

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT AUTOMATIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

en Automatique

Option : **Traitement d'Images et Reconnaissance de Formes**

présenté par :

M^{elle} SLIMANI Dalila

ingénieur U.M.M.T.O

Thème

Dérivation non entière : Application en traitement d'images

Mémoire soutenu le :

devant le jury d'examen composé de :

DJENNOUNE Saïd

Professeur à l'U.M.M.T.O

Président

DIAF Moussa

Professeur à l'U.M.M.T.O

Rapporteur

HAMMOUCHE Kamal

M.C.A à l'U.M.M.T.O

Examineur

MANSOURI Rachid

M.C.A à l'U.M.M.T.O

Examineur

Avant-propos

Ce mémoire a été effectué au laboratoire « robotique et vision du département Automatique de l'UMTO ».

Mes vifs remerciements vont tout d'abord à Monsieur DIAF Moussa, professeur à l'UMMTO pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée, aidée et conseillée tout le long de notre travail.

Nous exprimons notre reconnaissance à Monsieur DJENNOUNE Saïd, professeur à l'UMMTO, pour nous avoir fait honneur en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à Monsieur HAMMOUCHE Kamal, Maître de Conférences classe A à l'UMMTO pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de notre mémoire.

Que Monsieur MANSOURI Rachid, Maître de Conférences classe A trouve ici nos remerciements pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de notre mémoire.

SOMMAIRE

Introduction Générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre I : Les opérateurs de la dérivation non entière3

1. Introduction	3
2. Fonction gamma	4
3. Les approches de la dérivation non entière.....	6
3.1. approche de Grünwald-Letnikov	6
3.2. Approches de Riemann–Liouville et Caputo	9
3.3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre non entier	12
4. Interprétation de la dérivation non entière	13
4.1. Interprétation physique de L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	13
4.2. Interprétation physique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	15
4.3. Approximation numérique de la dérivation et de l'intégration non entière.....	16
5. Applications de la dérivation non entière	16
6. Conclusion	18

Chapitre2 : segmentation d'images par dérivation non entière.....19

1. Introduction.....	19
2. Filtrage	20
3. Segmentation d'images.....	20
3.1. Approche contours.....	21
3.2. Approche régions.....	21
3.4. Segmentation par seuillage	23
4. Dérivation non entière en segmentation d'images	26
4.1. Dérivation non entière d'une transition parabolique de type marche ...	27
4.2. Détecteur CRONE.....	30
4.3. Forme discrète de la DNE.....	34

4.4. Algorithmes de segmentation d'images par dérivation non entière.....	34
5. Conclusion	36

Chapitre 3 : Application à la segmentation d'images37

1. Introduction	37
2. Algorithme de segmentation par dérivation non entière	38
2.1. DNE à une dimension	39
2.2. DNE à deux dimensions.....	42
3. Tests et résultats	49
4. Conclusion.....	54

Conclusion Générale55

Bibliographie

Introduction générale

Le formalisme de la dérivation non entière consiste à généraliser la notion de la dérivée à des ordres non entiers de dérivation (réels ou complexes). Cette extension au corps des complexes date du XIXème siècle et relève principalement des travaux de Liouville et Riemann.

Différentes définitions de la dérivation non entière ont été établies, ces dernières ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour plusieurs fonctions.

La théorie de la dérivation non entière à été longuement considérée comme une branche relevant des mathématiques. Ce n'est qu'à la seconde moitié du XIXème siècle que sa synthèse et ses applications dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur ont vu le jour. Depuis, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt dans différentes disciplines tels que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique et le traitement du signal, et dans différentes applications telles que : la modélisation, l'identification, la commande, la robotique et le traitement d'images.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la dérivation non entière appliquée en traitement d'images. La segmentation d'image étant une étape primordiale dans tout traitement d'image, des opérateurs de segmentation d'images par dérivation non entières sont proposés. Ces opérateurs présentent l'intérêt d'avoir un comportement hybride, qui permet leur application aussi bien à la segmentation par régions qu'à la segmentation par contour selon qu'on soit face à une dérivation ou une intégration non entière. Les opérateurs de dérivation mettent en évidence les zones de fortes variations de niveaux de gris, qui sont probablement le siège des contours

des objets de l'image. En revanche, des opérateurs d'intégration sont utilisés dans la segmentation par régions afin de réduire les variations au sein des régions homogènes et de mieux détecter les objets de l'image.

Comme le suggère le thème de notre mémoire « Dérivation non entière : application en traitement d'images », Ce dernier a été organisé de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, nous évoquons brièvement les différentes définitions de la dérivation non entière et ces principes de base ainsi que ses applications dans plusieurs domaines.

Le deuxième chapitre est consacré au domaine du traitement d'image : nous présentons en première partie les différentes techniques de segmentation d'images, puis nous passons à la segmentation d'images en utilisant la dérivation non entière.

A travers le chapitre 3 nous présentons les résultats obtenus après une série de tests ainsi que l'interprétation de ces résultats.

Une conclusion générale fera le point de ce travail et donnera quelques perspectives envisagées.

Premier chapitre

Opérateurs de la dérivation non entière

1. Introduction

La dérivation et intégration d'ordre non entier constituent le calcul fractionnaire qui est un vieux concept datant de l'époque de Cauchy. C'est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entières de α . Si α est négatif, il s'agit d'une intégration non entière et si α est positif, on parle d'une dérivation non entière

L'idée pour la généralisation de la dérivée vers un ordre arbitraire est découverte dans le courrier échangé entre L'Hôpital et Leibniz. Le 30 septembre 1695. L'Hôpital a écrit à Leibniz afin de l'interroger au sujet d'une notation particulière qu'il avait employée dans ses publications pour la n ième-dérivée d'une fonction $f(x)$. L'Hôpital pose alors la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $\frac{1}{2}$? [1]. Depuis cet échange de courrier, d'autres chercheurs de renommée se sont penchés sur ce sujet comme Leibniz et L'Hospital (1695) [1], Fourier (1822) [2], Abel (1823) [3], Liouville (1832) [4], Riemann (1847) [5], et de Ross (1975) [6].

Plusieurs activités scientifiques comme l'organisation colloques internationaux, la parution de plusieurs ouvrages et d'une revue « Journal of fractional calculus » entièrement consacrée au sujet, témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier.

Différentes définitions de la dérivation non entière ont été établies. Ces définitions, même ne menant pas toujours à des résultats identiques sont équivalentes pour un large panel de fonctions. Toutefois, la définition de la dérivation non entière peut s'établir selon les trois approches. La première est l'approche par limites qui est l'approche classique de Grünwald-Letnikov et qui consiste à généraliser la notion de la dérivation entière. La deuxième est l'approche de Riemann-Liouville et Caputo qui, à partir des primitives, associe la dérivation non entière à l'intégration fractionnaire. La troisième approche est spectrale utilisant la transformée de Laplace.

Dans ce chapitre, il s'agit pour nous de présenter les fondements de la dérivation non entière. Nous noterons α l'ordre de dérivation, $D^{(\alpha)}$, l'opérateur de dérivation non entière d'ordre α et $I^{(\alpha)}$ l'opérateur d'intégration non entière d'ordre α .

Ainsi, seront vus, fonction Gamma, qui est principalement utilisée en dérivation non entière avant de rappeler les différentes définitions des opérateurs d'ordre non entier. Des exemples de fonctions usuelles pour clarifier les diverses approches de la dérivation non entière ainsi que leurs propriétés seront donnés. Par la suite, une section est consacrée à l'interprétation de l'intégration et de la dérivation non entière. Le chapitre se termine alors par un rappel de quelques applications dans différents domaines.

2. Fonction Gamma [7][8]

Pour la variable z réelle et strictement positive, la fonction Gamma continue en z est définie comme une l'intégrale sommable quivante:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \quad (1)$$

L'allure de la fonction Gamma est donnée par la figure 1 :

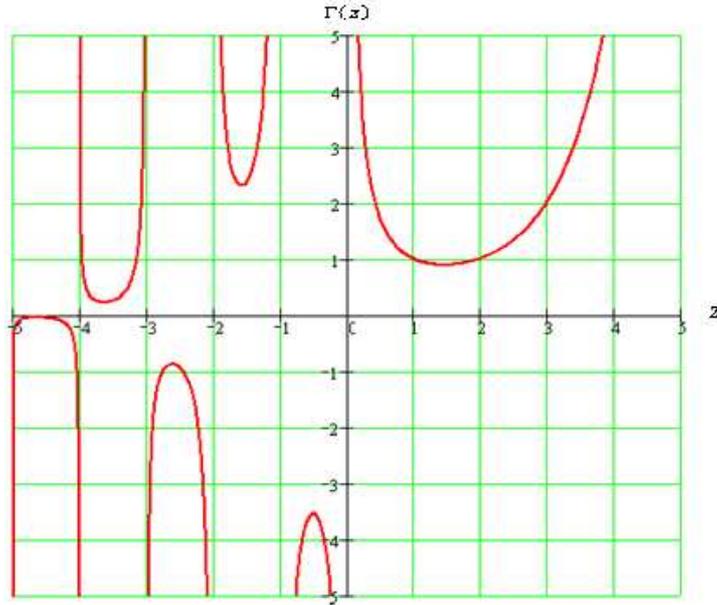


Fig.1 Allure de la fonction Gamma [REF]

Ainsi, nous avons :

La dérivée d'ordre 1 de $\Gamma(z)$ est :

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} (x^{z-1}) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{z-1} \ln(x) e^{-x} dx \quad (2)$$

Sa deuxième dérivée est :

$$\Gamma''(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx \quad (3)$$

La dérivée d'ordre n est donnée par :

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} (\ln(x))^n e^{-x} dx \quad (4)$$

La relation de récurrence de la fonction $\Gamma(x)$ est obtenue par l'intégration par parties de la formule d'Euler. En effet, si on pose $u = e^{-x}$, $dv = x^{z-1} dx$, on aura :

$$\Gamma(z) = \left[e^{-x} \frac{x^z}{z} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^z}{z} e^{-x} dx \quad (5)$$

avec $\int_0^{+\infty} \frac{x^z}{z} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$

Ainsi, nous avons $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$

Cette relation de récurrence va permettre de définir $\Gamma(z)$ pour les valeurs négatives de z .

Si nous supposons $-1 < z < 0$ soit $0 < z+1 < 1$. $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$. Il est convenu de définir $\Gamma(z)$ par la relation

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Ainsi pour $-(n+1) < z < -n$ avec n entier positif ou nul, on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{6}$$

Les valeurs particulières de $\Gamma(x)$ sont :

- $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$
- la fonction Gamma s'appelle aussi fonction factorielle généralisée : $\Gamma(n) = (n - 1)!$
- Pour $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- Pour $z = n + \frac{1}{2}$, n entier positif : $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$

3. Approches de la dérivation non entière [9]

3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires. La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f au point x est définie par :

$$D^{(1)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

Le calcul des dérivées successives de la fonction f donne la généralisation de cette formule à l'ordre n où n est un nombre entier positif ou nul)

$$D^{(n)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - jh)$$

$$\text{Avec : } \binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$$

Cette formule représente la dérivée d'ordre entier n si n est positif et l'intégrale répétée $-n$ fois si n est négatif.

En utilisant la fonction gamma telle que $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ donnant $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout n entier positif ou nul, on peut écrire l'expression suivante généralisée aux cas entiers négatifs ou nul :

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{-n(1-n)(2-n) \dots \dots \dots (j-n-1)}{j!}$$

En remplaçant n par un réel α non entier on aura :

$$\frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha) \dots \dots \dots (j-\alpha-1)}{j!} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)}$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α telle que:

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-jh)$$

et

$$\begin{aligned} D^{(-\alpha)}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha)} f(x-jh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Cette relation correspond a la définition de Grunwald – Letnikov.

Si f est de classe C^k alors, en utilisant l'intégration par parties, on obtient:

$$D^{(\alpha)}f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau$$

et

$$D^{(-\alpha)}f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j+\alpha}}{\Gamma(j+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k+\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau$$

Notons que, à travers cette définition, on voit déjà apparaître l'une des propriétés de la dérivation d'ordre non entier. Elle prend en compte le passé global de la fonction et donc l'ensemble de ses dynamiques contrairement à la dérivée usuelle d'ordre $\alpha = 1$ et qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul.

La dérivée non entière peut être composée avec la dérivée entière tel que:

$$\frac{d^n}{dx^n} (D^{(\alpha)}f(x)) = D^{(n+\alpha)}f(x)$$

$$\text{et } D^{(\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) = D^{(n+\alpha)}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}$$

où n est un nombre entier et α un non entier.

Quant à la composition entre des dérivées non entières, elle est donnée par :

- Si $\beta < 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$$D^{(\alpha)} (D^{(\beta)}f(x)) = D^{(\alpha+\beta)}f(x)$$

- Si $0 \leq m-1 < \beta < m, \alpha < 0$ et $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, m-2$

$$D^{(\alpha)} (D^{(\beta)}f(x)) = D^{(\alpha+\beta)}f(x)$$

- Si $0 \leq m-1 < \beta < m, 0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, r-2$

$$D^{(\alpha)} \left(D^{(\beta)} f(x) \right) = D^{(\beta)} \left(D^{(\alpha)} f(x) \right) = D^{(\alpha+\beta)} f(x)$$

où n, m sont deux nombres entiers et $r = \max(m, n)$ et α, β non entiers.

Ainsi, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov, n'est ni nulle et ni constante. Pour un ordre de dérivation non entier α la dérivée de la fonction constante $f(x) = C$ est donnée par :

$$D^{(\alpha)} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau$$

$$\text{où } \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} = 0 \text{ et } \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau = 0$$

Alors :

$$D^{(\alpha)} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

la dérivée de Grünwald-Letnikov de la fonction $f(x) = (x-a)^p$ à l'ordre α , est telle que :

$$D^{(\alpha)} (x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha+1} (x-a)^{p-n} d\tau$$

En effet, si α est un nombre non entier tel que : $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > n-1$, les dérivées entière d'ordre k , pour $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ est $f^{(k)}(a) = 0$ et la dérivée d'ordre n étant $f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} (\tau-a)^{p-n}$, nous aurons :

$$D^{(\alpha)} (x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha+1} (x-a)^{p-n} d\tau$$

En procédant au changement de variable en faisant $\tau = a + s(x-a)$ on a :

$$\text{pour } \tau = a \quad s = 0 \text{ et pour } \tau = x \quad s = 1$$

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} (x-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (x-a)^{p-\alpha} ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}, a = 0, p = 1$, on a :

$$D^{(\frac{1}{2})}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

3.2. Approches de Riemann–Liouville et Caputo

Ces approche dites encore à partir des primitives est sont basé sur l'intégration afin de définir la dérivation non entière.

- *Approche Riemann–Liouville*

Dans l'approche Riemann–Liouville, une autre expression de la dérivation d'ordre non entier d'une fonction $f(x)$ est donnée. Deux définitions ont été données.

Dans la première, on pose $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, a \in \mathbb{R}$ et f , une fonction localement intégrable définie sur $[a, +\infty)$. L'intégrale d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par l'expression suivante :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad \text{avec } x > a$$

Dans la deuxième, on pose $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, a \in \mathbb{R}$ et f , une fonction localement intégrable définie sur $[a, +\infty)$.

Ainsi, la dérivée d'ordre α de f de borne inférieure a au sens de Riemann–Liouville est définie par :

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

où le nombre entier n est tel que $(n - 1) < \alpha < n$.

Si f est de classe C^k , alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées on obtient :

$$D^{(\alpha)} f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)(x - a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j - \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(k - \alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau) d\tau$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann–Liouville sont équivalentes.

Dans la composition avec l'intégrale non entière, l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann–Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$$D^{(\alpha)} \left(I^{(\alpha)} f(x) \right) = f(x)$$

et en générale $D^{(\alpha)} \left(I^{(\beta)} f(x) \right) = D^{(\alpha-\beta)} f(x)$ si $\alpha - \beta < 0$, $D^{(\alpha-\beta)} f(x) = I^{(\beta-\alpha)} f(x)$

De plus, la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas :

$$D^{(-\alpha)} \left(D^{(\beta)} f(x) \right) = D^{(\beta-\alpha)} f(x) - \sum_{j=1}^m [D^{(\beta-j)} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

avec $m-1 \leq \beta < m$

Pour la composition avec les dérivées d'ordre entier, on a, pour n un nombre entier et α non entier :

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(D^{(\alpha)} f(x) \right) = D^{(n+\alpha)} f(x) \text{ et } D^{(\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) = D^{(n+\alpha)} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}$$

La différentiation non entière et la différentiation entière ne commutent que si $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Pour la composition avec les dérivées d'ordre non entier, on a, pour α et β deux nombres non entiers tel que : $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$:

$$D^{(\alpha)} \left(D^{(\beta)} f(x) \right) = D^{(\alpha+\beta)} f(x) - \sum_{j=1}^n [D^{(\alpha-j)} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}$$

$$D^{(\beta)} \left(D^{(\alpha)} f(x) \right) = D^{(\beta+\alpha)} f(x) - \sum_{j=1}^m [D^{(\beta-j)} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}$$

Les opérateurs de dérivations fractionnaires $D^{(\alpha)}$ et $D^{(\beta)}$ ne commutent que si $\alpha = \beta$ et $\sum_{j=1}^n [D^{(\alpha-j)} f(x)]_{x=a} = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $\sum_{j=1}^m [D^{(\beta-j)} f(x)]_{x=a} = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, m$.

