

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOD MAMMERI TIZI OUZOU
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE



Mémoire de MAGISTER

Spécialité : **Automatique**

Option : **AUTOMATIQUE DES SYSTEMES CONTINUS ET PRODUCTIQUE**

Thème : **Réduction des Systèmes Non Linéaires Application aux
Systèmes Micro Electro-Mécaniques (MEMS)**

Présenté par : **M^{lle} YACINE ZEDJIGA**

Mémoire soutenu le **21 / 06 / 2009** devant le jury composé de :

Président :	DJENNOUNE. Saïd	Professeur	U.M.M.T.O
Examineur :	HAMMOUCHE. Kamel	Maître de conférences	U.M.M.T.O
Examineur :	LAGHROUCHE. Mourad	Maître de conférences	U.M.M.T.O
Rapporteur :	BENFDILA. Arezki	Professeur	U.M.M.T.O

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI TIZI OUZOU
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE



Mémoire de MAGISTER

Spécialité : **Automatique**

Option : **AUTOMATIQUE DES SYSTEMES CONTINUS ET PRODUCTIQUE**

Thème : **Réduction des Systèmes Non Linéaires Application aux
Systèmes Micro Electro-Mécaniques (MEMS)**

Présenté par : **M^{lle} YACINE ZEDJIGA**

Mémoire soutenu le **21 / 06 / 2009** devant le jury composé de :

Président :	DJENNOUNE. Saïd	Professeur	U.M.M.T.O
Examineur :	HAMMOUCHE. Kamel	Maître de conférences	U.M.M.T.O
Examineur :	LAGHROUCHE. Mourad	Maître de conférences	U.M.M.T.O
Rapporteur :	BENFDILA. Arezki	Professeur	U.M.M.T.O

Remerciements

Le présent travail à été effectué au laboratoire LMPDS (*Laboratoire de Microélectronique et Physique des Dispositifs à Semi-conducteurs*) ainsi qu'au LCCSP (*Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Productique*).

Je tiens à remercier messieurs les membres du jury:

- M^r DJENNOUNE Saïd, Professeur à l'U.M.M.T.O
- M^r HAMMOUCHE Kamel, Maître de conférences à l'U.M.M.T.O
- M^r LAGHROUCHE Mourad, Maître de conférences à l'U.M.M.T.O
- M^r BENFDILA Arezki, Professeur à l'U.M.M.T.O

Qui nous ferons l'honneur de juger ce travail.

Je tenais, à travers ces quelques lignes, à exprimer ma gratitude à tous ceux qui y ont contribué de près comme de loin, à ce travail, néanmoins, de façon non exhaustive.

Tout d'abord, je tiens à remercier M^r A. Benfdila, mon directeur de thèse, Professeur à l'UMMTO, de m'avoir accueillie au sein de son laboratoire, pour sa confiance et son aide.

Je remercie également M^r S. Djennoune, mon directeur de post-graduation, Professeur à l'UMMTO, pour son suivi et sa disponibilité, durant tout le temps où je préparais ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier particulièrement M^r K. Hammouche, Maître de conférences à l'UMMTO, pour m'avoir aidé durant la phase de modélisation de mon travail.

Un grand merci à Ouiza et Rachida pour m'avoir aidé à avancer par leurs conseils, d'être toujours à l'écoute et surtout d'être mes amies. Merci pour tous les moments passés ensemble.

Un spécial merci à toute l'équipe du laboratoire LMPDS, où j'ai effectué ce travail, entre autre Moussa, Samir, Ghani...

Merci aussi à mes amies de la P.G. notamment Safia et Aljia.

Un grand merci à Lynda, pour son soutien et son amitié.

Un merci tout particulier à Sarah, pour avoir toujours cru en moi et d'être une amie extraordinaire.

Et enfin, je tiens à remercier spécialement mes parents et ma sœur, de croire en moi et surtout d'être ce qu'ils sont.

Merci à tous

A mon père, ma mère et ma sœur.

Sommaire

Sommaire

Glossaire	1
------------------------	---

Introduction	2
---------------------------	---

Chapitre1 : Réduction des modèles

1.1 Introduction.....	6
1.2 Formulation du problème de réduction des modèles.....	6
1.3 Principe général de la réduction des modèles.....	8
1.4 Recherche bibliographique.....	11
1.5 Réduction des systèmes linéaires.....	20
1.5.1 Réduction par les sous espaces de Krylov.....	20
1.5.2 Réduction par la réalisation tronquée équilibrée (TBR).....	24
1.5.3 Méthode de réduction par agrégation.....	29
1.5.4 Méthode des perturbations singulières (P.S.).....	33
1.6 Réduction des systèmes non linéaires.....	39
1.6.1 Application de l'approche des sous espaces de Krylov et de la TBR au modèle linéarisé.....	40
1.6.2 Méthode des gramians empiriques.....	43
1.6.3 Procédure par simplification de la non linéarité.....	45
1.7 Conclusion.....	49

Chapitre2 : Réduction de l'ordre des modèles par l'approche TPWL

2.1 Introduction.....	51
2.2 La représentation sous forme piece-wise linear.....	52
2.2.1 Procédure de pondération.....	54
2.2.2 Génération des points de linéarisation.....	57
2.2.3 Procédure de réduction.....	60
2.2.3.1 Construction d'une base de réduction.....	60
2.2.3.2 Construction de différentes bases de réduction.....	61
2.2.3.3 Construction de bases de réduction : approche améliorée.....	63

2.3 Simulation approchée (algorithme).....	66
2.4 Génération des modèles TPWL.....	67
2.5 Etude et analyse des performances des modèles TPWL.....	68
2.5.1 Stabilité et passivité des modèles réduits TPWL.....	68
2.5.1.1 Analyse de la stabilité.....	69
2.5.1.2 Stabilité des systèmes linéaires.....	72
2.5.1.3 Stabilité des systèmes TPWL.....	74
2.5.1.4 Stabilité L_p des modèles TPWL.....	80
2.5.2 Analyse de la passivité.....	81
2.5.3 Analyse et estimation de l'erreur des modèles TPWL : estimation de l'erreur à posteriori.....	83
2.6 Conclusion.....	86

Chapitre3 : Application de l'approche TPWL aux MEMS

3.1 Introduction.....	87
3.2.1 Applications des microsystèmes.....	89
3.2.2 Fabrication et challenges liés aux microsystèmes.....	90
3.2.3 Nécessité et utilité de la réduction.....	91
3.3 Exemples de micro systèmes.....	91
3.3.1 Circuit de micro lignes de transmission (Micro ruban).....	92
3.3.1.1 Description du système.....	92
3.3.2 Micro interrupteur (Micro Switch).....	95
3.3.2.1 Description du système.....	95
3.4 Simulation, validation et interprétation des résultats.....	97
3.5 Extraction de modèles d'ordre réduit via la TPWL.....	99
3.5.1 Comparaison de modèles réduits via différentes approches de réduction.....	102
3.5.2 Comparaison des performances des algorithmes de génération des bases de réductions et modèles réduits associés.....	104
3.5.3 Erreur entre les modèles réduits par les différentes bases de réduction et le modèle original.....	105
3.5.4 Comparaison des modèles réduits obtenus avec la base d'agrégation et la pondération de l'ensemble des modèles linéaires réduits.....	106

3.6 Construction de modèles réduits via la TPWL pour le micro switch.....	108
3.7 Analyse de la stabilité et de la passivité des modèles réduits TPWL.....	111
3.8 Discussion: Avantages et inconvénients.....	114
3.9 Conclusion.....	115
Conclusion générale.....	116
Annexes.....	119
Annexe A.....	119
Annexe B.....	121
Références bibliographiques.....	128

Glossaire

Glossaire

R	Ensemble des nombres réels.
n	Dimension.
t	Temps.
\otimes	Produit Kronecker.
$\text{Re}(\cdot)$	Partie réelle.
\min	Minimum.
diag	Diagonale.
$(\cdot)^T$	Transposée.
$(\cdot)^*$	Transposée conjuguée.
$(\cdot)^+$	Pseudo-inverse.
$\ \cdot \ $	Norme.
$\ \cdot \ _{L_2}$	L_2 - norme.
$z \in (R \setminus B)$	z appartient à $R - \{B\}$

Introduction générale

La modélisation et la simulation pour l'automatique sont très spécifiques au besoin de commander un système. Il s'agit de simplifier et d'extraire les mécanismes d'interaction principaux intervenant dans l'évolution d'un processus, pour faciliter la conception de stratégies d'actions efficaces. A l'issue de l'étape de modélisation, une description mathématique désignée par le modèle est établie, à la suite duquel se fait le choix des approches d'analyse, d'étude et de commande.

Les systèmes dynamiques sont de loin les plus appropriés pour décrire le comportement réel des systèmes physiques. La précision des modèles descriptifs obtenus dépend de ce que le 'designer' prend en considération. Les progrès et les développements de la technologie font que les procédés soient de plus en plus complexes. Par ailleurs, devenant de plus en plus performants, les outils de modélisation permettent de construire des modèles plus fidèles néanmoins plus complexes.

Cette complexité, dans la plus part des cas, est traduite par des systèmes de grande dimension et/ou structures complexes. En effet, les modèles résultants sont souvent de nature distribuée, régis par des équations aux dérivées partielles (EDP), caractérisés par des dimensions infinies. Ces dernières, en vue d'une discrétisation au moyen des différences finies ou autres approches similaires, mènent à des systèmes de très grande dimension, qui sont difficiles à manipuler.

Ces systèmes de grande dimension, se rencontrent notamment, dans l'étude des systèmes à retards, des lignes de transmission, des procédés de colonnes de distillation, des échangeurs de chaleur, des réacteurs chimiques et nucléaires ou encore des microsystemes, qui sont des exemples parmi tant d'autres.

La simulation, l'analyse et l'élaboration de lois de commande pour des systèmes complexes (de grande dimension) avec les outils conventionnels atteignent rapidement les limites et peuvent s'avérer être des défis numériques de taille en moyens et en coûts. En effet, de tels modèles engendrent un volume de calculs très important au quel s'ajoutent des difficultés numériques considérables rencontrées lors de l'évaluation. La manipulation de tels systèmes est alors délicate, voire dans certains cas, pratiquement impossible, et nombre de problèmes restent ouverts. L'ingénieur doit, par ailleurs, s'intéresser à cette notion de systèmes complexes, car de nos jours, pour de nombreux systèmes, la connaissance que l'on réussit à avoir ne permet plus de prédire le comportement de ces derniers. Néanmoins, les approches analytiques ne permettent pas d'acquérir une vision suffisante de leurs

fonctionnements. Aussi, il est d'un intérêt indéniable pour l'ingénieur d'avoir des modèles simplifiés.

La complexité croissante des processus dans tous les domaines des sciences appliquées au cours de ces dernières années, a conduit à une persistante demande de méthodes de simplification. De manière générale, ces méthodes de simplification consistent en la linéarisation des systèmes à structures non linéaires ou négligence de certains effets physiques jugés insignifiants. Toutefois, ces modèles simplifiés ne représentent pas fidèlement le comportement réel du système original. Ceci est essentiellement dû au fait de ne considérer qu'une représentation simpliste. Cela, met en évidence la relation inversement proportionnelle entre la précision d'un modèle et sa complexité, faisant objet d'un compromis.

Toutes ces raisons, ont fait de la résolution du compromis précision/complexité un sujet d'intenses investigations. Cet objectif a été à l'origine de la problématique posée dans les années 1960. Celle-ci portait sur la possibilité de déterminer une méthodologie systématique, qui dans un cadre mathématique bien défini, permet d'approcher un modèle par un autre de complexité inférieure tout en préservant les propriétés essentielles et le comportement du modèle original. Cette thématique a fait l'objet de l'émergence de la théorie de la réduction des systèmes. La réduction des modèles consiste à trouver un modèle qui approche l'original en étant moins complexe, mettant en jeu peu de variables pour sa description, tout en préservant l'essentiel de ses propriétés ainsi qu'une fidélité de représentation.

Il y a différents critères sur lesquels on peut juger la qualité de l'approximation. Le plus souvent, c'est la relation entrée/sortie qui est prise en considération, tel qu'on ait les mêmes sorties aux mêmes entrées. Dans certains cas, l'approximation basée sur les états du modèle original est aussi utilisée ou encore les tracés de Bode ou de Nyquist des réponses en fréquences ou fonctions de transfert.

Les approches de réduction des systèmes permettent de mieux représenter la réalité via des modèles représentatifs pour mieux résoudre les tâches assignées, contrairement aux méthodes de simplification classiques, où il est question de masquer des effets souvent significatifs.

Une abondante bibliographie des méthodes de réduction de l'ordre des modèles existe, particulièrement dans le cas des systèmes linéaires. Le concept général des méthodes de

réduction linéaires consiste en la projection du modèle de l'espace de grande dimension, dans un autre espace de dimension inférieure, et cela via des bases de projection. Les plus utilisées d'entre elles sont les méthodes des sous espaces de Krylov, adéquates pour des systèmes de très grande dimension, et celles des réalisations équilibrées. D'autres approches ont pour principe de réduction la séparation des dynamiques du système, comme les approches d'agrégation d'Aoki et les perturbations singulières.

Le choix de la méthode de réduction est basé sur l'objectif visé. En effet, la meilleure des approches peut varier selon que l'on s'intéresse à la commande, l'analyse ou la conception.

Dans le contexte des systèmes non linéaires, le problème de réduction est beaucoup plus difficile et se voit dépourvu de méthodes de réduction systématiques, ce qui est dû à la nature complexe de ces systèmes. Une grande partie des approches de réduction des systèmes linéaires a fait l'objet d'extension au cas non linéaire, après linéarisation, bilinéarisation ou autres approches de simplification de l'opérateur non linéaire. On distingue celles utilisant le concept des perturbations singulières et les sous espace de Krylov.

Par cette façon de procéder, les modèles réduits obtenus ne sont pas précis, étant au préalable une représentation simplifiée, ils sont valides uniquement localement et pour des systèmes faiblement non linéaires.

Dans ce mémoire, le problème de la réduction des systèmes non linéaires via une approche non linéaire est posé, qui est la méthode des multi linéarisations pondérées, communément appelée Trajectory Piece-Wise Linear (TPWL). L'objectif est de fournir une stratégie de réduction de la dimension des modèles, efficace et applicable à des systèmes fortement non linéaires et qui ne peuvent pas forcément être traité par les approches existantes, citées précédemment. Le développement d'une stratégie de réduction non linéaire associée aux Systèmes Micro Electro-Mécaniques (Micro Electro-Mechanical System : MEMS) constitue le contexte général dans le quel se situe notre travail. En effet, tel qu'il est indiqué par son intitulé, ce mémoire porte sur la réduction des systèmes non linéaires et application aux MEMS.

Pour mener à bien notre travail, nous avons organisé le mémoire comme suit :

Au chapitre 1, après une introduction au thème de la réduction des systèmes, nous avons procédé à la formulation du problème de réduction ainsi que son principe, avant d'entamer une étude bibliographique des méthodes de réduction existantes des systèmes

linéaires et non linéaires. Les stratégies de réduction les plus utilisées dans les deux cas, ont été illustrées, en citant les avantages et inconvénients de chacune d'elles. Les applications numériques effectuées permettent une meilleure analyse et appréhension de la théorie développée. Nous nous sommes focalisés notamment sur la procédure de simplification des systèmes non linéaires, qui consiste généralement en le développement en série de Taylor des non linéarités (linéarisation), pour pouvoir y appliquer les procédures de réduction linéaires. D'autant que cette dernière approche constitue une introduction à la théorie de l'approche développée au chapitre suivant.

Au chapitre 2, nous avons présenté la technique de réduction proposée— la Trajectory PieceWise Linéaire, dont le choix est motivé par le manque de méthodes systématiques de réduction des systèmes non linéaires. Son principe consiste à considérer un ensemble de modèles linéaires réduits pondérés le long de la trajectoire d'état du système non linéaire original, et de réduire ensuite chaque modèle linéaire par les méthodes de réduction des systèmes linéaires. Nous proposons également, pour d'avantage de précision, différents algorithmes de réduction associés à la même approche, visant plus de précision du modèle réduit.

Au chapitre 3, nous avons entamé une discussion à propos des MEMS. La technologie MEMS étant en essor et en constant progrès, trouve application dans bon nombre de domaines (ingénierie, industrie de l'automobile, aéronautique, médecine...). Les dispositifs MEMS sont un cas de systèmes fortement non linéaires, décrits par des modèles complexes et d'ordre très élevé, ce qui est du en partie à leurs dimensions micrométriques. Ensuite, afin de valider l'approche de réduction proposée, des simulations sont effectuées sur des exemples de systèmes non linéaires à savoir des dispositifs MEMS, un circuit de micro lignes de transmission et un micro switch. Au final, les résultats des simulations ainsi qu'une analyse des performances de la stratégie de réduction sont discutés, ainsi que les difficultés rencontrées lors de l'élaboration des modèles réduits.

Et finalement, nous terminons par une conclusion et des perspectives pour d'éventuelles améliorations.

Chapitre 1

Réduction des modèles

1.1 Introduction

Parvenir à construire des modèles fidèles pour des systèmes physiques complexes constitue un objectif d'une grande importance en automatique.

Face à la complexité croissante des modèles issus de systèmes dynamiques, la manipulation de ces derniers devient une tâche ardue. La nécessité de simplifier des modèles complexes devient alors une étape inévitable avant toute démarche visant la simulation, l'analyse ou la synthèse de lois de commande.

Ceci, justifie le recours à des méthodes de réduction permettant d'approximer ces modèles par d'autres de dimensions inférieures, reproduisant le même comportement entrée / sortie et préservant l'essentiel des propriétés du modèle original. Dès lors, de nombreuses méthodes y ont été élaborées.

Le choix d'une méthode est tout d'abord dicté par l'objectif visé par le concepteur, selon que l'on s'intéresse à la simulation ou à la commande.

Dans ce qui suit, nous aborderons le principe général de la réduction des modèles et tout particulièrement leurs ordres (dimension). Après une étude bibliographique des méthodes de réduction des modèles, nous nous intéresserons à certaines des stratégies de réduction les plus utilisées dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires.

1.2 Formulation du problème de réduction des modèles

L'approximation des modèles complexes par d'autres plus simples ayant une dimension inférieure, constitue un vrai challenge scientifique. L'objectif étant d'extraire la partie la plus significative d'un modèle, de telle manière à préserver le comportement original et les propriétés importantes telles la stabilité, la passivité, la commandabilité, l'observabilité, ...etc.

La réduction se fait sur la base de différents critères, selon l'objectif visé ainsi que la représentation et la nature initiale du modèle. Habituellement, il est désiré de reproduire le comportement entrée/sortie du modèle original. Dans certains cas, on se base sur la comparaison des trajectoires des états des deux modèles (original et réduit) ou encore sur les tracés de Bode ou de Nyquist.

Le plus souvent, c'est le premier aspect qui est pris en considération, à savoir la fidélité de reproduction du comportement entrée/sortie, au quel on s'intéressera également dans cette étude.

Le problème de la réduction de l'ordre des modèles peut être formulé comme suit:

Etant donné un modèle d'un système S de grande dimension n , on cherche une approximation \hat{S} de dimension q , $q \ll n$, tel que l'écart entre les sorties des deux modèles (en réponse à la même entrée) soit le plus petit possible, voir figure 1.1.

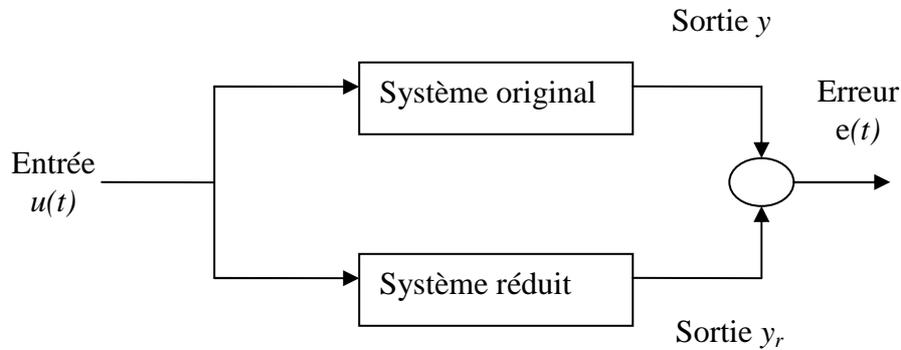


Figure 1.1: Schématisation du principe de la réduction de l'ordre des modèles.

Le problème de la réduction peut également être exprimé mathématiquement de différentes manières, notamment sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\min_y \|y(S) - y(\hat{S})\| \quad (1.1)$$

Le modèle réduit ainsi obtenu doit :

- utiliser un nombre significativement réduit de variables, comparé au modèle original.
- Être relativement peu coûteux à simuler et à analyser.
- Avoir la complexité de calculs d'évaluation associée nettement inférieure.

Dans la définition la plus courante du terme réduction, il s'agit simplement de diminuer l'ordre du modèle d'un système dynamique. Beaucoup de systèmes dynamiques sont décrits par un modèle non linéaire représenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) = h(x, u) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où $x = x(t)$ est le vecteur des états évoluant avec le temps, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction vecteur-valeurs non linéaires, g est le vecteur entrée et y est la sortie du système.

La première équation est dite d'état et la seconde de sortie. En général, les états contenus dans le vecteur $x(t)$ ont un sens physique.

D'autres représentations sont également utilisées pour décrire des systèmes non linéaires. Dans ce mémoire, nous considérons les systèmes dynamiques non linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires (ODE) du premier ordre représentés sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Où $x(t)$ et f sont définis comme ci-dessus. B est la matrice d'entrée $n \times m$, C est la matrice d'observation $p \times n$, $y \in R^p$ est la sortie et n est l'ordre du système.

Cette représentation de systèmes non linéaires n'est pas l'unique qui soit et encore moins la plus générale. Néanmoins, elle regroupe une grande majorité de systèmes en ingénierie. Pour cela, nous formulerons à travers cette étude, des techniques de réduction pour des modèles dynamiques sous la forme (1.3). Par ailleurs, la plus part des représentations de systèmes non linéaires peuvent être ramenée à la forme (1.3). Aussi, il n'y a pas de perte de généralités à restreindre notre étude à cette catégorie de systèmes.

1.3 Principe général de la réduction des modèles

La pratique commune aux approches de réduction est d'appliquer des bases de réduction (matrices de projection) au modèle original de manière à le projeter de l'espace de grande dimension, dans un autre de dimension inférieure comme suit :

$$\begin{cases} W^T \dot{x}(t) = W^T f(V^T x(t)) + W^T B u(t) \\ y(t) = C V^T x(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Où V et W sont les bases de réduction de dimension $n \times q$, q étant l'ordre de réduction. Les bases de réduction sont construites au moyen de différentes méthodes et de différentes manières, qui seront discutées par la suite.

La représentation (1.4) est équivalente au modèle réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = f_r(x_r(t)) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Où x_r est le vecteur d'état réduit tel que $x_r \in R^q$.

Le même principe est utilisé dans le cas de la réduction des systèmes linéaires. En effet, soit un système linéaire décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, A est la matrice d'état $n \times n$, B est la matrice de commande $n \times m$, C est la matrice d'observation $p \times n$, $u(t)$ est l'entrée du système et $y(t)$ la sortie.

Après application des matrices de projection, nous obtenons le modèle réduit suivant :

$$\begin{cases} V^T \dot{x}(t) = W^T A V x(t) + W^T B u(t) \\ y(t) = C V x(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

Qui est équivalent au modèle réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

Où $x_r \in R^q$ est le vecteur d'état réduit, A_r est la matrice d'état réduite $q \times q$, B_r la matrice commande $q \times m$ et C_r la matrice de sortie $p \times q$.

Une fois la projection effectuée (donc le modèle réduit obtenu), la mesure de la qualité d'approximation est faite via l'erreur entre les sorties des deux modèles. Le but étant d'obtenir un écart minimum possible ainsi que la préservation des propriétés essentielles.

Les méthodes de réduction de l'ordre des modèles (R.O.M) ont été appliquées dans plusieurs disciplines de l'ingénierie pour réduire la complexité des modèles (dimension et/ou structure) et le temps de simulation associé. L'objectif qui fut à l'origine de la problématique établie sur la théorie de la réduction il y a près d'un demi siècle, est la résolution du dilemme précision/complexité était et est encore un sujet d'actualité, visant à déterminer une méthodologie de réduction de systèmes de plus en plus complexes, en garantissant la

précision sous entendue par la qualité de fidélité de représentation ainsi que la préservation des caractéristiques essentielles.

En ingénierie électrique, les techniques de ROM ont été développées en premier pour les simulations de circuits de réseaux électriques [1, 2, 3, 4, 5]. Ces techniques ont été ensuite étendues aux systèmes électroniques distribués et à la modélisation d'ondes électromagnétiques de différentes structures [6, 7] ainsi qu'aux circuits d'électronique de puissance [8].

L'intégration des systèmes micro électromécaniques (MEMS) sur une même puce, crée le besoin de développer des modèles précis, ce qui engendre des complexités. La réduction se trouve alors être une étape importante dans le processus de fabrication des dispositifs MEMS. Pour cela, de nombreuses techniques de réduction ont été développées pour les MEMS [9, 10, 11, 12, 13, 14].

La réduction s'avère également utile pour la conception de lois de commande et de contrôleurs [15]. Aussi, dans ce domaine, l'approximation de systèmes non linéaires par des modèles mathématiques simples est une pratique commune pour l'élaboration de systèmes de commande [16, 17].

Il est aussi d'autres disciplines de l'ingénierie et de la science où la réduction est appliquée. Nous citons parmi tant d'exemples, la mécanique des fluides et la modélisation des turbo machines [18, 19], la modélisation des systèmes biologiques [20, 21, 22] et chimiques [23], problèmes thermiques [24] et mécaniques [25, 26].

En traitement d'images également, la réduction est abondamment exploitée, notamment pour la réduction des données et compression d'images tout en préservant la même qualité de netteté [27, 28].

En turbulences aussi, la réduction se trouve être très utile pour leurs modélisations, qui consiste précisément à remplacer les équations de Navier-Stokes par des modèles plus simples à résoudre [29, 30].

D'autres secteurs bénéficient autant des approches de réduction pour les manipulations et simulations des systèmes correspondant comme la modélisation des données atmosphériques en météorologie, la caractérisation des données astronomiques [31], les simulations biologiques en médecine [20]...etc.

De l'intérêt croissant de l'utilisation et applications de la ROM dans divers domaines, un progrès dans le développement de différentes méthodes et approches de réduction a été constaté. Afin de diminuer le coût des simulations numériques des modèles de grande dimension, de nombreuses méthodes ont été proposées. Cependant, ces méthodes restent insuffisantes et mal adaptées aux problèmes des systèmes dynamiques non linéaires. Le seul choix qui s'offre généralement au concepteur, est de simplifier le modèle par linéarisation ou autre procédure similaire, pour pouvoir utiliser les approches de réduction élaborées pour les systèmes linéaires. Dès lors, la plus part des techniques de réduction qui existent ont été développées pour les systèmes linéaires.

Dans ce qui suit, nous établirons une recherche bibliographique des méthodes de réduction des modèles. Par souci de cheminement des idées, nous aborderons tout d'abord le thème de la réduction des systèmes linéaires avant d'entamer le cas des systèmes non linéaires.

1.4 Recherche bibliographique

Il existe une littérature abondante sur le problème de la réduction des modèles. On dispose à cet effet d'un arsenal d'approches de réduction particulièrement riche dans le cas des systèmes linéaires.

Les ingénieurs et chercheurs de l'époque, déjà confrontés aux systèmes complexes, envisageaient des approches de simplifications [32].

Dans les années 1960, Davison [33], suggère qu'un système de grande dimension n peut être réduit à un système plus simple en ne considérant que l'effet des q plus dominantes valeurs propres (q étant la dimension du système simplifié). Le principe est de négliger les valeurs propres du système qui se trouvent loin de l'origine, et d'en retenir uniquement celles dominantes dans le modèle réduit [33, 34].

Au manque de précision statique et de stabilité du modèle réduit obtenu par l'approche de Davison, Chidambara [35] propose une approche où seules les réponses transitoires des états à gauche sont à ignorer. La contribution stable de ces états est alors prise en compte pour annuler l'erreur observée avec la technique de base de Davison [36].

Une des plus importantes techniques de réduction des systèmes de grande dimension est celle de l'agrégation. Introduite par Aoki [37] en contrôle des systèmes, elle consiste à remplacer le système de grande dimension par un modèle agrégé où ses structures

dynamiques sont choisies pour refléter la part significative des dynamiques du modèle original. En d'autres termes, l'ensemble des modes du modèle réduit est inclus dans celui des modes du système original. Dans ce contexte, nous pouvons faire référence aux travaux de Davison basés sur la décomposition modale [33] et ceux d'Aoki [38, 39]. Néanmoins, la possibilité d'instabilité du modèle réduit ainsi obtenu est un inconvénient de taille [40]. De plus, l'application est restreinte à une classe réservée de systèmes [15].

Un grand intérêt a ensuite été porté aux méthodes de réduction optimales. Ces méthodes ont pour objectif de déterminer un modèle réduit en minimisant une norme de l'erreur (entre les deux modèles) [41]. Exploitées par Wilson [42], ces méthodes de réduction dites optimales, ont fait l'objet de nombreux travaux dont ceux de Glover [17, 43], de Bernstein [44] et de Bettayeb [45] pour n'en citer que quelques uns.

Plusieurs techniques de réduction optimales ont été élaborées telles que la réduction H_2 , H_∞ et l'approximation optimale de la norme de Hankel [17].

L'inconvénient connu aux méthodes de réduction optimales présentées ci-dessus est la non conservation dans le modèle réduit ni du sens physique des états, ni d'un certain nombre de modes du modèle initial [15]. Par ailleurs, elles supposent des méthodes de résolution numériques complexes qui entraînent des coûts de calculs élevés [46].

Pour pallier aux insuffisances des méthodes de réduction temporelles citées, jusque là incapables de garantir des modèles réduits précis, stables ou encore dont l'élaboration serait moins coûteuse, d'autres pistes ont été explorées.

Initiées par Hutton et Friedland [47], les méthodes de réduction fréquentielles se sont avérées être un outil de réduction puissant, notamment pour leurs simplicité et efficacité [48]. L'idée de base de ces méthodes est l'approximation de la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé par une autre d'ordre inférieur en utilisant un certain développement, tel que les deux fonctions de transfert aient un comportement identiques autant que possible en basses fréquences [47]. On distingue dans ce contexte, la méthode d'approximation de Routh, l'approximation Padé et l'approche des équations de stabilité [49] qui sont les méthodes fars de la catégorie d'approches de réduction fréquentielles.

La méthode d'approximation de Routh est basée sur un développement qui utilise la table de Routh de la fonction de transfert originale, d'où son appellation [50]. De cette manière, le modèle réduit obtenu est garanti d'être stable pourvu que le modèle original le soit. L'inconvénient majeur connu à cette approche est son application limitée aux systèmes

dont les fonctions de transfert ont une différence d'ordre entre le numérateur et le dénominateur égale à 1 [51].

L'approche Padé découle de la théorie de Padé [52], utilisée par la suite pour la réduction des systèmes de grande dimension [53]. Son principe est d'approcher la fonction de transfert du système original par une autre qui soit d'ordre inférieur en faisant correspondre certains moments qui sont les approximants de Padé. Au final, cela permet de décrire le système initial par un autre qui est une approximation à travers une certaine bande de fréquences [52]. Toutefois, la possibilité d'instabilité du modèle réduit obtenu via cette approche ainsi que le manque de fiabilité des approximations des systèmes de très grandes dimensions dans certains cas, restreint son utilisation et souligne ses inconvénients majeurs [40].

