

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE.**

**Ministère De l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique**



**Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
Faculté de Génie de la Construction.
Département De Génie Civil.**



Mémoire de fin d'étude
Option : Structure

Thème

*Simulation du comportement
des sections planes en béton
armé*

Réalisé par :

MAHOUCHE Damia

Propos et dirigé par :

Mr MERAKEB Seddik

Année : 2018/2019



Dédicaces

**MERCI ALLAH (MON DIEU) DE M'AVOIR DONNÉ LA CAPACITÉ D'ÉCRIRE
ET DE RÉFLÉCHIR, LA FORCE D'Y CROIRE, LA PATIENCE D'ALLER
JUSQU'AU BOUT DU RÊVE**

A MES CHERS PARENTS, ET SŒURS.

AUX FAMILLES MAHOUCHE ET HABAREK

A TOUT MES COLLÈGUES.

MAHOUCHE DAMIA

Remerciements

Je remercie avant tous Allah tout puissant, de m'avoir aidé et donné courage pour arriver au terme de ce travail

Juste quelques mots pour ne pas être ingrate envers tous ceux et celles qui ont contribués de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Et si cette page peut ne paraître qu'un exercice convenu de politesse, j'espère que celles et ceux auxquels elle s'adresse, sauront y trouver l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux, a mon promoteur *M^rS.MERAKEB* qui a initié et encadré avec pertinence mes travaux de mémoire. Je suis extrêmement reconnaissante de m'avoir accordé son entière confiance et d'avoir su partager son dynamisme et son excellence scientifique avec une grande attention.

Je tiens à exprimer tout du fond de mon cœur, ma reconnaissance à mes proches qui savent déjà combien je leur dois, Il s'agit de ma famille, surtout mes parents qui m'offrent toujours un appui sûr et sans réserves, par leur soutien et leur encouragement. Merci à tous mes amis (es) et collègues qui ont sus m'apporter leur entière disponibilité et leur soutien indéfectible dans les moments les plus difficiles.

Résumé

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse au calcul permettant la modélisation et la simulation numérique des poutres en béton armé, afin de pouvoir suivre l'évolution de leur comportement non linéaire.

L'utilisation de méthodes de calcul non linéaire pour la résolution d'une section plane en béton armé soumise à un couple d'efforts (N,M) nous permet de déduire leur comportement aux états ultimes loin de la phase élastique et approchant la rupture.

Par la suite, l'intégration du champ de déformation d'une section plane nous permet de déduire la déformée des structures moyennant les hypothèses appliquées aux poutres, celles de Bernoulli ou de Timoshenko.

La comparaison entre les résultats calculés et ceux d'essais, a permis de tirer des conclusions sur le comportement global des poutres .

Mots clés

Béton armé, poutre, section plane, non linéarité, effet Timoshenko, modélisation, simulation, élément finis, discrétisation.

Table de matière

Introduction général	1
----------------------------	---

Chapitre I : Etude bibliographique

Introduction.....	3
I.1. Historique du béton armé	3
I.2. Aperçu sur le comportement non-linéaire des structures en béton armé	4
I.2.1. Les non-linéarités physiques ou matérielles.....	4
I.2.2. Les non-linéarités géométriques.....	5
I.3. Caractéristiques et comportement des matériaux.....	5
I.3.1. Le béton.....	5
I.3.2. L'aciens.....	10
I.3.3. Le béton armé.....	12
I.4. Paramètres influençant le comportement d'une poutre en béton armé vis-à-vis de l'effort Tranchant.....	16
I.4.1 Influence des dimensions de la poutre sur les résultats des essais (effet d'échelle).....	16
I.4.2. Influence des armatures transversale.....	17
I.4.3. Influence de l'élanement de cisaillement sur la capacité portante d'une poutre en béton armé.....	19
I.5. Exemples d'application.....	19
I.5.1 Exemples sections	20
I.5.2. Exemples poutres en béton armé.....	22
Conclusion.....	24

Chapitre II: Etude d'une section plane en flexion composée

Introduction.....	25
II.1. Le calcul béton armé	25
II.1.1. Flexion simple.....	26
II.1.2. Flexion composée	26
II.2. Méthodes de résolution non-linéaire.....	27
II.2.1. La méthode de Newton-Raphson.....	27
II.2.2. La méthode de Newton Raphson modifiée	28
II.2.3. La méthode de la rigidité sécante.....	28
II.3. Hypothèses de calcul.....	29
II.4. Relations Efforts-Déformations dans la section	30

II.5. Calcul pratique de la matrice de rigidité de la section	34
II.6. Méthode de résolution non linéaire.....	35
II.7. Résultats et interprétations	39
II.7.1 Caractéristiques du béton et de l'acier pour la section OG3 du CEBTP	39
II.7.2. Caractéristiques du béton et de l'acier pour la section 3a de Zdenek P. Bazant and Byung H. Oh.....	41
II.7.3. Caractéristiques du béton et de l'acier pour la section 3b de Zdenek P .Bazant and Byung H.Oh	43
Conclusion.....	44

Chapitre III: formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de Navier Bernoulli et Timoshenko

Introduction.....	45
III.1. Théorie de Navier-Bernoulli.....	45
III.1.1. Hypothèses de base.....	45
III.1.2. Cinématique.....	46
III.1.3. Relation contrainte-déformation.....	47
III.1.4. Relation déformations –déplacements :.....	48
III.1.5. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :	49
III.1.6. Relation entre efforts et déformation.....	50
III.1.7. Modélisation par élément finis et calcul de la matrice de rigidité.....	51
III.2. Théorie de Timoshenko	54
III.2.1. Cinématique.....	54
III.2.2. Formulations d'éléments finis poutre Timoshenko	55
III.2.3. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :	55
III.2.4. Matrices de rigidité.....	56
III.2.5. Vecteurs de forces	58
III.3. Présentation générale de CASTEM 2000.....	59
III.4. Résultats et interprétations.....	64
III.4.1. Caractéristiques de béton et de l'acier de la poutre Vecchio et Emara [52].....	64
III.4.2. Caractéristiques de béton et de l'acier de la poutre MAZARS	66
Conclusion.....	68
Conclusion generale.....	69

Liste des figures

Figure I-1: Courbe contrainte- déformation d'un essai de compression (Loi de SARGIN.....	6
Figure I-2 : Loi parabole rectangle.....	7
Figure I-3: Réparation fictive des contraintes pour le béton tendu	8
FigureI-4: Diagramme contrainte-déformation de la fibre la plus tendue	9
Figure I-5 : Diagramme contrainte déformation d'un acier naturel.....	10
Figure I-6 : Diagramme contrainte déformation de l'acier naturel	11
Figure I-7 : Diagramme contrainte-déformation d'un acier écrouis.....	12
Figure I-8: schématisation d'une poutre fissurée soumise à deux charges concentrées p.....	14
Figure I-9: comportement d'une barre d'acier soumise à un essai d'arrachement	15
Figure I-10 : Donnés géométriques de la section [19]	20
Figure I-11: Donnés géométriques de la section [20]	21
Figure I-12: Donnés géométriques de la section [28]	21
Figure I-13: Données géométriques de la poutre [21].....	22
Figure I-14 : Donnés géométriques de la section de poutre[21]	23
Figure I-15 : Données géométriques de la poutre de MAZARS [7]	23
Figure II-1 : Méthode de Newton-Raphson	28
Figure II-2 : Méthode de Newton-Raphson modifiée	28
Figure II-3 : Méthode de la sécante.....	29
Figure II-4 : Discrétisation de la section et diagrammes des contraintes et déformations.....	30
figure II-5 : comportement contrainte-déformation en présentant le module de sécant.....	32
Figure II-6 : Discrétisation de la section en tranches horizontales	35
Figure II-7 : Schéma de résolution pour le calcul M-Ø(N= constant).....	36
Figure II-8 : organigramme de calcul.....	38
figure II-9: Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de section OG3 du CEBTP.....	40
Figure II.10 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de section 3a	42
Figure II.11 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de section 3b	44
Figure III-1: schématisation de l'élément avant et après déformation.....	46
Figure III-2: Cinématique de la poutre de Bernoulli.....	47
Figure III-3 : Élément fini à 2 nœuds et 6 d.d.l.....	51
Figure III-4: Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko.....	54
Figure III-5 Élément fini poutre à 2 nœuds.....	55
Figure III-6: Un élément fini poutre soumis à un chargement.....	58
FigureIII-7: Organigramme de calcul adapté de la procédure PASAPAS de CASTEM	63
Figure III.8 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de Vecchio et Emara.....	65
Figure III.9 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de MAZARS.....	67

Liste des tableaux

Tableau 1: propriétés matérielles de la section de poutre OG3 [19].....	39
Tableau 2: propriétés matérielles de la section de poutre 3a [20].....	41
Tableau 3 : propriétés matérielles de la section de poutre 3b [20].....	43
Tableau 4 : propriétés matérielles de la poutre Vecchio et Emara [21].....	64
Tableau 5 : propriétés matérielles de la poutre MAZARS[36].....	66

Introduction général

Dans les constructions civiles et industrielles, les éléments structuraux en béton armé se présentent sous diverses formes : les poutres, les poteaux, les dalles et les voiles.

Dans ce domaine, l'intérêt des ingénieurs concepteurs porte sur l'application des techniques adéquates garantissant la durabilité et le bon fonctionnement des ouvrages bâtis. Et pour y parvenir, il leur est indispensable de prédire le comportement réel des différents éléments constitutifs, et de comprendre leurs réponses respectives sous divers modes de sollicitations. Cela pouvant être assuré par l'utilisation d'une modélisation numérique, considérée comme un processus de création tendant à idéaliser la représentation du comportement réel des structures. Ceci représente une étape essentielle de l'analyse structurale, permettant l'adoption de modèles optimaux capable de fournir une précision suffisante dans la prédiction du comportement réel d'une structure.

Le traitement par la méthode des éléments finis des structures, conduit d'une façon générale à une formulation discrétisée, cette méthode est largement utilisée dans la modélisation des structures en béton armé, béton précontraint et béton de fibres ; elle est induite dans l'analyse en tenant compte des différents effets de non-linéarités dans le comportement matériels et structural des éléments, la résolution de ces systèmes s'effectue la plus part du temps en utilisant des procédures itératives.

En littérature, on rencontre deux types d'approches pour la modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé.

- L'approche locale : Elle consiste à modéliser la structure étudiée par des éléments finis plans ou tridimensionnels et d'évaluer finement les champs de contraintes, de déplacements et de déformations par l'utilisation de lois de comportement locales multidimensionnelles des matériaux constitutifs. Cette approche permet une analyse fine des phénomènes non linéaires tels que l'interaction acier-béton et la fissuration mais elle est coûteuse.
- L'approche globale : Elle consiste à utiliser des éléments finis poutres. Elle est bien adaptée à l'analyse et à la simulation des ossatures en béton armé, constituées de poutres et poteaux. Cette dernière approche permet la modélisation des phénomènes non linéaires en utilisant des lois de comportement uniaxiales. Elle constitue le cadre de la présente étude.

L'objectif principal est de développer un outil de modélisation permettant la simulation numérique du comportement non linéaire, en flexion, d'un élément ou d'une ossature complète constituée d'éléments de types poutres.

La présente étude est structurée comme suit :

Introduction générale

- Le chapitre I : débute par une revue bibliographique sur le comportement non linéaire des structures en béton armé et présente, ensuite, les différents phénomènes liés à cette non-linéarité avec une synthèse sur les caractéristiques et le comportement des matériaux utilisés.
- Le chapitre II : on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément de poutre en béton armé. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre d'une section et organigramme général de calcul. Ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire des sections de poutre en béton armé, soumises à la flexion composée et à l'effort tranchant.
- Le chapitre III : est consacré au calcul non linéaire d'une poutre par l'approche des éléments finis, on se basant sur deux méthodes de résolution non linéaire dont nous présentons l'examen de la validation du modèle de calcul. Pour cela l'analyse est portée sur les poutres testées de Vecchio et Emara et MAZARS.
- Enfin, une conclusion générale termine ce travail, où nous présentons quelques remarques et perspectives pour des travaux futures.

Chapitre I : Etude bibliographique

Introduction

Apparu à la fin de 19^e siècle, le béton armé est le matériau le plus utilisé dans le domaine du bâtiment et du génie civil. Il est obtenu par l'association de deux matériaux différents mais complémentaires : le béton et l'acier. L'idée de cette association est de palier l'insuffisance de résistance à la traction du béton en noyant dans celui-ci des armatures en aciers.

I.1. Historique du béton armé

Afin de modéliser les structures en béton armé et représenter leurs comportements d'une façon plus réaliste, plusieurs chercheurs ont développé différentes méthodes d'analyse non-linéaires dont la plus utilisée actuellement : la méthode des éléments finis qui fait appel l'outil informatique.

Les débuts de l'analyse non-linéaire remontent à 1968, quant **Nilson [1]** propose une analyse non-linéaire de structure en béton armé en utilisant la méthode des éléments finis.

En 1970, **Franklin [2]** a développé une étude en tenant compte des effets de non-linéarité matérielle, il a utilisé un élément de poutre à 3 degrés de liberté (2 translations et une rotation) basé sur la théorie de premier ordre des déplacements.

En 1974, **Raynouard [3]** a élaboré un modèle du comportement jusqu'à la ruine des structures planes avec une résolution numérique non-linéaire. En 1978, plusieurs recherches théoriques et expérimentales ont été menée à citer : **Grelat [4]** qui a proposé un programme de calcul des ossatures planes en béton armé, en se basant sur le programme parabolique pour le béton tendu, **Gilbert et Warner [5]** ont introduit les effets de la tension stiffening dans l'étude du comportement des dalles et **Fouré [6]** pour ses études expérimentales sur le comportement non linéaire de plusieurs poutres consoles et portiques sous sollicitations cycliques.

En 1984, **Mazars [7]** a mené une étude reposant sur l'application de la mécanique d'endommagement et de rupture des structures en béton armé. Ce travail tient compte de la fissuration du béton et du béton tendu.

Chapitre I : Etude bibliographique

En 1989, **Abou-Ezzi [8]** a utilisé un modèle basé sur la mécanique de l'endommagement afin de rendre compte dans un calcul de structures du comportement non-linéaire du béton.

Tandis qu'en 1990, **Kwak [9]** a introduit la non-linéarité matérielle dans ses travaux sur des structures en appliquant la méthode des éléments finis.

En 1997, **Filippou et Al [10]** ont réalisé plusieurs travaux sur l'analyse non-linéaires des éléments en béton armé sous des charges monotones par la méthode des éléments finis.

En 2000, **Spacone et Al [11]** ont mené une analyse non-linéaire d'un élément poutre à une seule dimension en tenant compte de phénomène d'adhérence acier-béton.

Enfin en 2005, **Ramirez et Raguenu [12]** ont étudié l'effet d'adhérence dans la distribution des fissures dans des éléments en béton armé.

I.2. Aperçu sur le comportement non-linéaire des structures en béton armé

Le comportement des structures en béton armé est linéaire sous faibles chargements de courte durée. Dans ce cas, il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations ou encore entre les charges et les déplacements.

Dans le cas général, ce comportement est non-linéaire, les non-linéarités sont selon leur nature, de deux types différents :

- Les non-linéarités physique ou matérielle ;
- Les non-linéarités géométriques.

I.2.1. Les non-linéarités physiques ou matérielles

Elles sont dues au comportement non-linéaire des matériaux constitutifs, l'acier et le béton, considérés séparément, et également à l'interaction entre ces deux matériaux. Elles sont classées en deux grandes familles : [6]

Chapitre I : Etude bibliographique

I.2.1.1. Les non-linéarités matérielles

Elles sont dues à la non-linéarité entre contrainte et déformation des matériaux. La loi de Hooke n'est, en général, pas valable lorsque les contraintes dans les matériaux approchent la résistance ultime.

I.2.1.2. Les non-linéarités dues aux discontinuités

L'apparition des fissures engendre un comportement non-linéaire car leur propagation dépend du niveau de contrainte dans le matériau. Par ailleurs, les discontinuités qui apparaissent à l'interface acier-béton dû au glissement, engendre également un comportement non-linéaire.

I.2.2. Les non-linéarités géométriques

Elles sont dues aux déformations de la structure qui engendrent des déplacements des points d'applications des forces et des modifications dans leurs directions. L'effet P-Delta est l'un des phénomènes à non-linéarité géométrique qu'on trouve dans les pièces élancées. Il apparaît, alors des sollicitations supplémentaires, dites de second ordre. On parle alors de problèmes de flambement ou d'instabilité. [6]

I.3. Caractéristiques et comportement des matériaux

I.3.1. Le béton

Le béton est un matériau obtenu par un mélange adéquat de granulat (sable, gravier,...), de liant hydraulique (ciment) et d'eau.

Il présente une bonne résistance en compression, de l'ordre de 20 à 40 MPA pour un béton ordinaire. Par contre, son comportement est fragile vis-à-vis de la traction.

I.3.1.1. Comportement en compression

Les relations qui lient les contraintes aux déformations des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge t quelconque, on admet un comportement élastique non linéaire qui sera décrit par la loi de SARGIN[13]. L'allure générale de la courbe contrainte déformation est donnée par le diagramme représenté par la figure présenté ci-dessous.

