MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT EN-SCIENCES

Filière: Mathématiques

Spécialité: Probabilités et statistiques

Présentée par:

Slimi Farida

Sujet:

ON BELL POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATION ON TIME SERIES

Devant le jury d'examen composé de :

Mr. Hamadouche Djamel	Professeur	UMMTO	Président
Mr. Goubi Mouloud	MCA	UMMTO	Rapporteur
Mr. Belbachir Hacène	Professeur	USTHB	Examinateur
Mr. Hamaz Abdelghani	Professeur	UMMTO	Examinateur
Mr. Hamdi Fayçal	Professeur	USTHB	Examinateur
Mme. Mezoued Fatiha	Professeure	INPS	Examinatrice

Année universitaire 2024/2025

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements en premier lieu à mon directeur de thèse, Monsieur Goubi Mouloud qui a accepté de diriger ce travail. Je lui suis très reconnaissante pour son engagement, sa rigueur, sa patience, ses conseils précieux et son soutien tout au long de ce travail. Je lui adresse mes plus sincères remerciements.

Je remecie très vivement Monsieur Hamadouche Djamel, professeur à l'université de Tizi-Ouzou, d'avoir accepté de présider le jury.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Belbachir Hacène, professeur à l'USTHB, Monsieur Hamaz Abdelghani, professeur à l'université de Tizi-Ouzou, Monsieur Hamdi Fayçal, professeur à l'USTHB et Madame Mezoued Fatiha, professeur à l'INPS pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce présent travail.

Je tiens également à remercier mes collègues et amis, Fadila, Faiza, Faroudja, Malika, Nassima, Nora, Noria, Safia, Samir, Samira..., sans oublier le couple Hamidi, Mahdi et Wassila pour leur aide. Ils m'ont tous aidé d'une manière ou d'une autre que ce soit par leurs actions ou par leurs encouragements. Je profite de l'occasion pour remercier et exprimer ma profonde gratitude à tous les chercheurs du laboratoire LMPA.

Enfin, un merci spécial à ma famille: mon mari, mes enfants, mes parents, mes soeurs, mes frères et ma belle famille. Je tiens à remercier sincèrement chacun d'entre eux.

Table des matières

Notations

$\lfloor n \rfloor$: La partie entière de n.

$n!$: Le factoriel de n.

$\binom{n}{k}$: Le cœfficient binomial, avec $0 \leq k \leq n$.

$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$: Le coefficient multinomial, avec $k_1 + \cdots + k_n = n$.

$(z)_k$: Le factoriel descendant d'ordre k de z avec $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $(z)_0 = 1$

$B_{n,k}$: polynômes partiels exponentiels de Bell.

$S(n, k)$: nombre de Stirling de deuxième espèce.

$|s(n, k)|$: nombre de Stirling absolu de première espèce.

$AR(p)$ modèle autorégressif d'ordre p.

$MA(q)$ modèle moyenne mobile d'ordre q.

$ARMA(p, q)$ modèle autorégressif moyenne mobile d'ordre (p, q).

Introduction

Les séries chronologiques sont un sujet d'actualité, au vu de leurs utilisations dans les différents domaines d'études scientifiques comme par exemple elles sont utilisées pour la prédiction de COVID [11]. Avant de modéliser une série chronologique, il convient d'étudier ses caractéristiques stochastiques, en l'occurrence la moyenne, la variance et la fonction d'autocovariance des données collectées au fil du temps.
L'algèbre est devenue un outil essentiel pour la statistique et la statistique algèbrique [13, 24, 35]. Les objets algèbriques servent à améliorer les calculs pour simplifier les méthodes classiques et à développer des nouvelles techniques. Les polynômes et les séries formelles (fonctions génératrices) occupent une place importante dans l'étude des processus autorégressifs. Ils servent en particulier à examiner la manière dont le processus moyenne mobile d'ordre infini associé à un processus autorégressif est construit. Le concept de dualité pour lequel un processus autorégressif stationnaire d'ordre fini est équivalent à un processus moyenne mobile infini. Pour évaluer les paramètres des modèles autorégressifs d'odre fini, la plupart des travaux dans la littérature utilisent le calcul des dérivées successives, les racines du polynôme caractéristique et les propriétés de l'espérance mathématique. Dans ce travail on revisite les résultats obtenus sur un processus autorégressif d'ordre deux, en utilisant les polynômes de Bell et la fonction génératrice du produit de deux suites de nombres.
Les modèles autorégressifs d'ordre deux nécessitent l'utilisation des suites de nombres satisfaisant des récurrences linéaires d'ordre deux et leurs produits. Ces nombres sont l'objet de plusieurs travaux récents. Boughaba

et al [5], ont construit des fonctions génératrices du produit des polynômes de Vieta avec des nombres et des polynômes gaussiens. Le cas général est traité dans [16], où la formule explicite de n'importe quel produit est dégagée. Les résultats obtenus sont utiles dans le traitement de nombreux problèmes de prédiction [7, 9, 23, 33, 39, 40, 41]. Ils sont proposés pour donner une autre approche pour calculer les coefficients d'un modèle moyenne mobile d'ordre infini $MA(\infty)$. Cela nous a permis d'obtenir les formules explicites des fonctions d'autocovariance et des fonctions d'autocorrélation, qui sont importantes dans les études statistiques. Les résultats obtenus sont principalement des méthodes itératives de calcul des coefficients. Cette approche diffère de celle proposée par Brockwell [6] et s'applique également à l'inversion d'un processus de moyenne mobile. Elle permet de déterminer de manière explicite le coefficient de la représentation, sans utiliser d'algorithmes et de programmation numérique.

Le premier chapitre est consacré aux outils algébriques utilisés dans ce travail. On expose un petit rappel sur les polynômes exponentiels de Bell et leur importance dans les fonctions génératrices, entre autre pour calculer les formules explicites des suites de nombres engendrées par ces fonctions. On s'est intéressé en particulier au calcul des formules explicites des suites de nombres satisfaisant une relation de récurrence d'ordre deux, pour terminer avec la construction de la fonction génératrice des produits de deux nombres de ce type.

Dans le deuxième chapitre, on donne un bref aperçu sur les séries chronologiques, en passant par le bruit blanc, la fonction d'autocovariace, la fonction d'autocorrélation et la décomposition de Wold. Notre attention est surtout portée sur les modèles autorégressifs d'ordre p et les différentes expressions des paramètres associés en fonction des racines du polynôme caractéristique, satisfaisant la condition d'appartenir à l'extérieur du cercle unité, pour assurer la stationnarité. On revoit aussi les processus autorégressifs moyennes mobiles d'ordre (p,q), en particulier, nous nous focalisons sur les $ARMA(2,1)$, pour calculer les différents paramètres. On termine le chapitre par la relation entre $ARMA(2,1)$ et $AR(2)$.

Le dernier chapitre est consacré à l'utilisation des techniques algébriques, notamment les polynômes de Bell et le produit de Cauchy, pour déterminer les formules des paramètres associés à un $AR(2)$ en fonction seulement des coefficients du polynôme caractéristique au lieu des racines. Les résultats obtenus sont un nouveau look aux résultats de Brockwell et Davis.

Chapitre 1

Introduction aux polynômes exponentiels de Bell

1.1 Introduction

Dans la théorie des probabilités et statistique, les outils algébriques et combinatoires prennent une place importante dans le calcul des probabilités et des moments des variables aléatoires. En statistique, pour étudier les séries temporelles, on a besoin d'utiliser les fonctions génératrices. Dans ce qui suit on expose quelques propriétés de ces dernières.

1.2 Fonctions génératrices

Définition 1.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

– On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite a_n la fonction

$$O(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n. \tag{1.1}$$

– On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite a_n la fonction

$$E(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}. \tag{1.2}$$

Exemples 1.1. *1. Pour la suite constante $a_n = 1$, la fonction génératrice ordinaire est*

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n. \tag{1.3}$$

En effet on a

$$A(t,n) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

$A(t,n)$ représente la somme partielle de la suite géométrique t^j avec le premier terme 1 et de raison t. Par contre sa fonction génératrice exponentielle est

$$e^t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}. \tag{1.4}$$

2. La suite de nombres de Fibonacci [8, 27] est définie par la relation de réccurence suivante

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{1.5}$$

avec les premiers termes $F_0 = 0, F_1 = 1$. Un simple calcul permet de trouver

$$\sum_{n\geq 0} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2}. \tag{1.6}$$

3. Les polynômes de Fibonacci $F_n(x)$ [32, 34] sont définis par la relation de réccurence suivante:

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x),\ n \geq 2, \tag{1.7}$$

avec les valeurs initiales $F_0(x) = 0,\ F_1(x) = 1$. Ainsi sa fonction génératrice est

$$\frac{t}{1-xt-t^2} = \sum_{n\geq 0} F_n(x) t^n. \tag{1.8}$$

1.3 Produit de Cauchy

Définition 1.2. – Soient $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $g(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$ deux fonctions génératrices ordinaires. Le produit de Cauchy est

$$f(t)g(t) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) t^n.$$

– Soient $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $g(t) = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}$ deux fonctions génératrices exponentielles. Le produit de Cauchy est

$$f(t)g(t) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) \frac{t^n}{n!}.$$

Ce produit est intéressant car il permet de calculer le produit de plusieurs fonctions. Par exemple pour la fonction $\frac{1}{(1-t)^2}$ on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, t^n.$$

Par contre l'approche analytique consiste à calculer la dérivée n-ième de $f(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Les calculs donnent

$$f^{(n)}(t) = (n+1)!(1-t)^{-2-n}$$

ainsi le développement limité est

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1) t^n. \end{aligned}$$

1.4 Polynômes exponentiels de Bell

Définition 1.3. [10] Les polynômes exponentiels partiels de Bell $B_{n,k} = B_{n,k}(a_1, a_2, \cdots)$ de variables $a_1, a_2, \cdots$ sont donnés par la fonction génératrice exponentielle ;

$$\exp\left(x\sum_{m=1}^{\infty}a_m\frac{t^m}{m!}\right)=\sum_{n\geq k}B_{n,k}\frac{t^n}{n!}x^k. \tag{1.9}$$

D'une manière équivalente on a

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m\frac{t^m}{m!}\right)^k=\sum_{n\geq k}B_{n,k}\frac{t^n}{n!} \tag{1.10}$$

Pour $n=1$:

$$B_{1,1}(a_1)=a_1. \tag{1.11}$$

Pour $n=2$

$$B_{2,1}(a_1,a_2)=a_2 \text{ et } B_{2,2}(a_1)=a_1^2. \tag{1.12}$$

Quelques valeurs particulières de $B_{n,k}$ sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.1. *[10] Les valeurs suivantes sont des valeurs particulières de $B_{n,k}$.*
$B_{n,k}(1,1,\cdots)=S(n,k)$,
$B_{n,k}(1,2,3,\cdots)=\binom{n}{k}k^{n-k}$,
$B_{n,k}(0!,1!,2!,\cdots)=|s(n,k)|$.

Les premières valeurs de $B_{n,k}$ sont:

$$B_{n,k}=\begin{cases}1 & \text{pour} \quad n=k=0\\ 0 & \text{pour} \quad n\neq 0,\ k=0\\ a_n & \text{pour} \quad n\neq 0,\ k=1\end{cases}$$

Définition 1.4. [10] Les polynômes exponentiels complets de Bell $B_n(a_1,a_2,\cdots)$ sont des polynômes en variables $a_1,a_2,\cdots$ définis par la fonction génératrice exponentielle ;

$$exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)\frac{t^n}{n!} \tag{1.13}$$

Ces polynômes apparaissent dans la composition des fonctions génératrices dans [18, 20]. La relation entre $B_n(a_1, a_2, \ldots)$ et $B_{n,k}(a_1, a_2, \cdots)$ est:

$$B_n(a_1, a_2, \cdots) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(a_1, a_2, \cdots). \tag{1.14}$$

Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} B_2(a_1, a_2) &= \sum_{k=1}^{2} B_{2,k}(a_1, a_2, \cdots) \\ &= B_{2,1}(a_1, a_2) + B_{2,2}(a_1). \end{aligned}$$

La formule combinatoire des polynômes partiels exponentiels de Bell [10] est donnée par:

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \cdots) = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \binom{k}{k_1 k_2 \cdots k_n} \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{a_r}{r!}\right)^{k_r} \tag{1.15}$$

avec

$$\binom{k}{k_1 k_2 \cdots k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

le coefficient multinomial.

1.5 Formule de Faà di Bruno

Les polynômes de Bell apparaissent dans la formule de Faà di Bruno pour calculer la dérivée $n$ième de la commposée de deux fonctions indéfinement dérivables.