La réduction via l'approche des équations de la stabilité est l'une des techniques les plus populaires parmi les techniques disponibles en littérature. Le dénominateur de la fonction de transfert obtenu est élaboré en utilisant un certain critère de stabilité, ce qui assure la stabilité du modèle réduit [49]. Néanmoins, la subsistance d'une erreur statique entre le modèle réduit et le modèle original souligne l'inconvénient de cette technique [54].

Pour remédier aux manques des méthodes jusque là citées, notamment de précision, l'aspect dynamique des systèmes a été exploité. Dans ce contexte l'approche des perturbations singulières initialement développée par Kokotovic [55], a pour principe de capturer l'effet des phénomènes dominants d'un modèle dynamique, dicté par la séparation des échelles de temps [56]. Basée sur la séparation des dynamiques (rapide et lente), cette approche tend à tronquer la partie rapide d'un système, préalablement bruité [57]. Plusieurs techniques ont ainsi été élaborées sur ce principe [58, 59], voir également [56]. Particulièrement, l'utilisation du principe de l'approche des perturbations singulières dans le cas où le vecteur d'état est simplement partitionné en une partie qu'on désire conserver et une autre partie à tronquer, sans distinction particulière des dynamiques, est dite résidualisation [15]. Aussi, cette approche présente l'avantage de préserver la structure physique, contrairement aux autres méthodes précédemment citées, la stabilité ainsi que l'annulation de l'écart statique [15, 60]. Néanmoins, le partitionnement des dynamiques du modèle peut dans certains cas être délicat pour l'approche des perturbations singulières comme pour la résidualisation. En effet, la séparation des dynamiques peut poser problème particulièrement si le système initial ne possède pas de dynamiques parfaitement distinctes [60]. Aussi, la

résidualisation, en son principe peut induire à la suppression de modes qui influencent fortement le comportement du système original ce qui peut mener à une mauvaise approximation réduite [60]. Cela souligne les inconvénients majeurs de ces approches.

Au début des années 1980, une nouvelle approche de réduction émerge, qui est la réalisation équilibrée tronquée (TBR : Truncated Balanced Realization). Développée par la communauté automatique, initialement proposée par Moore dans le contexte de la théorie de réalisation [61], cette approche tient compte des propriétés des variables du point de vue commande (propriétés d'observabilité et de commandabilité). L'idée est de supprimer les états du modèle original (sous forme de représentation d'état) qui ne contribuent pas significativement au comportement entrée/sortie du système [62, 63]. Cette contribution est quantifiée par les gramians de commandabilité et d'observabilité qui dépendent de la base dans la quelle ils sont exprimés [60, 64]. Le système est alors mis sous forme équilibrée de façon à ne privilégier ni les états commandables ni les états observables. De cette manière, les gramians sont égaux à la matrice diagonale constituée des valeurs singulières du système ordonnées [65]. Une fois le système mis sous forme équilibrée, une troncation est effectuée, en supprimant les états correspondants à de faibles valeurs singulières, qui sont les mesures de la commandabilité et d'observabilité.

La TBR a l'avantage de préserver la stabilité à travers le modèle réduit [62] et possède une borne d'erreur d'estimation a priori [65, 66]. La représentation sous forme équilibrée fait qu'elle ne préserve après réduction que la partie significative du modèle original, remédiant ainsi aux manques des approches citées précédemment, notamment la réduction via les perturbations singulières [15]. Parfaitement adéquate pour des systèmes de moyenne dimension (quelques centaines de variables) la TBR reste inapplicable pour des systèmes de très grande dimension. En effet, les techniques de calculs utilisées durant la procédure de réduction (transformation d'équilibre, calcul des gramians solutions des équations matricielles de Lyapunov, opérations d'inversion et de factorisation...etc.) nécessitant des opérations de complexité $O(n^3)$ (n étant la dimension du système original) constituent son inconvénient majeur [46]. Par ailleurs, la préservation de la passivité n'est pas toujours garantie, ce qui peut engendrer des comportements non-physiques via les modèles réduits obtenus [7, 15]. Néanmoins, la réduction par troncation équilibrée reste la méthode la plus utilisée en réduction des modèles, particulièrement pour la précision supérieure dont sont caractérisés les modèles réduits ainsi obtenus [44, 60]. Diverses variantes de cette approche ont été présentées durant les deux dernières décennies, ayant pour objectif de diminuer les

coûts d'extraction des modèles réduits par la TBR ainsi que la préservation de la passivité [17], voir également [7, 8, 19].

Le concept de réduction optimale a été ensuite repris dans le contexte de la réalisation équilibrée, désignée par la méthode des approximatifs de Hankel optimale. Elaborée à l'issue de la théorie développée par Nehari, Arov-Adamjan-Krein et Glover [65], cette approche est l'une des rares méthodes d'approximation qui produit des modèles approximatifs optimaux selon un critère bien défini [67]. Etablie pour des systèmes LTI stables [43, 68], la décomposition en valeurs singulières est opérée sur la matrice de Hankel du système, à partir de laquelle l'ordre du modèle réduit peut être tiré en utilisant les valeurs singulières de Hankel, tout en minimisant la norme de Hankel de l'erreur entre le modèle original et le modèle réduit [69, 70]. Attractive dans le sens où elle constitue un moyen simple d'obtenir un modèle réduit, possédant une borne d'erreur et qui plus est donnée par une réalisation équilibrée. Son inconvénient majeur réside dans le nombre très élevé des paramètres nécessaires à la construction de l'opérateur de Hankel et les calculs matriciels associés [46].

Autre approche permettant d'obtenir des modèles réduits de systèmes initialement de grande dimension, est la Décomposition Orthogonale Propre (POD: Proper Orthogonal Decomposition). La POD a été jusqu'à présentée uniquement comme une technique particulière d'analyse de données [70]. Cependant, elle peut être également vue comme une méthode efficace de construction de modèles dynamiques réduits.

Essentiellement linéaire, cette procédure consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux représentatifs par définition des réalisations les plus probables. Historiquement, la POD a été introduite en turbulence par Lumely [71]. Au delà du domaine historique d'application lié à la turbulence, la POD couvre un vaste domaine d'utilisations regroupant toutes sortes de disciplines. On la retrouve notamment dans les applications au traitement d'images [72], en analyse de signal [73], en compression de données [74] et plus récemment en control optimal [75]. Le point central de toutes ces applications est l'extraction des caractères dominants d'un ensemble de données, permettant d'accéder ainsi à une réduction de modèle.

Or, la POD est essentiellement une méthode de compression de données, qui au besoin, élimine les redondances contenues dans une base de données. Par conséquent, une base issue de la décomposition orthogonale propre ne peut représenter une information qui n'est pas initialement contenue dans l'ensemble de données de départ. Aussi, le choix de la

représentation de la réalisation est crucial. Ce qui constitue un de ses inconvénients majeurs [27].

Parallèlement à toutes ces méthodes aux quelles nous avons fait référence, d'autres pistes ont été explorées, en vue de déterminer d'autres alternatives de réduction des systèmes linéaires. Résultat de nombreux travaux de recherches, les approches dites des sous espaces de Krylov émergent au début des années 1990. Se sont des méthodes itératives qui peuvent être appliquées à des systèmes de très grandes dimensions, notamment les circuits R-L-C et les systèmes micro électro-mécaniques (MEMS), pour les quels elles ont été beaucoup utilisées [76, 77, 78, 79]. De nos jours, les méthodes basées sur les sous espaces de Krylov sont probablement l'un des meilleurs choix d'approches de réduction pour des systèmes de très grande dimension [46, 76]. Ces approches utilisent les sous espaces de Krylov pour construire des bases de projection, les quelles permettent de projeter le système de l'espace de grande dimension, dans un autre de dimension réduite, décrivant ainsi un système d'ordre réduit [80]. Elles sont basées sur le principe d'adaptation des moments de la fonction de transfert du système original, qui consiste à déterminer une autre fonction de transfert de dimension réduite q , tel que les q premiers moments des deux fonctions de transfert correspondent. Ces moments ne sont autres que les coefficients du développement en série de Taylor de la fonction de transfert au tour de $s = 0$. La caractéristique itérative des approches des sous espaces de Krylov vient du fait qu'elles utilisent des processus itératifs dits algorithmes d'Arnoldi ou de Lanczos pour construire les bases de projection.

De nombreuses méthodes de réduction de l'ordre des systèmes basées sur le principe des sous espaces de Krylov ont été développées [80, 81, 82] et [83, 84, 85, 86]. Autre que leur applicabilité à des systèmes de très grande dimension, ces approches se révèlent être d'une précision supérieure et sont numériquement robustes et relativement peu coûteuses, ce qui leur a permis d'acquérir une popularité considérable particulièrement dans le domaine de l'ingénierie électrique [46, 84]. L'inconvénient de ces méthodes, est lié essentiellement au fait qu'elles ne garantissent pas la stabilité ou la passivité d'un modèle réduit en plus de l'erreur d'approximation qui n'est pas bornée [46]. Néanmoins, il a été démontré que si le système original possédait une structure désirée, la stabilité et la passivité sont préservées avec le modèle réduit, en exploitant le fait que les transformations de congruence préservent la définition des matrices [87]. Aussi, certains travaux ont récemment fait l'objet de développement d'erreur d'estimation pour les modèles réduits issus des approches des sous espaces de Krylov [88].

Récemment, les approches LMI (Linear Matrix Inequality) ont suscité beaucoup d'intérêt pour la résolution des problèmes H_∞ [89]. Or, la réduction des dimensions des systèmes pouvant être assimilée à un cas spécial de conception H_∞ , il est tout à fait naturel de penser à adopter les approches LMI pour la réduction.

Le problème d'approximation d'un système d'ordre élevé par un autre d'ordre inférieur est traité par les approches LMI en deux étapes itératives, en vue d'améliorer l'erreur du modèle H_∞ , comparé à la réduction par la norme de Hankel [90, 91]. Cependant, la complexité des calculs connue aux approches LMI augmente avec le nombre de variables et l'amélioration de l'erreur en utilisant ces procédures n'est pas aussi significatives [15, 40].

De nombreuses méthodes combinant les principes des différentes approches citées ont été établies. Elles combinent les avantages de chacune d'elles afin d'obtenir des modèles réduits plus précis et plus performants. Parmi les combinaisons les plus populaires, on cite, les méthodes des sous espaces de Krylov entre autre associées aux méthodes basées sur la décomposition orthogonale propre [19, 46], les approximations Padé [92, 93] ou encore la réalisation tronquée équilibrée [59, 63, 84].

Si la réduction de l'ordre des systèmes linéaires est un domaine dont les approches sont bien établies, développer des stratégies de réduction effectives et efficaces pour des systèmes non linéaires reste un problème relativement ouvert et sujet aux améliorations.

Par ailleurs, due à beaucoup d'applications nécessitant l'exactitude de la modélisation des procédés qui aboutissent très souvent à des systèmes non linéaires, la réduction des dimensions des systèmes non linéaires constituent un domaine d'intenses investigations.

En effet, ce domaine se voit pratiquement dépourvu de méthodes systématiques, qui assurent la préservation des propriétés essentielles telle que la stabilité. Aussi, la réduction, de modèles, indirecte est utilisée et améliorée dans tous les travaux de modélisation quand la complexité est de rigueur. Il y a trois façons communes dites méthodes Ad-Hoc, pour réduire la complexité, souvent liée aux dimensions [94]:

- La suppression des effets qui ont un impact relativement faible sur les dynamiques, et cela, par expérience ou intuition.
- La séparation et remplacement des dynamiques rapides par un gain statique.
- Ou encore, moyenner des effets en un seul pseudo effet.

Toutes ces trois approches nécessitent une grande connaissance et intuition du système modélisé. La seconde mentionnée, est plus formellement appelée méthode des perturbations singulières (citée au par avant dans le cas linéaire).

Beaucoup des approches mises au point pour les systèmes linéaires, citées précédemment, ont fait l'objet d'extensions au cas des systèmes non linéaires.

Les plus simples des approches utilisées, sont celles basées sur la linéarisation ou le développement polynomial (en série de Taylor) des non linéarités du système, et l'application ultérieure des méthodes de projection des sous espaces de Krylov [1, 2, 20, 95, 96]. La bilinéarisation [97, 98], aussi bien que le développement en série de Volterra [11, 21] des non linéarités, suivies de projections adéquates, aboutissent aux mêmes résultats.

L'inconvénient principal de ces approches de réduction, est qu'elles génèrent des modèles approchés valides uniquement localement autour du point de linéarisation du système non linéaire. Ce qui est une conséquence directe de la nature locale de l'approximation des non linéarités par des polynômes ou séries de fonctions, et de ce fait limitent leurs applications à des systèmes faiblement non linéaires [96, 99, 100].

Autre difficulté qui survient lors de l'utilisation de tels moyens de réduction par approximation polynomiale de l'opérateur non linéaire, est l'augmentation exponentielle rapide de la complexité des calculs, car plus l'ordre du développement est élevé, plus précise est l'approximation, ce qui restreint l'implémentation pratique à des développements quadratiques [1, 101].

Des techniques de MOR basées sur la décomposition orthogonale propre dite décomposition de Karhunen-Lœuve (dans le cas non linéaire), ont été largement utilisées pour la réduction des systèmes non linéaires [102]. Essentiellement, la décomposition de Karhunen-Lœuve consiste à chercher un sous espace de dimension inférieure, qui contient la majeure partie des dynamiques [16]. Une fois trouvé, une projection de Galerkin [27] est appliquée afin de projeter les dynamiques dedans, tel que le grand système initial soit approché par un nombre réduit d'équations différentielles ordinaires (ODE).

La projection de Galerkin a été intensivement utilisée notamment pour la construction de solutions numériques d'équations aux dérivées partielles ainsi qu'à la construction de modèles mathématiques d'ordre inférieur pour des systèmes dynamiques donnés [103].

Par conséquent, de nombreuses procédures de réduction des systèmes non linéaires ont pour principe la décomposition de Karhunen-Lœuve [104, 105].

L'extension au cas non linéaire du concept d'espace d'état a permis de développer la théorie de '*balancing*' à partir des modèles linéaires à une certaine classe de systèmes non linéaires. Introduite par Scherpen pour la première fois [106], la théorie de '*balancing*' non linéaire (TBR-NL) met en jeu les fonctions de commandabilité et d'observabilité ou d'énergie, qui sont les solutions des équations non linéaires de Lyapunov et de Hamilton-Jacobi, respectivement. Ces fonctions d'énergie sont une généralisation des gramians de commandabilité et d'observabilité de la théorie linéaire, permettant de mesurer le degré de commandabilité et d'observabilité simultanément des variables d'état du système non linéaire considéré. Cette mesure est quantifiée par ce que Scherpen a défini comme étant les fonctions valeurs singulières, les quelles ne sont autre qu'une généralisation des valeurs singulières de Hankel définies dans le cas linéaire. La réduction se fait alors par le même principe, après avoir mis le système sous forme équilibrée, à savoir la suppression des variables d'état possédant de faibles fonctions valeurs singulières [107].

Cette procédure est confrontée à plusieurs contraintes liées essentiellement à la résolution des équations non linéaires de Lyapunov et de Hamilton-Jacobi nécessaires pour la détermination des fonctions d'énergie et l'absence d'une méthodologie pour la conception de la transformation d'équilibre, car seule l'existence de cette dernière est garantie [106].

Une approximation de la TBR-NL a été introduite par la suite via le concept des gramians empiriques pour contourner les difficultés relatives à la résolution des équations non linéaires de Lyapunov et de Hamilton-Jacobi [16, 108]. Ces gramians, également appelés matrices de covariance de commandabilité et d'observabilité, sont calculés à partir de certaines données recueillies de manière expérimentale ou par simulation. Une fois ces gramians obtenus, la transformation d'équilibre est élaborée de la même manière que dans le cas linéaire, par ailleurs, cette procédure correspond exactement à la TBR standard si elle est appliquée à un système linéaire [16, 46, 109]. La contribution des variables d'état dans le comportement entrée/sortie est mesurée par les valeurs singulières. Des lors, la réduction est effectuée par la troncation des états correspondants aux faibles valeurs singulières. Toutefois, cette procédure est réservée aux systèmes non linéaires affines par rapport aux entrées et requière des modifications pour des systèmes où le point d'équilibre est autre que l'origine [56].

Par ailleurs, l'inconvénient principal de cette approche (gramians empiriques) et celle de '*balancing*' non linéaire, est leur complexité de calculs, et cela même pour des systèmes de petite dimension.

D'autres méthodes de réduction des systèmes non linéaires ont été proposées. On cite celles basées sur le principe des gramians empiriques exploitant les approches de la POD [23, 25, 110], qui cependant adressent inadéquatement le problème de représentation de la non linéarité. Egalement, la réduction par optimisation des matrices du système non linéaire qui est très efficace quand les non linéarités sont dominantes ou encore la détermination des variables d'état dominantes [111]. Toutes ces procédures sont spécifiques à une certaine classe de systèmes non linéaires, de plus, le coût numérique de l'élaboration des modèles réduits est assez élevé, et de ce fait ne conviennent pas aux systèmes de grande dimension.

On remarque que, le volume de recherches exploitant la structure non linéaire dans le contexte de la réduction est relativement faible comparé au cas linéaire. De plus, les quelques méthodes de réduction développées sont souvent restreintes à une certaine classe de systèmes non linéaires.

1.5 Réduction des systèmes linéaires

Nous présenterons dans ce qui suit quelques méthodes de réduction propres aux systèmes linéaires.

Considérons le système linéaire décrit en (1.6) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

1.5.1 Réduction par les sous espaces de Krylov

L'idée principale de ces approches est d'utiliser des bases de projection afin de projeter le système de l'espace de grande dimension dans un autre de dimension inférieure via les sous espaces de Krylov.

Le sous espace de Krylov est défini comme suit :

$$Krylov_q(\tilde{A}, \tilde{B}) = span\{\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{q-1}\tilde{B}\} \quad (1.9)$$

Où \tilde{A} est une matrice constante $n \times n$, \tilde{B} est un vecteur constant $n \times 1$ et q est un entier positif. Les vecteurs $\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{q-1}\tilde{B}$ construisant le sous espace sont les vecteurs de base.

Avec cette définition, les deux matrices de projection déterminant le modèle réduit en (1.7) sont choisies tel que :

V est une base du sous espace de Krylov $Krylov_{q_1}(A_1, B_1) = span\{B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{q_1-1} B_1\}$

W est une base du sous espace de Krylov $Krylov_{q_2}(A_2, B_2) = span\{B_2, A_2 B_2, \dots, A_2^{q_2-1} B_2\}$

Avec $A_1 = A^{-1}$, $B_1 = A^{-1}B$, $A_2 = (A^{-1})^T$, $B_2 = (A^{-1})^T C$ et q_1, q_2 sont les rangs des sous espaces en entrée et en sortie respectivement, tel que V et W soient de rang q (l'ordre de réduction). Avec ce choix, la méthode de réduction est dite bilatérale. Si uniquement une des matrices de projection est construite et l'autre est choisie arbitrairement, le plus souvent $W=V$, la méthode est dite unilatérale.

Le choix de V et W est simple, néanmoins, les calculs numériques associés aux produits matrice – vecteur impliqués dans les sous espaces de Krylov peuvent tendre vers l'instabilité. Pour contourner cela, des algorithmes ont été développés pour le calcul de V et W , tel que l'algorithme unilatéral de Arnoldi et le bilatéral de Lanczos [80, 81, 112].

Avec ce choix des matrices de réduction, certains des paramètres de la relation entrée / sortie du modèle original et du modèle réduit correspondent, qui sont appelés les moments adaptatifs [77, 83]. Ces moments, notés m_i , sont les coefficients (négatifs) du développement en série de Taylor de la fonction de transfert (1.10) correspondant au système original au tours de $s=0$.

$$G(s) = C^T (sI - A)^{-1} B \quad (1.10)$$

Dont le développement est :

$$G(s) = -\underbrace{C^T A^{-1} B}_{m_0} - \underbrace{C^T (A^{-1} I) A^{-1} B}_{m_1} s - \dots - \underbrace{C^T (A^{-1} I)^i A^{-1} B}_{m_i} s^i \quad (1.11)$$

I étant la matrice identité.

En utilisant les méthodes bilatérales, les $2q$ premiers moments de la fonction de transfert originale et de celle du modèle réduit correspondent, par contre, avec les méthodes unilatérales, il n'y a que les q premiers moments qui correspondent [77], voir (1.12).

$$\begin{aligned}
 G(s) &= -m_0 - m_1 s - m_2 s^2 - \dots - m_{q-1} s^{q-1} - m_q s^q - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} m_i s^i \\
 &\quad \text{Correspondent} \\
 G_q(s) &= -m_0 - m_1 s - m_2 s^2 - \dots - m_{q-1} s^{q-1} - \tilde{m}_q s^q - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{m}_i s^i
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Nous avons opté, afin de calculer les matrices de projections, pour l'algorithme unilatéral d'Arnoldi essentiellement pour sa méthodologie robuste pour la génération des vecteurs constituant les matrices de réduction. Il est numériquement plus robuste et délivre des approximations plus précises et souvent stables comparé à l'algorithme bilatéral de Lanczos [80, 83].

Algorithme d'Arnoldi [80] :

Soit le sous-espace de Krylov suivant

$$Krylov_{q_1}(A_1, B_1) = \text{span}\{B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{q_1-1} B_1\}$$

1. $v_1 = \frac{B_1}{\sqrt{B_1^T B_1}}$ où B_1 est le vecteur de départ.

2. Calculer le vecteur suivant $r_i = A_1 v_{i-1}$.

3. Orthogonalisation des vecteurs

pour $j = 1$ à $(i-1)$ faire :

$$h = r_i^T v_j,$$

$$\hat{v}_i = r_i - h v_j$$

4. Normalisation

Si le vecteur \hat{v}_i est égal à zéro, arrêter la boucle, sinon

La i^{eme} colonne de la matrice V est :

$$v_i = \frac{\hat{v}_i}{\sqrt{\hat{v}_i^T \hat{v}_i}}$$

5. Si $i = q$ arrêter, sinon reprendre en 2.

Dans plusieurs applications, il est désiré de trouver une base orthogonale afin d'éviter des difficultés numériques. Cet algorithme, trouve un ensemble de vecteurs orthonormés qui sont une base du sous espace donné, comme il est décrit ci-dessus. En chaque étape, un

vecteur de plus orthogonal par rapport aux précédents est construit et normalisé. Il est supposé aussi, qu'à chaque étape un vecteur orthogonal existe, dans le cas contraire, l'algorithme s'arrête et l'ordre q doit être réduit.

V et W sont choisies tel que $W = V^T$ ou $W = V$. Ce dernier choix est celui pour lequel nous opterons, de sorte que la matrice d'état réduite (du modèle réduit) soit non singulière.

Une fois ces matrices calculées, on les applique au système (1.6) de manière à avoir le système réduit (1.7) :

$$\begin{cases} V^T \dot{x}(t) = W^T A V x(t) + W^T B u(t) \\ y(t) = C V x(t) \end{cases}$$

Qui est équivalent à (1.8) :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases}$$

Exemple 2.1

Soit le système (1.6) décrit par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} -10611 & 4404 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4404 & -8829 & 4425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4425 & -7507 & 3082 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3082 & -17033 & 13951 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13951 & -18151 & 4197 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18148 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4092 & -4092 \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$B = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ et $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Le système est d'ordre $n = 10$.

En utilisant l'algorithme d'Arnoldi décrit ci-dessus, nous obtenons un modèle réduit d'ordre $q = 3$. Les moments adaptatifs qui correspondent sont au nombre de 3, l'algorithme étant unilatéral.

$$\begin{cases} G(s) = 0 - 0 s - (-0,002) s^2 - (0,043) s^3 - (-107 \cdot 10^4) s^4 - (2,68 \cdot 10^7) s^5 \\ G_3(s) = 0 - 0 s - (-0,002) s^2 - (49 \cdot 10^3) s^3 - (-0,1554 \cdot 10^7) s^4 - (6,0681 \cdot 10^7) s^5 \end{cases}$$

Pour évaluer la précision du modèle réduit obtenu via cette méthode, nous traçons les réponses indicielle et impulsionnelle du modèle original et du modèle réduit, voir figure (1.2).

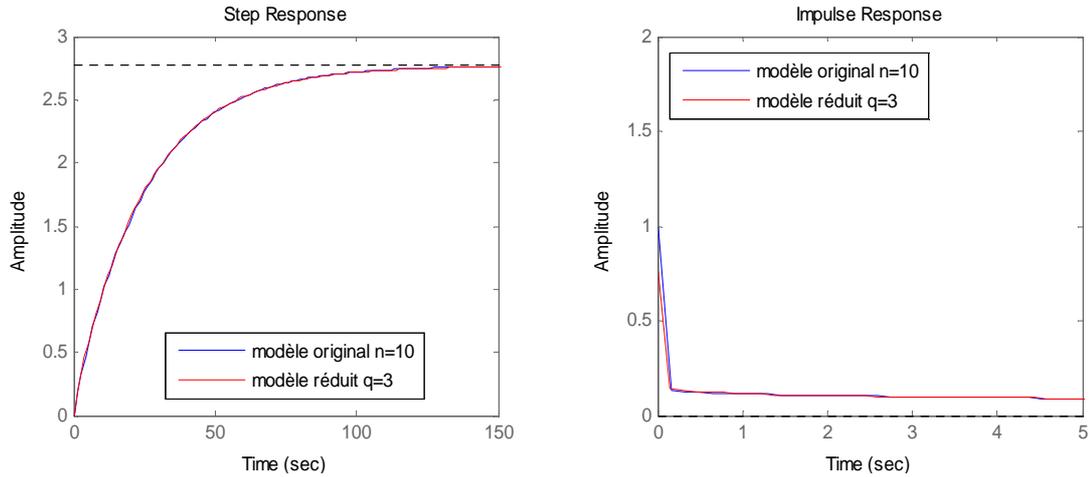


Figure 1.2: Comparaison des réponses indicielle et impulsionnelle des modèles original et réduit par les sous espaces de Krylov (Arnoldi).

Nous remarquons que le modèle réduit d'ordre 3 obtenu reproduit fidèlement le comportement entrée / sortie du modèle original et souligne une grande précision en réponse à une entrée échelon comme l'entrée impulsion, ce qui est essentiellement dû au fait de correspondre les q premiers moments et de préserver le comportement statique (basses fréquences), d'où le manque de précision que présente la réponse impulsionnelle à $t = 0$.

1.5.2 Réduction par la réalisation tronquée équilibrée (TBR)

Comme décrite précédemment, cette approche est basée sur le concept de réalisation équilibrée, dans laquelle les variables d'état sont ordonnées selon leur contribution dans le comportement entrée / sortie du système via une matrice de transformation T [61, 62]. Cette contribution est quantifiée par les valeurs singulières de Hankel, qui mesurent le degré avec lequel les variables d'état sont simultanément commandables et observables.

Considérons le système (1.6)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

Les gramians de commandabilité W_c et d'observabilité W_o sont définis respectivement par :

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad \text{et} \quad W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Qui sont solutions des équations de Lyapunov suivantes, respectivement :

$$\begin{aligned} A W_c + W_c A^T + B B^T &= 0 \\ A^T W_o + W_o A + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Considérons également la transformation d'équilibre T , tel que $z = T x$. Sous cette transformation, le système (1.6) est équilibré et devient :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_b z(t) + B_b u(t) \\ y(t) = C_b z(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

Avec $A_b = T A T^{-1}$, $B_b = T B$ et $C_b = C T^{-1}$.

Les gramians de commandabilité et d'observabilité associés au système équilibré (1.14) sont :

$$\begin{aligned} W_{cb} &= T W_c T^T \\ W_{ob} &= (T^{-1})^T W_o T^{-1} \end{aligned} \quad (1.15)$$

De plus, $W_{cb} W_{ob} = T (W_c W_o) T^{-1}$, par conséquent, les valeurs propres du produit $(W_c W_o)$ sont invariantes et ne dépendent donc pas du choix des coordonnées de l'espace d'état ($(W_{cb} W_{ob})$ et $(W_c W_o)$ sont semblables).

Définition 1.1

Soit une réalisation minimale et stable (A, B, C) . Cette réalisation est dite équilibrée (*balanced*) si et seulement si, les solutions du système d'équations de Lyapunov vérifient :

$$Wc = Wo = \Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$$

Où σ_i sont les valeurs singulières de Hankel de cette réalisation données par :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(Wc \ Wo)}$$

Le théorème suivant assure l'existence d'une telle réalisation et en donne une caractérisation.

Théorème 1.1

Soit (A, B, C) une réalisation. Il existe une transformation T telle que (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) soit équilibrée. De plus, cette réalisation est équilibrée si et seulement si, il existe une matrice diagonale Σ définie positive telle que :

$$\begin{cases} A\Sigma + \Sigma A^T + B B^T = 0 \\ A^T \Sigma + \Sigma A + C^T C = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}, \text{ où } \sigma_i \geq \sigma_{i+1}, \text{ et dans ce cas, } Wc = Wo = \Sigma.$$

Une partition quelconque de cette réalisation équilibrée est toujours stable, c'est ce qui rend cette approche attractive pour la réduction de modèles.

L'interprétation des solutions des équations de Lyapunov en termes de minimisation des énergies de commandabilité et d'observabilité permet de justifier qu'une réalisation équilibrée présente un intérêt indéniable pour la réduction.

Pour cela, soit les fonctions de commandabilité et d'observabilité (fonctions d'énergies de commandabilité et d'observabilité) définies comme suit, respectivement [106] :

$$Ec(x_0) = \min_{\substack{u \in L_2(-\infty, 0) \\ x(-\infty) = 0, x(0) = x_0}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt \quad (1.16)$$

et

$$Ec(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 dt, \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t < \infty \quad (1.17)$$

La fonction de commandabilité est considérée comme étant la quantité minimale d'énergie de commande nécessaire au transfert de l'état du système de l'origine à un état final. Similairement, la fonction d'observabilité est définie comme l'énergie générée par l'observation de x_0 , quand l'entrée est considérée nulle.

Dans le cas des systèmes de la forme (1.6), les fonctions d'énergie de commandabilité et d'observabilité sont quadratiques, et sont données comme suit [109] :

$$\begin{cases} Ec(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T Wc^{-1} x_0 \\ Eo(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T Wo x_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour un système (1.6) mis sous forme équilibrée via une matrice de transformation d'équilibre $z = T x$, les fonctions d'énergies deviennent, respectivement :

$$\begin{cases} Ec(z) = \frac{1}{2} z^T \Sigma^{-1} z \\ Eo(z) = \frac{1}{2} z^T \Sigma z \end{cases} \quad (1.19)$$

Delà, nous constatons que, pour une petite valeur singulière σ_i , la quantité d'énergie nécessaire pour atteindre un certain z^i est importante. Parallèlement, la quantité d'énergie générée en sortie par ce même état est très faible. On qualifie cet état d'être faiblement commandable et faiblement observable. La contribution d'un tel état dans le comportement entrée / sortie est faible et ne l'affecte par sa suppression [60].

La suppression des états faiblement commandables et simultanément faiblement observables correspondants aux faibles valeurs singulières, complète la procédure de réduction via la réalisation équilibrée.

Cette procédure de réduction peut être résumée en les points suivant:

Algorithme de la TBR de Laub [60, 61, 113]

1. Calculer les matrices gramians de commandabilité et d'observabilité solution de

$$\begin{aligned} AWc + Wc A^T + BB^T &= 0 \\ A^T Wo + WoA + C^T C &= 0 \end{aligned}$$

2. Effectuer une factorisation de Cholesky : $Wo = R^* R$

3. Calculer la matrice N , $N = RWc R^*$
4. Effectuer une décomposition en valeurs singulières de N : $N = U\Sigma^2U^T$, $U^T U = I$
5. Calculer T la matrice de transformation : $T = \Sigma^{-1/2}U^T R$.