Chapitre I : Etude bibliographique

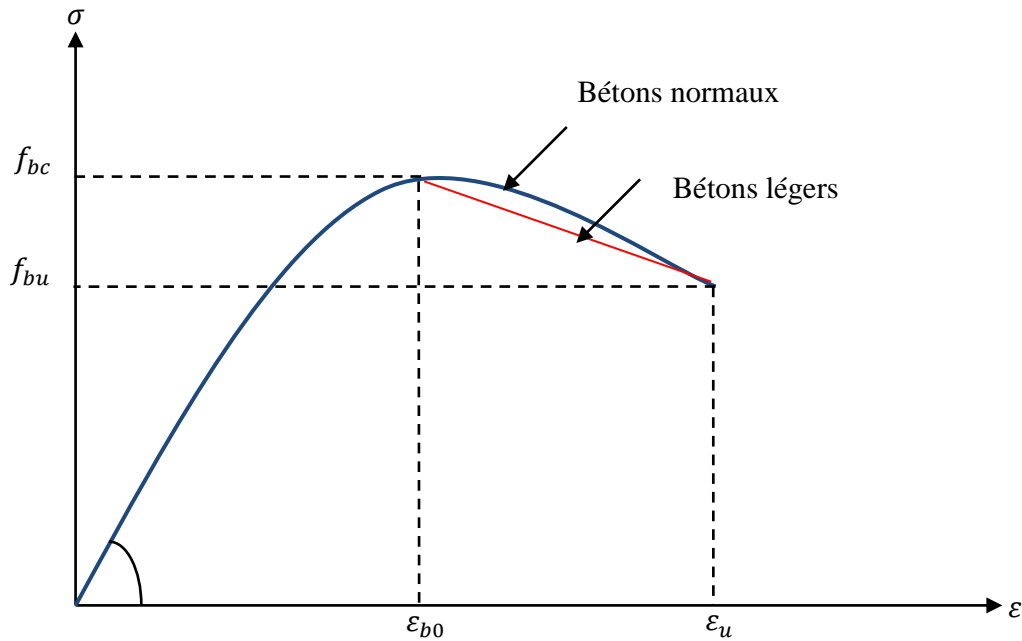


Figure I.1: Courbe contrainte- déformation d'un essai de compression (Loi de SARGIN [13]).

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = f_{cj} \frac{K_b \bar{\varepsilon} + (\hat{K}_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (K_b - 2) \varepsilon + \hat{K}_b \bar{\varepsilon}^2}$$

avec $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ et K_b ajuste la branche ascendante de la courbe et il est donné par :

$$K_b = \frac{E_{b0} \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

• Le paramètre \hat{K}_b ajuste la branche descendante de la courbe et il est donné par :

$$\hat{K}_b = K_b - 1 \quad \text{Pour les bétons normaux.}$$

$\hat{K}_b = 0$ Pour les bétons légers (on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile (béton léger),

$\hat{K}_b = 1$ On obtient au contraire des courbes avec une branche descendante assez douce qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile.

Chapitre I : Etude bibliographique

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j ,

ε_0 : Déformation de pic correspondante à f_{cj}

E_{b0} : Module élastique du béton à l'origine.

Dans les calculs réglementaires, lorsque le calcul précis de la déformation n'est pas nécessaire, on utilise une loi conventionnelle (Loi parabole rectangle [14]) présentant une partie parabolique un palier plastique au-delà de la valeur 2.10^{-3} .

La contrainte est alors supposée constante $\sigma = \frac{f_c}{\gamma_c}$ et ce, jusqu'à une déformation limite

$$\varepsilon_{cu} \text{ égale } 3.5.10^{-3}$$

$$\varepsilon_{c0} = 2.10^{-3}$$

$$\varepsilon_{cu} = 3.5.10^{-3}$$

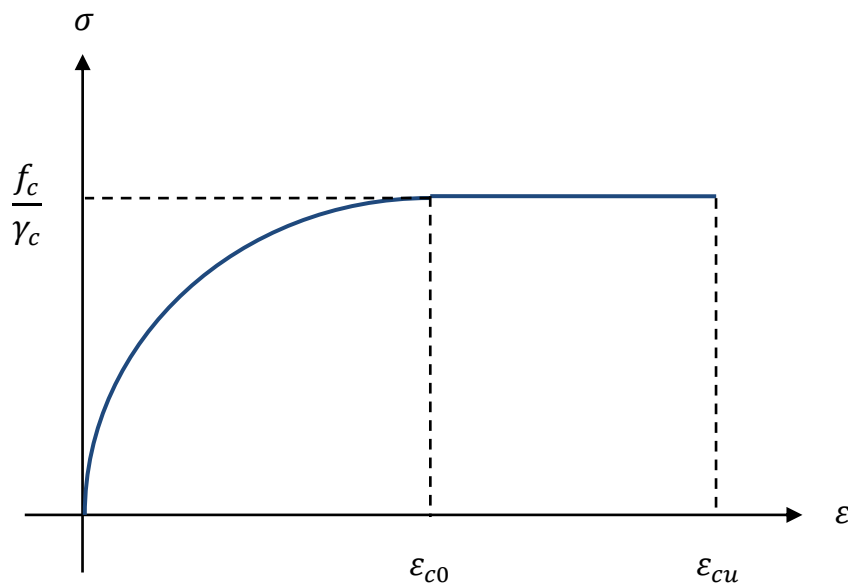


Figure I-2 : Loi parabole rectangle [14]

γ_c : Coefficient de sécurité

Le module de déformation longitudinale tangent à l'origine est donnée par :

$$E_{b0} = \frac{2f_c}{\gamma_c \varepsilon_{c0}}$$

Cette expression conduit à des valeurs généralement inférieures aux valeurs réelles du module.

Chapitre I : Etude bibliographique

I.3.1.2. Béton en traction

Le béton est un matériau fragile, il présente une faible résistance à la traction de l'ordre de $1/10^{\text{ème}}$ de sa résistance en compression.

Dans les calculs les plus usuels en béton armé, la résistance du béton à la traction, ainsi que la contribution du béton tendu entre les fissures sont négligées. Par contre, pour représenter la déformabilité moyenne d'un élément fissuré, le béton tendu entre les fissures contribue à la rigidité de l'élément. La prise en compte de cet effet permet :

Une meilleure appréciation du comportement en service vis à vis des états limites de déformations (flèches, ouverture des fissures);

Dans la schématisation adoptée, une section représente une certaine longueur d'élément, qui comportera plusieurs fissures. Il convient donc de lui attribuer un comportement moyen représentatif de l'élément fissuré.

Pour représenter ce comportement moyen, nous affecterons à l'ensemble des fibres du béton tendu d'une section, un module élastique fictif E_{bt} variable au cours du chargement. La zone tendue aura donc, une répartition de contraintes triangulaires.

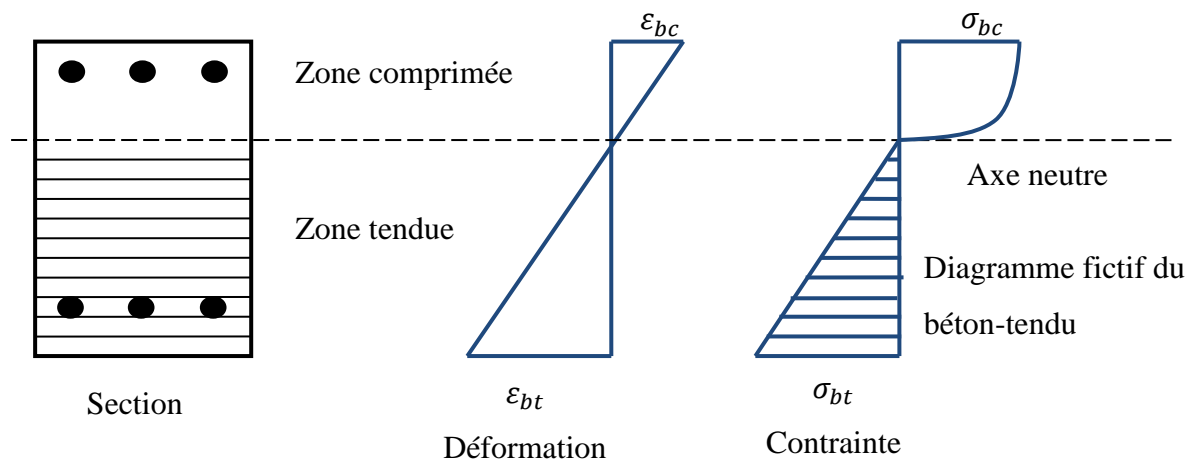
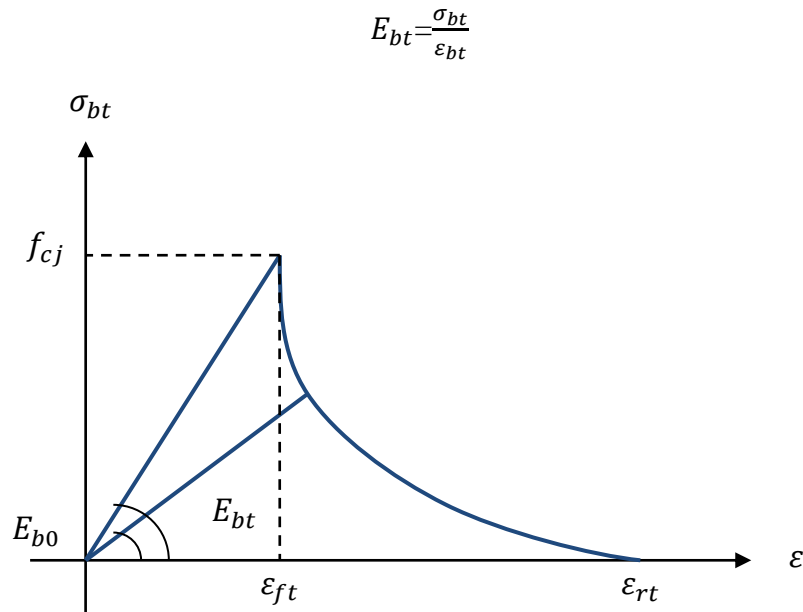


Figure I-3: Réparation fictive des contraintes pour le béton tendu

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module d'Young E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu.

Chapitre I : Etude bibliographique

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît selon une loi parabolique. On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone de poutre Tel que :



FigureI-4: Diagramme contrainte-déformation de la fibre la plus tendue [15]

f_{tj} : Résistance à la traction du béton à l'âge j,

E_{b0} : Module élastique du béton à l'origine.

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant f_{tj}

ε_{rt} : Déformation correspondante à la plastification de l'acier le plus tendu.

Si $|\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft}$ $\sigma_{bt} = E_{b0} \varepsilon_{bt}$

Si $\varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{rt}$ fissuration avec participation du béton tendu

$$\sigma_{bt} = - \frac{f_{tj}(\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2}$$

$|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt}$ Si fissuration sans participation du béton tendu

$\sigma_{bt} = 0$

$$\sigma_{bt} = - \frac{f_{tj}(\varepsilon_{bt} - \eta_2)^2}{(\eta_2 - \eta_1)}$$

Chapitre I : Etude bibliographique

$|\varepsilon_{bt}| > \eta_2$: Fissuration sans participation de béton tendu

$$\sigma_{bt}=0$$

I.3.2. Aciers

L'acier est utilisé dans le béton armé afin de compenser la faiblesse du béton à reprendre les efforts de traction. Il est habituellement considéré que les armatures ne sont sollicitées qu'après la fissuration du béton. Elles présentent une importante ductilité après l'atteinte de la limite élastique. La loi contrainte déformation est supposée identique en traction et en compression sous chargement monotone. On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

I.3.2.1. Aciers naturels

- Loi de comportement élasto-plastique avec raffermissement

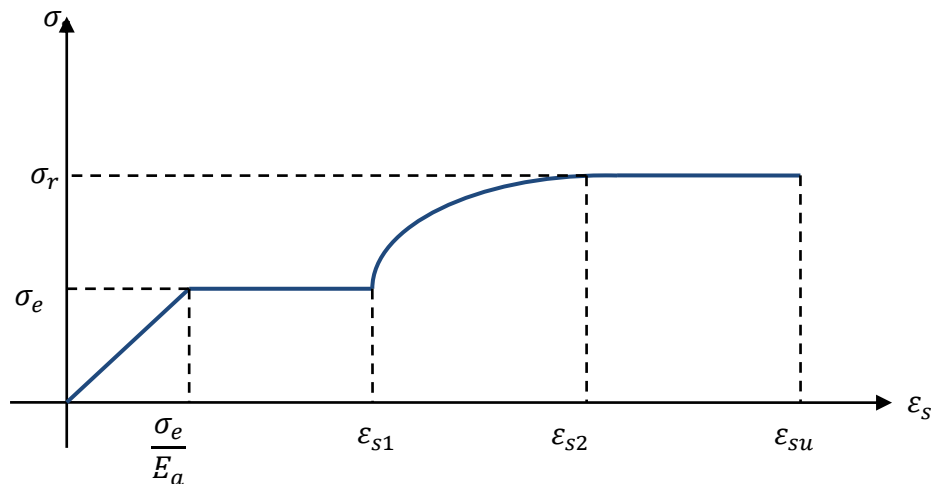


Figure I-5 : Diagramme contrainte déformation d'un acier

$$\sigma_s = E_a * \varepsilon_s \quad \text{pour } 0 < \varepsilon_s < \frac{\sigma_e}{E_a}$$

$$\sigma_s = \sigma_e \quad \text{pour } \frac{\sigma_e}{E_a} < \varepsilon_s < \varepsilon_{s1}$$

$$\sigma_s = \sigma_e + (\sigma_r - \sigma_e) \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \quad \text{pour } \varepsilon_{s1} < \varepsilon_s < \varepsilon_{s2}$$

$$\sigma_s = \sigma_r \quad \text{pour } \varepsilon_s > \varepsilon_{s2}$$

ε_{s1} : désigne la déformation correspondant à la fin du palier plastique ;

Chapitre I : Etude bibliographique

ε_{s2} : désigne la déformation correspondant à la fin du raffermissement ;

ε_{su} : désigne la déformation de rupture ;

σ_r : Contrainte de rupture ;

σ_e : Limite d'élasticité à 2 ‰ ;

E_a : Module d'élasticité longitudinal

Pour des calculs aux états limites de résistance où l'évolution précise des déformations n'est pas nécessaire, on adopte une loi élastique parfaite

- Loi de comportement élasto-plastique parfaite

Adoptée pour les calculs aux états limites de résistance où l'évolution précise des déformations n'est pas nécessaire.

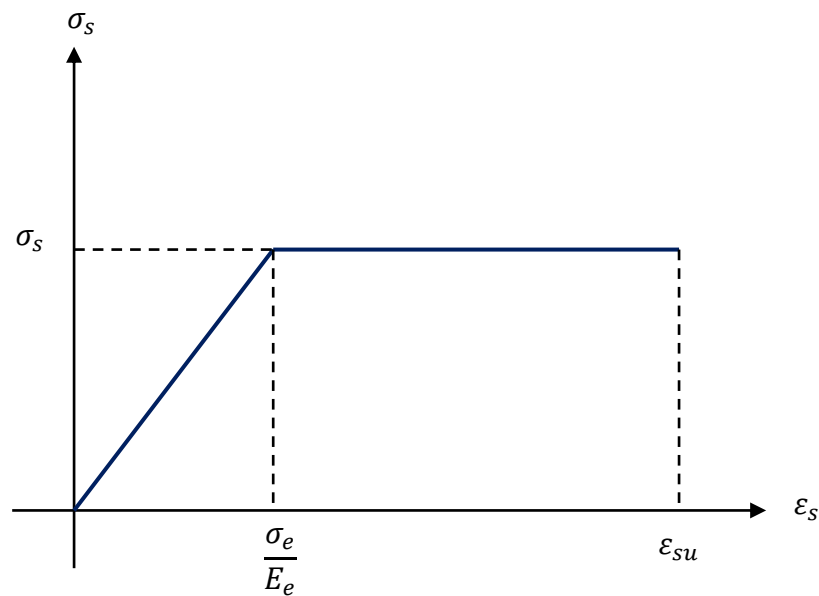


Figure I-6 : Diagramme contrainte déformation de l'acier naturel

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_a * \varepsilon_s && \text{pour } 0 < \varepsilon_s < \frac{\sigma_e}{E_a} \\ \sigma_s &= \sigma_e && \text{pour } \frac{\sigma_e}{E_a} < \varepsilon_s < \varepsilon_{su} \end{aligned}$$

Chapitre I : Etude bibliographique

I.3.2.2. Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par le BAEL qui supposent un comportement

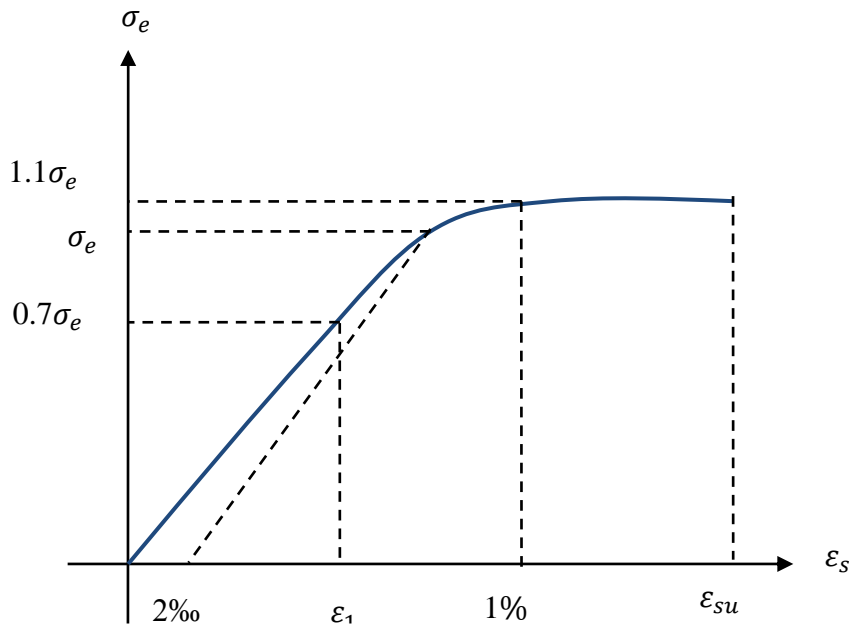


Figure I-7 : Diagramme contrainte-déformation d'un acier écrouis.

linéaire élastique jusqu'à 70% de la limite élastique. Au-delà, on adopte une courbe de cinquième degré, pour les déformations supérieures à 1% la contrainte reste constante jusqu'à la déformation ultime.

$$\sigma_s = E_a * \epsilon_s \quad \text{pour } 0 < \sigma_s < 0.7\sigma_e$$

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0.7 \right)^5 \quad \text{pour } 0.7\sigma_e < \sigma_s < 1.1\sigma_e$$

$$\sigma_s = 1.1\sigma_e \quad \text{pour } \epsilon_s > 0.01$$

I.3.3. Le béton armé

Le principe du béton armé est de combiner le béton et l'acier de façon que :

- Les efforts de compression soient absorbés par le béton (et éventuellement par l'acier)
- Les efforts de traction soient absorbés par l'acier

L'association acier-béton est rendue possible, grâce à :

Chapitre I : Etude bibliographique

- L'adhérence acier béton, permettant la transmission des efforts entre les deux matériaux.
- L'analogie des coefficients de dilatation thermique très voisins (de l'ordre de $12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$).
- L'absence de réaction chimique nuisibles entre la pâte de ciment et l'acier . Par ailleurs, le béton enrobant l'acier le protège de la corrosion.