Théorème 1.2. *[14] Soient f et g deux fonctions n fois dérivables avec $g(0) = 0$. Alors la dérivée d'ordre n de la fonction composée est donnée par*

$$\frac{d^n}{dt^n} f(g(t)) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=k \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{g^{(r)}(t)}{r!}\right)^{k_r}, \tag{1.16}$$

Avec les polynômes exponentiels partiels de Bell elle devient

$$\frac{d^n}{dt^n}f(g(t)) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(g(t))B_{n,k}(g'(t), g''(t), \cdots, g^{(n)}(t)). \tag{1.17}$$

Comme on a

$$f \circ g(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(f\circ g)^{(n)}(0)}{n!}t^n.$$

Alors

$$f \circ g(t) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(0)B_{n,k}(g'(0), g''(0), \cdots, g^{(n)}(0))\frac{t^n}{n!}. \tag{1.18}$$

Exemple 1.1. *Pour $n = 2$, l'expression de la dérivée d'ordre 2 est donnée par la formule suivante*

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}f(g(t)) &= \sum_{k=1}^{2} f^{(k)}(g(t))B_{2,k}(g'(t), g''(t)) \\ &= f'(g(t))B_{2,1}(g'(t), g''(t)) + f''(g(t))B_{2,2}(g'(t), g''(t)),\end{aligned}$$

comme on a calculer précédemment $B_{2,1} = a_2$ et $B_{2,2} = a_1^2$, alors on

$$\frac{d^2}{dt^2}f(g(t)) = f'(g(t))g''(t) + f''(g(t))(g'(t))^2.$$

Une variété de ce théorème est la fonction génératrice de la fonction $\log(1+t)$ composée avec la fonction génératrice $1 + \sum_{n\geq 1} g_n\frac{t^n}{n!}$:

$$\log\left(1 + \sum_{n\geq 1} g_n\frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!B_{n,k}(g_1, g_2, \cdots)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.19}$$

1.6 Inverse d'une fonction génératrice

Pour la fonction génératrice $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ avec $a_0 \neq 0$, les coefficients A_n de l'inverse $f^{-1}(t)$ sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 1.3. *[18] Pour $n \geq 1$ on a*

$$A_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k! a_0^{-1-k} B_{n,k}(1!a_1, 2!a_2, \cdots). \tag{1.20}$$

La fonction $f^{-1}(t)$ est un cas particulier de la fonction puissance suivante:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)^{\alpha} = a_0^{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(\alpha)_j a_0^{\alpha-j} B_{n,j}(1!a_1, 2!a_2, \cdots)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.21}$$

Il suffit de poser $\alpha = -1$ pour obtenir l'identité (1.20). La preuve du Théroème (1.3) est détaillée dans [18]. Il reste à signaler que ces résultats sont valables pour les nombres et les polynômes définis par des fonctions génératrices rationnelles, où leurs formules peuvent être réduites.
Le polynôme $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ est une fonction génératrice où tout les a_n sont nuls à partir de $n = 3$. Ainsi on a

$$\left(\sum_{n=0}^{2} a_n \frac{t^n}{n!}\right)^{-1} = a_0^{-1} + \sum_{n=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)_j a_0^{-1-j} B_{n,j}(1!a_1, 2!a_2, 0, \cdots)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.22}$$

Et alors

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n-k} a_0^{-1-k} a_1^{2k-n} a_2^{n-k}. \tag{1.23}$$

1.7 Nombres G_n et polynômes $G_n(x)$

Les nombres et les polynômes satisfaisant la relation de récurrence linéaire de second ordre et leurs produits sont largement étudiés dans la littérature. Pour cela nous avons revu les fonctions génératrices ordinaires et exponentielles associées, et la fonction génératrice du produit de deux polynômes.
Soit G_n une famille de polynôme définie dans [16] par la relation de récurrence du second ordre.

$$G_{n+2}(x) = pxG_{n+1}(x) + qG_n(x), \tag{1.24}$$

avec $G_0(x) = a$, $G_1(x) = b$, et $a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{R}$. Il est clair que la suite $G_n(x)$ peut être calculer avec la formule (1.23). Avant d'écrire cette formule on rappelle quelques résultats classiques sur ces polynômes.

1.7.1 La fonction génératrice ordinaire

La fonction génératrice ordinaire de $G_n(x)$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 1.4. *[16] La fonction génératrice ordinaire $G(z)$ de G_n est donnée par la relation*:

$$G(z) = \frac{a - (apx - b)z}{1 - pxz - qz^2}. \tag{1.25}$$

Théorème 1.5. *[16] L'identité suivante est vraie*

$$G_n(x) = (-q)^n \frac{\left(au + \frac{b}{q}\right) v^n - \left(av + \frac{b}{q}\right) u^n}{u - v}.$$

1.7.2 La fonction génératrice exponentielle

La fonction génératrice exponentielle de $G_n(x)$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 1.6. *[16]*

$$\sum_{n \geq 0} G_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{au + \frac{b}{q}}{u - v} e^{-qvz} - \frac{av + \frac{b}{q}}{u - v} e^{-quz}. \tag{1.26}$$

Quand on prend $x = 1$, on obtient les nombres G_n. Ces nombres vérifient les mêmes propriétés que $G_n(x)$. En l'occurence, on a la fonction génératrice et la formule explicite suivantes:

$$G(z) = \frac{a - (ap - b)z}{1 - pz - qz^2},$$

et

$$G_n = (-q)^n \frac{\left(au + \frac{b}{q}\right) v^n - \left(av + \frac{b}{q}\right) u^n}{u - v},$$

avec

$$u = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2q},$$

et

$$v = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2q}.$$

Pour se mettre dans le language des séries chronologiques, on considère la suite de nombres λ_n, donnée par la relation de récurrence suivante:

$$\lambda_n = -\frac{a_1}{a_0}\lambda_{n-1} - \frac{a_2}{a_0}\lambda_{n-2}, \ a_0 \neq 0, \forall n \geq 2, \tag{1.27}$$

avec $\lambda_0 = \frac{1}{a_0}$ et $\lambda_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}$.

Théorème 1.7. *La fonction génératrice de λ_n est:*

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2} = \sum_{n \geq 0} \lambda_n t^n. \tag{1.28}$$

Le chemin inverse de la fonction génératrice à la réccurence précédente est assuré par le calcul suivant.

$$\begin{aligned} 1 &= \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) \sum_{n \geq 0} \lambda_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{2} a_n t^n \sum_{n \geq 0} \lambda_n t^n. \end{aligned}$$

En utilisant le produit de Cauchy pour le polynôme $P(t)$ et la série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n t^n$, on obtient:

$$1 = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} a_k \lambda_{n-k} \right) t^n,$$

et on écrit

$$1 = \sum_{n \geq 0} c_n t^n,$$

avec $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$.
On obtient alors:

$$\sum_{n \geq 0} c_n t^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} a_k \lambda_{n-k} \right) t^n.$$

Ainsi

$$c_n = \sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} a_k \lambda_{n-k}.$$

Par identification on aura:

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_0} & \text{si } \text{ n=0} \\ -\frac{a_1}{a_0^2} & \text{si } \text{ n=1} \\ -\frac{a_1}{a_0}\lambda_{n-1} - \frac{a_2}{a_0}\lambda_{n-2} & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Tout au long de ce travail on considère $a_0 = 1$ et la récurrence devient

$$\lambda_n = -a_1 \lambda_{n-1} - a_2 \lambda_{n-2}. \tag{1.29}$$

La formule explicite de λ_n est donnée dans le théorème suivant:

Théorème 1.8.

$$\lambda_n = a_2^n \frac{\left(u + \frac{a_1}{a_2}\right) v^n - \left(v + \frac{a_1}{a_2}\right) u^n}{u - v}, \tag{1.30}$$

avec

$$u = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2} \text{ et } v = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2}.$$

1.7.3 La fonction génératrice du produit

Le produit $G_jG_j^\star$ de deux suites de nombres satisfaisant la réccurence d'ordre deux est étudié dans [16], les premiers termes de G_j et $G_j^\star$ sont $G_0 = a$, $G_1 = b$, $G_0^\star = a'$ et $G_1^\star = b'$, et la relation de récurrence sous forme vectorielle est:

$$\left(G_{j+2}, G_{j+2}^\star\right) = p\left(G_{j+1}, G_{j+1}^\star\right) + q\left(G_j, G_j^\star\right).$$

Ainsi les fonctions génératrices de G_j et $G_j^\star$ sont respectivement

$$\frac{a-(ap-b)\,z}{1-pz-qz^2} = \sum_{j\geq 0} G_j z^j, \tag{1.31}$$

et

$$\frac{a'-(a'p-b')\,z}{1-pz-qz^2} = \sum_{j\geq 0} G_j^\star z^j. \tag{1.32}$$

La fonction génératrice de $G_jG_j^\star$ est:

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} G_jG_j^\star z^j &= \frac{aa' + \left(bb' - aa'p^2\right) z}{1-p^2z-(2qp^2+2q^2)\,z^2-(pq)^2z^3+q^4z^4} \\ &\quad + \frac{\left(a'qbp + aqb'p - aa'\left(2qp^2+q^2\right)\right) z^2 - q^2\left(b'-a'p\right)(b-ap)\,z^3}{1-p^2z-(2qp^2+2q^2)\,z^2-(pq)^2z^3+q^4z^4}.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Pour la preuve voir [16, Theorem 3.1] en posant $x = y = 1$, $a' = b$, $b' = aq + bp$ $p' = p$ et $q' = q$. Par la suite, la fonction génératrice de G_jG_{j+1} est:

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} G_jG_{j+1} z^j &= \frac{ab + \left(pb^2 + qab - abp^2\right) z}{1-p^2z-(2qp^2+2q^2)\,z^2-(pq)^2z^3+q^4z^4} \\ &\quad + \frac{\left(qpb^2 + pq^2a^2 - abqp^2 - abq^2\right) z^2 - aq^3\,(b-ap)\,z^3}{1-p^2z-(2qp^2+2q^2)\,z^2-(pq)^2z^3+q^4z^4}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

Finalement pour $a = a'$ et $b = b'$, la fonction génératrice de G_j^2 est:

$$\sum_{j\geq 0} G_j^2 z^j = \frac{a^2 + \left(b^2 - a^2p^2\right) z + \left(2aqbp - a^2\left(2qp^2+q^2\right)\right) z^2 - q^2\,(b-ap)^2\,z^3}{1-p^2z-(2qp^2+2q^2)\,z^2-(pq)^2z^3+q^4z^4}. \tag{1.35}$$

Ces produits sont importants pour étudier les modèles autorégressifs d'ordre deux, comme on le verra dans le dernier chapitre. Ces fonctions génératrices permettent de calculer explicitement les fonctions d'autocovariances et les fonctions d'autocorrélations.

Chapitre 2

Les processus autorégressifs

2.1 Séries chronologiques, définitions et propriétés

Dans ce chapitre nous donnons un bref résumé sur les séries chronologiques. On commence par donner quelques définitions et notions de base utiles pour notre travail.

Définition 2.1. [6] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité. Un processus aléatoire ou processus stochastique noté $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est une famille de variables aléatoires qui évoluent dans le temps, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

On utilise ces espaces pour représenter et analyser les phénomènes aléatoires, comme ils sont largement utilisés dans de nombreux domaines comme la finance et les télécommunications. Pour chaque instant t, la valeur de la quantité étudiée X_t est une variable aléatoire, et l'ensemble des valeurs X_t quand t varie est appelé processus aléatoire $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$. Une série chronologique est ainsi une réalisation d'un processus aléatoire. D'une manière précise, on adoptera la définition suivante.

Définition 2.2. [6] Une série chronologique (ou temporelle) est un ensemble de données X_t, chacune étant enregistrée à un moment précis t.
Autrement dit, une série chronologique est une suite finie d'observations $(X_t)_{1 \leq t \leq T}$.

2.1.1 Fonction d'autocovariance et fonction d'autocorrélation

Soit $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stochastique, la moyenne et la variance sont défines respectivement par

$$\mu_t = \mathbb{E}(X_t),\ t \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

et

$$\sigma_t^2 = var(X_t),\ t \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

La covariance, souvent appellée fonction d'autocovariance, elle est définie par

$$\gamma_{t_1,t_2} = \mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \mathbb{E}\left((X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})\right), \qquad t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

la fonction d'autocovariance fournit des informations sur les liaisons linéaires temporelles qui existent entre les différentes composantes de la série X_t.
La normalisation de la fonction d'autocovariance nous donne la fonction d'autocorrélation définie par

$$\rho_{t_1,t_2} = \mathrm{Corr}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}, \qquad t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

La fonction d'autocovariance (autocorrélation) donne la covariance (corrélation) du processus avec lui-même à des paires de points dans le temps.