Une fois T calculée et le système (1.6) équilibré, la troncation est effectuée, en supprimant les états correspondants aux faibles valeurs singulières, afin d'obtenir le modèle réduit.

Si on considère le système équilibré (1.14), dont le partitionnement est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_{b1} \\ \dot{z}_{b2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{b11} & A_{b12} \\ A_{b21} & A_{b22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{b1} \\ z_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{b1} \\ B_{b2} \end{bmatrix} u(t) \\ y_b &= \begin{bmatrix} C_{b1} & C_{b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{b1} \\ z_{b2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Les deux sous systèmes correspondent aux vecteurs $Z_1 = [z_{b1} \ \dots \ z_{bq}]^T$ et $Z_2 = [z_{bq+1} \ \dots \ z_{bn}]^T$. Une troncation directe des états faiblement commandables et observables permet d'obtenir un modèle d'ordre réduit $(A_{b11}, B_{b1}, C_{b1})$.

La réduction via la TBR possède l'avantage de préserver l'essentiel des propriétés du modèle original dans le modèle réduit, à savoir, la stabilité et la minimalité [62, 63]. Par ailleurs, le théorème de Glover garantit la disponibilité d'une borne supérieure de l'erreur de réduction (d'approximation) [17] :

$$\|G - G_q\|_H \leq \|G - G_q\|_\infty \leq 2 \sum_{i=q+1}^n \sigma_i$$

G et G_q étant respectivement les fonctions de transfert du modèle original et réduit.

Exemple 1.2

Reprenons le même exemple précédent. Le système est stable et commandable. En utilisant l'algorithme de la TBR décrit ci-dessus, et en utilisant la matrice de transformation obtenue, les valeurs singulières du système équilibré sont :

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}) = (1,364 \ 0,0127 \ 0,0068 \ 0,0005 \ 0,0002 \ 0,0001 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Suivant ces valeurs, la troncation des sept dernières variables peut être envisagée. Dès lors, le modèle réduit obtenu est d'ordre $q = 3$.

Les réponses indicielle et impulsionnelle des modèles original et réduit sont représentées par la figure 1.3 ci-dessous :

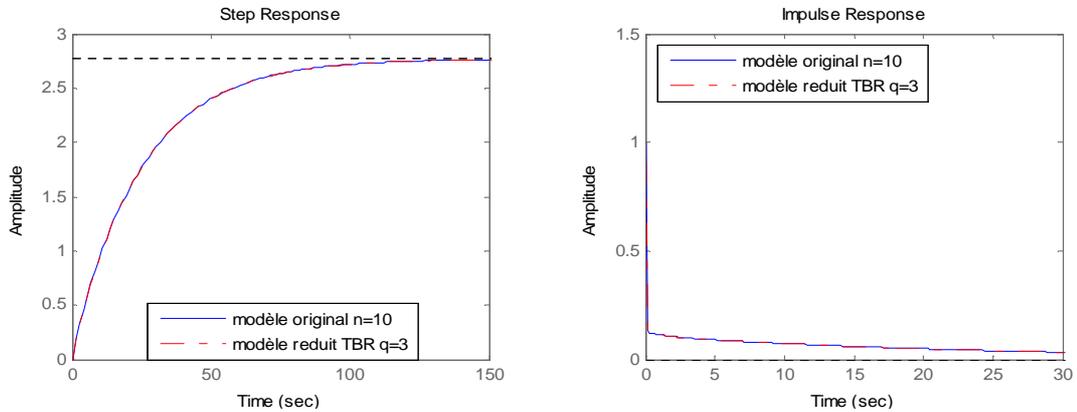


Figure 1.3 : Comparaison des réponses indicielle et impulsionnelle des modèles original et réduit par la Réalisation Equilibrée Tronquée (TBR).

Nous notons également la même précision et la représentation fidèle du comportement entrée / sortie du modèle original par le modèle réduit pour les différentes entrées. Ceci est essentiellement dû au fait de supprimer les états correspondants aux faibles valeurs singulières et constitue donc une bonne approximation du modèle original.

La borne d'erreur est de 0,0015, ce qui correspond parfaitement à la borne d'erreur prévue

par le théorème de Glover qui est de 0,0016 : $\left(\|G - G_q\|_H = 0.0015 \right) \leq \left(2 \sum_{i=q+1}^n \sigma_i = 0.0016 \right)$.

1.5.3 Méthode de réduction par agrégation

Cette méthode de réduction consiste à passer du système (1.6) au système (1.8)

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases}$$

En utilisant une matrice d'agrégation K , telle que $x_r = K x$, ce qui donne les conditions suivantes, en se référant à la définition d'Aoki [37, 38]:

Définition 1.2

Le système (1.6) est agrégeable à (1.8) s'il existe une matrice K de dimension $q \times n$ tel que $x_r = K x$ et vérifiant

$$\begin{aligned} A_r K &= K A \\ B_r &= K B \\ C &= C_r K \end{aligned} \quad (1.21)$$

Où x_r est de dimension $q \times 1$. Les matrices A_r , B_r et C_r sont de dimensions appropriées, qu'il s'agira de déterminer.

Où K vérifie $K K^* = I$. Cette matrice K^* n'est pas unique, mais on prend souvent K^+ (la pseudo-inverse) de K :

$$K^+ = K^T (K K^T)^{-1} \quad (1.22)$$

Qui vérifie bien $K K^+ = I$.

Ce qui implique que $y_r = y$, c'est-à-dire que les deux systèmes aient les mêmes comportements entrée / sortie.

On remarque que le calcul de A_r et B_r par (1.21) nécessite la connaissance de la matrice d'agrégation K . Quant à la matrice de sortie C_r , elle n'intervient pas directement dans les conditions d'agrégation. Toutefois, il y a plusieurs méthodes permettant sa détermination.

L'une de ces approches permettant de déterminer C_r consiste à considérer que $y_r \cong C x$ d'où est déduit $C = C_r K$, et une première solution apparaît qui est :

$$C_r = C K^+ \quad (1.23)$$

Cette approximation est toutefois peu satisfaisante, car elle induit souvent à des résultats imprécis [60].

Une autre manière de calculer C_r consiste à imposer l'égalité des gains statiques du système original (1.6) et du système d'ordre réduit (1.8), c'est-à-dire :

$$C_r A_r^{-1} B_r = C A^{-1} B$$

$$\text{d'où :} \quad C_r = (C A^{-1} B) (A_r^{-1} B_r)^+ \quad (1.24)$$

Cela est évidemment possible si le système initial ne possède pas d'intégrateurs, tel que la matrice A soit inversible. Cependant, lorsque A est singulière, une autre expression peut être obtenue en utilisant la matrice adjointe, qui découle de la formule classique du calcul d'un inverse matriciel [60] :

$$C_r = \frac{1}{\prod_{i=q+1}^n (-\lambda_i)} C \operatorname{adj}(A) \cdot B \cdot [\operatorname{adj}(A_r) B_r]^+$$

où $\operatorname{adj}(A)$ désigne l'adjointe de A .

Le tout de cette approche de réduction par agrégation est de déterminer la matrice d'agrégation K . Plusieurs procédures sont disponibles et adoptées à cet effet.

L'une d'elles, consiste en l'utilisation de la matrice de commandabilité.

Soit $\psi = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]$ la matrice de commandabilité associée au système (1.6). On a alors :

$$K \psi = [KB \ K A B \ \dots \ K A^{n-1} B]$$

et en utilisant (1.21) :

$$K \psi = [B_r \ A_r K B \ \dots \ A_r^{n-1} K B]$$

ψ étant de rang n , on obtient :

$$K = [B_r \ A_r B_r \ \dots \ A_r^{n-1} B_r] \psi^+ \quad (1.25)$$

tel que $\psi^+ = \psi^T (\psi \psi^T)^{-1}$. Ψ^+ étant la pseudo inverse de Ψ .

Une autre procédure de calcul simple définit la matrice d'agrégation comme suit [15, 60]:

$$K = M [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_q]^T$$

où les a_i sont les vecteurs propres de A^T associée aux q premières valeurs propres, M étant une matrice carrée quelconque ($q \times q$), inversible. Dans le cas particulier où toutes les valeurs propres de A sont distinctes, la matrice d'agrégation est déterminée par [15]:

$$K = [I_q \ : \ 0_{q, n-q}] F^T$$

F étant la matrice modale de A . I_q et $0_{q,n-q}$ sont les matrices identité et nulle, respectivement.

Exemple 1.3

Nous utilisons le même système que précédemment afin d'illustrer l'approche de réduction par agrégation. La matrice d'agrégation obtenue est comme suit:

$$K = \begin{bmatrix} 0.0038 & -0.018 & 0.091 & -0.694 & 0.713 & -0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.621 & -0.676 & 0.385 & -0.017 & -0.087 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.658 & 0.184 & -0.677 & 0.145 & 0.229 & -0.0025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.242 & -0.503 & -0.596 & -0.445 & -0.365 & 0.029 & -0.0023 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0.048 & 0.113 & 0.168 & 0.229 & 0.237 & 0.244 & -0.582 & 0.576 & -0.230 & -0.251 \end{bmatrix} \text{ et}$$

vérifie bien que $K K^+ = I$.

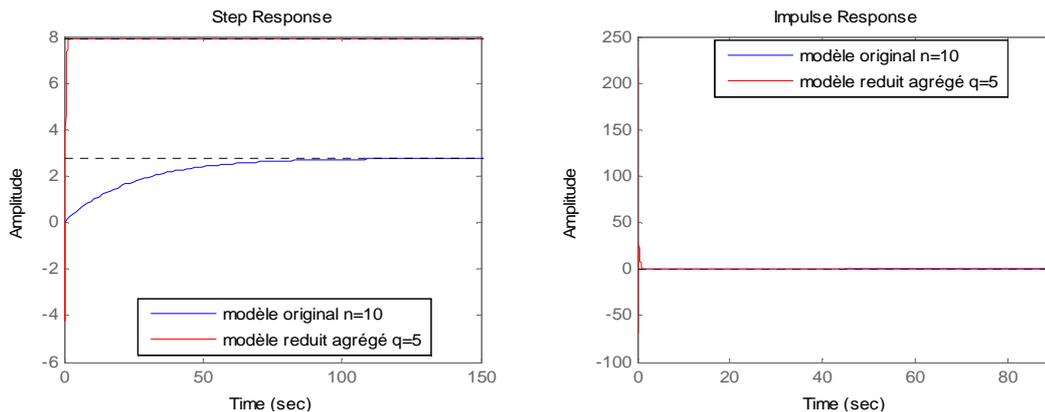


Figure 1.4.a : Comparaison des réponses indicielle et impulsionnelle des modèles original et réduit par agrégation.

L'agrégation effectuée a considérablement modifié le comportement du modèle original. Le choix de la procédure d'agrégation n'est pas approprié. Toutefois, d'autres façons de procéder peuvent être utilisées, comme la matrice de commandabilité (1.25). En utilisant cette dernière, on obtient le modèle réduit d'ordre $q = 5$ illustré par la figure 1.4.b.

Le comportement entrée/sortie du modèle réduit obtenu en réponse à un échelon, garde le même aspect de comportement général contrairement au modèle précédent, néanmoins, le résultat n'approche pas parfaitement le modèle initial. Pour y remédier, il

faudrait inclure plus de modes dans le modèle agrégé et donc d'augmenter l'ordre du modèle réduit.

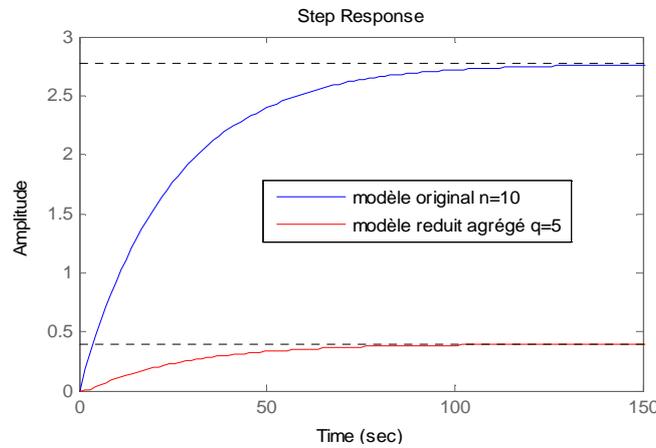


Figure 1.4.b : Comparaison des réponses indicielle et impulsionnelle des modèles original et réduit en utilisant l'agrégation (matrice de commandabilité).

1.5.4 Méthode des perturbations singulières (P.S.)

L'approche des perturbations singulières a été développée pour des systèmes qui possèdent simultanément des modes lents et rapides. Ces modes lents sont dominants tandis que les modes rapides peuvent être négligés. Cette approche permet d'identifier ces modes rapides et de les éliminer pour obtenir le modèle d'ordre réduit [56].

Cette approche est basée sur le principe de séparation des dynamiques, dont le principe est comme suit :

Soit le système linéaire (1.6) qui peut être décrit par :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D u(t) \end{cases} \quad (1.26)$$

où $x_1 \in R^q$ et $x_2 \in R^{n-q}$.

Dans le cas où x_2 décrirait les modes rapides et stables, ce système peut être approché en posant $\dot{x}_2 = 0$. Ceci mène au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \\ 0 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + D u \end{cases} \quad (1.27)$$

Et x_2 peut être représenté par $x_2 = -A_{22}^{-1} (A_{21} x_1 + B_2 u)$. De là, le système (1.27) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right) x_1 + \left(B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \right) u \\ y &= \left(C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} \right) x_1 + \left(D - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \right) u \end{aligned} \quad (1.28)$$

qui décrit le modèle réduit.

Cette approche est relativement simple, pourvu que le système présente des dynamiques lentes et rapides afin d'effectuer la suppression.

L'une des propriétés du modèle réduit via cette approche est le fait qu'il n'y ait pas d'erreur statique comparé au modèle original, car les états ignorés, même s'ils ne contribuent pas à la dynamique du système réduit, ils contribuent néanmoins à son état statique [40, 114].

Exemple 1.4

On considère le système précédent, qui est stable, dont la dynamique présente des modes lents et des modes rapides.

$x_1 = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$: Le vecteur représentant les modes rapides

$x_2 = [x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]$: Le vecteur représentant les modes lents

En utilisant (1.28) on obtient le modèle réduit dont ses réponses à un échelon et à une impulsion simultanément pour le modèle original et le modèle réduit sont représentées par la figure 1.5.

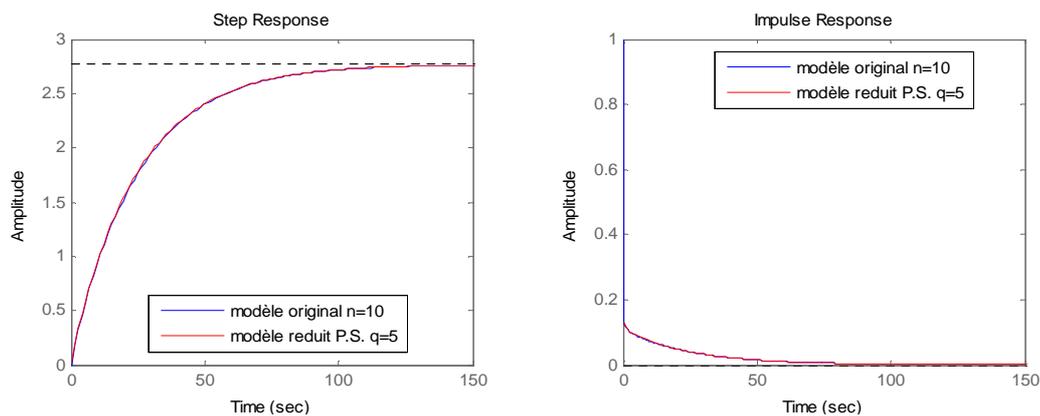


Figure 1.5 : Comparaison des réponses indicielle et impulsionnelle des modèles original et réduit par l'approche des perturbations singulières (P.S.).

On note que le modèle réduit obtenu via l'approche des perturbations singulières est une bonne approximation du modèle original. Le fait de considérer l'effet des dynamiques rapides contribue à annuler l'erreur statique en régime établi.

Exemple 1.5

Considérons le système masse-ressort représenté par la figure 1.6 ci-suit, qui peut être modélisé par la fonction de transfert d'ordre $n = 6$ suivante [15] :

$$G(s) = \frac{-s^4 - 0,08s^3 - 16s^2 - 0,48s - 48}{s^6 + 0,1s^5 + 20s^4 + 0,96s^3 + 96s^2 + 0,96s + 64}$$

Où ses pôles sont :

$$s_1 = -0.0325 + 3.6037i, \quad s_2 = -0.0325 - 3.6037i, \quad s_3 = -0.0020 + 0.8901i,$$

$$s_4 = -0.0020 - 0.8901i, \quad s_5 = -0.0155 + 2.4939i, \quad s_6 = -0.0155 - 2.4939i.$$

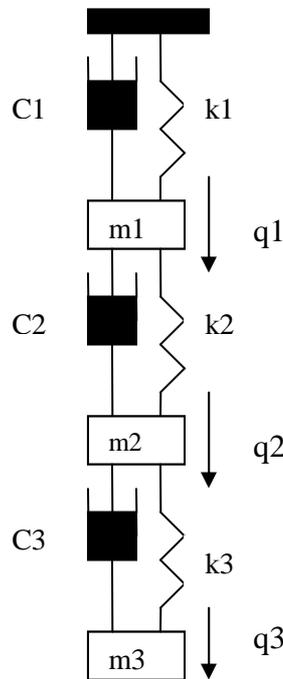


Figure 1.6 : Système masse-ressort

Nous traçons la sortie (position q_3 de la masse m_3) en réponse à un signal d'entrée échelon.

a- Réduction par les sous espaces de Krylov

Les moments adaptatifs du système original sont :

$$m_1 = 0.750, \quad m_2 = -0.003, \quad m_3 = -0.875, \quad m_4 = 0.0087, \quad m_5 = 1.093, \quad m_6 = -0.016$$

Les moments adaptatifs du modèle réduit à l'ordre $q=2$ sont :

$$\tilde{m}_1 = 0.750, \quad \tilde{m}_2 = -0.003, \quad \tilde{m}_3 = -0.875, \quad \tilde{m}_4 = 0.0087, \quad \tilde{m}_5 = 1.0937, \quad \tilde{m}_6 = -0.015$$

La qualité du modèle obtenu est illustrée dans la figure 1.7.

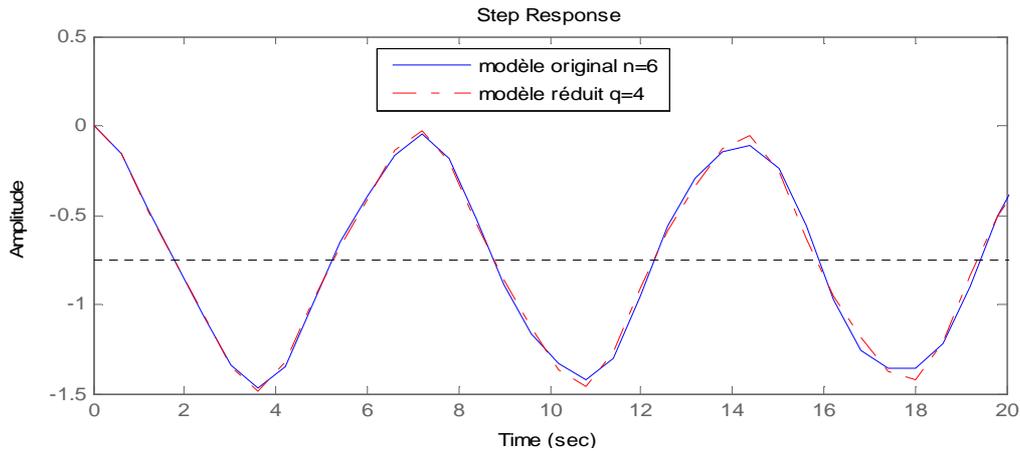


Figure 1.7 : Comparaison des réponses indicielles des modèles original et réduit par l'approche des sous espaces de Krylov.

On note que le modèle réduit obtenu après projection manque de précision, néanmoins, son comportement ne s'éloigne pas tellement de celui du modèle original (en réponse à un échelon). Ceci peut être expliqué par l'effet des pôles qui constituent le modèle, qui sont de nature complexe, de plus ils sont rapprochés.

b- Réduction par la TBR

Le modèle étant commandable, observable et stable, l'approche TBR peut être utilisée. En utilisant l'algorithme cité en § 1.5.2, on obtient la matrice de transformation équilibrée suivante :

$$T = \begin{bmatrix} -0,0002 & -0,0003 & -0,0004 & -0,0002 & -0,0003 & -0,0004 \\ 0,0002 & 0,0003 & 0,0004 & -0,0002 & -0,0003 & -0,0004 \\ 0,048 & 0,022 & -0,038 & 0,122 & 0,052 & -0,096 \\ 0,049 & 0,021 & -0,039 & -0,121 & -0,055 & 0,098 \\ -1,009 & 1,222 & -0,529 & -3,562 & 4,495 & -2,020 \\ -0,994 & 1,273 & -0,581 & 3,663 & -4,505 & 1,982 \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières sont :

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6) = (5,958 \ 5,906 \ 0,0051 \ 0,0050 \ 0,0001 \ 0,0001)$$

Après troncation des états qui contribuent le moins au comportement entrée-sortie du système, nous obtenons le modèle réduit d'ordre $q = 4$.

La réponse du modèle à une entrée échelon est illustrée dans la figure 1.8.

Le modèle réduit obtenu affiche une grande précision dont le comportement est très proche du comportement du modèle original. Le problème des pôles complexes ne se pose pas dans ce cas, puisque la troncation élimine les variables les moins susceptibles d'influencer le comportement original.

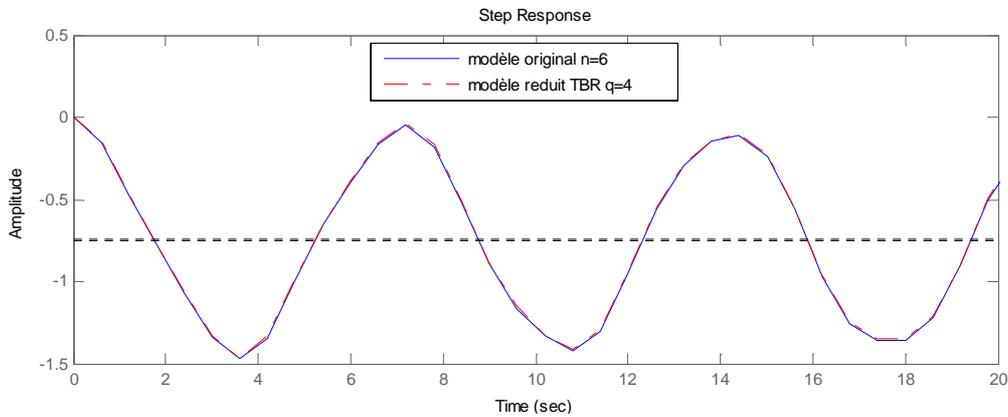


Figure 1.8 : Comparaison des réponses indicielles des modèles original et réduit par la TBR.

c- Réduction par agrégation

En utilisant la procédure décrite ultérieurement par (1.25), en construisant la matrice de commandabilité, on obtient la matrice d'agrégation suivante :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -0,025 & -7,01 \\ 0 & 0 & 1 & -0,035 & -7,01 & 0,441 \\ 0 & 1 & -0,035 & -7,01 & 0,441 & 44,217 \\ 1 & -0,035 & -7,01 & 0,441 & 44,217 & -4,123 \end{bmatrix}$$

Les réponses impulsionnelle des modèles réduit et original sont représentées par la figure qui suit :

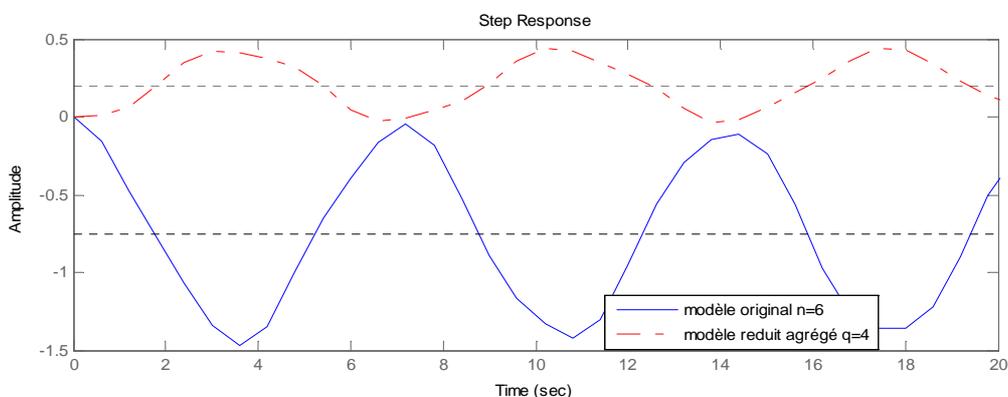


Figure 1.9 : Comparaison des réponses indicielles des modèles original et réduit par l'approche de l'agrégation.

L'agrégation effectuée a modifié le comportement du système original, et de ce fait le modèle réduit ne correspond plus au modèle initial, le choix de suppression des modes les plus à gauche n'est pas approprié.

d- Réduction par les perturbations singulières

Le vecteur $X_2 = [x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ représente la partie dominante du système. La figure 1.10 représente les réponses indicielles des modèles réduit et initial.

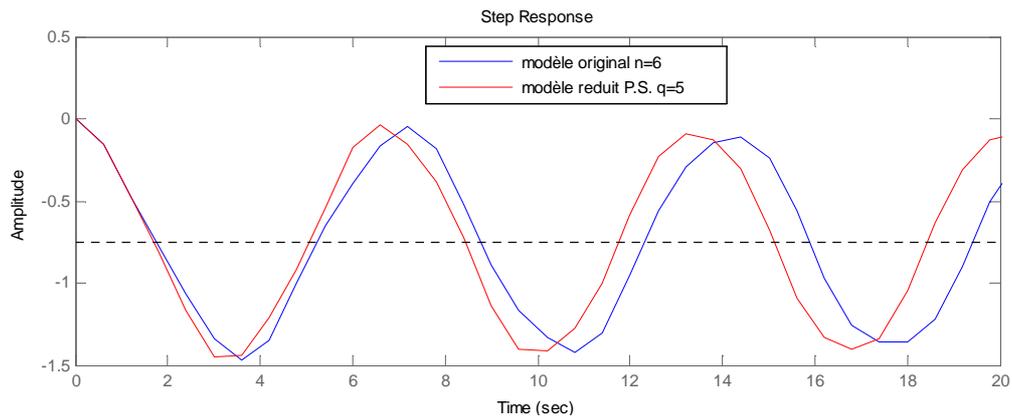


Figure 1.10 : Comparaison des réponses indicielles des modèles original et réduit par l'approche des perturbations singulières (PS).

Le modèle réduit obtenu n'approche pas parfaitement le modèle initial. La nature complexe des modes influence la qualité de réduction, contrairement au cas de l'exemple 1.4.

La figure ci-dessous, représente les différentes réponses indicielles correspondant aux différents modèles réduits, obtenus par les différentes méthodes citées, afin de juger de leurs précisions et de comparer leurs performances.

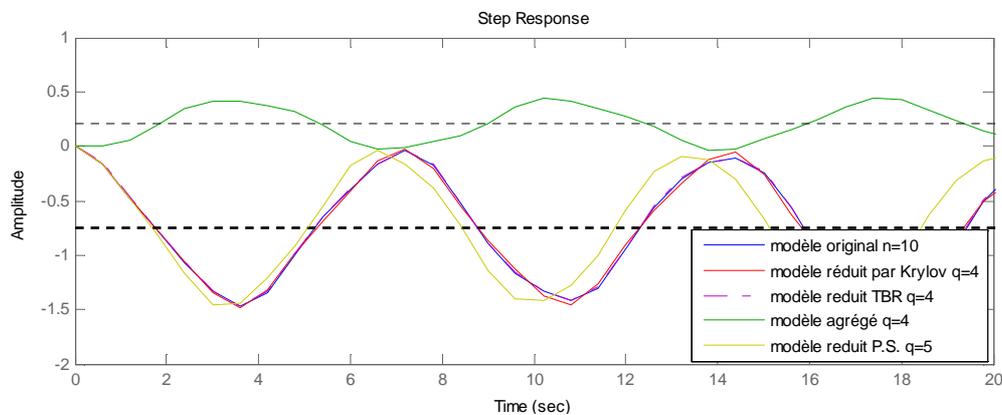


Figure 1.11 : Comparaison des différentes réponses indicielles du modèle original et des différents modèles réduits par les différentes approches.

Nous remarquons que, les modèles réduits obtenus par l'approche des sous espaces de Krylov, de la troncation équilibrée et des perturbations singulières ont un comportement plus ou moins proche de celui du système original, contrairement au modèle agrégé. Ces premières approches, ont pour principe de projeter (sous espaces de Krylov) ou de négliger l'effet de certaines variables du système original (T.B.R. et P.S.), où l'influence de la partie éliminée y contribue par la suite (en dynamique statique). Contrairement au modèle obtenu par agrégation, la suppression des modes choisis, modifie considérablement le modèle réduit.

Les tracés de Bode obtenus pour les différents modèles réduits comparés au tracé de Bode du modèle original sont représentés par la figure 1.12 .

Ces tracés reflètent mieux les modifications subies par les modèles réduits via les approches de réduction sur le modèle initial. Il apparaît que le modèle agrégé soit le plus modifié.

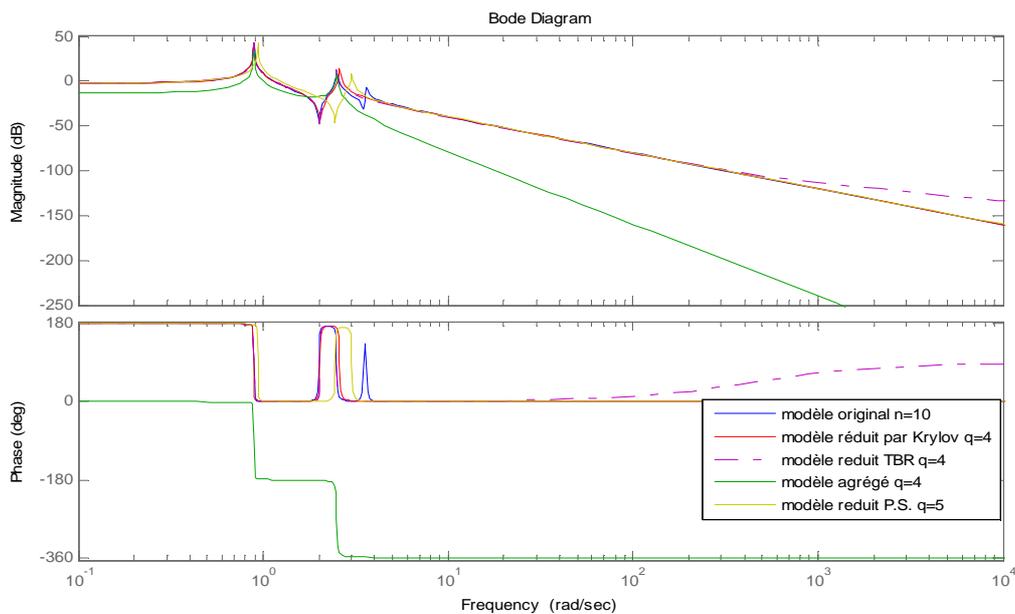


Figure 1.12 : Tracés de Bode du modèle original et des différents modèles réduits.

1.6 Réduction des systèmes non linéaires

Dans le cas linéaire, réduire un système implique automatiquement la réduction du coût numérique associé à l'évaluation, à la complexité et simulation du modèle réduit. Ce qui satisfait immédiatement l'objectif principal de la réduction des modèles.

