REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master
en
Mathématiques
Option
Analyse Mathématique et applications

Thème

Etude d'un système de réaction-diffusion modélisant la propagation d'une maladie infectieuse

---

Présenté par

Ania ADIL

Devant le jury

Mme.RAHMANI Leila	Professeur	UMMTO	Présidente
Mme.TALEB Lynda	MCB	UMMTO	Rapporteur
Mme.HAMDOUS Saliha	MCB	UMMTO	Examinatrice
M.MENGUELTI Ali	MAA	UMMTO	Examinateur

Soutenu le 04/07/2018

Résumé :
Ce mémoire consacre l'étude d'un système d'équations de réaction-diffusion quasilinéaires modélisant la propagation d'une maladie infectieuse au sein d'une population. On a montré l'existence locale d'une solution positive et on a établit des estimations a priori nécessaires afin de montrer on existence globale. Ensuite, on a étudié le comportement asymptotique, en temps, de cette solution .

Mots clé :
Quasilinaire, réaction-diffusion, positivité, unicité, comportement asymptotique, semi-groupe, système dynamique.

Table des matières

Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion apparaissent naturellement dans la modélisation mathématique d'une grande variété de phénomènes tels que la dynamique des gaz, les processus de fusion, certains modèles biologiques comme les processus cellulaires, la propagation des maladies, le transport catalytique de contaminants dans l'environnement, la dynamique des populations, la propagation des flammes et les réactions chimiques, etc. Ils décrivent l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs espèces ou substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions locales, dans lequel les différentes espèces interagissent, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces espèces ou substances dans l'espace.

L'objectif de ce travail est l'étude d'un système d'équations de réaction-diffusion quasi-linéaires modélisant la propagation d'une maladie infectieuse au sein d'une population, il s'agit de montrer l'existence globale de la solution et de donner son comportement asymptotique. La population étudiée est supposée divisée en trois classes : la classe des susceptibles S représente les individus susceptibles d'être infectés, la classe des infectés I représente les individus infectés et la classe des retirés R désigne les individus morts ou résistant à la maladie.

Si un susceptible S est contaminé après un contact avec un infecté I, il quitte la classe des susceptibles et rentre dans la classe des infectés ; représenté par une constante $\lambda > 0$ proportionnelle au produit des densités des classes S et I. Les individus qui n'ont pas survécu à la maladie quittent la classe des infectés et rentre dans la classes des retirés, ce nombre est donné par une constante $\mu > 0$ proportionnelle à la densité de la classe I.

Un premier modèle a été étudié dans [6] en dimension 1 d'espace puis développé dans [4] dans le cas d'une matrice de diffusion à coefficients constants et en dimension d'espace arbitraire.

Dans ce travail, on s'intéresse au cas où la maladie infectieuse se propage dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière. Nous avons développé les calculs fait dans l'article [12]. On suppose que la diffusion prend place dans toutes les classes et elle est définie par un opérateur quasi-linéaire de diffusion diagonal présenté sous forme divergentielle.

Notre travail est organisé selon l'ordre suivant, nous commençons par donner une introduction où l'on donne un bref historique sur la problématique, viennent ensuite les préliminaires où nous rappelons les différents outils et résultats classiques utilisés afin de réaliser ce travail.

Le premier chapitre consacre l'étude de l'existence globale d'une solution classique du problème. Dans un premier temps, nous donnons la position du problème et son interprétation ainsi qu'un résultat d'existence locale. Nous avons pu montrer l'unicité de la solution en utilisant [5] et sa positivité en s'inspirant de [11](deux démonstrations qui ne figuraient pas dans [12]). Dans un second temps, nous établissons des estimations a priori nécessaires afin de montrer notre résultat d'existence globale. Dans le deuxième et dernier chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de la solution classique en montrant que la solution décroit vers un équilibre positif, un résultat qui nous permet de contrôler la propagation de la maladie infectieuse. Nous terminons ce travail par une petite conclusion.

Préliminaires

0.1 Opérateurs différentiels

Pour n un entier, on note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $v(x) = (v(x_1), \ldots, v(x_n))$.
Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, son gradient est le champ de vecteurs défini par :

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

Pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on appelle divergence de v la fonction définie par :

$$\operatorname{div} v(x) = \nabla.(v(x)) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x).$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x)$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x).\eta(x),$$

0.2 Espaces fonctionnels

Espaces de Lebesgue :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, soit $T > 0$ et p un réel vérifiant $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 0.2.1. [7] On désigne par $\mathbb{L}^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles, mesurables pour la mesure de Lebesgue telles que :

$$\text{Si}\, 1 \leq p < \infty, \|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$
$$\text{Si}\, p = \infty, \|f\|_{\infty,\Omega} = \sup_x |f(x)| < \infty$$

On définit les espaces $\mathbb{L}^p([0,t[\times\Omega)$, si $1 \leq p < \infty$, comme suit :

$$\|f\|_{p,\Omega\times[0,t[} = \left(\int_0^t \int_\Omega |f|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{0.1}$$

Espaces de Sobolev :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p un réel vérifiant $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 0.2.2. [7] L'espace de Sobolev $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$\begin{gathered} u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \exists f_1, \dots, f_N \in \mathbb{L}^p(\Omega) \text{tels que :} \\ \int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega f_i \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \end{gathered}$$

En d'autres termes,

$$\mathbb{W}^{1,p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \forall i = 1, \dots, N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^p(\Omega)\}$$

L'espace $\mathbb{W}^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \|u\|_{\mathbb{L}^p} + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\mathbb{L}^p}$$

Ou parfois de la norme équivalente :

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \left(\|u\|_{\mathbb{L}^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\mathbb{L}^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = 2$,on pose : $\mathbb{H}^1(\Omega) = \mathbb{W}^{1,2}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} = \left(\|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 0.2.1. (Injection de Sobolev)*[7] Soit Ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$*

$$\text{L'injection } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ est continue}$$

Théorème 0.2.2. (Rellich)*[7] Si Ω est un ouvert de borné de classe $\mathcal{C}^1$.*

$$\text{L'injection } \mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ est compacte.}$$

0.3 Quelques inégalités

On rappelle quelques inégalités qui serviront dans la suite :

A. Inégalité de Young :

Soit $\varepsilon > 0$:

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$$

B. Inégalité de Cauchy généralisée :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0 : ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

C. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \int_a^b |fg| dx \leq \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{1/2} . \left(\int_a^b g^2 dx \right)^{1/2}$$

D. Inégalité de Gronwall(forme intégrale) :

Soit ξ une fonction positive, intégrable sur $[0, T]$ et satisfaisant pour presque tout t l'intégrale :

$$\xi(t) \leq c_1 \int_0^t \xi(s) ds + c_2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives, alors :

$$\xi(t) \leq c_2(1 + c_1 t e^{c_1 t})$$

E. Formule de Green :

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$.Si $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u.v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}.v ds$$

où η est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

0.4 Semi-groupes

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \to \|x\|_X$. On désigne par $\mathcal{L}(X)$ l'espace véctoriel des applications linéaires continues de X dans lui même.

Définition 0.4.1. [2] Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'éléments $G(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour $t \geq 0$ forme un semi-groupe sur X si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) S(s+t)=S(t)S(s)

ii) $S(0) = Id_X$ (Identité dans $\mathcal{L}(X)$)

Définition 0.4.2. [2] Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ s'appelle semi-groupe fortement continu (ou bien $\mathcal{C}^0$-semi-groupe) sur un espace de Banach X si :

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)u = u, \text{ pour tout } u \in X.$$

0.5 Système dynamique

Définition 0.5.1. [1] Soit $(\mathbb{Z}, d)$ un espace métrique complet. Un système dynamique sur $\mathbb{Z}$ est une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'applications sur $\mathbb{Z}$ telle que :

i) $T(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$

ii) $T(0) = I_d$,

iii) $T(t+s) = T(t).T(s)$

iiii) $\forall z \in \mathbb{Z}, T(t)z \in \mathrm{C}([0, +\infty), \mathbb{Z})$.

Définition 0.5.2. (trajectoires, ensemble $\omega-$limite)[1] Pour tout $z \in \mathbb{Z}$,

i) La courbe continue $t \to T(t)z$ est appelée trajectoire issue de z.

ii) l'ensemble $\omega(z) = \{y \in \mathbb{Z}/\exists t_n \to +\infty; T(t_n)z \to y$ lorsque $n \to +\infty\}$ est appelé ensemble $\omega-$limite de z.

Définition 0.5.3. (Région invariante)
Un sous-ensemble fermé $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *une région invariante* pour un système différentiel donné si, toute solution $u(x, t)$ ayant ses valeurs initiales dans Σ, reste dans Σ pour tout $(x, t) \in \Omega \times [0, T_{max}]$

Proposition 0.5.1. *[1] Pour tout $z \in \mathbb{Z}$ et pour tout $t \geq 0$, on a :*

i) *$T(t)(\omega(z)) \in \omega(z)$ ($\omega(z)$est alors dit positivement invariant par $T(t)$).*
Si de plus, $\bigcup_{t\geq 0} T(t)$ est relativement compacte dans $\mathbb{Z}$, alors

ii) *$T(t)(\omega(z)) = \omega(z) \neq \emptyset$. $\omega(z)$ est dit alors invariant par $T(t)$*

iii) *$\omega(z)$ est un compact connexe de $\mathbb{Z}$ et $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)z, \omega(z)) = 0$.*

Démonstration. [1]

0.6 Fonctions de Lyapunov et principe d'invariance de LaSalle

Définition 0.6.1. (Fonction de Lyapunov)[1] Une fonction $\Theta \in \mathrm{C}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ est dite fonction de Lyapunov pour $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si

$$\Theta(T(t)z) \leq \Theta(z), \, \forall z \in \mathbb{Z}, \, \forall t \geq 0.$$

Théorème 0.6.1. (Principe d'invariance de LaSalle)*[1] Soit Θ une fonction de Lyapunov pour $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit $z \in \mathbb{Z}$ tel que $\bigcup_{t\geq 0} T(t)z$ soit relativement compact dans $\mathbb{Z}$. Alors*

i) *$k = \lim_{t\to\infty} \Theta(T(t)z)$ existe.*

ii) *$\Theta(y) = k$, $\forall y \in \omega(z)$.*
En particulier : $\forall y \in \omega(z)$, $\forall t \geq 0$, $\Theta(T(t)y) = \Theta(y)$.

Chapitre 1

Existence globale d'une solution positive

Le but de ce chapitre est d'établir l'existence globale d'une solution positive d'un système de réction-diffusion quasi-linéaire. Pour cela, on introduit la position du problème, son interprétation ainsi le résultat d'existence et les estimations a priori.

1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière $\partial\Omega$ de régularité $\mathcal{C}^2$ et $T > 0$.
On considère dans $\Omega \times [0, T[$ le système d'équations de réaction-diffusion quasi-linéaires suivant :

$$\partial_t S(x,t) = \nabla.(\phi(S(x,t))\nabla S(x,t)) - \mu S(x,t)I(x,t) \tag{1.1}$$
$$\partial_t I(x,t) = \nabla.(\psi(I(x,t))\nabla I(x,t)) + \mu S(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t) \tag{1.2}$$
$$\partial_t R(x,t) = \nabla.(\theta(R(x,t))\nabla R(x,t)) + \lambda I(x,t) \tag{1.3}$$

où μ,λ sont des constantes strictement positives.