1.3.3.1. Observation expérimentales du comportement du béton armé

- **La fissuration**

Considérons une poutre en béton armé sur deux appuis simples, soumises à une flexion 4 points (voir figure I-8) [16].

En faisant accroître les charges **p** et en observant le comportement expérimental de la poutre, on constate que :

-Sous faible chargement, le béton n'est pas fissuré.

-Dans un deuxième temps, des fissures verticales de flexion apparaissent, en fibres inférieures dans la zone du moment maximal et des fissures inclinées d'effort tranchant se forment au niveau des appuis.

-Avec l'accroissement du chargement, les fissures de flexion deviennent plus nombreuses et plus importantes et les fissures d'effort tranchant deviennent plus inclinées et progressent vers la face supérieure.

-A la rupture, la fissuration devient très importante et la poutre se transforme en un système de blocs de béton fissurés, dont l'équilibre est assuré par leurs réactions mutuelles et par celles des armatures qui le relie.

En fonction de l'élançement de la poutre, de la résistance du béton, du pourcentage et de la nature du ferrailage, la rupture peut survenir :

Soit par ouverture excessive des fissures de flexion (poutre faiblement ferrillée en flexion).

Chapitre I : Etude bibliographique

Soit par écrasement transversale du béton (armatures transversales insuffisantes).

Soit par destruction de la liaison acier-béton (adhérence insuffisante)

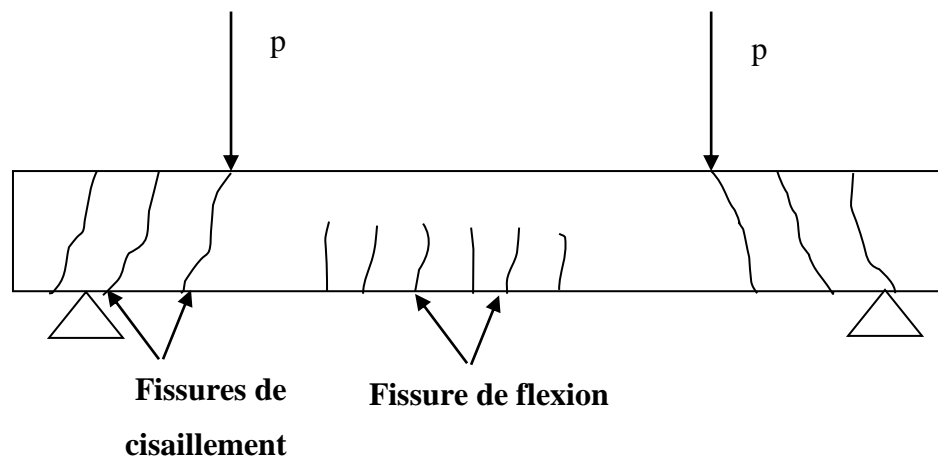


Figure I-8: schématisation d'une poutre fissurée soumise à deux charges concentrées p

- L'adhérence acier-béton

Généralement, dans les structures en béton armé, les efforts sont appliqués directement sur le béton. Ces efforts sont transmis aux armatures d'acier grâce au phénomène d'adhérence entre les armatures d'acier et le béton.

La capacité d'adhérence d'une barre en acier au béton est mesurée par un essai d'arrachement [12].

Une barre d'acier est moulée dans un cube en béton : la barre est ensuite tendue par une machine de traction à l'une de ses extrémités (figure I-9).

Chapitre I : Etude bibliographique

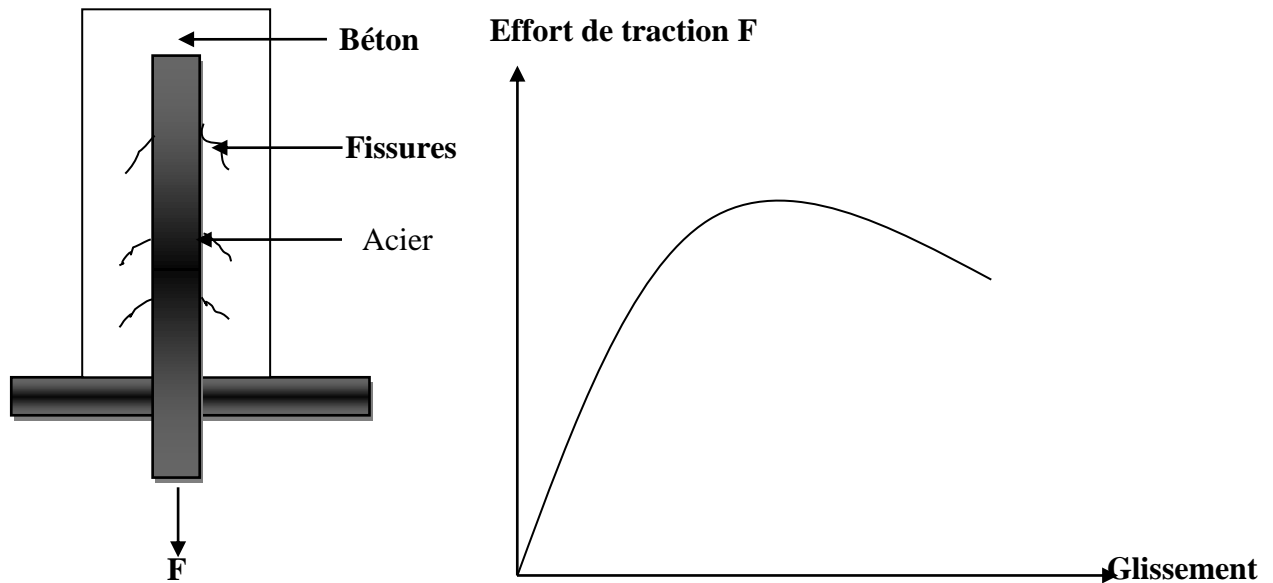


Figure I-9: comportement d'une barre d'acier soumise à un essai d'arrachement

Cet essai montre que l'adhérence n'est pas due uniquement à un phénomène de collage entre les deux matériaux, car elle subsiste même à des déplacements (glissement) notables. Il s'agit en fait d'un phénomène de frottement.

L'adhérence est favorisée par :

- L'état de surface et la forme de la barre d'acier : l'adhérence est améliorée lorsque la barre possède des nervures en saillies ou lorsque sa surface est rugueuse [12].
- La qualité du béton d'enrobage : l'adhérence croît avec la résistance en compression du béton, c'est-à-dire avec le dosage et la classe du ciment et aussi par les conditions de vibration (lors du coulage) qui influent sur la capacité.
- La résistance à la traction du béton.

Chapitre I : Etude bibliographique

I.4. Paramètres influençant le comportement d'une poutre en béton armé vis-à-vis de l'effort Tranchant

De nombreux facteurs influencent le comportement des éléments en béton armé vis-à-vis de l'effort tranchant, qui le rend complexe car la rupture varie en fonction de la charge appliquée, de la présence ou non d'armature transversale, des dimensions et géométrie de la poutre, de l'adhérence acier/béton, de la résistance du béton ainsi que de celle de l'acier.

I.4.1 Influence des dimensions de la poutre sur les résultats des essais (effet d'échelle)

De manière générale, plus le rapport l/h (l : longueur, h : largeur) augmente plus la résistance au cisaillement de la poutre en béton armé diminue. Cela est particulièrement vrai si la poutre n'a pas d'acier transversal [17].

L'effet d'échelle a été étudié par plusieurs chercheurs qui ont mené des essais sur des poutres en béton armé, parmi ces essais on peut citer :

I.4.1.1 Essais de LEONHARD et WALTHER [18]

Ces essais ont porté sur deux séries de poutres D et C avec des conditions de ferrailage ainsi que des dimensions des poutres différentes. D'après les résultats des essais ils ont constaté que :

-Sur les plus grandes poutres les fissures étaient plus larges, et il était possible de les observer plus tôt.

-Conformément au programme d'essai, toutes les poutres des deux séries se sont rompues par cisaillement. Peu avant la rupture il se produisait une fissure horizontale au niveau des armatures principales, allant du commencement de la fissure oblique jusqu'à l'extrémité de la poutre.

I.4.1.2. Essais de BHAL [18]

Après avoir constaté que les essais précédents avaient été effectués sur des poutres de hauteur trop petite, BHAL sous la direction de LEONARD a adopté des

Chapitre I : Etude bibliographique

poutres dont la hauteur $30\text{cm} \leq h \leq 120\text{cm}$, largeur $b=24\text{cm}$ et les barres de même diamètre $\varnothing 24$, sur une série de quatre poutres.

BHAL a constaté que :

-Les fissures dues à la flexion et atteignant l'axe neutre on observe des fissures courtes secondaires, ces fissures s'étaient stabilisées peu après leur ouverture et l'augmentation de la charge n'a pas produit leur cheminement.

-les fissures obliques se sont développées à partir des fissures extrêmes dues à la flexion et l'ouverture de ces fissures changeant d'une façon fondamentale le comportement d'une poutre

-les fissures dues à la flexion au centre de la travée ne se prolongeaient plus et les déformations ultérieures de la poutre jusqu'à la rupture se concentraient au-dessus de la fissure oblique. Dans les essais de BHAL, seul la plus petite poutre a atteint la charge de service calculée à la flexion, les autres rompues par cisaillement avant la charge de service calculée. La rupture brutale et immédiate après l'ouverture de la fissure oblique principale à poussé BACH d'examiné également l'influence de la variation de la hauteur sur la résistance au cisaillement des poutres par des étriers verticaux ($\varnothing 8\text{mm}$) sur quatre poutre identique à celle qu'il a étudié précédent. D'après les résultats des essais, il a conclu que :

-une résistance presque complète à la flexion des poutres pour une hauteur $h=30$ et $h=60\text{cm}$, et la rupture se traduit par l'écrasement du béton au dessus de la fissure oblique principale.

-pour poutres de hauteur $h=90$ et $h=120\text{cm}$ l'effondrement se manifestait après la rupture des étriers traversant la fissure oblique principale.

-dans les poutres munies d'une armature transversale la hauteur de la poutre influence la capacité portante dans une mesure très petite et négligeable.

I.4.2. Influence des armatures transversale [18]

I.4.2.1. Essais de BACH et GRAF

Chapitre I : Etude bibliographique

Le but des essais réalisé par BACH et GRAF était d'obtenir des indications sur l'efficacité de l'armature longitudinale et des étriers qui sont résumé comme suit :

- Premier type d'essais :

Les essais ont été réalisés sur des poutres à une travée, en forme de T, armées par des barres longitudinales suffisamment puissante (pour que la rupture ne se manifeste pas dans la section ou le moment est max mais dans la zone de l'action simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant), et par des étriers différemment répartis et avec des diamètres différentes.

L'analyse des essais conduit à la conclusion que des étriers peu espacés produisent une augmentation de la capacité portante beaucoup plus grande que des étriers forts très espacés.

- Deuxième type d'essais

Le deuxième type d'essais est fait sur quatre séries de poutres en forme de T,

Les résultats tirés de ces essais montrent que les étriers augmentent la capacité portante de façon considérable. L'influence des étriers est plus grande en utilisant un ancrage courbe des armatures principales sur l'appui.

I.4.2.2. Essais de MORETTO [18]

Ces essais sont réalisés sur des poutres en béton armé, en faisant varier les paramètre suivant :

-ferraillage longitudinal.

-le nombre et l'inclinaison des étriers.

-les étriers étaient soudés aux armatures longitudinales supérieurs et inférieures.

D'après les essais il résulte que :

-la capacité portante est meilleure dans le cas des étriers inclinés.

-le soudage des étriers aux barres longitudinales augmente d'environ 20% la capacité portante de la zone de cisaillement.

Chapitre I : Etude bibliographique

I.4.3. Influence de l'élancement de cisaillement sur la capacité portante d'une poutre en béton armé

L'influence du rapport ℓ/h (ℓ : distance entre appuis, h : la hauteur de poutre) sur la valeur des contraintes de cisaillement de rupture σ_{max} est examinée par plusieurs chercheurs, dans on peut citer les essais réalisés par LEONHARDT et WALTHER [18], sur des poutres rectangulaires de travées différentes avec armature et section transversale constante pour deux séries de poutres :

- séries I : poutres soumises à deux charges concentrées.
- séries II : poutres soumises à une charge uniformément répartie.

D'après les résultats des essais, LEONHARDT et WALTHER ont constaté que :
-l'élancement est inversement proportionnel aux valeurs de T_u et de τ_{max} concernant la série I, (L'effort tranchant extrême T_u et également la contrainte τ_{max} sont observés dans la poutre la plus courte).

-Pour les poutres de la série (II), la valeur des contraintes de cisaillement de rupture dépend considérablement du rapport ℓ/h et que cette valeur est maximale pour la valeur minimale du rapport ℓ/h .

-En comparant les résultats des essais des poutres des deux séries I et II, il semble que les valeurs minimales des contraintes trouvées dans les poutres des travées maximales sous une charge uniforme sont supérieures de 40% environ à celles qui apparaissent dans les poutres chargées par deux forces concentrées.

I.5. Exemples d'application

Introduction

Plusieurs exemples, tirés de la littérature, sont traités et les résultats des calculs confrontés aux résultats expérimentaux. On considère d'abord des exemples relatifs au comportement (Moment Courbure) d'une section quelconque en béton armé soumise à la flexion simple ou composé.

Chapitre I : Etude bibliographique

I.5.1 Exemples sections

I.5.1.1. Exemple de la section OG3 du CEBTP [19]

Il s'agit d'une section de poutre en béton armé, munie d'un pourcentage modéré d'armatures (1,2%), de telle sorte que la rupture soit atteinte en premier lieu par plastification des aciers. La section transversale est rectangulaire doublement armé, soumise à la flexion simple. (figure I-10)

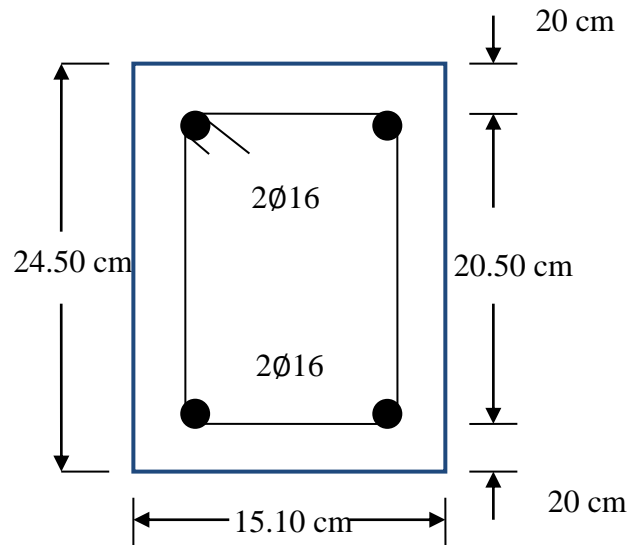


Figure I-10 : Données géométriques de la section [19]

I.5.1.2. Exemple de la section 3a de Zdenek P. Bazant and Byung H. Oh [20]

Il s'agit d'une section de poutre en béton armé, La section transversale est rectangulaire simplement armée soumise à une charge concentrée à mi travée (flexion simple) (figure I-11).

Chapitre I : Etude bibliographique

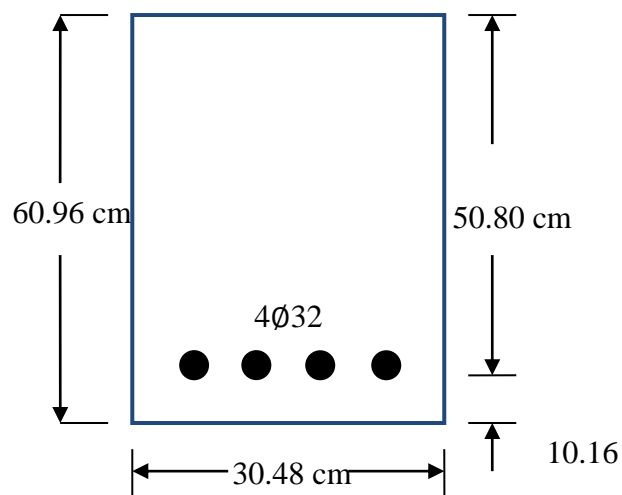


Figure I-11: Données géométriques de la section [20]

I.5.1.3. Exemple de la section 3b de Zdenek P .Bazant and Byung H.Oh [20]

Il s'agit d'une poutre en béton armé, La section transversale est rectangulaire doublement armé (renforcée), soumise à une charge concentrée à mi travée (flexion simple) (figure I-12).