A la différence, dans le cas non linéaire, la réduction n'implique pas forcément la simplification du modèle réduit et encore moins la réduction du coût d'évaluation ou de simulation.

1.6.1 Application de l'approche des sous espaces de Krylov et de la TBR au modèle linéarisé

La plus simple des façons de réduire un système non linéaire, est de le lineariser au tour de son point d'équilibre, et d'utiliser ensuite les méthodes de réduction des systèmes linéaires. La procédure peut être résumée en ces quelques points :

Soit un système non linéaire tel qu'il est décrit par (1.3)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

1. Lineariser le système non linéaire au tour de son point d'équilibre
2. Calculer à l'aide de l'algorithme de Arnoldi / Laub les matrices de projection associées et la matrice de transformation équilibrée
3. Effectuer la projection pour obtenir le modèle réduit

Dans un certain voisinage du point d'équilibre, cette procédure est convenable.

Exemple 1.6

Soit le système non linéaire suivant [109] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 x_2 - 3x_2 x_3 - x_1 x_4 \\ \dot{x}_2 &= 0,5x_1 x_2 + x_3 + 0,5x_2 x_3 + x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 + 0,5x_1 x_2 + 0,5x_2 x_3 - 0,25x_1 x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 3x_1 x_2 + 0,1x_2 x_3 + 0,3x_1 x_4 + u \end{aligned}$$

L'origine est un point d'équilibre de ce système. Le modèle linéarisé au tour de l'origine obtenu est stable, commandable et observable et est comme suit :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ et } y = x_1(t)$$

Une troncation équilibrée peut donc être envisagée.

Les réponses indicielles des deux systèmes (original linéarisé et réduit) sont représentées dans la figure 1.13 suivante.

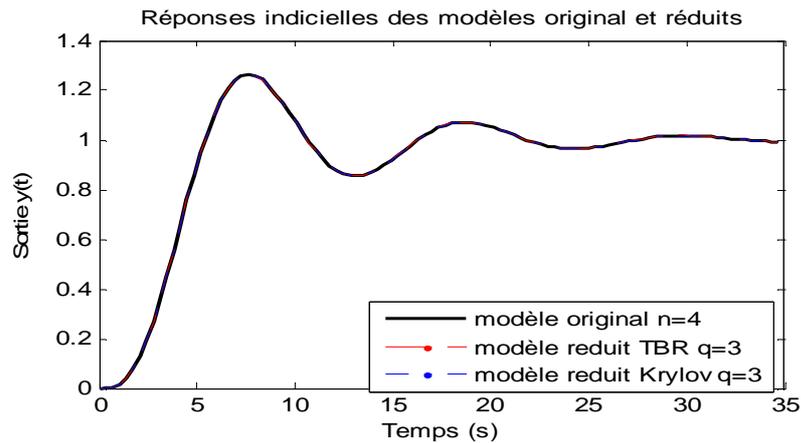


Figure 1.13 : Comparaison des réponses à un échelon des modèles original linéarisé et réduits par l'approche des sous espaces de Krylov et la TBR.

Nous confirmons qu'au voisinage de l'origine, l'approximation envisagée du modèle non linéaire par un modèle linéaire d'ordre $q = 3$ est convenable.

En appliquant la matrice de projection directement sur le système non linéaire on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= W^T f(x_r) + W^T B u(t) \\ y_r &= C V x_r \end{aligned} \quad (1.30)$$

avec $x = V x_r$.

Nous traçons également la réponse indicielle correspondant au système original et réduit. Le résultat est représenté par la figure 1.14.

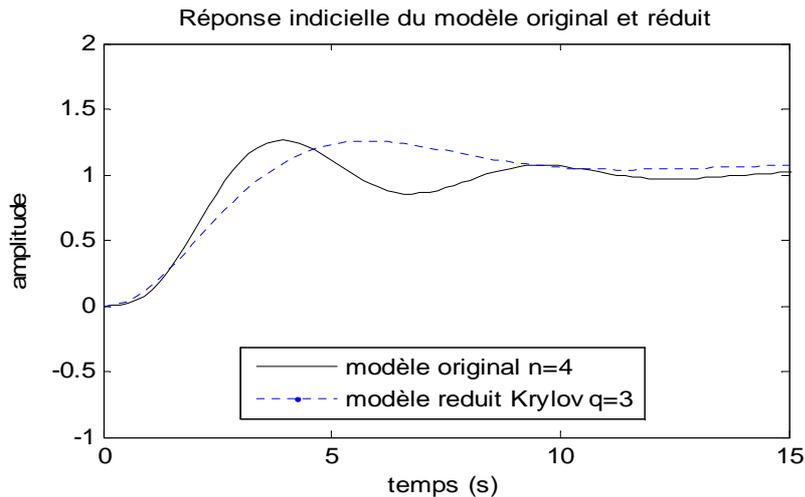


Figure 1.14 : Comparaison des réponses à un échelon des modèles original et réduit par la méthode des sous espaces de Krylov.

L'application des matrices de projection issues de l'algorithme d'Arnoldi directement au système non linéaire n'est pas une approche appropriée pour la réduction des systèmes non linéaires.

Considérons le coût d'évaluation du terme $W^T f(x_r)$ dans le modèle réduit (1.30) dont la procédure de calcul s'effectue selon les étapes suivantes :

Premièrement, on calcule Vx , ensuite on évalue la fonction non linéaire d'ordre élevé (du système original), et enfin, on évalue $W^T f(x_r)$.

Cette procédure de trois étapes de calcul nécessite $O(n^\alpha + 2nq)$ opérations est en fait plus coûteuse que l'évaluation de $f(x)$ [46]. Par conséquent, le coût de simulation du modèle réduit (1.30) en utilisant directement des bases de réduction est typiquement dominé par l'évaluation du terme non linéaire $W^T f(x_r)$. Contrairement au cas linéaire, la simulation du modèle réduit dépend de la dimension n du système non linéaire, qui en affecte les résultats et les performances.

Cette brève analyse montre, la différence flagrante entre la réduction des systèmes linéaires et non linéaires, qui découle quelque peu d'une observation générale, qui est que, l'ordre du modèle n'est pas une mesure exacte de la complexité du système non linéaire, à juger par le modèle réduit (1.30). Par conséquent, afin d'obtenir des modèles réduits des systèmes non linéaires, simples, efficaces et à coût bas, il faut :

- 1) Construire des bases de projection d'ordre inférieur V et W , qui approchent les parties importantes de l'espace d'état.
- 2) Et, appliquer des représentations approchées des non linéarités du système avec un coût d'évaluation relativement bas.

1.6.2 Méthode des gramians empiriques

C'est l'une des plus récentes approches de réduction des systèmes non linéaires développées. Elle consiste en la réalisation équilibrée utilisant une généralisation des gramians, qui sont les gramians empiriques [16, 108]. Cette approche applique l'idée de la TBR à un système non linéaire. La différence réside dans la façon d'élaboration des gramians. En effet, les matrices gramians sont construites à partir de données empiriques issues de simulation. Une fois établis, ces gramians dit empiriques, sont équilibrés en utilisant la théorie linéaire, voir §1.5.2. Les étapes de réduction via cette approche sont résumées ci suit [16] :

Soit le système non linéaire décrit par (1.3)

Définissons les ensembles suivants, dont le choix est discuté dans [108]:

$\Gamma^n = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_r; \Gamma_i \in R^{n \times n}, \Gamma_i^* \Gamma_i = I, i=1, \dots, r\}$: Un ensemble arbitraire de r matrices orthogonales.

$M = \{c_1, \dots, c_s; c_i \in R, c_i > 0, i=1, \dots, s\}$: Un ensemble de s constantes positives.

$\mathfrak{N}^n = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$: Des vecteurs unitaires standards dans R^n .

Définition 1.2:

Soient Γ^p , \mathfrak{N}^p et M les ensembles donnés comme définis ci-dessus. On définit le gramian empirique de commandabilité pour le système (2.1) Wce par :

$$Wce = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \sum_{i=1}^p \frac{1}{r s c_m} \int_0^{\infty} \phi^{ilm}(t) dt \quad (1.31)$$

Où $\phi^{ilm}(t) \in R$ est donnée par: $\phi^{ilm}(t) := (x^{ilm}(t) - \bar{x}^{ilm})(x^{ilm}(t) - \bar{x}^{ilm})^*$.

$x^{ilm}(t)$ est l'état du système (1.3) correspondant à une entrée impulsionnelle $u(t) = c_m \Gamma_l \chi_i \delta(t)$ (voir [16]).

De même, pour le gramian empirique d'observabilité Woe , on définit les ensembles Γ^n, \mathfrak{R}^n et M (comme précédemment) :

$$Woe = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \frac{1}{r s c_m} \int_0^{\infty} \Gamma_l \psi^{lm}(t) \Gamma_l^* dt \quad (1.32)$$

Où $\psi^{lm}(t) \in R^{n \times n}$ est donnée par: $\psi_{ij}^{lm}(t) := (z^{ilm}(t) - \bar{z}^{ilm})^* (z^{ilm}(t) - \bar{z}^{ilm})$. Avec $z^{ilm}(t)$ est la sortie du système (1.3) correspondant à la condition initiale $x_0 = c_m \Gamma_l \chi_i$, et

$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x^{(i)}$ est la moyenne des données, N étant le nombre de données collectées.

Lemme 1.1

Pour tous ensembles Γ^p et M non vides, le gramian empirique de commandabilité Wce du système linéaire (2.4) est égal au gramian de commandabilité usuel Wc .

De même, pour tous ensembles Γ^n et M non vides, le gramian empirique d'observabilité Woe du système linéaire (2.4) est égal au gramian d'observabilité usuel Wo . Pour la preuve, voir [16].

Remarque 1.1

Pour des commodités de calculs durant l'application de cette approche de réduction, une approximation de ces gramians peut être considérée. Elle consiste à remplacer l'intégrale par une somme, sur le nombre de points de données collectées [16].

Puisque les gramians empiriques sont exactement les gramians usuels dans le cas linéaire, cette approche est exactement la TBR quand elle est appliquée à un système linéaire. Quand elle est appliquée à un système non linéaire, elle nécessite uniquement le calcul de matrices gramians empiriques. Soit T une matrice de changement de coordonnées tel que le système soit équilibré :

$$T Wc T^* = T^{-1} Wo T^{-1} = \Sigma \quad (1.33)$$

Où Σ est la matrice diagonale des valeurs singulières des gramians. Aussi, en appliquant cette analyse au système (1.3), elle mène au modèle d'ordre réduit suivant :

$$\dot{x}(t) = PT f(T^{-1}P^* x(t)) + T^{-1} B u(t) \quad (1.34)$$

Où P est une matrice de projection $q \times n$, et q étant la dimension du modèle réduit. Quant à la troncation, elle peut être effectuée par différents moyens. Le plus souvent, ce sont la projection de Galerkin ou la décomposition de Schur qui sont utilisées [16, 115]. Pour notre application, on a opté pour la construction d'une base de réduction via l'algorithme d'Arnoldi.

1.6.3 Procédure par simplification de la non linéarité

Pour extraire des modèles réduits efficaces des systèmes non linéaires, on a besoin de trouver une représentation pour $W^T f(\cdot)$ qui permettrait une évaluation approchée de $W^T f(x_r)$ à des coûts significativement bas (inférieur à $O(n)$ où n est la dimension du système non linéaire à réduire).

L'approche la plus simple est basée sur le développement polynomial de la non linéarité ou plus précisément développement en série de Taylor au tour d'un certain point, qui est généralement un point d'équilibre du système x_0 .

On développe f selon [96] comme suit:

$$f(x) = f(x_0) + A_0(x - x_0) + \frac{1}{2}W_0(x - x_0) \otimes (x - x_0) + \dots \quad (1.35)$$

Où A_0 et W_0 sont les Jacobienne et Hessienne de $f(\cdot)$ évaluées à l'état initial x_0 respectivement [116]. Ainsi on obtient une approximation linéaire de la non linéarité au tour du point x_0 . D'ordinaire on s'arrête à l'approximation d'ordre 1 pour simplifier la représentation, car plus l'ordre du développement augmente plus l'expression devient complexe.

$$f(x) = f(x_0) + A_0(x - x_0) \quad (1.36)$$

Par conséquent, en remplaçant ce développement dans l'équation (1.30), le terme $W^T f(x_r)$ devient plus facile à évaluer et ne nécessite pas autant d'opérations que précédemment ([96] et [99]).

$$\begin{cases} W^T \dot{x}(t) = W^T f(x_0) + W^T A_0 V(x - x_0) + W^T B u(t) \\ y(t) = C V x(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

Il est à noter que les matrices A_0 et W_0 sont typiquement denses.

Aussi, si on considère le développement quadratique de f on obtient le modèle réduit suivant:

$$\begin{cases} W^T \dot{x}(t) = W^T f(x_0) + W^T A_0 V(x - x_0) + \frac{1}{2} V^T W_0 (V \otimes V)(x \otimes x) + W^T B u(t) \\ y(t) = C V x(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

Où W_0 est la Hessienne qui est une matrice $q \times q^2$ [116].

Ce qui peut mener à une forme plus complexe pour le modèle réduit. Le coût de calcul du terme $W^T f(x)$ dans (1.37) ainsi que des matrices A_0 et W_0 est de $O(q^2)$ [46]. Pour le modèle quadratique, cela s'élève à $O(q^3)$.

Le coût de simulation des modèles (1.37) et (1.38) est de ce fait indépendant de n , et il est à noter que q est relativement bas, de l'ordre de 10 voire moins, ce qui est considérable pour des systèmes dont l'ordre était initialement de l'ordre du millier.

Par ailleurs, les calculs liés aux modèles basés sur les développements en série de Taylor augmentent exponentiellement avec le nombre de termes non linéaires inclus. Egalement, la construction de la Hessienne d'ordre réduit peut être difficile, voire impossible pour de grandes valeurs de n , ce qui est essentiellement dû au coût d'évaluation estimé à $O(n^3)$.

Dans de tels cas, des représentations implicites ou des approches numériques de la Hessienne doivent être envisagées [2]. Ce qui complique d'avantage le but de réduction des calculs, du temps de simulation et efforts liés à cela. Par conséquent, bien que cette méthode de réduction de l'ordre des modèles peut être étendue à des ordres plus élevés (ordre du développement), en pratique elle est limitée à l'ordre cubique. Si on prend à titre d'exemple un développement d'ordre $d=10$, la mémoire de stockage nécessaire dépasse $d^5 = 100000$ éléments, de plus les coûts de calculs et d'évaluation du terme $W^T f(Vx)$ restent excessivement élevés.

D'un autre côté, utiliser uniquement deux ou trois termes du développement de Taylor est insuffisant pour représenter la non linéarité du système donné adéquatement, avec précision. Aussi, des développements tels que (1.36) sont des approximations appropriées de $f(x)$ uniquement localement, au voisinage d'un certain point d'équilibre x_0 . De ce fait, approcher un système non linéaire original au tour d'un point d'équilibre ne tient pas compte du comportement global de ce dernier, et si le point de fonctionnement varie significativement de ce point d'équilibre, la représentation en utilisant cette approximation serait imprécise. De ce fait, l'application de la réduction des modèles basée sur le développement en série de Taylor de la non linéarité au tour d'un seul point est limitée aux systèmes faiblement non linéaires [96].

Autre que les approches de développement en série de Taylor pour l'approximation des non linéarités des systèmes non linéaires, il y a les techniques basées sur les approches de bilinéarisation [97], qui sont aussi très utilisées. Pour d'avantage de description des procédures de bilinéarisation des systèmes non linéaires ainsi que la réduction des réalisations bilinéaires, voir [5, 19, 97, 98].

Un grand nombre de méthodes de réduction de l'ordre des modèles utilisant ces procédures de représentation des systèmes non linéaires (développement en séries de Taylor ou bilinéarisation) ont été développées [1, 96, 97]. Dès lors, une fois le système linéarisé, les techniques de réduction appliquées aux systèmes linéaires peuvent être utilisées. Néanmoins, les techniques de bilinéarisation ont en commun les mêmes inconvénients que ceux des approches de développements en séries de Taylor, à savoir, le caractère local de l'approximation, l'inexactitude de la représentation et la limitation aux systèmes faiblement non linéaires de l'application.

Exemple 1.7

Pour illustrer ces approches de réduction (la linéarisation du modèle non linéaire et l'approche des gramians empiriques), nous proposons de les appliquer sur un exemple numérique d'un système non linéaire, et d'évaluer ensuite la qualité des modèles réduits ainsi obtenus, à titre comparatif. Soit le système non linéaire décrit par:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 + u \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ -8x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 0.01x_4^3 + 2u \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Pour notre application, nous avons linéarisé le système (2.26) au tour de l'origine $x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Nous avons réduit à l'ordre $q = 2$ à l'aide d'une base de projection issue du processus itératif d'Arnoldi (§1.5.1).

Pour la méthode des gramians empiriques, nous avons construit les approximations des gramians de commandabilité et d'observabilité, comme indiqué en (2.18) et (2.19) [16]. Pour des commodités de calculs, nous avons opté pour le choix suivant des paramètres (rappelons que le but est d'appliquer cette approche à un système non linéaire est de juger de sa commodité d'implémentation) : $r = s = p = c = 1$, $N = 200$ et $\bar{x} = 0$ (la moyenne des données). Une fois ces gramians établis, la théorie linéaire est utilisée pour les équilibrer, afin de calculer la matrice de transformation qui équilibre le système non linéaire (§1.5.2), à la suite de quoi, nous avons appliqué une base de réduction (2.21) (calculée avec le processus itératif d'Arnoldi) pour obtenir le modèle réduit d'ordre $q = 2$.

La figure 1.15 représente les réponses du système non linéaire ainsi que celle des deux modèles réduits par linéarisation au tour de l'origine et par l'approche des gramians empiriques (TBR non linéaire).

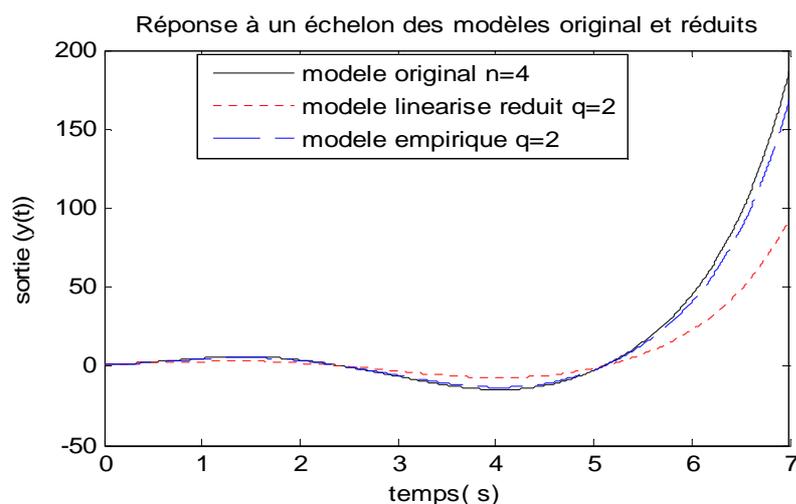


Figure 1.15: Comparaison des réponses indicielles du modèle original non linéaire d'ordre $n = 4$ et des modèles réduits d'ordre $q = 2$, par linéarisation au tour de l'origine et l'approche des gramians empiriques.

Nous remarquons que le modèle réduit issu de la procédure des gramians empiriques approche mieux le modèle original que le modèle linéarisé. Ce dernier n'étant valide qu'au voisinage du point de linéarisation, n'est pas très efficace pour approcher le système initial. Le modèle réduit obtenu par la TBR non linéaire, montre une certaine fidélité à reproduire le comportement du système original. Toutefois, l'écart observé peut être dû au choix effectué sur les paramètres nécessaires au calcul des gramians ou encore de la base de réduction utilisée.

Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de comparer les temps de simulation des modèles réduits avec l'original, car le système initial pris en considération pour nos applications n'est pas de très grande dimension. Néanmoins, on note qu'avec la méthode des gramians empiriques, le temps de construction du modèle réduit est beaucoup plus significatif que le temps d'élaboration du modèle linéarisé réduit, cependant, ce dernier est beaucoup moins précis et surtout n'est valide qu'au tour du point de développement.

1.7 Conclusion

En résumé, un bon nombre de problèmes de réduction des modèles non linéaires restent irrésolus et relativement ouverts.

D'une part, il y a la contrainte des faibles non linéarités à surmonter et le caractère local de leur approximation, qui limitent sévèrement les objectifs d'applications de la réduction. D'autre part, il y a le rapport coût - efficacité de la représentation des non linéarités du système ainsi que le coût de génération des modèles réduits. Autre que les coûts d'évaluation et de représentation, il y a l'exigence de la garantie de préservation des propriétés du système original telles que la stabilité et passivité du système original.

Aussi, de nombreuses méthodes de réduction et de simplification de modèles ont été présentées, chacune avec ses avantages et inconvénients. L'utilisation d'une technique sera tout d'abord dictée par l'objectif visé par le concepteur. La meilleure méthode peut en effet varier selon que l'on s'intéresse à la simulation ou à la commande.

Une fois ces objectifs fixés, la nature physique ainsi que la structure du système peuvent servir de guide au choix de la méthode de réduction appropriée.

D'autres critères, d'ordres purement numériques, sont également à prendre en considération car ils sont susceptibles de privilégier telle ou telle procédure suivant la complexité du problème et donc influencer sur l'option définitive pour une méthode donnée.

Dans ce qui suit, nous discuterons d'une approche de réduction des systèmes non linéaires adéquate pour réduire des systèmes dynamiques fortement non linéaires de grandes dimensions qui permet de pallier aux inconvénients liés aux approches de développement de Taylor ou de bilinéarisation.

Chapitre 2

*Réduction de l'ordre des
modèles par l'approche des
multi-linéarisations pondérées*

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons cité à travers quelques méthodes de réduction les principaux défis et inconvénients associés à la réduction des systèmes non linéaires. Nous nous sommes focalisé en particulier sur le problème de représentation des non linéarités, qui influence de ce fait les performances des modèles d'ordre réduit. Dans ce contexte, on a brièvement exposé la méthode des développements en séries de Taylor de la non linéarité comme étant la plus simple des représentations dont la complexité des modèles réduits obtenus ne dépend pas de la dimension du système original n , mais seulement de la dimension du modèle d'ordre réduit q . Cependant, cette approche souligne certains inconvénients. D'une part, les modèles d'ordre réduit basés sur les développements en séries de Taylor deviennent excessivement coûteux pour des séries d'ordre élevé, du fait que la complexité des calculs associés à ces modèles augmentent exponentiellement avec l'ordre du développement qui est par ailleurs exigé pour la précision de la représentation. D'autre part, des modèles réduits obtenus par simple linéarisation du modèle non linéaire, bien que la procédure soit peu coûteuse, elle ne peut être appliquée qu'aux systèmes faiblement non linéaires [96, 99], ce qui est une conséquence du fait que la linéarisation approche le système non linéaire donné uniquement localement, au tour du point de développement.

Ce qui nous amène à proposer une représentation des non linéarités du système et une approche de réduction des modèles basée sur un ensemble de linéarisations du système original autour de différents points choisis adéquatement [46] et [100].

Dans ce chapitre, nous décrivons en premier une représentation d'un système non linéaire sous forme de combinaison pondérée de modèles linéarisés à partir de différents points de développement, une procédure de pondération ainsi que la façon dont les méthodes des sous espaces de Krylov (§1.5.1) peuvent être employées dans ce cas, pour obtenir des modèles d'ordre réduit efficaces à coûts réduits.

Dés lors, une méthode de génération des modèles TPWL en choisissant des points de linéarisation à partir de la trajectoire d'espace d'état du système non linéaire dynamique est présentée. Ensuite, nous présentons une procédure qui permet de générer une trajectoire d'état approchée pour approcher la simulation du système non linéaire original et par conséquent, réduire significativement le coût d'extraction des modèles d'ordre réduit.

Pour finir, nous examinons les propriétés essentielles du modèle réduit, tel que la stabilité, la passivité ainsi que l'estimation de l'erreur d'approximation.

2.2 La représentation sous forme piece-wise linear

Nous se proposons d'approcher le système dynamique non linéaire (1.3) par une combinaison de modèles linéaires obtenus par linéarisation à partir de différents points de linéarisation, adéquatement choisis dans l'espace d'état. Le principe de cette approche, est de considérer de multiples linéarisations au tour d'états du système sélectionnés, au lieu de tenir compte uniquement d'un seul point de linéarisation.

Soit le système donné en (1.3), et supposons qu'on ait généré s points de linéarisation x_0, x_1, \dots, x_{s-1} (via une procédure qui sera présentée par la suite). On obtient alors, au tour de chaque point un modèle linéaire

$$\dot{x}_i(t) \approx f(x_i) + A_i(x - x_i) + Bu(t) \quad (2.1)$$

Où x_0 est l'état initial du système et A_i la Jacobinne de $f(\cdot)$ évaluée au point x_i .

Chacun de ces modèles approche de façon appropriée le système original (1.3) au voisinage de son point de développement x_i , voir figure 2.2.

En reconstruisant le système dynamique qui englobe tous les modèles linéaires au moyen d'une pondération, on obtient un modèle qui approche adéquatement le système non linéaire à travers une large région de l'espace d'état

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(x) [f(x_i) + A_i(x - x_i)] + Bu(t) \quad (2.2)$$

Où $w_i(x) \in \mathbb{R}^n$ sont les poids, qui sont supposés non-négatifs et satisfaire la condition de normalisation tel que $\sum_{i=0}^{s-1} w_i(x) = 1$ pour tout x , ce qui signifie que dans (2.2), on considère une combinaison convexe des modèles linéaires, assurant de ce fait une bonne fidélité de la représentation.

Avant d'entamer une discussion à propos de la procédure de pondération et la stratégie de génération des points de linéarisation x_i , on considère le problème de construction d'un modèle d'ordre réduit à partir du système (2.2). Pour cela, supposons qu'on ait généré une base de réduction V par le processus itératif d'Arnoldi [80]. Appliquée à (2.2) on obtient :

$$\begin{cases} V^T \dot{x}(t) = \left(\sum_{i=0}^{s-1} w_i(V^T x) [V^T f(x_i) + V^T A_i (Vx - x_i)] \right) + V^T B u(t) \\ y(t) = C V x(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Notons que le processus de réduction de (2.3) nécessite moins de $O(n)$ opérations ce qui est largement moins que l'évaluation de la réduction du système non linéaire (1.3). Aussi, $s \ll n$ et donc l'estimation de (2.3) est peu coûteuse.

D'un autre coté, au lieu de considérer les poids $w_i(x)$ qui dépendent du vecteur d'états non réduit, on peut utiliser un nouvel ensemble de fonctions de pondération $\tilde{w}_i(z)$ tel que $z = V^T x \in R^q$ et par conséquent, réduire significativement le coût d'évaluation des poids de $O(n)$ à $O(q)$ opérations.

En remplaçant z dans (2.3), on obtient le modèle pondéré réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \tilde{w}_i(z) [V^T f(x_i) + V^T A_i (Vz - x_i)] \right) + V^T B u(t) \\ y(t) = C V z(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Avec $z \in R^q$ et V est une matrice $n \times q$. V étant une base orthonormée issue de l'algorithme d'Arnoldi [80].

Contrairement au modèle réduit (2.3), le coût considéré ne dépend pas de la dimension initiale n du système non linéaire original, une amélioration en temps de calculs peut être atteinte en utilisant le système réduit (2.4) ci-dessus. Ceci signifie que, ce système est caractérisé par un ordre ainsi qu'une complexité réduits, comparé au système non linéaire original et de ce fait, présente un moyen attractif et avantageux pour construire des modèles d'ordre réduit des systèmes non linéaires dynamiques de grande dimension. Cette façon de procéder est dite approche des multi linéarisations pondérées ou plus connue sous l'appellation 'Trajectory Piece-Wise Linear : TPWL.

L'approche TPWL proposée dans ce mémoire est significativement différente des approches TPWL présentées en [117] et [118], où l'approximation Piece-Wise linéaire de chaque élément (non linéaire) est considérée, conduisant ainsi à un grand nombre de modèles linéarisés à utiliser.

Développée en premier par Rewiinsky [46], les algorithmes de l'approche TPWL présentés, s'appliquent à la trajectoire du système non linéaire entière, par conséquent, le nombre de modèles peut être petit et donc considérablement réduit par rapport aux anciennes versions de la même approche.

Pour atteindre les performances concernant le modèle réduit (2.4) via cette approche, il y a trois principaux points à considérer :

1. Le calcul des poids $\tilde{w}_i(z)$
2. Le choix de la base de projection V
3. Le choix des points de linéarisation x_i

2.2.1 Procédure de pondération

Généralement, les poids $\tilde{w}_i(z)$ sont calculés en utilisant les informations sur les distances entre l'état courant et le point de linéarisation (ou sa projection).

$$\tilde{w}_i = w_i \left(\|Vz - x_0\|, \|Vz - x_1\|, \dots, \|Vz - x_s\| \right) \quad (2.5)$$

L'objectif est de trouver une procédure de calcul d'une distribution de poids, tel que les non linéarités du système soient adéquatement approchées par la combinaison convexe résultante des modèles linéaires au voisinage de certains points de linéarisation (dont nous discuterons dans ce qui suit). De plus, le calcul de ces poids doit être peu coûteux, en particulier, il est imposé que la complexité de calcul de l'ensemble des poids pour le modèle réduit, n'excède pas $O(sq)$ opérations [95].

Cependant, l'évaluation de ces poids nécessite le calcul de Vz qui implique $O(nq)$ opérations, et de ce fait est très coûteuse. Pour amoindrir ce coût, on peut considérer à la place des distances $\|Vz - z_i\|$, les distances $\|z - z_i\|$ entre l'état courant réduit et les projections z_i des x_i tel que

$$[z_0, z_1, \dots, z_{s-1}] = [V^T x_0, V^T x_1, \dots, V^T x_{s-1}] \quad (2.6)$$

Où V est une base orthonormée (obtenue par le processus itératif d'Arnoldi §1.5.1).

Lors du passage de l'espace d'état original de grande dimension à l'espace d'état réduit, les relations géométriques peuvent être déformées entre les états, en particulier les distances [95].

Pour éviter cet inconvénient, on doit s'assurer que tous les points de linéarisation soient représentés exactement dans l'espace d'état réduit. Et donc, pour tout z on ait [46] :

$$\|Vz - x_i\|_2 = \|Vz - Vz_i\|_2 = \left((Vz - Vz_i)^T (Vz - Vz_i) \right)^{1/2} = \left((z - z_i)^T V^T V (z - z_i) \right)^{1/2} = \|z - z_i\|_2 \quad (2.7)$$

Avec $V^T V = I_q$, I_q étant une matrice identité $q \times q$. Cela signifie que les distances entre les points de linéarisation x_i et x sont préservées après la projection orthonormée (tel que $x = Vz$ pour un certain z).

Il y a différentes procédures de pondération basées sur l'information entre les distances $\|z - z_i\|_2$. Nous présentons ci-après une procédure qui a été prouvée efficace pour les exemples d'applications considérés (voir [46, 95, 100, 119]).

Procédure de pondération [119] :

Soit s le nombre de points de linéarisation générés.

1. Pour $i = 0, \dots, (s-1)$ calculer :

$$d_i = \|z - z_i\|_2$$

2. $m = \min\{d_i : i = 0, \dots, (s-1)\}$

3. Pour $i = 0, \dots, (s-1)$ calculer

- a) $\tilde{w}_i = (e^{d_i/m})^{-\beta}$

- b) $S = \sum_{i=0}^{s-1} \tilde{w}_i$

- c) $w_i = \tilde{w}_i / S$

Où β est une constante positive. Dans notre implémentation de l'algorithme on prend $\beta = 25$ [95]. La procédure de pondération ainsi présentée, permet d'obtenir une distribution tel que les poids varient assez rapidement que l'état courant z évolue dans l'espace d'état, mettant de la sorte un seul modèle linéarisé dominant pour la majeure partie de l'espace d'état, quand z_j devient le point le plus proche de z . Notons que dans la procédure présentée ci-dessus, les poids calculés peuvent aussi être notés $w_i(z)$.