2.1.2 La stationnarité

Avant de modéliser une série temporelle, plusieurs étapes préliminaires sont nécessaires. Pour appliquer les méthodes classiques des séries temporelles, il faut vérifier que les séries étudiées évoluent dans un état "d'équilibre statistique" dans le sens où les propriétés probabilistes et statistiques ne changent pas dans le temps. De tels processus sont dits stationnaires.

Définition 2.3. [22](Stationnarité stricte) La série temporelle $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est dite strictement stationnaire si les distributions conjointes de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ et $(X_{t_{1+k}}, X_{t_{2+k}}, \ldots, X_{t_{n+k}})$ sont identiques pour tous les entiers positifs k et pour tous les $t_1, \ldots, t_n, k \in \mathbb{Z}$.

La plupart des résultats et des méthodes utilisées dans l'analyse des séries temporelles sont basées sur l'hypothèse de stationnarité faible.

Définition 2.4. [21](stationnarité faible) La série temporelle $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire au second ordre ou stationnaire au sens faible, ou stationnaire d'ordre deux si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

1. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$.
2. $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(X_t) = cte$, indépendante de t.
3. $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2$, $\gamma_{t,t+k} = \gamma_{0,k}$, indépendante de t.

Si $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus faiblement stationnaire, alors la moyenne et la variance sont indépendantes du temps, et la fonction d'autocovariance ne dépend que du décalage h entre t_1 et t_2[12].
Cela implique que les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation peuvent être exprimées uniquement comme des fonctions d'un décalage temporel $h = t_2 - t_1$.
Ainsi la fonction d'autocovariance (2.3) peut être réécrire comme suit

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}),\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

et, de même, la fonction d'autocorrélation (2.4)

$$\rho(h) = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+h}),\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

ρ_h représente l'expression du lien linéaire entre le présent et le passé d'ordre h. On a $\rho(h) \in [-1, 1]$ et les fonctions $\gamma(h)$ et $\rho(h)$ sont symétriques.

Remarque 2.1. La stationnarité stricte implique la stationnarité faible lorsque les deux premiers moments existent.

2.2 Processus bruit blanc (White noise)

Parmi les processus stationnaires, il existe des processus particuliers, qui sont les processus bruits blancs.

Définition 2.5. [6] Un processus $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc s'il satisfait les deux conditions suivantes

1. $\mathbb{E}(X_t) = 0$
2. $\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$

Un bruit blanc n'est pas nécessairement gaussien, il peut avoir différentes distributions de probabilité autres que la distribution gaussienne : Il peut être uniforme, exponentiel... mais généralement on le considère comme gaussien.

2.3 La décomposition de Wold

Avant de présenter les modèles de séries chronologiques existant dans la littérature et les plus fréquemment utilisés dans la modélisation des séries temporelles, nous commencerons par donner l'énoncé de théorème de Wold (1938) qui établit une décomposition de processus de second ordre. L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Théorème 2.1. *[6](Décomposition de Wold (1938)) Tout processus, du second ordre, faiblement stationnaire $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ possède une décomposition unique donnée par :*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} + V_t, \tag{2.7}$$

où les paramètres ψ_j satisfaisant $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc et la composante linéaire détermisniste V_t vérifié $Cov(V_t, \epsilon_s) = 0$, pour tous les s et t dans $\mathbb{Z}$.

Tout processus stationnaire peut s'écrire sous la forme d'une somme pondérée infinie des chocs passés (Théorème de Wold 1938). L'implication forte de ce théorème est que, si on connaît les pondérations ψ_j, $\forall j \in \mathbb{N}$ et la variance σ^2 du bruit blanc, alors on peut proposer une représentation de n'importe quel processus stationnaire. C'est un outil pour la modélisation des séries temporelles. Il existe des cas particuliers du théorème de Wold, qui sont utiles dans la pratique. Parmi ces cas, processus bruit blanc et d'autre repésentations possibles, le cas de processus autorégressif d'ordre p, processus moyenne mobile d'ordre q....

Tout au long de ce travail, nous considérons un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, du second ordre et le processus bruit blanc de moyenne nulle ($\mu = 0$) et de variance qui vaut un ($\sigma^2 = 1$).

2.4 Procesus autorégressif d'ordre fini

La définition générale d'un processus AR est la suivante

Définition 2.6. Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait une représentation autorégressif AR d'ordre p, notée $AR(p)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastiques suivante

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t, \tag{2.8}$$

où $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit L l'opérateur retard défini par $LX_t = X_{t-1}$ et d'une manière générale $L^k X_t = X_{t-k}$. Ainsi on peut réécrire le modèle (2.8) sous la forme suivante

$$\Phi(L)X_t = \epsilon_t, \tag{2.9}$$

avec $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p = 1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j L^j$ où $\forall j < p$, $\phi_j \in \mathbb{R}$, $\phi_0 = 1$ et $\phi_p \in \mathbb{R}^*$ avec ϵ_t un bruit blanc, $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_p)^t$ les coefficients du modèle (2.9). Une étude détaillée de ces processus est développée dans [3], ils sont utilisés dans d'autres disciplines ; notamment les tests épidémiques [30] et l'étude du cancer [31].

2.5 Inversion d'un processus autorégressif d'ordre fini

L'inverse d'un processus autorégressif d'ordre p est une représentation en moyenne mobile d'ordre infini, notée $MA(\infty)$. Le problème d'inversion revient à écrire $\frac{1}{\Phi(z)}$ sous forme d'une série formelle, c'est à dire

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \sum_{j\geq 0} \pi_j z^j. \tag{2.10}$$

En général, une formule explicite pour les π_j est difficile à trouver [3]. Pour l'instant, on se satisfait de la récurrence donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.1. *On a*

$$\pi_0 = 1 \ \textit{et}\ \pi_j = \sum_{k=1}^{j} \phi_k \pi_{j-k},\ \ j \geq 1.$$

Preuve. *Depuis la relation*:

$$1 = \Phi(z) \sum_{j\geq 0} \pi_j z^j.$$

alors $1 = \left(\sum_{j\geq 0} b_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j\right)$,
avec $b_0 = 1, \ldots, b_p = -\phi_p$, *et* $b_j = 0 \quad$ *pour* $j \geq p+1$.
Grâce au produit de Cauchy on obtient: $\pi_0 = 1$ *et* $\pi_j = \sum_{k=1}^{j} \phi_k \pi_{j-k}$ *;* $j \geq 1$.

Par contre on n'a pas les formules exactes pour calculer la fonction d'autocovariance et la fonction d'aoutocorrélation.
Une autre manière pour calculer la valeur de π_j en fonction des dérivées successives est donnée par

$$\pi_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)^{(j)}_{z=0}. \tag{2.11}$$

Mais la difficulté recontrée réside dans la formule générale du $\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)^{(j)}$.

2.6 Procesus autorégressif d'ordre deux

Dans le cas $p = 2$, le polynôme caractéristique est $\Phi_2(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$. La récurrence donnée dans la proposition précédente devient

$$\pi_0 = 1,\ \pi_1 = \phi_1 \text{ et } \pi_j = \phi_1 \pi_{j-1} + \phi_2 \pi_{j-2},\ j \geq 2.$$

Soient a_1 et a_2 les inverses des racines ξ_1, ξ_2 du polynôme caractéristique $\Phi_2(z)$, on peut alors écrire

$$\Phi_2(L) = (1 - a_1 L)(1 - a_2 L).$$

En utilisant la somme d'une série géométrique $\frac{1}{1-aL} = \sum_j a^j L^j$, le théorème suivant donne la formule explicite de π_j.

Théorème 2.2. *[6]*

$$\pi_j = \frac{\xi_1 \xi_2^{-j} - \xi_2 \xi_1^{-j}}{\xi_1 - \xi_2}; \tag{2.12}$$

Avec $\xi_1 = a_1^{-1}$ et $\xi_2 = a_2^{-1}$ les racines du polynôme $\Phi_2(z)$.

Preuve. *On a*

$$X_t = \frac{1}{\Phi_2(L)} \epsilon_t.$$

Comme $\frac{1}{1-a_k L}$ est la somme d'une suite géométrique d'ordre infinie, c'est à dire $\sum_{j \geq 0} (a_k L)^j = \frac{1}{1-a_k L}$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{1 - a_1 L} . \frac{1}{1 - a_2 L} \epsilon_t \\ &= \left(\sum_{j \geq 0} a_1^j L^j \right) \left(\sum_{j \geq 0} a_2^j L^j \right) \epsilon_t. \end{aligned}$$

En utilisant le produit de Cauchy, on obtient:

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{j} a_1^k a_2^{j-k} \right) L^j \epsilon_t \\ &= \sum_{j \geq 0} \pi_j(X) \epsilon_{t-j}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\pi_j(X) &= \sum_{k=0}^{j} a_1^k a_2^{j-k} \\ &= a_2^j \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\pi_j(X) &= a_2^j \frac{1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{j+1}}{1-\frac{a_1}{a_2}} \\ &= \frac{a_2^{j+1}-a_1^{j+1}}{a_2-a_1}.\end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs de a_1 et a_2 on obtient le résultat. □

2.6.1 Les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

D'après la définition, la fonction d'autocovariance est donnée par

$$\gamma(h) = \sum_{j\geq 0} \pi_j \pi_{j+h}. \tag{2.13}$$

Ainsi, pour calculer $\gamma(h)$, on doit évaluer $\pi_j\pi_{j+h}$. Pour cela on a besoin de lemme technique suivant.

Lemme 2.1. *[36]* $\forall h \in \mathbb{N}$

$$\pi_j\pi_{j+h} = \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)^2}\left[\xi_1^2\xi_2^{-2j-h} + \xi_2^2\xi_1^{-2j-h} - (\xi_1\xi_2)^{-j+1}\left(\xi_2^{-h}+\xi_1^{-h}\right)\right].$$

Preuve. *En utilisant l'identité* (2.12) *du théorème 2.2 on aura*

$$\begin{aligned}
\pi_j\pi_{j+h} &= \left(\frac{\xi_1\xi_2^{-j}-\xi_2\xi_1^{-j}}{\xi_1-\xi_2}\right)\left(\frac{\xi_1\xi_2^{-j-h}-\xi_2\xi_1^{-j-h}}{\xi_1-\xi_2}\right)\\
&= \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)^2}\left[\xi_1^2\xi_2^{-2j-h}+\xi_2^2\xi_1^{-2j-h}-(\xi_1\xi_2)^{-j+1}\xi_2^{-h}-(\xi_1\xi_2)^{-j+1}\xi_1^{-h}\right)]\\
&= \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)^2}\left[\xi_1^2\xi_2^{-2j-h}+\xi_2^2\xi_1^{-2j-h}-(\xi_1\xi_2)^{-j+1}\left(\xi_2^{-h}+\xi_1^{-h}\right)\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

L'expression de la fonction d'autocovariance de $\{X_t,\ t\in\mathbb{Z}\}$ à un retard $h\in\mathbb{N}$ en fonction des racines du polynôme $\Phi_2(z)$ est donnée par le théorème suivant:

Théorème 2.3. *[6]*

$$\gamma(h)=\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1\xi_2-1)(\xi_2-\xi_1)}\left[(\xi_1^2-1)^{-1}\xi_1^{1-h}-(\xi_2^2-1)^{-1}\xi_2^{1-h}\right]. \tag{2.14}$$

Preuve. *On a* $\gamma_X(h)=\sum_{j\geq 0}\pi_j(X)\pi_{j+h}(X)$
En effet à partir du lemme 2.1

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0}\pi_j\pi_{j+h} &= \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)^2}\sum_{j\geq 0}\left[\xi_1^2\xi_2^{-h}\xi_2^{-2j}+\xi_2^2\xi_1^{-h}\xi_1^{-2j}-\left(\xi_1^{1-h}\xi_2+\xi_2^{1-h}\xi_1\right)(\xi_1\xi_2)^{-j}\right]\\
&= \frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}\left[\frac{\xi_2^{-h}}{\xi_2^2-1}+\frac{\xi_1^{-h}}{\xi_1^2-1}-\frac{\xi_1^{-h}+\xi_2^{-h}}{\xi_1\xi_2-1}\right]\\
&= \frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1\xi_2-1)(\xi_1-\xi_2)^2}\left[\xi_2^{1-h}\frac{(\xi_1-\xi_2)}{(\xi_2^2-1)}+\xi_1^{1-h}\frac{(\xi_2-\xi_1}{(\xi_1^2-1)}\right],
\end{aligned}$$

d'où

$$\gamma(h)=\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1\xi_2-1)(\xi_2-\xi_1)}\left[\frac{\xi_1^{1-h}}{\xi_1^2-1}-\frac{\xi_2^{1-h}}{\xi_2^2-1}\right].$$

$\square$

Corollaire 2.1. *L'expression de $\rho_X(h)$ en fonction des racines est donnée par*

$$\rho(h) = \frac{\xi_1^{-h+1}(\xi_2^2 - 1) - \xi_2^{-h+1}(\xi_1^2 - 1)}{\xi_1(\xi_2^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)}. \tag{2.15}$$