Comme premier exemple de dérivée non entière d'une fonction constante $f(t) = C$ au sens de Riemann-Liouville, nous avons :

$$D^{(\alpha)} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

Comme deuxième exemple de dérivée d'une fonction $f(x) = (x-a)^p$ au sens de Riemann-Liouville, nous avons :

Soit α un nombre non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$

$$D^{(\alpha)} (x-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^p d\tau$$

En faisant un changement de variable : $\tau = a + s(x-a)$

$$\text{pour } \tau = a \quad s = 0$$

$$\text{pour } \tau = x \quad s = 1$$

$$D^{(\alpha)} (x-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n+p-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^p ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(x-a)^{p-\alpha}
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}, a = 0, p = \frac{1}{2}$:

$$D^{(\frac{1}{2})}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma(\frac{1}{2})$$

- *Approche de Caputo*

Dans l'approche de Caputo, celui-ci a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^n(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < \alpha < n$.

La relation avec la dérivée de Riemann Liouville est effectuée de la façon suivante : si $f(x)$ est une fonction $f(x)$ dont les dérivées d'ordres α de Riemann Liouville et de Caputo existent et si α un nombre non entier positif ou nul tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. la relation reliant la dérivée au sens de Caputo a celle de Riemann Liouville est donnée par :

$$D^{(\alpha)} f(x)|_{Caputo} = D^{(\alpha)} f(x)|_{Riemann Liouville} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}$$

La dérivée d'ordre α de $f(x)$ au sens de Caputo est égale à celle de Riemann Liouville si $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Quant à la composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire, elle est défini, en posant $f(x)$ ne fonction $f(x)$ continue, elle est définie telle que :

$$D^{(\alpha)} (I^{(\alpha)} f(x)) = f(x)$$

$$\text{et } I^{(\alpha)} (D^{(\alpha)} f(x)) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}$$

Notons que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle $D^{(\alpha)} f(x) = 0$ et que la dérivée d'une fonction $f(t) = (x-a)^p$ au sens Caputo est, si α un nombre non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > n-1$;:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-n}$$

$$\text{D'où } : D^{(\alpha)} (x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{p-n} d\tau$$

On faisant un changement de variable : $\tau = a + s(x - a)$

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(x - a)^p &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n - 1)} (x - a)^{p-\alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)\Gamma(p - \alpha + 1)} (x - a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (x - a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

3.3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre non entier

Comme dans le cas entier, la transformée de Laplace est utilisée pour la résolution des équations différentielle d'ordre non entier. Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée non entière.

Ainsi, la transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est donnée par: $\mathcal{L}\{D^{(\alpha)}f(x)\} = s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{(\alpha-k-1)}f(x)]_{x=0}$ avec $n - 1 < \alpha < n$. L'absence d'une interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $x = 0$, limite l'application en pratique de La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville.

Quant à la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo, elle est telle que :

$$\mathcal{L}\{D^{(\alpha)}f(x)\} = s^\alpha \cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0) \text{ avec } n - 1 < \alpha < n$$

L'approche de Caputo présente plusieurs avantages par rapport à celle de Riemann- Liouville. Elle permet de considérer des conditions initiales faciles à interpréter. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $x = 0$, à l'exception si on prend $x = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville.

Cependant, plusieurs processus ne permettent pas de placer le point de départ à $-\infty$; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

La transformée de Laplace de la dérivée de Gründwald-Leitnikov est donnée par : $TL\{D^{(\alpha)}f(x)\} = s^\alpha \cdot F(s)$

4. Interprétation de la dérivation non entière [10][11]

Généralement les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, ce qui simplifie leurs usages pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science. Cependant, il a fallu plus de 300 ans au calcul fractionnel pour avoir une interprétation physique et géométrique acceptable.

Le manque de ces interprétations a été reconnu dans plusieurs conférences internationales sur le calcul fractionnaire. La Question restée sans réponse, par conséquent, était souvent incluse dans la liste des problèmes ouverts. L'intégration et la différenciation fractionnaires sont des généralisations de notions d'intégration et de différenciation d'ordre entier, incluent les dérivés d'ordre n et les intégrales répétées n fois comme cas particuliers. Pour ceci, il serait intéressant d'avoir ces interprétations physiques et géométriques d'opérateurs d'ordre fractionnaire qui fourniront un lien aux interprétations classiques de différenciation et d'intégration d'ordre entier connues. L'interprétation physique de l'intégration et de la Différenciation fractionnaires repose sur l'utilisation de deux types de temps : le temps cosmique et le temps individuel, par contre l'ensemble du calcul différentiel et d'intégral classique est basée sur l'utilisation du temps mathématique (homogène, coulant uniformément).

En réalité l'échelle de temps homogène est juste une notion idéale, qui est nécessaire pour développer les modèles mathématiques décrivant le temps cosmique non homogène et leur changement.

4.1 Interprétation physique de L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse du conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ . Cependant le temps τ affiché par l'horloge est incorrect.

Nous supposons que la relation entre le temps incorrect τ , affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact et le temps exact T est donnée par la fonction connue $g_t(\tau)$ telle que :

$$T = g_t(\tau).$$

$$\text{et } g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.

Le conducteur A qui représente le conducteur de la voiture, ignorant l'erreur de l'horloge, calcul la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots(1)$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrecte τ au temps exact , calcule la distance réellement parcourue par la voiture :

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = I^\alpha v(t)$$

$$\text{avec } I^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau$$

L'intégrale donnée par l'équation (1) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :

Une mesure correcte de la vitesse et une mesure incorrecte du temps.

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation

$$S_O(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = I^\alpha v(t)$$

peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour lequel nous avons enregistré ses valeurs local de la vitesse $v(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur local du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donné par la fonction $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ , mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesuré du temps individuel de l'objet mobile. Quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.

La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet, quand un corps mobile

change sa position dans l'espace-temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de ce mouvement. Par conséquent, l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_o(t)$ parcourue par cet objet mobile.

En résumé, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la vitesse Individuelle $v(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ , et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation $g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)}\{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}$, représente la véritable distance $S_o(t)$ parcourue par cet objet.

4.2. Interprétation physique de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans la section précédant, nous avons interprété l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville comme étant la vraie distance $S_o(t)$ parcourue par un objet mobile, pour lequel le rapport entre son temps individuel τ et le temps cosmique T à chaque instant t est donné par la fonction connue $T = g_t(\tau)$.

on utilisant les propriétés de la différentiation et de l'intégration fractionnaire, nous pouvons exprimer l'expression de la vitesse individuelle $v(t)$ a partir de la véritable distance parcourue $S_o(t)$.

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_o(t)$ parcourue par le mobile permet donner l'expression de la vitesse $v(\tau)$:

$$v(\tau) = D^\alpha S_o(t) \text{ avec: } D^\alpha S_o(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_o(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Nous pouvons aussi différencier la valeur de la véritable distance par rapport la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $v_o(t) = S'_o(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuel $v(t)$:

$$v_o(t) = \frac{d}{dt_0} I^\alpha v(t) = D^{1-\alpha} v(t) \dots\dots\dots (4)$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1 - \alpha)$, de la vitesse individuel $v(t)$ est égale à la vitesse du point de vue de l'observateur

indépendant $v_o(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation $g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}$.

Pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncidentes : $v_o(t) = v(t)$

4.3. Approximation numérique de la dérivation et de l'intégration non entière [4]

L'approche la plus répandue pour l'approximation numérique de la dérivation et de l'intégration non entière est celle de Gründwald-Leitnikov.

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh)$$

Pour une fonction causale $f(x)$, et pour $x = k.h$:

- L'approximation de la dérivée d'ordre non entier α de la fonction $f(x)$ est donnée par :

$$D^{(\alpha)}f(kh) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k c_j^\alpha f(kh - jh)$$

Les coefficients binomiaux $c_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ sont calculés par la formule de récurrence suivante :

$$c_0^\alpha = 1, c_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^\alpha$$

- L'approximation de l'intégrale d'ordre non entier β de la fonction $f(x)$ est donnée par :

$$I^{(\beta)}f(kh) = D^{(-\beta)}f(kh) = h^\beta \sum_{j=0}^k c_j^{-\beta} f(kh - jh)$$

$$\text{Avec : } c_0^{-\beta} = 1, c_j^\beta = \left(1 - \frac{1-\beta}{j}\right) c_{j-1}^\beta$$

5. Applications de la dérivation non entière [12]

Au départ, la théorie de la dérivation non entière a été considérée comme une branche relevant des mathématiques. Mais Parallèlement aux progrès théoriques qu'elle a connus, l'aspect pratique a été freiné par le problème de l'interprétation physique, en effet s'il n'y a aucun doute sur le sens géométrique des dérivées et intégrales d'ordre entier, tel n'est pas le cas

pour les opérateurs d'ordre non entier. Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire. Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre non entier et leur intérêt dans différentes disciplines tels que l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique et le traitement du signal et dans différentes applications telles que la modélisation, l'identification et la commande. En effet, Il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématiques d'ordre non entier.

Nous citons ci dessous quelques applications dans différents domaines. En électricité, Le Méhauté et Crepy ont proposé en 1983 un concept appelé "la fractance", un nouvel élément de circuit électrique, qui possède des propriétés intermédiaires entre la résistance et la capacité. Un tel élément a été étudié par d'autres auteurs dont Nakagawa et So-rimachi et Oldham et Zoski. Une nouvelle théorie sur les capaciteurs a été développée par Westerlund, basée sur la dérivée d'ordre non entier.

On retrouve aussi quelques applications concernant la diffusion ou la dispersion. Ainsi, Loiseau et Mounier, en 1998, ont traité de la stabilité de l'équation de la chaleur commandée en flux, Wang et al. en 1999 ont étudié la diffusion de chaleur dans le sol et Fellah et al. en 2004 dans le domaine de la propagation des ondes acoustiques ; d'autres applications sur le transport de matières par l'eau dans le sol ont été présentées par Lu et al. en 2002 et Benson et al. en 2004; Del-Castillo-Negrete et al. en 2004 ont fait une application sur la diffusion dans le plasma. En identification, bien que la modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire remonte au début du XXème siècle, les travaux dans le domaine de l'identification ont été très limités. Ces derniers ont été initiés par les recherches de Sun et al. 1984 sur l'identification du comportement de la polarisation électrode-électrolyte par modèles d'ordre fractionnaire en utilisant des techniques fréquentielles. Par

la suite et à partir des années 1990, les travaux sur l'identification, tant dans le domaine temporel que fréquentiel, par modèles non entiers ont été développés.

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permet d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1ère, 2ème et 3ème générations). Et depuis, La commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, l'application de la dérivation non entière est élargie à la théorie de la commande par Podlubny qui a proposé le régulateur $\beta\alpha DPI$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre β .

Comme cité précédemment, L'utilisation de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire réel est maintenant largement répandue dans divers domaines, par contre l'application de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire complexe est relativement récente et se limite pour l'instant à la synthèse d'une commande robuste, la commande CRONE de la troisième génération.

6. Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation non entière. Nous avons répertorié quelques notions de cet outil mathématique, trois approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Grunwald Letnikov, de Riemann Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés, et quelques exemples de calcul. Des interprétations physiques ainsi que ses différentes applications dans divers domaines ont été présentées.

Le chapitre suivant aura pour objectif, d'approfondir ses applications dans le domaine du traitement d'images.

Deuxième chapitre

Segmentation d'images par dérivation non entière

1. Introduction

La segmentation d'images est l'étape la plus importante dans un système de vision par ordinateur. Elle joue un rôle prépondérant dans le traitement d'images. Elle aide à localiser et délimiter les entités présentes dans l'image. En effet, la segmentation permet le passage d'une représentation en intensité lumineuse (niveaux de gris) à une représentation symbolique (appartenance des pixels à différentes régions). Il existe de nombreuses méthodes de segmentation d'image qui peuvent être regroupées en quatre classes d'algorithmes :

- La segmentation basée sur les régions : dans cette catégorie, les pixels adjacents similaires selon un certain critère sont regroupés en régions distinctes.
- La segmentation basée sur les contours. Elle permet la détection des transitions entre les régions de l'image.

- La segmentation basée sur une approche globale de l'image : comme par exemple le seuillage.
- La segmentation basée sur la coopération entre les trois premières segmentations. Cette coopération permet une entraide entre les différents concepts afin d'améliorer le résultat final de segmentation.

L'étape de segmentation est précédé par un prétraitement de l'image, afin d'améliorer sa qualité et de réduire les bruits.

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement les principaux filtres d'image avant de présenter les méthodes de segmentation. Enfin nous terminons par la segmentation d'image par la dérivation non entière décrite précédemment.

2. Filtrage [13][14]

En amont de la segmentation on retrouve l'étape du prétraitement. C'est une étape qui a pour but d'améliorer l'image et de faciliter la segmentation. L'amélioration des images est essentiellement obtenue par le filtrage, qui consiste soit à atténuer les bruit indésirable, soit à accentuer les contours.

Le principe du filtrage est l'application d'une opération au niveau du pixel élémentaire en tenant compte de son environnement (pixels voisins). C'est une opération qui consiste à déplacer un filtre (masque), qui est une matrice, sur l'image suivant chaque pixel et de remplacer la valeur de ce dernier par le résultat de l'opération effectuée sur ses voisins. A cet effet, plusieurs filtres ont été définis tels que les filtres linéaires, les filtres non linéaires et les filtres morphologiques. Parmi les filtres linéaires, on retrouve les filtres classiques, passe-haut, passe-bas, moyen, gaussien. Parmi les filtres non-linéaires on peut citer le filtre médian et parmi les filtres morphologiques on a la dilatation, l'érosion, l'ouverture, la fermeture etc.

3. Segmentation d'images [15][16]

Dans la segmentation, on distingue l'approche contour et l'approche régions.

3.1 Approche contours

Dans la segmentation par l'approche contour, on utilise les différentes opérations de détections de contours en se basant sur un changement brutal de l'intensité lumineuse. Les dérivées premières et secondes sont utilisées. Dans le premier cas, on peut citer les différents opérateurs de Roberts, Sobel, Prewitt etc. Dans le second cas, on peut citer le Laplacien.

3.2 Approche régions

Les méthodes de segmentation basées sur les régions ont pour but de décomposer l'image en un ensemble de régions connexes selon un critère d'homogénéité.

D'un point de vue mathématique, segmenter une image I selon un critère d'homogénéité H , consiste à créer une partition de cette image en n régions R_i telles que :

- $\bigcup_{i=1}^n R_i = I, \forall i \neq j R_i \cap R_j = \emptyset$
- $\forall i, R_i$ est connexe
- $\forall i, H[R_i]$ est vrais, la région R_i est dite homogène.
- $\forall (R_i, R_j)$ régions voisines, $H[R_i, R_j]$ est faux

La première condition implique que chaque pixel de l'image doit appartenir à une région R_i et l'union de toutes les régions correspond à l'image entière. La deuxième condition est relative à la structure des régions. Elle définit une région comme un ensemble de pixels qui doivent être connexes. La troisième condition exprime que chaque région doit respecter un prédicat d'uniformité. La dernière condition implique la non réalisation de ce même prédicat pour la réunion de deux régions adjacentes.

La croissance par région et la division-fusion des régions sont des techniques courantes de la segmentation d'image par régions.

Ainsi, l'approche segmentation par division de régions consiste à diviser l'image originale en régions homogènes au sens d'un critère donné. Ce processus est récursif et considère que la région initiale correspond à l'image à analyser. Si une région ne respecte pas un prédicat d'homogénéité, elle est divisée en quatre sous régions de taille égale. Chaque sous-région est ensuite

analysée. L'algorithme s'arrête lorsque toutes les régions respectent le prédicat d'homogénéité.

L'approche de fusion de régions, quant à elle, est principalement fondée sur l'analyse d'un graphe d'adjacence de régions, non orienté, dont chaque nœud représente une région et chaque arête représente une adjacence entre deux régions.

L'analyse du graphe d'adjacence de régions permet de fusionner des régions d'une image sur-segmentée. Le procédé consiste à fusionner deux nœuds reliés par une arête à condition qu'ils respectent un critère de fusion.

La segmentation par division-fusion regroupe les deux approches précédentes. Cette méthode est caractérisée par la division au préalable de l'image en régions homogènes disjointes qui respectent des critères globaux. Puis elle consiste à fusionner des régions adjacentes qui vérifient des critères locaux.