Ceci, permet de considérer le modèle (2.4) tel un modèle 'piece-wise' du système non linéaire (1.3). La procédure de génération des poids ci-dessus, fournit un seul choix possible. D'autres

options sont disponibles, néanmoins en général, elles semblent déterminer la quelle produira l'approximation la plus adéquate pour une large classe de systèmes non linéaires. Pour assurer un changement doux d'une région à l'autre (régions de linéarisations), on utilise des modèles linéaires pondérés. Il y a un choix considérable de fonctions satisfaisant ces critères [95]. Dans l'algorithme précédent, il est question d'une fonction Gaussienne $w_i = e^{-\beta d_i/m}$ selon [100]. Dans [46], une procédure de pondération similaire est présentée, permettant de calculer des poids-fonctions non linéaires. Ces poids sont des fonctions non linéaires, dont la valeur de la fonction poids doit être proche de 1 lorsque l'état courant z est très proche du point de linéarisation $z_i = V_i^T x_i$, est doit tendre vers 0 aussi rapidement que z s'en éloigne.

Autre question spécifique, concerne le paramètre β dans la procédure de pondération précédente. Si β à une grande valeur, les poids varieront relativement rapidement, autrement, ils auraient une pente légère [46]. Pour éclaircir cela, considérons le cas d'une non linéarité quadratique, où des valeurs de β semblent être adéquates. Soit donc $f(x) = ax^2 + bx + c$ qu'on approche par une combinaison de deux modèles linéaires à partir de deux points de linéarisation x_0 et x_1 :

$$\tilde{f}(x) = w_0(x)(c + bx + 2ax_0x - ax_0^2) + w_1(x)(c + bx + 2ax_1x - ax_1^2) \quad (2.8)$$

Avec $w_0(x) + w_1(x) = 1$ pour tout x . L'erreur entre f et \tilde{f} est alors :

$$e(x) = f(x) - \tilde{f}(x) = aw_0(x)(x - x_0)^2 + aw_1(x)(x - x_1)^2 \quad (2.9)$$

Deux choix de poids peuvent être considérés, le premier d'entre eux est :

$$w_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[x_0, \frac{x_0 + x_1}{2} \right] \\ 0 & x \in \left[\frac{x_0 + x_1}{2}, x_1 \right] \end{cases} \quad \text{et } w_1(x) = 1 - w_0(x), \quad \text{et le second } w_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad \text{et}$$

$$w_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \text{voir figure 2.1.}$$

En calculant $E = \int_{x_0}^{x_1} e(x) dx$ on obtient dans le premier cas $E = \frac{a(x_1 - x_0)^3}{12}$ et dans le second

cas $E = -\frac{a(x_1 - x_0)^3}{6}$. Cela indique que, utiliser des poids variant rapidement, dans ce cas,

réduit l'erreur d'approximation, ce qui s'avère avantageux pour le cas des systèmes à non linéarités quadratiques. Manifestement, pour différents types de non linéarités, la situation peut être différente [46].

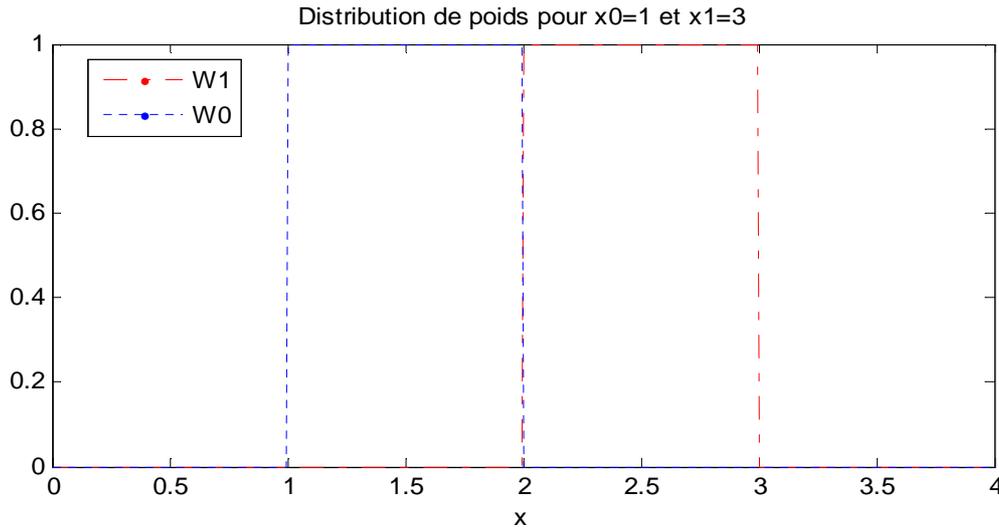


Figure 2.1: Forme des fonctions poids, pour une simple distribution de deux points de linéarisation $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ (le premier cas).

Dans la procédure de pondération présentée précédemment, l'approximation de la fonction non linéaire $f(x)$ est sous forme 'quasi piece-wise'. En effet, le système (2.4) consiste en des équations différentielles, qui nécessitent la résolution d'un système d'équations en chaque étape à l'aide des méthodes de Newton ou d'Euler.

Au lieu de procéder de cette façon, une méthode plus simple peut être utilisée. L'idée est de calculer d'abord la distribution pour une estimée de z , calculée à un état spécifique, de la remplacer dans (2.4) et de résoudre ensuite un système linéaire (pour plus de détails, voir [46, 120]).

2.2.2 Génération des points de linéarisation

Le point le plus crucial lors de l'extraction d'un modèle d'ordre réduit sous la forme (2.4) et de l'approche TPWL en général, est le choix de l'ensemble des points de linéarisation x_i .

En se basant sur le fait que la linéarisation de f au tour d'un certain point x_i , est une approximation exacte de la fonction non linéaire originale à un certain point x , tel que x soit assez proche de x_i , $\|x - x_i\| < \varepsilon$. En d'autres termes, x est associé à une balle de rayon ε , centrée en x_i . Le cercle correspondant à chaque x_i , démarque la région de l'espace d'état dans laquelle le modèle linéaire approche de façon adéquate le système non linéaire original, figure (2.2). Il est évidemment désirable de recouvrir les n états de l'espace d'état par de telles balles (cercles) et d'obtenir une bonne approximation globale du système non linéaire, ce qui assurerait que chaque état est à un certain ε d'un certain point de linéarisation ainsi qu'un certain modèle linéarisé. Le problème, est que le nombre de ces balles augmente exponentiellement avec l'ordre n de l'espace d'état. A titre d'exemple, le nombre de balles de rayon 0.1 nécessaires pour couvrir un espace d'état de dimension $n=1000$ sera approximativement de l'ordre de 10^{1000} . Générer, stocker et calculer un tel nombre de modèles peut être inefficace si ce n'est impossible.

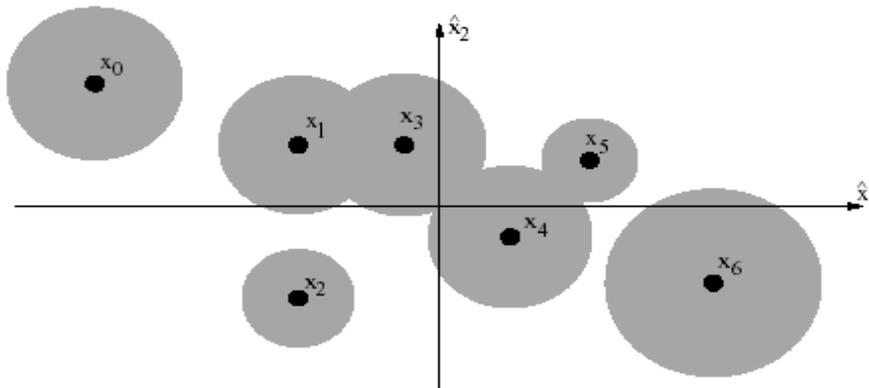


Figure 2.2: Collection de points de linéarisation x_0, x_1, \dots, x_6 dans un espace à 2D. Pour chaque x_i , le cercle correspondant, démarque la région de l'espace d'état où le modèle linéaire (à partir de x_i) approche le modèle non linéaire original [95].

Puisqu'il est infaisable (pour des raisons de commodités de calculs) de représenter entièrement l'espace d'état de dimension n par des modèles linéaires, dans [46] l'auteur propose de générer une collection de modèles le long d'une trajectoire unique fixe du système non linéaire, correspondant à une certaine entrée dite 'trajectoire de formation' (*training trajectory*).

Pour obtenir cette trajectoire de formation (ou son approximation), il faut simuler le système non linéaire entier (1.3), car pour choisir les points de linéarisation, on doit explorer

l'espace d'état. La simulation du système non linéaire entier est à cet effet assez délicate pour acquérir des informations précises. Une bonne entrée de formation (dont la '*training trajectory*' en est la réponse) doit être assez robuste pour conduire le système à atteindre les bornes supérieures de l'espace d'état (englober tous les états). Elle doit aussi varier de façon relativement rapide pour exercer toutes les dynamiques non linéaires du système original non linéaire.

Dans ce cas, comment choisir les points de linéarisation ?

Soit donné une entrée $u(t)$, un état initial x_0 , et un nombre fini de modèles linéaires à générer s ($s \succ 1$). L'algorithme qui permet de sélectionner l'ensemble de points de linéarisations peut être résumé en les étapes suivantes.

Procédure de génération des points x_i [46] :

1. Générer un modèle linéaire à partir de l'état initial x_0 , et mettre $i = 0$.
2. Simuler le système non linéaire tant que $\min_{0 \leq j \leq i} \left(\frac{\|x - x_j\|}{\|x_j\|} \right) < \delta$, pour un certain δ , tant que l'état courant x est assez proche de n'importe quel point de linéarisation précédent.
3. Générer un nouveau modèle linéarisé à partir de $x_{i+1} = x$, et mettre $i := i + 1$.
4. Si $i < (s - 1)$, retourner à l'étape 2.

Dans cet algorithme, l'approximation TPWL s'applique à la trajectoire du système non linéaire entier, et de ce fait, le nombre de linéarisation s peut être pris petit. Toutefois, il est également possible de générer ces points en utilisant un système réduit (comme pour la procédure de calcul des poids) en considérant z au lieu de x .

Après sélection des points à partir de la trajectoire de formation, et génération des modèles linéarisés correspondants, on obtient un modèle d'ordre réduit sous forme de 'piece-wise linear' (TPWL) (après pondération), qui consiste en s linéarisations, où $s \prec n$. Habituellement, $s \approx q$, par conséquent, le coût de simulation et d'évaluation du modèle (2.4) est considérablement inférieur à celui du système (1.3).

Autre point important concernant cet algorithme, pour la réduction TPWL, afin de garantir une fidélité du comportement du système dynamique, les points de linéarisation doivent varier assez fréquemment durant la simulation. Cela est déterminé par le paramètre δ . Une procédure simple est présentée dans [100] pour déterminer la valeur appropriée de δ . En effet, afin d'assurer une approximation précise de f ainsi que la capacité de reproduire les effets non linéaires dans le comportement du système dynamique, les points de linéarisation doivent changer assez fréquemment durant la simulation piece-wise linéaire proposée.

D'un autre coté, au lieu d'utiliser l'algorithme 'simple' cité pour la sélection des points, basé sur un critère géométrique (associé aux distances entre les points), qui est que, si l'état courant s'éloigne assez du point de linéarisation, il devient le suivant. Au lieu de cela, une mesure basée sur l'estimée de l'erreur (entre le modèle original et le modèle TPWL) peut être envisagée, qui exploite l'information du système non linéaire et qui offre de ce fait une approche plus fondée à ce problème (cette idée est discutée en détails dans [46]).

2.2.3 Procédure de réduction

Autre que les procédures de pondération et de sélection des points, il y a la nécessité de générer des bases de réduction pour compléter la construction de modèles TPWL réduits.

2.2.3.1 Construction d'une base de réduction

La plus simple des façons pour construire une base d'ordre réduit V est d'utiliser l'algorithme de projection des sous espaces de Krylov décrits en (§1.5.1) pour les systèmes linéaires. Cet algorithme peut aussi être utilisé dans le cas de la réduction des systèmes non linéaires, après linéarisation au tour d'un certain point. Afin d'inclure dans la base de réduction le point d'équilibre du système, la simulation doit commencer à partir de ce point. Autrement, si on linéarise (ou commence la simulation) à partir d'un point autre que le point d'équilibre, deux termes de l'entrée opéreront (au lieu d'un seul, si la simulation ou linéarisation débutait en x_0 , le point d'équilibre du système) l'un associé au terme $Bu(t)$ et l'autre au terme $f(x_i) + A_i(x - x_i)$, x_i étant le point de linéarisation [100]. L'une des approches les plus couramment utilisées est celle décrite dans ce qui suit. On génère une base de réduction V selon le processus itératif d'Arnoldi correspondant au modèle linéarisé à partir de x_0 l'état d'équilibre du système ($f(x_0) = 0$). Ensuite, on a choisi de poser $W = V$. Pour cela, on procède comme suit [100] :

1. Générer un modèle linéaire du système dynamique non linéaire (1.3) à partir de l'état d'équilibre x_0 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0(x - x_0) + Bu(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Où A_0 est la Jacobienne de $f(x)$ à $x = x_0$.

2. Construire une base orthogonale $v = [v_1, \dots, v_q]$ correspondant au sous espace de Krylov d'ordre q

$$Krylov_q(A_0^{-1}, A_0^{-1}B) = span\{A_0^{-1}B, \dots, (A_0^{-1})^{q-1}A_0^{-1}B\} \quad (2.11)$$

En utilisant l'algorithme d'Arnoldi [80].

Ce choix de base garantie que q moments de la fonction de transfert du modèle réduit linéarisé correspondront à q moments du modèle linéaire original (non réduit). De plus, cette procédure de construction de la base de réduction, assure que le terme correspondant aux conditions initiales dans la fonction de transfert du modèle linéaire (entier) va correspondre exactement au terme respectif de la fonction de transfert du modèle réduit. Cette approche est la moins coûteuse des approches pour la construction de modèles réduits via une projection. Cependant, dans le contexte non linéaire, son inconvénient majeur est l'unique linéarisation au tour de l'état x_0 . En effet, la considération d'une seule base de réduction à l'origine, à appliquer pour réduire les différents modèles influence significativement la qualité du modèle réduit TPWL obtenu en précision, et force à augmenter l'ordre de réduction q (dans le but d'améliorer la précision de la représentation).

2.2.3.2 Construction de différentes bases de réduction

L'algorithme précédent permet de construire une base de réduction d'ordre q à partir d'un modèle linéarisé au tour du point d'équilibre du système non linéaire original, basée sur les approches des sous espaces de Krylov (procédure unilatérale). Le fait de ne considérer que la matrice de réduction V correspondant au point d'équilibre, ne permet pas de tenir compte des autres modèles linéarisés au tour de différents points le long de la trajectoire de formation lors du processus de réduction [120].

Néanmoins, il peut être amélioré afin d'inclure les autres points de linéarisation (situés sur la trajectoire de formation). Ceci est motivé par le fait suivant. Comme ça été mentionné au par avant (voir §1.5.1), si on utilise une base V d'ordre r qui 'span' le sous espace de Krylov pour construire un modèle linéaire réduit, il y a r moments de la fonction de transfert de ce modèle linéaire réduit qui correspondront à r moments de celle du modèle linéaire original [83]. Par conséquent, d'importantes propriétés dynamiques sont préservées par le modèle linéaire réduit. Puisque dans l'approche TPWL on considère un ensemble de modèles linéaires, considérer différentes bases de réduction à partir des différents sous espaces de Krylov correspondants aux différents modèles linéaires, garantira que pour chaque modèle linéaire réduit résultant, r moments de sa fonction de transfert correspondront aux r moments du modèle linéaire correspondant (r étant l'ordre de chaque base). Ainsi, d'importantes propriétés dynamiques peuvent être préservées pour chacun des modèles linéaires après la projection.

Nous considérons à cet effet que l'état initial est l'état d'équilibre du système non linéaire. En se basant sur les motifs précédents, on utilise un algorithme amélioré pour générer des bases de projection, dont les étapes sont résumées ci suit [46]:

1. Poser $V_{agg} = [\]$, $i = 0$;
2. Simuler le système à une entrée de formation pour obtenir la trajectoire de formation
 - a. considérer la linéarisation du système dynamique (1.3) en x_i

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_i) + A_i(x - x_i) + Bu(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Où A_i est la Jacobienne de f évaluée à x_i , et construire une base orthogonale V_i d'ordre q_i correspondant a chaque sous espace de Krylov :

$$Krylov_{q_i}(A_i^{-1}, A_i^{-1}B) = spans(A_i^{-1}B, \dots, (A_i^{-1})^{q_i-1} A_i^{-1}B) \quad (2.13)$$

en utilisant l'algorithme d'Arnoldi.

- b. Prendre $v = [V_i x_i]$
- c. $V_{agg} := [V_{agg} \ v]$;

3. Orthogonaliser les colonnes de l'union des bases V_{agg} en utilisant la décomposition en valeurs singulières et construire la base de réduction finale V qui sera constituée des colonnes orthogonalisées de V_{agg} correspondant aux valeurs singulières de valeurs plus grande qu'un certain $\varepsilon_2 > 0$.

La dimension finale de V est q , qui est l'ordre de réduction (tous les modèles seront réduits à cette dimension).

On peut remarquer que cette façon de procéder est beaucoup plus coûteuse que la précédente, car elle génère une base de réduction à chaque modèle linéaire. Par ailleurs, puisqu'on construit une base de projection plus riche (en terme de points de linéarisation considérés), on peut s'attendre à ce que l'approximation du modèle original soit meilleure et plus adéquate.

Dans le cas où le point d'équilibre du système non linéaire est différent du point initial, dans l'algorithme ci-dessus, on aurait généré deux bases de projection V_{1i} et V_{2i} en chaque point de linéarisation. Cela contribuerait à la dynamique du système via les termes $Bu(t)$ et $(f(x_i) + A_i(x - x_i))$ qui peut être associé à une entrée additionnelle. Cette procédure est encore plus coûteuse que la précédente.

La seule différence avec le précédent algorithme, est la construction de deux bases en chaque point de linéarisation.

2.2.3.3 Construction de bases de réduction : approche améliorée

Afin de réduire d'avantage les coûts et le temps de simulation, tout en préservant la précision, nous proposons une alternative de réduction durant le processus de construction des bases de réduction. Le but étant de réduire la complexité ainsi que le coût d'extraction des modèles réduits en garantissant de bonnes performances d'approximation.

Pour cela, sous le même principe de réduction TPWL, au lieu de réduire les modèles linéarisés avec une base de projection issue d'une agrégation d'un ensemble de bases correspondant à chacun des modèles linéarisés, on réduit chaque modèles linéaire avec la base de réduction lui correspondant. On obtient alors des modèles réduits, sur les quels sera effectuée la pondération, de façon à avoir un modèle réduit pondéré, comme précédemment. On peut prédire que cette façon de procéder améliorera la précision et la réduction du fait que chaque modèle linéaire est réduit par une base de projection lui correspondant, par

conséquent, la réduction locale permet de tenir compte des parties les plus importantes de chacun d'eux.

Cependant, en procédant de la sorte, il est nécessaire de réduire chacun des modèles linéaires au même ordre, c'est-à-dire que toutes les bases de réduction doivent être de la même dimension, contrairement à l'approche proposée ci-dessus, où toutes les bases de réduction de différents ordres étaient agrégées par une décomposition en valeurs singulières à la suite de laquelle on obtenait la matrice de réduction. Néanmoins, au final tous les modèles sont réduits par une base de même dimension, dans le cas des deux approches.

De même, l'algorithme qui suit décrit les étapes à suivre:

1. Simuler le système à une entrée de formation pour obtenir la trajectoire de formation
2. considérer la linéarisation du système dynamique (1.3) en x_i

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_i) + A_i(x - x_i) + Bu(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

Où A_i est la Jacobienne de f évaluée à x_i , et construire les bases orthogonales V_i d'ordre q correspondant aux sous espaces de Krylov :

$$Krylov_{q_i}(A_i^{-1}, A_i^{-1}B) = \text{spsan}(A_i^{-1}B, \dots, (A_i^{-1})^{q_i-1}A_i^{-1}B) \quad (2.14)$$

en utilisant l'algorithme d'Arnoldi.

3. réduire chacun des modèles linéaires

$$\begin{cases} V^T \dot{x}(t) = V^T f(x_i) + V^T A_i(Vx - x_i) + V^T B u(t) \\ y(t) = C Vx(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

4. Pondérer l'ensemble suivant (2.4), comme précédemment.

La dimension finale du modèle réduit obtenu est q , qui est l'ordre de toutes les bases de réduction.

Dans la procédure de réduction présentée dans ce mémoire pour la construction des modèles réduits, nous avons utilisé l'approche des sous espaces de Krylov, via l'algorithme

d'Arnoldi dans sa version unilatérale. Ces méthodes dominent le domaine de la réduction des systèmes linéaires en ingénierie, essentiellement pour leur implémentation facile, l'applicabilité à de grands systèmes (de grandes dimensions) ainsi que la précision des résultats obtenus [77, 80]. Dans l'approche Piece-wise Linear, le caractère local de la réduction par les méthodes des sous espaces de Krylov est annulé grâce à la linéarisation en de multiples points. Cependant, d'autres méthodes peuvent être utilisées (à la place des approches des sous espaces de Krylov).

Des méthodes basées sur la réalisation équilibrée tronquée (TBR), ou encore celles basées sur la réduction polynomiale ont été récemment utilisées combinées au principe de la TPWL, donnent des résultats satisfaisants [59, 101, 119, 121], garantissant l'existence de bornes d'erreurs ainsi que la préservation de la propriété de stabilité des modèles d'ordre réduits (particulièrement pour la TBR).

L'approche la plus simple utilise l'algorithme de la TBR pour obtenir une représentation équilibrée du système à l'état initial x_0 (via une matrice de transformation, §1.5.2) avant d'opérer une troncation au moyen de valeurs singulières ou en construisant une matrice de projection (comme dans le cas des sous espaces de Krylov) [59]. Dans une approche améliorée, on inclue les matrices de projection ainsi que les représentations équilibrées correspondantes aux différents points de linéarisation, le long de la trajectoire de formation du système non linéaire original [94]. Où la matrice de projection finale est une union des différentes matrices générées, en utilisant un algorithme d'orthonormalisation [77]. De cette façon, il est clair qu'on obtient une base de réduction plus riche, qui comprend les parts les plus commandables et les plus observables de l'espace d'état, pour un ensemble de modèles linéarisés réduits qui forment le modèle TPWL.

Cependant, à cause de sa complexité de calcul, due notamment au problème de résolution des équations de Lyapunov en plusieurs points, l'algorithme de la TBR est assez coûteux, par conséquent, les méthodes basées sur cette approche (TBR) sont limitées en pratique à des systèmes de dimensions moyennement grandes à savoir quelques centaines d'inconnues (ce qui est peu comparé aux systèmes de grande dimension, de l'ordre de plusieurs milliers).

D'un autre côté, pour obtenir une réduction effective et efficace de systèmes de grande dimension, on peut utiliser une réduction hybride (en deux étapes) [121]. Cette façon de réduire utilise en premier lieu la méthode des sous espaces, bien adaptée aux grands systèmes, pour réduire à une dimension moyenne (d'ordre $q \approx 100$), et d'appliquer ensuite la TBR. Une

description détaillée de la TBR dans le contexte TPWL est présentée dans [59, 121]. Les résultats obtenus dans ces articles indiquent que, utiliser la projection issue de l'approche hybride, mène à des modèles d'une grande précision, comparé aux modèles réduits par simple projection obtenu via les méthodes des sous espaces de Krylov.

De la même façon, l'idée de la réduction polynomiale est d'abord de développer la fonction non linéaire du système (1.3), au tour des points de linéarisation en des modèles quadratiques, qui sont réduits par la suite à l'aide de matrices de projection, suivant le principe de la TPWL [101]. Cette approche combine de bonnes propriétés d'approximation locale et globale grâce à l'approximation polynomiale Piece-Wise, au tour des points sélectionnés le long de la trajectoire de formation. Néanmoins, les coûts d'évaluations sont plus considérables (*Chapitre1*).

2.3 Simulation approchée (algorithme)

La génération de modèles TPWL pour un système dynamique nécessite la simulation du système non linéaire original (1.3), qui peut être très coûteuse en raison de la dimension n du système en question. Pour diminuer l'effort de calcul associé à la construction d'un modèle réduit, il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de simuler la trajectoire exacte en réponse à une entrée de formation. En fait, il suffit de calculer une trajectoire approchée et de sélectionner des points de linéarisation, à partir de cette trajectoire. Pour que l'ensemble de modèles linéarisés correspondants aux points choisis à partir de la trajectoire approchée, couvrent des régions appropriées de l'espace d'état original, la trajectoire approchée doit être proche de la trajectoire exacte [100]. Pour trouver une trajectoire approchée du système dynamique original (1.3), une simulation approchée plus rapide est nécessaire. Dans [46], l'auteur propose d'utiliser un modèle linéarisé réduit à la place du système non linéaire entier, pour améliorer la simulation. Pour cela, en un point de linéarisation donné, un système linéarisé réduit est généré et simulé afin d'atteindre le point de linéarisation suivant. La procédure est résumée par les étapes de l'algorithme suivant [46] :

1. poser $i=0$ et soit x_0 l'état initial
2. tant que $i < s$

- a. Utiliser une base de projection V pour construire un modèle d'ordre réduit du système (1.3) linéarisé au tour de x_i

$$V^T \dot{x}(t) = V^T f(x_i) + V^T A_i (xV - x_i) + V^T Bu(t)$$

$$y(t) = CV x(t)$$

Cette étape nécessite le calcul de la Jacobienne de A_i dans l'espace non-réduit

- b. Simuler le modèle linéaire réduit (ci-dessus), calculer $x(t) = Vz(t)$, à un temps $t = t_j$, tant que l'état $Vz(t_j)$ est assez proche de l'état initial ($x_i \neq 0$), quand $\frac{\|Vz(t_j) - x_i\|}{\|x_i\|} < \delta$, où δ est une constante adéquatement choisie (discutée précédemment).
- c. Prendre le point de linéarisation suivant $x_{i+1} = Vz(t_j)$ et $i := i + 1$.

Dans cet algorithme, la matrice de projection V est évaluée à partir de l'état initial x_0 correspondant au modèle linéaire. Aussi, alternativement, en chaque point de linéarisation, on peut générer une base de projection, correspondant aux modèles linéaires. Cette seconde façon de calculer l'approximation de la trajectoire, mènera à une simulation plus précise, néanmoins, à un coût plus élevé.

2.4 Génération des modèles TPWL

Maintenant, nous avons tous les outils pour construire le modèle réduit via la TPWL, dont la procédure peut être en résumé trois étapes:

1. Il faut simuler le système non linéaire pour pouvoir sélectionner les points de linéarisation le long de la trajectoire de formation.
2. Construire les différents modèles linéaires au tour des points sélectionnés au préalable. Réduire chacun d'eux via avec les différents algorithmes présentés ci-dessus.

3. Effectuer la pondération de l'ensemble des modèles linéaires réduits, pour obtenir au final, le modèle réduit TPWL.

Nous avons présenté jusque là, le principe des approches TPWL. L'évaluation de modèles linéarisés, à partir de différents points choisis le long d'une trajectoire spécifique, permet de tenir compte de l'aspect global et local des dynamiques du système non linéaire original. Des algorithmes liés à la simplification de simulation et de sélection des points de linéarisation ont été également introduits. Dans ce qui suit, nous discuterons des performances et qualités des approximations TPWL.

2.5 Etude et analyse des performances des modèles TPWL

Dans ce qu'on vient de voir, nous avons présenté l'approche *Trajectory Piece-Wise Linear* pour la réduction des systèmes non linéaires. Un des objectifs des techniques de réductions de l'ordre des modèles (MOR) est d'obtenir un modèle d'ordre réduit de qualité, qu'on juge notamment par l'erreur entre les modèles original et réduit ainsi que la préservation de certaines propriétés telle que la stabilité et la passivité. Dans ce qui vient, nous proposons dans un premier temps, d'analyser les propriétés de stabilité et de passivité des modèles réduits TPWL, ensuite, d'approcher le problème d'analyse de l'erreur qui survient en comparant les modèles (original et réduit).

2.5.1 Stabilité et passivité des modèles réduits TPWL

La propriété de préservation de la stabilité et de la passivité par le modèle réduit est très importante, en particulier dans le contexte de la commande ou encore dans le cas où une substitution est utilisée comme étant une part d'un grand système. Par exemple, si l'on devait remplacer une part d'un modèle original donné, qui n'est pas garantie stable, la simulation du système entier (avec le modèle réduit en question) peut conduire à une solution non physique et de ce fait compromettre les résultats. Aussi, il peut arriver qu'un modèle réduit devienne un élément actif qui agirait comme une source d'énergie, ce qui est commun lorsque des boucles de retour existent dans les systèmes modélisés. Dans ce qui suit, nous analysons si ou sous quelles conditions les modèles réduits TPWL préservent la stabilité et/ou la passivité du système non linéaire original.

2.5.1.1 Analyse de la stabilité

Dans cette section, nous considérons dans un premier temps, le problème de stabilité des modèles réduits TPWL. Pour cela, on rappelle brièvement la théorie de stabilité des systèmes linéaires. Par la suite, on décrit sommairement le problème de préservation de la stabilité pour les systèmes linéaires, pour ensuite entamer le cas des systèmes non linéaires et des modèles réduits TPWL. Pour finir, on présente des conditions suffisantes pour assurer une stabilité L_p (stabilité entrée/sortie) des modèles TPWL. Pour commencer, on rappelle les définitions des stabilités asymptotique, exponentielle et L_p (entrée/sortie) ainsi que certains faits basiques de la théorie de stabilité.

Pour cela, considérons un système autonome (sans entrée) à temps invariant stable

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.16)$$

Où $f : R^n \rightarrow R^n$ est une fonction continue Lipschitz [122]. Nous supposons aussi le long de cette section, que le système représenté en (2.16) possède un point d'équilibre à $x=0$ tel que $f(0)=0$, (qu'il est à noter que cette hypothèse n'induit en aucun cas une perte de généralités). Par ailleurs, dans le cas où $x_0 \neq 0$, on procède seulement à un changement de variables $\tilde{x} = x - x_0$, afin d'analyser le système équivalent $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x})$ (avec $\tilde{f}(\tilde{x}) \equiv f(x)$ pour tout x), qui a un point d'équilibre à l'origine [100].

a- Stabilité asymptotique [123]

On dit que le système (2.16) possède un point d'équilibre stable asymptotiquement à $x=0$ si :

1. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il y a un $\delta > 0$ tel que, pour n'importe quelle condition initiale x_0 , si $\|x_0\| < \delta$ alors $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour chaque $t > t_0$, où $x(t)$ est la solution de (2.16) avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$, et
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

b- Stabilité exponentielle [123]

Le système (2.16) possède un point d'équilibre exponentiellement stable globalement en $x=0$, si il existe une constante $k > 0$ et $\gamma > 0$, tel que pour n'importe quelle condition initiale x_0 ,

$$\|x(t)\| \leq k \|x_0\| e^{-\gamma(t-t_0)}$$

Où $x(t)$ est la solution de (2.16) avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Aussi, si $x=0$ est un point d'équilibre globalement stable exponentiellement, il est aussi globalement stable asymptotiquement, pour le système (2.16). Egalement, dans le cas linéaire, si $f(x) = Ax$, la stabilité asymptotique implique la stabilité exponentielle. Aussi, plus généralement, on à :

Stabilité exponentielle \Rightarrow La stabilité asymptotique

Afin de définir la stabilité entrée/sortie L_p , on considère un système non autonome (forcé) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (2.17)$$

Où $f(.,.)$ est une fonction Lipschitz continue [122], et $h(.,.)$ est continue. On définit l'espace L_p comme suit :

$$L_p = \left\{ v : \|v\|_{L_p} < \infty \right\} \quad (2.18)$$

Où $v : [t_0, \infty[\rightarrow R^n$ est le vecteur-valeurs du signal temporel, t_0 est l'instant initial et

$$\|v\|_{L_p} = \left[\int_0^{\infty} \|v(t)\|^p dt \right]^{1/p} \quad (2.19)$$

Où $\|\cdot\|$ est une certaine norme dans R^n . Un espace élargi L_{pe} est définie comme suit :

$$L_{pe} = \left\{ v : v_{\tau} \in L_{pe}, \forall \tau \geq t_0 \right\}$$

Où v_{τ} est une troncation de v :

$$v_{\tau}(t) = \begin{cases} v(t) & t_0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

c- La stabilité L_p [46]

Le système (2.17) est L_p stable pour un certain $p \in [1, \infty[$, s'il existe des constantes non-negatives γ et b tel que pour tout signal d'entrée u , et pour tout $\tau \geq t_0$, si $u \in L_{pe}$ on a :

$$\|y_\tau\|_{L_p} \leq \gamma \|u_\tau\|_{L_p} + b$$

Où y est le signal de sortie du système (2.17) correspondant au signal d'entrée u .