Ce système d'équations, écrit sous forme divergentielle, est assujetti aux conditions initiales :

$$S(x,0) = S_0(x)\,,\ I(x,0) = I_0(x)\,,\ R(x,0) = R_0(x) \tag{1.4}$$

et aux conditions sur le bord, de type Neumann :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial n} = \frac{\partial I(x,t)}{\partial n} = \frac{\partial R(x,t)}{\partial n} = 0 \tag{1.5}$$

où η est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Les fonctions de diffusivité $\phi(\,)$, $\psi(\,)$ et $\theta(\,)$ sont supposées régulières, non dégénérées, strictement positives et uniformément bornées. C'est à dire, il existe des constantes positives $\underline{a}$ et $\overline{a}$ telles que :

$$\underline{a} \leq min[\phi(u), \psi(u), \theta(u)] \leq max[\phi(u), \psi(u), \theta(u)] \leq \overline{a} \text{ pour tout } u \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

On suppose que :

$$S_0(\ ), I_0(\ ), R_0(\ ) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \tag{1.7}$$

Interprétations :

Le système (1.1)-(1.6) modélise la propagation d'une maladie infectieuse au sein d'une population, par exemple chez les humains, les animaux, etc. Il s'agit donc de la répartition spatiale des individus susceptibles d'être infecté, les infectés et les morts(ou immunisés). Le domaine Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, il représente une surface géographique ou un lieu qui forme la région touchée par la maladie infectieuse(une ville, des cellules, etc). La population étudiée ne sort pas de cette région, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de migration à travers le bord $\partial\Omega$(qui est traduit par les conditions sur le bord (1.5)).

La population étudiée est composée de trois classes : la classe des susceptibles S représente les individus susceptibles d'être infectés, la classe des infectés I désigne les individus infectés et la classe des retirés R qui représente les individus résistants ou morts. Les individus de chaque classe bougent, ça permet à la maladie de se diffuser et propager. Lorsque cohabitent des individus susceptibles et des individus infectés, un certain nombre des susceptibles sont infectés (représenté par la constante μ). Ce terme est par ailleurs considéré comme proportionnel au produit SI. Ils quittent alors la classe des susceptibles, d'où le terme $-\mu S(x,t)I(x,t)$ et rentrent dans la classe des infectés ce qui augmente leur nombre, d'où le terme $+\mu S(x,t)I(x,t)$. Le nombre de malades décédés est proportionnel aux nombres d'infectés. La constante de proportionnalité λ représente le nombre d'individus morts. Ils quittent alors la classe des infectés ce qui est traduit par le terme $-\lambda I(x,t)$ et rentrent dans la classe des retirés, d'où le terme $+\lambda I(x,t)$.

1.2 Existence locale

Dans ce paragraphe, on donnera une définition d'une solution classique du système et on énoncera un théorème pour assurer son existence ainsi que sa preuve.

Définition 1.2.1. Le triplet $(S(\ ,\ ), I(\ ,\ ), R(\ ,\ ))$ est une solution classique du système (1.1)-(1.5) sur $\overline{\Omega} \times [0,\ T]$ s'il satisfait :

(i) Pour tout $t \in [0,\ T]$,$(S(\ ,t), I(\ ,t), R(\ ,t)) \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$; pour tout $x \in \Omega$, $(S(x,\ ), I(x,\ ), R(x,\ )) \in \mathcal{C}^1([0,\ T], \mathbb{R}^3)$ et l'équation différentielle partielle est satisfaite pour $x \in \Omega$ et $t \in [0,\ T]$.

(ii) $\lim\limits_{t\to 0^+} [\|S(\ ,t) - S_0(\ )\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|I(\ ,t) - I_0(\ )\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|R(\ ,t) - R_0(\ )\|_{2,\Omega}^{(1)}] = 0$

Théorème 1.2.1. *Si (1.7) est vérifiée, les conditions initiales sont positives et $T > 0$, alors il existe une unique solution classique du système (1.1)-(1.5) sur $\overline{\Omega} \times [0,\ T]$.*

Démonstration. Pour cette démonstration, on commence d'abord par montrer l'existence locale de la solution ensuite son unicité.

Existence locale :
On pose : $H(S,I,R) = S + I + R$

En sommant les équations (1.1),(1.2) et(1.3), on obtient :

$$\partial_t S + \partial_t R + \partial_t I = \nabla.(\phi(S)\nabla S) + \nabla.(\psi(I)\nabla I) + \nabla.(\theta(R)\nabla R)$$

On trouve que :

$$\partial_t (S + I + R) = \nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I + \theta(R)\nabla R)$$

En intégrant le premier membre sur $\Omega \times [0,\, t]$ pour $t \in [0,\, T_{max}[$, il vient que :

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \partial_t (S + I + R) dxdt &= \int_\Omega (S + I + R)(t,x)dx - \int_\Omega (S + I + R)(0,x)dx \\ &= \int_\Omega H(S(x,t), I(x,t), R(x,t))dx - \int_\Omega H(S_0(x), R_0(x), I_0(x))dx \\ &= \|H(S(\,,t), I(\,,t), R(\,,t))\|_{1,\Omega} - \|H(S_0(\,), R_0(\,), I_0(\,))\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

Ensuite, on intègre le second membre sur $\Omega \times [0,\, t]$

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I + \theta(R)\nabla R) dxdt &= \int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S) dxdt \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \nabla.(\psi(I)\nabla I) dxdt + \int_0^t \int_\Omega \nabla.(\theta(R)\nabla R) dxdt\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S) dxdt = \int_0^t \int_\Omega [\nabla \phi(S)\nabla S + \phi(S)\Delta S] dxdt$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S) dxdt &= \int_0^t \int_\Omega \nabla \phi(S)\nabla S dxdt - \int_0^t \int_\Omega \nabla \phi(S)\nabla S dxdt \\ &+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial S}{\partial n} \phi(S) dsdt\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S) dx = 0$$

De la même manière, on trouve que :

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\psi(I)\nabla I) dxdt = 0$$

et

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\theta(R)\nabla R)dxdt = 0$$

On obtient alors :

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I + \theta(R)\nabla R)dxdt = 0$$

Ou

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I + \theta(R)\nabla R)dxdt \leq 0$$

Par conséquent,

$$\|H(S(\,,t), I(\,,t), R(\,,t))\|_{1,\Omega} - \|H(S_0(\,), R_0(\,), I_0(\,))\|_{1,\Omega} \leq 0$$

C'est à dire,

$$\|H(S(\,,t), I(\,,t), R(\,,t))\|_{1,\Omega} \leq \|H(S_0(\,), R_0(\,), I_0(\,))\|_{1,\Omega}$$

Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\|H(S(\,,t), I(\,,t), R(\,,t))\|_{1,\Omega} \leq C_1$$

Ce qui revient à dire que :

$$\int_\Omega H(S, I, R)dx \leq C_1$$

En intégrant de nouveau sur $[\tau,\, t]$ avec $0 \leq \tau < t < T_{max}$, on trouve que :

$$\int_\tau^t \int_\Omega H(S, I, R)dxdt \leq C_1(t - \tau)$$

Ce qui veut dire que la solution classique du système existe localement.

Unicité :
Pour montrer l'unicité de la solution, on a suivi le même raisonnement que le résultat établit par M.Kirane et S.Kouachi [5].
On suppose que le système (1.1)-(1.5) admet deux solutions (S_1, I_1, R_1) et (S_2, I_2, R_2). On pose :

$$S = S_1 - S_2$$
$$I = I_1 - I_2$$
$$R = R_1 - R_2$$

Alors : (S, I, R) est aussi solution du système (1.1)-(1.5) sur $\overline{\Omega} \times [0, T]$, donc elle satisfait :

$$\begin{aligned}
\partial_t S &= \nabla.(\phi(S)\nabla S) - \mu SI \\
\partial_t I &= \nabla.(\psi(I)\nabla I) + \mu SI - \lambda I \\
\partial_t R &= \nabla.(\theta(R)\nabla R) + \lambda I
\end{aligned}$$

avec les conditions

$$S(x,0) = 0\,,\; I(x,0) = 0\,,\; R(x,0) = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial n} = \frac{\partial I}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial n} = 0$$

On multiplie les équations du système précédent respectivement par S, I, R puis on intègre sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S\partial_t S dx &= \int_\Omega S\nabla.(\phi(S)\nabla S)dx - \int_\Omega \mu S^2 I dx \\
\int_\Omega I\partial_t I dx &= \int_\Omega I\nabla.(\psi(I)\nabla I)dx + \int_\Omega \mu S I^2 dx - \int_\Omega \lambda I^2 dx \\
\int_\Omega R\partial_t R dx &= \int_\Omega R\nabla.(\theta(R)\nabla R)dx + \int_\Omega \lambda IR dx
\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|S\|_{2,\Omega}^2 &= -\int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega \mu S^2 I dx \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|I\|_{2,\Omega}^2 &= -\int_\Omega \psi(I)|\nabla I|^2 dx + \int_\Omega \mu S I^2 dx - \int_\Omega \lambda I^2 dx \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|R\|_{2,\Omega}^2 &= -\int_\Omega \theta(R)|\nabla R|^2 dx + \int_\Omega \lambda IR dx
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2 + \|R\|_{2,\Omega}^2\Big] + \int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dx + \int_\Omega \psi(I)|\nabla I|^2 dx + \int_\Omega \theta(R)|\nabla R|^2 dx \\
= -\int_\Omega \mu S^2 I dx + \int_\Omega \mu S I^2 dx - \int_\Omega \lambda I^2 dx + \int_\Omega \lambda IR dx
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy généralisée, il vient que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2 + \|R\|_{2,\Omega}^2\Big] &\leq \int_\Omega \mu S I^2 dx + \int_\Omega \lambda IR dx \\
&\leq \int_\Omega (\varepsilon\mu^2 + \frac{S^2}{4\varepsilon})I^2 dx + \int_\Omega \lambda(\varepsilon I^2 + \frac{R^2}{4\varepsilon})dx \\
&\leq \int_\Omega \varepsilon\mu^2 I^2 dx + \int_\Omega \frac{S^2}{4\varepsilon} I^2 dx + \int_\Omega \lambda\varepsilon I^2 dx + \int_\Omega \frac{\lambda}{4\varepsilon} R^2 dx \\
&\leq \varepsilon\mu^2\|I\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}(\sup_\Omega S)^2\|I\|_{2,\Omega}^2 + \lambda\varepsilon\|I\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\lambda}{4\varepsilon}\|R\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\varepsilon\mu^2 + \frac{(\sup_\Omega S)^2}{4\varepsilon} + \lambda\varepsilon\right)\|I\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\lambda}{4\varepsilon}\|R\|_{2,\Omega}^2$$
$$\leq L_\varepsilon\left(\|I\|_{2,\Omega}^2 + \|R\|_{2,\Omega}^2\right)$$

On choisit ε de sorte que $L_\varepsilon \to 0$.
Alors,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2 + \|R\|_{2,\Omega}^2\right] \leq 0$$

Ce qui veut dire que $\left(\|S\|_{2,\Omega}^2 + \|I\|_{2,\Omega}^2 + \|R\|_{2,\Omega}^2\right)$ est décroissante.
C'est à dire :

$$\|S(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|I(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|R(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \|S(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|I(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|R(x,0)\|_{2,\Omega}^2$$

On déduit que :

$$\|S(x,t)\|_{2,\Omega}^2 = \|I(x,t)\|_{2,\Omega}^2 = \|R(x,t)\|_{2,\Omega}^2 = 0$$

i.e :

$$S(x,t) = 0, I(x,t) = 0, R(x,t) = 0$$

Donc,

$$S_1(x,t) = S_2(x,t)$$
$$I_1(x,t) = I_2(x,t)$$
$$R_1(x,t) = R_2(x,t)$$

D'où l'unicité de la solution.

