur a courant continu, voir le schéma ci-dessus :

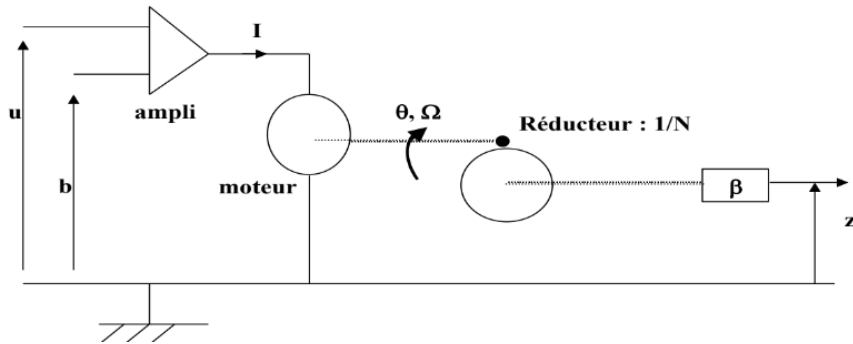


FIGURE III.1 – Schéma du moteur a courant continu

- u : entrée échelon
- b : le bruit
- z : sortie de système
- θ : angle de rotation
- Ω : vitesse des rotation

III.2.1 Modélisation du moteur a courant continu

Les lois classiques de la mécanique et de l'électricité permettent d'établir le modèle suivant[18] :

$$L \frac{di}{dt} = -RI - K_e \Omega + A(u + b) \quad (\text{III.1})$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = K_c I - a\Omega \quad (\text{III.2})$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{III.3})$$

$$Z(t) = \frac{\beta}{N} \theta \quad (\text{III.4})$$

Ce modèle peut-être réécrit sous la forme d'une représentation d'état comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_e}{J} \end{bmatrix} u \quad (\text{III.5})$$

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

avec :

- K_e : constante de force électromoteur
- K_c : constante de commande
- J : moment d'inertie
- A : moment d'inertie équivalent du moteur dans le système de contrôle
- R : la résistance
- L : l'inductance
- β : moment cinétique
- N : la constante

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{III.7})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{III.8})$$

Par identification, on trouve :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{J} \end{bmatrix}$$

III.2.2 Les valeurs nominales des paramètres

$$\begin{aligned} K_e &= 0.024 \cdot V_s \\ K_c &= 0.024 \text{ Nm A}^{-1} \\ a &= 10^{-6} \\ J &= 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\beta = 4$$

$$N = 7$$

Après application de ces valeurs, nous aboutissons au modèle suivant : [20].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -66.67 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_e}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0]$$

$$D = [0]$$

III.2.3 Choix des fonctions de pondération

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est donnée par :

$$G(s) = \frac{240}{s(1 + 0.015s)}$$

Pour calculer un correcteur H_∞ , il faut tout d'abord déterminer des gabarit qui permettent de définir des spécification à respecter qui sont les suivantes :

- erreur statique due à b inférieur à 1

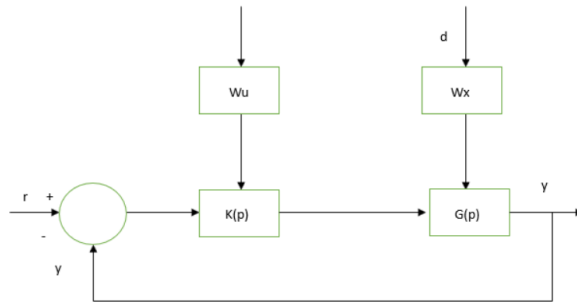


FIGURE III.2 – Système avec pondération

- rejets de tout les bruits

pour ce faire nous introduisons les fonctions de pondérations suivantes :