Afin de lier les stabilité exponentielle et L_p , on se rapporte au fait suivant, présenté initialement dans [123] :

Théorème2. 1 [46]: supposons que f est différentiable continue, les Jacobiennes $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$ et $\left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]$ bornées et $h(x, u)$ satisfont la condition

$$\forall x, u, \|h(x, u)\| \leq \eta_1 \|x\| + \eta_2 \|u\|$$

Pour certaines constantes η_1 et η_2 . Si $x=0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable globalement du système autonome $\dot{x} = f(x, 0)$, le système (2.17) est L_p stable quelque soit les conditions initiales x_0 et pour tout $p \in [1, \infty[$.

En résumé, si f et h satisfont certaines conditions de continuité de base, la stabilité exponentielle globale de l'origine du système autonome implique la stabilité L_p du système non-autonome correspondant. Par conséquent, on peut se focaliser à trouver des conditions sous les quelles l'origine du système autonome TPWL est exponentiellement stable, ce qui garantirait la stabilité L_p du système non-autonome TPWL.

Autre théorème utile, permettant d'étudier la stabilité exponentielle est le suivant (qui est une version du théorème classique de Lyapunov) :

Théorème2.2 [46] : Soit $x=0$ un point d'équilibre du système (2.16). S'il existe une fonction différentiable continue $L: R^n \rightarrow R$ et des constantes k_1, k_2, k_3 et c tel que :

$$k_1 \|x\|^c \leq L(x) \leq k_2 \|x\|^c$$

$$\dot{L}(x) = \left[\frac{\partial L(x)}{\partial x} \right] \cdot f(x) \leq -k_3 \|x\|^c$$

Pour tout x , $x=0$ est alors un point d'équilibre exponentiellement stable globalement pour le système (2.16). Pour la preuve voir [123].

2.5.1.2 Stabilité des systèmes linéaires

Avant de considérer le problème de préservation de la stabilité des systèmes non linéaires, examinons le cas des systèmes linéaires autonomes sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A x(t) \tag{2.20}$$

Où A est une matrice $n \times n$ non singulière (avec des éléments réels). $x=0$ est alors un point d'équilibre unique, isolé pour ce système. Ce point est asymptotiquement stable globalement si et seulement si, A est une matrice Hurwitz, c'est-à-dire, les valeurs propres λ_i de A sont à parties réelles négatives ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$).

Considérons maintenant le système linéaire d'ordre réduit obtenu à partir de (2.20) en utilisant une projection via une base orthonormée

$$\dot{z} = V^T A V z \tag{2.21}$$

Où V est une matrice réelle orthonormée $n \times q$, q étant son rang. Le système (2.21) aura également un point d'équilibre stable asymptotiquement en $x=0$ si et seulement si la matrice $(V^T A V)$ est une matrice Hurwitz.

Par conséquent, il est fondamental de trouver des conditions sous les quelles la matrice $(V^T A V)$ va être Hurwitz. Puisque toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles négatives, A ne peut être positive définie, et de ce fait, nous avons deux cas :

1. A est négative définie, c'est-à-dire que pour tout $x \neq 0$, on a $(x^*)^T A x < 0$, ce qui signifie que toutes les valeurs propres de A sont réelles négatives. En plus claire, $(V^T A V)$ est aussi

négative définie, puisqu'elle est obtenue à partir de la matrice A par transformation de congruences [87], ce qui préserve la définition des matrices. Pour tout $z \neq 0$, on peut prendre $x = Vz$, dès lors, puisque A est négative définie, on a :

$$(z^*)^T V^T A V z = (x^*)^T A x < 0$$

Ceci implique que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.21). Dans ce cas, pour toute base de projection V supposée réelle et pleine rang, le système d'ordre réduit correspondant (2.21) préserve la stabilité du système original (2.20).

2. A est indéfinie, ce qui implique qu'elle est non-symétrique, puisque toute matrice symétrique Hurwitz est négative définie. Dans ce cas, on ne peut pas garantir que pour toute matrice réelle pleine rang V , la matrice $(V^T A V)$ sera Hurwitz.

En résumé, si on considère en général, une base de réduction V , on peut garantir que $x=0$ sera un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.21) si et seulement si A est négative définie. Autrement, la stabilité ne sera préservée que pour certains choix spécifiques de V .

Considérons maintenant le système non linéaire autonome (2.16)

$$\dot{x} = f(x)$$

Rappelons que dans le cas linéaire, le système d'ordre réduit préserve la stabilité du système original (2.20) pour toute matrice de projection V qui produirait une matrice système négative définie. Dans le cas non linéaire, une condition analogue est introduite sur f à propos de la définition négative [46]:

$$\exists \lambda, \forall x: x^T f(x) \leq -\lambda x^T x \quad (2.22)$$

Et si f est une fonction Lipschitz, cela veut dire que la précédente condition est équivalente au fait que la solution du problème de Cauchy $\dot{x} = f(x)$ pour des conditions initiales $x(t_0) = x_0$, satisfait l'inégalité suivante pour $t > 0$:

$$\|x(t)\|_2 \leq \|x(t_0)\|_2 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (2.23)$$

Pour un certain $\lambda > 0$ (λ étant le même que dans (2.22)). Pour la preuve, voir [46].

En utilisant le fait précédent, on conclut que la condition (2.22) implique que l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système (2.16). Tel que $f(0) = 0$ et f est Lipschitz. Egalement, il est clair que la fonction projetée (via une base de projection) $\tilde{f}(\cdot) = V^T f(V\cdot)$ satisfait la condition (2.22), avec le même λ , si V est orthonormée [95], puisque pour tout z on a :

$$z^T \tilde{f}(z) = z^T V^T f(Vz) = (Vz)^T f(Vz) \leq -\lambda z^T V^T Vz = -\lambda z^T z$$

Par conséquent, le système projeté $\dot{z} = V^T f(Vz)$ a aussi un point d'équilibre exponentiellement stable à l'origine [95].

2.5.1.3 Stabilité des systèmes TPWL

Considérons maintenant, un système TPWL autonome d'ordre réduit, correspondant au système (2.16) :

$$\dot{z} = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) \left[V^T f(x_i) + V^T A_i Vz - V^T A_i x_i \right] \quad (2.24)$$

Où $A_i = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x}$ et x_i sont les points de linéarisation. Nous supposons également, dans ce qui suit, que le premier point de linéarisation est $x_0 = 0$, c'est-à-dire que l'un des modèles linéarisés est généré au point d'équilibre du système original.

Avant de discuter de comment assurer la stabilité du système (2.24), ou plus précisément, comment la condition de définition négative (2.22) peut être exploitée, il est intéressant d'aborder les problèmes qui surviennent en général lors de l'utilisation d'une linéarisation ou ensemble de linéarisations pour approcher un système non linéaire.

Considérons en premier, les propriétés d'une seule linéarisation de (2.16) au point d'équilibre $x = 0$:

$$\dot{x}(t) = A_0 x \quad (2.25)$$

Où A_0 est la Jacobienne de f à l'origine. En général, si l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable globalement pour le système (2.16), on ne peut pas garantir qu'il soit aussi asymptotiquement stable globalement pour le système (2.25). Il est alors essentiel de poser une hypothèse largement suffisante au système non linéaire original afin de garantir que l'origine soit un point d'équilibre exponentiellement (asymptotiquement) stable globalement pour le système linéarisé (2.25) [123]. Cependant, la stabilité exponentielle de l'origine du système non linéaire (2.16) n'implique pas la définition négative de A_0 et par conséquent, ne garantit pas la stabilité du système linéarisé réduit

$$\dot{z}(t) = V^T A_0 V z(t) \quad (2.26)$$

Néanmoins, si on suppose que f satisfait la condition (2.22), l'origine va être un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.26), ce qui découle du fait suivant, ainsi que de la préservation de la définition de la matrice par transformation de congruence [87] :

Si $f : R^n \rightarrow R^n$ satisfait la condition (2.22)

$$\exists \lambda, \forall x: x^T f(x) \leq -\lambda x^T x$$

Et que $f(0) = 0$, alors :

$$x^T A_0 x \leq -\lambda x^T x$$

Pour tout x , avec A_0 étant la Jacobienne de f à $x = 0$.

Preuve [46] :

Puisque $f(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$ alors

$$x^T A_0 x = x^T [\nabla_x f_1(0), \dots, \nabla_x f_n(0)]^T$$

Où $\nabla_x f_i(0)$ est la dérivée de f selon la direction x , évaluée à 0. Aussi, puisque

$$\nabla_x f_i(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_i(0 + \varepsilon x) - f_i(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_i(\varepsilon x)}{\varepsilon}$$

Et en satisfaisant (2.22): $\varepsilon x^T f(\varepsilon x) \leq -\lambda \varepsilon^2 x^T x$

Alors

$$\begin{aligned} x^T A_0 x &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x^T \left[\frac{f_1(\varepsilon x)}{\varepsilon}, \dots, \frac{f_n(\varepsilon x)}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon x^T f(\varepsilon x) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\lambda x^T x) \\ &= -\lambda x^T x \quad . \end{aligned}$$

Si on considère maintenant le modèle TPWL (2.24), l'analyse de la stabilité devient plus difficile du fait que l'on considère un ensemble de modèles linéarisés à partir de (2.16) en des points qui ne sont pas des points d'équilibre, excepté pour l'origine x_0 et qu'on prenne une combinaison convexe de ces modèles.

Si l'on linéarise autour d'un point différent du point d'équilibre du système, le problème d'équilibre artificiel apparaît. En effet, supposons que pour un $j \in \{1, \dots, s-1\}$, il existe un ensemble non vide D dans l'espace d'état défini tel que :

$$D = \{z \in R^q : w_j(z) = 1\}$$

Si $z \in D$, le système (2.24) est alors réduit à un seul modèle linéarisé :

$$\dot{z} = V^T f(x_j) + V^T A_j (Vz - x_j)$$

Soit à considérer

$$\tilde{z} = (V^T A_j V)^{-1} (V^T A_j x_j - V^T f(x_j))$$

Qu'il est évident que si $\tilde{z} \in D$, alors \tilde{z} va être un point d'équilibre pour le système (2.24) (qu'il n'est pas nécessaire de vérifier, néanmoins, pour les étapes de l'illustration voir [95]). En d'autres termes, cela veut dire que les modèles TPWL peuvent introduire des états d'équilibre additionnels qui sont en général indésirables. Si de tels équilibres artificiels existent, le modèle TPWL n'aura pas de point d'équilibre asymptotiquement stable globalement en $x=0$ [46]. Par ailleurs, comme il a été montré dans [95], avec un choix approprié des poids w_i , cet équilibre artificiel peut être éliminé. L'autre inconvénient qui survient, est le fait que sans une hypothèse vigoureuse sur l'opérateur non linéaire f , on a

seulement l'information que $A_0 = \frac{\partial f}{\partial x(0)}$ est une matrice Hurwitz, et aucune à propos des propriétés des autres Jacobiennes A_i , $i=1, \dots, (s-1)$. De plus, même si on savait que toutes les matrices A_i sont Hurwitz, une combinaison convexe de ces dernières ne sera pas forcément Hurwitz [95]. Egalement, même si la condition (2.22) est satisfaite par f , aucune des Jacobiennes A_i n'est garantie d'être négative définie, excepté pour A_0 .

Ce problème indique que, en général les modèles TPWL ne préservent pas la stabilité du système original, et cela même si f est négative définie. Ce qu'il faudrait, c'est de trouver des conditions que le modèle TPWL satisferait et qui seront suffisantes pour garantir sa stabilité.

Comme cela été mentionné au par avant, si $f(\cdot)$ est négative définie, $V^T f(V \cdot)$ l'est aussi, impliquant la stabilité exponentielle de l'origine du système d'ordre réduit correspondant. Delà donc, une analogie de cette condition peut être considérée pour un système TPWL tel que :

$$z^T \left(\sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) [V^T f(x_i) + V^T A_i (Vz - x_i)] \right) \leq -k_3 z^T z \quad (2.27)$$

Où k_3 est une certaine constante positive. A partir des faits précédents, cette condition implique la stabilité exponentielle de l'origine du système (2.16), qui peut être dérivée du théorème de Lyapunov (Théorème 2.2) [95]. Le théorème stipule que l'origine est garantie d'être un point d'équilibre exponentiellement stable globalement pour le système (2.24), tel que l'on puisse trouver une fonction de Lyapunov $L(z)$ satisfaisant les conditions du théorème

2.2, avec $f = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) [V^T f(x_i) + V^T A_i (Vz - x_i)]$.

La fonction la plus simple qu'on puisse considérer est une fonction quadratique $L(z) = \frac{1}{2} z^T z$.

Il est clair que pour cette fonction, la première condition du théorème 2.2 est automatiquement satisfaite, à savoir que :

$$k_1 \|x\|^c \leq L(x) \leq k_2 \|x\|^c, \text{ puisque } \frac{\partial L(z)}{\partial z} = z^T, \text{ et que la condition (2.27) découle directement de}$$

la seconde condition du théorème 2.2 [46].

La question importante qui se pose est : est-il toujours possible de construire un modèle TPWL tel que la condition (2.27) soit satisfaite ? Autrement dit, pour x_i et A_i donnés, est-il possible de trouver des poids $w_i(z)$ tel que l'inégalité (2.27) soit vérifiée pour tout z et une certaine constante $k_3 > 0$?

Le fait suivant, donne une réponse positive, dans le cas où A_0 est négative définie, pour x_i et A_i donnés, où $x_0 = 0$, on peut trouver des poids $w_i(z)$ tel que (2.27) soit vérifiée pour tout z . Pour la preuve, voir [95].

Par conséquent, avec A_0 négative définie, il est toujours possible de trouver une procédure de pondération qui assure que le système TPWL ait un point d'équilibre exponentiellement stable à l'origine. A partir de là, une telle procédure de pondération générera-t-elle un modèle TPWL réalisable ?

Le plus mauvais cas de figure serait que, dans le but de préserver la stabilité, la procédure de pondération impliquerait l'utilisation d'un seul modèle linéarisé à l'origine. Dans ce cas, le modèle TPWL ne sera pas plus précis qu'un simple modèle linéarisé d'ordre réduit.

Alors, est-il possible de générer une distribution de poids tel que pour tout z , la condition (2.27) soit satisfaite et pour tout i , il existe un ε_i , tel que pour tout z qui appartient à une balle de rayon ε_i centrée en z_i , où $z_i = V^T x_i$ (la projection du point de linéarisation x_i) pour un certain $i = 0, \dots, (s-1)$, quand $w_i(z) = 1$? En d'autres termes, y a-t-il une procédure de pondération qui préserve la stabilité ?

Comme cela été prouvé dans [95], la réponse à cette question est positive, pourvu que la condition (2.22) soit satisfaite par la fonction non linéaire f du système (2.16).

Théorème 2.3 [46]

Soit $f : R^n \rightarrow R^n$ une fonction Lipschitz continue, $f(0) = 0$ qui satisfait (2.22). Supposons aussi que tous les points de linéarisation x_i peuvent être exactement représentés dans une base orthonormée V tel que $x_i = Vz_i$ pour $i = 0, \dots, (s-1)$. L'origine est alors un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système TPWL (2.24) si, pour tout $i = 1, \dots, (s-1)$, $w_i(z) = 0$ pour $z \in (R^q \setminus B_{\varepsilon_i}(z_i))$, où

$$\varepsilon_i \leq \left(\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}^2}{W^2} + \frac{2\tilde{\lambda}}{W} \|x_i\|_2} - \frac{\tilde{\lambda}}{W} \right) \quad (2.28)$$

$\tilde{\lambda}$ étant une constante positive tel que $\tilde{\lambda} \prec \lambda$, $W = \sup_x \|W(x)\|_2$ où $W(x)$ est la Hessienne de f évaluée à x , et $B_{\varepsilon_i}(z_i) = \{z \in R^q : \|z - z_i\| \leq \varepsilon_i\}$, voir figure 2.3. Pour la preuve, se référer a [31].

Il est à noter que ce théorème fournit un certain nombre de directives pour la sélection des éventuels points de linéarisation x_i , ou encore plus précisément, des balles de rayon ε_i centrées en x_i , qui sont des régions admissibles pour les poids w_i correspondant [95]. Remarquons que, si les distances entre les x_i deviennent assez larges, ces régions peuvent devenir disjointes, voir figure 2.3 [46]. Ceci en l'occurrence, affecte la précision du modèle TPWL donné. Cela dit, pour éviter une telle situation, on peut sélectionner les points de linéarisation de façon à ce que pour tout i [46]:

$$\|x_{i-1} - x_i\|_2 \prec (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i)$$

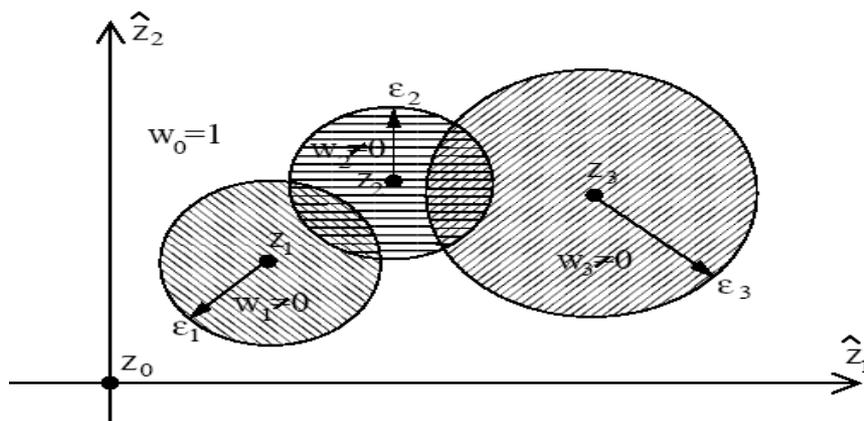


Figure2.3: Distribution de poids admissibles [46].

Calcul des poids pour la préservation de la stabilité [46]:

Le théorème2.3 nous permet, quand f satisfait la condition (2.22), de sélectionner un modèle linéarisé optimal de façon à avoir l'état courant z du modèle TPWL assez proche d'un certain point de linéarisation z_i satisfaisant la condition (2.28) pour un certain i , puisque cette condition est suffisante et significativement vigoureuse que la condition (2.27), avec $x_i = Vz_i$. Par conséquent, en pratique, il est possible d'utiliser la condition (2.27) au lieu de (2.28), dans le but de calculer les poids qui garantissent la préservation de la stabilité [95].

Dans [46], une procédure de pondération est présentée, basée sur la condition (2.27) ainsi que l'information sur les distances des états courants, qui garantie que l'origine restera un point d'équilibre exponentiellement stable pour le modèle TPWL réduit.

2.5.1.4 Stabilité L_p des modèles TPWL

Considérons maintenant le système non autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) [V^T f(x_i) + V^T A_i V z - V^T A_i x_i] + V^T B u \\ y = C V z \end{cases} \quad (2.29)$$

En utilisant le Théorème2.1, qui lie la stabilité exponentielle à la stabilité L_p (entrée/sortie), et le

Théorème2.3, le corollaire suivant est formulé :

Corollaire 2.1 [100]:

Soit $f : R^n \rightarrow R^n$ une fonction Lipschitz continue et différentiable, $f(0) = 0$ satisfait (2.22)

$$\exists \lambda, \forall x: x^T f(x) \leq -\lambda x^T x$$

Supposons aussi que tous les points de linéarisation x_i peuvent être exactement représentés dans une base orthonormée V tel que $x_i = V z_i$ pour $i = 0, \dots, (s-1)$. Le système (2.29) est alors L_p stable pour toute condition initiale x_0 , si, pour tout $i = 1, \dots, (s-1)$, $w_i(z) = 0$ pour $z \in (R^q \setminus B_{\varepsilon_i}(z_i))$, où

$$\varepsilon_i \leq \left(\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}^2}{W^2} + \frac{2\tilde{\lambda}}{W} \|x_i\|_2} - \frac{\tilde{\lambda}}{W} \right)$$

et $\tilde{\lambda}$ est une certaine constante positive tel que $\tilde{\lambda} \prec \lambda$, $W = \sup_x \|W(x)\|_2$ où $W(x)$ est la Hessienne de f évaluée à x , et $B_{\varepsilon_i}(z_i) = \{z \in R^q : \|z - z_i\| \leq \varepsilon_i\}$.

Ce corollaire découle directement du Théorème2.1 et du Théorème2.3. Cela nécessite seulement que les hypothèses du Théorème2.1 soient vérifiées (pour la preuve, voir [100]).

2.5.2 Analyse de la passivité

Nous présentons dans ce qui suit, des résultats basiques sur la passivité des modèles TPWL d'ordre réduit, qui en résulte de l'analyse de la stabilité de ces derniers, citée au par avant.

Afin de prévenir le comportement où le modèle réduit d'un système stable passif se comporte de façon non physique (instabilité ou génération d'énergie), de nombreuses approches ont été élaborées pour extraire des modèles d'ordre réduit stables et passifs, généralement dans le contexte des circuits et réseaux électriques [7, 124], voir également [82, 112, 125]. L'une des idées les plus utilisées, exploitées notamment dans des algorithmes tels que le PRIMA sont les transformations de congruences [87], qui préservent la définition des matrices. Par conséquent, étant donné une classe de systèmes linéaires dynamiques stables, avec des matrices système définies négatives, le modèle réduit correspondant au système considéré, obtenu par les transformations de congruence, a aussi des matrices système définies négatives, est de ce fait stable [46]. Dans ce qui suit, on établit une analogie entre les systèmes dynamiques linéaires définis négatifs, et des systèmes non linéaires avec non linéarités satisfaisant la condition de définition négative. L'utilisation de cette analogie est alors exploitée, pour assurer la stabilité et passivité des modèles réduits TPWL.

Définissons en premier, la passivité des systèmes dynamiques non linéaires :

Définition 3.1 :

Le système (2.17) est passif, s'il existe une fonction semi-définie positive F , continûment différentiable $F: R^n \rightarrow R$ tel que :

$$\forall x \in R^n, \forall u \in R^m : u^T y \geq \frac{\partial F}{\partial x} f(x, u) + \delta y^T y \quad (2.30)$$

Pour un certain $\delta \geq 0$. Si $\delta > 0$, on dit que la sortie du système (2.17) est strictement passive.

Théorème 2.4 [95] :

Supposons que l'on considère le système non linéaire (1.3) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + Bu(t) \\ y(t) = Cx \end{cases}$$

Ce système a une sortie strictement passive à condition que $C = B$, et

$$\exists \lambda > 0, \forall x: x^T f(x) \leq -\lambda x^T x$$

Preuve [46] :

On considère pour cela, une simple fonction quadratique $F(x) = x^T x$. Il est clair que cette fonction est semi-définie positive. On calcule alors :

$$u^T y - \frac{\partial F}{\partial x}(f(x) + Bu) = y^T u - x^T f(x) - x^T Bu = y^T u - x^T f(x) - x^T C u = -x^T f(x) \geq \lambda x^T x \geq 0$$

Cela veut dire que (2.30) est passif. De plus, puisque

$$y^T y = x^T C C^T x \leq \|C C^T\|_2 x^T x$$

On obtient avec ce qui précède :

$$u^T y \geq \frac{\partial F}{\partial x}(f(x) + Bu) + \lambda x^T x \geq \frac{\partial F}{\partial x}(f(x) + Bu) + \frac{\lambda}{\|C C^T\|_2} y^T y$$

Par conséquent, la sortie du système (2.30) est strictement passive ■ .

Ce théorème implique immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 [46]:

Supposons que $f : R^n \rightarrow R^n$ est une fonction Lipschitz continue et différentiable, $f(0) = 0$ et f satisfait la condition (2.22). Le système (2.29) est strictement passif et $B = C$.

Preuve [46]:

Les hypothèses du corollaire étant vérifiées, la condition (2.27) est satisfaite (voir preuve du théorème 2.3). Cela veut dire que les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées pour $f = g$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) [V^T f(x_i) + V^T A_i V z - V^T A_i x_i]$$

A partir de là, il découle du théorème 2.4, que la sortie du système (2.29) est strictement passive ■ .

2.5.3 Analyse et estimation de l'erreur des modèles TPWL : estimation de l'erreur à posteriori

L'estimation de l'erreur à posteriori tend à obtenir une borne d'erreur pour une solution calculée avec le modèle approché. En d'autres termes, l'objectif est de calculer la borne entre la solution obtenue via le modèle d'approximation et le modèle original, à partir d'un temps initial t_0 jusqu'à un temps T . Dans ce qui suit, on présente une méthode qui permet d'estimer de façon à posteriori l'erreur résultante de la résolution de (1.3) avec le modèle TPWL (2.4), qui est une formule itérative pour une borne d'erreur de $\|x(t) - Vz(t)\|_2$, où $x(t)$ est la solution de (1.3), avec $0 < t < T$ et $z(t)$ la solution de (2.4) au même temps, correspondant aux mêmes conditions initiales et signal d'entrée $u(t)$.

La méthode de dérivation de la borne d'erreur est basée sur l'hypothèse que la fonction non linéaire originale f soit négative monotone, qui découle à partir de la condition (2.22) [100] :

$$\exists \lambda, \forall x, y: (x - y)^T (f(x) - f(y)) \leq -\lambda (x - y)^T (x - y) \quad (2.31)$$

Qui est satisfaite par de nombreux systèmes non linéaires, y compris certaines classes de circuits analogues non linéaires [100]. Il est à noter aussi que, si f est négative monotone, le système (1.3) est alors L_p stable pour tout p admissible [95].

On cherche une estimée de $\|\delta x(t)\|_2$ avec:

$$\delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - Vz(t)$$

Où $x(t)$ et $z(t)$ sont les solutions de (1.3) et (2.4) respectivement. A partir de (1.3) et de (2.4) nous avons :

$$\dot{x} = f(x) + Bu$$

$$\hat{\dot{x}} = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) \left[VV^T f(x_i) + VV^T A_i V (z - z_i) \right] + VV^T Bu$$

Avec $x = x(t)$, $z = z(t)$ et $u = u(t)$. De ce qui précède, on obtient :

$$\delta \dot{x} = f(x) - f(\hat{x}) + h(z) + (I - VV^T)Bu \quad (2.32)$$

Où

$$h(z) = f(Vz) - \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) [VV^T f(x_i) + VV^T A_i V(z - z_i)]$$

Puisque $\sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) = 1$ pour tout z , on peut écrire [100] :

$$f(Vz) = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) \left\{ [f(x_i) + A_i(Vz - x_i)] + \left[\int_0^1 (1-s)W(\theta_i(s, z)) ds \cdot (Vz - x_i) \otimes (Vz - x_i) \right] \right\}$$

Où $\theta_i(s, z) = x_i + s(Vz - x_i)$, $W(\cdot)$ est la Hessienne de f tel que $W(\cdot) = [w_{ij}^k] \in \mathbf{R}^{n \times n \times n}$

et $w_{ij}^k = \frac{\partial^2 f_i(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$. $h(z)$ devient alors [100] :

$$h(z) = \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) \left\{ [(I - VV^T)(A_i Vz + f(x_i)) + VV^T A_i Vz_i - A_i x_i] + \left[\int_0^1 (1-s)W(\theta_i(s)) ds \cdot (Vz - x_i) \otimes (Vz - x_i) \right] \right\} \quad (2.33)$$

En multipliant (2.32) à gauche par δx^T , et en appliquant (2.31) ainsi que l'inégalité de Schwartz [122], on obtient :

$$\frac{d}{dt} (\|\delta x\|_2^2) \leq -\lambda \|\delta x\|_2^2 + \|\delta x\|_2 \|h(z) + (I - VV^T)Bu\|_2 \quad (2.34)$$

Considérons maintenant un intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$. On suppose qu'on connaît $\|\delta x(t_i)\|_2$. En appliquant alors une Lemme de comparaison [137], l'inégalité différentielle (2.34) mène à :

$$\begin{aligned} \|\delta x(t)\|_2 &\leq \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau} \|h(z(\tau)) + (I - VV^T)Bu(\tau)\|_2 (1 - \exp(-\lambda(t - t_i))) \\ &\quad + \|\delta x(t_i)\|_2 \exp(-\lambda(t - t_i)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$.

Cette précédente inégalité nous mène à proposer le processus itératif suivant, pour le calcul de l'estimée de l'erreur $e(t_i)$ de $\|\delta x(t_i)\|$ aux temps t_0, t_1, \dots [46] :

1. A l'instant initial t_0 poser

$$e(t_0) = \|I - VV^T\|_2 \|x_0\|_2$$

x_0 étant une condition initiale connue.

2. Pour $i = 1, 2, \dots$ calculer de façon itérative

$$e(t_i) = \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau} \|h(z(\tau)) + (I - VV^T)Bu(\tau)\|_2 (1 - \exp(-\lambda(t - t_i))) + e(t_{i-1}) \exp(-\lambda(t - t_i)) \quad (2.36)$$

Où $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$.

En plus claire, $\|\delta x(t_0)\|_2 = \|(I - VV^T)x_0\|_2 \leq e(t_0)$ et de plus, il s'en suit de (2.35) que $e(t_i) \geq \|\delta x(t_i)\|_2$ pour t_1, t_2, \dots donne une borne d'erreur désirée [46]. Le supremum de l'expression précédente est remplacé en pratique par le maximum sur un intervalle de temps discret entre t_{i-1} et t_i , correspondant à un certain temps d'intégration numérique. Les principales difficultés associées à l'utilisation de la méthode précédente sont :

- 1) Le fait de trouver λ , comparé à (2.31) qui doit être aussi précis que possible, car la qualité de l'estimée de l'erreur dépend de ce paramètre. Il est donc intéressant de considérer l'utilisation de différents λ en différentes régions de l'espace d'état, si c'est toutefois possible et faisable.
- 2) Aussi, trouver l'estimée de $\|h(z)\|_2$ donnée par (2.33), qui nécessite spécifiquement l'estimation de $\|W(z)\|_2$ la norme de la Hessienne de f .