1.3 Positivité

Dans cette partie, on donnera un résultat de positivité. Dans un premier temps, on rappelle le résultat suivant :

Lemme 1.3.1. *[10] Si $\varphi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ alors $\varphi^+ = max(\varphi, 0) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ pour tout $x \in \Omega$ et de plus : $(\varphi^+)_x = \varphi_x$ si $\varphi(x) \geq 0$,et $(\varphi^+)_x = 0$ si $\varphi(x) = 0$.*

Théorème 1.3.1. *Si* 1.7 *est vérifiée, les conditions initiales sont positives, $T > 0$, et (S(x,t),I(x,t),R(x,t)) est l'unique solution classique du système (1.1)-(1.5) sur $\overline{\Omega} \times [0, T]$, alors $S(x,t), I(x,t), R(x,t) \geq 0$ pour $x \in \overline{\Omega}$, $t \geq 0$.*

Démonstration. On multiplie l'équation (1.1) par S^- puis on intègre sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega S^-\partial_t S dx = \int_\Omega S^-\nabla.(\phi(S)\nabla S)dx - \int_\Omega \mu S^- SI dx \tag{1.8}$$

Il vient que :

$$\int_\Omega S^- \partial_t S dx = -\int_\Omega S^- \partial_t S^- dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|S^-(x,t)|^2)dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||S^-(x,t)||^2_{2,\Omega})$$

où :

$$S^- = (-S)^+ = \max(0, -S) = \frac{|S| - S}{2}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on aura :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S^- \nabla.(\phi(S)\nabla S)dx = \int_\Omega S^- \nabla\phi(S)\nabla S dx + \int_\Omega S^- \phi(S)\Delta S dx \\
&= \int_\Omega S^- \nabla\phi(S)\nabla S dx - \int_\Omega \nabla(S^-\phi(S))\nabla S dx + \int_{\partial\Omega} S^-\phi(S)\frac{\partial S}{\partial n} ds \\
&= \int_\Omega S^- \nabla(\phi(S))\nabla S dx - \int_\Omega S^- \nabla(\phi(S))\nabla S dx - \int_\Omega \nabla S^- \phi(S)\nabla S dx \\
&= -\int_\Omega \nabla S^- \phi(S)\nabla S dx = \int_\Omega \phi(S)|\nabla S^-|^2 dx
\end{aligned}$$

où :

$$\nabla S = -\nabla S^-$$

On remplace dans l'égalité (1.8), on obtient :

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}) - \int_\Omega \phi(S)|\nabla S^-|^2 dx = -\int_\Omega \mu S^- S I dx = \int_\Omega \mu (S^-)^2 I dx$$

Ou encore

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}) + \int_\Omega \phi(S)|\nabla S^-|^2 dx = -\int_\Omega \mu (S^-)^2 I dx$$

Par suite, en utilisant (1.6), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}) + \int_\Omega \underline{a}\,|\nabla S^-|^2 dx \leq -\int_\Omega \mu (S^-)^2 I dx$$

Soit $t \in [0,\, T]$ pour $T < T_{max}$. D'après l'existence locale, il vient que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}) + \underline{a}||\nabla S^-||^2_{2,\Omega} \leq M(t)\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}$$

où :

$$M(t) = \|\mu I(t)\|_{\infty,\Omega}$$

Il vient donc, pour $t \in [0,\, T]$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}) \leq c\left\|S^-\right\|^2_{2,\Omega}$$

où :

$$c = \sup_{t\in[0,\,T]} |M(t)|$$

En intégrant de nouveau sur $[0,\, t]$ avec $t < T$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t (\left\|S^-(x,s)\right\|_{2,\Omega}^2)ds &= \frac{1}{2}\left\|S^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|S^-(x,0)\right\|_{2,\Omega}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|S^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|S_0^-(x)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq c\int_0^t \left\|S^-(x,s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\left\|S^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\|S_0^-(x)\right\|_{2,\Omega}^2 + 2c\int_0^t \left\|S^-(x,s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\left\|S^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\|S_0^-(x)\right\|_{2,\Omega}^2 (1 + 2ct\exp(2ct))$$

Comme $S_0(x) \geq 0$ donc : $S_0^-(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$
Par suite,

$$S^-(x,t) = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0,\, T]$$

Et comme $T < T_{max}$, il vient donc : $S^-(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\, T_{max}[$
D'où :

$$S(x,t) \geq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0,\, T_{max}[$$

Pour la seconde composante, on procède de la même manière que précédemment. On multiplie les deux membres de l'équation (1.2) par I^- puis on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega I^-\partial_t I^- dx - \int_\Omega I^-\nabla.(\psi(I)\nabla I)dx = \int_\Omega \mu S I I^- dx - \int_\Omega \lambda I I^- dx \tag{1.9}$$

Il vient que :

$$\int_\Omega I^-\partial_t I dx = -\int_\Omega I^-\partial_t I^- dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(|I^-(x,t)|^2)dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|I^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2)$$

où :

$$I^- = (-I)^+ = \max(0, -I) = \frac{|I| - I}{2}$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on aura :

$$\int_\Omega I^-\nabla.(\psi(I)\nabla I)dx = -\int_\Omega \nabla I^-\psi(I)\nabla I dx = \int_\Omega \psi(I)|\nabla I^-|^2 dx$$

où :

$$\nabla I = -\nabla I^-$$

On remplace dans l'égalité (1.9) :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|I^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2) - \int_\Omega \psi(I)|\nabla I^-|^2dx &= \int_\Omega \mu S I I^- dx - \int_\Omega \lambda I I^- dx\\ &= -\int_\Omega (\mu S - \lambda){I^-}^2 dx\end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|I^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2) + \int_\Omega \psi(I)|\nabla I^-|^2dx = \int_\Omega (\mu S - \lambda){I^-}^2 dx$$

Par suite, en utilisant (1.6), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|I^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2) + \underline{a}\int_\Omega |\nabla I^-|^2dx \leq \int_\Omega (\mu S - \lambda){I^-}^2 dx$$

Soit $t \in [0,\, T]$ pour $T < T_{max}$. D'après l'existence locale, il vient que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|I^-\right\|_{2,\Omega}^2) + \underline{a}\left\|\nabla I^-\right\|_{2,\Omega}^2 dx \leq M_1(t)\left\|I^-\right\|_{2,\Omega}^2$$

où :

$$M_1(t) = \|\mu S(t) - \lambda\|_{\infty,\Omega}$$

Il vient donc, pour $t \in [0,\, T]$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|I^-\right\|_{2,\Omega}^2) \leq c_1\left\|I^-\right\|_{2,\Omega}^2$$

où :

$$c_1 = \sup_{t\in[0,\, T]} |M_1(t)|$$

En intégrant de nouveau sur $[0,\, t]$ avec $t < T$, on obtient :

$$\left\|I^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\|I_0^-(x)\right\|_{2,\Omega}^2 + 2c_1\int_0^t \left\|I^-(x,s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds$$

D'après la formule de Gronwall, on obtient :

$$\left\|I^-(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leq \left\|I_0^-(x)\right\|_{2,\Omega}^2 (1 + 2c_1 t \exp(2c_1 t))$$

Comme $I_0(x) \geq 0$ donc : $I_0^-(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$

$$I^-(x,t) = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0,\, T]$$

Et comme $T < T_{max}$, il vient donc :$I^-(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\, T_{max}[$
D'où :

$$I(x,t) \geq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0,\, T_{max}[$$

Pour la troisième composante, on procède de la même manière que précédemment.

On observe que les deux premières équations du système $(1.1) - (1.6)$ découplent de la troisième et la détermination de $S(,)$ et $I(,)$ déterminera $R(,)$. Nous allons donc, par la suite, nous intéresser au système suivant :

$$\partial_t S(x,t) = \nabla.(\phi(S(x,t))\nabla S(x,t)) - \mu S(x,t)I(x,t) \tag{1.10}$$

$$\partial_t I(x,t) = \nabla.(\psi(I(x,t))\nabla I(x,t)) + \mu S(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t) \tag{1.11}$$

assujetti aux conditions initiales :

$$S(x,0) = S_0(x), I(x,0) = I_0(x) \tag{1.12}$$

et aux conditions sur le bord :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial n} = \frac{\partial I(x,t)}{\partial n} = 0 \tag{1.13}$$

1.4 Estimations a priori

Dans ce paragraphe, on établit des estimations a priori sur les solutions classiques obtenues.

Proposition 1.4.1. *(Estimation de S et I dans $\mathbb{L}^p$)*
Si $(S(,), I(,))$ *est une solution de* $(1.10) - (1.13)$ *assurée par les théorèmes* (1.2.1) *et* (1.3.1) *sur* $\overline{\Omega} \times [0, \infty]$ *alors il existe une constante* $K_p > 0$ *telle que, pour tout* $0 < \tau < T < \infty$*, on a :*

$$\|I(.,.)\|_{p,\Omega\times[\tau,T]} \leq K_p(T-\tau) \tag{1.14}$$

$$\|S(,t)\|_{p,\Omega} \leq \|S_0( )\|_{p,\Omega} \text{ pour } t \geq 0 \tag{1.15}$$

Démonstration. Sans perdre de généralité, on suppose que S_0 et I_0 sont $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$.
On commence par montrer l'estimation suivante, pour tout $p \in [1, \infty]$, on a :

$$\|S(,t)\|_{p,\Omega} \leq \|S_0( )\|_{p,\Omega} \text{ pour } t \geq 0$$

En effet, on multiplie l'équation (1.10) par S^{p-1} puis on intègre sur $\Omega \times [0,\, t]$ avec $0 < t < T$, on obtient :

$$\int_\Omega S^{p-1}\partial_t S dx = \int_\Omega S^{p-1}\nabla.(\phi(S)\nabla s)dx - \int_\Omega \mu S^{p-1} S I dx$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord (1.13), il vient que :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S^{p-1}\nabla.(\phi(S)\nabla s)dx = \int_\Omega S^{p-1}[\nabla\phi(S)\nabla S + \phi(S)\Delta S]dx \\
&= \int_\Omega S^{p-1}\nabla\phi(S)\nabla S dx - \int_\Omega \nabla(S^{p-1}\phi(S))\nabla S dx + \int_{\partial\Omega} S^{p-1}\phi(S)\frac{\partial S}{\partial n}ds \\
&= \int_\Omega S^{p-1}\nabla\phi(S)\nabla S dx - \int_\Omega \phi(S)\nabla S^{p-1}\nabla S dx - \int_\Omega S^{p-1}\nabla\phi(S)\nabla S dx \\
&= -\int_\Omega \phi(S)\nabla S^{p-1}\nabla S dx
\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega S^p dx + \int_\Omega \phi(S)\nabla S^{p-1}\nabla S dx = -\int_\Omega \mu S^p I dx$$