Ce type de segmentation consiste à faire croître des régions en y ajoutant successivement les pixels adjacents qui satisfont un critère d'homogénéité. La croissance s'arrête lorsque tous les pixels ont été traités.

L'étape initiale consiste donc à sélectionner les germes des régions qui correspondent généralement à un pixel. Puis, les régions sont construites en y ajoutant successivement les pixels qui leur sont connexes et qui vérifient un critère de similarité.

La segmentation par coopération régions-contours a suscité un grand intérêt ces dernières années. Elle consiste en une coopération entre la segmentation par régions et la segmentation par contours en exploitant les avantages de ces deux types de segmentation afin d'aboutir à un résultat de segmentation plus précis que celui obtenu à l'aide d'une seule technique. Cette coopération contribue à une meilleure prise en compte des caractéristiques des entités de l'image et, par conséquent, à une meilleure segmentation. En effet, les algorithmes combinant les techniques de segmentation basées sur les régions et celles basées sur les contours prennent avantage de la nature complémentaire de l'information sur la région et sur le contour. Ainsi, une segmentation par coopération régions-contours peut être exprimée comme

une entraide entre ces deux concepts afin d'améliorer le résultat final de segmentation.

La coopération entre les régions et les contours pour la segmentation d'image est utilisée selon trois approches différentes. D'une part, cette différence se manifeste dans l'étape où l'intégration de l'information sur les régions et celle sur les contours est réalisée. D'autre part, elle apparaît dans la façon que cette intégration est produite. Ainsi, ces trois approches sont la coopération séquentielle, la coopération des résultats et la coopération mutuelle. Dans le premier cas, l'une des techniques de segmentation (région ou contour) est réalisée en premier lieu. Son résultat va être exploité par l'autre technique pour renforcer la définition des critères ou des paramètres de la segmentation. Dans le deuxième cas, les deux types de segmentation seront réalisés indépendamment ; la coopération concernera leurs résultats qui seront intégrés afin d'atteindre une meilleure segmentation. Dans le cas trois, les deux types de segmentations coopéreront mutuellement au cours de leur processus d'exécution.

3.3. Segmentation par seuillage [17]

La segmentation par seuillage est la méthode la plus utilisée en raison de sa simplicité et de sa rapidité d'exécution. Elle se base exclusivement sur la distribution des niveaux de gris de l'histogramme de l'image. Le seuil optimal est celui qui permet de séparer les objets entre eux ou différents objets du fond.

Le seuillage a pour objectif de segmenter une image en plusieurs classes en n'utilisant que l'histogramme. A chaque pic de l'histogramme est associée une classe.

Soit $L = \{0, 1, 2, \dots, l-1\}$ l'ensemble des niveaux de gris d'une image, avec $l(x,y)$ la luminance (le niveau de gris) d'un pixel de coordonnées (x, y) et $l-1$ le niveau de gris maximal.

La segmentation par seuillage est l'opération qui consiste à répartir les pixels en K classes (C_1, C_2, \dots, C_K) à partir d'un ensemble de seuils $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{K-1}\}$.

Un pixel de niveau de gris $l(x,y)$ est affecté à la classe C_K si :

$$t_K < l(x,y) \leq t_{K+1}$$

Par convention, on utilise deux autres seuils $t_0 = 0$ et $t_K = 1-1$.

Dans le cas d'un seuillage simple (un seul seuil), on fait le choix du seuil t :

Si $I(x,y) < t$ le pixel est un fond.

Si non le pixel est un objet.

Le seuillage peut se dérouler de façon manuelle en quatre étapes :

- Observation de l'histogramme ;
- choix des seuils dans les vallées de l'histogramme;
- Définition des classes de régions ;
- Classement des pixels.

Le challenge de cette technique de segmentation est de trouver ce seuil optimal de manière automatique. Dans la littérature, plusieurs classifications de ces méthodes ont été proposées, mais la plupart des auteurs (Sezgin, et al., 2004 [18]; Otsu, 1979 [19]; Kittler, et al., 1986 [20]; Kapur, et al., 1985 [21]; Cheriet, et al., 1998 [22]; Pal, et al., 1991 [23]; Reddi, et al., 1984 [24]; Hou, et al., 2006 [25]; Ng, 2006 [26]; Lahfi, et al., 2006a [27]) classent les méthodes de seuillage en deux catégories : les méthodes paramétriques et les méthodes non paramétriques.

Les méthodes paramétriques de segmentation d'image supposent que les différentes classes de l'image suivent une certaine fonction de densité de probabilité qui est généralement supposée suivre un modèle gaussien. L'histogramme de l'image est approché par une combinaison linéaire de gaussiennes et les seuils optimaux sont choisis aux intersections de celles-ci. Le problème se décompose alors en deux étapes : estimer les paramètres des densités de probabilité et déterminer les seuils de segmentation.

Les méthodes non paramétriques ont la réputation d'être des méthodes robustes, elles se basent sur l'optimisation d'un ou plusieurs critères statistiques sans aucune estimation de paramètres. Les deux méthodes de référence dans cette classe sont la méthode d'Otsu (Otsu, 1979) et la méthode de Kapur *et al.* (Kapur, et al., 1985). La plupart des techniques parues ensuite sont basées sur l'un des deux principes.

- *La méthode d'Otsu*

Otsu décrit trois critères équivalents de discrimination des classes: la variance intraclasse, la variance interclasse et la variance totale. Et suivant la situation, l'un d'eux est choisi. Cependant, le choix des auteurs se base souvent sur la maximisation de la variance interclasse, vu la simplicité de sa mise en œuvre.

La méthode d'Otsu se base dans le calcul des différents critères sur la densité de probabilité des pixels de l'image obtenue en normalisant l'histogramme:

Soit h l'histogramme de l'image. La densité de probabilité p_i du pixel de niveau de gris i est donnée par : $p_i = \frac{h(i)}{\sum_{j=0}^{L-1} h(j)}$

avec $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{L-1} p_i = 1$

$h(i)$ est le nombre d'occurrences du pixel de niveau de gris $i \in \{1, 2, \dots, L-1\}$. Dans le cas d'une binarisation (deux classes), le seuil optimal t^* est celui qui maximise le ratio de la variance interclasse à la variance totale :

$$t^* = \text{Arg}_t \max \frac{\sigma_B^2(t)}{\sigma_T^2}$$

avec :

$$\sigma_B^2(t) = p_t(p_t - 1)(\mu_1 - \mu_0)^2 \text{ la variance interclasse}$$

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^{L-1} p_i (i - \mu_t)^2 \text{ la variance totale}$$

$$\begin{aligned} \text{Où } p_t &= \sum_{i=1}^t p_i ; \\ 1 - p_t &= \sum_{i=t+1}^{L-1} p_i \\ \mu_0 &= \sum_{i=1}^t i \frac{p_i}{p_t} \\ \mu_1 &= \sum_{i=t+1}^{L-1} i \frac{p_i}{1-p_t} \\ \mu_t &= \mu_0 + \mu_1 \end{aligned}$$

L'efficacité de la méthode d'Otsu n'est prouvée que lorsqu'il n'y a qu'un seul type d'objet à segmenter dans l'image, vu que les pixels de l'image sont regroupés en deux classes. A fin de pallier a ce problème, cheriet et al. (cheriet et al. 1998) ont proposer d'appliquer la méthode d'Otsu de façon récursive, de manière a segmenter un seul objet à la fois dans l'image. La segmentation complète se fait alors par regroupement de tous les objets segmentés.

- *La méthode de Kapur et al.*

La méthode de Kapur et al., ou méthode du seuillage entropique, est basée sur le principe de la maximisation de l'entropie totale de Shannon. La méthode suppose que deux objets d'une même image ont des densités de probabilité indépendantes. Le seuil optimal est celui qui permet de maximiser l'entropie de l'image partitionnée. Dans le cas de deux classes (A et B), les entropies partielles sont données par :

$$H_A(t) = - \sum_{i=1}^t \frac{p_i}{p_t} \log_2 \frac{p_i}{p_t}$$

$$H_B(t) = - \sum_{i=t+1}^{L-1} \frac{p_i}{1-p_t} \log_2 \frac{p_i}{1-p_t}$$

L'entropie totale : $H_T(t) = H_A(t) + H_B(t)$

L'entropie de Shannon n'est pas définie pour les densités de probabilité incluant des probabilités nulles. Pour pallier à ce problème, Pal *et al.* ont alors proposé une nouvelle définition de l'entropie :

$$H_T(t) = - \sum_{i=1}^t \frac{p_i}{p_t} e^{1-\frac{p_i}{p_t}} - \sum_{i=t+1}^{L-1} \frac{p_i}{1-p_t} e^{1-\frac{p_i}{1-p_t}}$$

Le seuil optimal donné par le seuillage entropique est :

$$t^* = \text{Arg}_{1 \leq t < L} \max\{H_T(t)\}$$

Notons que les méthodes de seuillage énoncées précédemment, sont des techniques de seuillage global, qui se basent sur le choix d'un seul seuil de segmentation pour toute l'image. Cependant, dans le cas où on a une variation de la luminosité de l'image, le seuillage global n'est plus efficace pour extraire les objets du fond. La solution à ces problèmes est le seuillage adaptatif, qui consiste à découper l'image en sous images, de tailles prédéfinies, et appliquer une technique de seuillage globale à chacune de ces sous images.

4. Dérivation non entière en segmentation d'images

Après avoir présenté les différentes techniques de segmentation d'images, nous introduisons dans cette section, la dérivation non entière appliquée pour la segmentation d'images. Le premier paragraphe est dédié

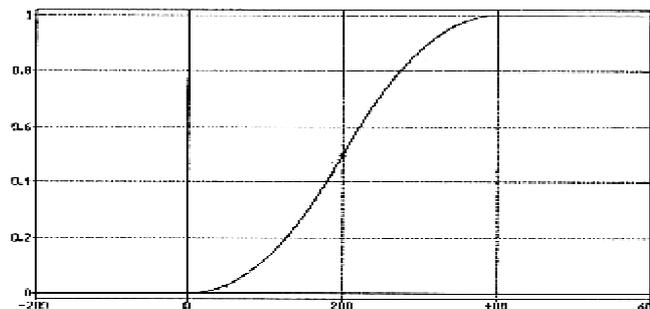
au calcul de la dérivée non entière d'une transition parabolique, afin d'introduire le principe du détecteur CRONE (détecteur de contours robuste d'ordre non entier). La forme discrète de la DNE à une dimension (1D), et son extension aux espaces à deux dimensions (2D) sont en suite illustrées. Enfin, deux variantes de l'algorithme, basées sur la DNE-1D et DNE-2D sont détaillées.

4.1. Dérivation non entière d'une transition parabolique de type marche [28]

Notre objectif est de calculer la dérivation non entière d'une transition parabolique de type marche et de comparer l'abscisse de son maximum a celle du point d'inflexion de la transition.

La transition parabolique considérée présente un point d'inflexion d'abscisse $x_0=200$ (voir la figure 1). Son équation analytique est donnée par la fonction $f(x)$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ax^2 & 0 \leq x \leq x_0 \\ -ax^2 + 4ax_0x - 2ax_0^2 & x_0 \leq x \leq 2x_0 \\ 2ax_0^2 & x \geq 2x_0 \end{cases}$$



Par l'application du formalisme de Cauchy, la fonction dérivée non entière s'écrit alors :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x^{-n+2} & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{-4a}{\Gamma(-n+3)} (x-x_0)^{-n+2} + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x^{-n+2} & x_0 \leq x \leq 2x_0 \\ \frac{-4a}{\Gamma(-n+3)} (x-x_0)^{-n+2} + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x^{-n+2} + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} (x-x_0)^{-n+2} & x \geq 2x_0 \end{cases}$$

Afin de voir l'influence de l'ordre de dérivation, deux intervalles de dérivation sont choisis et chacun d'eux détermine une allure spécifique des courbes de la fonction dérivé.

- L'ordre de dérivation compris entre 0 et 1

Pour $n \in]0, 1[$ la fonction dérivée non entière de $f(x)$ soit $f^{(n)}(x)$ est représentée par la figure (2) pour différentes valeurs de n .

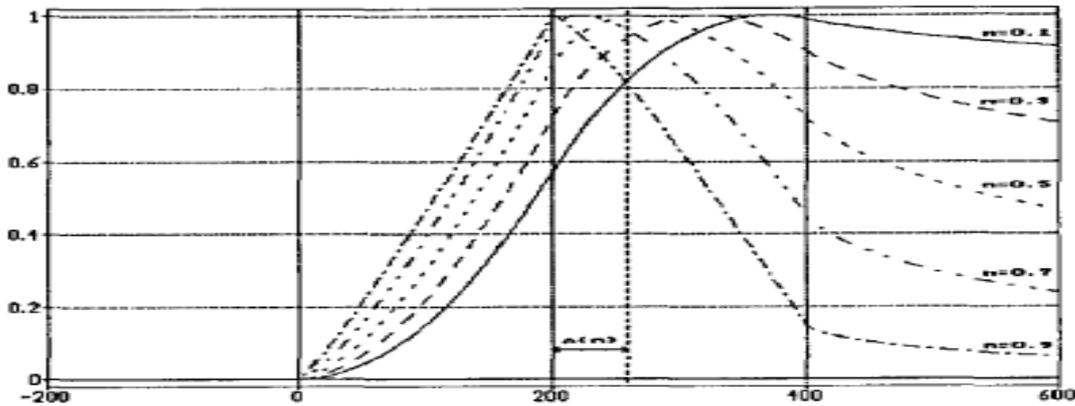


Fig. 2. Allure de $f^{(n)}(x)$ pour différents ordres de dérivation compris entre 0 et 1

On remarque que l'abscisse du maximum de $f^{(n)}(x)$ est décalée à droite de x_0 , pour le montrer on procède de la manière suivante :

- Soit x_1 l'abscisse du maximum de $f^{(n)}(x)$, obtenu par résolution de

$$\text{l'équation : } \left[\frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \right]_{x=x_1} = 0.$$

- Montrer que $x_1 > x_0$?

Pour cela il suffit de montrer que $\left[\frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \right]_{x=x_0} > 0$.

$$\text{on a } \left[\frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \right]_{x=x_0} = \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x_0^{-n+1} > 0 \text{ donc } x_1 > x_0.$$

Avec l'hypothèse que $x_1 < 2x_0$:

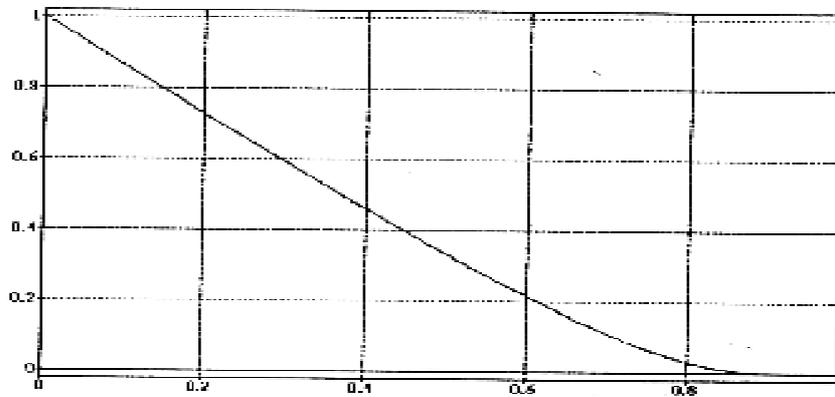
$$\left[\frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \right]_{x=x_1} = \frac{-4a}{\Gamma(-n+3)} (x_1 - x_0)^{-n+1} + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x_1^{-n+1} = 0$$

L'expression de décalage est donnée par :

$$\Delta(n) = x_1 - x_0 = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-n}}} x_0$$

$\Delta(n) < x_0$ ce qui traduit la validité de l'hypothèse que $x_1 \in]x_0, 2x_0[$.

La variation du décalage $\Delta(n)$ est représentée par la figure (3) pour $n \in]0, 1[$



$n \in]0, 1[$

- L'ordre de dérivation compris entre 1 et 2

Dans le cas où $n \in]1, 2[$, l'abscisse du maximum de la fonction dérivée non entière s'identifie à celle du point d'inflexion de la transition. Comme le montre la figure (4), le décalage $\Delta(n)$ enregistré pour $n \in]0, 1[$ est en effet inexistant dans ce cas en plus la pente de la fonction dérivée, qui est infinie à droite de l'abscisse du point d'inflexion.