ω_x sur l'erreur statique

ω_u sur la commande de contraintes sur les actionneurs

Notre système devient alors sous la forme de la figure :

les fonctions de pondération qui répond au cahier de charge sont les suivantes :

$$\omega_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\omega_u = 1$$

III.3 Calcul de la commande H_∞

Le γ optimale calculer a partir de Matlab est :

$$\gamma = 438.3672$$

Les équations de Riccati :

$$XA + A^T X - PX + Q = 0$$

La solutions de l'équation de Riccati est donnée par matlab comme suit :

$$X = \text{Ric}(A - P, -Q, -A^T)$$

$$x = \begin{pmatrix} -2.703 \times 10^6 & -1.253 \times 10^9 & -2.373 \times 10^{11} & -1.156 \times 10^{12} \\ 1 & 5.821 \times 10^{-11} & -2.766 \times 10^5 & -1.383 \times 10^6 \\ 0 & 1 & -1.609 \times 10^7 & -8.045 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -1.31 \times 10^7 & -6.549 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Après calcul, le correcteur est donné comme suit :

$$K(s) = \frac{-1.185 \times 10^{15}s^3 - 9.2 \times 10^{16}s^2 - 8.793 \times 10^{17}s - 7.762 \times 10^{17}}{s^4 + 8.429 \times 10^7s^3 + 2.205 \times 10^{14}s^2 + 1.024 \times 10^{17}s + 5.066 \times 10^{17}}$$

III.4 Résultat de simulation

Après application de la commande H_∞ calculée précédemment nous aboutissant aux résultat de simulation suivant :

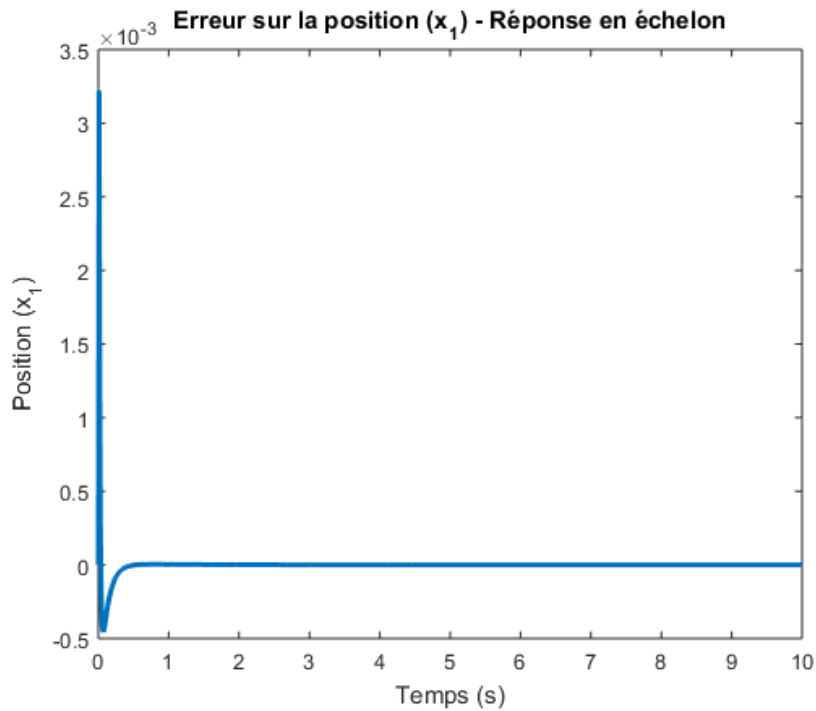


FIGURE III.3 – Erreur sur la position

La figure **III.3** montre l'erreur de la position après application d'un échelon. L'objectif de cette simulation est de vérifier la stabilité et la performance du système en boucle fermée lorsqu'une perturbation est ajoutée sous forme d'échelon.

Dès le début de la simulation, on remarque que l'erreur diminue rapidement avec un léger dépassement avant que le système ne se stabilise. Ce comportement indique une bonne performance dynamique, avec une stabilisation rapide et peu d'oscillations durables. Le faible dépassement, suivi d'une stabilisation rapide, montre que le contrôleur H_∞ est bien ajusté pour réduire l'impact des perturbations sur la position, garantissant ainsi une

réponse rapide et précise à tout changement de commande.

En ce qui concerne les spécifications de contrôle, le temps de réponse est court, ce qui signifie que le système atteint une stabilité en peu de temps, avec presque aucune erreur à l'état final. Cela démontre l'efficacité du contrôleur dans le maintien de la position souhaitée.