Comme S et I sont positifs et, d'aprés (1.6), il vient donc :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega S^p dx + \underline{a}\int_\Omega \nabla S^{p-1}\nabla S dx \leq 0$$

Or

$$\nabla u^\alpha \nabla u^\beta = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|\nabla u^{(\alpha+\beta)/2}|^2$$

D'où :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega S^p dx + 4\underline{a}\frac{p-1}{p^2}\int_\Omega |\nabla S^{p/2}|^2 dx \leq 0$$

Ce qui revient à dire que :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega S^p(x,s)dx \leq 0$$

Par suite, en intégrant de nouveau sur $[0,\, t]$, on obtient :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^t\int_\Omega S^p(x,s)dxds = \|S(x,t)\|_{p,\Omega}^p - \|S(x,0)\|_{p,\Omega}^p \leq 0$$

D'où :

$$\|S(\,,t)\|_{p,\Omega} \leq \|S_0(\,)\|_{p,\Omega}, \text{pour}\, t \geq 0 \tag{1.16}$$

Pour montrer l'estimation a priori de I dans $\mathbb{L}^p$, on aura à utiliser le résultat établi dans [3].
On pose alors $g_1(S,I) = \mu SI$ et $g_2(S,I) = \mu SI - \lambda I$.
Comme $S, I \geq 0$, alors

$$g_2(S,I) \leq g_1(S,I) \tag{1.17}$$

On pose $F(.)$ une fonction réelle arbitraire telle que $F \in \mathcal{C}^2$ avec $F > 0$ et $F' > 0$.
En calculant la dérivée de $F(I)$ par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(F(I)) &= \frac{dI}{dt}.F'(I) = (\nabla.(\psi(I)\nabla I) + g_2(S,I))F'(I)\\ &= \nabla.(\psi(I)\nabla I)F'(I) + g_2(S,I)F'(I)\end{aligned}$$

On intègre sur Ω et en utilisant la formule de Green et les conditions sur le bord, on trouve :

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}(F(I))dx = \int_\Omega \nabla.(\psi(I)\nabla I)F'(I)dx + \int_\Omega g_2(S,I)F'(I)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \nabla\psi(I)\nabla I F'(I)dx + \int_\Omega \psi(I)\Delta I F'(I)dx + \int_\Omega g_2(S,I)F'(I)dx \\
&= \int_\Omega \nabla\psi(I)\nabla I F'(I)dx - \int_\Omega \nabla(\psi(I)F'(I))\nabla I dx + \int_{\partial\Omega} \psi(I)F'(I)\frac{\partial I}{\partial\eta}ds \\
&+ \int_\Omega g_2(S,I)F'(I)dx \\
&= \int_\Omega \nabla\psi(I)\nabla I F'(I)dx - \int_\Omega \nabla\psi(I)\nabla I F'(I)dx - \int_\Omega \psi(I)\nabla F'(I)\nabla I dx \\
&+ \int_\Omega g_2(S,I)F'(I)dx \\
&= -\int_\Omega \psi(I)\nabla I F''(I)\nabla I dx + \int_\Omega g_2(S,I)F'(I)dx \\
&= -\int_\Omega \psi(I)F''(I)|\nabla I|^2 dx + \int_\Omega g_2(S,I)F'(I)dx
\end{aligned}
$$

Par suite, en utilisant (1.17), on obtient :

$$
\int_\Omega \frac{d}{dt}(F(I))dx \leq -\int_\Omega \psi(I)F''(I)|\nabla I|^2 dx + \int_\Omega g_1(S,I)F'(I)dx
$$

Maintenant,on calcule la dérivée de $(S+S^2)F(I)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}((S+S^2)F(I)) = \frac{d}{dt}(S+S^2).F(I) + (S+S^2)\frac{dF(I)}{dt} \\
&= \frac{dS}{dt}F(I) + 2S\frac{dS}{dt}F(I) + (S+S^2)\frac{dF(I)}{dt} = (\nabla.(\phi(S)\nabla S) - g_1(S,I))F(I) \\
&+ 2S(\nabla.(\phi(S)\nabla S) - g_1(S,I))F(I) + (S+S^2)\frac{dF(I)}{dt} \\
&= (1+2S)\nabla.(\phi(S)\nabla S)F(I) - (1+2S)g_1(S,I)F(I) + (S+S^2)\frac{dF(I)}{dt} \\
&= (1+2S)\nabla.(\phi(S)\nabla S)F(I) - (1+2S)g_1(S,I)F(I) \\
&+ (S+S^2)[\nabla.(\psi(I)\nabla I)F'(I) + g_2(S,I)F'(I)] \\
&= (1+2S)\nabla.(\phi(S)\nabla S)F(I) - (1+2S)g_1(S,I)F(I) \\
&+ (S+S^2)\nabla.(\psi(I)\nabla I)F'(I) + (S+S^2)g_2(S,I)F'(I))
\end{aligned}
$$

Par suite, en utilisant (1.17)et en intégrant sur Ω, il vient que :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega (S+S^2)F(I)dx &\leq \int_\Omega (1+2S)\nabla.(\phi(S)\nabla S)F(I)dx \\
+\int_\Omega [(S+S^2)F'(I) - (1+2S)F(I)]g_1(S,I)dx &+ \int_\Omega (S+S^2)\nabla.(\psi(I)\nabla I)F'(I)dx \quad (1.18)
\end{aligned}
$$

En appliquant la formule de Green et les conditions sur le bord, on obtient :

$$
\int_\Omega (1+2S)F(I)\nabla.(\phi(S)\nabla S)dx = \int_\Omega (1+2S)F(I)(\nabla\phi(S)\nabla S + \psi(S)\Delta S)dx
$$

$$= \int_\Omega (1+2S)\nabla\phi(S)F(I)\nabla S dx - \int_\Omega \nabla[(1+2S)F(I)\phi(S)]\nabla S dx$$
$$+ \int_{\partial\Omega} (1+2S)\phi(S)F(I)\frac{\partial S}{\partial \eta} ds$$
$$= \int_\Omega (1+2S)\nabla\phi(S)F(I)\nabla S dx - \int_\Omega \nabla[(1+2S)\phi(S)]F(I)\nabla S dx$$
$$- \int_\Omega (1+2S)\phi(S)\nabla F(I)\nabla S dx$$
$$= \int_\Omega (1+2S)\nabla\phi(S)F(I)\nabla S dx - \int_\Omega (1+2S)\nabla\phi(S)F(I)\nabla S dx$$
$$- \int_\Omega 2|\nabla S|^2\phi(S)F(I)dx - \int_\Omega (1+2S)\phi(S)\nabla I F'(I)\nabla S dx$$
$$= -\int_\Omega 2\phi(S)F(I)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega (1+2S)\phi(S)F'(I)\nabla I\nabla S dx$$

et aussi :

$$\int_\Omega (S+S^2)\nabla.(\psi(I)\nabla I)F'(I)dx = \int_\Omega (S+S^2)[\nabla\psi(I)\nabla I + \psi(I)\Delta I]F'(I)dx$$
$$= \int_\Omega (S+S^2)\nabla\psi(I)F'(I)\nabla I dx - \int_\Omega \nabla[(S+S^2)\psi(I)F'(I)]\nabla I dx$$
$$+ \int_{\partial\Omega} (S+S^2)\psi(I)F'(I)\frac{\partial I}{\partial \eta} ds$$
$$= \int_\Omega (S+S^2)\nabla\psi(I)F'(I)\nabla I dx - \int_\Omega \nabla[(S+S^2)\psi(I)]F'(I)\nabla I dx$$
$$- \int_\Omega (S+S^2)\psi(I)\nabla F'(I)\nabla I dx$$
$$= \int_\Omega (S+S^2)\nabla\psi(I)F'(I)\nabla I dx - \int_\Omega (S+S^2)\nabla\psi(I)F'(I)\nabla I dx$$
$$- \int_\Omega (\nabla S + \nabla S^2)\psi(I)F'(I)\nabla I dx - \int_\Omega (S+S^2)\psi(I)\nabla F'(I)\nabla I dx$$
$$= -\int_\Omega (\nabla S + 2S\nabla S)\psi(I)F'(I)\nabla I dx - \int_\Omega (S+S^2)\psi(I)\nabla I F''(I)\nabla I dx$$
$$= -\int_\Omega (1+2S)\psi(I)F'(I)\nabla I\nabla S dx - \int_\Omega (S+S^2)\psi(I)F''(I)|\nabla I|^2 dx$$

En remplaçant dans l'inégalité (1.18), il vient que :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (S+S^2)F(I)dx \leq \int_\Omega [(S+S^2)F'(I) - (1+2S)F(I)]g_1(S,I)dx$$
$$- \int_\Omega 2F(I)\phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega (1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]F'(I)\nabla I\nabla S dx$$
$$- \int_\Omega (S+S^2)\psi(I)F''(I)|\nabla I|^2 dx \qquad (1.19)$$

On rappelle qu'il existe des constantes positives $\underline{a} < \overline{a}$ qui majorent et minorent $\phi(\,)$et $\psi(\,)$. On choisit $F(.)$ telle que $F(v) = e^{\varepsilon v}$ avec $\varepsilon > 0$ que l'on déterminera après et posons :

$$K = 2\overline{a}(1 + 2\left\| S_0(\,) \right\|_\infty).$$

L'inégalité (1.19) devient :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega (S+S^2)e^{\varepsilon I}dx \leq \int_\Omega [\varepsilon(S+S^2) - (1+2S)]e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx \\
&- \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega \varepsilon(1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]e^{\varepsilon I}\nabla I \nabla S dx \\
&- \int_\Omega \varepsilon^2(S+S^2)\psi(I)e^{\varepsilon I}|\nabla I|^2 dx
\end{aligned}$$

Comme $e^{\varepsilon I} > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega (S+S^2)e^{\varepsilon I}dx \leq \int_\Omega [\varepsilon(S+S^2) - (1+2S)]e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx \\
&- \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega \varepsilon(1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]e^{\varepsilon I}\nabla I \nabla S dx
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy généralisée, il vient que :

$$\begin{aligned}
&- \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega \varepsilon(1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]e^{\varepsilon I}\nabla I \nabla S dx \\
&\leq - \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx + \int_\Omega \varepsilon(1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]e^{\varepsilon I}|\nabla I \nabla S| dx \\
&\leq - \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx + \int_\Omega e^{\varepsilon I}\left[2\phi(S)|\nabla S|^2 + \frac{\varepsilon^2(1+2S)^2[\phi(S)+\psi(I)]^2}{8\phi(S)}|\nabla I|^2\right]dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{\varepsilon^2(1+2S)^2[\phi(S)+\psi(I)]^2}{8\phi(S)}|\nabla I|^2 e^{\varepsilon I}dx
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
- \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega \varepsilon(1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]e^{\varepsilon I}\nabla I \nabla S dx \\
\leq \int_\Omega \frac{\varepsilon^2(1+2S)^2[\phi(S)+\psi(I)]^2}{8\phi(S)}|\nabla I|^2 e^{\varepsilon I}dx
\end{aligned}$$