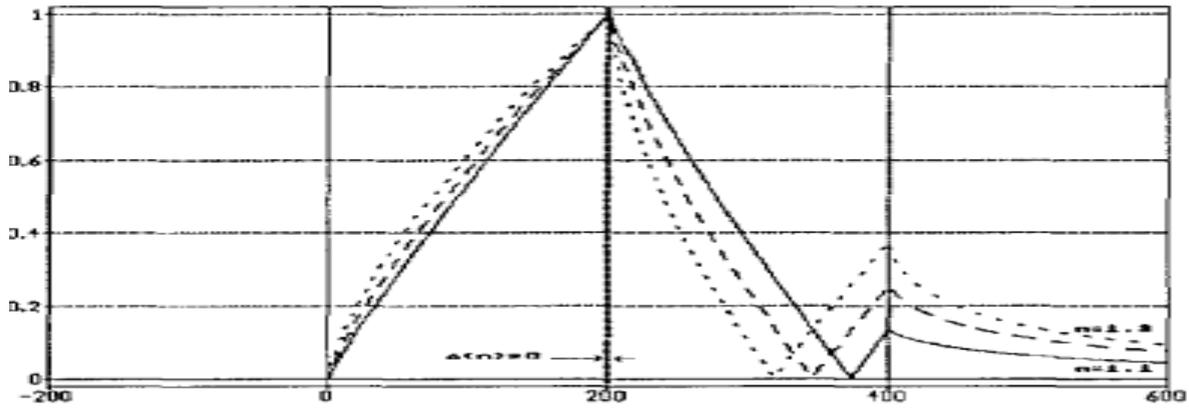


Fig.4 Allure de $f^{(n)}(x)$ pour différents ordres de dérivation compris entre 1 et 2

Ainsi, pour $1 < n < 2$, la dérivation non entière assure, non seulement la détection du point d'inflexion de la transition (première propriété), mais en outre une détection très sélective de ce point (deuxième propriété).

L'objectif recherché est donc l'accroissement de la sélectivité de la détection du point d'inflexion. Pour cela un opérateur, dont la réponse à une marche parabolique présente une pente infinie à droite et à gauche de l'abscisse du point d'inflexion, est élaboré. Cette stratégie conduit au détecteur CRONE.

4.2. Détecteur CRONE [29]

L'objectif du détecteur CRONE est l'accroissement de la sélectivité δ_N , qui peut être définie comme l'inverse de la largeur Δx de la bande à $N\%$ du maximum de la réponse du détecteur: $\delta_N = \frac{1}{\Delta x}$ (voir la figure 5).

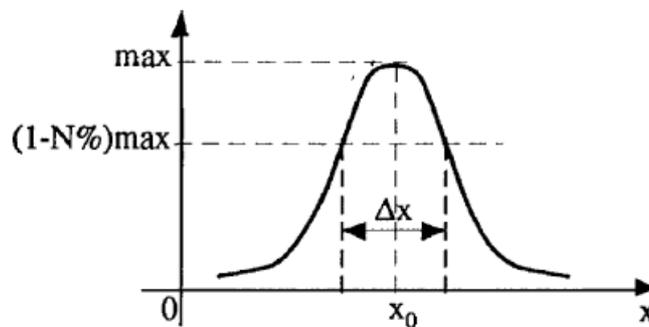


Fig. 5 Sélectivité de la détection $\delta_N = \frac{1}{\Delta x}$

Le détecteur CRONE vise à avoir une réponse qui présente un point de rebroussement à l'abscisse du point d'inflexion (voir la figure 6).

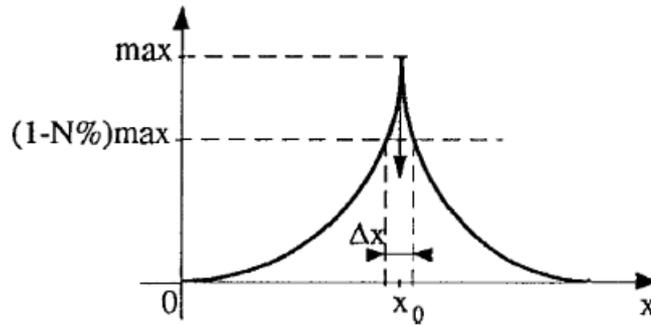


Fig.6. Accroissement de la sélectivité par un point de rebroussement

Suivant les x croissants, la pente de la fonction dérivée est infinie à droite de l'abscisse x_0 du point d'inflexion, pour un ordre de dérivation compris entre 1 et 2 (voir la figure 7.a).

L'objectif est d'obtenir la pente infinie à gauche de l'abscisse x_0 du point d'inflexion suivant les x décroissants (voir la figure 7.b). Or la fonction dérivée à gauche de l'abscisse x_0 du point d'inflexion suivant les x décroissants (voir la figure 7.c) est à l'opposé de celle désirée. La solution serait d'additionner la fonction dérivée calculée suivant les x croissants avec l'opposé la fonction dérivée calculée suivant les x décroissants (voir la figure 8). Ainsi, l'opérateur spatial, qui définit le détecteur CRONE, est donné par :

$$\begin{matrix} D^n & D^n & D^n \\ \leftrightarrow & = & \rightarrow - \leftarrow \end{matrix}$$

\rightarrow^{D^n} : L'opérateur qui calcul la dérivée non entière d'ordre n suivant les x croissants.

\leftarrow^{D^n} : L'opérateur qui calcul la dérivée non entière d'ordre n suivant les x décroissants.

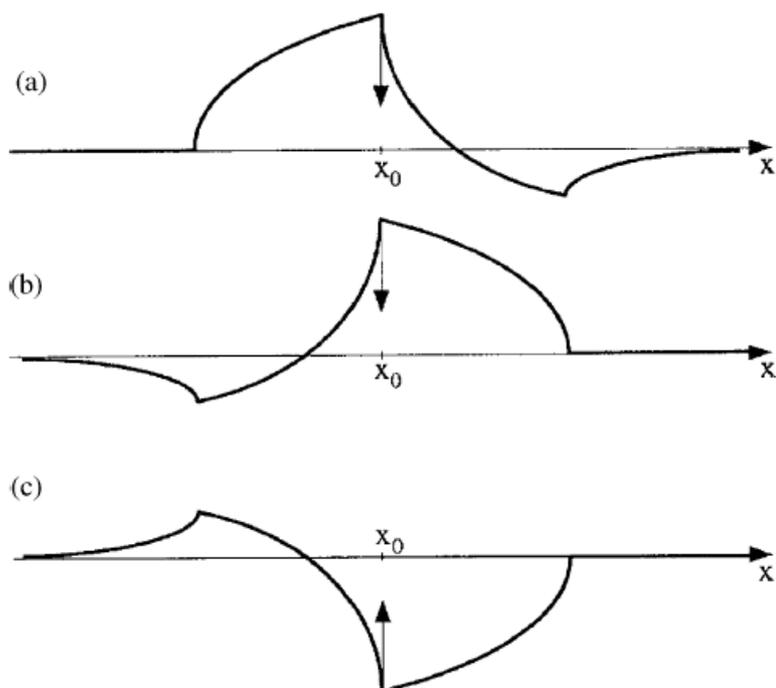


Fig. 7 Chronologie des étapes ponctuant l'approche adoptée pour $1 < n < 2$:

- (a): fonction obtenue pour x croissant.
- (b): fonction désirée pour x décroissant.
- (c): fonction obtenue pour x décroissant.

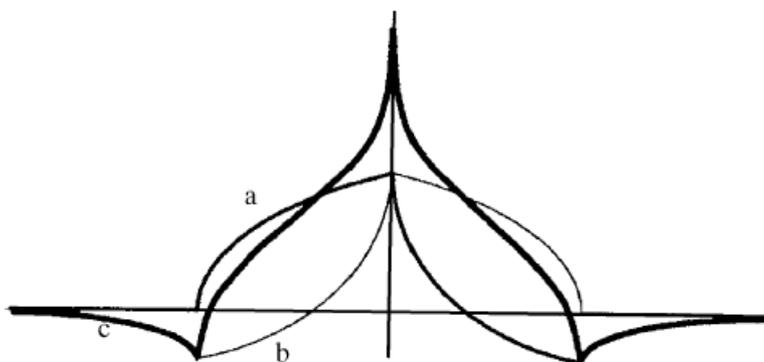


Fig. 8 Construction de la réponse du détecteur CRONE pour $1 < n < 2$:

- (a): fonction calculée pour x croissant.
- (b): opposé de la fonction calculée pour x décroissant.
- (c): réponse du détecteur.

Notons que la sélectivité croît avec l'ordre de dérivation, contrairement à l'immunité au bruit qui diminue, ce qui pose le dilemme sélectivité-immunité au bruit. Afin d'améliorer ce compromis, le détecteur CRONE, conçu pour $1 < n < 2$ est étendu à l'intervalle $]-1, 1[$.

- *Détecteur CRONE a 1 dimension*

Par la formule du binôme de Newton on calcul les composantes du masque :

$$D_{\leftrightarrow}^{(n)} f(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k [f(x - kh) - f(x + kh)] \quad \text{avec} \quad a_k = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Avec n : l'ordre de dérivée

- *Détecteur CRONE a 2 dimensions*

Afin d'extraire les contours d'une image, il convient d'étendre à 2 dimensions le détecteur CRONE conçu en 1 dimension.

On considère l'opérateur vectoriel, dont chacune des deux composantes (suivant x et y) réalisée par le détecteur CRONE a une dimension.

Si $N \times N$ est la dimension de l'image et $2m+1$ la taille des composantes du masque, on obtient :

✓ Le masque correspondant à la composante horizontale :

$$[+ a_m \dots \dots \dots + a_1 \ 0 \ - a_1 \dots \dots \dots - a_m]$$

✓ Le masque correspondant à la composante verticale :

$$\begin{bmatrix} + a_m \\ \vdots \\ \vdots \\ + a_1 \\ 0 \\ - a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ - a_m \end{bmatrix}$$

Avec a_k les composantes du binôme de Newton :

$$a_k = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

4.3. Forme discrète de la DNE

- *Forme discrète de la DNE-1D*

L'approximation de la forme discrète de DNE d'ordre α d'une fonction $f(x)$ est donnée par (Oldham, et al., 1974) :

$$D^\alpha f(x) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^M \omega_k(\alpha) f(x - kh)$$

Où h le pas d'échantillonnage, M le nombre d'échantillons, $x = h.M$, et $\omega_k(\alpha)$ sont définis par : $\omega_0(\alpha) = 1, \omega_{k+1}(\alpha) = \frac{(k+1)-\alpha-1}{(k+1)} \omega_k(\alpha)$ pour $k = 0, 1, \dots, (M-1)$

La fonction $D^\alpha f(x)$ peut être interprétée comme la sortie d'un filtre discret dont l'entrée est $f(x)$. Sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(k) = \begin{cases} -\omega_k(\alpha)/h^\alpha & k = 1, 2, \dots, M \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

- *Extension de la DNE-1D au cas 2D*

L'extension de la DNE-1D au cas 2D permet son application sur une image qui peut être considérée comme une fonction $f(x, y)$ à deux dimensions, réelle et bornée. L'approximation discrète de la DNE-2D d'une fonction $f(x, y)$ est donnée par (Nakib, et al., 2007f) :

$$D^\alpha f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha f(x, y) \approx \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{k=-[M/2]}^{[M/2]} \sum_{l=-[N/2]}^{[N/2]} p(k, l) \cdot f(x - kh, y - lh)$$

Où M et N représentent le nombre d'éléments de f qui sont pris en compte pour le calcul de l'image différenciée, $(M \times N)$ est la taille du masque.

$p(k, l) = \omega_k(\alpha) \times \omega_l(\alpha)$ sont les éléments du masque $P_M^{(\alpha)}(p(k, l))_{\substack{0 \leq k \leq M \\ 0 \leq l \leq M}}$, calculés précédemment.

La dérivation non entière discrète à 2D peut être vue comme un produit de convolution en 2D d'une image f avec un filtre $P_M^{(\alpha)}$ 2D :

$$D^\alpha f(x, y) = f(x, y) \otimes P_M^{(\alpha)}(x, y)$$

4.4. Algorithmes de segmentation d'images par dérivation non entière [30]

Ces deux algorithmes de segmentation par DNE, reposent sur l'hypothèse d'existence d'une dépendance entre les valeurs d'un pixel et celles de ses voisins. Dans le deuxième algorithme, la dérivation non entière à deux

dimensions est appliquée directement sur l'image traitée. En revanche, le premier algorithme consiste à appliquer la dérivation non entière à une dimension sur l'histogramme de l'image.

- *Algorithme de segmentation par DNE-1D*

Dans cet algorithme, les différentes classes de l'image sont séparées par les pics de son histogramme dérivé. Le seuil de segmentation est choisi selon qu'on soit face à une intégration non entière (ordre de dérivation inférieur à zéro) ou dérivation non entière (ordre de dérivation supérieur à zéro). L'algorithme est exécuté plusieurs fois, avec différentes valeurs de l'ordre de dérivée, afin de trouver le seuil optimal de segmentation.

Les différentes étapes de l'algorithme dans le cas d'une binarisation (deux classes) sont présentées dans l'Algorithme 1 (Fig.9).

Dans le cas de la segmentation en N classes, les $N-1$ seuils sont calculés par l'expression suivante :

$$t_{\alpha}^{(j)} = 1I_{\{\alpha \geq 0\}} \times \max \Omega_{\alpha}^{(j)} + 1I_{\{\alpha < 0\}} \times \min \Omega_{\alpha}^{(j)}$$

avec $\Omega_{\alpha}^{(j)} = \{i: i \in [p_j, p_{j+1}] \text{ et } h^{(\alpha)}(i) > 0\}$; $j=1, 2, \dots, N-1$

où les p_j sont les arguments des pics les plus significatifs de l'histogramme.

1. Calculer l'histogramme $h(x)$ de l'image à segmenter.

2. Calculer la DNE-1D de $h(x)$ pour un ordre α , défini par :

$$h^{(\alpha)} = \max(0, D^{(\alpha)}h)$$

3. Calculer le seuil de segmentation :

Soit l'ensemble $\Omega_{\alpha} = \{i: i \in [p_1, p_2] \text{ et } h^{(\alpha)}(i) > 0\}$; où p_1 et p_2 sont les arguments du premier et du dernier pic significatif dans l'histogramme $h^{(\alpha)}$.

Le seuil de segmentation t_{α} est alors calculé par :

$$t_{\alpha} = 1I_{\{\alpha \geq 0\}} \times \max \Omega_{\alpha} + 1I_{\{\alpha < 0\}} \times \min \Omega_{\alpha}$$

où $1I_{\{\alpha \geq 0\}}$ est la fonction de Heaviside qui est égale à 1 pour $\alpha \geq 0$

4. Afficher les résultats: l'ordre (α), seuil t_{α} et image segmentée.

Fig.9. Algorithme de segmentation par DNE-1D, dans le cas d'une binarisation

- *Algorithme de segmentation par DNE-2D*

L'algorithme de segmentation par DNE-2D se déroule essentiellement en deux étapes. Après le calcul du masque pour un ordre de dérivée α , un filtrage est effectué pour l'image, suivi d'un seuillage de l'image par un seuil de segmentation fixe (Fig.10).

1. Calculer le masque de la DNE-2D pour un ordre α .

2. Filtrer l'image originale $f(x,y)$ par le masque de la DNE-2D et border l'image filtrée $g(x,y)$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} L - 1 & \text{si } g(x,y) \geq L - 1 \\ 0 & \text{si } g(x,y) \leq 0 \end{cases} \text{ avec } L \text{ le nombre total de niveaux de gris qui est} \\ \text{généralement égal à } 256.$$

3. Afficher les résultats: ordre (α), le seuil de segmentation $t_\alpha = L - 2$ et l'image segmentée.

Fig.10 Algorithme de segmentation par DNE-2D, dans le cas d'une binarisation.

5. Conclusion

L'application de la dérivation non entière en traitement d'image que ça soit à une dimension ou par son extension au domaine de deux dimensions vise l'objectif du choix du meilleur ordre de dérivée. Pour cela, la variation de l'ordre de dérivée est effectuée sur un intervalle de valeur souvent choisi entre (-1) et 1 et la valeur optimale est prise de façon à optimiser un critère de segmentation.