Preuve. *Le résultat est immédiat du fait que $\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X}$; où $\gamma_X = \gamma_X(0)$.*

$$\begin{aligned}\rho(h) &= \frac{\frac{\xi_1^{1-h}}{\xi_1^2-1} - \frac{\xi_2^{1-h}}{\xi_2^2-1}}{\frac{\xi_1^1}{\xi_1^2-1} - \frac{\xi_2^1}{\xi_2^2-1}} \\ &= \frac{\xi_1^{1-h}(\xi_2^2 - 1) - \xi_2^{1-h}(\xi_1^2 - 1)}{\xi_1(\xi_2^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)}.\end{aligned}$$

□

Exemple 2.1. *On considère le processus autorégressif d'ordre* 2:

$$X_t = \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \epsilon_t.$$

Son polynôme caractéristique est $\Phi_2(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2$, qui admet 2 *et* 3 *comme racines. Les expressions de π_j, γ_h et ρ_h sont*

$$\pi_j = \frac{3}{2^j} - \frac{2}{3^j},$$

$$\gamma_h = \frac{3}{10}\left(2^{4-h} - 3^{2-h}\right),$$

et

$$\rho_h = \frac{1}{7}\left(2^{4-h} - 3^{2-h}\right).$$

L'expression de la fonction d'autocovariance d'un $AR(2)$ en fonction des coefficients ϕ_1 et ϕ_2 est donnée dans [22].
En effet a partir de l'équation (2.8), on peut écrire

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t, \tag{2.16}$$

en multipliant les deux membres de l'équation (2.16) par X_{t+h} et en prenant l'epérance, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \phi_1\gamma(h-1)+\phi_2\gamma(h-2),\ h\geq 1\\ \rho(h) &= \phi_1\rho_{h-1}+\phi_2\rho_{h-2},\ h\geq 1.\end{aligned}$$

En particulier pour $h=1$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1\rho_0+\phi_2\rho_1\\ \rho_1 &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2}.\end{aligned}$$

Et pour $h=2$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1+\phi_2. \tag{2.17}$$

La variance d'un modèle $AR(2)$ est obtenue en multipliant les deux membres de l'équation (2.16) par X_t et en prenant l'epérance,

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \phi_1\gamma(1)+\phi_2\gamma(2)+1\\ &= \phi_1\rho_1\gamma(0)+\phi_2\rho_2\gamma(0)+1,\end{aligned}$$

finalement on obtient

$$\gamma(0)=\frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}. \tag{2.18}$$

2.7 Processus $ARMA(p,q)$

Les processus autorégressifs moyennes mobiles (Auto-Regressive Moving Average) sont largement étudiés dans la littérature. Ils constituent une partie importante dans les séries temporelles et offrent une bonne approche de l'analyse des données pour certains aspects, mais aussi pour certains phénomènes de la vie courante.

Définition 2.7. [6] $\{X_t,\ t\in\mathbb{Z}\}$ est un processus $ARMA(p,q)$ s'il est stationnaire et si pour tout t,

$$X_t-\phi_1X_{t-1}-\cdots-\phi_pX_{t-p}=\epsilon_t+\theta_1\epsilon_{t-1}+\cdots+\theta_q\epsilon_{t-q}, \tag{2.19}$$

où ϵ_t un bruit blanc, et les polynômes caractéristiques $1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ et $1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ n'ont aucune racine commune.

En utilisant l'opérateur retard, on peut réécrire le modèle (2.19) sous la forme suivante:

$$\Phi(L)X_t = \Theta(L)\epsilon_t, \tag{2.20}$$

avec $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$ et $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$.
Deux cas particuliers sont définis à partir de l'équation (2.20) donnés par:

- Si $q = 0$, le modèle $ARMA(p, 0)$ est un processus autorégressif d'ordre p ou $AR(p)$.
- Si $p = 0$, le modèle $ARMA(0, q)$ est un processus moyenne mobile d'ordre q ou $MA(q)$.

Un processus ARMA est stationnaire si le polynôme Φ a toutes ses racines à l'extérieur du disque unité et inversible si toutes les racines du polynôme Θ sont à l'extérieur du disque unité. En conséquence, si Φ et Θ ont leurs racines à l'extérieur du disque unité, on peut écrire un processus $ARMA(p, q)$:

- Soit sous la forme $AR(\infty)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} X_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j X_{t-j}, \end{aligned}$$

  avec les conditions $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ et $\alpha_0 = 1$. Pour calculer récursivement α_j, on utilise la relation

$$\Theta(z) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j = \Phi(z),$$

  pour obtenir

$$\phi_j = \sum_{k=0}^{j} \theta_{j-k} \alpha_k.$$

Alors

$$\alpha_j = \phi_j - \sum_{k=0}^{j-1} \theta_{j-k}\alpha_k, \qquad (2.21)$$

sachant que $\theta_j = 0$, pour $j \geq q+1$ et $\phi_j = 0$, pour $j \geq p+1$. Cette remarque nous permet d'écrire

$$\alpha_j = -\sum_{k=0}^{j-1} \theta_{j-k}\alpha_k,$$

pour $j \geq p+1$.

– Soit sous la forme $MA(\infty)$:

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\epsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \epsilon_{t-j}, \end{aligned}$$

avec les conditions $\sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| < \infty$ et $\beta_0 = 1$. De la même manière le calcul des coefficient β_j se fait à l'aide de la relation

$$\Phi(z) \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j = \Theta(z).$$

Ainsi on obtient

$$\theta_j = \sum_{k=0}^{j} \phi_{j-k}\beta_k.$$

Finalement on aura

$$\beta_j = \theta_j - \sum_{k=0}^{j-1} \phi_{j-k}\beta_k.$$

2.7.1 La fonction d'autocovariance

Soit $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ un processus stationnaire. La fonction d'autocovariance $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$ peut être obtenue en utilisant les coefficients du modèle $ARMA$, en multipliant les deux membres de l'égalité suivante $X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$ par X_{t+h} et en prenant l'espérance. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) - \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t+h}) - \cdots - \phi_p \mathbb{E}(X_{t-p} X_{t+h}) \\ = \ & \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) + \theta_1 \mathbb{E}(\epsilon_{t-1} X_{t+h}) + \cdots + \theta_q \mathbb{E}(\epsilon_{t-q} X_{t+h}), \end{aligned}$$

et comme ϵ_t est un bruit blanc, c'est à dire non corrélé avec le passé du X_t $(\mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) \neq 0, \ \forall h \neq 0)$, on obtient:

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(h-i) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \mathbb{E}(\epsilon_{t-j} X_{t+h}), \tag{2.22}$$

2.7.2 La fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation du modèle $ARMA(p,q)$ en fonction de ses coefficients est

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(h-i) + \frac{1}{\gamma(0)} \left[\mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \mathbb{E}(\epsilon_{t-j} X_{t+h}) \right]. \end{aligned}$$

Processus autorégressif moyenne mobile $ARMA(2,q)$

Définition 2.8. $\{X_t, \ t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus $ARMA(2,q)$ si il est stationnaire et si pour tout t,

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \tag{2.23}$$

où ϵ_t est un bruit blanc, et les polynômes $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ et $1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ n'ont aucune racine commune.

En utilisant l'opérateur retard, on peut réécrire le modèle (2.23) sous la forme suivante:

$$\Phi(L) X_t = \Theta(L) \epsilon_t, \tag{2.24}$$

avec $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2$ et $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q$.

La fonction d'autocovariance

A partir de l'équation (2.23), on peut écrire:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}.$$

La fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ est calculée en utilisant à la fois les coefficients du processus autorégressif $AR(2)$ et du processus moyenne mobile $MA(q)$. Donc à partir de l'équation (2.22)

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^{2} \phi_i \gamma(h-i) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \mathbb{E}(\epsilon_{t-j} X_{t+h}), \tag{2.25}$$

la foction d'autocorrélation est donnée par

$$\rho(h) = \sum_{i=1}^{2} \phi_i \rho(h-i) + \frac{1}{\gamma(0)} \left[\mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \mathbb{E}(\epsilon_{t-j} X_{t+h}) \right].$$

2.8 Processus $ARMA(2,1)$

Définition 2.9. $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus $ARMA(2,1)$ si il est stationnaire et si pour tout t,

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}. \tag{2.26}$$

où ϵ_t est un bruit blanc, et les polynômes $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ et $1 + \theta_1 z$ n'ont aucune racine commune.

En utilisant l'opérateur retard, on peut réécrire le modèle (2.26) sous la forme suivante:

$$\Phi(L) X_t = \Theta(L) \epsilon_t, \tag{2.27}$$

avec $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2$ et $\Theta(L) = 1 + \theta_1 L$. D'autres aspects d'un $ARMA$ sont étudiés dans [1, 4, 25, 26]. Le procédé d'inversion d'un $ARMA(2,1)$ est tiré de l'inversion d'un $AR(2)$. On pose

$$\epsilon_t = \frac{\Phi(L)}{\Theta(L)} X_t = \sum_{j \geq 0} \lambda_j L^j X_t.$$

Les coefficients λ_j sont calculés de la relation

$$\frac{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2}{1+\theta_1 z}=\sum_{j\geq 0}\lambda_j z^j.$$

Comme on a

$$\frac{1}{1+\theta_1 z}=\sum_{j\geq 0}(-\theta_1)^j z^j,$$

alors

$$\frac{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2}{1+\theta_1 z}=\left(1-\phi_1 z-\phi_2 z^2\right)\sum_{j\geq 0}(-\theta_1)^j z^j.$$

Ce qui nous permet d'obtenir $\lambda_0=1$, $\lambda_1=-\phi_1-\theta_1$ et pour $j\geq 2$ on a

$$\lambda_j=(-\theta_1)^j-\phi_1(-\theta_1)^{j-1}-\phi_2(-\theta_1)^{j-2}.$$

Et l'écriture

$$X_t=\frac{\Theta(L)}{\Phi(L)}\epsilon_t$$

permet d'obtenir la formule

$$X_t=\sum_{j\geq 0}\lambda_j z^j.$$

Sachant que

$$\frac{1}{\Phi(z)}=\frac{1}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2}=\sum_{j\geq 0}\frac{\xi_1\xi_2^{-j}-\xi_2\xi_1^{-j}}{\xi_1-\xi_2}z^j.$$

Alors

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}=(1+\theta_1 z)\sum_{j\geq 0}\frac{\xi_1\xi_2^{-j}-\xi_2\xi_1^{-j}}{\xi_1-\xi_2}z^j.$$

Ce qui nous permet d'obtenir $\lambda_0=1$ et pour $j\geq 1$;

$$\lambda_j=\frac{\xi_1\xi_2^{-j}-\xi_2\xi_1^{-j}}{\xi_1-\xi_2}+\theta_1\frac{\xi_1\xi_2^{-j+1}-\xi_2\xi_1^{-j+1}}{\xi_1-\xi_2}.$$

A partir de l'équation (2.26), on peut écrire:

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+\epsilon_t+\theta_1\epsilon_{t-1},$$

A partir de l'équation (2.22), $\gamma(h)$ peut être obtenue en utilisant les coefficients du modèle ϕ_1, ϕ_2 et θ_1. Et en remplaçant p et q par leurs valeurs, on obtient

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) + \theta_1\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}X_{t+h}).$$

Chapitre 3

Application des polynômes de Bell aux modèles $AR(2)$

3.1 Introduction

Cette partie est consacrée aux processus autorégressifs d'ordre deux ; $AR(2)$ et au processus autorégressif moyenne mobile $ARMA(2,1)$. Dans le cas de stationnarité, nous revisitons les formules explicites des paramètres du processus $AR(2)$ données dans [22] et nous établissons le lien nécessaire entre $AR(2)$ et $ARMA(2,1)$. Les formules obtenues améliorent certains résultats dans la littérature, notamment ceux déjà établis dans [6]. La plupart des résultats obtenus sont expliqués par un calcul numérique avec des exemples déjà étudiés.

3.2 Évaluation de différents paramètres du modèle $AR(2)$

Dans cette section, nous calculons les pramètres $\pi_j(X)$, $\gamma_X(h)$ et $\rho_X(h)$ en fonction des coefficients ϕ_1 et ϕ_2 du modèle $AR(2)$, sans l'utilisation des racines du polynôme caractéristique, pour terminer avec une nouvelle preuve de l'équation de Yule-Walker.