D'aprés (1.15) et (1.6),on trouve que :

$$\begin{aligned}
- \int_\Omega 2e^{\varepsilon I}\phi(S)|\nabla S|^2 dx - \int_\Omega \varepsilon(1+2S)[\phi(S)+\psi(I)]e^{\varepsilon I}\nabla I \nabla S dx \\
\leq \int_\Omega \frac{2\overline{a}\varepsilon^2(1+\|S_0\|_\infty)^2}{8\underline{a}}|\nabla I|^2 e^{\varepsilon I}dx = \int_\Omega \frac{\varepsilon^2 K^2}{8\underline{a}}|\nabla I|^2 e^{\varepsilon I}dx
\end{aligned}$$

Alors, il vient que :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (S+S^2)e^{\varepsilon I}dx \le \int_\Omega [\varepsilon(S+S^2)-(1+2S)]e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx$$
$$+\int_\Omega \frac{\varepsilon^2K^2}{8\underline{\mathrm{a}}}|\nabla I|^2e^{\varepsilon I}dx$$

et

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\varepsilon I}dx \le -\int_\Omega \varepsilon^2\psi(I)e^{\varepsilon I}|\nabla I|^2dx+\int_\Omega \varepsilon g_1(S,I)e^{\varepsilon I}dx$$

Posons $\delta=\dfrac{8\underline{\mathrm{a}}^2}{K^2}$, on trouve que :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [1+\delta(S+S^2)]e^{\varepsilon I}dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\varepsilon I}dx+\frac{d}{dt}\int_\Omega \delta(S+S^2)e^{\varepsilon I}dx$$
$$\le -\int_\Omega \varepsilon^2\psi(I)e^{\varepsilon I}|\nabla I|^2dx+\int_\Omega \varepsilon g_1(S,I)e^{\varepsilon I}dx$$
$$+\int_\Omega \delta[\varepsilon(S+S^2)-(1+2S)]e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx+\int_\Omega \delta\frac{\varepsilon^2K^2}{8\underline{\mathrm{a}}}|\nabla I|^2e^{\varepsilon I}dx$$
$$\le -\int_\Omega \varepsilon^2\psi(I)e^{\varepsilon I}|\nabla I|^2dx+\int_\Omega \{\varepsilon+\delta[\varepsilon(S+S^2)-(1+2S)]\}e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx$$
$$+\int_\Omega \varepsilon^2\psi(I)e^{\varepsilon I}|\nabla I|^2dx$$
$$\le \int_\Omega \{\varepsilon+\delta[\varepsilon(S+S^2)-(1+2S)]\}e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx$$
$$\le \int_\Omega \{\varepsilon+\delta[\varepsilon(\|S\|_{\infty,\Omega}+\|S\|^2_{\infty,\Omega})-(1+2S)]\}e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx$$
$$\le \int_\Omega \{\varepsilon+\delta[\varepsilon(\|S_0\|_{\infty,\Omega}+\|S_0\|^2_{\infty,\Omega})-(1+2S)]\}e^{\varepsilon I}g_1(S,I)dx$$

Choisissons $\varepsilon>0$ très petit tel que : $\varepsilon\{1+\delta(\|S_0\|_{\infty,\Omega}+\|S_0\|^2_{\infty,\Omega})\}-\delta(1+2S)\le 0$.
C'est à dire : $\varepsilon\{1+\delta(\|S_0\|_{\infty,\Omega}+\|S_0\|^2_{\infty,\Omega})\}\le\delta(1+2S)$.
Alors, prenons $\varepsilon\le\dfrac{\delta}{1+\delta(\|S_0\|_{\infty,\Omega}+\|S_0\|^2_{\infty,\Omega})}$.
Il vient alors :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [1+\delta(S(x,t)+S^2(x,t))]e^{\varepsilon I}dx\le 0 \text{ sur } [0,+\infty)$$

En intégrant sur $[0,\, t]$, il existe une constante M telle que :

$$\int_\Omega [1+\delta(S(x,t)+S^2(x,t))]e^{\varepsilon I}dx\le M \text{ sur } [0,+\infty)$$

Alors, pour tout $t>0$, on a :

$$\int_\Omega e^{\varepsilon I(x,t)}dx\le M.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|I(.,.)\|_{p,\Omega\times[\tau,T]} &= \left[\int_\tau^T \int_\Omega I^p(x,t)dxdt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\tau^T \int_\Omega \left[\frac{p}{\varepsilon}\right]^p e^{\varepsilon I(x,t)}dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^p \int_\tau^T \int_\Omega e^{\varepsilon I(x,t)}dxdt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^p \int_\tau^T M dxdt\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|I(.,.)\|_{p,\Omega\times[\tau,T]} \leq \frac{p}{\varepsilon} M^{\frac{1}{p}} (T-\tau)^{\frac{1}{p}}$$

D'où le résultat.

Proposition 1.4.2. *(Estimation de ∇S dans $\mathbb{L}^2$)*
Si $(S(\ ,\ ), I(\ ,\ ))$ *est une solution de* $(1.10)-(1.13)$ *assurée par les théorèmes* $(1.2.1)$ *et* $(1.3.1)$ *sur* $\overline{\Omega}\times[0,\,\infty)$ *alors il existe une constante* $C_2 > 0$ *telle que, pour tout* $T > 0$*, on a :*

$$\|\nabla S(.,T)\|_{2,\Omega} \leq C_2 \tag{1.20}$$

Démonstration. On multiplie l'équation (1.10) par S^- puis on intégre sur $\Omega\times[k,k+1]$ avec $k \in \{0,1,2,\dots\}$, on obtient :

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega S\partial_t S dxdt = \int_k^{k+1}\int_\Omega S\nabla.(\phi(S)\nabla S)dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega \mu S^2 I dxdt \tag{1.21}$$

Il vient que :

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega S\partial_t S dxdt = \int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k+1)dx - \int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k)dx$$

En appliquant la formule de Green et les conditions sur la bord, il vient aussi :

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1}\int_\Omega S\nabla.(\phi(S)\nabla S)dxdt = \int_k^{k+1}\int_\Omega S\nabla\phi(S)\nabla S dxdt + \int_k^{k+1}\int_\Omega S\phi(S)\Delta S dxdt \\
&= \int_k^{k+1}\int_\Omega S.\nabla\phi(S).\nabla S dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega \nabla(S\phi(S)).\nabla S dxdt + \int_k^{k+1}\int_{\partial\Omega} S\phi(S).\frac{\partial S}{\partial n}dsdt \\
&= \int_k^{k+1}\int_\Omega S.\nabla\phi(S).\nabla S dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega S.\nabla\phi(S).\nabla S dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega \nabla S.\phi(S).\nabla S dxdt \\
&= -\int_k^{k+1}\int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt
\end{aligned}$$

L'égalité (1.21) devient :

$$\int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k+1)dx - \int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k)dx = -\int_k^{k+1}\int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega \mu S^2 I dxdt$$

Il vient que :

$$\int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k+1)dx - \int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k)dx + \int_k^{k+1}\int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt \leq 0$$

D'où :

$$\int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k+1)dx + \int_k^{k+1}\int_\Omega \phi(S)|\nabla S(x,t)|^2 dxdt \leq \int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k)dx$$

En utilisant (1.6) ,il vient que :

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega \underline{a}|\nabla S(x,t)|^2 dxdt \leq \int_\Omega \frac{1}{2}S^2(x,k)dx$$

Par suite,

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega |\nabla S(x,t)|^2 dxdt \leq \int_\Omega \frac{1}{2\underline{a}}S^2(x,k)dx = \frac{1}{2\underline{a}}\left\|S(\ ,k)\right\|_{2,\Omega}^2, \text{pour} k \in \{0,1,2,\ldots\}$$

D'aprés (1.16) on obtient :

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega |\nabla S(x,t)|^2 dxdt \leq \frac{1}{2\underline{a}}\left\|S_0(\ )\right\|_{2,\Omega}^2$$

Le théorème de la valeur moyenne de l'intégrale assure l'existence d'un $\tau_k \in [k,k+1]$ tel que :

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega |\nabla S(x,t)|^2 dxdt = (k+1-k)\int_\Omega |\nabla S(x,\tau_k)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla S(x,\tau_k)|^2 dx$$

D'où :

$$\int_\Omega |\nabla S(x,\tau_k)|^2 dx \leq \frac{1}{2\underline{a}}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2 \tag{1.22}$$

Par conséquent, pour chaque $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, il existe $k < \tau_k < k+1$ tel que (1.22) est vérifiée.
Maintenant, on multiplie l'équation (1.10) par $\phi(S)\dfrac{\partial S}{\partial t}$ puis on intègre sur $\Omega \times [\tau_k, T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\tau_k}^T\int_\Omega \phi(S)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 dxdt = &\int_{\tau_k}^T\int_\Omega \left(\phi(S)\frac{\partial S}{\partial t}\right)\nabla.(\phi(S)\nabla S)dxdt\\ &-\int_{\tau_k}^T\int_\Omega \mu\phi(S)\frac{\partial S}{\partial t}SIdxdt\end{aligned} \tag{1.23}$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\left(\phi(S)\frac{\partial S}{\partial t}\right)\nabla.(\phi(S)\nabla S)dxdt = -\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\nabla\left(\phi(S)\frac{\partial S}{\partial t}\right)(\phi(S)\nabla S)dxdt\\
&= -\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\nabla(\phi(S)).\frac{\partial S}{\partial t}.(\phi(S)\nabla S)dxdt - \int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi(S).\nabla\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right).(\phi(S)\nabla S)dxdt\\
&= -\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\nabla S.\phi'(S).\frac{\partial S}{\partial t}.(\phi(S)\nabla S)dxdt - \int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi(S).\frac{\partial}{\partial t}(\nabla S).(\phi(S)\nabla S)dxdt\\
&= -\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\frac{\partial S}{\partial t}.[\phi'(S)]\phi(S)|\nabla S|^2dxdt - \int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\frac{\partial(\nabla S)}{\partial t}.\nabla S.|\phi(S)|^2dxdt\\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}|\phi(S)\nabla S|^2dx\\
&= -\int_{\Omega}|\phi(S(x,T))\nabla S(x,T)|^2dx + \int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k)\nabla S(x,\tau_k)|^2dx
\end{aligned}$$

Alors l'égalité (1.23) devient :