Troisième chapitre

Application à la segmentation d'images

1. Introduction

Les deux grandes approches de la segmentation d'images sont la segmentation par contours et la segmentation par régions. Dans les deux cas, la manière la plus classique de segmenter une image, consiste en un premier temps à mettre en valeur les zones significatives à détectés (les contours ou les régions) en faisant appel à des opérateurs de filtrages suivi d'une opération de seuillage afin de parachever la segmentation. Le filtrage est effectué à l'aide de filtres de convolution qui sont outils mathématiques permettant de modifier le contenu d'une image. La méthode consiste à remplacer chaque pixel de l'image par une somme pondérée des pixels voisins. Les poids choisis pour la pondération correspondent aux éléments du filtre de convolution. Dans le cas de la segmentation par contours, des opérateurs de dérivation mettent en évidence les zones de fortes variations de niveaux de gris, qui sont probablement le siège des contours des objets de l'image. En revanche, des opérateurs d'intégration sont utilisés dans la segmentation par régions afin de réduire les variations au sein des régions

homogènes et de mieux détecter les objets de l'image. Dans ce chapitre, les opérateurs de segmentation d'images par dérivation non entières sont étudiés. Ces opérateurs présentent l'intérêt d'avoir un comportement hybride, qui permet leur application aussi bien à la segmentation par régions qu'à la segmentation par contour selon le signe de l'ordre de dérivation. Nous sommes en présence d'une dérivation lorsque l'ordre de dérivation est positif, et d'une intégration lorsque il est négatif. Notons aussi que les opérateurs de segmentation par dérivation non entière résultent d'une discrétisation à une dimension de la dérivation non entière ou de sont extension au cas deux dimensions. Dans ce chapitre, les résultats de la segmentation d'image par dérivation non entière sont présentés. Dans la première section, la dérivation non entière à une dimension est appliquée pour la différentiation de l'histogramme de l'image, les propriétés de ces histogrammes sont ensuite présentées. La deuxième section est dédiée à la segmentation d'image par dérivation non entière à deux dimensions. Le chapitre se termine par une conclusion. Notons que toutes les méthodes présentées dans notre travail ont été implémentées sous l'environnement visuel C++ 2008 sur micro ordinateur ayant une fréquence de 1,80GHZ, mémoire vive de 1Go et disque dur de 150Go.

2. Algorithme de segmentation par dérivation non entière

La discrétisation de la dérivation non entière (DNE) permet la mise en œuvre d'opérateurs de segmentation d'image par contours ou par régions. L'objectif est de chercher l'ordre non entier de dérivation qui donne une meilleure segmentation de l'image selon un critère donné. Le schéma de l'algorithme de segmentation est donné par la figure 1:

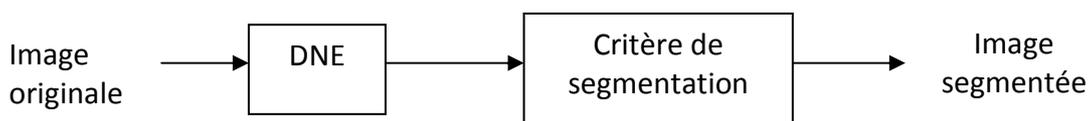


Fig.1. Schéma bloc de l'algorithme de segmentation par DNE

La DNE peut être appliquée sous deux formes discrètes, à deux dimensions pour un filtrage de l'image originale et à une dimension en considérant l'histogramme de l'image originale.

2.1. DNE à une dimension

Les étapes de l'algorithme utilisé pour la segmentation par DNE à une dimension sont (Fig.2):

1. variation de l'ordre non entier de dérivation sur l'intervalle]−1,1[:
2. Calculer l'histogramme $h(x)$ de l'image à segmenter.
3. Calculer la DNE-1D de $h(x)$ pour un ordre α , défini par $h^{(\alpha)} = \max(0, D^{(\alpha)}h)$
4. rechercher les pics significatifs de l'histogramme $h^{(\alpha)}$.
5. Calculer le seuil de segmentation :
 Soit l'ensemble $\Omega_\alpha = \{i: i \in [p_1, p_2] \text{ et } h^{(\alpha)}(i) > 0\}$; où p_1 et p_2 sont les arguments du premier et du dernier pic significatif dans l'histogramme $h^{(\alpha)}$.
 Le seuil de segmentation t_α est alors calculé par :

$$t_\alpha = 1I_{\{\alpha \geq 0\}} \times \max \Omega_\alpha + 1I_{\{\alpha \leq 0\}} \times \min \Omega_\alpha$$
 où $1I_{\{\alpha \geq 0\}}$ est la fonction de Heaviside qui est égale à 1 pour $\alpha \geq 0$
6. calculer le critère de segmentation
7. Afficher les résultats: l'ordre optimal α^* , seuil optimal th_{α^*} et image segmentée.

Fig.2 Algorithme de DNE 1D

Dans cette procédure de segmentation, l'Algorithme est exécuté plusieurs fois, avec un ordre de dérivation α différent sur l'intervalle]−1,1[, avec un pas de variation $dx = 0.1$. L'objectif est de trouver l'ordre α optimal, et par là la binarisation optimale de l'image. Pour cela, à chaque valeur de l'ordre α , la dérivée non entière de l'histogramme $h(x)$ de l'image originale est calculée

par la formule suivante : $h^{(\alpha)}(x) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^M \omega_k(\alpha) h(x - kh)$

$$\omega_0(\alpha) = 1, \omega_{k+1}(\alpha) = \frac{(k+1)-\alpha-1}{(k+1)} \omega_k(\alpha) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, (M-1), M = 11.$$

L'ensemble des seuils possibles est obtenu par recherche des pics significatifs de l'histogramme différentié. Le seuil de segmentation est alors choisi selon que le signe de l'ordre de dérivation soit positif ou négatif. La valeur maximale est attribuée au seuil pour un ordre de dérivation α positif et la valeur minimale dans le cas contraire :

$$t_\alpha = 1I_{\{\alpha \geq 0\}} \times \max \Omega_\alpha + 1I_{\{\alpha \leq 0\}} \times \min \Omega_\alpha$$

L'étape suivante de l'algorithme, consiste à utiliser un critère de segmentation qui permettra de choisir l'ordre de dérivation optimal α^* en correspondance avec le seuil de segmentation optimal th_{α^*} .

Nous avons utilisé séparément deux critères pour le choix du seuil de segmentation, le premier consiste à maximiser l'entropie totale de l'image. Le seuil de segmentation est celui qui maximise l'entropie totale $H_T(th_\alpha)$:

$$H_T(th_\alpha) = - \sum_{i=1}^{th_\alpha} \frac{p_i}{p_t} \ln \left(1 - \frac{p_i}{p_t}\right) - \sum_{i=th_\alpha+1}^{L-1} \frac{p_i}{1-p_t} \ln \left(1 - \frac{p_i}{1-p_t}\right)$$

Le second critère consiste à minimiser de la variance intra classe :

$$W_T(th_\alpha) = W_1 + W_2$$

Les résultats obtenus sur des images testées sont donnés par les figures 2 et 3 suivantes :

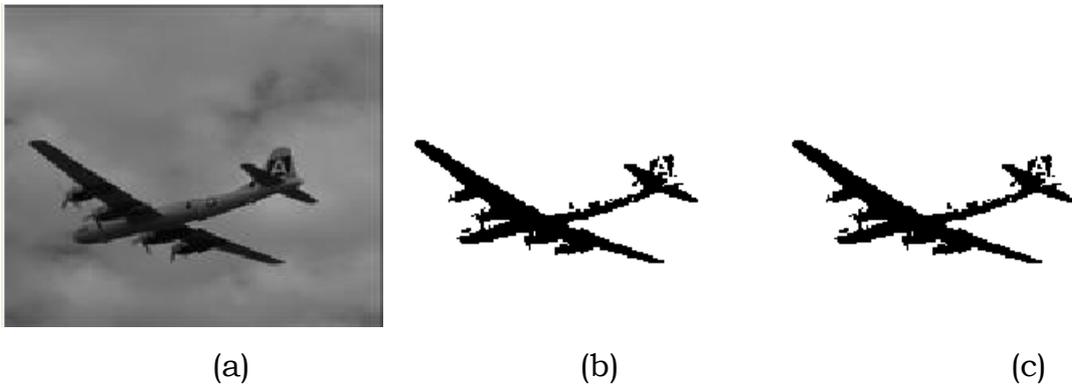


Fig.3. Segmentation des images avion:

- (a) Image avion originale
- (b) image avion segmentée par DNE-1D, $th^* = 56$, $\alpha_{(entropie)}^* = 0.9$
- (c) image avion segmentée par DNE-1D, $th^* = 56$, $\alpha_{(variance)}^* = 0.6$

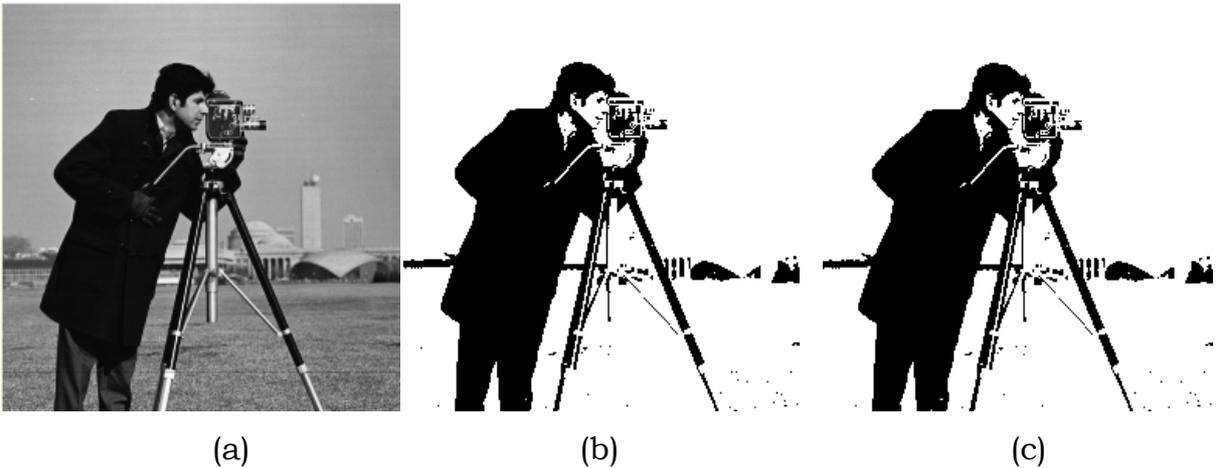


Fig.4. Segmentation des images cameraman:

- (a) Image cameraman originale
- (b) image cameraman segmentée par DNE-1D, $th^* = 77$, $\alpha_{(entropie)}^* = 0.9$
- (c) image cameraman segmentée par DNE-1D, $th^* = 76$, $\alpha_{(variance)}^* = 0.7$

Afin d'améliorer les résultats obtenus, nous utilisons une combinaison linéaire des résultats des deux critères utilisés. L'ordre de dérivation choisi sera obtenu par la combinaison linéaire de l'ordre de dérivation obtenu par maximisation de l'entropie et celui obtenu par minimisation de la variance :

$$\alpha^* = \beta * \alpha_{(entropie)}^* + (1 - \beta) * \alpha_{(variance)}^*$$

Les résultats obtenus pour les deux images testées sont donnés par la figure 5.



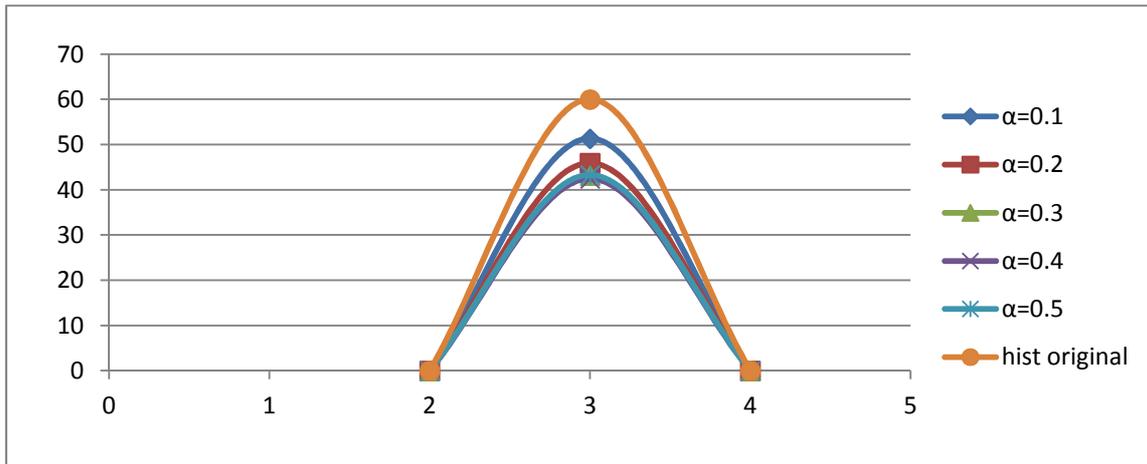
Fig.5 Segmentation par DNE-1D:

(a) image avion avec $\alpha^* = 0.75, th_{\alpha}^* = 55$

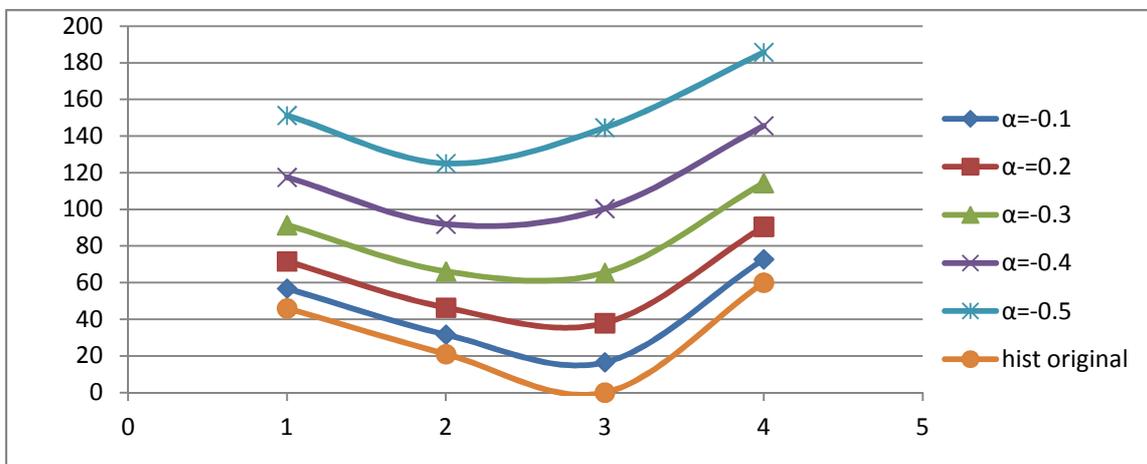
(b) image cameraman avec $\alpha^* = 0.8, th_{\alpha}^* = 77$

La figure 6 représente les formes de l'histogramme différencié de l'image avion, (a) pour une variation de l'ordre de dérivation de 0.1 à 0.5, avec un pas de variation de 0.1, (b) pour une variation de l'ordre de dérivation de -0.5 à -0.1, avec un pas de variation de 0.1.

Lorsque l'histogramme est différencié avec un ordre α positif, son amplitude est comprimée. Nous avons remarqué qu'avec l'augmentation de l'ordre de 0 vers 1, l'intervalle de variations diminue considérablement. En revanche, dans le cas où la valeur de α s'étend de -1 à 0, l'intervalle de variations de l'amplitude augmente.



(a)



(b)

Fig.6 Forme de l'histogramme différencié de l'image avion
 (a) pour une variation de l'ordre de dérivation de 0.1 à 0.5
 (b) pour une variation de l'ordre de dérivation de -0.5 à -0.1

2.2. DNE à deux dimensions

L'extension de la dérivation non entière à une dimension au cas deux dimensions permet un filtrage de l'image au moyen d'un masque DNE-2D. Les étapes de l'algorithme utilisé pour la segmentation par dérivation non entière à deux dimensions sont données en figure 7.

Calculer le masque de la DNE-2D pour un ordre α .

12. Filtrer l'image originale par le masque DNE-2D.

3. Borner l'image filtrée $g(x,y)$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} L-1 & \text{si } g(x,y) \geq L-1 \\ 0 & \text{si } g(x,y) \leq 0 \end{cases}$$

avec L le nombre total de niveaux de gris qui est généralement égal à 256.

4. Afficher image segmentée.

Fig.7 Algorithme de DNE 1D

L'algorithme est exécuté pour un ordre de dérivation α fixe. Pour ce faire, le masque de la DNE-2D $P_M^{(\alpha)}(p(k,l))_{\substack{0 \leq k \leq M \\ 0 \leq l \leq M}}$ de taille $(M * M) = (3 * 3)$ est utilisé pour filtrer l'image originale $f(x,y)$. L'image filtrée est donnée par :

$$D^\alpha f(x,y) = f(x,y) \otimes P_M^{(\alpha)}(x,y)$$

$$p(k,l) = \omega_k(\alpha) \times \omega_l(\alpha)$$

L'image filtrée est ensuite bornée par la valeur $(L-1)$, avec L le nombre total de niveaux de gris qui est généralement égal à 256.

Afin d'illustrer l'effet de l'application de la DNE-2D sur une image, nous considérons les images test « avion, cameraman, et maison ». La figure 6. (a), (b), et (c) illustre les résultats de la dérivation non entière a deux dimensions pour les ordre de dérivation -0.3, -0.6, -0.9 respectivement. La figure 8.(d), (e), et (f) représente les résultats pour les ordre de dérivation 0.3, 0.6, 0.9 respectivement.