De plus, il est à noter qu'en général, le coût d'évaluation de $h(z)$ peut être aussi élevé que le coût d'évaluation du système non linéaire original, ce qui peut rendre cette procédure d'estimation d'erreur impraticable. Cependant, dans plusieurs cas, il est possible de calculer ces estimées à un coût significativement bas. En effet, si on applique l'agrégation des bases d'ordre réduit V , décrite en (§2.2.3.2), on remarque facilement que $Vz_i = x_i$. Egalement, si $(f(x_i) - Ax_i)$ est incluse dans la base de réduction, $\forall i$ alors $VV^T(f(x_i) - A_i x_i) = (f(x_i) - A_i x_i)$ et $\|h(z)\|_2$ peut être estimée comme suit [100]:

$$\|h(z)\|_2 \leq \sum_{i=0}^{s-1} w_i(z) \left[\frac{1}{2} \sup_x \|W(x)\|_2 \|z - z_i\|_2^2 + \|(I - VV^T)A_i V\|_2 \|z\|_2 \right]$$

et donc on peut remplacer (2.36) par

$$e(t_i) = \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau} \sum_{i=0}^{s-1} w(z(\tau)) \left[\frac{1}{\lambda} \sup_x \|W(x)\|_2 \|z(\tau) - z_i\|_2^2 + \|(I - VV^T)A_i V\|_2 \|z(\tau)\|_2 + \|(I - VV^T)B\|_2 \|u(\tau)\|_2 \right] \cdot (1 - \exp(-\lambda(t_i - t_{i-1}))) + e(t_{i-1}) \exp(-\lambda(t_i - t_{i-1})) \quad (2.37)$$

Puisque les valeurs des normes $\|(I - VV^T)A_i V\|_2$ et $\|(I - VV^T)B\|_2$ peuvent être calculées durant la construction du modèle réduit, le coût d'évaluation de (2.37) est seulement de $O(sq)$. Cela veut dire que l'erreur d'estimation peut être améliorée durant la simulation du modèle d'ordre réduit, sans pour autant augmenter la complexité.

Cette méthode de l'estimation de l'erreur proposée est illustrée en détail dans [100] et [46].

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche de réduction de l'ordre des modèles pour les systèmes non linéaires, basée sur la combinaison pondérée de modèles linéarisés autour de différents points de linéarisation adéquatement choisis. Une analyse théorique est ensuite effectuée pour l'étude des propriétés de stabilité, de passivité ainsi que l'estimation de l'erreur liée à l'approximation du système non linéaire original par un autre système d'ordre réduit via l'approche proposée.

Afin d'appliquer l'approche de réduction développée, dans le chapitre suivant, nous proposons de présenter une catégorie de systèmes de grandes dimensions sur les quels seront effectuées les simulations et illustrations de la méthode de réduction discutée, à savoir les MEMS (Micro Electro-Mechanical Systems).

Chapitre 3

*Application de l'approche
TPWL aux Systèmes Micro
Électro-Mécaniques (MEMS)*

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une approche de réduction des systèmes non linéaires, basée sur le concept de pondération d'un ensemble de modèles linéaires en différents points de linéarisation. Nous avons également abordé le problème de préservation de la stabilité et de la passivité des modèles réduits obtenus ainsi qu'une estimation de l'erreur due à l'approximation du système original.

Nous proposons dans ce qui suit, afin de valider cette approche de 'multi-linéarisations pondérées' de présenter des systèmes dont les modèles sont d'ordres très élevés et à caractères fortement non linéaire, sur les quels nous appliquerons l'approche développée dans ce mémoire. Nous nous intéresserons essentiellement aux résultats de simulation dans le domaine temporel des exemples considérés. L'objectif étant de vérifier si en effet, on génère réellement des modèles d'ordre réduit efficaces via la TPWL. Nous vérifierons aussi si le modèle réduit qui approche le système non linéaire donne des résultats identiques (en termes de précision) non seulement pour l'entrée avec la quelle il a été générée (entrée de formation) mais également pour d'autres entrées différentes de celle-ci.

Pour cela, nous présentons dans ce qui suit, un bref aperçu sur la catégorie de systèmes considérés, sur les quels seront effectuées les tests, à savoir les *microsystèmes*, dont l'enjeu technologique est de taille et les applications nombreuses.

3.2 Introduction au domaine de la micro technologie

La technologie des microsystèmes est une discipline d'ingénierie qui est engagée dans la production et caractérisation des dispositifs multi physiques avec des dimensions micrométriques [127, 128 129]. Ces dispositifs sont généralement reportés en tant que systèmes micro électro-mécaniques (*Micro Electro Mechanical System: MEMS*) bien qu'ils aient d'autres composants caractéristiques d'optiques (MOEMS) ou de biologie (BioMEMS), ...etc.

Plusieurs définitions sont utilisées pour designer ces systèmes fabriqués à l'échelle microscopique. Les microsystèmes sont au sens de la définition la plus courante (notamment Européenne), des systèmes miniaturisés intelligents qui combinent des capteurs et des actionneurs à des fonctions de traitement du signal et de l'information. Ce terme laisse donc apparaître la notion de multidisciplinarité propre à ces systèmes. En effet, ces signaux sont aussi bien mécaniques, électroniques qu'optiques ou thermiques ...etc.

Le problème des micros dispositifs a été choisi comme exemple test pour les algorithmes de la réduction de l'ordre des modèles proposés dans ce mémoire pour un certain

nombre de facteurs. En premier lieu, essentiellement à cause de la structure complexe de la non linéarité et le nombre relativement élevé des équations (décrivant le système en question) à résoudre (après discrétisation des équations aux dérivées partielles). En second lieu, la capacité à modéliser les dynamiques, qui sont à caractère fortement non linéaire est d'un intérêt particulier pour les ingénieurs. Pour finir, l'exemple des microsystèmes se révèle être un challenge pour les approches de réduction des modèles existantes [46, 95, 100].

En effet, les techniques de réduction développées pour les systèmes non linéaires n'atteignent pas leurs objectifs quant à la génération de modèles d'ordre réduit précis du système original. En somme, plusieurs problèmes de la réduction de l'ordre des modèles non linéaires apparaissent clairement lors de l'utilisation de tels systèmes (microsystèmes).

Un microsystème est donc avant tout un système. Il est micro par dimension technologique. Il est conçu pour assurer un certain nombre de fonctions telles que la perception de l'environnement (capteur), analyse et traitement de données recueillies, prise de décision, communication avec le monde extérieur ou action sur le monde extérieur ou l'environnement.

Nous considérons dans ce mémoire, pour nos simulations, le cas des MEMS.

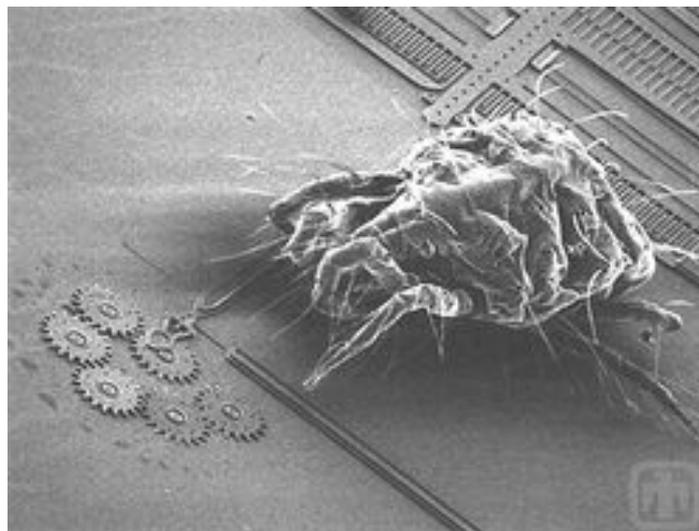
Jusque là, nous avons présenté des généralités brèves à propos des microsystèmes, et l'on pourrait se demander ce qu'est exactement un MEMS ?

Définition 3.1:

Les MEMS sont des systèmes comprenant un ou plusieurs éléments mécaniques, en vue de réaliser une fonction de capteur et/ou d'actionneur. Le terme MEMS s'applique lorsque le système possède au moins une structure présentant des dimensions micrométriques, et que la fonction du système est en partie assurée par la forme de cette structure, voir figure 3.1. Issus de la technologie de la microélectronique, ils font appel pour leurs fabrications aux micro technologies, qui permettent une production à grande échelle, dont les avantages de la miniaturisation des systèmes consistent en la possibilité d'intégrer plusieurs dispositifs de différentes technologies dans un espace relativement petit (de l'ordre du micron) ainsi qu'une moindre consommation d'énergie et de concevoir ainsi des dispositifs très performants.



a- Figure d'un MEMS constitué d'un système d'engrenage micrométrique.



b- Comparaison des dimensions entre un MEMS et un acarien

Figure 3.1: Exemple de dispositifs MEMS¹.

3.2.1 Applications des microsystemes

Pour ces systèmes micrométriques à peine visible à l'œil nu, d'innombrables applications sont imaginées.

L'enjeu technologique des microsystemes en général est de taille et sont de plus en plus présents et indispensables au quotidien. En effet, ces microsystemes couvrent plusieurs branches d'applications de la science et de l'ingénierie.

¹ <http://www.memx.com/technology.htm>

L'une des applications les plus courantes des MEMS est sans doute au profit de l'industrie automobile. Ils sont à cet effet intégrés dans les airbags et les dispositifs de détection de crevaison, de pression d'injection et anti-patinage ainsi que dans les systèmes de climatisation et antivols, ...etc. visant à améliorer les performances.

Le secteur médical aussi bénéficie de l'essor des progrès de la micro technologie. Notamment, pour l'administration de substances, la conception d'accéléromètres pour pacemakers, les analyses biologiques ainsi que les chirurgies à invasions minimales.

La branche de l'aéronautique et de la défense n'échappe pas à la déferlance des MEMS, particulièrement pour la conception de gyromètres et altimètres précis et performants. Aussi, les systèmes de guidage, de missiles et de munitions se voient améliorés par l'intégration de ces microsystèmes à leurs conceptions.

Les domaines d'étude de l'environnement et de l'industrie utilisent aussi la technologie MEMS pour la conception de capteurs physico-chimiques, entre autre, pour le control des eaux ainsi que les mesures de grandeurs physiques et maintenances préventives.

Destinés à des domaines divers, on peut citer encore le monde du jeu vidéo, comme la nouvelle manette à détection de mouvements des consoles de jeux.

3.2.2 Fabrication et challenges liés aux microsystèmes

Le processus de développement des microsystèmes présente certaines difficultés fondamentales, comparé au domaine du macro. Les MEMS ont des dimensions de l'ordre du micron et sont habituellement fabriqués par des processus de fabrication en masse, avec un coût initial élevé. Les prototypes sont par conséquent coûteux à concevoir en moyen et en temps (le temps de production d'un prototype est relativement lent). Très souvent, il est impossible d'opérer des changements des micros-parts, si ce n'est en recommençant le cycle complet de production. Aussi, l'analyse et l'examen des prototypes nécessitent des microscopes performants ainsi que des moyens de visualisation à haute résolution, si toute fois des mesures sont possibles. Par ailleurs, les conséquences d'une conception erronée peuvent être désastreuses [127, 130]. Ceci, souligne l'importance de la modélisation et de la simulation pour une conception complète et fiable [130], ainsi le comportement final du dispositif est alors accessible à la simulation. Dès lors, la fiabilité, l'estimation de la durée du dispositif et la détection de défauts peuvent être identifiés. L'optimisation peut également aider à trouver les meilleurs paramètres du système.

Cependant, même les simulations ont leurs limites, car elles sont toujours basées sur le modèle [127]. La qualité de détails, le nombre d'effets physiques impliqués (pris en

considération lors de la modélisation), la validité des hypothèses et des simplifications détermine la précision de tels modèles. Aussi, les modèles représentatifs des MEMS (microsystèmes en général) sont très complexes. C'est dû d'une part, à la multidisciplinarité des technologies de ces dispositifs ainsi qu'à la miniaturisation, qui impliquent des effets d'interaction à prendre en considération (pour une modélisation précise). D'autre part, c'est dû au nombre élevé d'équations, habituellement aux dérivées partielles, nécessaires à une modélisation exacte représentant fidèlement le système original réel, en tenant compte de tous ses phénomènes physiques, ce qui mène à des systèmes de grandes dimensions, car les équations aux dérivées partielles descriptives de ces systèmes mènent à un nombre considérablement élevé d'équations différentielles après discrétisation, par les techniques des différences ou éléments finis [131].

De ce fait, la simulation de tels modèles (qui consiste en la résolution des équations décrivant le comportement du système en question) en considérant tous les détails, dépend essentiellement de la vitesse d'implémentation des outils de simulation. Par ailleurs, les simulations ne doivent pas remplacer les expérimentations mais les compléter et les accompagner.

3.2.3 Nécessité et utilité de la réduction

La simulation des systèmes de grandes dimensions atteint facilement les limites des outils de simulation conventionnels et il devient indispensable d'en introduire de nouveaux. Dans ce contexte, les techniques de réduction de l'ordre des modèles (ROM) peuvent être considérées comme des outils permettant de générer des descriptions unifiées (par rapport à la présence des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles ou algébriques) et simplifiées de systèmes initialement complexes et d'ordres très élevés.

L'objectif des approches de réduction est de remplacer le modèle original par un autre qui soit d'ordre beaucoup plus inférieur mais très précis, afin de pouvoir le substituer lors des simulations du modèle complexe.

3.3 Exemples de micro systèmes

Afin de valider l'approche de réduction des systèmes proposée au chapitre 2, nous présentons dans ce qui suit des exemples de micro systèmes du domaine de l'ingénierie. Ces modèles serviront à mettre en évidence, notamment les challenges associés à la réduction de l'ordre des modèles non linéaires, essentiellement dus à leur comportement fortement non linéaire.

3.3.1 Circuit de micro lignes de transmission (Micro ruban)

Nous considérons pour les simulations à effectuer afin d'illustrer l'approche des multi linéarisations pondérées, le système de micro lignes de transmission (Micro ruban), voir figure 3.2, dont on considère le circuit équivalent montré par la figure 3.3.

Nous avons choisi cet exemple, particulièrement pour son implémentation facile et qui peut être décrit par le système d'équations (1.3). Aussi, il est caractérisé par de fortes non linéarités, dont la modélisation mène à de grands systèmes. Ce type de système a été largement utilisé par les chercheurs pour valider les différentes approches de réduction élaborées, ce qui fournirait un moyen de comparaison effectif [2, 46, 95].

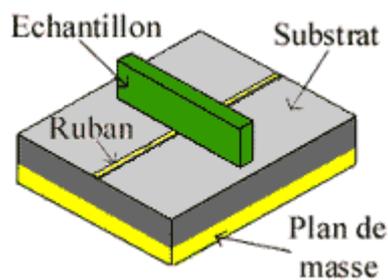


Figure 3.2: Micro ruban (micro lignes de transmission)².

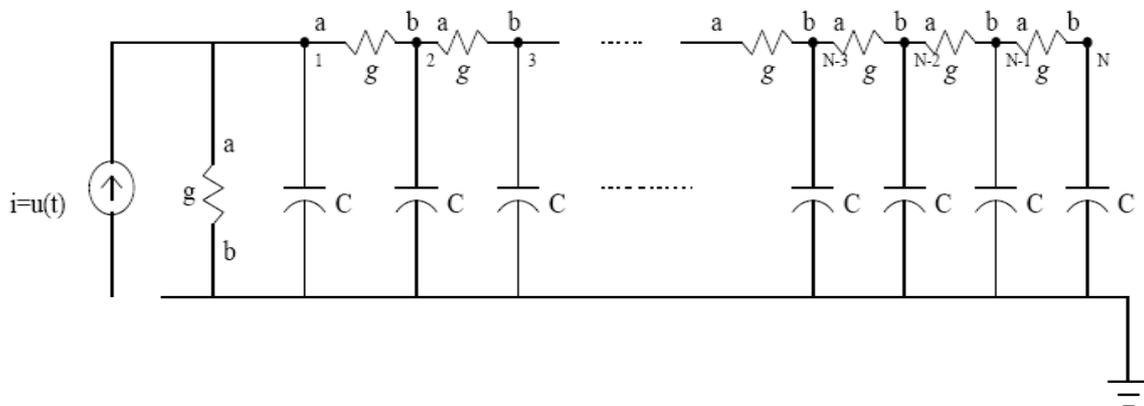


Figure 3.3: Schéma du circuit équivalent du système de micro lignes de transmission [2].

3.3.1.1 Description du système

Le système de micro lignes de transmission décrit par le circuit de la figure 3.3, consiste en une suite consécutive de cellules constituées de différents éléments électroniques. Dans ce type de système, les non linéarités sont introduites par différents éléments tel que les transistors, diodes ou encore des résistances non linéaires.

² http://www.univbrest.fr/lest/caracterisation/pages/pages_francais/stubmicroruban.php

Dans le but de valider la technique de réduction des modèles proposée précédemment, nous avons choisi la structure suivante du circuit équivalent des micros lignes de transmission, représentée par la figure 3.3, où les résistances sont des éléments non linéaires.

Pour des raisons de commodité et de simplicité, on considère que toutes les résistances ont la même impédance, donné par une certaine fonction g , tel que quand la différence de potentiel entre les points a et b (figure 3.3) est v , le courant qui y circule est $i = g(v)$. Il n'y a qu'une seule source de courant $i = u(t)$, qui circule à travers la première cellule. Notre sortie est la tension aux bornes de la cellule 1 où les variables d'état sont les potentiels aux cellules $1, \dots, n$. En représentant le courant en chaque cellule, on peut écrire l'ensemble d'équations suivant [2] :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = c \frac{dv_1}{dt} + g(v_1 - v_2) + g(v_1) \\ g(v_1 - v_2) = c \frac{dv_2}{dt} + g(v_2 - v_3) \\ \vdots \\ g(v_{k-1} - v_k) = c \frac{dv_k}{dt} + g(v_k - v_{k+1}) \\ \vdots \\ g(v_{n-1} - v_n) = c \frac{dv_n}{dt} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Où la fonction de la résistance non linéaire est choisie telle que :

$$g(v) = \exp(40v) + v - 1 \quad (3.2)$$

Dans le cas où, la résistance non linéaire qui opère dans la figure 3.3 consisterait en un diode de fonction $g_d = \exp(40v) - 1$, en parallèle avec une résistance ordinaire de profil $g_r(v) = v$, voir figure 3.4, le circuit complet correspondant est illustré par la figure 3.5



Figure 3.4: Equivalence de la résistance non linéaire [2]

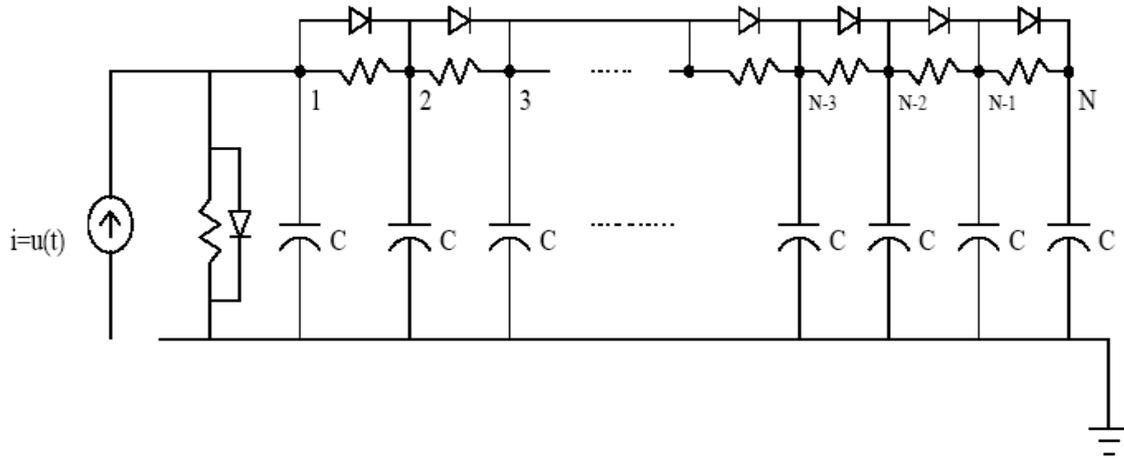


Figure 3.5 : Le circuit non linéaire équivalent [2].

Le système d'équations (3.1) peut être alors arrangé comme suit :

$$c \frac{dv}{dt} = \begin{bmatrix} g(v_1 - v_2) + g(v_1) \\ g(v_1 - v_2) - g(v_2 - v_3) \\ \vdots \\ g(v_{k-1} - v_k) - g(v_k - v_{k+1}) \\ \vdots \\ g(v_{n-1} - v_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.3)$$

Egalement, pour des raisons de simplicité pour l'implémentation, les capacités sont supposées avoir des valeurs unitaires ($c = 1$). Le système d'équations (3.3) devient alors :

$$\frac{dv}{dt} = \begin{bmatrix} g(v_1 - v_2) + g(v_1) \\ g(v_1 - v_2) - g(v_2 - v_3) \\ \vdots \\ g(v_{k-1} - v_k) - g(v_k - v_{k+1}) \\ \vdots \\ g(v_{n-1} - v_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.4)$$

Ce qui correspond en effet à la structure du système décrit par (1.3), avec $g(v) = \exp(40v) + v - 1$, dont la sortie est $y(t) = v_1(t)$ correspondant à $y(t) = x_1(t)$.

3.3.2 Micro interrupteur (Micro switch)

Un autre système qui peut être modélisé par les équations (1.3) d'un système dynamique non linéaire est le micro interrupteur (micro switch) montré par la figure 3.6.

3.3.2.1 Description du système

Le micro interrupteur considéré consiste en une poutre en poly-silicium suspendu à travers un substrat de silicium. La poutre (*beam*) a une longueur $l=610\mu\text{m}$, une largeur $w=40\mu\text{m}$ et une épaisseur (hauteur) $h=2.2\mu\text{m}$, voir la figure 3.7.

Quand une tension est appliquée entre la poutre et le substrat (voir figure 3.6), la poutre fléchit vers le substrat en silicium. Il est à noter que la couche d'air entre la poutre et le substrat joue un important rôle dans le comportement de ce micro dispositif, en tant qu'amortisseur (damper) de la poutre fléchissant [46].

Puisque $l \gg w$, il est supposé que la déflexion de la poutre est uniforme a travers sa largeur. Par conséquent, selon [128], le comportement dynamique du système discuté peut être modélisé par les deux équations suivantes:

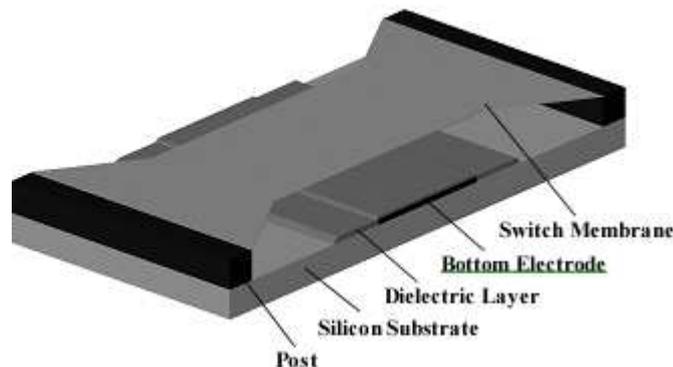


Figure 3.6: Schema d'un MEMS switch [132].

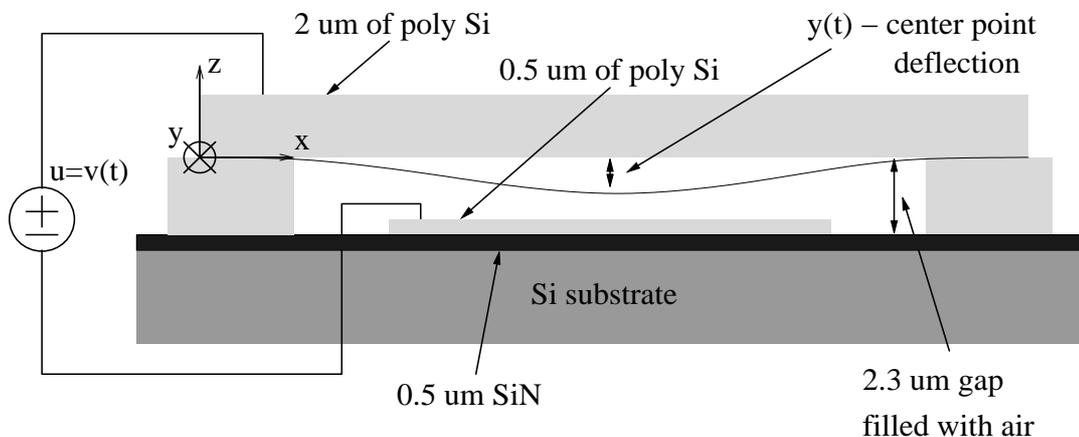


Figure 3.7: Micro interrupteur [46].

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F_{elec} + \int_0^w (P - Pa) dy - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot ((1 + 6K)u^3 P \nabla P) = 12\mu \frac{\partial(Pu)}{\partial t} \quad (3.6)$$

Dont la première d'entre elles est l'équation d'Euler de la poutre et la seconde, l'équation de Reynolds dite '*Squeeze film damping*'. Où les coordonnées x , y et z sont représentés dans la figure 3.7. E est le module de Young, I le moment d'inertie de la poutre, S est le coefficient de stress, ρ la densité, Pa la pression ambiante, μ la viscosité de l'air, K le nombre de Knudsen, u est la longueur de la poutre au dessus du substrat et P est la distribution de pression dans l'air en dessous de la poutre. La force électrostatique est approchée par

$$F_{elec} = -\frac{\epsilon_0 w V^2}{2u^2}, \text{ où } V \text{ est la tension appliquée. Pour l'exemple considéré, l'ensemble suivant}$$

des paramètres a été utilisé (selon [46]) :

$$E = 149 \text{Gpa}, \quad (S/hw) = -3.7 \text{Mpa}, \quad (\rho/hw) = 2330 \text{Kg}/m^3, \quad Pa = 1.013 \cdot 10^5 \text{pa},$$

$$\mu = 1.82 \cdot 10^{-5} \text{Kg}/(m.s), \quad \lambda = 0.064 \mu m.$$

Les conditions initiales suivantes ont été également considérées (pour les équations (3.5) et (3.6)):

$$u(x,0) \equiv u_0 \quad \text{et} \quad P(x,y,0) \equiv Pa$$

Pour tout $x \in [0, l]$ et $y \in [0, w]$, où $u_0 = 2.3 \mu m$ est la longueur du gap entre le substrat et la poutre fléchie.

La représentation d'état suivante a été choisie:

$$x_1 = u, \quad x_2 = \frac{\partial(u^3)}{\partial t}, \quad x_3 = P \quad (3.7)$$

Pour les conditions aux limites suivantes [46]:

$$u(0,t) \equiv u(l,t) \equiv u_0, \quad \frac{\partial P(0,y,t)}{\partial x} \equiv \frac{\partial(l,y,t)}{\partial x} \equiv 0, \quad P(x,0,t) \equiv P(x,w,t) \equiv Pa \quad (3.8)$$

Pour tout $x \in [0, l]$, $y \in [0, w]$ et $t > 0$.

En utilisant les variables d'états précédentes, les équations (3.5) et (3.6) peuvent être réécrites comme suit:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{x_2}{3x_1^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{2x_2^2}{3x_1^3} + \frac{3x_1^2}{\rho} \left[\int_0^w (x_3 - Pa) dy + S \frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 x_1}{\partial x^4} \right] - \frac{3\varepsilon_0 w}{2\rho} v^2 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = -\frac{x_2 x_3}{3x_1^3} + \frac{1}{12\mu x_1} \nabla \left(\left(1 + \frac{6\lambda}{x_1}\right) x_1^3 x_3 \nabla x_3 \right) \quad (3.11)$$

Ces équations peuvent être écrites sous la forme compacte suivante:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = N(x) + B v^2 \quad (3.12)$$

Où N est un opérateur integro-différentiel non linéaire, et B est le vecteur d'entrée constante. Il est à noter que le choix des vecteurs d'état (3.7) est parmi l'un des choix possibles qui mènent à la forme particulière (3.12) est qui correspond à la forme (1.3).

La forme (3.12) est utilisée pour l'approche de réduction proposée. Afin de résoudre le système (3.12), une discrétisation spatiale (sur le domaine de calcul) est utilisée [46].

En appliquant une technique de différences finies standard aux équations (3.9), (3.10) et (3.11), cela mène à un système dynamique non linéaire de grande dimension sous la forme (1.3) d'ordre $n = 2k + km$ (pour la formulation détaillée du système discrétisé, se référer à l'annexe B).

Pour nos simulations, on a pris $k = 4$ et $m = 3$, ce qui mène à un système d'ordre $n = 20$. Pour l'exemple considéré, la sortie est considérée comme étant la hauteur du centre de la poutre fléchie, voir annexe B.

Le problème du micro switch a été choisi pour tester l'approche de réduction de l'ordre des modèles proposée dans ce mémoire notamment à cause de sa structure non linéaire complexe (voir annexe B), ainsi que du nombre relativement élevé d'équations à résoudre (après discrétisation). Par ailleurs, la capacité à modéliser les dynamiques d'un tel système est d'un intérêt particulier pour l'ingénieur, d'autant que la plus part des méthodes de réduction existantes ne fournissent pas une approximation précise du modèle original.

3.4 Simulation, validation et interprétation des résultats

Dans cette partie, nous nous intéressons aux résultats de simulations effectuées sur les modèles de micro systèmes (MEMS) cités ci-dessus via l'approche TPWL de réduction de

l'ordre des modèles développée au chapitre 2.

Rappelons que le modèle réduit TPWL consiste en un ensemble pondéré de modèles linéaires au tour de différents points de linéarisation, choisis adéquatement le long de la trajectoire de formation du système original. L'objectif étant de vérifier si, en effet cette approche génère des modèles d'ordres réduits efficaces.

Les résultats des simulations présentées, mettent en évidence également certaines des difficultés liées à la réduction des systèmes non linéaires, comme la représentation des non linéarités et les insuffisances associées aux approches de réduction basées sur de simples modèles linéaires au tour d'un seul point.

a- Sélection des points de linéarisation

Pour construire un modèle TPWL réduit, il est important de choisir des points de linéarisation au tour des quels seront construits les modèles linéaires. Pour cela, nous avons utilisé l'algorithme cité en §2.2.2, dont le principe peut être résumé comme suit: A partir d'un système original (non linéaire), on effectue une linéarisation à l'origine. On simule simultanément la trajectoire du système non linéaire et celle du modèle linéarisé. Delà, au point où les deux trajectoires commencent à diverger, on construit un autre modèle linéaire

(au tour de ce point), ce qui est évalué au moyen de la quantité $\frac{\|x - x_j\|}{\|x_j\|} < \delta$, voir l'illustration par la figure 3.8.

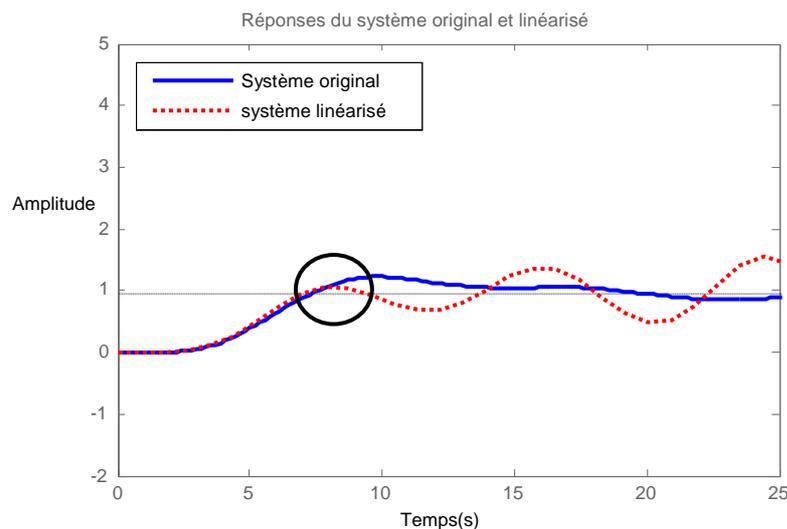


Figure 3. 8: Schéma du principe de sélection des points de linéarisation.

b- Construction d'une distribution de poids

Une fois les points de linéarisation sélectionnés, il est nécessaire de construire une distribution de poids pour effectuer la pondération des modèles linéaires et d'en assurer la convexité de l'ensemble. Pour cela, la procédure présentée en §2.2.1. est utilisée.

c- Construction des bases de réduction

La réduction par la TPWL consiste à utiliser les approches développées dans le cas linéaire. Comme cela été mentionné au par avant, nous avons opté pour la méthode des sous espaces de Krylov via l'algorithme d'Arnoldi unilatéral. Au chapitre 2, différents algorithmes permettant de construire des bases de réduction ont été présentés, et que nous allons utiliser dans ce qui suit.