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi(S)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2dxdt + \int_{\Omega}|\phi(S(x,T))\nabla S(x,T)|^2dx &= \int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k)\nabla S(x,\tau_k)|^2dx\\
&\quad -\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\mu\phi(S)\frac{\partial S}{\partial t}SIdxdt
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi(S(x,t))\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right)^2dxdt + \int_{\Omega}|\phi(S(x,T))\nabla S(x,T)|^2dx&\\
\leq \int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\mu\left|\phi(S(x,t))\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right|S(x,t)I(x,t)dxdt&\\
+\int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k))\nabla S(x,\tau_k)|^2dx& \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, pour tout $\varepsilon > 0$, il vient que :

$$\begin{aligned}
&\mu\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\left|\phi(S(x,t))\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right|S(x,t)I(x,t)dxdt\\
&\leq \frac{\mu\varepsilon}{2}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi^2(S(x,t))\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right)^2dx + \frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt
\end{aligned}$$

L'inégalité (1.24) devient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi(S(x,t))\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right)^2dxdt + \int_{\Omega}|\phi(S(x,T))\nabla S(x,T)|^2dx\\
&\leq \frac{\mu\varepsilon}{2}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\phi^2(S(x,t))\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right)^2dx + \frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt\\
&+\int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k))\nabla S(x,\tau_k)|^2dx
\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}\left[\phi(S(x,t))-\frac{\mu\varepsilon}{2}\phi^2(S(x,t))\right]\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right)^2 dxdt+\int_{\Omega}|\phi(S(x,T))\nabla S(x,T)|^2dx$$
$$\leq \frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt+\int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k))\nabla S(x,\tau_k)|^2dx$$

En choisissant $\varepsilon>0$ tel que $(\phi(S)-\frac{\mu\varepsilon}{2}\phi^2(S))>0$ et en utilisant (1.6),(1.14) et (1.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\underline{\mathrm{a}}^2|\nabla S(x,T)|^2dx\leq\int_{\Omega}|\phi(x,T)\nabla S(x,T)|^2dx\\
&\leq\frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt+\int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k))\nabla S(x,\tau_k)|^2dx\\
&\leq\frac{\mu}{2\varepsilon}(\sup_{x\in\Omega}S(x,t))^2\int_{\tau_k}^{T}\int_{\Omega}I^2(x,t)dxdt+\int_{\Omega}|\phi(S(x,\tau_k))\nabla S(x,\tau_k)|^2dx\\
&\leq\frac{\mu}{2\varepsilon}\left\|S(.,t)\right\|_{\infty,\Omega}^2K_p^2(T-\tau_k)^2+\frac{\overline{a}^2}{2\underline{\mathrm{a}}}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned}$$

D'aprés (1.15), on aura :

$$\int_{\Omega}\underline{\mathrm{a}}^2|\nabla S(x,T)|^2dx\leq\frac{\mu}{2\varepsilon}\left\|S_0\right\|_{\infty,\Omega}^2K_p^2(T-\tau_k)^2+\frac{\overline{a}^2}{2\underline{\mathrm{a}}}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2$$

Il vient alors que :

$$\int_{\Omega}|\nabla S(x,T)|^2dx\leq\frac{\mu}{2\varepsilon\underline{\mathrm{a}}^2}\left\|S_0\right\|_{\infty,\Omega}^2K_p^2(T-\tau_k)^2+\frac{\overline{a}^2}{2\underline{\mathrm{a}}^3}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2\ \text{ pour tout }\ 0<T-\tau_k<2$$

D'où le résultat.

Proposition 1.4.3. *(Estimation de ∇I dans $\mathbb{L}^2$)*
Si $(S(\,,\,),I(\,,\,))$ est une solution de $(1.10)-(1.13)$ assurée par les théorèmes $(1.2.1)$ et $(1.3.1)$ sur $\overline{\Omega}\times[0,\,\infty)$ alors il existe une constante $C_3>0$ telle que, pour tout $T>0$, on a :

$$\left\|\nabla I(.,T)\right\|_{2,\Omega}\leq C_3 \tag{1.25}$$

Démonstration. On procède d'une manière similaire à la preuve de la proposition (1.4.2). On multiplie l'équation (1.11) par I^- puis on intègre sur $\Omega\times[k,k+1]$ avec $k\in\{0,1,2,\ldots\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{k}^{k+1}\int_{\Omega}I\partial_tIdxdt=\int_{k}^{k+1}\int_{\Omega}I\nabla.(\psi(I)\nabla I)dxdt+\int_{k}^{k+1}\int_{\Omega}\mu SI^2dxdt\\
-\lambda\int_{k}^{k+1}\int_{\Omega}I^2dx\end{aligned} \tag{1.26}$$

Il vient que :

$$\int_k^{k+1}\int_\Omega I\partial_t I dxdt = \int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k+1)dx - \int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k)dx$$

En appliquant la formule de Green et les conditions sur la bord, il vient aussi :

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1}\int_\Omega I\nabla.(\psi(I)\nabla I)dxdt = \int_k^{k+1}\int_\Omega I.\nabla\psi(I).\nabla I dxdt + \int_k^{k+1}\int_\Omega I.\psi(I).qs\Delta I dxdt\\
&= \int_k^{k+1}\int_\Omega I.\nabla\psi(I).\nabla I dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega \nabla(I\psi(I)).\nabla I dxdt + \int_k^{k+1}\int_{\partial\Omega} I\psi(I).\frac{\partial I}{\partial n}dsdt\\
&= \int_k^{k+1}\int_\Omega I.\nabla\psi(I).\nabla I dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega I.\nabla\psi(I).\nabla I dxdt - \int_k^{k+1}\int_\Omega \nabla I.\psi(I).\nabla I dxdt\\
&= -\int_k^{k+1}\int_\Omega \psi(I)|\nabla I|^2 dxdt
\end{aligned}$$

L'égalité (1.26) devient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k+1)dx - \int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k)dx = &-\int_k^{k+1}\int_\Omega \psi(I)|\nabla I|^2 dxdt\\
&+\int_k^{k+1}\int_\Omega \mu S I^2 dxdt - \lambda\int_k^{k+1}\int_\Omega I^2 dx
\end{aligned}$$

Il vient que :

$$\int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k+1)dx - \int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k)dx + \int_k^{k+1}\int_\Omega \psi(I)|\nabla I|^2 dxdt \leq \int_k^{k+1}\int_\Omega \mu S I^2 dxdt$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k+1)dx + \int_k^{k+1}\int_\Omega \psi(I)|\nabla I(x,t)|^2 dxdt\\
&\qquad\leq \int_\Omega \frac{1}{2}I^2(x,k)dx + \int_k^{k+1}\int_\Omega \mu S I^2 dxdt
\end{aligned}$$

On a déjà montré que :

$$\|I(.,.)\|_{p,\Omega\times[\tau,T]} \leq K_p(T-\tau)$$

Alors :

$$\|I(.,.)\|_{2,\Omega\times[k,k+1]} \leq K_2 \tag{1.27}$$

En utilisant (1.6) et (1.27), il vient que :

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1}\int_\Omega \underline{\text{a}}|\nabla I(x,t)|^2 dxdt &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega I^2(x,k)dx + \int_k^{k+1}\int_\Omega \mu S I^2 dxdt\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega I^2(x,k)dx + \mu\sup_{x\in\Omega}|S|\int_k^{k+1}\int_\Omega I^2 dxdt\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega I^2(x,k)dx + \mu\|S\|_{\infty,\Omega} K_2^2\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega I^2(x,k)dx + \mu\|S_0\|_{\infty,\Omega} K_2^2
\end{aligned}$$

Le théorème de la valeur moyenne de l'intégrale assure l'existence d'un $\tau_k \in [k, k+1]$ tel que :

$$\int_k^{k+1} \int_\Omega |\nabla I(x,t)|^2 dxdt = (k+1-k) \int_\Omega |\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx = \int_\Omega |\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx$$

D'où :

$$\int_\Omega |\nabla I(x,\tau_k)|^2 dxdt \leq \frac{K_2^2}{2\underline{a}} + \frac{\mu}{\underline{a}} \|S_0\|_{\infty,\Omega} K_2^2 \tag{1.28}$$

Maintenant, on multiplie l'équation (1.11) par $\psi(I)\dfrac{\partial I}{\partial t}$ puis on intègre sur $\Omega \times [\tau_k,\, T]$ avec $k < \tau_k < k+1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_k}^T \int_\Omega \psi(I(x,t)) \left(\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_\Omega |\psi(I(x,T))\nabla I(x,T)|^2 dx \\
&\leq \int_{\tau_k}^T \int_\Omega \left|\phi(I(x,t))\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right| |\mu S(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t)| dxdt \\
&+ \int_\Omega |\psi(I(x,\tau_k))\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, pour tout $\varepsilon > 0$, il vient que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_k}^T \int_\Omega \left[\psi(I(x,t)) - \frac{\varepsilon}{2}\psi^2(I(x,t))\right] \left(\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_\Omega |\psi(I(x,T))\nabla I(x,T)|^2 dx \\
&\quad \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_k}^T \int_\Omega |\mu S(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t)|^2 dxdt + \int_\Omega |\psi(I(x,\tau_k))\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\psi(I(x,T))\nabla I(x,T)|^2 dx &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_k}^T \int_\Omega |\mu S(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t)|^2 dxdt \\
&\quad + \int_\Omega |\psi(I(x,\tau_k))\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx
\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $(\psi(I) - \dfrac{\varepsilon}{2}\psi^2(I)) > 0$ et en utilisant (1.6),(1.14) , (1.22) et (1.28),on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \underline{a}^2 |\nabla I(x,T)|^2 dx \leq \int_\Omega |\psi(I(x,T))\nabla I(x,T)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tau_k}^T \int_\Omega |\mu S(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t)|^2 dxdt + \int_\Omega |\psi(I(x,\tau_k))\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx \\
&\leq \frac{\mu^2}{2\varepsilon} (\sup_{x\in\Omega} S(x,t))^2 \int_{\tau_k}^T \int_\Omega I^2(x,t) dxdt + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \int_{\tau_k}^T \int_\Omega I^2(x,t) dxdt \\
&+ \int_\Omega |\psi(I(x,\tau_k))\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx \\
&\leq \frac{\mu^2}{2\varepsilon} \|S\|_{\infty,\Omega}^2 K_2^2 (T-\tau_k)^2 + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} K_2^2 (T-\tau_k)^2 + \int_\Omega |\psi(I(x,\tau_k))\nabla I(x,\tau_k)|^2 dx \\
&\leq \frac{\mu^2}{2\varepsilon} \|S\|_{\infty,\Omega}^2 K_2^2 (T-\tau_k)^2 + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} K_2^2 (T-\tau_k)^2 + \overline{a}^2 \left(\frac{K_2^2}{2\underline{a}} + \frac{\mu}{\underline{a}} \|S_0\|_{\infty,\Omega} K_2^2\right)
\end{aligned}$$

D'après (1.15), on aura :

$$\int_\Omega |\nabla I(x,T)|^2 dx \leq \frac{\mu^2}{2\varepsilon \underline{\mathrm{a}}^2} \|S_0\|^2_{\infty,\Omega} K_2^2 (T-\tau_k)^2 + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon \underline{\mathrm{a}}^2} K_2^2 (T-\tau_k)^2 + \frac{K_2^2 \overline{a}^2}{2\underline{\mathrm{a}}^3}$$
$$+ \frac{\mu \underline{\mathrm{a}}^2}{\underline{\mathrm{a}}^3} \|S_0\|_{\infty,\Omega} K_2^2 mathrm\ pourtout\ 0 < T-\tau_k < 2$$

D'où le résultat.