3.2.1 Calcul des coefficients π_j

Les coefficients $\pi_j(X)$ satisfont la relation de récurrences à trois termes suivante:

$$\pi_{j+2}(X) = \phi_1 \pi_{j+1}(X) + \phi_2 \pi_j(X), \tag{3.1}$$

avec les premiers termes $\pi_0(X) = 1$ et $\pi_1(X) = \phi_1$.
Ce résultat découle de l'application de [17, Theorem 2.1] pour la fonction génératrice rationnelle $\frac{1}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2}$.
En effet, on a

$$\frac{1}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2} \;=\; \sum_{j\geq 0} \pi_j z^j,$$

qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1-\phi_1 z-\phi_2 z^2\right)\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j \\ &= \left(\sum_{j=0}^{2} b_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j\right), \end{aligned}$$

avec $b_0 = 1$, $b_1 = -\phi_1$ et $b_2 = -\phi_2$. Le produit de Cauchy permet d'écrire

$$1 = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{\min\{2,j\}} b_k \pi_{j-k}\right) z^j.$$

Par identification on aura:

$$\pi_j(X) = \begin{cases} 1 & \text{si j=0} \\ \phi_1 & \text{si j=1} \\ \phi_1 \pi_{j-1} + \phi_2 \pi_{j-2} & \forall j \geq 2 \end{cases}$$

Par ailleurs, la formule explicite des coefficients π_j en fonction des paramètres ϕ_1 et ϕ_2 est donnée par le théorème suivant:

Théorème 3.1.

$$\pi_j(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \phi_1^{j-2k} \phi_2^k. \tag{3.2}$$

3.2.2 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

La fonction d'autocovariance en fonction des paramètres ϕ_1 et ϕ_2 s'écrit sous la forme

$$\gamma(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \pi_{j+h}.$$

A l'aide des produits $G_j G_j^{\star}$, on peut calculer la formule explicite de $\gamma(h)$.

Cas $h = 0$ **et** $h = 1$

Pour ces deux valeurs, on a le théorème suivant:

Théorème 3.2. *[36, 22] Les expressions de γ_X et $\gamma_X(1)$ en fonction de ϕ_1 et ϕ_2 sont respectivement*

$$\gamma_X = \frac{1-\phi_2}{(\phi_2+1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+\phi_1-1)}, \tag{3.3}$$

et

$$\gamma_X(1) = \frac{\phi_1}{(\phi_2+1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+\phi_1-1)}. \tag{3.4}$$

Preuve. *Soient $(p,q) = (\phi_1, \phi_2)$.*
La comparaison entre les nombres $\pi_j(X)$ et G_j conduit à $G_j = \pi_j(X)$ pour $(a,b) = (1, \phi_1)$ et $G_{j+1} = \pi_{j+1}(X)$ pour $(a', b') = \left(\phi_1, \phi_1^2 + \phi_2\right)$.
A partir des fonctions génératrices de $G_j G_{j+1}$ et G_j^2 on a

$$\sum_{j\geq 0} \pi_j(X)\pi_{j+1}(X) z^j = \frac{\phi_1 + \phi_1\phi_2 z}{1 - \phi_1^2 z - 2\phi_2\left(\phi_1^2+\phi_2\right) z^2 - (\phi_1\phi_2)^2 z^3 + \phi_2^4 z^4},$$

et

$$\sum_{j\geq 0} \pi_j^2(X) z^j = \frac{1-\phi_2^2 z^2}{1 - \phi_1^2 z - 2\phi_2\left(\phi_1^2+\phi_2\right) z^2 - (\phi_1\phi_2)^2 z^3 + \phi_2^4 z^4}.$$

La décomposition polynomiale de $1-\phi_1^2 z - 2\phi_2\left(\phi_1^2+\phi_2\right) z^2 - (\phi_1\phi_2)^2 z^3 + \phi_2^4 z^4$ est $(\phi_2 z + 1)\left(1 - (\phi_1^2+\phi_2)z - \phi_2(\phi_1^2+\phi_2)z^2 + \phi_2^3 z^3\right)$. Pour cela

$$\sum_{j\geq 0} \pi_j(X)\pi_{j+1}(X) z^j = \frac{\phi_1}{1 - (\phi_1^2+\phi_2)z - \phi_2(\phi_1^2+\phi_2)z^2 + \phi_2^3 z^3}, \tag{3.5}$$

et

$$\sum_{j\geq 0} \pi_j^2(X) z^j = \frac{1-\phi_2 z}{1-(\phi_1^2+\phi_2)z-\phi_2(\phi_1^2+\phi_2)z^2+\phi_2^3 z^3}. \tag{3.6}$$

En posant $z = 1$ *dans les identités* (3.5) *et* (3.6), *on obtient*:

$$\begin{aligned} \gamma_X &= \frac{1-\phi_2}{1-(\phi_1^2+\phi_2)-\phi_2(\phi_1^2+\phi_2)+\phi_2^3} \\ &= \frac{1-\phi_2}{(\phi_2+1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+\phi_1-1)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_X(1) &= \frac{\phi_1}{1-(\phi_1^2+\phi_2)-\phi_2(\phi_1^2+\phi_2)+\phi_2^3} \\ &= \frac{\phi_1}{(\phi_2+1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+\phi_1-1)}. \end{aligned}$$

□

Quelques exemples étudié dans [6] sont synthétisés dans le tableau 3.1.

(ϕ_1, ϕ_2)	γ_X	$\gamma_X(1)$
$\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)$	2.55682	1.98864
$\left(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10}\right)$	1.69753	1.08025
$\left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{20}\right)$	18.5008	17.8628
$\left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{20}\right)$	2.66183	−1.93587
$\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$	1.9008	0.912385

TAB. 3.1 – Quelques valeurs de γ_X et $\gamma_X(1)$ obtenues par (3.3) et (3.4)

Cas général

Avant de donner la formule générale de $\gamma_X(h)$, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1. *La fonction génératrice de* $\pi_{j+h}(X)$ *est*

$$\sum_{j\geq 0} \pi_{j+h}(X)z^j = \frac{\pi_h(X) + \phi_2\pi_{h-1}(X)z}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2}. \tag{3.7}$$

Preuve. *On a*

$$\sum_{j\geq 0} \pi_{j+h}(X)z^j = \frac{1}{z^h}\sum_{j\geq h} \pi_j(X)z^j,$$

alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} \pi_{j+h}(X)z^j &= \frac{1}{z^h}\left(\sum_{j\geq 0} \pi_j(X)z^j - \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j(X)z^j\right)\\ &= \frac{1}{z^h}\left(\frac{1}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2} - \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j(X)z^j\right).\end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned}\left(1-\phi_1 z-\phi_2 z^2\right)\sum_{j=0}^{h-1} \pi_j(X)z^j &= \sum_{j=0}^{h-1} \pi_j(X)z^j - \sum_{j=1}^{h} \phi_1\pi_{j-1}(X)z^j\\ &- \sum_{j=1}^{h} \phi_2\pi_{j-2}(X)z^j,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1-\left(1-\phi_1 z-\phi_2 z^2\right)\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j(X)z^j}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2} = z^h\frac{(\pi_h+\phi_2\pi_{h-1}z)}{1-\phi_1 z-\phi_2 z^2},$$

et le résultat découle. □

Lemme 3.2. *Pour* $(j,h)\in\mathbb{N}^2$ *on a*

$$\pi_{j+h}(X) = \pi_h(X)\pi_j(X) + \phi_2\pi_{h-1}(X)\pi_{j-1}(X). \tag{3.8}$$

Preuve. *On peut écrire la fonction génératrice* (3.7) *sous la forme suivante*:

$$\sum_{j\geq 0} \pi_{j+h}(X)z^j = [\pi_h(X) + \phi_2\pi_{h-1}(X)z] \sum_{j\geq 0} \pi_j(X)z^j.$$

Alors

$$\sum_{j\geq 1} [\pi_{j+h}(X) - \pi_h(X)\pi_j(X) - \phi_2\pi_{h-1}(X)\pi_{j-1}(X)]\, z^j = 0,$$

d'où on obtient le résultat. □

L'utilisation de Lemme 3.1 et Lemme 3.2 conduit au théorème suivant:

Théorème 3.3. *Pour* $h \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\gamma_X(h) = \frac{(1-\phi_2)\,\pi_h(X) + \phi_1\phi_2\pi_{h-1}(X)}{(\phi_2+1)\,(\phi_2-\phi_1-1)\,(\phi_2+\phi_1-1)}, \tag{3.9}$$

et

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X} = \pi_h(X) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\pi_{h-1}(X). \tag{3.10}$$

Preuve. *A partir de la définition de* $\gamma_X(h)$ *et l'identité* (3.8) *on peut déduire que* $\gamma_X(h) = \gamma\pi_h(X) + \phi_2\pi_{h-1}(X)\sum_{j\geq 0}\pi_j(X)\pi_{j+1}(X)$.
Alors

$$\gamma_X(h) = \gamma_X\pi_h(X) + \phi_2\gamma_X(1)\pi_{h-1}(X).$$

Et pour obtenir l'identité (3.9), *il suffit de remplacer* γ_X *et* $\gamma_X(1)$ *par leurs valeurs* (3.3) *et* (3.4). *L'identité* (3.10) *est immédiate.* □

Remarque 3.1. On voit bien que le résultat du Théorème 3.3 est valable si et seulement si $\phi_2 \neq -1$, $\phi_2 - \phi_1 \neq 1$ et $\phi_2 + \phi_1 \neq 1$ (garantissent que le processus est stationnaire). Et cela respecte la condition sur les coefficients ϕ_1 et ϕ_2 qui appartienent à la région triangulaire des coefficients [37].

En utilisant l'identité (3.10), on peut trouver les formules combinatoires suivantes:

$$\rho_X(2h) = \phi_2^h + \sum_{k=0}^{h-1}\left(\frac{2h-k}{2h-2k} + \frac{\phi_2}{1-\phi_2}\right)\binom{2h-k-1}{k}\phi_1^{2(h-k)}\phi_2^k, \tag{3.11}$$

et

$$\rho_X(2h+1) = \sum_{k=0}^{h} \left(\frac{2h-k+1}{2h-2k+1} + \frac{\phi_2}{1-\phi_2} \right) \binom{2h-k}{k} \phi_1^{2(h-k)+1} \phi_2^k. \quad (3.12)$$

Ces formules sont utiles pour le calcul numérique. Une illustration est donnée dans le tableau 3.2.

(ϕ_1, ϕ_2)	$\rho_X(50)$	$\rho_X(51)$
$\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)$	0.0000518722	0.0000426233
$\left(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10}\right)$	$1.2918958832001824 \times 10^{-15}$	$6.459479416000911 \times 10^{-16}$
$\left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{20}\right)$	0.00599793	0.00539814
$\left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{20}\right)$	0.00451792	−0.00406613
$\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$	$-2.0387579631369753 \times 10^{-7}$	$-4.247412423202032 \times 10^{-7}$

TAB. 3.2 – Quelques valeurs de $\rho_x(50)$ et $\rho_x(51)$ obtenues par (3.11) et (3.12).

Le Théorème 3.3 donne une autre preuve de l'équation de Yule-Walker.

Théorème 3.4.

$$\rho_X(h) = \phi_1 \rho_X(h-1) + \phi_2 \rho_X(h-2). \quad (3.13)$$

Preuve. *En effet, nous avons*

$$\rho_X(h-1) = \pi_{h-1}(X) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\pi_{h-2}(X), \ \rho_X(h-2) = \pi_{h-2}(X) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\pi_{h-3}(X)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_1\rho_X(h-1) + \phi_2\rho_X(h-2) &= \phi_1\pi_{h-1}(X) + \phi_2\pi_{h-2}(X) \\ &+ \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\left[\phi_1\pi_{h-2}(X) + \phi_2\pi_{h-3}(X)\right] \\ &= \pi_h(X) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\pi_{h-1}(X). \end{aligned}$$

En utilisant le système d'équation de Yule-Walker

$$\begin{pmatrix} \rho_X(0) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & \rho_X(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\phi_1 = \frac{\rho_X(1)\left(\rho_X(2) - 1\right)}{\rho_X^2(1) - 1} \text{ et } \phi_2 = \frac{\rho_X^2(1) - \rho_X(2)}{\rho_X^2(1) - 1}.$$

□

3.3 Le lien entre les $ARMA(p,q)$ et $AR(2)$

La famille des processus autorégressifs moyennes mobiles joue un rôle important dans la modélisation des séries temporelles. Dans cette partie, nous expliquons comment un modèle $ARMA(2,q)$ est associé à un modèle $AR(2)$ afin de donner sa représentation moyenne mobile $MA(\infty)$ et d'établir les relations entre leurs paramètres dans certains cas particuliers. Rappelons qu'un processus stationnaire Y_t est un $ARMA(p,q)$ si pour tout t,

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \tag{3.14}$$

où $\Phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ et $\Theta_q(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ n'ont aucune racine commune. En 2006 Kizilkaya et Kayran [28] ont étudié les modèles $ARMA$ qui sont équivalents aux modèles $MA(\infty)$. Sur cette base, nous pouvons écrire