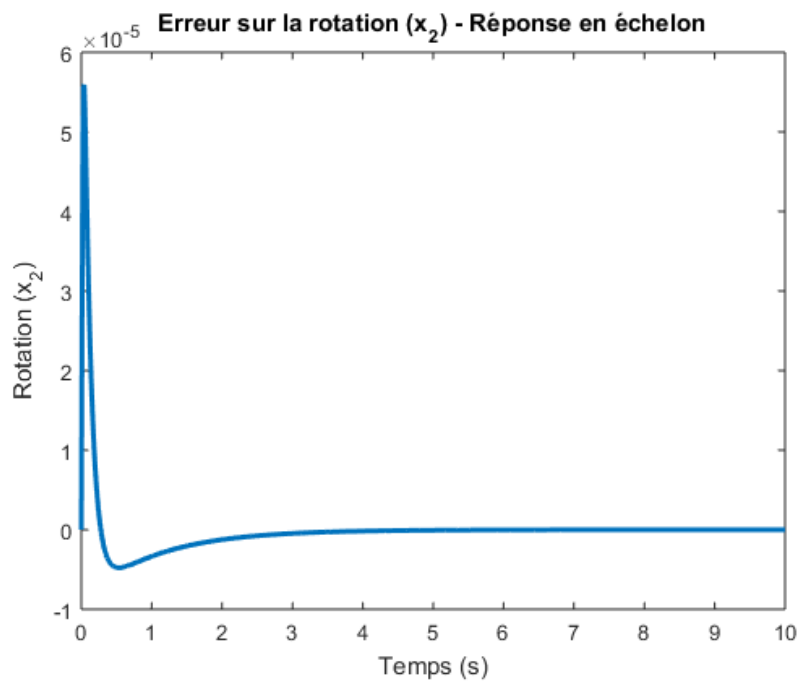


FIGURE III.4 – Erreur sur la rotation X_2

La figure **III.4** montre l'erreur sur la rotation x_2 , qui est l'un des états du système. La rotation est une mesure clé pour vérifier si le système peut stabiliser son orientation ou sa vitesse après une perturbation.

On observe un comportement similaire à celui de la position, avec un pic initial suivi d'une chute rapide et d'une stabilisation proche de zéro. Cela montre que le contrôleur parvient non seulement à stabiliser la position, mais aussi à gérer efficacement la rotation, évitant ainsi des oscillations excessives. Ce comportement est particulièrement important dans les systèmes mécaniques, où une mauvaise gestion de la rotation peut entraîner des problèmes.

L'absence d'oscillations persistantes et le retour rapide à une valeur stable montrent que le contrôleur est bien réglé pour éviter des effets indésirables, tels que des dépassements ou des vibrations, qui peuvent se produire dans des systèmes mal contrôlés.

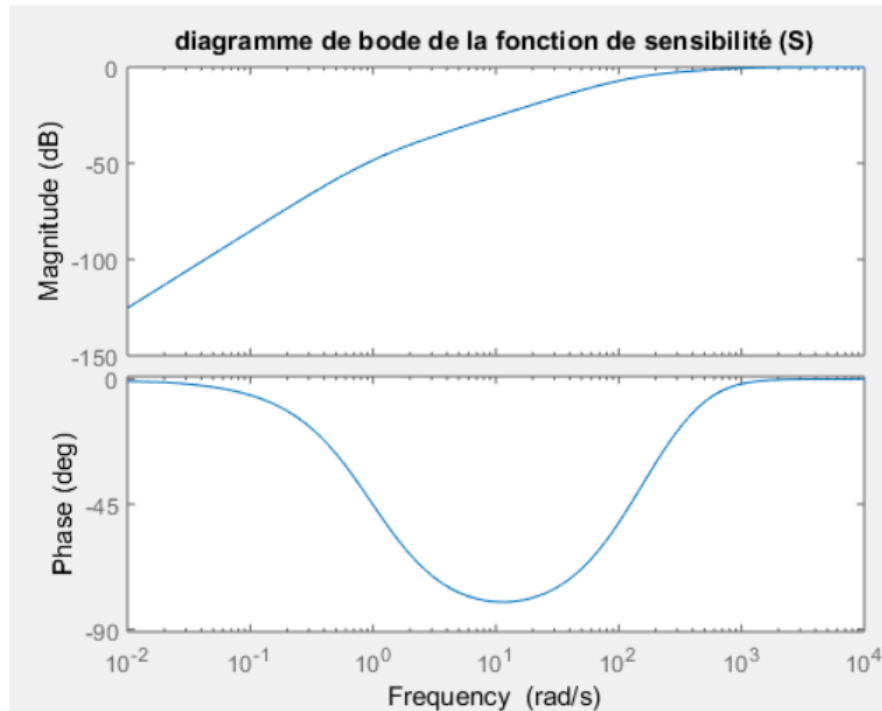


FIGURE III.5 – diagramme de Bode de la fonction de sensibilité S

La fonction de sensibilité S , représentée dans la figure **III.5** sous forme de diagramme de Bode, mesure la robustesse du système face aux perturbations et aux incertitudes. Elle permet d’analyser comment le système réagit aux perturbations sur une large gamme de fréquences.