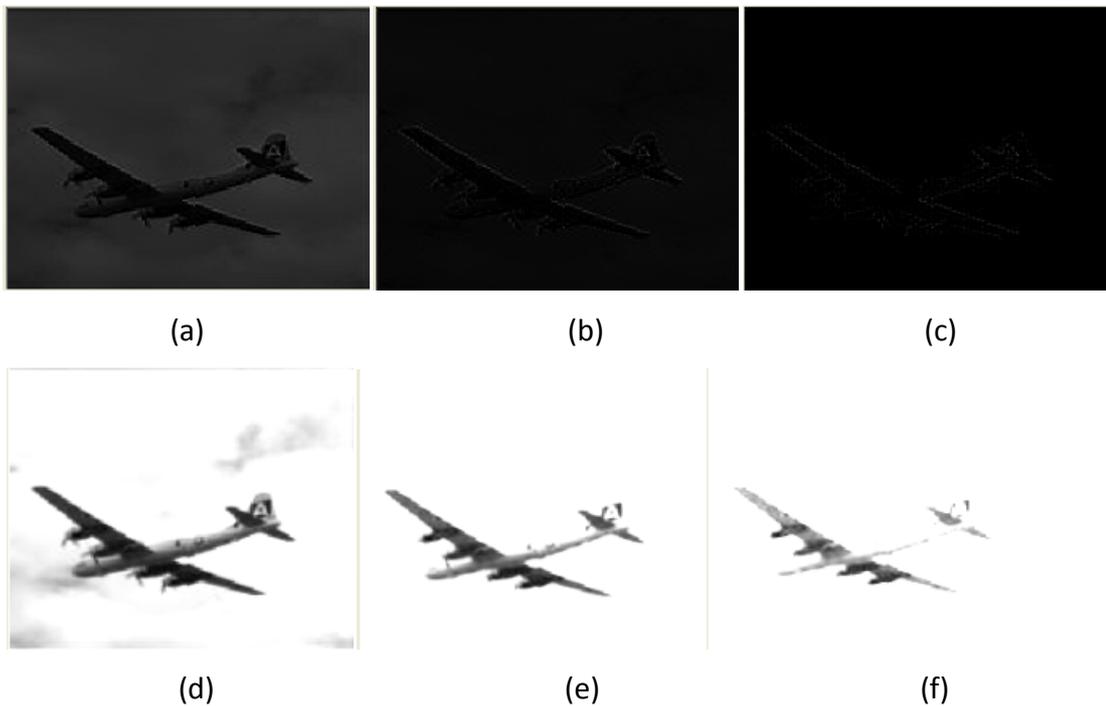


Fig.8 Segmentation par DNE-2D l'image test avion avec l'ordre de dérivation :

- (a) $\alpha = +0.3$
- (b) $\alpha = +0.6$
- (c) $\alpha = +0.9$
- (d) $\alpha = -0.3$
- (e) $\alpha = -0.6$
- (f) $\alpha = -0.9$

La figure 9 présente les résultats de la segmentation de l'image test cameraman.

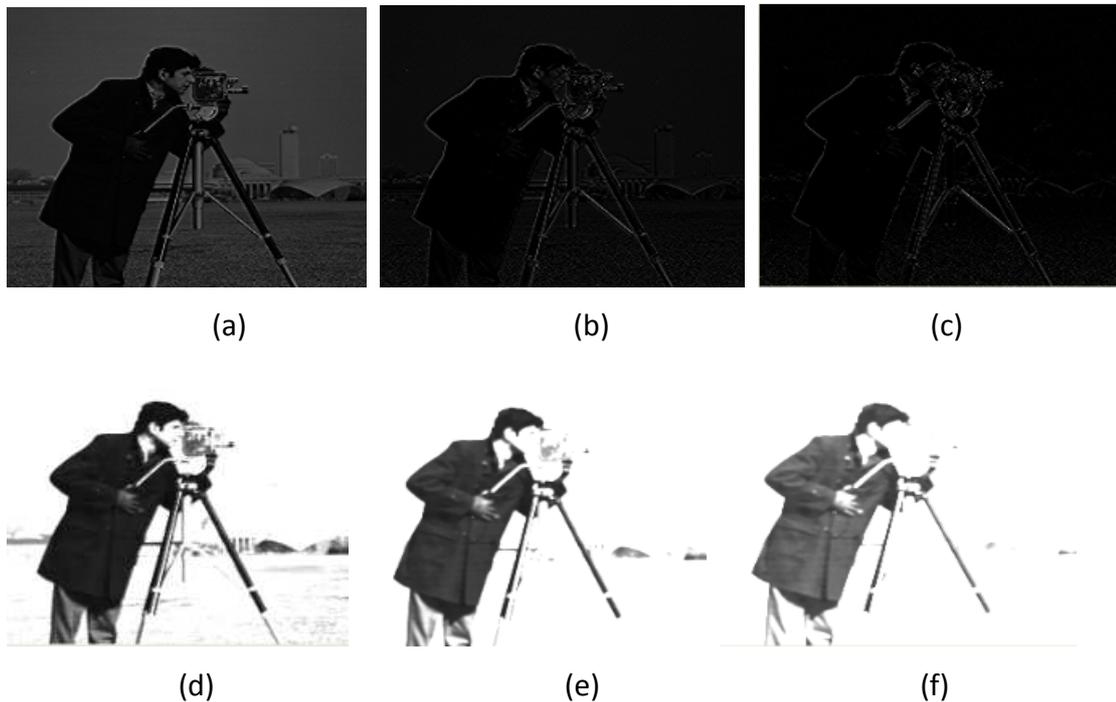


Fig.9 Segmentation par DNE-2D de l'image test cameraman avec l'ordre de dérivation :

- (a) $\alpha = +0.3$
- (b) $\alpha = +0.6$
- (c) $\alpha = +0.9$
- (d) $\alpha = -0.3$
- (e) $\alpha = -0.6$
- (f) $\alpha = -0.9$

Les résultats illustrés par la figure 8 et 9 montrent que la segmentation d'images par dérivation non entière à deux dimensions, s'applique aussi bien à la segmentation par contour qu'à la segmentation par régions. Les régions des images sont obtenues lorsque l'ordre de dérivation est négatif et les contours lorsque l'ordre est positif. Ce qui facilite le passage de l'approche régions à l'approche contours, par inversion du signe de l'ordre de dérivation.

Comme le montre la figure 7, l'objet (avion) a pu être parfaitement isolé du fond (nuages) et la séparation des objets du fond s'améliore progressivement lorsque l'ordre de dérivation s'accroît. Ces résultats sont d'autant intéressants que la dimension du filtre DNE-2D utilisé demeure constante.

Après séparation des objets du fond, leur extraction devient facile au moyen d'une binarisation de l'image. La figure 10 représente les résultats de la binarisation des images des figures 8 et 9 pour les différentes valeurs de α :

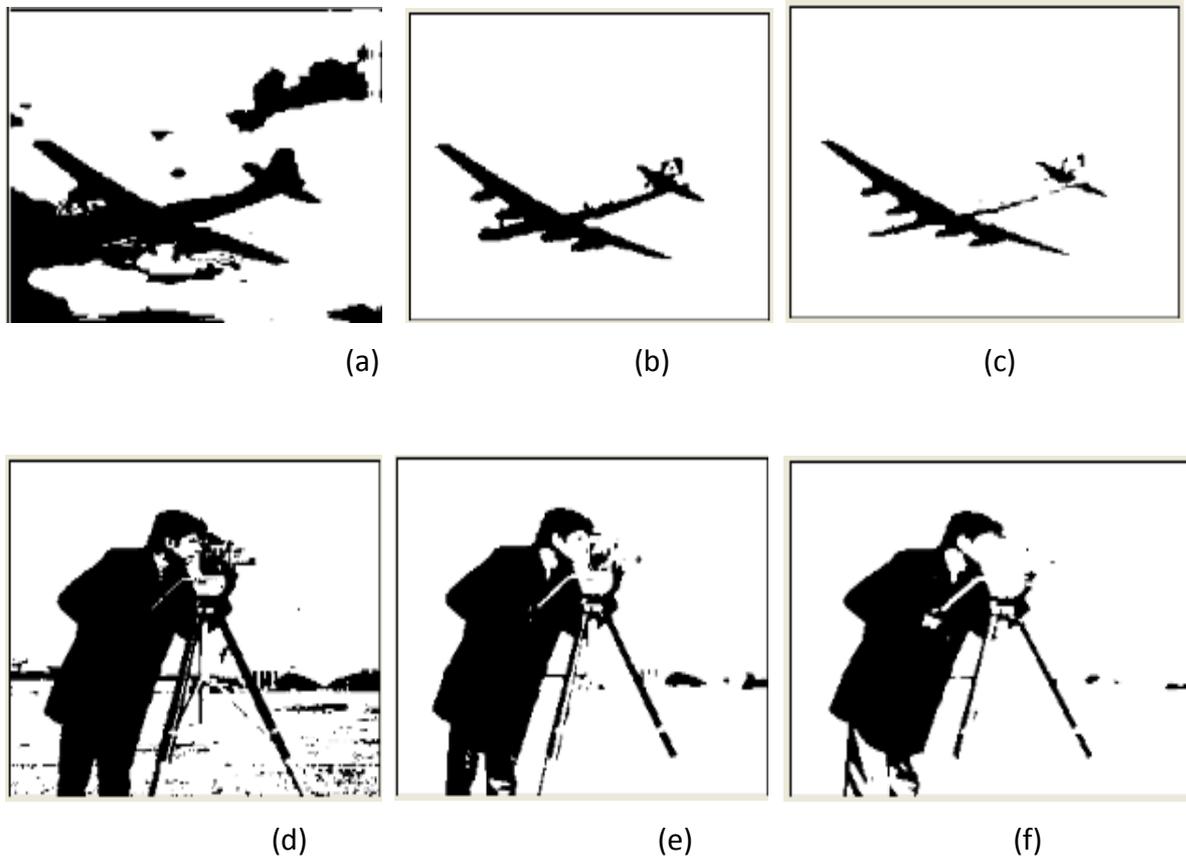


Fig.10 Binarisation par DNE-2D des images test avion et cameraman avec l'ordre de dérivation :

- (a) $\alpha = -0.3$
- (b) $\alpha = -0.6$
- (c) $\alpha = -0.9$
- (d) $\alpha = -0.3$
- (e) $\alpha = -0.6$
- (f) $\alpha = -0.9$

Comme dans le cas de l'application de la dérivation non entière à une dimension, le filtrage des images par dérivation non entière à deux dimensions nécessite un choix de la valeur de l'ordre de dérivation. Et ceci au moyen de l'optimisation d'un critère qui donne la meilleure segmentation de l'image.

Les étapes de l'algorithme utilisé pour la segmentation par DNE à deux dimensions sont données en figure 11.

1. variation de l'ordre de dérivation non entier α :
2. Calculer le masque de la DNE-2D pour chaque ordre α .
3. Filtrer l'image originale par le masque DNE-2D.
4. Borner l'image filtrée $g(x,y)$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} L-1 & \text{si } g(x,y) \geq L-1 \\ 0 & \text{si } g(x,y) \leq 0 \end{cases}$$
 avec L le nombre total de niveaux de gris qui est généralement égal a 256.
5. Calculer le seuil de segmentation.
6. calculer le critère de segmentation
7. Afficher les résultats: l'ordre α^* , seuil th_{α^*} et l'image segmentée.

Fig.11. Algorithme de la segmentation DNE 2D

Pour chaque valeur de l'ordre de dérivation α sur l'intervalle $]-1,0[$, avec un pas de variation $dx = 0.1$ le masque de DNE-2D est calculé pour filtrer l'image originale.

Le seuil optimal qui correspond à l'ordre de dérivation optimal est obtenu par optimisation d'un critère de segmentation. Nous avons utilisé séparément deux critères de segmentation. Le premier consiste à maximiser l'entropie de l'image filtrée, le second à minimiser la variance. D'un point de vue visuel, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants, d'où l'idée de la combinaison des résultats des deux critères. L'ordre de dérivation choisi sera obtenu par la combinaison linéaire de l'ordre de dérivation obtenu par maximisation de l'entropie et celui obtenu par minimisation de la variance :

$$\alpha^* = \beta * \alpha_{(entropie)}^* + (1 - \beta) * \alpha_{(variance)}^*$$

Dans ce qui suit, nous montrons les résultats obtenus sur des images testés. Pour l'image Avion, l'utilisation de l'entropie comme critère pour le choix du meilleur ordre de dérivation ne donne pas une bonne segmentation de l'image (Fig.12). L'avion n'a pas pu être séparé des nuages. De même pour l'utilisation de la variance (Fig.13). Nous remarquons que plusieurs parties de l'avion ne sont presque plus visibles. En revanche, la combinaison des deux résultats permet une meilleure segmentation de l'image. Comme nous pouvons le voir sur la figure (14), le filtrage de l'image avec un ordre de dérivation $\alpha^* = -0.55$, et un seuil $th_{\alpha^*} = 244$, donne une séparation complète de l'avion des nuages qui l'entoure.



Fig. 12 Segmentation par DNE-2D l'image avion :
 (a) image avion filtrée avec $\alpha_{(entropie)}^* = -0.2$
 (b) binarisation l'image avec le seuil $th = 200$



Fig.13. Segmentation par DNE-2D l'image avion :
 (a) image avion filtrée avec $\alpha_{(variance)}^* = -0.9$
 (b) binarisation l'image avec le seuil $th = 250$



Fig.14. Segmentation par DNE-2D l'image avion :
 (a) image avion filtrée avec $\alpha^* = -0.55$
 (b) binarisation l'image avec le seuil $th_{\alpha}^* = 244$

Les figures 15, 16 et 17, montrent les résultats obtenus sur l'image Cameraman. La même remarque peut être observée sur cette image, l'utilisation de la combinaison des résultats de la maximisation de l'entropie et de la minimisation de la variance donne une meilleure binarisation de l'image.

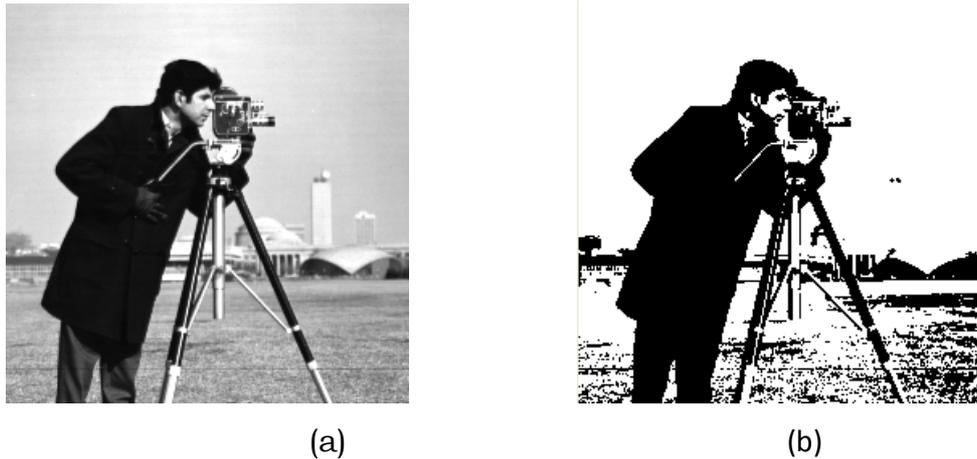


Fig.15. Segmentation par DNE-2D l'image cameraman :
 (a) image cameraman filtrée avec $\alpha^*_{(entropie)} = -0.1$
 (b) binarisation l'image avec le seuil $th = 157$

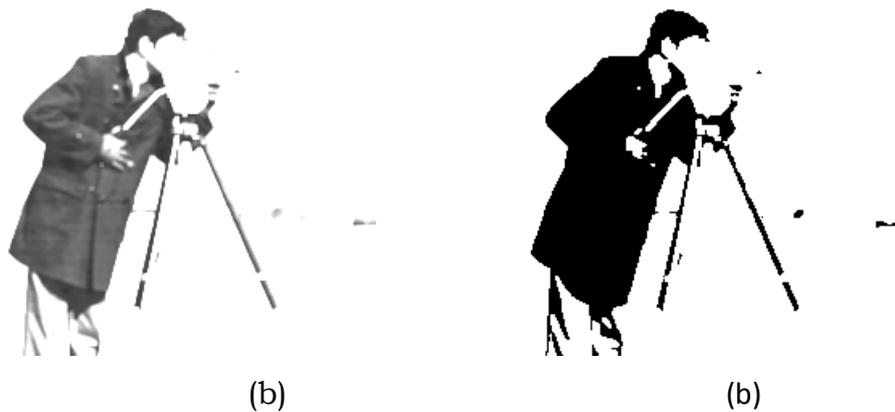


Fig.16. Segmentation par DNE-2D l'image cameraman :
 (a) image cameraman filtrée avec $\alpha^*_{(variance)} = -0.9$
 (b) binarisation l'image avec le seuil $th = 226$

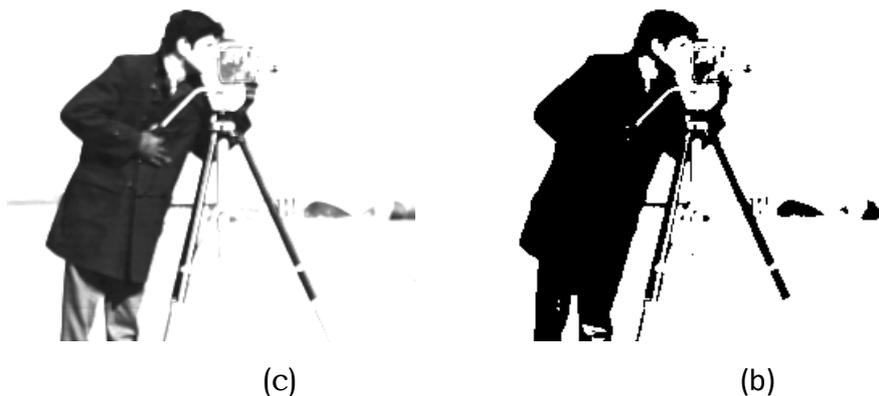


Fig. 17. Segmentation par DNE-2D l'image cameraman :
 (a) image cameraman filtrée avec $\alpha^* = -0.5$
 (b) binarisation l'image avec le seuil $th_{\alpha^*} = 211$

3. Tests et Résultats

Les deux sections précédentes de ce chapitre ont été réservées à la présentation des opérateurs de segmentation par dérivation non entière à une ou à deux dimension. Le choix de l'ordre de dérivation est effectué à l'aide d'une combinaison linéaire des résultats obtenus par l'utilisation de deux critères : la maximisation de l'entropie et la minimisation de la variance intra classes.