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q} \theta_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{p} \phi_k z^{-k}} = \sum_{m \geq 0} d_m z^{-m}, \tag{3.15}$$

où d_m sont les paramètres du modèle moyenne mobile équivalent (EMA). Ils les ont mis en relation avec les coefficients spectraux [38] c_i ;

$$\ln\left(\sum_{m=0}^{L} d_m z^{-m}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^{-i}, \tag{3.16}$$

par la relation

$$d_m = c_m + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1} i c_i d_{m-i},\ d_0 = 1,\ 1 \leq m \leq L. \tag{3.17}$$

Pour calculer c_i, les auteurs se réfèrent à la formule $c_i = \mathcal{F}^{-1}\left(\ln \hat{\mathcal{S}}_x\left(e^{j\omega}\right)\right)$. dans le travail (*cf.* [25]), qui est obtenu en utilisant la transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$. Une amélioration de ce résultat est donnée dans le théorème suivant:

Théorème 3.5. *La valeur de c_i en fonction des paramètres $d_1, d_2, \ldots$ est donnée par l'expression suivante.*

$$c_i = (-1)^{i-1}(i-1)!\sum_{m=1}^{iL}\frac{1}{m!}B_{m,i}(d_1, d_2, \ldots). \tag{3.18}$$

Preuve. *En utilisant le dévloppement en séries de Taylor on aura*

$$\ln\left(1 + \sum_{m=1}^{L} d_m z^{-m}\right) = \sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\left(\sum_{m=1}^{L} d_m z^{-m}\right)^i,$$

et

$$\left(\sum_{m=1}^{L} d_m z^{-m}\right)^i = \sum_{n=1}^{iL}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=i\\ \sum_{r=1}^{n} r i_r = n}}\binom{i}{i_1, \cdots, i_n}\prod_{r=1}^{n} d_r^{i_r} z^{-n}.$$

On obtient alors le résultat. □

Pour les coefficients d_m, on peut facilement montrer que

$$d_k = \begin{cases} \theta_k - \sum_{m=1}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m} & \text{si } k \leq q \\ \\ -\sum_{m=1}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m} & \text{si } k > q. \end{cases} \tag{3.19}$$

En effet, on a

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{q}\theta_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{p}\phi_k z^{-k}} = \sum_{m\geq 0} d_m z^{-m},$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{q} \theta_l z^{-l} &= \left(\sum_{k=0}^{p} \phi_k z^{-k}\right)\left(\sum_{m\geq 0} d_m z^{-m}\right)\\
&= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m}\right) z^{-k},
\end{aligned}$$

par identification

$$\begin{aligned}
\theta_k &= \sum_{m=0}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m}\\
&= \phi_0 d_k + \sum_{m=1}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m},
\end{aligned}$$

en remplaçant $\phi_0 = 1$, on aura: $d_k = \theta_k - \sum_{m=1}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m}$.
Finalement

$$d_k = \begin{cases} \theta_k - \sum_{m=1}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m} & \text{si } k \leq q \\ \\ -\sum_{m=1}^{\min\{k,p\}} \phi_m d_{k-m} & \text{si } k > q. \end{cases} \tag{3.20}$$

Dans ce qui suit, nous limiterons notre étude au processus $ARMA(2,q)$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}. \tag{3.21}$$

La stationnarité est assurée par la zone triangulaire $\phi_2 + |\phi_1| < 1$ et $|\phi_2| < 1$.

3.3.1 Évaluation des coefficients $\pi_j(Y)$

Soit la représentation $MA(\infty)$ de Y_t donnée par:

$$Y_t = \sum_{j\geq 0} \pi_j(Y) \epsilon_{t-j}$$

Dans cette partie, nous calculons $\pi_j(Y)$ et nous étudions un cas particulier de $ARMA(2,1)$, puis expliquons le lien entre les différents paramètres de Y_t et X_t. Les coefficients de la représentation $MA(\infty)$ de Y_t sont calculés par le théorème suivant.

Théorème 3.6. *L'expression de $\pi_j(Y)$ en fonction de $\pi_j(X)$ est établie dans la relation suivante:*

$$\pi_j(Y) = \sum_{k=0}^{\min\{j,q\}} \theta_k \pi_{j-k}(X), \tag{3.22}$$

où $\theta_0 = 1$.

Preuve. *Soit $\{Y_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ un processus qui satisfait une représentation $ARMA(2,q)$ définie par:*

$$\Phi_2(L)Y_t = \Theta_q(L)\epsilon_t.$$

Il est clair que:

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{\Theta_q(L)}{\Phi_2(L)}\epsilon_t \\ &= \sum_{j\geq 0} \pi_j(Y)\epsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

$$\frac{\Theta_q(z)}{\Phi_2(z)} = \left(\sum_{j=0}^{q} \theta_j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0} \pi_j(X) z^j\right).$$

En appliquant le produit de Cauchy des fonctions génératrices (voir [19]) on aura

$$\frac{\Theta_q(z)}{\Phi_2(z)} = \sum_{j\geq 0} \sum_{k=0}^{\min\{j,q\}} \theta_k \pi_{j-k}(X) z^j,$$

d'où le résultat. □

Par conséquent, l'idéntité suivante est vraie.

$$\pi_j(Y) = \sum_{k=0}^{\min\{j,q\}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j-k}{2} \rfloor} \binom{j-k-i}{i} \theta_k \phi_1^{j-k-2i} \phi_2^i. \tag{3.23}$$

Corollaire 3.1. *Pour $q = 1$, on obtient $\pi_0(X) = 1$ et pour $j \geq 1$;*

$$\pi_j(Y) = \pi_j(X) + \theta_1 \pi_{j-1}(X).$$

Il s'ensuit que:

$$\pi_j(Y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \phi_1^{j-2k} \phi_2^k + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \binom{j-k-1}{k} \theta_1 \phi_1^{j-2k-1} \phi_2^k. \tag{3.24}$$

Explicitement, les expressions de $\pi_{2j}(Y)$ et $\pi_{2j+1}(Y)$ sont respectivement:

$$\pi_{2j}(Y) = \phi_2^j + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{2j-k-1}{k} \left(\frac{2j-k}{2j-2k} \phi_1 + \theta_1 \right) \phi_1^{2j-2k-1} \phi_2^k, \tag{3.25}$$

et

$$\pi_{2j+1}(Y) = \sum_{k=0}^{j} \binom{2j-k}{k} \left(\frac{2j-k+1}{2j-2k+1} \phi_1 + \theta_1 \right) \phi_1^{2j-2k} \phi_2^k. \tag{3.26}$$

En utilisant les identités (3.25) et (3.26), les valeurs de $\pi_{50}(Y)$ et $\pi_{51}(Y)$, obtenues pour quelques valeurs $(\phi_1, \phi_2, \theta_1)$ sont listées dans le tableau 3.3.

$(\phi_1, \phi_2, \theta_1)$	$\pi_{50}(Y)$	$\pi_{51}(Y)$
$(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}, 1)$	0.000105056	0.0000863245
$(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10}, 2)$	$7.401486830834376 \times 10^{-15}$	$3.700743415417188 \times 10^{-15}$
$(\frac{7}{5}, -\frac{9}{20}, 3)$	0.0502493	0.0452244
$(-\frac{2}{5}, \frac{9}{20}, 4)$	-0.0114119	0.0102707
$(\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}, 5)$	$3.7754777095129174 \times 10^{-6}$	$-4.247412423202032 \times 10^{-7}$

TAB. 3.3 – Quelques valeurs calculées de $\pi_{50}(Y)$ et $\pi_{51}(Y)$ calculées par les équations (3.25) et (3.26).

Dans le cas particulier du processus $ARMA(2,1)$, on constate que:

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} = \epsilon_t + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\epsilon_{t-1}.$$

Et on a

$$\Phi_2(L)Y_t = \Theta_1(L)\epsilon_t, \text{où } \Theta_1(z) = 1 + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}z.$$

Nous essayons de faire le lien entre $\pi_j(X)$ et $\pi_j(Y)$. Pour le faire, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3. *On a*

$$\sum_{j\geq 0} \rho_j(X) z^j = \frac{1 + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}z}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2}. \tag{3.27}$$

Preuve. *On a $G_j = \rho_j(X)$ pour $p = \phi_1$, $q = \phi_2$, $a = 1$ et $b = \phi_1 + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}$. Avec la fonction génératrice* (1.32), *nous obtenons le résultat souhaité.* □

Ce résultat entraîne que

$$\lim_{j\to\infty} \rho_j(X) = 0 \text{ et } \sum_{j\geq 0} \rho_j(X) = \frac{1 - \phi_2 + \phi_1\phi_2}{(1-\phi_1-\phi_2)(1-\phi_2)}.$$

$\pi_j(X)$ est une combinaison linéaire de $\pi_j(Y)$ comme on le montre dans le théorème suivant:

Théorème 3.7. *On a $\pi_j(Y) = \rho_X(j)$ et*

$$\pi_j(X) = \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{\phi_1\phi_2}{\phi_2 - 1}\right)^{j-k} \pi_k(Y). \tag{3.28}$$

Preuve. *A partir de leurs fonctions génératrices $\pi_j(Y)$ est égal à $\rho_X(j)$. Puisque*

$$\sum_{j\geq 0} \pi_j(Y) z^j = \left(1 + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}z\right) \sum_{j\geq 0} \pi_j(X) z^j \text{ et } \frac{1}{1 + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}z} = \sum_{j\geq 0} \left(\frac{\phi_1\phi_2}{\phi_2 - 1}\right)^j z^j,$$

alors

$$\left(\sum_{j\geq 0}\left(\frac{\phi_1\phi_2}{\phi_2-1}\right)^j z^j\right)\left(\sum_{j\geq 0}\pi_j(Y)z^j\right)=\sum_{j\geq 0}\pi_j(X)z^j.$$

Le résultat découle du produit de Cauchy et de la comparaison entre les coefficients respectifs des deux séries. □

Pour établir le lien entre $\gamma_h(Y)$ et $\gamma_h(X)$, nous démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.4. *On a*

$$\gamma_Y(h)=\left[1+\left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\right]\gamma_X(h)+\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\left[\gamma_X(h-1)+\gamma_X(h+1)\right], \quad (3.29)$$

et

$$\gamma_Y=\left[1+\left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\right]\gamma_X+2\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\gamma_X(1). \quad (3.30)$$

Preuve. *Comme la fonction d'autocovariance de Y est*

$$\gamma_Y(h)=\sum_{j\geq 0}\pi_j(Y)\pi_{j+h}(Y),$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\pi_j(Y)\pi_{j+h}(Y) &= \pi_j(X)\pi_{j+h}(X)+\left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\pi_{j-1}(X)\pi_{j+h-1}(X)\\ &+ \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\left[\pi_j(X)\pi_{j+h-1}(X)+\pi_{j+h}(X)\pi_{j-1}(X)\right].\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\gamma_Y(h) &= \sum_{j\geq 0}\pi_j(X)\pi_{j+h}(X)+\left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\sum_{j\geq 0}\pi_{j-1}(X)\pi_{j+h-1}(X)\\ &+ \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\left[\sum_{j\geq 0}\pi_j(X)\pi_{j+h-1}(X)+\sum_{j\geq 0}\pi_{j+h}(X)\pi_{j-1}(X)\right],\end{aligned}$$

et

$$\gamma_Y(h) = \gamma_X(h) + \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2 \gamma_X(h) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\left[\gamma_X(h-1) + \gamma_X(h+1)\right].$$

Pour obtenir la deuxième relation, nous utilisons l'égalité $\gamma_X(-1) = \gamma_X(1)$.

□

Corollaire 3.2. *(Des exemples numériques sont donnés dans le tableau 3.4) La fonction d'autocovariance de* Y *est donnée par la relation*

$$\gamma_Y = \frac{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 + \phi_1^2\phi_2^2 + 2\phi_1^2\phi_2}{(1-\phi_2^2)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)}. \tag{3.31}$$

(ϕ_1, ϕ_2)	γ_Y
$\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)$	2.88163
$\left(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10}\right)$	1.56692
$\left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{20}\right)$	6.4711
$\left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{20}\right)$	4.21405
$\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$	1.54668

TAB. 3.4 – Quelques valeurs de γ_Y obtenues par l'équation (3.31) avec $\theta_1 = \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}$.