Le graphique montre une augmentation progressive de la magnitude avec l’augmentation de la fréquence, indiquant que le système est relativement insensible aux perturbations de basse fréquence. En effet, la réponse

à basse fréquence est principalement contrôlée par la boucle de rétroaction, qui rejette efficacement les perturbations dans cette plage.

Cependant, à partir de certaines fréquences, la magnitude de la sensibilité augmente, ce qui signifie que le système devient plus sensible aux perturbations à ces fréquences. Cette tendance est normale pour un système contrôlé par H_∞ , qui est conçu pour atténuer le bruit principalement dans les basses et moyennes fréquences, tout en acceptant une légère diminution des performances à haute fréquence, où les perturbations sont souvent moins probables.

Concernant la courbe de phase, elle présente une déviation significative avant de revenir à des valeurs plus stables. Cette déviation reflète le retard de phase introduit par le contrôleur, ce qui peut affecter la capacité du système à réagir rapidement aux variations à haute fréquence, mais reste dans des limites acceptables pour garantir la stabilité globale.

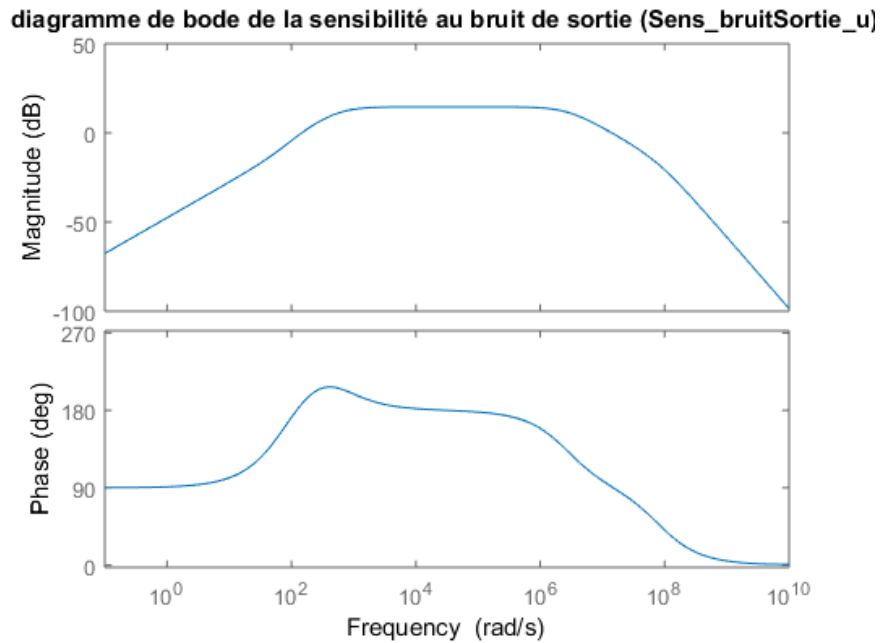


FIGURE III.6 – diagramme de Bode de la sensibilité au bruit de sortie u

La figure **III.6** illustre comment le système réagit au bruit de sortie, à travers la fonction $Sens_bruitSortie_u$. Ce graphique est essentiel pour comprendre l'impact du bruit sur la commande u du système en fonction de la fréquence.

Le diagramme de Bode indique que la sensibilité au bruit est relativement faible à basses fréquences, ce qui est positif. Cela signifie que le système est bien protégé contre le bruit dans cette plage, et que le contrôleur H_∞ réussit à réduire efficacement le bruit de sortie.

Cependant, à partir des fréquences moyennes, la sensibilité augmente, atteignant un maximum avant de re-

descendre à des fréquences très élevées. Cela signifie que le système devient plus sensible au bruit dans cette plage intermédiaire, mais cette hausse reste raisonnable et attendue dans des systèmes à rétroaction comme celui-ci.