Ces tests sont effectués sur deux types d'images à savoir les images classiques dites Avion, Cameraman, Riz et Moon. Une comparaison entre les résultats obtenus des deux méthodes appliquées ainsi qu'avec une autre méthode de seuillage qui est la méthode d'Otsu est effectuée.

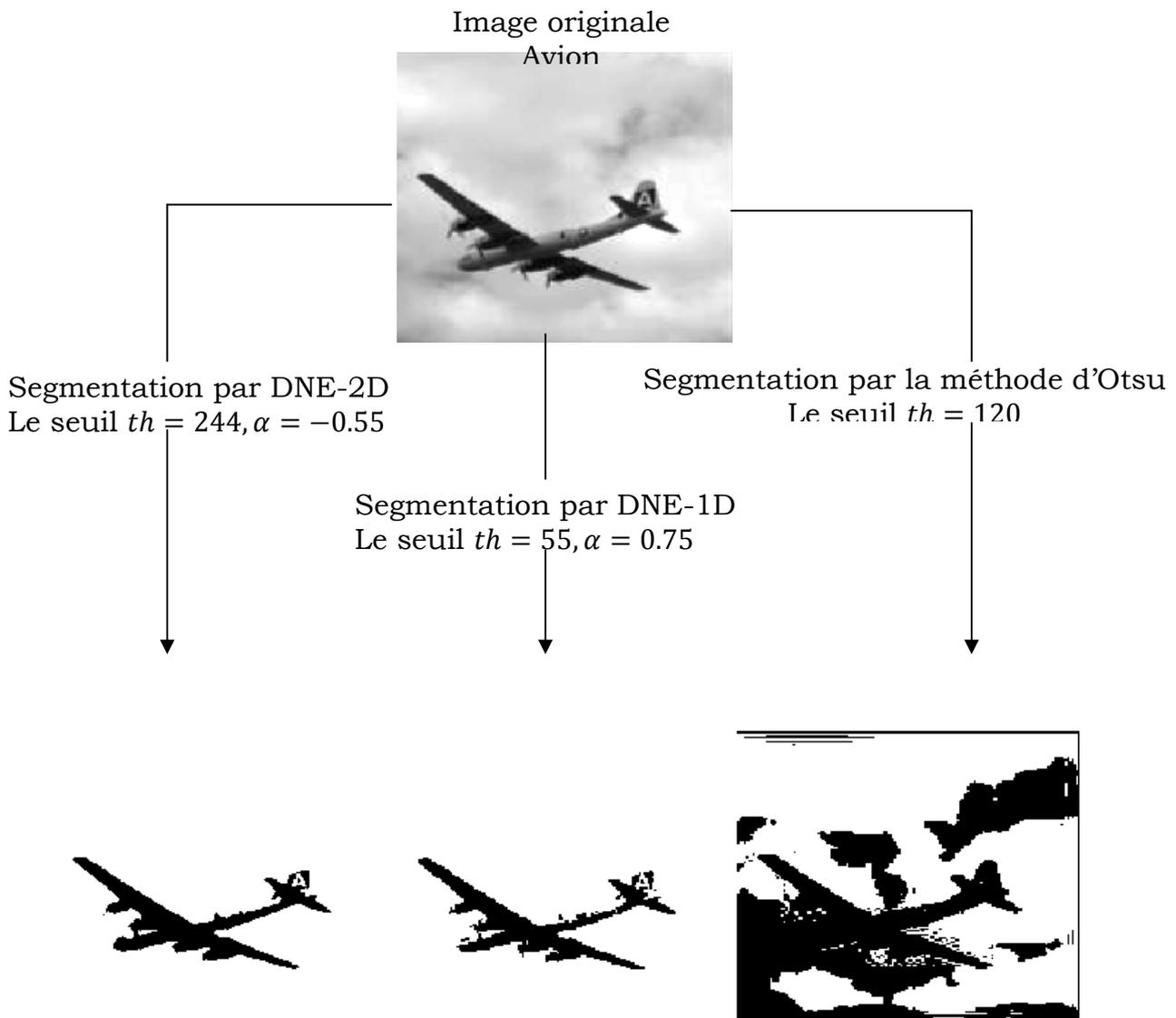


Fig.18. Segmentation par DNE 2D de l'image Avion

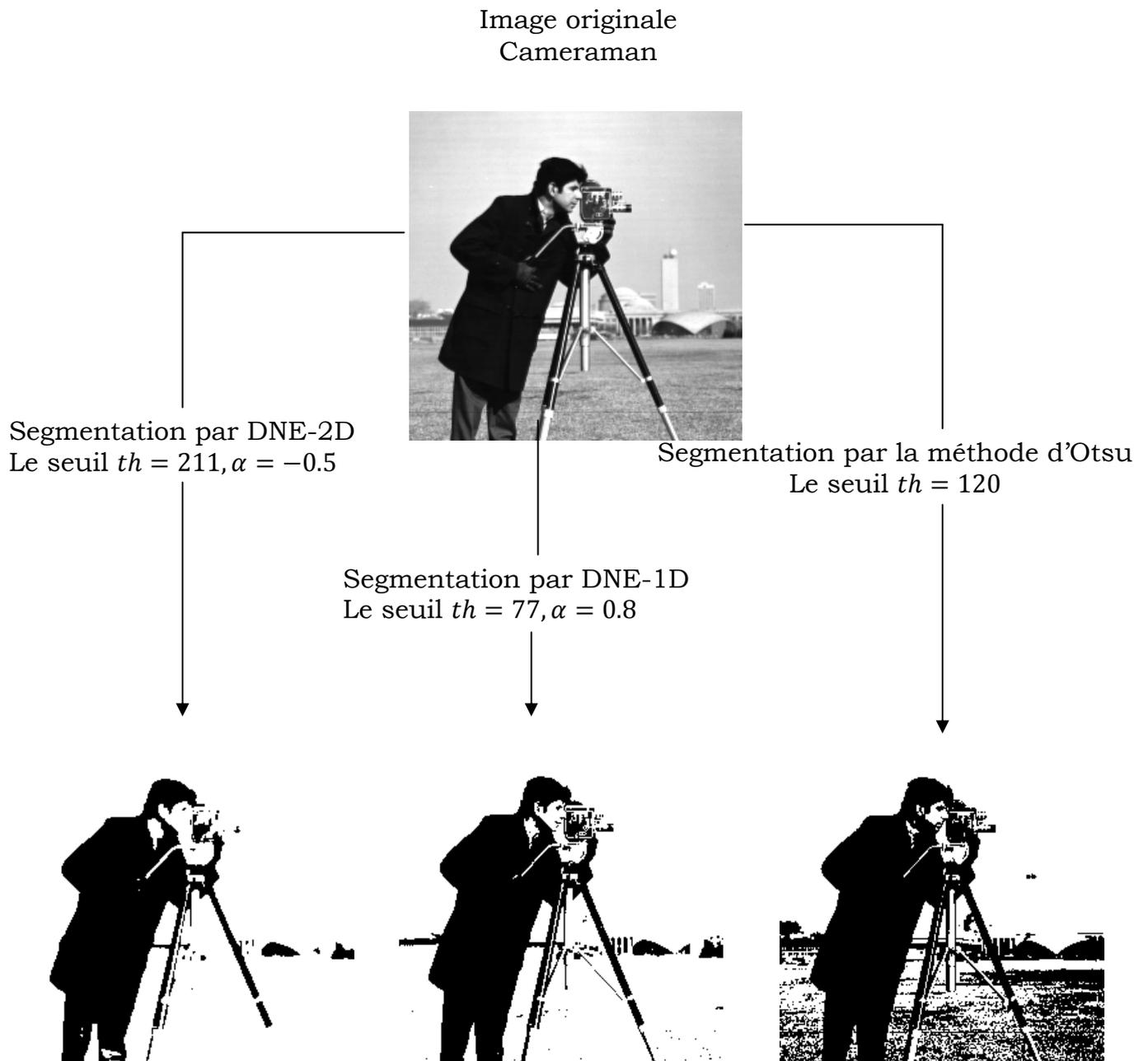


Fig.19 Segmentation par DNE 2D de l'image Cameraman

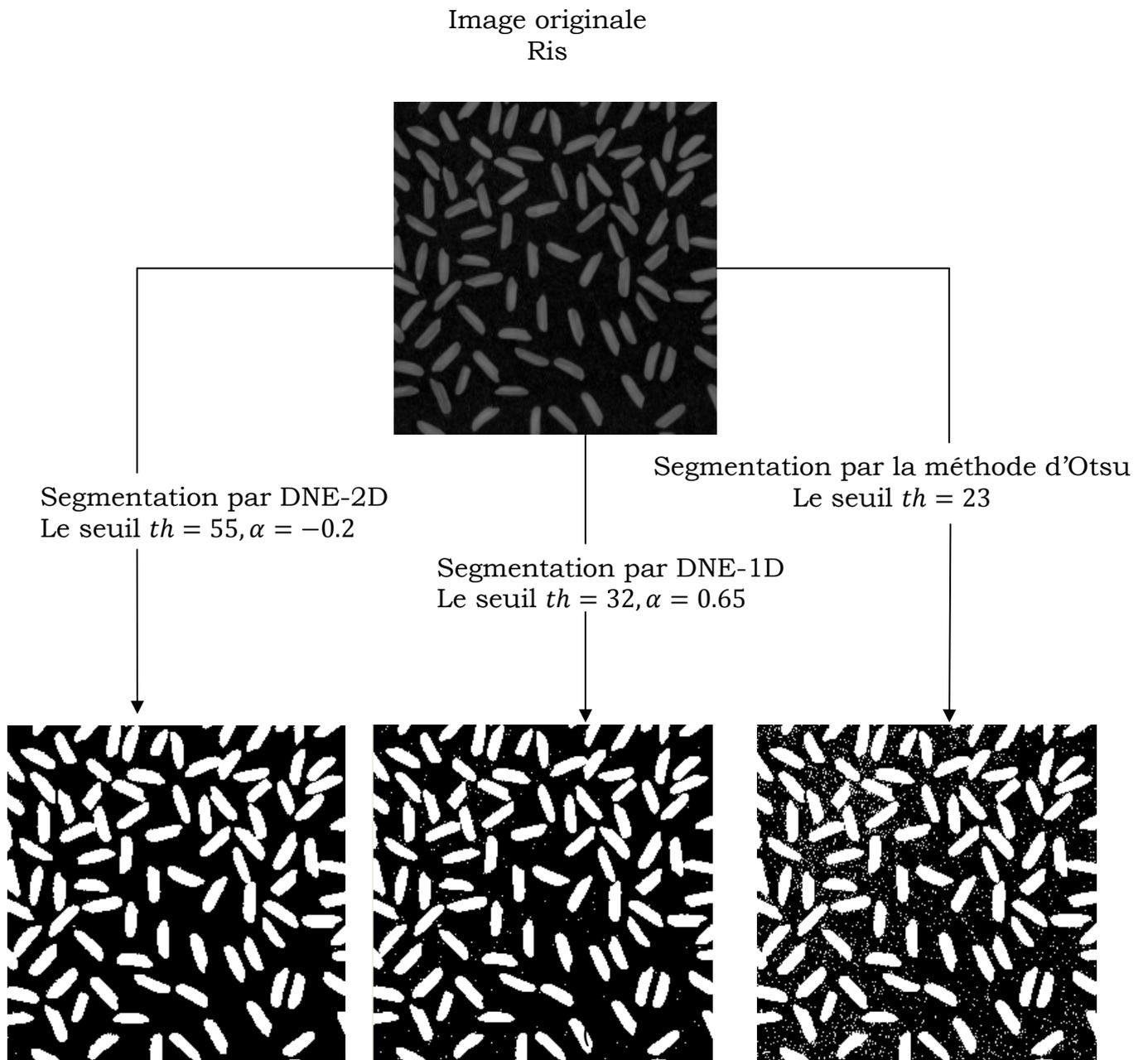


Fig.20 Segmentation par DNE 2D de l'image Riz

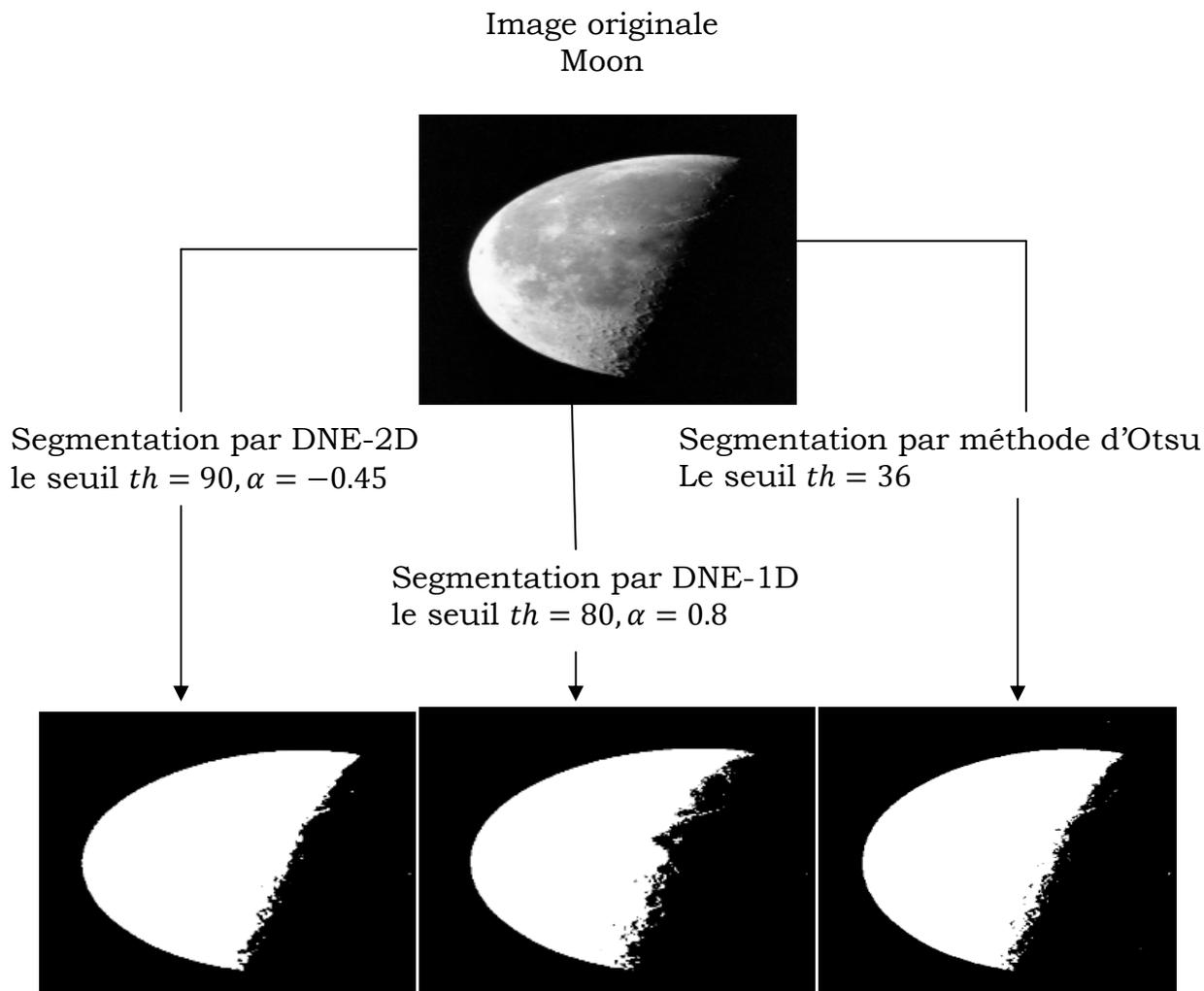


Fig.21 Segmentation par DNE 2D de l'image Moon

Comme nous pouvons le constater, à travers les exemples des images des figures 18, 19, 20 et 21, la méthode de segmentation par dérivation non entière à deux dimensions permet d'avoir de meilleurs résultats que la méthode de dérivation non entière à une dimension, et la même remarque peut être faite par rapport à la méthode d'Otsu. En effet, les performances de la méthode DNE-2D sont supérieures à celles de DNE-1D et à celle d'Otsu, elle permet un meilleur choix de la valeur du seuil de segmentation. Ceci peut être constaté sur les différentes images testées. Comme nous pouvons

le voir sur l'image de la figure 18, le seuil $th = 120$ donné par la méthode d'Otsu ne permet pas de séparer l'avion des nuages qui l'entour, ceci est également le cas de la dérivation non entière à une dimension, où le résultat de la segmentation fait disparaître plusieurs parties de l'objet « avion ». Par contre, la méthode de dérivation non entière à deux dimensions donne un choix approprié aussi bien pour l'ordre de dérivation $\alpha = -0.55$ que pour le seuil de binarisation $h = 244$. La même remarque peut être faite sur l'image « Riz » de la figure 20, nous remarquons la présence de plusieurs points blancs sur l'image seuillée par la méthode d'Otsu. Le nombre de points observés diminue en utilisant la dérivation non entière à une dimension, et la dérivation non entière à deux dimensions fait disparaître tout les points et permet de séparer les grains de riz du fond de l'image.