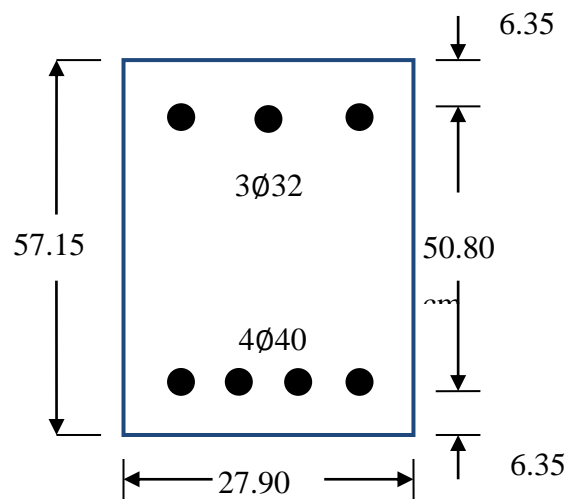


Figure I-12: Données géométriques de la section

Chapitre I : Etude bibliographique

I.5.2. Exemples poutres en béton armé

I.5.2.1. Poutre de Vecchio et Emará [21]

Il s'agit d'une poutre en béton armé complètement fixée (encastée) à ses extrémités, qui a fait l'objet d'une étude théorique menée par F.J Vecchio et M.B. Emará . Cette poutre comporte une travée de 3100mm de longueur et soumise à un effort concentré à mi-portée. Les données géométriques de la poutre et du ferrailage sont indiquées sur la figure I-13:

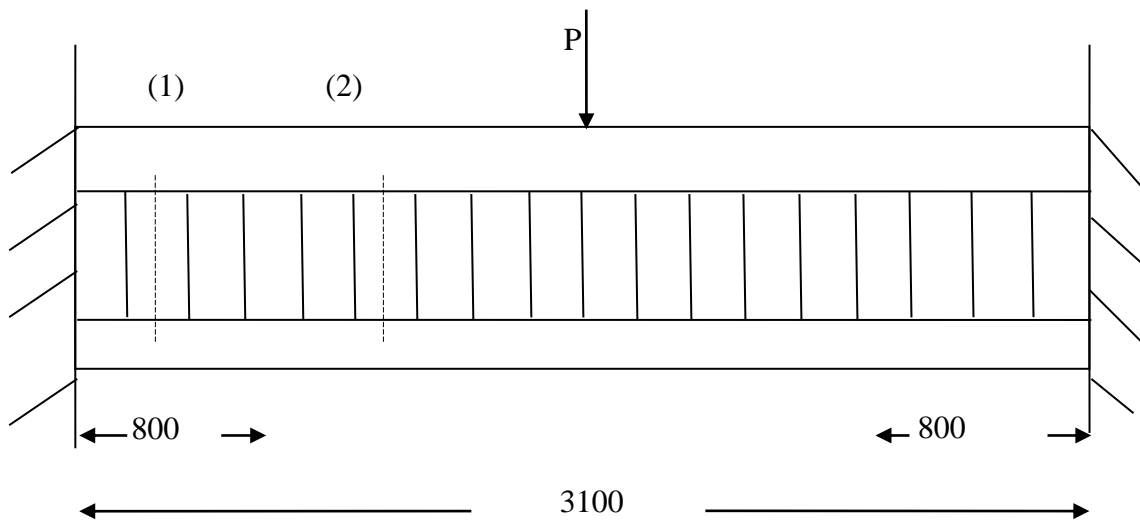


Figure I-13: Données géométriques de la poutre [21]

Chapitre I : Etude bibliographique

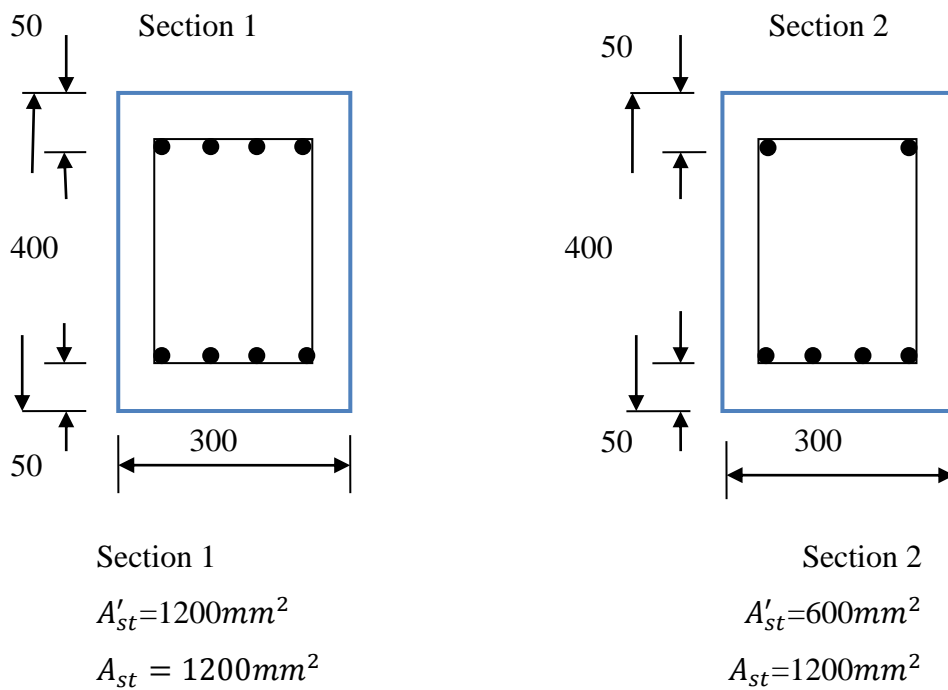


Figure I-14 : Données géométriques de la section de poutre

I.5.2.2. Poutre MAZARS [7]

Cet essai porte sur une poutre isostatique testée en flexion trois points.

La géométrie de la poutre et de la section transversale est représentée dans la figure I.15 :

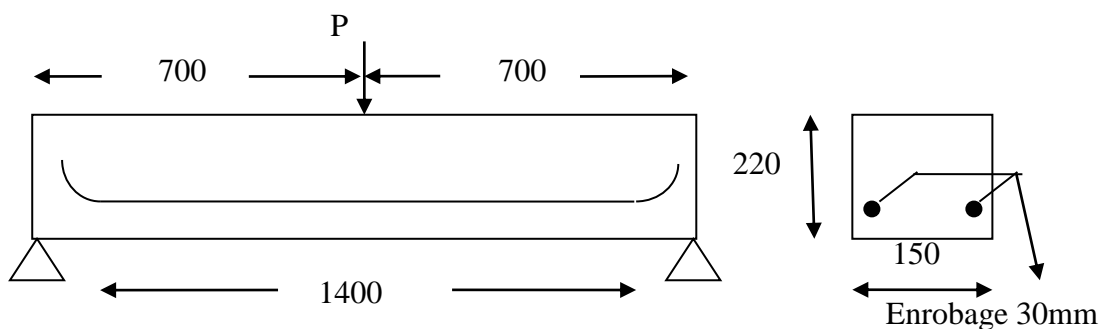


Figure I-15 : Données géométriques de la poutre de MAZARS [7]

Chapitre I : Etude bibliographique

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de connaître en détail les paramètres régissant le comportement des structures en béton armé. Les non-linéarités observées dans les structures ont pour origine des phénomènes géométriques et mécaniques (apparition des fissures, flambement, glissement des barres dans le béton...etc.). La simulation du comportement des poutres nous oblige à tenir compte de ces non-linéarités. Dans le cas des poutres, certaines hypothèses sont posées pour tenir compte de l'effort tranchant dans les sections planes. Mais le calcul de ces dernières est une étape fondamentale dans la simulation du comportement des poutres et qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

Introduction

Les matériaux constituant une structure en béton armé, obéissent en général à des lois de comportement non linéaires. Ceci induit une non-linéarité dans le comportement global de la structure.

L'élément de base dans le calcul des structures élancées est une section plane. Tous les efforts internes définis dans une structure seront réduits à ceux d'une section plane sous forme d'un torseur de contrainte déterminé par : un effort normal, un moment fléchissant et un effort tranchant. De même, les déformations seront définies dans une section par une déformation normale, une courbure et une déformation de cisaillement. Cette dernière est exprimée sous la forme d'une rotation additionnelle qui sera étudiée au chapitre suivant.

II.1. Le calcul béton armé

Pour pouvoir soumettre au calcul le matériau complexe que représente le béton armé, on a conservé les hypothèses de base utilisées en Résistance des Matériaux pour les corps homogènes et on a ajouté des hypothèses propres au béton armé.

Les hypothèses principales de la Résistance des Matériaux sont les suivantes :

La section du corps étudié reste constante, ou ses variations sont faibles et continues lorsqu'on passe d'une section à une section voisine ;

Les dimensions de la section sont faibles par rapport à la longueur de la pièce;

Le rayon de courbure de la ligne moyenne (lieu des centres de gravité des sections) est grand par rapport aux dimensions transversales de la section;

Tant que la limite d'élasticité du matériau constituant le corps n'est pas dépassée, toute section plane transversale, normale à la ligne moyenne avant déformation, reste, après déformation sous l'action des efforts appliqués, plane, identique à elle-même (même dimensions) et normale à la ligne moyenne déformée (Hypothèse de Navier-Bernoulli) ;

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

Tant que la limite d'élasticité du matériau constituant le corps n'est pas dépassée, la contrainte en un point quelconque de la section est proportionnelle à la déformation unitaire qui se produit en ce point (loi de Hooke).

II.1.1. Flexion simple

Une section droite (S) d'une pièce est soumise à la flexion simple si les forces appliquées à la pièce, y compris les réactions d'appuis, situées à gauche de cette section peuvent être réduites, par rapport à un point quelconque de la section, à un couple de moment M et une force T située dans le plan de la section. Par suite de la symétrie envisagée, le couple et la force T se trouveront dans le plan de symétrie de la section.

M , somme des moments par rapport à un point quelconque de la section des forces situées à gauche de cette section, s'appelle le moment de flexion.

T , résultante dans le plan de la section des forces situées à gauche de cette section, s'appelle l'effort tranchant

II.1.2. Flexion composée

Une section droite (S) d'une pièce est soumise à la flexion composée si les forces appliquées à la pièce, y compris les réactions d'appuis, situées à gauche de cette section peuvent être réduites, par rapport à un point O quelconque de la section, à un couple de moment M et à une force R passant par O mais non située dans le plan de la section. Par suite de la symétrie envisagée, le couple et la force R se trouveront dans le plan de symétrie de la section.

La force R peut être décomposée en :

Une force N , perpendiculaire au plan de la section. N s'appelle l'effort normal;

Une force T , située dans le plan de la section. T s'appelle l'effort tranchant.

Une section (S) sera donc à calculer à la flexion composée dans les deux cas suivant :

Si elle est soumise à un moment M et à un effort normal N , rapportées à un point O quelconque de la section, point qu'il y aura toujours lieu de préciser;

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

Si elle est soumise à un effort normal N excentré, puisque le système constitué par M et N appliqués au point O est équivalent au système constitué par N agissant à une distance e de O déterminée par $e = \frac{M}{N}$

On voit que la flexion simple, définie ci-dessus, n'est qu'un cas particuliers de la flexion composée pour lequel $N=0$.

En flexion composée, suivant le sens de N (traction ou compression) et suivant les valeurs de M et de N , les contraintes extrêmes dans la section peuvent être de mêmes signes contraires. Il faut donc envisager les cas suivants :

- La section est entièrement tendue ;
- La section est entièrement comprimée ;
- La section est partiellement comprimée (ou partiellement tendu, ce qui est équivalent).

Dans ce qui suit nous considérons que le moment M est positif, c'est-à-dire qu'il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette hypothèse ne diminue en rien la généralité des résultats qui seront établis car le sens du moment n'intervient que pour fixer la position de la fibre la plus comprimée (ou la moins tendue), c'est-à-dire pour déterminer si elle se trouve à la partie inférieure ou à la partie supérieure de la section. La position de cette fibre pouvant être fixée immédiatement dans chaque cas particuliers, on peut toujours supposer, dans les calculs, qu'elle se trouve à la partie supérieure de la section.

II.2. Méthodes de résolution non-linéaire

II.2.1. La méthode de Newton-Raphson

Elle est basée sur la matrice de rigidité tangente qui est recalculée après chaque itération. Le mode de convergence de cette méthode est quadratique, elle nécessite donc

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

peu d'itérations.

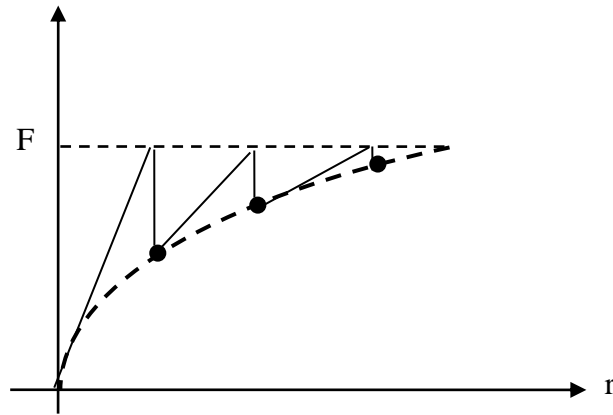


Figure II-1 : Méthode de Newton-Raphson

II.2.2. La méthode de Newton Raphson modifiée

Dans ce cas la matrice de rigidité tangente est calculée, une seule fois au début de l'incrément de charge, pour la première itération. Cette méthode exige un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence et arriver à la solution car le mode de convergence est linéaire.

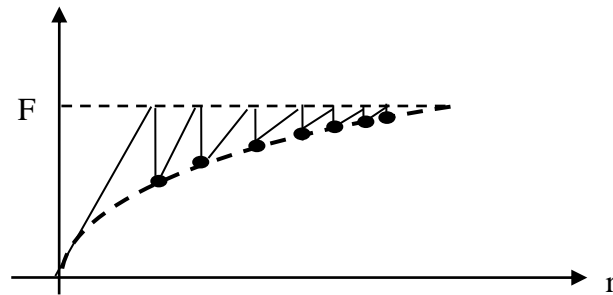


Figure II-2 : Méthode de Newton-Raphson modifiée

II.2.3. La méthode de la rigidité sécante

Elle est mieux adaptée pour les cas des structures ayant un comportement adoucissant. C'est bien le cas du béton tendu fissuré dans les structures en béton armé. C'est cette dernière méthode qui sera adoptée dans le cadre de notre étude.

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

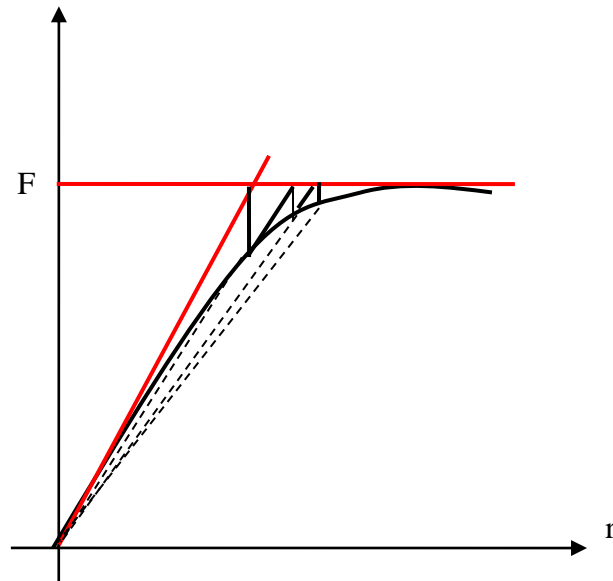


Figure II-3 : Méthode de la sécante

II.3. Hypothèses de calcul

On s'intéresse au calcul et à la modélisation du comportement d'une section plane en béton armé, soumise à la flexion composée.

On admet les hypothèses de calcul suivantes :

- Flexion plane d'une section à plan moyen, chargée dans son plan et symétrique par rapport à l'axe GY passant par son centre géométrique.
- Conservation de la section plane après déformation.
- Absence de glissement relatif entre le béton et l'acier.
- L'influence de l'effort tranchant est négligée.

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

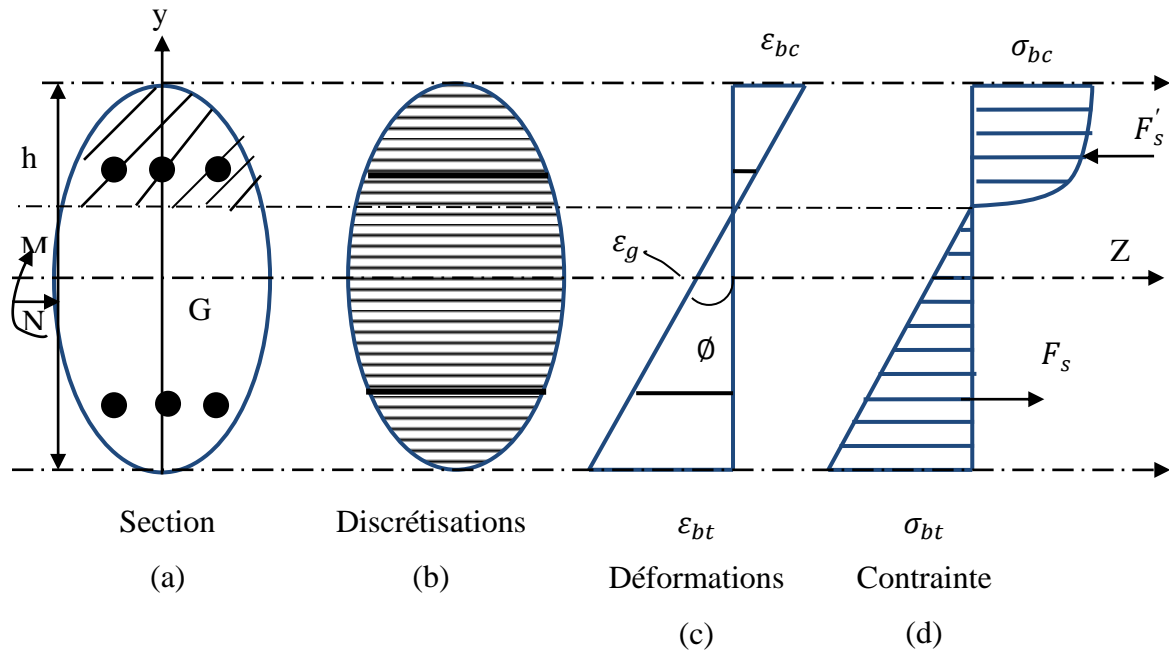


Figure II-4 : Discretisation de la section et diagrammes des contraintes et déformations

II.4. Relations Efforts-Déformations dans la section

On considère une section en béton armé, en équilibre sous un moment fléchissant M et un effort normal N agissant au centre géométrique G de la section.

En tenant compte des hypothèses de calcul, les déformations dans cette section sont définies à l'aide de deux paramètres : la déformation longitudinale ε_g au niveau du centre géométrique G de la section et la courbure ϕ .