Cette augmentation de la sensibilité dans certaines fréquences montre les limites de la conception H_∞ , qui privilégie légèrement la performance dans les basses et moyennes fréquences au détriment de celle dans les fréquences élevées. Néanmoins, dans de nombreuses applications, le bruit à haute fréquence a souvent un impact limité, ce qui rend ce compromis acceptable.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons appliqué la commande H_∞ sur un moteur à courant continu, nous avons commencé par le modèle mathématique, puis nous avons calculé la commande H_∞ ; les résultats des simulations mettent en évidence l'efficacité du contrôleur H_∞ , associé à un intégrateur et à une avance de phase, pour stabiliser le système en boucle fermée. Les réponses en échelon, tant pour la position que pour la rotation, sont rapides et bien amorties, démontrant une stabilisation efficace sans oscillations significatives.

III.6 Conclusion Générale

Le mémoire a exploré la commande robuste H_∞ , en mettant l'accent sur son application à un moteur à courant continu. Nous avons d'abord présenté les concepts clés de la robustesse, en distinguant la robustesse en stabilité et en performance, ainsi que les incertitudes qui peuvent affecter un système.

Ensuite, nous avons détaillé la commande H_∞ linéaire, en décrivant le problème standard et en expliquant comment le résoudre à l'aide de l'équation de Riccati. Cela nous a permis d'établir une méthode solide pour garantir que le système reste performant malgré les incertitudes.

Pour valider cette approche, nous avons appliqué la commande H_∞ à un moteur à courant continu. Les résultats obtenus ont montré que cette méthode est efficace pour améliorer la stabilité et la performance du moteur, soulignant ainsi l'intérêt de la commande robuste dans des applications pratiques.

En conclusion, ce travail démontre que la commande H_∞ est une approche prometteuse pour traiter les défis liés à l'incertitude dans les systèmes dynamiques.

Bibliographie

- [1] <https://fr.scribd.com/document/294959515/commanderobust>.
- [2] Bernard Rapacchi. *Une Introduction à la notion de Robustesse*. Centre Inter universitaire de Calcul de Grenoble. Disponible à : <http://unige.ch/ses/sococ/eda/bernard/robuste.pdf>.
- [3] Yasmina Mamar, Lynda Benzeba. Application de la commande H_∞ non linéaire sur un modèle d'un pendule inversé. 2017.
- [4] TALEB Fahem, SLIMANI Merzouk. Mémoire de fin d'étude. Université Mouloud MAMMARI, Tizi-Ouzou. Commande robuste H_∞ d'un pendule inversé. 2010.
- [5] <https://fr.scribd.com/document/294959515/commanderobust>.
- [6] BENOIT Bergeon professeur. Commande linéaire des systèmes multipliables 2014-2015.
- [7] Naim Radouéni. Commande robuste par H_∞ des systèmes multivariables. 2008.
- [8] Karima Chaibi. Etude comparative des commandes LQR, LQG et placement de pôles appliqué à un système mécanique/2010

- [9] Dahmane Ourabah.Amara Mohand Oussalem.Commande linéaire quadratique gaussienne appliquée à la commande d'un drone/2015
- [10] KHANSA Bdirina. KAMEL Guesmi. Commande prédictive linéaire. Master. Algérie. 2018. hal-02927679.
- [11] BENZIANE Sofiane.BENSAFIA Yssine.MAIDI Saïda. Mémoire de fin d'étude .Commande adaptative par placement de pôles .2017-2018.
- [12] Robustesse des systèmes linéaires multivariables/Gilles
- [13] Belgacem Kahina.Belkacem Hasni/Étude comparative de deux méthodes de résolution du problème de commande H_∞ linéaire/2017
- [14] Issadi Thenhinene.Saad Malika/Conception de la commande linéaire quadratique regulator (LQR) 'Robustifiée' utilisant l'optimisation H_2/H_∞ (appliquée a la commande d'un drone)/2014
- [15] mahgoun mohamed seddik. application de la commande H_∞ aux systemes lineaires perturbés/2012
- [16]
- [17] gilles Duc. robustesse des systemes lineaires multivariables/DUC/03317/1994
- [18] kemin zhou with john C. Doyle and keith glover. robust and optimal control
- [19] Safia Yousfi/ Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou Développement d'algorithmes pour la commande H_∞ des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel.
- [20] [http ://Koenig-damien.jimdo.com](http://Koenig-damien.jimdo.com)