En ce qui concerne l'évaluation quantitative de la qualité de la segmentation, nous avons utilisé comme critère le rapport signal/bruit défini par :

$$PSNR = 20 \log \left(\frac{255}{E} \right)$$

Où E représente la racine carrée des erreurs quadratiques entre les pixels de l'image originale les pixels de l'image segmentée représenté par le niveau de gris moyen de la classe telle que :

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(g_i - m_i)^2}{N}}$$

où N est le nombre de pixels de l'image.

Plus la valeur du rapport PSNR est faible, plus le résultat de la segmentation est satisfaisant.

Le tableau (1) suivant représente les valeurs du critère PSNR obtenues pour quelques images testées, pour les trois méthodes déjà comparées.

Tableau 1 Tableau des valeurs du rapport signal/bruit

Image	Méthode d'Otsu	DNE-1D	DNE-2D
Avion	50.42	48.49	48.46
Cameraman	50.38	49.42	49.34
Ris	53.85	53.48	53.34
Moon	53.13	53.58	53.04

Comme nous pouvons le constater, à travers les valeurs du tableau, la méthode de dérivation non entière à deux dimensions est plus performante comparée à celle de dérivation non entière à une dimension et à celle d'Otsu. Ceci est reflété par la valeur du rapport PSNR, qui demeure faible pour toutes les images, comparée aux valeurs obtenues par les autres méthodes.

4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre l'application de la dérivation non entière dans le domaine du traitement d'images. La dérivation non entière est utilisée sous deux formes : à une dimension pour la différentiation de l'histogramme de l'image, et à deux dimensions pour le filtrage de l'image. Dans les deux cas, l'objectif était de choisir la meilleure valeur de l'ordre de dérivation qui correspond au meilleur seuil de segmentation et ceci au moyen d'un critère de segmentation. L'utilisation séparée de l'entropie et de la variance intraclasse comme critère de segmentation pour le choix de l'ordre de dérivation ne donne pas de bons résultats, ainsi nous avons effectué une combinaison linéaire des résultats des deux critères. Ceci a permis un choix approprié du seuil de segmentation et par là un meilleur choix de la valeur de l'ordre de dérivation.

Par la suite, nous avons effectué une comparaison des résultats obtenus par l'utilisation de la dérivation non entière à une dimension, et de son extension à deux dimensions avec la méthode d'Otsu. Comme nous l'avons constaté, la méthode de dérivation non entière à deux dimensions est plus performante que celle à une dimension, ceci est également le cas comparé à la méthode d'Otsu. L'utilisation de la dérivation non entière à deux dimensions, permet un meilleur choix du seuil de segmentation, ceci est confirmé par la valeur du rapport PSNR utilisé pour évaluer les résultats.

Conclusion générale

Ce mémoire a pour but l'étude des dérivées fractionnaires appliquée en traitement d'image. Dans le premier chapitre nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude qui consisté a présenté les différentes définitions liées a la dérivation non entière et a citer ces différentes applications dans plusieurs domaines de la science, nous avons aussi consacré une partie du chapitre pour l'interprétation physique de la dérivation non entière. Le deuxième chapitre était réservé aux applications concernant le traitement d'images, pour cela quelques définitions des méthodes de traitement d'images sont tout d'abord cités, par la suite nous avons approfondi l'étude de la dérivation non entière dans le traitement d'image par l'introduction du principe du détecteur CRONE. Le dernier chapitre est réservé à l'application et aux résultats obtenus.

L'application de la dérivation non entière à une dimension ou de son extension a deux dimensions à permis La mise en œuvre d'opérateurs de segmentation d'image par contours ou par régions. L'objectif était de chercher l'ordre non entier de dérivation qui donne une meilleure segmentation de l'image selon un critère donné. Nous avons utilisé séparément deux critères pour le choix de l'ordre de dérivation qui donne la meilleure segmentation de l'image à savoir la maximisation de l'entropie et la minimisation de la variance intraclasse. Vu que les résultats obtenus n'étaient pas satisfaisants, nous avons effectué une combinaison linéaire des résultats des deux critères ce qui a permis un choix approprié du seuil de segmentation et par la un meilleur choix de la valeur de l'ordre de dérivation. Par la suite, la méthode de segmentation par dérivation non entière à une dimension et à deux dimensions ont étaient comparé avec la méthode d'Otsu, puis les résultats de la segmentation ont était évalués a l'aide du

rapport PSNR. Nos résultats ne sont pas toujours excellents pour toutes les images. Afin de les améliorer, nous prévoyons l'utilisation d'autres critères pour le choix de l'ordre de dérivation, ou encore de fixer l'ordre de dérivation et de se concentrer sur la variation de la taille du masque utilisé.

Référence bibliographiques

- [1] Stéphane Dugowson, les différentielles métapyysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation, thèse de doctorat, 1994, université Paris Nord, France.
- [2] Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Didot, Paris (1822).
- [3] Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies (1823), Grondahl.
- [4] Liouville, Mémoire sur le calcul des différentielles à indice quelconques, journal de l'école polytechnique, 13, section 21(1932).
- [5] Stéphane Dugowson, L'élaboration par Riemann d'une définition de la dérivation non entière, *Revue d'histoire des mathématiques*, 3 (1997), p. 49–97.
- [6] Bertram Ross, chronological bibliography on fractional calcul, academic press, 111 (1975), p.3-15.
- [7] Abd Elouahab S., les systèmes chaotiques à dérivation non entière, mémoire de magistère en mathématiques, mars 2009, l'université de Constantine.
- [8] <http://www.efunda.com/math/gamma/findgamma.cfm>
- [9] Nakib. A., Oulhadj H., YOUCEF F., P. Siarry, Segmentation d'image par dérivation d'ordre non entier. 1ère Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications. Le 18-19 Mai 2010, Skikda, Algérie.
- [10] SI AMOUR A., contribution a la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat en automatique, juillet 2011, l'université de Tizi Ouzou.
- [11] Haouam K., Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires, thèse de doctorat en Mathématiques Septembre 2007, l'université de Constantine.
- [12] J. A. Tenreiro Machado, Manuel F. Silva, Ramiro S. Barbosa, Isabel S. Jesus, Cecilia M. Reis, Maria G. Marcos, and Alexandra F. Galhano, Some Applications of Fractional Calculus in Engineering, article,2009, Portugal.

- [13] Humbert Florent, Introduction au traitement numérique des images, cours de traitement d'images, 2007, Université de Montréal (Canada).
- [14] Serge Beucher, Segmentation d'images et morphologie mathématique, thèse de doctorat en morphologie mathématique, 1990, école nationale supérieure des mines de Paris.
- [15] Jean-Christophe Baillie, Segmentation, article, 2003, ENSTA Paris.
- [16] Xavier Philippeau, Segmentation en régions, article, 05.01.2008, France.
- [17] Amir NAKIB, Conception de métaheuristiques d'optimisation pour la segmentation d'images. Application à des images biomédicales, thèse de doctorat en science de l'ingénieur p.5-22, 2007, université de Paris 12-Val de Marne.
- [18] (Sezgin, et al., 2004) Sezgin, M. and Sankur, B., Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. J. of Electronic Imaging. 2004, Vol. 13, 1, pp. 146-165.
- [19] (Otsu, 1979) Otsu, N., A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. IEEE Trans. On Syst., Man and Cyb.. 1979, Vol. 9, 1, pp. 62-66.
- [20] (Kittler, et al., 1986) Kittler, J. and Illingworth, J., Minimum error thresholding. Pattern Recognition. 1986, Vol. 19, 1, pp. 38-52.
- [21] (Kapur, et al., 1985) Kapur, J. N., Sahoo, P. K. and Wong, A. C. K., A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. Computer Vision, Graphics and Image Processing. 1985, Vol. 29, pp. 273-285.
- [22] (Cheriet, et al., 1998) Cheriet, M., Said, J.N. and Suen, C. Y., A recursive thresholding technique for image segmentation. IEEE Trans. on Image Processing. 1998, Vol. 7, 6, pp. 918-921.
- [23] (Pal, et al., 1991) Pal, N. K. and Pal, S. K., Entropy: A new definition and its applications. IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.. 1991, Vol. 21, pp. 1260-1270.
- [24] (Reddi, et al., 1984) Reddi, S. S., Rudin, S. F. and Keshavan, H. R., An optimal multiple threshold scheme for image segmentation. IEEE Trans. on Syst., Man., and cybern.. 1984, Vols. SMC- 14, pp. 661-665.

- [25] (Hou, et al., 2006) Hou, Z., Hu, Q. and Nowinski, W. L., On minimum variance thresholding. *Pattern Recognition Letters*. 2006, Vol. 27, pp. 1732-1743.
- [26] (Ng, 2006) Ng, H., Automatic thresholding for defect detection. *Pattern Recognition Letters*. 2006, Vol. 27, pp. 1644-1649.
- [27] (Lahfi, et al., 2006a) Lahfi, Y., Segmentation d'images radiologiques en temps réel dans le cadre d'un système d'aide à la pose d'une prothèse endovasculaire. Thèse de doctorat, Université Paris 12, Octobre 2006, Créteil.
- [28] B. Mathieu, P. Melchior, A. Oustaloup, Ch. Ceyral, Fractional differentiation for edge detection, article, December 2002, l'université Bordeaux, France.
- [29] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès. Paris, 1995.
- [30] Nakib A., Image thresholding based on fractional differentiation, article, 2006, université de Paris XII-Valle de Marne.
- [31] Nakib A., Oulhadj H., Siarry P., Image thresholding based on multiobjective optimization. *Signal Processing*. Vol. 87, 2007, pp. 2516-2534.
- [32] Nakib, A., Oulhadj, H. and P. Siarry, Fractional differentiation and non-Pareto multiobjective optimization for image thresholding, *Eng. App. Of Arti. Intelli.*, vol. 22 (2).
- [33] François Dubois, Ana-Cristina Galucio et Nelly Point, Introduction la dérivation fractionnaire : Théorie et applications, article, 09 avril 2009, Conservatoire National des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, France.
- [34] Adam Loverro; *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, IN 46556, U.S.A. May 8, 2004
- [35] Maurice Godefroy, *La fonction gamma : théorie, histoire, bibliographie*, Gauthier-Villars. Paris, 1901.
- [36] Idiou D., Implémentation Analogique de Dérivateur et d'Intégrateur d'Ordre Fractionnaire Variable, mémoire de magistère en électronique, février 2008, l'université de Constantine.

- [37] Y. FERDI, L. GROUCHE et B. BOUCHEHAM, J. P. HERBEUVAL, Utilisation de la dérivation non entière pour la détection d'événements dans les signaux et leur compression : applications aux signaux électrocardiographiques (ECG), article, mars 2003, Bordeaux.
- [38] B. M. Vinagre, V. Feliu, I. Petras and I. Podlubny, Y. Chen, Les dérivées non entières en automatique et traitement des signaux: certains défis, Octobre 2001, Bordeaux.
- [39] Ladaci S., Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire, Thèse de doctorat en électronique, 2007, université de Constantine.
- [40] Abdelbaki DJOUAMBI, Contribution à la commande CRONE, Thèse de doctorat en électronique, 2008, université de Constantine.
- [41] Bekkouche H., La commande des systèmes d'ordre fractionnaire basés sur la fonction de transfert idéale de Bode, mémoire de magister, 2008, université de Constantine.
- [42] International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Riesz potential operators and inverses via fractional centred derivatives, Article ID 48391, Pages 1–12, 2006.
- [43] Amelia Carolina Sparavigna, Using fractional differentiation in astronomy, Italy.
- [44] Roberto Marazzato¹ and Amelia Carolina Sparavigna, Astronomical image processing based on fractional calculus: the AstroFracTool, Italy.
- [45] J.A. Tenreiro Machado, Fractional signal processing and applications, article, Volume 83 N° 11, Novembre 2003, Portugal.
- [46] K. B. Oldham and J. Spanier, the Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order. New York: Academic Press, 1974.
- [47] Octavian ENACHEANU, Modélisation fractale des réseaux électriques, thèse de doctorat p. 47-53, Octobre 2008, l'université JOSEPH FOURIER.
- [48] Dérivation fractionnaire en mécanique : état de l'art et applications, journée européenne, Novembre 2006, Paris.
- [49] Stéphane DUGOWSON, l'élaboration par Riemann d'une définition de la dérivation d'ordre non entier, Revue d'histoire des mathématiques p. 49–97. Mars 1997, Paris.

- [50] Jean Jacquelin, la dérivation fractionnaire, Magazine Quadrature n°40, pp.10-12, octobre 2000, France.
- [51] Bela Oleg BENOVA, Systèmes d'ordre non entier pour la commande robuste, thèse de doctorat en Automatique, 2006, Université d'Artois.
- [52] Olivier COIS, Systèmes linéaires non entier et identification par modèle non entier : Application en thermique, thèse de doctorat en Automatique p.19-39, 2002, Université de Bordeaux.
- [53] Gérard Montseny, "Ordre non entier" : suspension CRONE et autres exemples, article, 1995, France.
- [54] Hany Farid, Discrete-Time Fractional Differentiation from Integer Derivatives, article, USA.
- [55] Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires, thèse de doctorat en Automatique p.6-43, février 2011, France.
- [56] Igor Podlubny, geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, article, Juillet 2000, université de Cambridge.
- [57] SHAIKH TAJUDDIN NIZAMI, NASIRUDDIN KHAN, FOZIA HANIF KHAN, A New Approach to Represent the Geometric and Physical Interpretation of Fractional Order Derivatives of Polynomial Function and its Application in Field of Sciences, article du journal Canadian du calcul mathématique & des sciences de l'ingénieur & sciences naturelles et médecine Vol. 1, No. 1 février 2010.
- [58] Mehdi Dalir, Majid Bashour, Applications of Fractional Calculus, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, no. 21, 1021 – 1032, université de Varamin-Tehran Iran.
- [59] Nicolas BERTRAND, caractérisation électrique mise en évidence des phénomènes physicochimiques et modélisation fractionnaire des supercondensateurs à électrodes à base de carbone activé, thèse de doctorat en électronique p. 51-79, 2011, Université Bordeaux 1.
- [60] Abdelbaki DJOUAMBI , contribution à la commande CRONE, thèse de doctorat en électronique, 2008, université Mentouri de Constantine.

- [61] PECAUD Christopher, seuillage et segmentation d'images texturée, rapport de stage, 2000, LYNCEE Jean-Louis France.
- [62] DOMINIKUS NOLL, Restoration of Degraded Images with Maximum Entropy, article, 1996 , Université Paul Sabatier, Toulouse , France
- [63] Baljit Singh and, Amar Partap Singh, Edge Detection in Gray Level Images based on the Shannon Entropy, 2008, Journal of Computer Science 4 (3): 186-191.
- [64] Hamitou F., Techniques de segmentation d'images par contours actifs et contribution au mouvement dans des séquences d'images, mémoire de magistère en électronique p.3-15, Octobre 2007, l'université de Blida.
- [65] Imane SEBARI et Dong-Chen HE, les approches de segmentation d'image par coopération régions-contours, article, Département de géomantique appliquée, Université de Sherbrooke, 2007, Centre d'applications et de recherches en télédétection Canada.