La déformation longitudinale $\varepsilon(y)$, d'une fibre horizontale située à l'ordonnée y par rapport à l'axe Gz est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon(y) = \varepsilon_G + \phi \cdot y \tag{II-1}$$

Avec :

σ_{bc} : Contrainte de la fibre de béton la plus comprimée,

σ_{bt} : Contrainte de la fibre de béton la plus tendue,

ε_{bc} : Déformation de la fibre de béton la plus comprimée,

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

ε_{bt} : Déformation de la fibre de béton la plus tendue,

ε_y : Déformation d'une fibre située à une hauteur y , à partir du centre de gravité de la section.

La contrainte normale au niveau de la fibre considérée est donnée par :

$$\sigma(y) = f(\varepsilon(y)) \quad \text{II-2}$$

La fonction $f(\varepsilon)$ est définie par la loi de comportement σ - ε du matériau constituant la fibre considérée.

Pour une section en béton armé, les lois de comportement des matériaux béton et acier sont présentées au chapitre précédent

Les efforts équilibrés par la section sont donnés par :

$$N = \int_s \sigma(y) ds \quad \text{II-3}$$

$$M = \int_s \sigma(y) y ds$$

Ce qui nous donne :

$$N = \int_s E_s \cdot \varepsilon(y) ds \quad \text{II-4}$$

$$M = \int_s E_s \cdot \varepsilon(y) y ds$$

Où E_s désigné le module sécant, on fonction de $\varepsilon(y)$ figure II-5 :

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

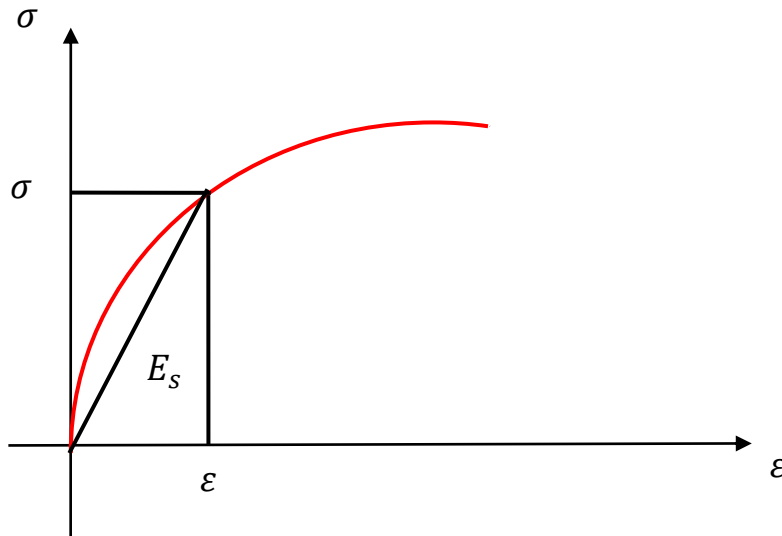


Figure II-5 : comportement contrainte-déformation en présentant le module de sécant.

En tenant compte de (II.1), on obtient :

$$N = \int_s E_s (\varepsilon_g + \varphi \cdot y) ds \quad \text{II-5}$$

$$M = \int_s E_s (\varepsilon_g + \varphi \cdot y) y ds$$

Ou encore :

$$N = \left(\int_s E_s \cdot ds \right) \cdot \varepsilon_g + \left(\int_s E_s \cdot y \cdot ds \right) \cdot \varphi \quad \text{II-6}$$

$$M = \left(\int_s E_s \cdot y \cdot ds \right) \cdot \varepsilon_g + \left(\int_s E_s \cdot y^2 \cdot ds \right) \cdot \varphi$$

En posant

$$\overline{EA} = \int_s E_s \cdot ds : \text{Rigidité à l'effort normal (rigidité de membrane),}$$

$$\overline{ES} = \int_s E_s \cdot y \cdot ds : \text{rigidité due au couplage flexion - effort normal} \quad \text{II-7}$$

$$\overline{EI} = \int_s E_s \cdot y^2 \cdot ds : \text{rigidité à la flexion.}$$

La relation entre les efforts et les déformations dans la section s'écrit alors :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_g + \overline{ES} \cdot \varphi \quad \text{II-8}$$

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_g + \overline{EI} \cdot \varphi$$

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

Ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \varphi \end{Bmatrix} = [K_s] \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad \text{II-9}$$

$[K_s]$ est la matrice de rigidité sécante de la section,

Inversant la relation 0-9 s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \varphi \end{Bmatrix} = [K^{-1}] \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad \text{II-10}$$

Avec :

$$[K^{-1}] = \frac{1}{\det[K_s]} \begin{bmatrix} \overline{EI} & -\overline{ES} \\ -\overline{ES} & \overline{EA} \end{bmatrix} \quad \text{II-11}$$

La matrice $[K_s]$ est inversible si $\det[K_s] = \overline{EA} \cdot \overline{EI} - \overline{ES} \cdot \overline{ES} \neq 0$

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, le module E_s est indépendant de $\varepsilon(y)$ et pour une section homogène, les rigidités données par II-12 deviennent :

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= E_s \int_s ds = E_s \cdot A \\ \overline{ES} &= E_s \int_s y \cdot ds = E_s \cdot S \\ \overline{EI} &= E_s \int_s y^2 \cdot ds = E_s \cdot I \end{aligned} \quad \text{II-12}$$

Où :

$$\begin{aligned} A &= \int_s ds && : \text{aire de la section} \\ S &= \int_s y \cdot ds && : \text{moment statique de la section /Gz} \\ I &= \int_s y^2 \cdot ds && : \text{moment d'inertie de la section /Gz} \end{aligned}$$

Dans ce cas, connaissant les efforts N et M , il est possible de calculer les déformations ε_g et φ par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \varphi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_s(AI - S^2)} \begin{bmatrix} I & -S \\ -S & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad \text{II-13}$$

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

Dans le cas d'un comportement non linéaire, le module sécant dépend de ε_g .

La détermination des déformations à partir des efforts n'est pas directe. Elle s'effectue par un calcul itératif non linéaire

II.5. Calcul pratique de la matrice de rigidité de la section

Les composantes de la matrice de rigidité [Ks] sont déterminées en effectuant une discrétisation de la section Figure II-6 ceci en tenant compte du béton et des armatures d'acier.

L'expression II-13 est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\overline{EA} &= \sum_{i=1}^{nb} E_{bi} \cdot \Delta S_i + \sum_{j=1}^{na} E_{aj} \cdot A_j \\ \overline{ES} &= \sum_{i=1}^{nb} E_{bi} \cdot y_{bi} \cdot \Delta S_i + \sum_{j=1}^{na} E_{aj} \cdot y_{aj} \cdot A_j \\ \overline{EI} &= \sum_{i=1}^{nb} E_{bi} \cdot y_{bi}^2 \cdot \Delta S_i + \sum_{j=1}^{na} E_{aj} \cdot y_{aj}^2 \cdot A_j\end{aligned}\quad \text{II-14}$$

nb : nombre de tranches horizontales dans la section du béton

na : nombre de lits d'aciers

E_{bi} : module d'élasticité sécant du béton au niveau de la tranche i

E_{aj} : module d'élasticité sécant de l'acier du lit j

A_j : aire du lit d'acier i

y_{aj} : ordonnée du lit d'acier j/Gz

ΔS_i : aire de la tranche i du béton

Cette aire est donnée par :

$$S_i = b(y_{bi}) \cdot \Delta h_i$$

y_{bi} : ordonnée au niveau du milieu de la tranche de béton i/Gz

$b(y_{bi})$: largeur de la tranche de béton i

Δh_i : hauteur de la tranche de béton

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

II.6. Méthode de résolution non linéaire

En élasticité non linéaire, on peut calculer les efforts (N, M) développés dans la section pour des déformations (ϵ_g, ϕ) données.

Le calcul inverse, c'est-à-dire la détermination des déformations à partir des efforts n'est pas possible par une méthode directe. On doit, dans ce cas, utiliser une méthode de calcul itérative [22].

Initialement, on considère l'état d'équilibre de la section sous de faibles valeurs des efforts N et M. On démarre, alors, les calculs en considérant un comportement élastique linéaire. Dans ce cas les déformations (ϵ_g, ϕ) correspondants sont données par l'expression II-13

Sous un incrément ($\Delta N, \Delta M$) des efforts, l'accroissement des déformations (ϵ_g, ϕ) dans la section est recherché par la méthode des substitutions successives utilisant les matrices de rigidité sécantes [22].

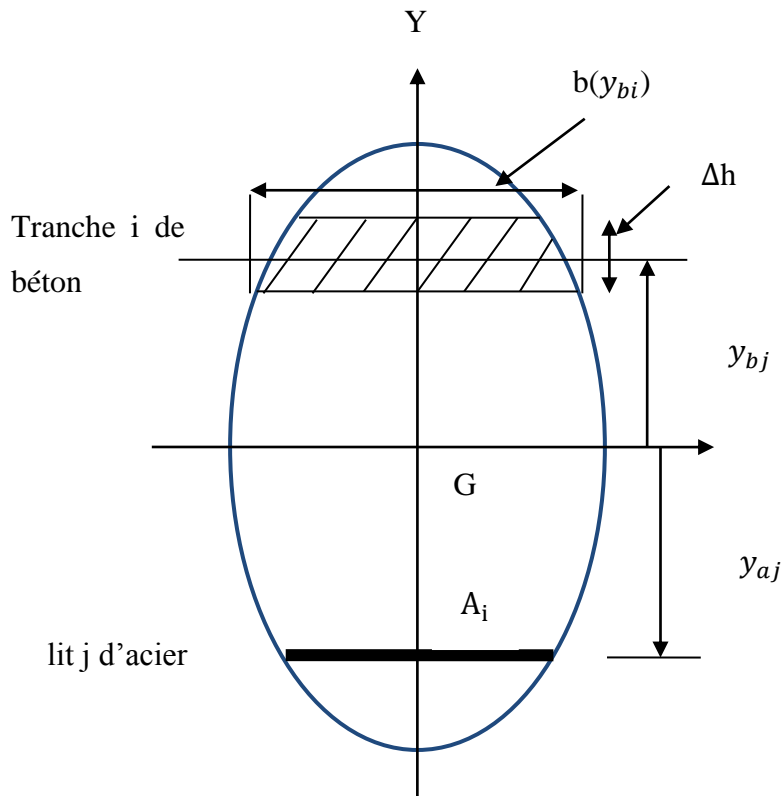


Figure II-6 : Discretisation de la section en tranches horizontales

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

Remarque 1:

L'incrémentation des efforts peut se faire de trois façons :

Incrémentation du moment fléchissant avec un effort normal constant ($\Delta N = 0$).

Incrémentation de l'effort normal avec un moment fléchissant constant ($\Delta M = 0$).

Incrémentation, au même temps, de l'effort normal et du moment fléchissant telle que $e = \Delta N / \Delta M$ soit constant.

Figure II-7 présente le schéma de résolution pour l'obtention de la courbe moment courbure ($M-\phi$) lorsque la section subit une incrémentation du moment fléchissant avec un effort normal constant.

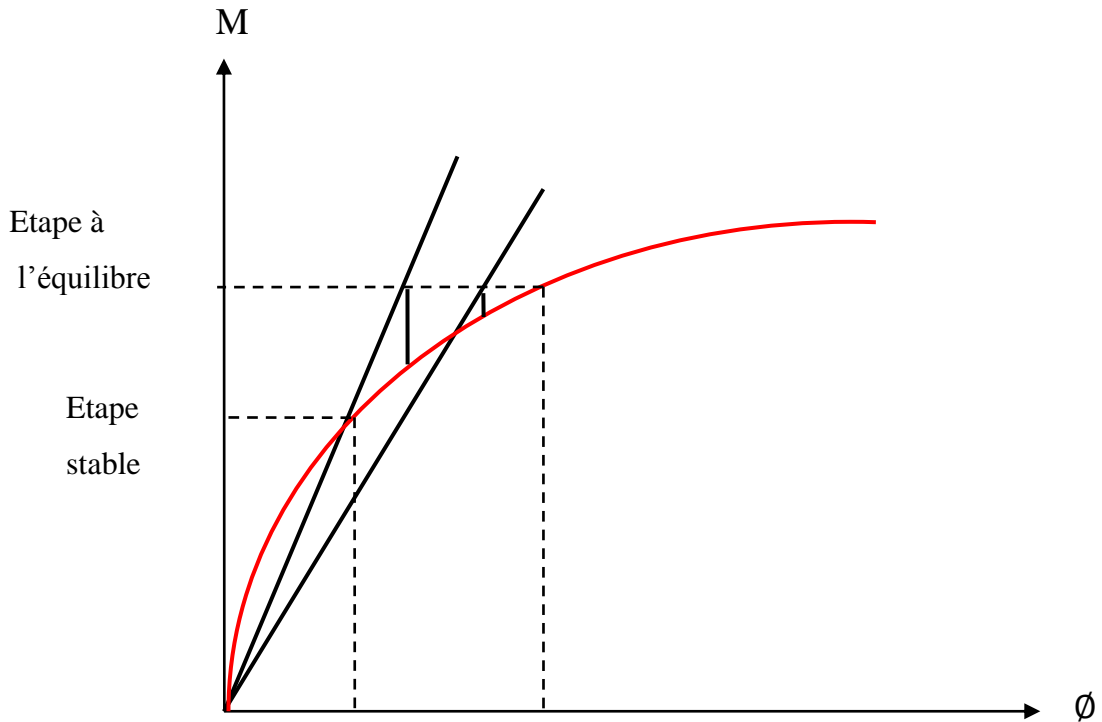


Figure II-7 : Schéma de résolution pour le calcul $M-\phi$ ($N = \text{constant}$).

La méthode de résolution non linéaire s'effectue selon l'algorithme suivant :

1- soit l'étape stable $j-1$, correspondant aux efforts $\langle N, M \rangle^{j-1}$ et les déformations $\langle \varepsilon_g, \phi \rangle^{j-1}$

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

2- Incrémentation des efforts :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^j = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{j-1} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}$$

On démarre le compteur des itérations $i=1$

3- Evaluation de la section matrice de rigidité sécante de la section en fonction de la section de l'étape précédente $j-1$

$$[K_S]^i = [K_S(\varepsilon_g, \phi)^{i-1}]$$

4- Résolution du système d'équilibre

$$[K_S]^i \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \phi \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}^i$$

5- Cumul des déformations

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{Bmatrix}^{i-1} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \phi \end{Bmatrix}^i$$

6- Calcul des efforts équilibrés par la section :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_g \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N_R \\ M_R \end{pmatrix}$$

7- Test de convergence sur les efforts non équilibrés

$$N_R^i - N^j \leq \text{tolérance}$$

$$M_R^i - M^j \leq \text{tolérance}$$

7.1- Si convergence, l'étape j actuelle est stable (équilibrée) ; passer à l'incrément de charge suivant : $j \rightarrow j+1$ et revenir à l'étape (2).

7.3- Si au bout d'un certain nombre d'itérations fixé auparavant, la convergence n'est pas obtenue, la section ne peut être équilibrée et le calcul est arrêté.

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

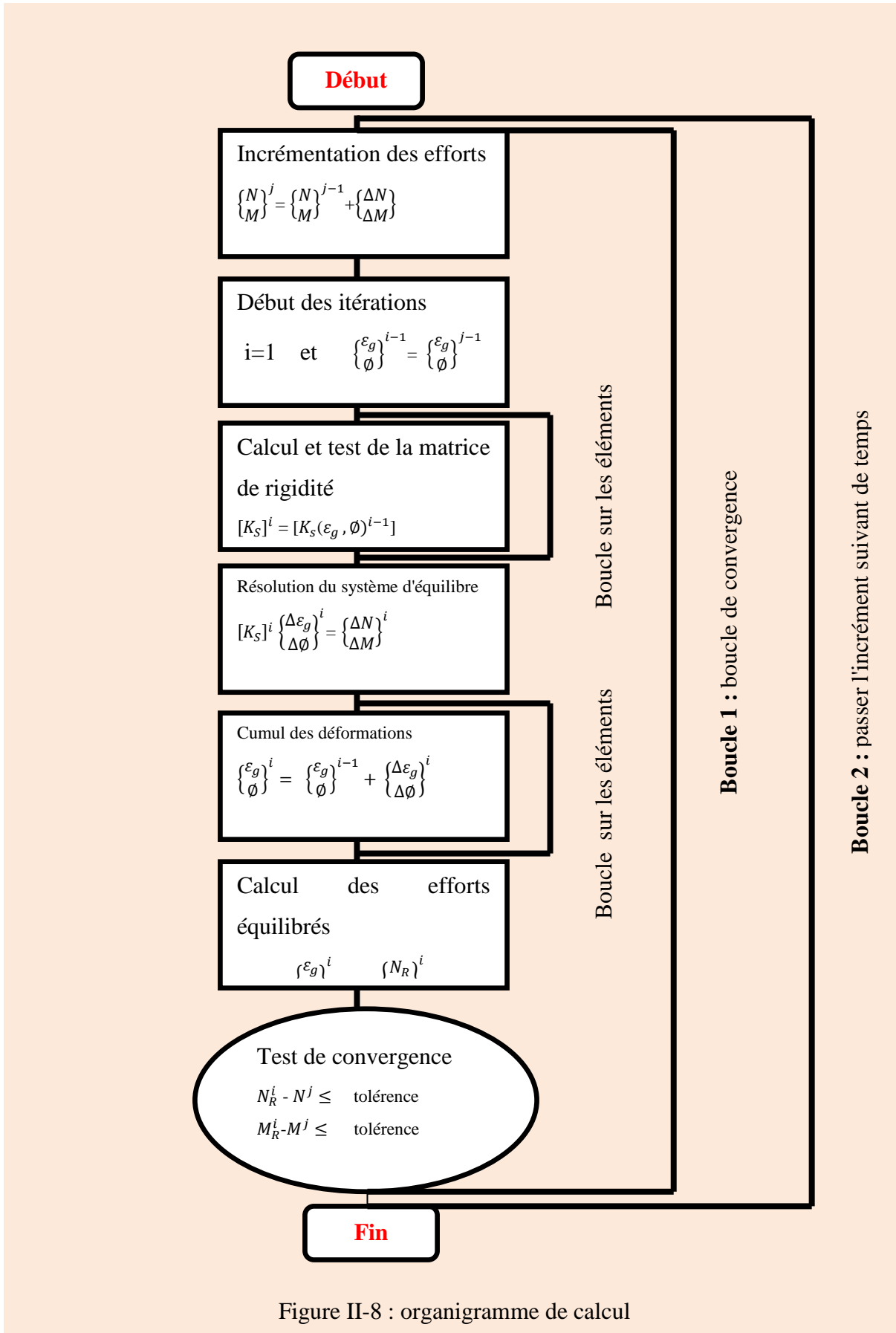


Figure II-8 : organigramme de calcul

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

II.7. Résultats et interprétations

II.7.1 Caractéristiques du béton et de l'acier pour la section OG3 du CEBTP

Caractéristiques du béton		Caractéristiques de l'acier	
f_{bc} : Contrainte en compression (MPa)	52.50	f_e : Contrainte élastique (MPa)	575
f_{bt} : Contrainte en traction (MPa)	3.35	f_r : Contrainte de rupture (MPa)	700
f_{bu} : Contrainte à rupture en compression(MPa)	52.50	ϵ_u : deformation ultime	0.005
e_{psbo} : Déformation correspondant à fbc	1.710^{-3}		
e_{psbu} : Déformation à rupture en compression	$2 \cdot 10^{-3}$		
E : Module d'élasticité (MPa)	39900		