Théorème 3.8. *Pour* $h \geq 2$ *on a*

$$\begin{aligned}\gamma_h(Y) &= \frac{\phi_1 - \phi_1\phi_2 + \phi_1^3\phi_2 - \phi_1\phi_2^3 + \phi_1\phi_2^4}{(\phi_2+1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+\phi_1-1)(1-\phi_2)^2}\pi_{h-1}(X) \\ &\quad + \frac{\phi_2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3 + 2\phi_1^2\phi_2^2 + \phi_1^2\phi_2^3}{(1-\phi_2^2)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+\phi_1-1)}\pi_{h-2}(X),\end{aligned} \tag{3.32}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_Y(h) &= \frac{\phi_1 - \phi_1\phi_2 + \phi_1^3\phi_2 - \phi_1\phi_2^3 + \phi_1\phi_2^4}{(1-\phi_2)(1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 + \phi_1^2\phi_2^2 + 2\phi_1^2\phi_2)}\pi_{h-1}(X) \\ &\quad + \frac{\phi_2 - 2\phi_2^2 + \phi_2^3 + 2\phi_1^2\phi_2^2 + \phi_1^2\phi_2^3}{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 + \phi_1^2\phi_2^2 + 2\phi_1^2\phi_2}\pi_{h-2}(X).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Preuve. *A partir de l'équation de Yule-Walker, nous avons*:

$$\gamma_X(h+1) = \phi_1\gamma_X(h) + \phi_2\gamma_X(h-1).$$

Alors

$$\gamma_h(Y) = \left[1 + \frac{\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2} + \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\right]\gamma_h(X) + \frac{\phi_1\phi_2\,(1+\phi_2)}{1-\phi_2}\gamma_{h-1}(X),$$

et

$$\begin{aligned} \pi_h(X) &= \phi_1\pi_{h-1}(X) + \phi_2\pi_{h-2}(X) \\ \gamma_X(h) &= \gamma_X\left(\pi_h(X) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\pi_{h-1}(X)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on pourra écrire

$$\begin{aligned} \gamma_h(Y) &= \left[1 + \frac{\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2} + \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\right]\left[\left(\phi_1 + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)\pi_{h-1}(X) + \phi_2\pi_{h-2}(X)\right]\gamma_X \\ &+ \frac{\phi_1\phi_2\,(1+\phi_2)}{1-\phi_2}\left(\pi_{h-1}(X) + \frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\pi_{h-2}(X)\right)\gamma_X, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_h(Y) = &\left[\left(\frac{1-\phi_2+\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2} + \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\right)\frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \frac{\phi_1\phi_2\,(1+\phi_2)}{1-\phi_2}\right]\gamma_X\pi_{h-1}(X) \\ &+ \left[\frac{\phi_2-\phi_2^2+\phi_1^2\phi_2^2}{1-\phi_2} + (1+2\phi_2)\left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)^2\right]\gamma_X\pi_{h-2}(X). \end{aligned}$$

On écrit finalement

$$\begin{aligned} (1-\phi_2)^2\,\gamma_h(Y) &= \left[\phi_1 + \phi_1^3\phi_2 + \frac{\phi_1^3\phi_2^2}{1-\phi_2} - \phi_1\phi_2^3\right]\gamma_X\pi_{h-1}(X) \\ &+ \left[\left(\phi_2-\phi_2^2+\phi_1^2\phi_2^2\right)(1-\phi_2) + (1+2\phi_2)\left(\phi_1^2\phi_2^2\right)\right]\gamma_X\pi_{h-2}(X), \end{aligned}$$

et le résultat souhaité est obtenu. $\square$

3.4 Cas particulier $\phi_2 = -\phi_1^2$

Avant d'entamer ce cas, on donne un rappel sur l'arithmétique. Soient a, b et c trois entier, on dit que a est un diviseur commun de b et c si $a \mid b$ et $a \mid c$. Le plus grand diviseur commun de b et c est noté (b, c). Il est clair que $(b, c) = (c, b)$, $(b, c) \geq 1$ et $(b, 0) = b$. En fait on a la caractérisation suivante

$$(b, c) = \min\left(\{bx + cy : x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}\right).$$

Les entiers b et c sont premiers entre eux si on a $(b, c) = 1$. Ainsi si a est premier avec c et b premier avec c, alors ab est premier avec c, on écrit :

$$(a, c) = 1 \text{ et } (b, c) = 1 \Rightarrow (ab, c) = 1.$$

On a aussi l'implication suivante

$$a \mid bc \text{ et } (b, c) = 1 \ \Rightarrow a \mid c.$$

La division euclidienne de b sur $a > 0$ est $b = qa + r$ avec $0 \leq r \leq a - 1$, q est la partie entière de b/a. Ainsi on peut construire l'anneau $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{a-1}\right\}$ avec

$$\overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n} \text{ et } \bar{m}\bar{n} = \overline{mn},$$

$\overline{m}$ désigne la classe de tous les nombres ayant pour reste m une fois divisé par a.
Soit le cas particulier d'un modèle $AR(2)$ défini par

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-2} = \epsilon_t.$$

Le calcul des $\pi_j(X)$ implique une congruence de l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,(pour plus d'informations sur les congruences, voir [2, §5]). Il est évident que

$$\pi_j(X) = \phi_1^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{j-k}{k}. \tag{3.34}$$

Pour simplifier cette expression, il est si difficile d'évaluer la somme partielle. Pour y faire face, nous utilisons le critère d'égalité des fonctions génératrices:

$$\sum_{j\geq 0} a_j z^j = \sum_{j\geq 0} b_j z^j \Leftrightarrow a_j = b_j, \text{ pour tous } j \geq 0.$$

Théorème 3.9. *Pour $j \geq 0$ on a*

$$\pi_j(X) = \begin{cases} \phi_1^j & si\ j \equiv 0,1 \pmod 6 \\ -\phi_1^j & si\ j \equiv 3,4 \pmod 6 \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{3.35}$$

Preuve. *On considère*

$$c_j = \begin{cases} \phi_1^j & si\ j \equiv 0,1 \pmod 6 \\ -\phi_1^j & si\ j \equiv 3,4 \pmod 6 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$\pi_j = c_j$ *si et seulement si* c_j *et* π_j *ont la même fonction génératrice. Nous avons*:

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} c_j z^j = \sum_{l\geq 0}\sum_{k=0}^{5} c_{6j+k} z^{6j+k} &= \sum_{l\geq 0} \left(1 + \phi_1 z - \phi_1^3 z^3 - \phi_1^4 z^4\right) (\phi_1 z)^{6j} \\ &= \frac{1 + \phi_1 z - \phi_1^3 z^3 - \phi_1^4 z^4}{1 - \phi_1^6 z^6}. \end{aligned}$$

Et comme $1 - \phi_1^6 z^6 = \left(1 - \phi_1 z + \phi_1^2 z^2\right) \left(1 + \phi_1 z - \phi_1^3 z^3 - \phi_1^4 z^4\right)$, *on obtient*:

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} c_j z^j &= \frac{1}{1 - \phi_1 z + \phi_1^2 z^2} \\ &= \sum_{j\geq 0} \pi_j z^j. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3. *Pour tout nombre entier positif j on a*:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{j-k}{k} = \begin{cases} 1 & si\ j \equiv 0,1 \pmod 6 \\ -1 & si\ j \equiv 3,4 \pmod 6 \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{3.36}$$

Comme nous avons:

$$\rho_X(h) = \pi_h(X) - \frac{\phi_1^3}{1+\phi_1^2}\pi_{h-1}(X),$$

alors le théorème suivant est immédiat.

Théorème 3.10. *Pour $h \geq 0$ on a*

$$\rho_X(h) = \begin{cases} (-1)^h \phi_1^h & si\ h \equiv 0,3 \pmod 6 \\ \frac{(-1)^{h+1}}{1+\phi_1^2}\phi_1^h & si\ h \equiv 1,4 \pmod 6 \\ \frac{(-1)^{h+1}}{1+\phi_1^2}\phi_1^{h+2} & si\ h \equiv 2,5 \pmod 6. \end{cases} \tag{3.37}$$

Il est évident que $\rho_X(6j+5) = \rho_X(6j+7)$, $\rho_X(6j+2) = \rho_X(6j+4)$ et $\rho(h) < 0$ pour $h \equiv 2,3,4 \pmod 6$. D'après le reste r modulo 6 l'expression de $\pi_{6q+r}(X)$ comme une combinaison linéaire de $\rho_X(6q+k),\ 0 \leq k \leq r$ est établie dans le théorème suivant:

Théorème 3.11. *En langage arithmétique, nous avons*:

$$\pi_{6q+r}(X) = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^{r-k} \rho_X(6q+k). \tag{3.38}$$

Preuve. *Soit $h = 6q + r$ avec $0 \leq r \leq 5$, et*

$$\pi_{6q+r}(X) = \sum_{l=0}^{q-1} A^{6(q-l)+r} \sum_{k=0}^{5} \rho_X(6l+k)A^{-k} + \sum_{k=0}^{r} \rho_X(6q+k)A^{r-k},$$

où $A = \frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}$. Si $q = 0$, la première somme est vide. Le résultat découle de la remarque suivante:

$$\sum_{k=0}^{5} \rho_X(6l+k)A^{-k} = 0.$$

□

Par conséquent, les cinq cas sont donnés dans le corollaire suivant:

Corollaire 3.4. *On a:*

$$\begin{aligned}
\pi_{6q}(X) &= \rho_X(6q) \\
\pi_{6q+1}(X) &= \frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\rho_X(6q) + \rho_X(6q+1) \\
\pi_{6q+2}(X) &= \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^2 \rho_X(6q) + \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right) \rho_X(6q+1) + \rho_X(6q+2) \\
\pi_{6q+3}(X) &= \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^3 \rho_X(6q) + \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^2 \rho_X(6q+1) \\
&+ \frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\rho_X(6q+2) + \rho_X(6q+3) \\
\pi_{6q+4}(X) &= \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^4 \rho_X(6q) + \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^3 \rho_X(6q+1) \\
&+ \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^2 \rho_X(6q+2) + \frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\rho_X(6q+3) + \rho_X(6q+k)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\pi_{6q+5}(X) &= \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^5 \rho_X(6q) + \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^4 \rho_X(6q+1) + \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^3 \rho_X(6q+2) \\
&+ \left(\frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\right)^2 \rho_X(6q+3) + \frac{\phi_1^3}{\phi_1^2+1}\rho_X(6q+4) + \rho_X(6q+5).
\end{aligned}$$

Exemple 3.1. *Pour $Y_t = \frac{3}{4}Y_{t-1} - \frac{9}{16}Y_{t-2} + \epsilon_t$, l'expression de $\rho(h) = \rho_X(h)$ est*

$$\rho_X(h) = \begin{cases} (-1)^h(\frac{3}{4})^h & si\ h \equiv 0, 3 \pmod 6 \\ \frac{(-1)^{h+1}16}{25}(\frac{3}{4})^h & si\ h \equiv 1, 4 \pmod 6 \\ \frac{(-1)^{h+1}16}{25}(\frac{3}{4})^{h+2} & si\ h \equiv 2, 5 \pmod 6). \end{cases} \tag{3.39}$$

Le tableau 3.5 donne les valeurs de $\rho(h)$ jusqu'à $h = 30$.

h	$\rho(h)$	h	$\rho(h)$	h	$\rho(h)$
1	0.48	11	0.0152046	21	-0.00237841
2	-0.2025	12	0.0316764	22	-0.00114164
3	-0.421875	13	0.0152046	23	0.000481628
4	-0.2025	14	-0.00641446	24	0.00100339
5	0.0854297	15	-0.0133635	25	0.000481628
6	0.177979	16	-0.00641446	26	-0.000203187
7	0.0854297	17	0.0027061	27	-0.000423306
8	-0.0360406	18	0.00563771	28	-0.000203187
9	-0.0750847	19	0.0027061	29	0.0000857194
10	-0.0360406	20	-0.00114164	30	0.000178582

TAB. 3.5 – Valeurs calculés de $\rho(h)$, $1 \leq h \leq 30$, par l'équation (3.39).

Le graphe de $\rho(h)$ *sur l'intervalle de nombres entiers* $[0,\ 30]$ *est représenté sur la figure 3.1. Il s'agit d'une extension de [6, Figure 3-4, p.82]*

3.5 Conclusion

Ce chapitre a mis l'accent sur l'utilisation des polynômes exponentiels partiels de Bell afin d'évaluer les coefficients de la représentation du modèle moyenne mobile $MA(\infty)$ d'un autorégressif d'ordre deux. Nous avons réussi à calculer la fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation, ainssi qu'une nouvelle preuve de l'identité de Yule-Walker. La technique utilisée est basée sur les fonctions génératrices de nombres définis par des relations de récurrence d'ordre deux, et le produit de Cauchy de ces dernières.