1.5 Existence globale

Théorème 1.5.1. *[8] Il existe un $T_{max} \in [0,+\infty]$ tel que le système (1.1)-(1.6) admet une unique solution classique sur $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$. De plus, si $T_{max} < \infty$, alors :*

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|(S(.,t), I(.,t), R(.,t))\|_{\infty,\Omega} = \infty$$

Conséquence. Ce résultat assure l'existence globale des solutions classiques du système (1.1)-(1.6) pour tout $t > 0$, d'une manière à ce qu'elles n'explosent pas en temps fini.Par conséquent, pour montrer l'existence globale des solutions classiques, il suffit de montrer que celle-ci restent uniformément bornées sur le temps d'existence. Et c'est vérifié grâce à (1.14) et (1.15).

Chapitre 2

Comportement asymptotique

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement asymptotique de la solution du système (1.10)-(1.13). Pour celà, on suit les techniques developpées par Webb [6] et utilisées par Fitzgibbon et Morgan [4].
Soit X le cône positif de $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega)$ et Y le cône positif dans $\mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$. On définit la famille d'opérateurs $\{U(t)|t \geq 0\}$ par :

$$U(t)(S_0, I_0) = (S(.,t), I(.,t))$$

où $(S(.,t), I(.,t))$ est la solution globale du système (1.10)-(1.13) assurée par les théorèmes (1.2.1) et (1.3.1).
On sait que $\{U(t)|t \geq 0\}$ est un semi-groupe fortement continu. En effet :
1)$U(0)(S_0, I_0) = ((S(.,0), I(.,0)) = (S_0, I_0)$
Donc : $U(0) = I_d$.
2)$U(t+s)(S_0, I_0) = (S(.,t+s), I(.,t+s)) = U(t)(S(.,s), I(.,s)) = U(t)(U(s)(S_0, I_0))$
3)$\lim_{t\to 0^+} U(t)(S_0, I_0) = U(0)(S_0, I_0) = (S_0, I_0)$.
On a les résultats suivant : :

Proposition 2.0.1. *Si $(S_0, I_0) \in X$ alors $O(S_0, I_0) = \{(S(.,t), I(.,t))|(S(\,), I(\,))$ est une solution du système (1.10)-(1.13), $S(.,0) = S_0(\,), I(.,0) = I_0(\,)$ et $t \geq 0\}$ est précompacte dans Y.*
De plus, $O(S_0, I_0)$ admet un ensemble $\omega-$limite $\omega(S_0, I_0) \in Y$ non-vide, compact et connexe tel que : $dist(U(t)(S_0, I_0), \omega(S_0, I_0)) \to 0$, quand $t \to +\infty$(où la distance est donnée en norme de Y).

Démonstration. Les propositions (1.4.2)),(1.4.3) assurent que la trajectoire $O(S_0, I_0)$ est dans un intervalle borné de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et donc on peut appliquer le lemme de Rellich pour établir la précompacité.
Les assertions restantes sont des résultats standards dans la théorie des systèmes dynamiques [1].

A présent, nous introduisons une fonction $W(\ ,\ )$, à valeurs réelles, définie sur Y par :

$$W(S,I) = \|G(S,I)\|_1 = \int_\Omega (S+I) \tag{2.1}$$

Il est clair que W est continu sur Y.
$W(.,.)$ est une fonction de Lyapunov pour le système dynamique défini par le semi-groupe $\{U(t), t \geq 0\}$.
Nous définissons les projections $\Pi_1, \Pi_2 : X \longrightarrow \mathbb{H}^1(\Omega)$ telles que :

$$\Pi_1[\Phi,\Psi] = \Phi$$
$$\Pi_2[\Phi,\Psi] = \Psi$$

Proposition 2.0.2. *Si* $(S_0, I_0) \in X$ *et* $(\Phi,\Psi) \in \omega(S_0,I_0)$ *alors* $\Psi \equiv 0$ *et la projection* $\Pi_2(U(t)(\Phi,\Psi)) = 0$.

Démonstration. On pose : $S(t) = \Pi_1(U(t)(\Phi,\Psi))$ et $I(t) = \Pi_2(U(t)(\Phi,\Psi))$
On somme les composantes de (1.10)-(1.13) puis on intègre sur $\Omega \times [0,t]$, on obtient :

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{d}{dt}(S+I)dxdt = \int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I)dxdt - \int_0^t \int_\Omega \lambda I dxdt$$

On a déjà montré dans la preuve du théorème (1.2.1) que :

$$\int_0^t \int_\Omega \nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I)dxdt = 0$$

Il vient alors

$$\int_\Omega (S(x,t) + I(x,t))dxdt + \int_0^t \int_\Omega \lambda I dxdt = \int_\Omega (S_0(x) + I_0(x))dxdt$$

D'où

$$W(S(.,t), I(.,t)) + \int_0^t \lambda \|I(.,s)\|_1 dxds = W(S_0(\,), I_0(\,)) \tag{2.2}$$

D'après (2.2), on a :

$$W(S(.,t), I(.,t)) \leq W(S_0(\,), I_0(\,))$$

Ce qui veut dire que $W(U(t)(S_0,I_0)) = W(S(.,t),(.,t))$ est décroissante et bornée par 0.
On applique le principe d'invariance de LaSalle pour montrer que la fonction de Lyapunov $W(.,.)$ admet un minimum de valeur constante. Pour celà, on pose :

- $k = \lim_{t\to+\infty} W(U(t)(S_0,I_0))$
- $(\Phi,\Psi) \in \omega(S_0,I_0)$

On a par définition :

$$\omega(S_0, I_0) = \{(\Phi, \Psi) \in X \times X, \exists t_n \longrightarrow +\infty \, \text{tel que} : O(t_n)(S_0, I_0) \longrightarrow [\Phi, \Psi] \text{dans} X \times X\}$$

Comme $\omega(S_0, I_0)$ est un intervalle invariant alors : $U(t)(\Phi, \Psi) \in \omega(S_0, I_0)$.
D'après la définition de k, il vient que :

$$W(U(t)(\Phi, \Psi)) = k \, \text{pour tout} \, t \geq 0$$

Comme $W(\,)$ est continu alors $W(\Phi, \Psi) = k$.
Il vient alors de (2.2) :

$$\int_0^t \lambda \|I(., s)\|_1 dx ds = 0$$

Ce qui veut dire que :

$$\|I(., s)\|_1 = 0$$

Alors :

$$I(s) = \Pi_2(U(s)(\Phi, \Psi)) = 0 \, \text{pour tout} \, s \geq 0$$

et donc :$\Psi \equiv 0$
D'où le résultat.

On introduit la famille des fonctions de Lyapunov-Like $W_\varepsilon(., .) : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$W_\varepsilon(\Phi, \Psi) = \int_\Omega \{\Phi + \Psi - \frac{\lambda}{\mu} \log(\Phi + \varepsilon)\} \tag{2.3}$$

Il est clair que $W_\varepsilon(., .)$ est continue et bornée.

Lemme 2.0.1. *Si $(S_0, I_0) \in X$ alors $W_\varepsilon(U(t)(S_0, I_0))$ est décroissante en temps.*

Démonstration. Posons $(S(., t), I(., t))$ solution du système (1.10)-(1.13) avec les conditions initiales S_0, I_0.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} W_\varepsilon(U(t)(S_0, I_0)) &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \{S + I - \frac{\lambda}{\mu} \log(S + \varepsilon)\} \\
&= \int_\Omega \left\{\partial_t S + \partial_t I - \frac{\lambda}{\mu} . \frac{\partial_t S}{S + \varepsilon}\right\} \\
&= \int_\Omega \{\nabla.(\phi(S)\nabla S + \psi(I)\nabla I)\} + \int_\Omega \left\{-\lambda I - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\nabla.(\phi(S)\nabla I) - \mu S I}{S + \varepsilon}\right\} \\
&= \int_\Omega \left\{-\lambda I - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\nabla(\phi(S)\nabla S)}{S + \varepsilon} + \frac{\lambda S I}{S + \varepsilon}\right\} \\
&= -\lambda \int_\Omega I \left(1 - \frac{S}{S + \varepsilon}\right) - \frac{\lambda}{\mu} \int_\Omega \frac{\nabla.(\phi(S)\nabla S)}{S + \varepsilon}
\end{aligned}$$

Calculons $\displaystyle\int_\Omega \frac{\nabla.(\phi(S)\nabla S)}{S+\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\nabla.(\phi(S)\nabla S)}{S+\varepsilon} &= \int_\Omega \frac{\nabla(\phi(S)).\nabla S + \phi(S)\Delta S}{S+\varepsilon}dx \\
&= \int_\Omega \frac{\nabla(\phi(S)).\nabla S}{S+\varepsilon}dx + \int_\Omega \nabla\left(\frac{\phi(S)}{S+\varepsilon}\right).\nabla S dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\phi(S)}{S+\varepsilon}.\frac{\partial S}{\partial \eta}ds \\
&= \int_\Omega \frac{\nabla(\phi(S)).\nabla S}{S+\varepsilon}dx - \int_\Omega \frac{\nabla(\phi(S)).\nabla S}{S+\varepsilon}dx + \int_\Omega \frac{\phi(S).\nabla(S+\varepsilon).\nabla S}{(S+\varepsilon)^2}dx \\
&= \int_\Omega \frac{\phi(S)|\nabla S|^2}{(S+\varepsilon)^2}dx
\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\frac{d}{dt}W_\varepsilon(U(t)(S_0,I_0)) = -\lambda \int_\Omega \left\{ I\left(1-\frac{S}{S+\varepsilon}\right) + \frac{1}{\mu}\frac{\phi(S)|\nabla S|^2}{(S+\varepsilon)^2}\right\} \leq 0 \tag{2.4}$$

On déduit que $W_\varepsilon(U(t)(S_0,I_0))$ est décroissante.

Proposition 2.0.3. *Si* $(S_0,I_0)\in X$ *et*$(\Phi,\Psi)\in\omega(S_0,I_0)$*, il existe une unique constante positive* C *telle que* $\Phi\equiv C$.