Tableau 1 : propriétés matérielles de la section de poutre OG3 [19]

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

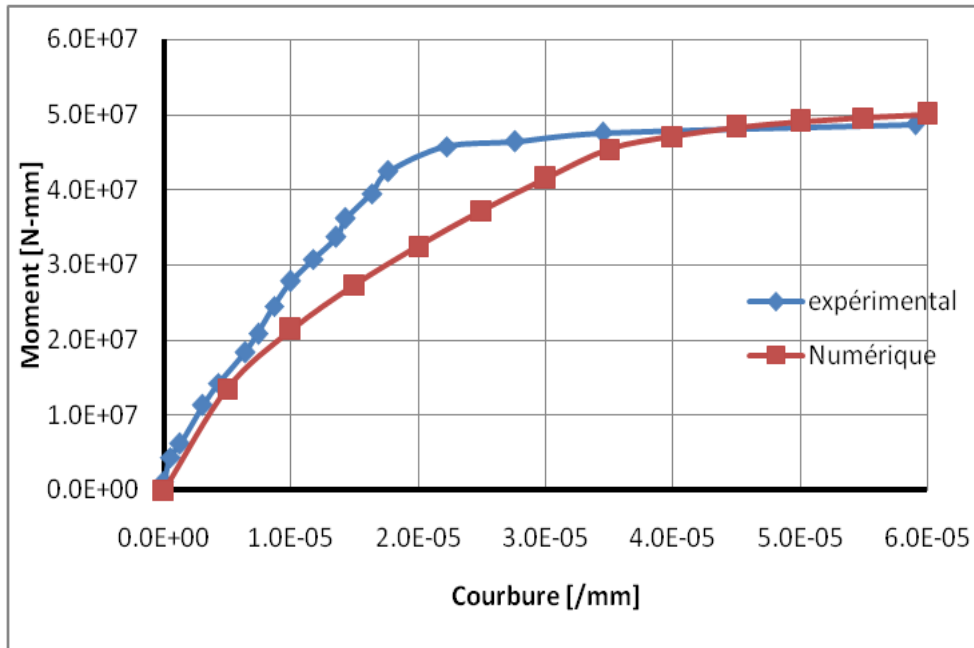


Figure II-9: Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de section OG3 du CEBTP

On constate que le comportement de la section OG3 est bien approché par le calcul dans cette étude. La simulation montre une bonne estimation de moment maximal. La courbure correspondante est un peu surestimée par rapport à la courbe obtenue expérimentalement. Mais la résistance ultime est correctement simulée.

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

II.7.2. Caractéristiques du béton et de l'acier pour la section 3a de Zdenek P. Bazant and Byung H. Oh

Caractéristiques du béton		Caractéristiques de l'acier	
f_{bc} : Contrainte en compression (MPA)	42.818	f_e : Contrainte élastique (MPA)	275.7 6
f_{bt} : Contrainte en traction (MPA)	3.102	f_r : Contrainte de rupture (MPA)	275.8 0
f_{bu} : Contrainte à rupture en compression (MPA)	24.82	ϵ_u : déformation ultime	0.01
e_{psbo} : Déformation correspondant à f_{bc}	$2.1 \cdot 10^{-3}$		
e_{psbu} : Déformation à rupture en compression	$3.5 \cdot 10^{-3}$		
E : Module d'élasticité (MPA)	23577		

Tableau 2 : propriétés matérielles de la section de poutre 3a [20]

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

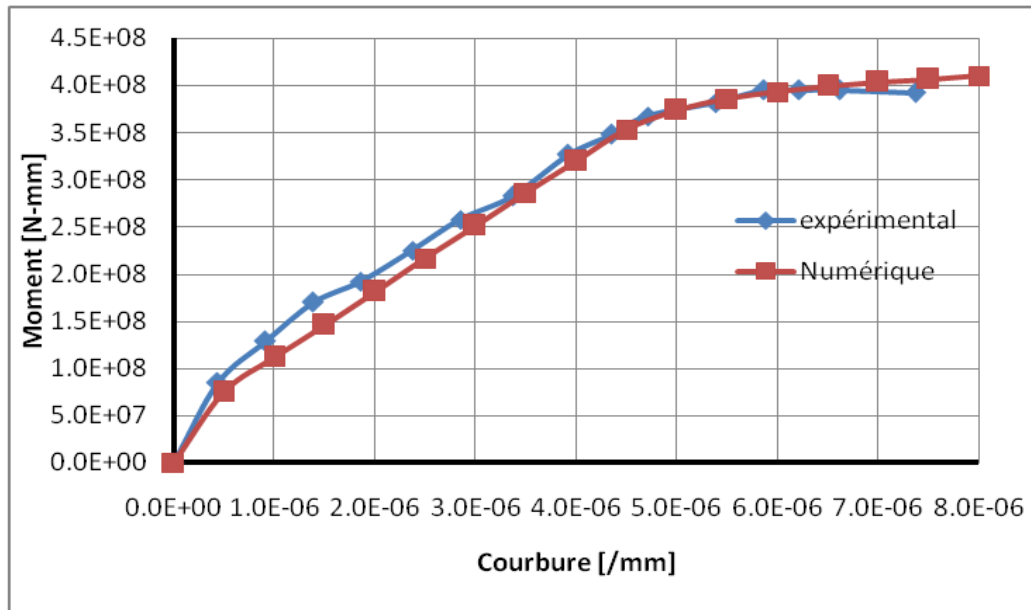


Figure II.10 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de section 3a

On constate que le comportement de la section 3a est bien approché par le calcul dans cette étude. La simulation montre une bonne estimation de moment et également de la courbure maximale correspondante

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

II.7.3. Caractéristiques du béton et de l'acier pour la section 3b de Zdenek P .Bazant and Byung H.Oh [28]

Caractéristiques du béton		Caractéristiques de l'acier	
f_{bc} : Contrainte en compression (MPa)	20.28	f_e : Contrainte élastique (MPa)	275.76
f_{bt} : Contrainte en traction (MPa)	2.83	f_r : Contrainte de rupture (MPa)	275.80
f_{bu} : Contrainte à rupture en compression(MPA) 20.68	20.68	ϵ_u : déformation ultime	0.01
e_{psbo} : Déformation correspondant à f_{bc}	1.910^{-3}		
e_{psbu} : Déformation à rupture en compression	$3.5 \cdot 10^{-3}$		
E : Module d'élasticité (MPa)	23577		

Tableau 3 : propriétés matérielles de la section de poutre 3b [20]

Chapitre II : étude d'une section plane en flexion composée

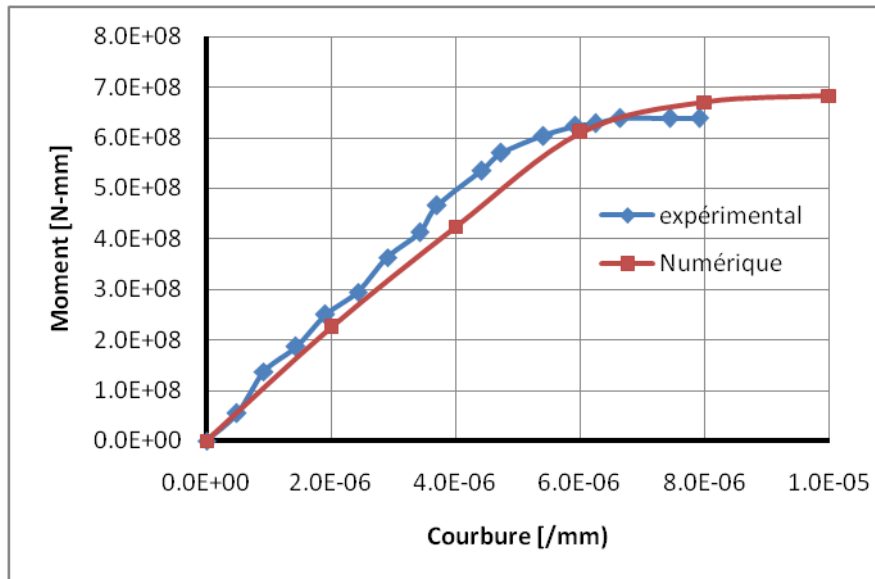


Figure II.11 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de section 3b

On constate que le comportement de la section 3b est bien approché par le calcul dans cette étude. La simulation montre une bonne estimation de moment et également de la courbure maximale correspondante. La courbure numérique est légèrement surestimée.

Conclusion

Le calcul des sections est une étape importante pour le calcul des structures de poutre ; l'intégration des états de déformations des sections soumise à la flexion composée nous permettra de calculer la déformée et déduire le comportement des poutres en béton armé soumise à un chargement croissant. Deux théories ont été développées dans le troisième chapitre pour simuler le comportement d'une poutre en béton armé.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULLI et la théorie de TIMOCHENKO

Introduction

Ce chapitre est consacré à la formulation des poutres de Bernoulli et de Timoshenko. Pour cela on présente les relations caractérisant la théorie des poutres dans un plan. Le calcul des poutres pour la théorie de Bernoulli néglige l'effort de cisaillement (poutre mince), par contre, la théorie de Timoshenko tiens compte de l'influence des déformations de cisaillement transversal (poutre épaisse), qui sont basé sur l'hypothèse des poutres droites (pour définir le champ de déplacement)

Ces deux formulations sont typiquement utilisées pour construire un modèle élément fini poutre pour des calculs non linéaires.

III.1. Théorie de Navier-Bernoulli

On s'intéresse à la modélisation du comportement non-linéaire des structures planes constituées d'éléments structuraux droits (poutres, poteaux, portiques et ossatures planes). En se basant sur la méthode des éléments finis, on présente, dans ce qui suit, une formulation détaillée d'un élément poutre mince.

III.1.1. Hypothèses de base

On s'intéresse à un élément poutre plan orienté selon l'axe longitudinal x et dont les dimensions dans le plan $y-z$ normal à l'axe x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinal (Figure III-1).

On se base sur les hypothèses suivantes :

1. L'axe longitudinal de la poutre est droit ;
2. La section droite est symétrique par rapport au plan $x-z$;
3. Les chargements agissant sur la poutre sont appliqués dans le plan $x-z$;
4. La poutre se déforme selon le plan de symétrie $x-z$ (en membrane, flexion et en cisaillement) ;
5. La poutre transmet des efforts normaux $N_x(x)$ suivant x , les efforts tranchants $T_z(x)$ suivant z et des moments fléchissant $M_y(x)$;

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

6. Les sections planes et droites avant déformation restent planes et orthogonal à la fibre neutre après déformation. Les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées.
7. Les déplacements et les déformations du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformation et déplacements).

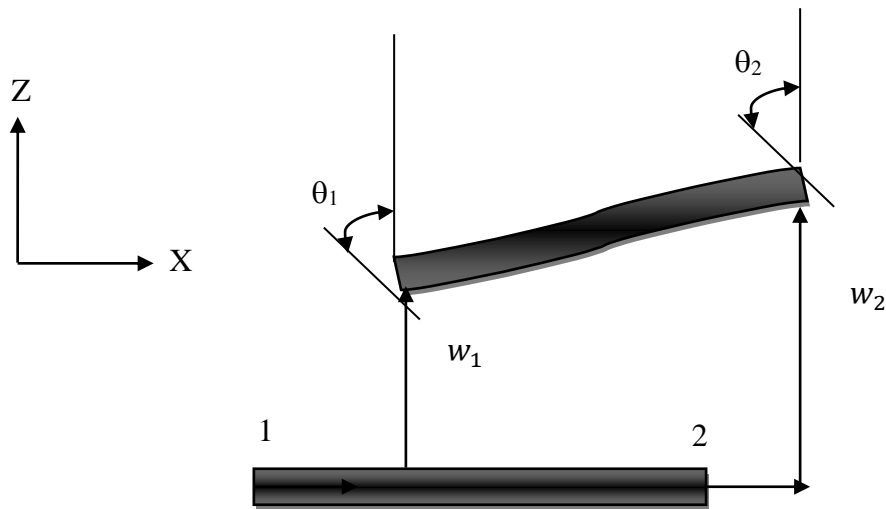


Figure III-1: schématisation de l'élément avant et après déformation

III.1.2. Cinématique

Considérons un tronçon de poutre de la figure III-2 avant et après déformation : soit le point M de coordonnées (x, z) sur la configuration non déformée. Après déformation le point M subit un déplacement axial u selon x et un déplacement transversal w selon z tels que :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\theta(x) \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad \text{III-1}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULLI et la théorie de TIMOCHENKO

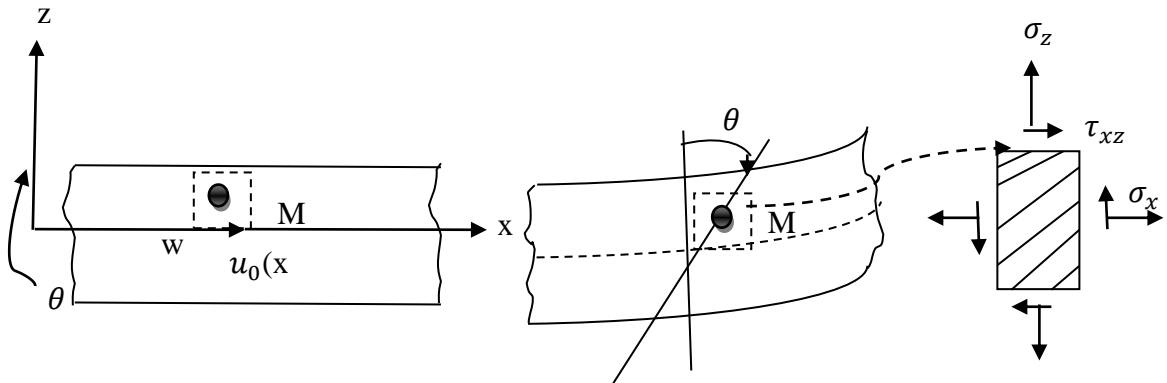


Figure III-2: Cinématique de la poutre de Bernoulli

Où: $u_0(x)$ Le déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la section transversale $w(x)$ d'abscisse x et $\Theta(x)$ est la rotation de la même section tel que :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \quad \text{III-2}$$

ou γ est la rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier-Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement) sont négligées, $\gamma=0$, D'où :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx}$$

La relation (III-1) devient :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) - z \frac{dw}{dx} \\ w(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad \text{III-3}$$

La relation (III-3) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli, valable dans le cas des poutres minces.

III.1.3. Relation contrainte-déformation

Si on considère un état plan de contrainte au point M alors dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire et isotrope :

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\vartheta^2} \begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad \text{III-4}$$

Avec : E : module de Young.

ϑ : Coefficient de poisson.

Dans le cas des poutres, on considère un état de contrainte uni axial, alors

$$\sigma_z = 0 \quad \text{III-5}$$

D'après les relations (I-5) et (I-6), on obtient

$$\varepsilon_z = -\vartheta \varepsilon_x \quad \text{I-6}$$

En remplaçant (I-7) dans (I-5) on obtient :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{III-7}$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\vartheta)}$$

III.1.4. Relation déformations –déplacements :

Selon l'hypothèse précédente, la relation déformations-déplacements est linéaire :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} \quad \text{III-8}$$

En tenant compte de la relation (III-3), on obtient

$$\varepsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad \text{III-9}$$

Ou encore :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z \varnothing \quad \text{III-10}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \\ \varnothing = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \end{cases}$$

ε_{0x} = déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

\varnothing = courbure

III.1.5. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

On considère une poutre mince droite de longueur l, ayant une section transversale de hauteur h et de longueur b(z) variant avec la hauteur

On suppose que la poutre est soumise à un chargement réparti transversal fz et longitudinal fx.