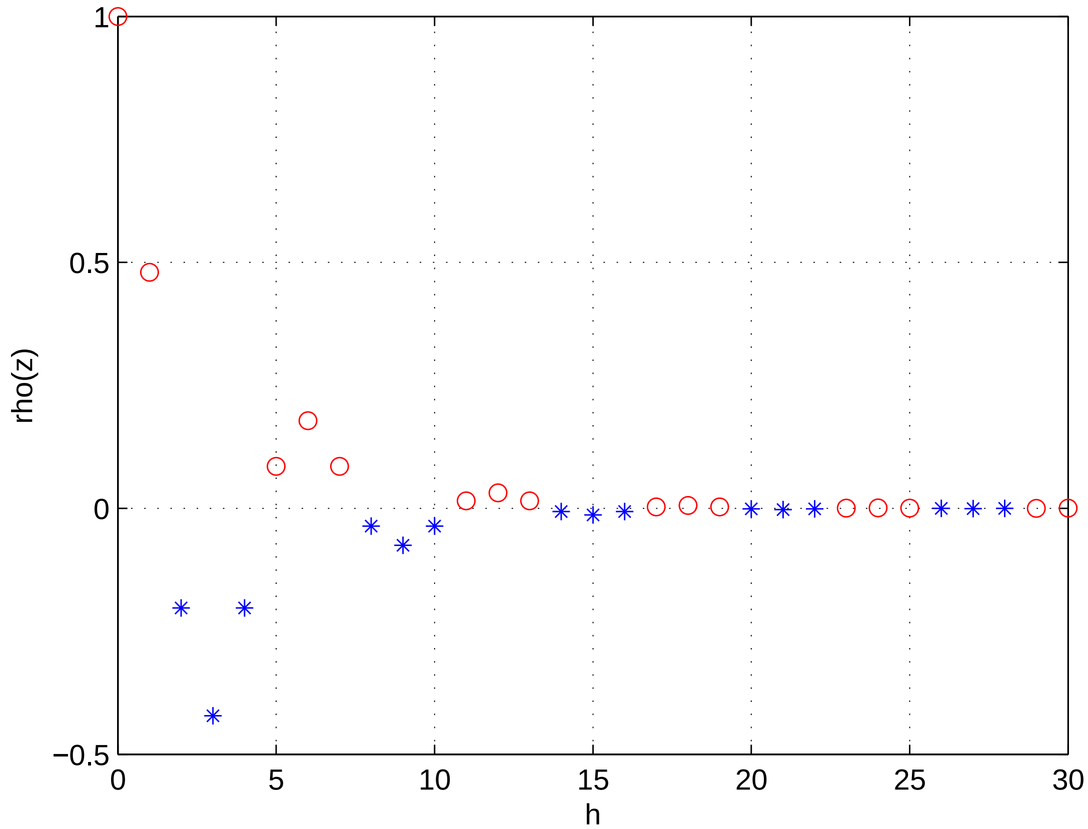

FIG. 3.1 – Fonction d'autocorrélation dans l'intervalle $[0,\ 30]$.

Conclusion

Ce travail de thèse est porté sur les processus autorégressif d'ordre 2 et les processus autorégressif moyenne mobile de type $(2,1)$. Dans un premier temps nous avons rappelé quelques notions de base sur les fonctions génératrices et les polynômes partiels de Bell et le produit de Cauchy. Au lieu de calculer les dérivées successives et les relations de récurrence ; ces outils nous ont servi à revisiter les processus $AR(2)$ et $ARMA(2,1)$ avec un nouveau look. Dans la littérature la plupart des travaux existants expriment les $MA(\infty)$, les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation en fonction des racines du polynôme caractéristique. Pour ce qui nous concerne on a remplacé la condition sur les racines pour qu'ils soient à l'éxterieur du cercle unité par la condition triangulaire sur les coefficients. Ainsi on a trouvé l'analogue des formules existantes en fonction des coefficients du polynôme caractéristique. On a aussi calculé explicitement la fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation de n'importe quel $ARMA(2,1)$. Le cas spécial d'un processus autoregressif d'ordre 2 ; où $\phi_2 = -\phi_1^2$ est étudié en détail. L'utilisation de la division euclidienne nous a permis de donner des formule explicites de π_j, $\gamma(h)$ et $\rho(h)$. Pour s'assurer des calcul on a repris l'exemple du Brockwell et Davis [6] où $\phi_1 = 3/4$ et $\phi_2 = -9/16$. Le diagramme obtenu est identique à celui établit dans [6, p.82]. Il reste à signaler que le cas général d'un processus autoregressif d'ordre $p \geq 3$ est difficile à étudier en fonction des racines ou des coefficients du polynôme caractérisitique. Dans le travail déjà publier récemment avec Aumorassi et Goubi [3], on a réussit à trouver des formules et des relations de recurrences pour le modèle moyenne mobile $MA(\infty)$ et les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation. Comme perspective à ce travail, nous comptons étudier les processus autoregressifs de n'importe quel ordre et voir leur impact sur les problèmes pratiques de la statistique.

Bibliographie

[1] A. Aghababaii Mobarakeh, F. R. Rofooei and G. Ahmadi, *S*imulation of earthquake records using time-varying Arma(2,1) model, Probabilitic Engineering Mechanics **17**(2002), 15–34.

[2] T. M. Apostol, *I*ntroduction to analytic number theory, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1976.

[3] F. Aumorassi, M. Goubi and F. Slimi, *O*n the inversion of an autoregressive process of finite order, Mathematica Montisnigri. **LVII**(2023), 24–36.

[4] V. Azhmyakov, J. P. Arango, M. Bonilla, R. J. d. Toro and S. Pickl, *R*obust state estimations in controlled ARMA processes with the non-Gaussian noises: applications to the delayed dynamics, IFAC Papers OnLine, **54-20**, (2021), 334–339.

[5] S. Boughaba, N. Saba and A. Boussayoud, *C*onstruction of generating functions of the products of Vieta polynomials with Gaussian numbers and polynomials, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. **12(1)**(2021), 649–668.

[6] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *I*ntroduction to time series and forecasting, Springer, Third edition, 2016.

[7] P. B*ü*hlmann, *M*oving-average representation of autoregressive approximations, Stochastic processes and their applications, **60**(1995), 331–342.

[8] Y. Cetin and Y. Simsek, *F*ormulas on Fibonacci type numbers and polynomials derived from linear recurrence relations and generating functions, Montes Taurus J. Pure Appl. Math. **5**(3)(2023), 120–130.

[9] D. Chakraborty and S.K. Sanyal, *T*ime-series data optimized AR/ARMA model for frugal spectrum estimation in Cognitive Radio, Physical Communication. **44**(2021), 1–19.

[10] L. Comtet, *A*dvanced combinatorics: The art of finite and infinite expansions, Dordrecht,Boston, 1974.

[11] P. Congdon, *A* spatio-temporal autoregressive model for monitoring and predicting COVID infection rates, Journal of geographical systems. **24** (2022), 583–610.

[12] D. J. Cryer and K.-S. Chan, *T*ime Time Series Analysis with Applications in $\mathbb{R}$. Springer-Verlag New York, second edition, 2008, ISBN 978-0-387-75958-6.

[13] M. Drton and S. Sullivant, *A*lgebraic statistical models, Statistica Sinica, **17**(2007), 1273–1297.

[14] F. Fa'a di Bruno, *S*ullo sviluppo delle funzioni, Ann. Sci. Mat. Fis., Roma **6** (1855), 479-–480.

[15] M. Goubi, *O*n combinatorial formulation of Fermat quotients and generalization, MTJPAM. **4**(1)(2022), 59–76.

[16] M. Goubi, *O*n generating functions of the product of two polynomials defined by second-order linear recurrence relations, JMPES. **3**(2)(2022), 69–77.

[17] M. Goubi, *O*n the recursion formula of polynomials generated by rational functions, IJMA. **13**(1)(2019), 29–38.

[18] M. Goubi, *N*ew family of special numbers associated with finite operator, Mathematica Moravica. **24**(2)(2020), 83–98.

[19] M. Goubi, *S*uccessive derivatives of Fibonacci type polynomials of higher order in two variables, Filomat. **32**(2018), 5149–5159.

[20] M. Goubi, *O*n a generalized family of Euler-Genocchi polynomials, Integers. **21**(2021), 1–13.

[21] C. Gourieroux and A. Monfort, Séries temporelles et modèles dynamiques, Ed Economica, 1995.

[22] J. D. Hamilton, Time Séries Analysis,Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[23] U. Hackstein, S. Krickl and S. Bernhard, Estimation of ARMA-model parameters to describe pathological conditions in cardiovascular system models, Informatics in medicine Unlocked. **18**(2020), 1–8.

[24] S. Hoston and S. Ruffa, Introductory notes to algebraic statistics, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **37**(2005), 39–70.

[25] A. Kaderli and A. S. Kayhan, Spectral estimation of ARMA process using ARMA-cepstrum recursion, IEEE Signal Processing Lett. **7**(9)(2000), 259–261.

[26] J. Klepsch, C. Kluppelberg and T. Wei, Prediction of functional ARMA processes with an application to traffic data, Economitrics and Statistics. **1**(2017), 128–149.

[27] T. Koshy, Fibonacci and Lucas numbers with applications, New York: Wiley, 2001.

[28] A. Kizilkaya and A. H. Kayran, ARMA model parameter estimation based on the equivalent MA approach, Digital Signal Processing. **16**(2006), 670–681.

[29] S.A. Mangai, B. R. Sankar and K. Alagarsamy, Taylor series prediction of time series data with error propagated by artificial neural network, International Journal of Computer Applications. **89**(1)(2014), 41–47.

[30] J.Markeviciute, Epidemic change tests for the mean of innovations of an AR(1) process, Statistics and Probability Letters. **112**(2016), 79–91.

[31] T. M. Movahed, H. J. Bidgoly, M. H. K. Manesh and H. R. Mirzaei, Predicting cancer cells progression via entropy generation based on AR and ARMA models, International communications in Heat and Mass Transfer. **127**(2021), 1–11.

[32] A. Nalli and P. Haukkanen, On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, Chaos, Solitons and Fractals. **24**(2009), 3179–3186.

[33] E. Onyemachi, I. S. Iwueze and E.C. Nwogu, On the paradox of the duality of autoregressive and moving average processes, Journal of Applied Mathematics and physics. **10**(2022), 589–609.

[34] G. Ozdemir and Y. Simsek, Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers, Filomat. **30**(4)(2016), 969–975.

[35] E. Riccomagno, A short history of algebraic statistics, Metrika,**69**(2)(2009), 397–418.

[36] F. Slimi, M. Goubi and F. Aumorassi, On the product of numbers defined by second-order linear recurrence relations and application to time series, Montes Taurus J. Pure Appl. Math. **6**(1)(2024), 74–84.

[37] S. H. Sorbye, P. G. Nicolau and H. Rue, Finite-sample properties of estimators for first and second order autoregressive processes, Statistical Inference for Stochastic Processes. **25**(2022), 577–598.

[38] E. D. Ubeyli and I. Guler, Spectral analysis of internal carotid arterial doppler singnals using FFT, AR, MA, and ARMA methods, Computers in Biology and Medicine. **34** (2004), 293–306.

[39] T. Ulrich, On the autoregressive time series model using real and complex analysis, MDPI, **3**(2021), 716–728, $https\ {:}doi.org/10.3390/forecast3040044$.

[40] M. Voutilainen, L. Vitassari and P. Ilmonen, Note on $AR(1)-$characterisation of stationary processes and model fitting, Modern Stochastic: Theory and Application **6**(2), (2019), 195–207, https ://doi.org/10.15559/19-VMSTA132.

[41] k. Zhu, L. Mu, R. Yu and X. Xia. H. Tu, Probabilistic modelling of suface drift prediction in marine disasters based on the NN-GA and ARMA model, Ocean Engineering. **281** (2023), 1–14.

Abstract

In the studies of autoregressive processes of finite order, we are interested in the associated characteristic polynomial of degree two. Usually most works in the literature use the roots to compute the parameters of the infinite-order moving average process, the autocovariance function and the autocorrelation function. In this work, using generating functions, the Cauchy product of formal sequences and exponential Bell polynomials, we have succeeded in finding these parameters, depending only on the coefficients of the characteristic polynomial. A new proof of the Yule-Walker equation has thus been established.

Keywords : Generating functions, Cauchy product, Bell polynomial, time series, autocovariance function, autocorrelation function.

Résumé

Dans l'étude des processus autorégressifs d'ordre fini, on s'intéresse au polynôme caractéristique de degré deux associé. En général, la plupart des travaux dans la littérature utilisent les racines pour calculer les paramètres de processus moyenne mobile d'ordre infini, la fonction d'autocovariance, la fonction d'autocorélation. Dans ce travail à l'aide des fonctions génératrices, le produit de Cauchy des séries formelles et les polynômes de Bell exponentiels, on a réussi à trouver ces paramètres, en fonction seulement des coefficients du polynôme caractéristique. Ainsi qu'on a établi une nouvelle preuve de l'équation de Yule-Walker.

Mots clés : Les fonctions génératrices, le produit de Cauchy, polynôme de Bell, série temporelle, la fonction d'autocovariance, la fonction d'autocorrélation.