Démonstration. Appliquons le principe d'invariance de LaSalle. Comme $W_\varepsilon(U(t)(S_0,I_0))$ est décroissante alors il existe k tel que :

$$k = \lim_{t\to\infty} W_\varepsilon(U(t)(S_0,I_0)).$$

Si $(\Phi,\Psi)\in\omega(S_0,I_0)$ alors $W_\varepsilon(\Phi,\Psi)=k$
En effet, comme $\omega(S_0,I_0)$ est une région invariante alors $U(t)(\Phi,\Psi)\in\omega(S_0,I_0)$
D'après la définition de k, on a :

$$W_\varepsilon(U(t)(\Phi,\Psi)) = k \,\text{pour tout}\, t\geq 0.$$

Par continuité de W_ε,on obtient :

$$W_\varepsilon(\Phi,\Psi) = k \,\text{pour tout}\, t\geq 0.$$

On pose : $S(t)=\Pi_1(U(t)(\Phi,\Psi))$ et $I(t)=\Pi_2(U(t)(\Phi,\Psi))$
On intègre (2.4) sur $[0,t]$, on obtient :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}W_\varepsilon(U(s)(S_0,I_0))ds = \int_0^t\int_\Omega -\lambda I\left(1-\frac{S}{S+\varepsilon}\right)dxdt - \frac{\lambda}{\mu}\int_0^t \left\|\frac{\phi(S)|\nabla S|^2}{(S+\varepsilon)^2}\right\|_1 dt$$

D'après la proposition(2.0.2) : $I(t)=\Pi_2(U(t)(\Phi,\Psi))=0$
Il vient que :

$$W_\varepsilon(U(s)(\Phi,\Psi)) - W_\varepsilon(U(0)(S_0,I_0)) = -\frac{\lambda}{\mu}\int_0^t \left\|\frac{\phi(S)|\nabla S|^2}{(S+\varepsilon)^2}\right\|_1 dt = 0$$

D'où :

$$\left\| \frac{\phi(S)|\nabla S|^2}{(S+\varepsilon)^2} \right\|_1 = 0$$

Ce qui veut dire que : $\dfrac{\phi(S)|\nabla S|^2}{(S+\varepsilon)^2} = 0$
Comme $\phi(S) \geq \underline{a} > 0$ alors $|\nabla S|^2 = 0$ i.e $\nabla S = 0$ et comme S est continu, il vient que : $S \equiv C$ où C est une constante positive (car S$\geq$ 0)

$*$) On montre que C est unique :
Soit $t_n \to \infty$ et $(\Phi, \Psi) \in \omega(S_0, I_0)$ telle que : $U(t)(S_0, I_0) \to (\Phi, \Psi) \in Y$.
D'après la proposition (2.0.2), $\Psi \equiv 0$ et on vient de montrer que $\Phi \equiv C$.
D'près (2.2), on a :

$$W(\Phi, \Psi) + \int_0^t \lambda \left\| I(.,s) \right\|_1 ds = W(S_0, I_0)$$

On remplace Φ et Ψ par leurs valeurs, on obtient :

$$W(C, 0) + \int_0^t \lambda \left\| \Pi_2(U(s)(S_0, I_0)) \right\|_1 ds = W(S_0, I_0)$$

Or $W(C, 0) = \int_\Omega (C+0)dx = C.mes(\Omega)$
où $mes(\Omega)$ représente la mesure de Lebesgue de Ω
A la limite $t \to \infty$, on obtient :

$$mes(\Omega).C + \int_0^\infty \lambda \left\| \Pi_2(U(s)(S_0, I_0)) \right\|_1 ds = W(S_0, I_0)$$

Ce qui montre l'unicité de C.

Proposition 2.0.4. *Si* $(S_0(.), I_0(.)) \in X$ *alors* $\lim_{t\to+\infty} \left\| S(.,t) - \Phi \right\|_{2,\Omega}^{(1)} = 0$

Démonstration. On a montré que $S(.,t)$ converge vers Φ dans $\mathbb{L}^1(\Omega)$ et comme $\left\| S(.,t) \right\|_{\infty,\Omega} \leq \left\| S_0 \right\|_{\infty,\Omega}$ alors ça implique que $S(.,t)$ converge vers Φ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.
Ce qui se traduit par :

$$\lim_{t\to\infty} \left\| S(.,t) - \Phi \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$$

Maintenant, on multiplie l'équation (1.10) par S puis on intègre sur $\Omega \times [0,t]$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega S(x,t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt \leq \frac{1}{2} \left\| S_0 \right\|_{2,\Omega}^2$$

Quand $t \to +\infty$, on a : $S(x,t) \to \Phi$, alors :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Phi^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt \leq \frac{1}{2} \left\| S_0 \right\|_{2,\Omega}^2$$

Il vient alors

$$\frac{1}{2}mes(\Omega)\Phi^2 + \int_0^t \int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2$$

Par conséquent, on peut obtenir une suite $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$ telle que : $t_k \leq t_{k+1}$, $t_k \longrightarrow +\infty$ et $t_{k+1} - t_k < 0$ et

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|\nabla S(.,t_k)\right\|_{2,\Omega}^2 = 0$$

En effet,

$$\frac{1}{2}mes(\Omega)\Phi^2 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_\Omega \phi(S)|\nabla S|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2 \to \frac{1}{2}mes(\Omega)\Phi^2$$

Il vient que

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\mathrm{a}} \left\|\nabla S\right\|_{2,\Omega}^2 dxdt \leq 0, \mathrm{k} = 1, \ldots, +\infty$$

Ce qui veut dire que :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|\nabla S(.,t_k)\right\|_{2,\Omega}^2 = 0 \tag{2.5}$$

Si $t_k < t < t_{k+1}$, on a déjà montré dans la proposition (1.4.2) que :

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^t \int_\Omega \left[\phi(S(x,t)) - \frac{\mu\varepsilon}{2}\phi^2(S(x,t))\right]\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right)^2 dxdt + \int_\Omega |\phi(S(x,t))\nabla S(x,t)|^2 dx \\ \leq \frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{t_k}^t \int_\Omega S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt + \int_\Omega |\phi(S(x,t_k))\nabla S(x,t_k)|^2 dx\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{t_k}^t \int_\Omega S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt \leq \left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2 \int_{t_k}^t \int_\Omega I^2(x,t)dxdt$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{2\varepsilon}\int_{t_k}^t \int_\Omega S^2(x,t)I^2(x,t)dxdt &\leq \frac{\mu}{2\varepsilon}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2 \int_\Omega I^2(x,t)dxdt \\ &\leq \frac{\mu}{2\varepsilon}\left\|S_0\right\|_{2,\Omega}^2 . \frac{2}{\varepsilon}.M^{1/2}(t-t_k)^{1/2} \\ &\longrightarrow 0 \,\text{quand}\, k \to +\infty\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\phi(S(x,t_k))\nabla S(x,t_k)|^2 dx &\leq \underline{\mathrm{a}}^2 \int_\Omega |\nabla S(x,t_k)|^2 dx \\ &\longrightarrow 0 \,\text{quand}\, k \to \infty\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\underline{a}^2 \int_\Omega |\nabla S(x,t)|^2 dx \leq \int_\Omega |\phi(S(x,t))\nabla S(x,t)|^2 dx \leq 0$$

Ce qui revient à dire que :

$$\lim_{t\to\infty} \|\nabla S(x,t)\|_{2,\Omega}^2 = 0$$

On obtient alors

$$\lim_{t\to\infty} \|S(.,t) - \Phi\|_{2,\Omega}^{(1)} = \lim_{t\to\infty} \left(\|S(.,t) - \Phi\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla S(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \right) = 0$$

D'où le résultat.

On utilise le théorème d'injection de Sobolev pour conclure que si $n = 1$:

$$\sup_{x\in\Omega} |S(x,t) - \Phi| \to 0 \tag{2.6}$$

On énonce le théorème suivant de [6] dont on aura besoin pour la suite :

Théorème 2.0.2. *Soit $(S_0, I_0) \in X \times X$. Il existe une unique solution (S(.,.),I(.,.)) du système (1.10)-(1.13). De plus, $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ dans X et il existe une unique constante S_∞ dans $[-L, L]$ tel que $\lim_{t\to\infty} S(t) = S_\infty$ dans X. Et si S_0 est strictement positive sur $[-L, L]$ alors S_∞ est aussi positive.*

En utilisant (2.6) et le théorème (2.0.2), on obtient :

Proposition 2.0.5. *Si $(S_0(\,), I_0(\,)) \in X$ et $n = 1$ alors $\|S(.,t) - \Phi\|_{\infty,\Omega} \to 0$ et si $S(x,0) > 0$ sur un intervalle de mesure positive alors $\Phi > 0$.*

Démonstration. On suppose que $C = 0$. On pose $M = \left\| S_0 + I_0 - \frac{\lambda}{\mu}\log(S_0) \right\|_1$ et soit $\varepsilon > 0$ choisi tel que $-\log(2\varepsilon) > \dfrac{M\mu}{mes(\Omega)\lambda}$
Soit t tel que : $\|\Pi_1(U(t)(S_0, I_0))\|_1 < \varepsilon$
Pour cet ε, on définit W_ε comme (2.3)
Comme W_ε est décroissante, alors :

$$M \geq W_\varepsilon(S_0, I_0) \geq W_\varepsilon(U(t)(S_0, I_0)) \geq -\frac{\lambda}{\mu} \int_\Omega \log(\Pi_1(U(t)(S_0, I_0)) + \varepsilon) > M$$

D'où la contradiction alors C est positive
Donc :

$$\Phi > 0$$

Conclusion :

Dans ce travail, on a montré l'existence globale d'une solution positive d'un système d'équations de réaction-diffusion quasi-linéaires modélisant la propagation d'une maladie infectieuse et on a établi des estimations a priori sur cette solution. Puis, on s'est intéressé à son comportement asymptotique en utilisant des résultats sur les semi-groupes et les systèmes dynamiques. D'un point de vue épidemiologique, on a étudié la propagation spatiale d'une maladie infectieuse et on a montré que la population infectée décroit vers zéro tandis que la population susceptible d'être infectée converge vers une constante (positive si $S_0 > 0$ et $n = 1$) dans une région spatiale.

Bibliographie

[1] A.Haraux. *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.* Masson, Paris, 1991.

[2] A.Pazi. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, 1983.

[3] A.Haraux et A.Youkana. on a result of k.masuda concerning reaction-diffusion equation. *Tohoku Math.J.*, 40 :159–163, 1988.

[4] W.E.Fitzgibbon et J.J.Morgan. A diffusive epidemic model on a bounded domain of arbitrary dimension. *Differential Integral Equation*, 1 :125–132, 1988.

[5] M.Kirane et S.Kouachi. a strongly nonlinear reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, February 1995.

[6] G.F.Webb. A reaction diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. *J.Math.Anal.Appl.*, 84 :150–161, 1981.

[7] H.Brezis. *Analyse fonctionnelle,Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[8] J.M-C.Ryan. *Global existence of reaction-diffusion equations over multiple domains.* Mathematics, Texas A-M University, December 2004.

[9] L.C.Evans. *Partial differential equations.* American Math.Soc., 1999.

[10] L.Taleb. *Etude d'un système de réaction-diffusion fortement couplé quasi-lineaire dégénéré.* Mathématiques, USTHB, 2002.

[11] R.Belbaki. *Existence globale et comportement à l'infini de solutions positives d'un système de réaction-diffusion fortement non-linéaire décrivant la propagation d'une maladie contagieuse.* Mathématiques, Ecole normale supérieure, Kouba,Alger.

[12] S.J.Waggoner W.E.Fitzgibbon, J.J.Morgan. A quasilinear system modeling the spread of infectious disease. *Rocky Mountain Journal Of Mathematics*, 22(2) :579–592, Spring 1992.