D'après le **principe des travaux virtuels (P.T.V)**, pour toute variation des déplacements et déformations virtuels $\delta \hat{u}$, $\delta \hat{w}$, $\delta \hat{\varepsilon}$, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs :

$$\partial \hat{W}_{int} = \partial \hat{W}_{ext} \quad \text{III-11}$$

Ce qui donne l'expression :

$$\begin{aligned} \int_V \langle \delta \varepsilon_x \rangle \{ \sigma \} dv &= \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx \quad \forall \delta \hat{\varepsilon}, \delta \hat{w}, \text{ et } \delta \hat{u} \\ \int_0^l \int_S \delta \hat{\varepsilon}_x \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \end{aligned} \quad \text{III-12}$$

Or $\delta \varepsilon_x = \delta \hat{\varepsilon}_{x0} + z \delta \hat{\varnothing}$

d'après

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_S (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} + z \delta \hat{\varnothing}) \cdot \sigma_x ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \\ \int_0^l \int_S (\delta \hat{\varepsilon}_{x0} \sigma_x + \delta \hat{\varnothing} \cdot \sigma_x \cdot z) ds dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \quad \text{III-13} \\ \int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_x \int \sigma_x ds + \delta \hat{\varnothing} \int \sigma_x z ds] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_x dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \end{aligned}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

III.1.6. Relation entre efforts et déformation

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est :

$$\begin{aligned}
 N &= N(x) = \int_S \sigma_x ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_x ds \\
 &= \int_S E (\varepsilon_{0X} + z\phi) ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_{0X} ds + \int_S E \cdot z \cdot \phi \cdot ds \\
 &= \varepsilon_{0X} \int_S E ds + \phi \int_S E \cdot z \cdot ds
 \end{aligned}$$

On pose : $\overline{EA} = \int_S E \cdot ds$ = rigidité à l'effort normal (de membrane)

$$\overline{ES} = \int_S E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de l'effort normal s'écrit comme suit :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0X} + \overline{ES} \cdot \phi \quad \text{III-14}$$

De même, le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x, par rapport à l'axe de référence est :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_S \sigma_x \cdot z ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_x \cdot z ds \\
 &= \int_S E (\varepsilon_{0X} + z\phi) z ds \\
 &= \varepsilon_{0X} \int_S E z ds + \phi \int_S E \cdot z^2 \cdot ds
 \end{aligned}$$

On pose : $\overline{EI} = \int_S E \cdot z^2 \cdot ds$ = rigidité à la flexion

$$\overline{ES} = \int_S E \cdot z \cdot ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion}$$

L'expression de moment fléchissant devient :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0X} + \overline{EI} \cdot \phi \quad \text{III-15}$$

Ainsi, dans la section transversale d'abscisse x, la relation entre les efforts et les déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0X} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \text{III-16}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

En tenant compte des relations (III-13) et (III-16), la relation (III-17) peut se réécrire sous la forme :

$$\int_0^l [\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \cdot N + \delta \hat{\varphi} \cdot M] dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\varphi} \rangle \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \text{III-17}$$

$$\int_0^l \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \hat{\varphi} \rangle \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varphi \end{Bmatrix} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \forall \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \forall \delta \hat{\varphi}$$

III.1.7. Modélisation par élément finis et calcul de la matrice de rigidité

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise un élément finis à deux nœuds. Chaque nœud est caractérisé par deux déplacements et une rotation qui constituent les degrés de liberté de l'élément (soit 6 d.d.l) . Ces déplacements sont représentés par un vecteur de dimension 6x1 de la manière suivante :

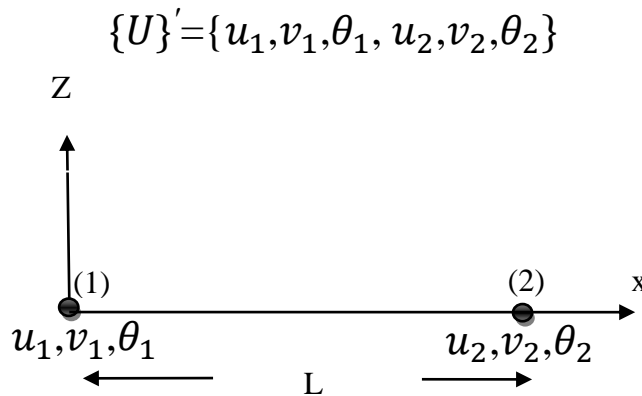


Figure III-3 : Elément fini à 2 nœuds et 6 d.d.l

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$, au niveau de l'axe de référence, est approximé par des fonctions d'interpolations de type Lagrange de degré 1 dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 \quad \text{III-18}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Avec u_1, u_2 les valeurs du déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

$$\text{Avec } \begin{cases} N_1 = (1 - \frac{x}{l}) \\ N_2 = \frac{x}{l} \end{cases}$$

On posant : $\xi = \frac{x}{l}$, l'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = (1 - \xi) \cdot u_1 + \xi \cdot u_2 \quad \text{III-19}$$

Pour le déplacement transversal $w(x)$, on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3 dans la base polynomiale :

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 \theta_3 + N_4 \theta_4 \quad \text{III-20}$$

Les fonctions d'interpolations sont données par :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3 &= l\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \\ N_4 &= 1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \end{aligned} \quad \text{III-21}$$

Avec w_1, w_2 : Les valeurs de déplacement transversal respectivement aux nœuds 1 et 2

θ_1, θ_2 : Les valeurs de la rotation respectivement aux nœuds 1 et 2.

La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par :

$$\varepsilon_{0X} = \frac{du_0(x)}{dx} = \frac{-1}{l} \cdot u_1 + \frac{1}{l} \cdot u_2$$

La rotation $\theta(x)$ est donnée par :

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} = -(N_1'(x) \cdot w_1 + N_2'(x) \cdot w_2 + N_3'(x) \cdot \theta_1 + N_4'(x) \cdot \theta_2)$$

La courbure \emptyset s'écrit sous la forme suivante :

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

$$\phi(x) = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -(N_1''(x) \cdot w_1 + N_2''(x) \cdot w_2 + N_3''(x) \cdot \theta_1 + N_4''(x) \cdot \theta_2)$$

On déduit que :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0X} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}) & (\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}) & 0 & (\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}) & (\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III-22}$$

Ce qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0X} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{u_n\} \quad \text{III-23}$$

A partir de l'expression (I-16) du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^l \langle \delta \hat{u} \rangle^t [B]^t \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{u_n\} dx - \int_0^l \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^l \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \text{III-24}$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}) & (\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}) & 0 & (\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}) & (\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \quad \text{III-25}$$

On déduit l'expression de la matrice de rigidité élémentaire $[k]_e$:

$$[k]_e = \int_0^l [B]^t \cdot [D] \cdot [B] dx \quad \text{III-26}$$

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire donne :

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{symétrie} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad \text{III-27}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Remarque : Les composantes de la matrice de rigidité élémentaire $[k]_e$ sont évaluées en utilisant une intégration numérique.

III.2. Théorie de Timoshenko

La théorie de Timoshenko considère que les sections planes restent planes après la déformation (pas nécessairement perpendiculaires à l'axe moyen). Cette théorie introduit donc une liberté de rotation à la section, appelé angle de distorsion, qui permet de calculer la déformation de cisaillement.

III.2.1. Cinématique

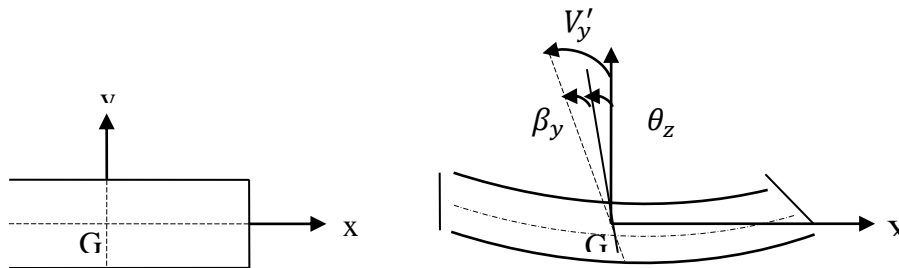


Figure III-4: Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,y) &= \frac{\partial U_x}{\partial x} = U'_x(x) - y\theta'_x(x) \\ \gamma_{xy}(x,y) &= \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = U'_y(x) - \theta_x(x) = \beta_y \neq 0 \end{aligned} \quad \text{III-28}$$

La théorie de Timoshenko permet par conséquent de calculer une déformation de cisaillement constante le long de la section. Ceci n'est évidemment pas conforme avec la distribution parabolique qu'on trouve selon la théorie d'élasticité et ne respecte pas les conditions aux limites. Pour améliorer la performance de l'approche, un coefficient de correction de cisaillement est donc introduit pour le calcul des contraintes.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

III.2.2. Formulations d'éléments finis poutre

Timoshenko

La formulation éléments finis adoptée ici est une formulation en déplacements.

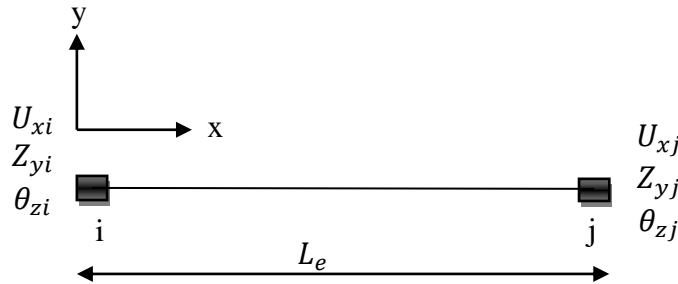


Figure III-5 Élément fini poutre à 2 nœuds

On considère une structure poutre linéique de longueur L discrétisée en n éléments finis

poutres de longueur L_e composées (au minimum) de 2 nœuds i et j . Chaque nœud

possède trois degrés de liberté : un déplacement axial U_x , un déplacement transversal V_y et une rotation θ_z . Les déplacements aux nœuds des éléments sont les inconnues du problème.

III.2.3. Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

Les déplacements virtuels forment des variations des déplacements réels cinématiquement admissibles (i.e. nulles où les conditions aux limites sont appliquées). Dans la suite, les déplacements virtuels sont interpolés par le biais des mêmes fonctions de forme que les déplacements réels (méthode de Galerkin). Ainsi, les déformations virtuelles peuvent se déduire simplement des déplacements virtuels aux nœuds. Le travail virtuel pour une structure poutre Timoshenko de longueur L s'écrit

$$\int_0^L \int_S (\delta \varepsilon_x + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dS dx - w_{externe} = 0 \quad \text{III-29}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

avec $\delta\varepsilon_x$ et $\delta\gamma_{xy}$ les déformations virtuelles calculées à partir des déplacements virtuels et $w_{externe}$ le travail des actions mécaniques extérieurs. on obtient :

$$\int_0^l \int_s (\delta(U'_x - y\theta'_z)\sigma_x + (\delta(U'_y - \theta_z)\tau_{xy})dSdx \quad \text{III-30}$$

avec

δU_x le déplacement axial virtuel, δV_y le déplacement transversal virtuel et $\delta\theta_z$ la rotation virtuelle. Par ailleurs, les définitions suivantes sont adoptées pour les forces généralisées :

$$\begin{array}{lll} F_x = \int_s \sigma_x ds & F_y = \int_s \tau_{xy} ds & M_z = - \int_s y \sigma_x ds \\ \text{Effort normal} & \text{Effort tranchant} & \text{Moment de flexion} \end{array}$$

on a :

$$\int_0^l \left(F_x \frac{d}{dx} \delta U_x + F_y \frac{d}{dx} \delta \beta_y + M_z \frac{d}{dx} \delta \theta_z \right) dx - w_{external} = 0 \quad \text{III-31}$$

avec β_y l'angle de distorsion moyen de la section

$$\beta_y = \frac{dV_y}{dx} - \theta_z = U'_y - \theta_z \quad \text{III-32}$$

III.2.4. Matrices de rigidité

La loi de comportement (élasticité linéaire) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_f & 0 \\ 0 & kG_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{III-33}$$

Par ailleurs:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_s \sigma_x ds = \int_s E_f \varepsilon_x ds = \int_s E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = \int_s E_f ds U'_x - \int_s E_f y ds \theta'_z \\ F_y &= \int_s \tau_{xy} ds = \int_s kG_f \gamma_{xy} ds = \int_s kG_f (\beta_y) ds = \int_s kG_f ds \beta_y \\ M_z &= - \int_s y \sigma_x ds = - \int_s y E_f \varepsilon_x ds = - \int_s y E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \right) ds = - \int_s E_f y ds U'_x + \int_s E_f y^2 ds \theta'_z \end{aligned} \quad \text{III-34}$$

Par conséquent, le vecteur des forces généralisées F_S a la forme suivante :

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_s E_f ds & 0 & -\int_s E_f y ds \\ 0 & \int_s k G_f ds & 0 \\ -\int_s E_f y ds & 0 & \int_s E_f y^2 ds \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} \quad \text{III-35}$$

avec U'_x , β_y , θ'_z les déformations généralisées et K_s la matrice représentant la rigidité de la section, indépendante de la position de l'axe neutre [23]. Enfin, en considérant le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_0^l \delta [U'_x \quad \beta_y \quad \theta'_z] K_s [U'_x \quad \beta_y \quad \theta'_z]^T dx - w_{external} = 0 \quad \text{III-36}$$

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v \\ N_1^\theta & N_2^\theta & N_3^\theta & N_4^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{III-37}$$

où d_e est le vecteur contenant les déplacements nodaux de l'élément e et N la matrice des fonctions de forme dépendant de x (u pour les déplacements et θ pour les rotations). Les déformations généralisées sont calculées comme :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_x \\ U'_y - \theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^\varepsilon & B_2^\varepsilon & B_3^\varepsilon & B_4^\varepsilon & B_5^\varepsilon & B_6^\varepsilon \\ B_1^\gamma & B_2^\gamma & B_3^\gamma & B_4^\gamma & B_5^\gamma & B_6^\gamma \\ B_1^K & B_2^K & B_3^K & B_4^K & B_5^K & B_6^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\varepsilon \\ B^\gamma \\ B^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad \text{III-38}$$

avec B la matrice contenant les dérivées par rapport à x des fonctions de forme N (ε pour le axial, γ pour le cisaillement et K pour les rotations). L'introduction de (III-35) dans le principe des travaux virtuels (III-29) donne les expressions de la matrice de rigidité K_e de l'élément e :

$$K_e = \int_0^{le} B^T K_s B dx \quad \text{III-39}$$

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

L'assemblage donne la matrice de rigidité totale de la structure poutre :

$$K_{tot} = A_{e=1}^n \int_0^{l_e} B^T K_S B dx \quad \text{III-40}$$

L'extension des équations précédentes en 3D est simple et suit les mêmes étapes [30].

III.2.5. Vecteurs de forces

Comme mentionné précédemment, le vecteur des forces généralisées F_s de la section a la forme suivante :

$$F_s = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = K_s \cdot \int_0^{l_e} B^T K_S B dx \quad \text{III-41}$$

Avec : U'_x , β_y , θ'_z les déformations généralisées et K_s la matrice représentant la rigidité de la section (III-33).

Le vecteur des forces internes de l'élément est :

$$F_{int,e} = \int_0^{L_e} B^T F_s dx \quad \text{III-42}$$

Après assemblage on obtient le vecteur total des forces internes, pour toute la structure poutre :

$$F_{int,tot} = A_{e=1}^n \int_0^{L_e} B^T F_s dx \quad \text{III-43}$$

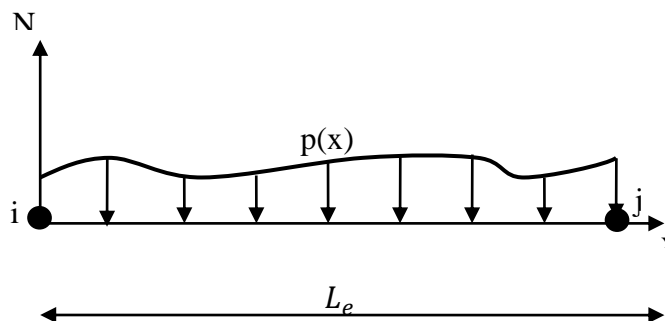


Figure III-6: Un élément fini poutre soumis à un chargement

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Pour un chargement externe transversal distribué $p(x)$, le vecteur des forces externes est évalué en utilisant également le principe des travaux virtuels.

Le travail externe virtuel (III-33) pour un seul élément e prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} w_{external,e} &= \int_0^{L_e} \delta V_y(x) p(x) dx = \int_0^{L_e} \delta (N^v d_e)^T p(x) dx \\ &= \delta d_e^t \int_0^{L_e} N^{vT} p(x) dx = \delta d_e^t F_{ext,e} \end{aligned} \quad \text{III-44}$$

Avec $N^{vT} = [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]$

Le vecteur des forces externes de l'élément devient :

$$f_{ext,e} = \int_0^{L_e} N^{vT} p(x) dx = \int_0^{L_e} [N_1^v \quad N_2^v \quad N_3^v \quad N_4^v \quad N_5^v \quad N_6^v]^T p(x) dx \quad \text{III-45}$$

La matrice de rigidité analytique d'une poutre Timoshenko homogène élastique

III.3. Présentation générale de CASTEM 2000

INTRODUCTION

Castem est un logiciel de simulation numérique utilisé en mécanique des structures et développé par le département de modélisation des systèmes et structures (DMT), du commissariat français à l'Energie atomique et aux énergies alternatives (CEA). Il est mis à la disposition gracieusement pour l'enseignement et la recherche. Il utilise la méthode des éléments finis pour résoudre différents types de problèmes scientifiques.

Étapes de calcul sur Castem

Nous allons présenter dans ce paragraphe les étapes générales de calcul d'une structure de poutre par éléments finis.

1. Choix des options générales de calcul

OPTI DIME 2 ELEM SEG2 ;

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Le calcul s'effectue en dimension deux avec des éléments finis de type segmentaire à deux nœuds.

2. Définition de la géométrie de la structure et du maillage

Notre poutre est modélisée par une ligne moyenne définie par deux extrémités. Il y a lieu de définir d'abord les coordonnées des points ensuite les segments.

Définition de points :

A1 = 0.0 0.0 ;

A2 = 1400.0 0.0 ;

Définition des segments :

POUTRE1 = DROI A1 B1 DINI 40 DFIN 40 ;

POUTRE1 est un objet maillage défini par les points **A1** et **B1** avec une densité d'éléments égale à 40 mm/élément (dimension moyenne des éléments).

3. Définition d'un modèle de structure

MODPOUT1 = MODE POUTRE1 MECANIQUE ELASTIQUE SECTION PLASTIQUE SECTION TIMO ;

Le modèle est une poutre de Timochenko en calcul non linéaire.

4. Définition des caractéristiques matérielles de la poutre

MATPOUT1 = MATE MODPOUT1 MODS MSBA MATS CSBA ;

MSBA est le modèle de section précédemment définis et **CSBA** contient toutes les caractéristiques matérielles d'une section en béton armé.

5. Définition des conditions aux limites

RGDT1 = BLOQ UX UY A1 ;

RGDT2 = BLOQ UX UY B1 ;

Les objets rigidités **RGDT1** et **RGDT2** représentent des appuis doubles.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

6. Définition de chargement

7. **CHAR1 = FORC FY (0.0 - 7.0E4) q1 ;**

L'objet **CHAR1** est un objet chargement type force concentrée appliquée aux point **q1** déjà définis sur le maillage **POUTRE1**.

Il faut en plus définir un programme de chargement pour un calcul incrémental.

CHARGE0 = CHAR MECACHAR1 MEVOL0 ;

CHARGE0 est un objet chargement avec programme d'évolution définie par **MEVOL0**.

8. Remplissage d'une table de donnée

TABINOUT = TABLE ;

TABINOUT. 'MODELE' = **MODPOUT1** ;

TABINOUT. 'CARACTERISTIQUES' = **MATPOUT 1** ;

TABINOUT. 'BLOCAGES_MECANIKES' = **RGDT1 ET RGDT2**

TABINOUT. 'CHARGEMENT' = **CHARGE0** ;

TABINOUT. 'TEMPS_CALCULES' = **TempsCalc** ;

TempsCalc est un objet contenant les pseudo-temps de calcul.

9. appel de la procédure de calcul non linéaire

PASAPAS TABINOUT ;

10. Sauvegarde des résultats

OPTI SAUV resultpoutre ;

SAUV TABINOUT ;

La commande **SAUV** sauvegarde les résultats du calcul dans un fichier dont le nom est **resultpoutre** en vue d'une visualisation par un autre fichier programme.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Par ailleurs, l'organigramme de la procédure PASAPAS est détaillé sur la figure (7).

Le calcul de la précontrainte extérieure est réalisé par l'introduction d'une procédure appelé CHARMECA préexistante dans la procédure PASAPAS mais réécrite selon les données de la structure. La procédure PASAPAS appellera la procédure CHARMECA à condition d'ajouter dans la table de données TABINOUT une ligne de commande suivante juste avant l'appel :

TABINOUT . PROCEDURE_CHARMECA = VRAI ;

Il y a lieu d'ajouter les données relatives à la précontrainte dans la table de données TABINOUT. Ce sont les excentricités, la section, les longueurs initiale.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

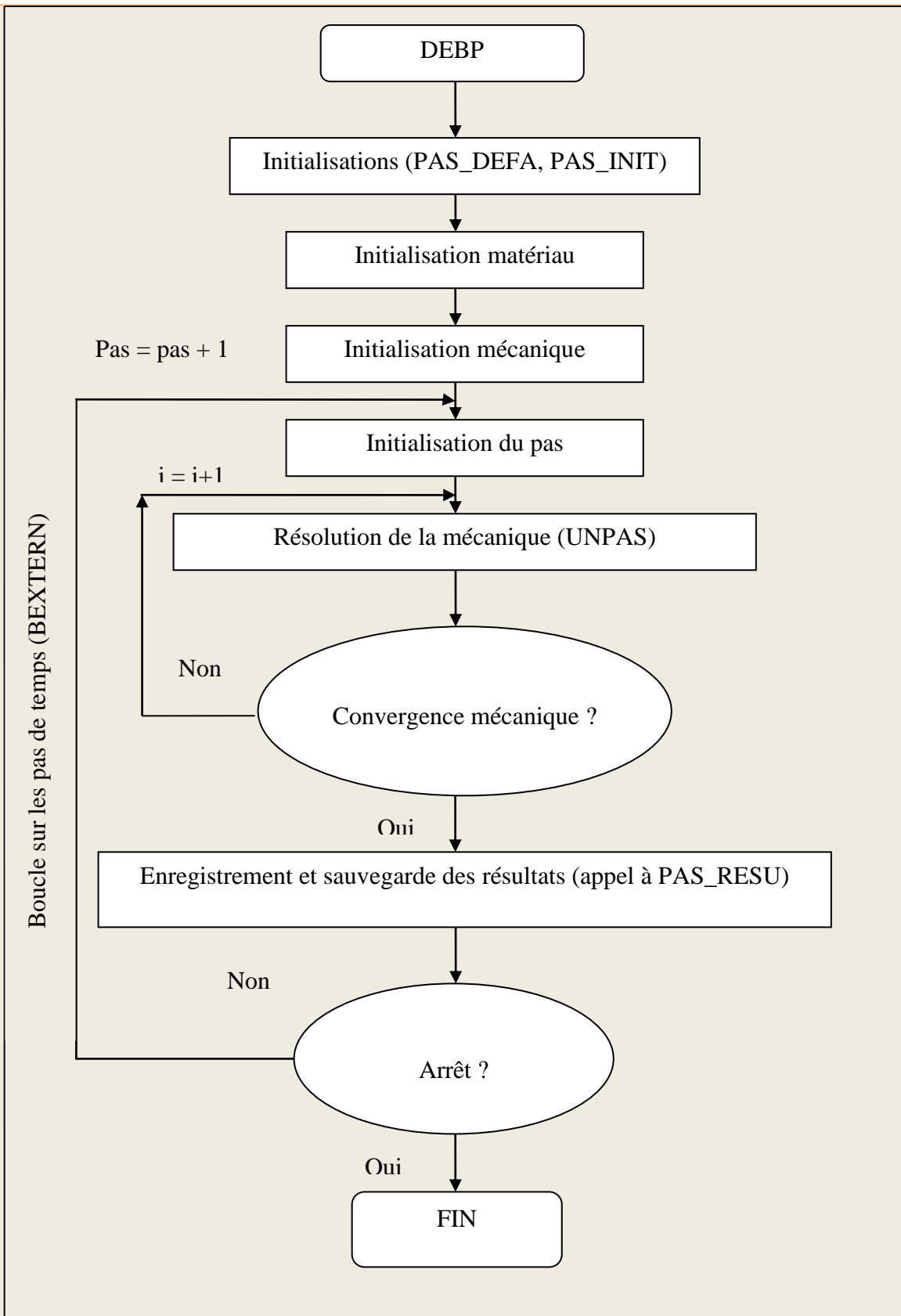


Figure III-7: Organigramme de calcul adapté de la procédure PASAPAS de

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

III.4. Résultats et interprétations

III.4.1. Caractéristiques de béton et de l'acier de la poutre Vecchio et Emara [52]

Caractéristiques du béton		Caractéristiques des aciers	
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPa)	418
Module d'élasticité E (MPa)	28.6 x 10 ³	Module d'élasticité E (MPa)	192.6x10 ³
Résistance en compression f_c (MPa)	30	Contrainte de rupture (MPa)	454
Résistance en traction f_t (MPa)	1.8		

Tableau 4 : propriétés matérielles de la poutre Vecchio et Emara [21]

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

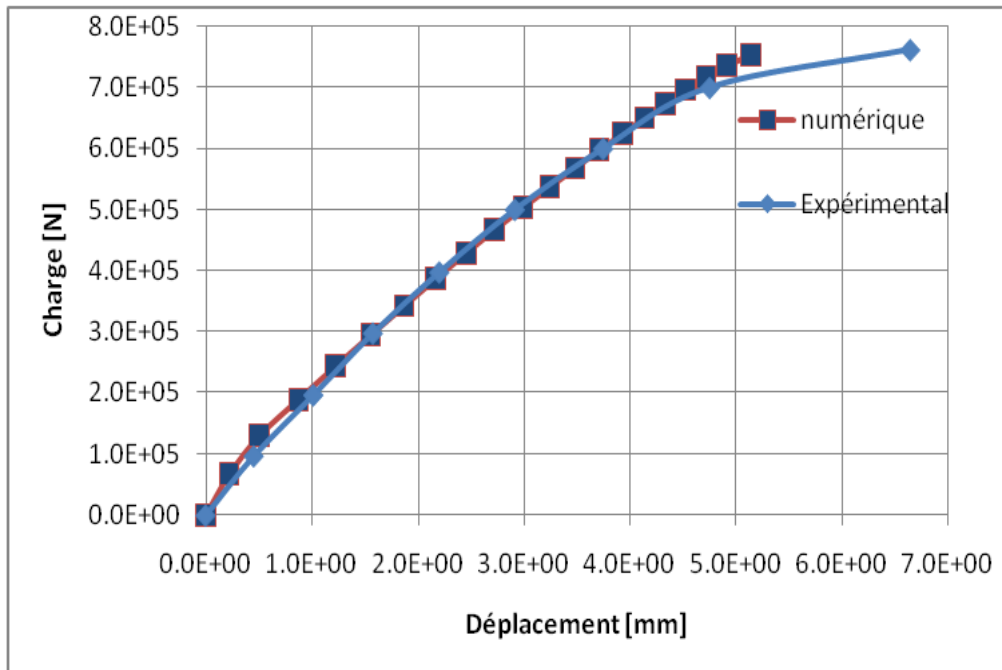


Figure III-8 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de Vecchio et Emara

A partir de la comparaison essai-calcul, on peut faire les constatations suivantes :

- les deux courbes de calcul collent parfaitement avec la courbe expérimentale, jusqu'à une valeur de la charge d'environ 700 kN.

- Au-delà, les résultats des calculs montrent un comportement légèrement plus rigides que le comportement expérimental.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

III.4.2. Caractéristiques de béton et de l'acier de la poutre MAZARS[7]

Caractéristiques du béton		Caractéristiques des aciers	
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPa)	400
Module d'élasticité E (MPa)	30.2×10^3	Module d'élasticité E (MPa)	210×10^3
Résistance en compression f_c (MPa)	32.3		
Résistance en traction f_t (MPa)	3.05		

Tableau 5 : propriétés matérielles de la poutre MAZARS [7]

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

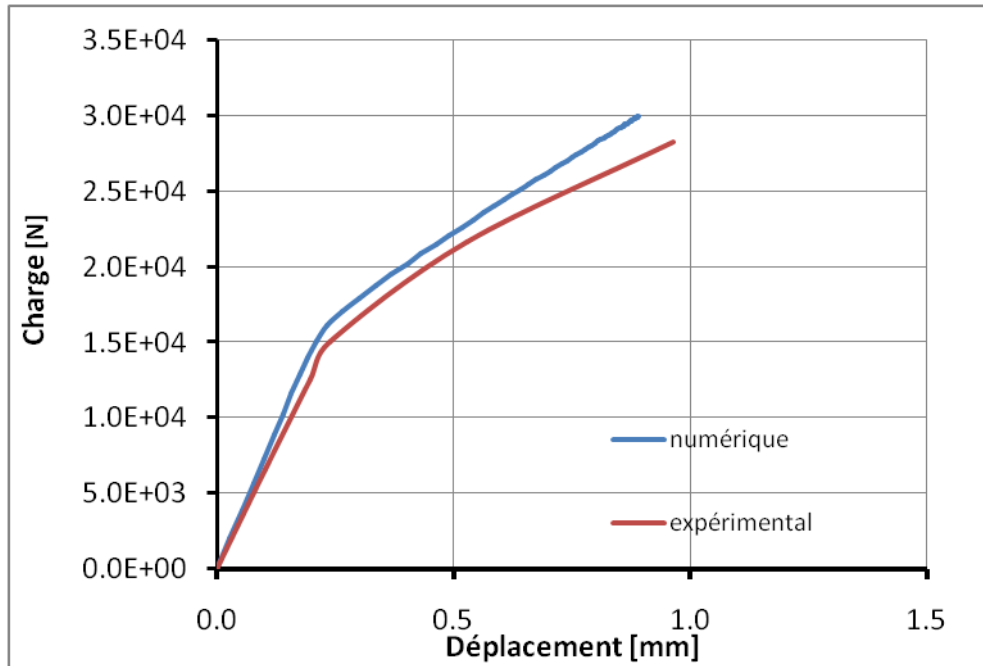


Figure III-9 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de MAZARS

A partir de la comparaison des deux courbes, on peut faire les constatations suivantes :

- le calcul simule correctement le comportement expérimental dans le domaine élastique et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 15kN.
- Au-delà de cette valeur, les deux courbes divergent légèrement. Les résultats des calculs montrent un comportement légèrement plus rigides que le comportement expérimental.

Chapitre III : formulation d'un élément poutre plan selon la théorie de NAVIER-BERNOULI et la théorie de TIMOCHENKO

Conclusion

Le modèle analytique développé dans le cadre de cette étude pour le calcul des poutres épaisses (poutre de Timoshenko), et le calcul des poutres minces (poutre de Bernoulli) sont basé sur :

- la méthode des éléments finis.
- le calcul incrémental : Appel de la procédure PASAPAS de CASTEM.

Cette dernière effectue un calcul Incrémental portant sur la recherche de l'équilibre global de la structure. De ce fait la précision de calcul s'améliore proportionnellement à la finesse de la discrétisation.

Les résultats du modèle de poutre de Timoshenko ont montré un accord avec les résultats expérimentaux.

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Dans les structures en béton armé, les déformations deviennent prépondérantes par rapport à un chargement donné. Dans le cadre de cette étude, on s'est intéressé à la modélisation et à la simulation des comportements des sections planes et des poutres en béton armé.

Tout d'abord, un aperçu sur les lois de comportement du béton armé, une formulation est présentée pour la modélisation du comportement non linéaire d'une section quelconque soumise à un couple (N,M) en s'appuyant sur la méthode de la sécante. La méthode de calcul est basée sur une procédure de résolution itérative qui nous permet la détermination des déformations connaissant les efforts.

Deux formulations du comportement de la poutre, basée sur la théorie de Navier-Bernoulli et la théorie de Timoshenko, ont été développées en tenant compte de la non linéarité due aux comportements des matériaux. Le calcul de la poutre de Vecchio et Emara et la poutre de MAZARS permet de conclure que le modèle estime correctement le comportement des poutres en béton armé dans le domaine élastique, que dans le domaine post-élastique.

La confrontation des résultats du calcul avec des résultats expérimentaux et théoriques, effectuée pour plusieurs exemples, a permis de valider le programme informatique élaboré sur CASTEM 2000.

Les exemples traités montrent l'aptitude de ce programme à simuler correctement le comportement non linéaire des sections planes en béton armé.

Afin de compléter l'étude réalisée, dans le cadre de ce mémoire, et élargir le champ d'application, on peut envisager les perspectives suivantes :

Introduction de la fissuration dans le comportement des structures

Tenir compte du glissement des armatures dans le béton

Simulation de la rupture des structures.

Références bibliographiques

[1]: Nilson A H (1968), “Non linear analysis of reinforced concrete by the finite elements method”, J.Struct.Div.ASCE 65.

[2] : Franklin H A, (1970), “Non linear analysis of reinforced concrete frams and panels”.
Dissertation division of structural engineering and structural mechanics. University of California

[3] : Raynouard, (1974), « Structure planes en béton armé. Elaboration d’un modèle du comportement jusqu’à la ruine et résolution numérique ». Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou.

[4] : Hammoum (1998), « Calcul non linéaire des structures en béton armé ». Institut de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou.

[5] : Gilbert. R I, Warner, R.F, (1978), “ Tension stiffening in reinforced concrete slabs”, journal of structural division, ASCE?, vol 104, N°STE 12

[6] :Fouré.B, (1987), « Le comportement non-linéaire des structures en béton armé sous sollicitations sismiques », publication de la réunion –débat, association française du génie parasismique.

[7] : Mazars J, (1984) « Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non- linéaire et à la rupture de structure ». Thèse doctorat d’état, Université Pierre Marie Curie Paris 6.

[8] : Abbou-Ezzi N,E, (1989). « Modélisation de comportement non-linéaire du béton par la mécanique d’endommagement », Thèse de doctorat, ENPC

[9] :Kwak, H, G, (1990), « Materiel non linear finite element analysis and optimal design of reinforced concrete structures », ph.D, Dissertation, department of civil engineering, Kaist, Korea

[10] : Fillipou F.F, Kwak H.G, (1997), “Non linear finite element analysis of R/C structures under monotonic loads”, Computer and structures journal, vol 65, 1 Elsevier.

[11] :Spacone E, Salari M, (2000), “Finite element formulation of one dimensional elements with bond slip”

[12] : Ramirez, N, D, (2005) “Etude de liaison acier –béton, de la modélisation du phénomène à la formulation d’un élément fini enrichi (béton armé)”

[13] :SARGIN. M, (1971), « Stress-strain relationships for concrete and the analysis of the structural concrete sections.», S.M Study n°4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada.

[14] : BAEL (1991), Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites, fascicule 62 du CCTG, Règlement français.

[15] : GRELAT. A, (1979),” Calcul non linéaire des ossatures en béton armé” thèse de doctorat-ingénieur, Université Pierre et Marie Curie.

[16] :Denpongpan .T, (2001) “Effet of reversed loading on shear behavior of reinforced concrete”, publication soumettre pour l’obtention de diplôme de master l’université de Kochi.

[17] :Mattieu LANGNEL, Investigation Expérimentale et Théorique sur la performance de poutre en béton armé renforcées en cisaillement à l’aide de composites en PRF ancrés, Mémoire d’Ingénieur d’état, Montréal, le 10 Décembre 2010.

[18] : TADEUSZ GODYCKI-CWIRKO , le cisaillement dans le béton armé, DUNOD PARIS 1972.

[19] : « Béton à haute résistance – Rapport sur les essais de poteaux et poutre (OG) », contrat SETRA-CEBTP 84-40-020, rapport interne, Avenant n°1, index SES OG, phase D. Novembre 1985.

[20] :ZDENEK P. BAZANT and BAZANT and BYUNG.H OH, « Deformation of progressively grehing reinforced concrete beams. » (Aci journal /.May-June 1984 vol 81 N°3).

[21] :Vecchio F.J, Emara . M.B, (1990), “Shear déformation in concreteframes”.ACI Structural Journal (janvier-février 1992)

[22] : FILIPPOU.F.C, KWAK .H.G, (1990), « Finite element analysis of reinforced concrete structures, Under monotonic loads. », Rapport n° , Department of civil engineering, university California, p71.

[23] :Guedes, J., Pegon, P., and Pinto, A. V. (1994). A Fibre/Timoshenko beam element in Castem 2000. Special publication Nr. I.94.31, Applied Mechanics Unit, Institute for Safety Technology, Joint Research Centre, Commission of the European Communities, I-21020 ISPRA (VA).