3.5 Extraction de modèles d'ordre réduit via la TPWL

Pour mettre en évidence les performances de la TPWL, nous considérons le modèle du système représenté par la figure 3.5, d'ordre $n = 50$, pour le quel on génère un modèle réduit TPWL d'ordre $q = 8$, en utilisant une entrée de formation échelon unitaire retardé de deux unités de temps $i(t) = u(t - 2)$. Nous considérons à cet effet, 4 points de linéarisations, le modèle réduit est de ce fait, constitué de 4 modèles linéaires (en incluant celui développé à l'origine). Nous examinons la tension aux bornes de la première cellule, qui est la sortie du système considéré. Pour toutes les simulations effectuées dans ce qui suit, nous avons utilisé la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 [126]. Le modèle d'ordre réduit est testé pour différentes entrées y compris l'entrée échelon avec la quelle il a été généré (l'entrée de formation).

L'entrée échelon est l'une des sources les plus couramment utilisée pour ce type de simulation, pour étudier le comportement et performances des systèmes original et approché. Son principal avantage, entre autre, est qu'elle permet de juger de la précision avec la quelle un modèle d'approximation approche le modèle original.

Les résultats de simulations obtenus montrent que le modèle réduit par la technique TPWL (généré par une entrée de formation échelon) en réponse à un échelon, approche avec précision le modèle original non linéaire que le modèle réduit linéaire, obtenu par réduction

du modèle linéaire à l'origine avec les techniques des sous espaces de Krylov (processus itératif d'Arnoldi).

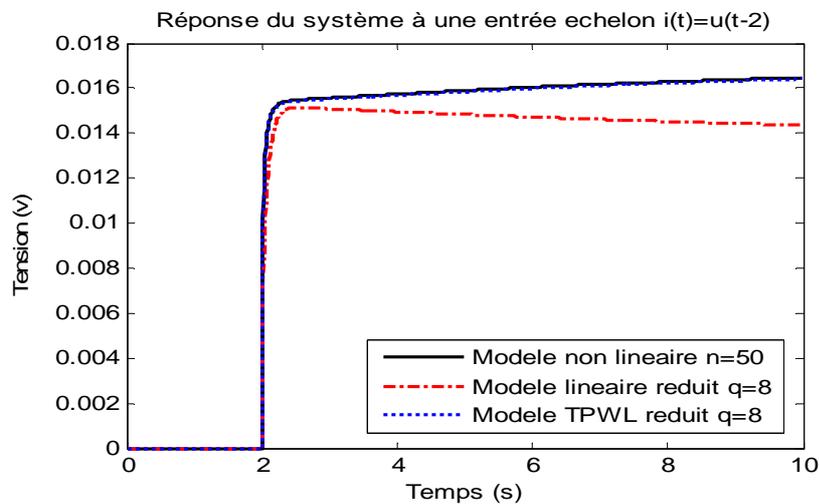


Figure3.9 : Comparaison des sorties du système non linéaire, du modèle linéaire réduit et du modèle TPWL d'ordre réduit $q = 8$, en réponse à un échelon $i(t) = u(t - 2)$.

De même, les figures 3.10 et 3.11, montrent les résultats de simulation du modèle d'ordre réduit obtenu, en réponse à une entrée sinusoïdale et une entrée exponentielle, respectivement.

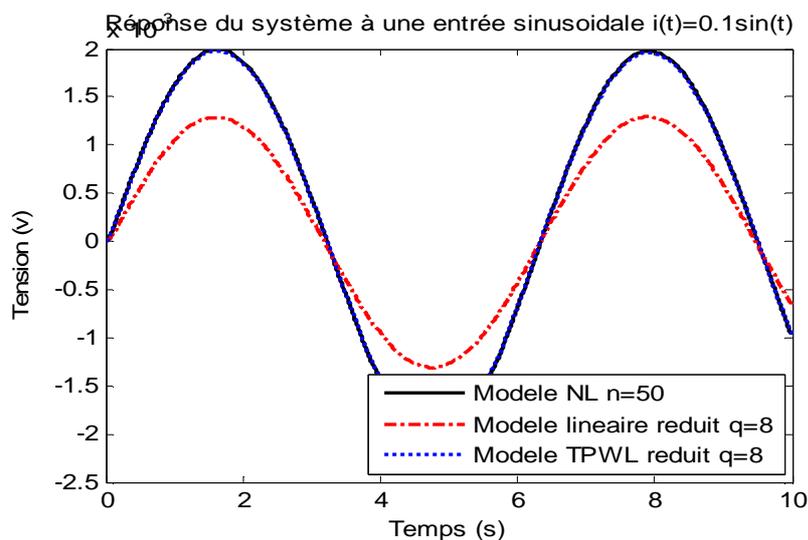


Figure3.10 : Comparaison des sorties du système non linéaire, du modèle linéaire réduit et du modèle TPWL d'ordre réduit $q = 8$, en réponse à un échelon $i(t) = 0.1\sin(t)$.

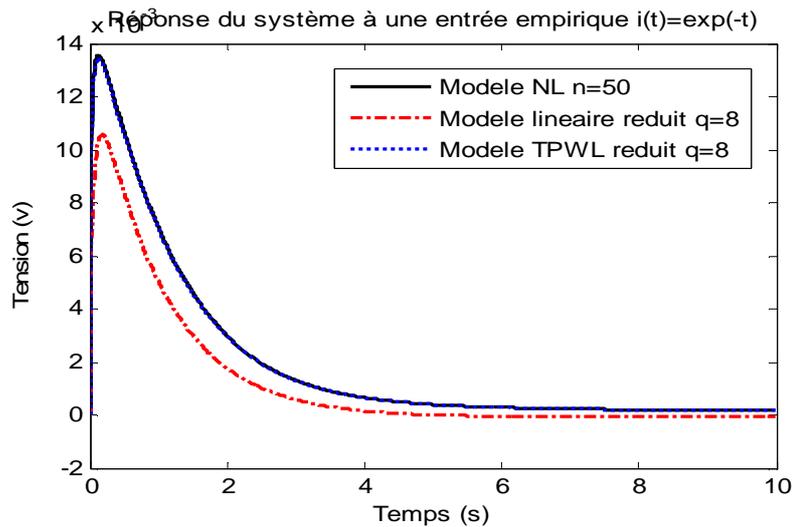


Figure 3.11 : Comparaison des sorties du système non linéaire, du modèle linéaire réduit et du modèle TPWL d'ordre réduit $q = 8$, en réponse à une source empirique $i(t) = \exp(-t)$.

Dans les deux cas, les tensions de sortie obtenues avec le modèle TPWL approchent avec précision la tension de référence (tension du système original).

Ces figures permettent également d'établir une comparaison entre le modèle réduit par l'approche proposée avec le modèle réduit linéaire. On observe que, le modèle réduit TPWL aboutit à des résultats significativement plus précis que le modèle linéarisé réduit (en réponse à l'entrée sinusoïdale comme à l'entrée exponentielle), et cela, même si les modèles sont réduits au même ordre $q = 8$. Cela est dû, à la nature de la représentation des non linéarités du système, qui sont beaucoup mieux approchées par l'approche proposée, contrairement à une approximation locale qui ne tient pas compte des dynamiques en d'autres points.

Ces résultats nous renseignent aussi sur la robustesse des modèles réduits TPWL, qui approchent de façon adéquate le système original, et cela même pour des entrées très différentes de l'entrée avec laquelle ils ont été générés, à savoir dans ce cas, une entrée de formation échelon.

Afin de mettre en évidence les performances de la technique de réduction proposée, nous discuterons dans ce qui vient de l'efficacité des modèles réduits TPWL extraits. Nous comparerons aussi la précision de ces modèles réduits, construits avec différentes bases de réduction générées avec les algorithmes présentés en §2.2.3.1 et §2.2.3.2.

3.5.1 Comparaison de modèles réduits via différentes approches de réduction

Nous considérons, afin d'effectuer une comparaison, le même système que précédemment ($n = 50$). Nous générons à cet effet des modèles réduits via la TPWL et l'approche TBR (réalisation équilibrée tronquée) ainsi que le modèle linéaire réduit par le processus itératif d'Arnoldi à l'origine, réduits à $q = 8$ et $s = 4$ (s étant le nombre de points de linéarisation). Les résultats de simulation obtenus en réponse à un échelon sont représentés par la figure 3.12. Les résultats montrent que pour le même ordre de réduction, $q = 8$, le modèle réduit généré par l'approche TPWL offre plus de précision comparé aux modèles réduits linéaires générés par la TBR ou encore par l'algorithme d'Arnoldi (réduits à l'origine). Ceci est essentiellement dû au caractère global et local de l'approximation TPWL grâce aux multiples linéarisations en différents points choisis de façon appropriée le long de la trajectoire de formation du système original. En effet, d'une part, au tour de chaque point de linéarisation, l'aspect local de la représentation est souligné, et d'autre part, la multitude de modèles (linéaires) constitue l'aspect global.

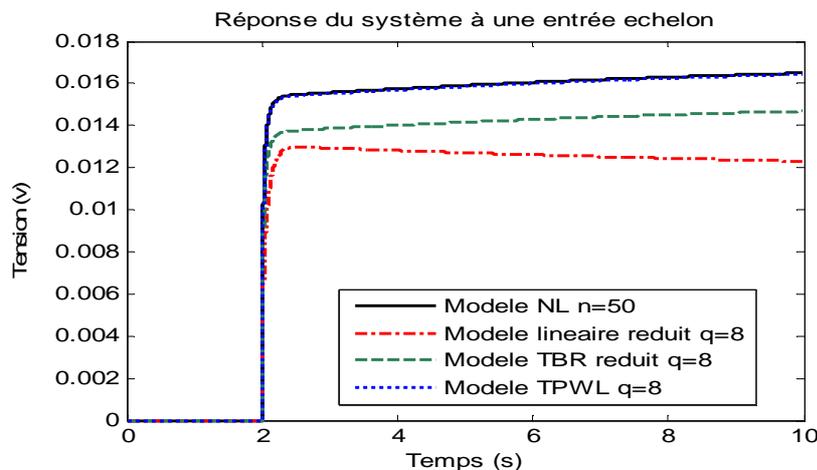


Figure 3.12 : Comparaison des sorties du système non linéaire, avec les sorties des modèles linéaire réduit (par l'algorithme d'Arnoldi), du modèle linéaire réduit par TBR et du modèle TPWL d'ordre réduit $q = 8$, en réponse à une entrée échelon $i(t) = u(t - 2)$.

Ce qui permet d'obtenir une approximation plus adéquate et plus vigoureuse du système non linéaire (fortement) et par conséquent un meilleur modèle réduit, plus précis et plus efficace. Ce qui est illustré par les courbes d'erreurs entre le modèle original et chacun des modèles réduits, voir figure 3.13 suivante.

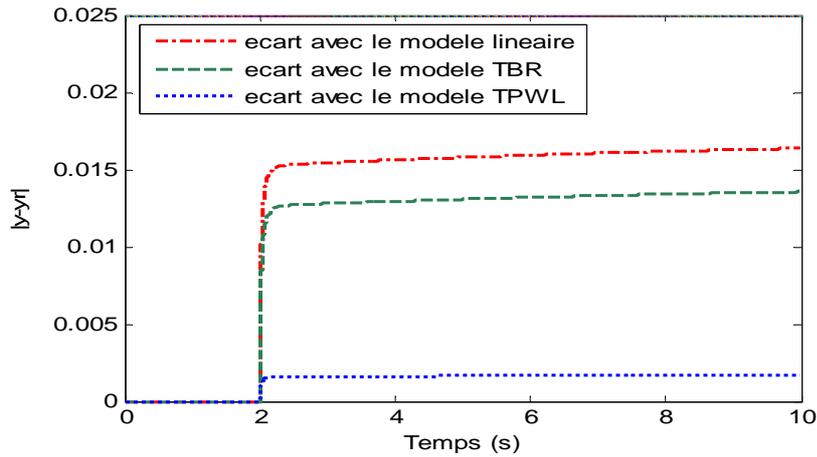


Figure 3.13 : Comparaison des erreurs $|y - y_r|$ entre la sortie du modèle non linéaire, avec les sorties des modèles linéaire réduit (par l'algorithme d'Arnoldi), du modèle linéaire réduit par TBR et du modèle TPWL d'ordre réduit $q = 8$, en réponse à une entrée échelon $i(t) = u(t - 2)$.

L'un des objectifs des approches de la réduction, autre que l'obtention de représentations simplifiées de modèles initialement complexes, est la réduction du temps de simulation. Nous avons réalisé pour cela des tests de simulation sur le même circuit de micro lignes de transmission, dans le but d'évaluer le temps nécessaire à l'extraction du modèle réduit ainsi que pour sa simulation. Nous avons effectué à cet effet, une comparaison entre un modèle réduit par la TPWL et un modèle linéaire réduit par l'approche des sous espaces de Krylov via l'algorithme d'Arnoldi. La table 3.1 montre une comparaison entre les temps d'exécution pour l'extraction des deux modèles réduits considérés.

Modèle	Temps d'extraction [s]	Temps de simulation [s]
Linéaire	13.02	01.983
TPWL	130.31	11.83

Table 3.1: Comparaison des temps de simulation entre le modèle non linéaire original du système de micro lignes de transmission et les modèles linéaires et TPWL réduits à $q = 8$.

Il est à noter que, tous les algorithmes d'extraction et de simulation ont été implémentés sous Matlab 7.0 avec une machine Pentium 4, sous Windows XP.

A partir de la table nous remarquons que, l'extraction du modèle réduit TPWL est plus coûteuse que la simulation du modèle linéaire réduit. Ceci est dû au fait que la construction du modèle TPWL nécessite le calcul d'une combinaison pondérée des Jacobéennes en chaque temps ainsi que les différentes bases de réduction correspondant à chaque modèle linéaire en chaque point. Néanmoins, le modèle issu de l'approche des multi linéarisations pondérées est beaucoup plus précis (voir figure 3.9), comme le montre les résultats des simulations obtenus ci-dessus. Par ailleurs, il est à noter également que, le temps de simulation est beaucoup moins lent que le temps de simulation correspondant au système non linéaire original, qui est de 192,05 s.

3.5.2 Comparaison des performances des algorithmes de génération des bases de réductions et modèles réduits associés

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de comparaison de deux algorithmes pour la génération des bases de réduction. L'un étant simple, présenté en §2.2.3.1, qui considère une base de réduction correspondant au modèle linéaire à l'origine par le processus itératif d'Arnoldi, et l'autre, considère une agrégation des différentes bases de réduction correspondant à chacun des modèles linéaires au tour des différents points de linéarisation. La figure 3.11 montre la sortie du système réduit en utilisant les deux différents algorithmes.

Les deux modèles réduits sont générés par une entrée de formation échelon avec 4 points de linéarisation. Pour l'algorithme simple, l'ordre de réduction est $q=13$, pour l'algorithme amélioré (§2.2.3.2), une base de réduction d'ordre 8 est construite en chaque point, correspondant à chaque modèle. La dimension de la base de réduction (d'agrégation) V_{agg} est de $q=8$ (en utilisant un algorithme de la SVD [28, 68]). Nous observons que le modèle réduit d'ordre 8 généré avec V_{agg} (algorithme amélioré) donne des résultats significativement plus précis que le modèle TPWL extrait avec la base simple. En effet, puisque nous construisons plusieurs bases de réduction, en réduisant chaque modèle linéaire avec la base d'agrégation (après réduction) les parties essentielles de chacun d'eux sont préservées, car le principe des moments adaptatifs est répété par chaque base et par conséquent, il y a plus de moments qui correspondent avec le modèle réduit par la base d'agrégation. Notons que, l'ordre de la base de réduction V_{agg} peut être choisi petit, puisqu'on génère des bases en chaque point de linéarisation.

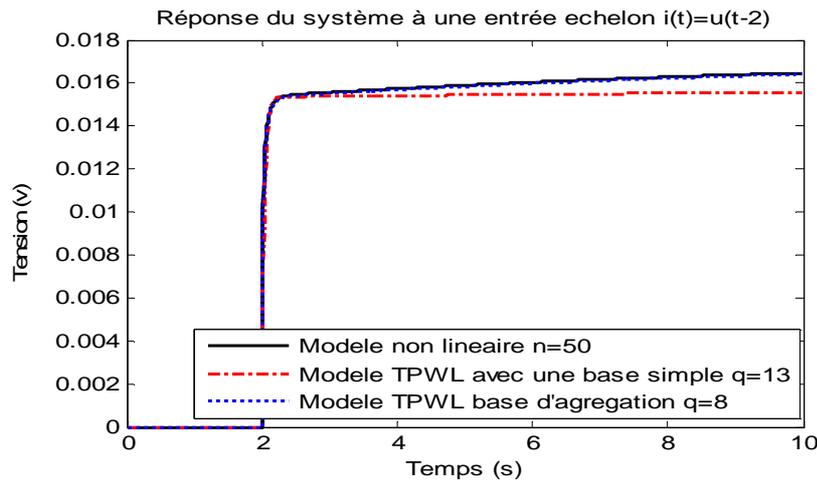


Figure 3.14: Comparaison de la sortie du système non linéaire d'ordre $n = 50$, avec les sorties des modèles réduits TPWL générés avec deux bases différentes, la base d'agrégation (utilisée précédemment) et la base construite à l'origine.

Par ailleurs, pour obtenir la même précision avec le modèle généré par l'algorithme simple, l'ordre de réduction doit être augmenté.

3.5.3 Erreur entre les modèles réduits par les différentes bases de réduction et le modèle original

Afin de mieux comparer la précision relative des modèles TPWL construits avec les algorithmes simple (§2.2.3.1) et amélioré (§2.2.3.2), nous examinons l'erreur $\|y - y_r\|_2$ entre le modèle non linéaire original et les modèles réduits en utilisant les deux algorithmes pour la construction des bases, où y est la sortie de référence (du modèle original) et y_r la sortie du modèle réduit. Les résultats obtenus sont représentés par la figure 3.15.

Nous observons clairement que, l'algorithme amélioré généré avec une base de réduction plus riche mène à un modèle d'ordre réduit plus précis.

Des simulations similaires ont été effectuées dans [46] et [100] sur le même système de lignes de transmission. Pour d'avantage de comparaison de l'exactitude relative des modèles TPWL extraits avec des bases simples et améliorées (correspondant aux algorithmes), l'erreur entre ces modèles réduits et le modèle original est examinée pour différents ordres de réduction. Les résultats obtenus indiquent qu'en effet, les bases de réduction construites par l'algorithme amélioré donnent des modèles réduits TPWL plus précis (pour plus de détails se référer à [46]).

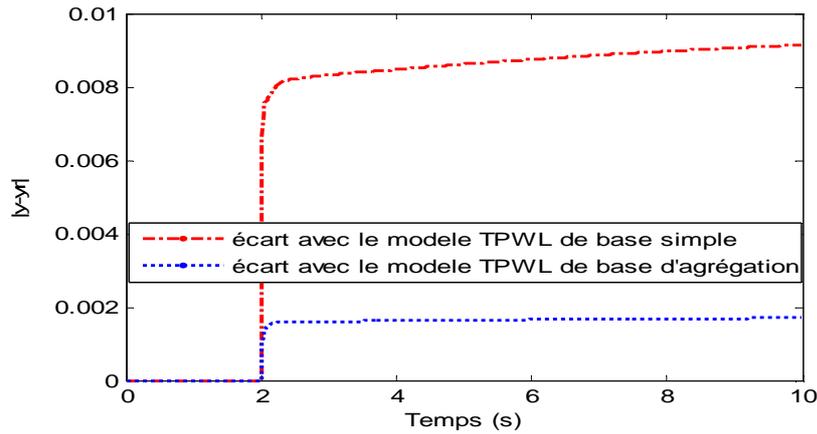


Figure 3.15 : Comparaison des erreurs $|y - y_r|$ entre la sortie du modèle non linéaire, avec les sorties des modèles TPWL réduits avec une base à l'origine d'ordre $q = 13$, et le modèle TPWL réduit avec une base d'agrégation d'ordre $q = 8$, en réponse à une entrée échelon $i(t) = u(t - 2)$.

3.5.4 Comparaison des modèles réduits obtenus avec la base d'agrégation et la pondération de l'ensemble des modèles linéaires réduits

Afin de fournir d'avantage de validation, nous proposons d'effectuer des tests de comparaison entre le modèle réduit obtenu par l'agrégation de bases de projection et le modèle de pondération des différents modèles linéaires réduits chacun par une base lui correspondant, proposée en §2.2.3.3.

Pour cela, nous choisissons les mêmes paramètres de simulation à savoir $n = 50$, $s = 4$ et l'ordre de réduction est $q = 8$ pour le modèle réduit obtenu via la base d'agrégation. Chacun des modèles linéaires est réduit par une base d'ordre $q = 5$. Les résultats obtenus sont représentés par la figure 3.16.

En effet, nous observons que le modèle réduit obtenu par réduction de chacun des modèles linéaires par une base de projection lui correspondant est aussi efficace bien que l'ordre de réduction soit inférieur comparé à la procédure de réduction par une agrégation de bases, ce que confirme les courbes d'erreur de la figure 3.17 qui suit.

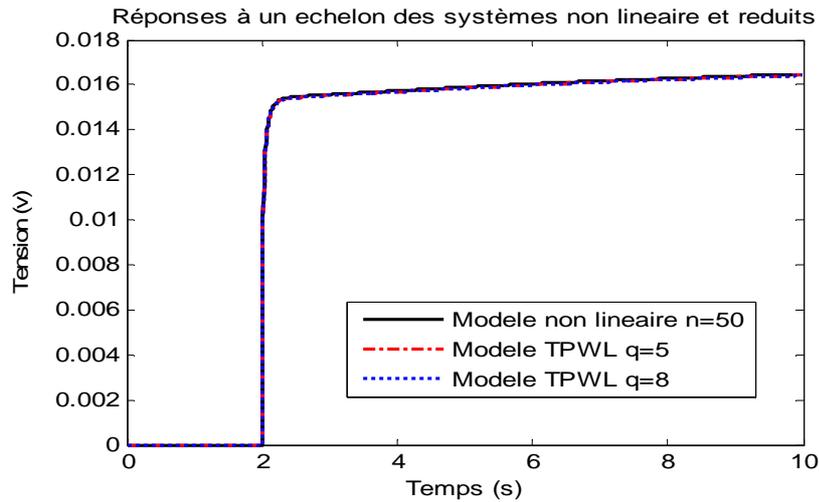


Figure 3.16: Comparaison des réponses du système non linéaire et celles des modèles réduits TPWL d'ordre $q = 8$ et du modèle TPWL réduit d'ordre $q = 5$ (dont chaque modèle linéaire est réduit avec une base lui est correspondant).

Cela est dû essentiellement au fait que chacun des modèles linéaires est réduit par une base de réduction lui correspondant, ce qui permet d'extraire les parties les plus importantes de chacun d'eux, à la suite de quoi une pondération est effectuée. Cette façon de procéder donne de meilleurs résultats en qualité de simplicité (ordre de réduction) et de précision.

Par rapport aux temps d'extraction et de simulation comparé à la méthode précédente utilisée au par avant, on obtient les mêmes résultats, puisque on effectue la réduction de la même manière. L'amélioration réside par conséquent dans la simplification du modèle réduit, qui est l'un des objectifs des approches de réduction.

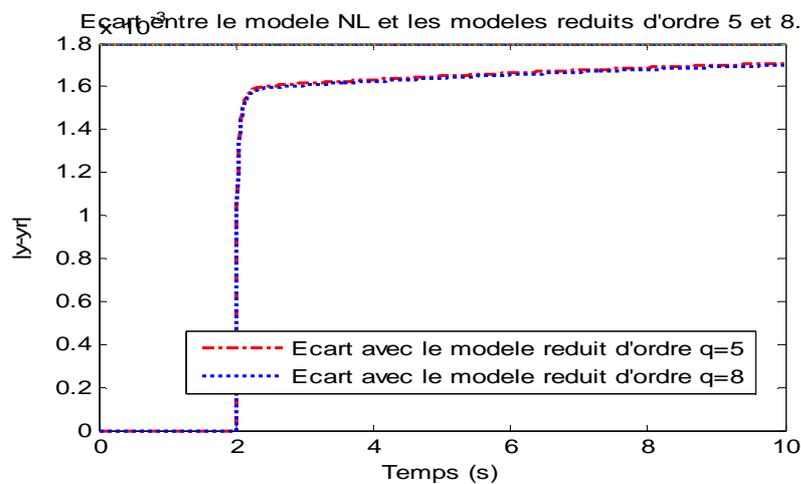


Figure 3.17: Ecarts obtenus entre le modèle original non linéaire et les modèles TPWL d'ordre $q = 8$ et $q = 5$.

3.6 Construction de modèles réduits via la TPWL pour le micro switch

Le modèle du micro switch est beaucoup plus complexe que le modèle du système des micros lignes de transmission (voir annexe B). Néanmoins nous y effectuons quelques simulations, afin de valider l'approche des multi linéarisations pondérées.

Considérons un modèle du micro switch d'ordre $n = 20$ (après discrétisation aux différences finies). Nous sélectionnons également 5 points de linéarisation avec une entrée de formation échelon unitaire. Nous construisons le modèle réduit d'ordre $q = 6$ en utilisant l'algorithme cité en §2.2.3.2. La figure suivante montre les résultats obtenus.

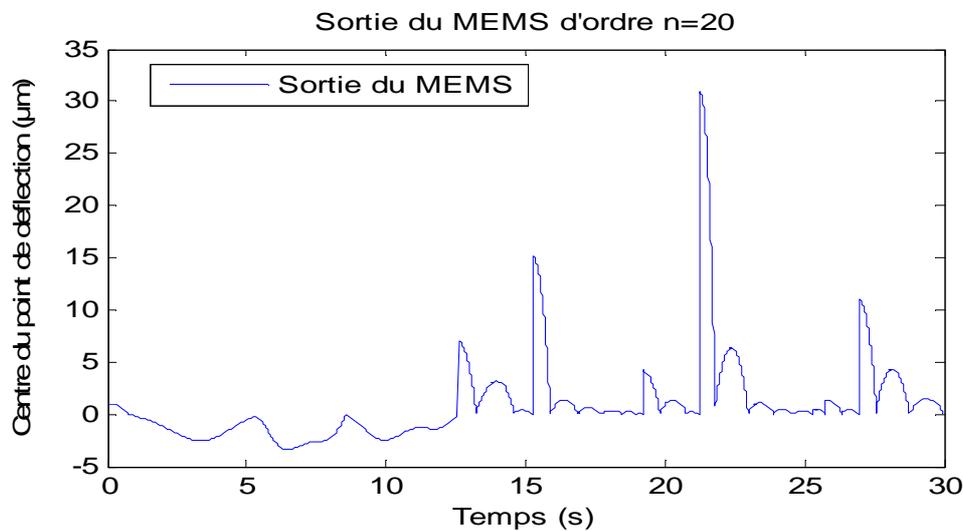


Figure 3.18 : Comportement (sortie considérée) du modèle du MEMS d'ordre $n = 20$

Nous remarquons que le comportement (la sortie considérée) du MEMS est très complexe et qu'il est difficile de représenter un tel comportement en procédant par simple linéarisation au tour d'un seul point (et de réduire ensuite), voir figure 3.18. On note également que l'approche proposée dans ce mémoire atteint son objectif quant à la génération de modèles réduits précis reproduisant avec un minimum d'écart le comportement original, voir figure 3.19-a.

Toutefois, pour plus de précision d'observation, nous avons restreint le domaine temporel à $0 \leq t \leq 10\text{s}$, voir figure 3.19-b.

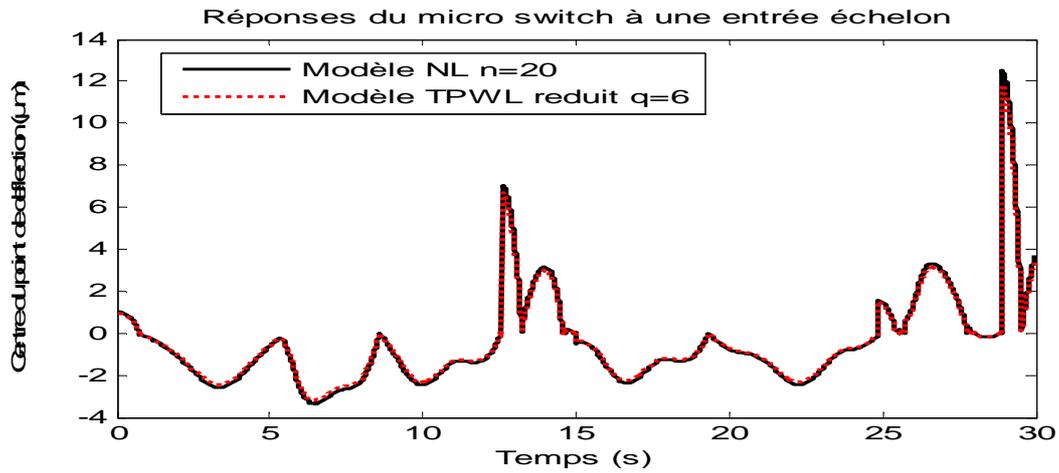


Figure 3.19-a : Comparaison des sorties des modèles original et TPWL d'ordre $q = 6$.

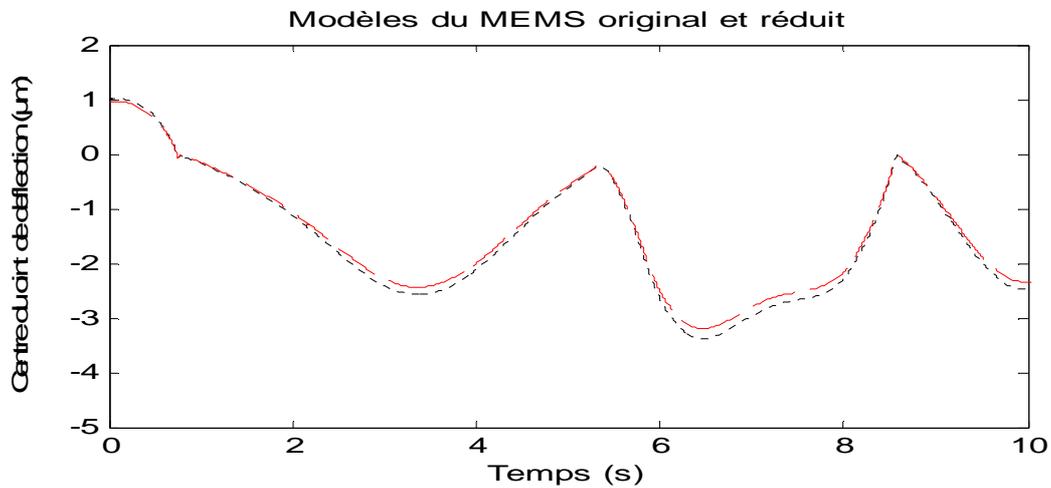


Figure 3.19-b : Comparaison des sorties des modèles original et TPWL d'ordre $q = 6$.

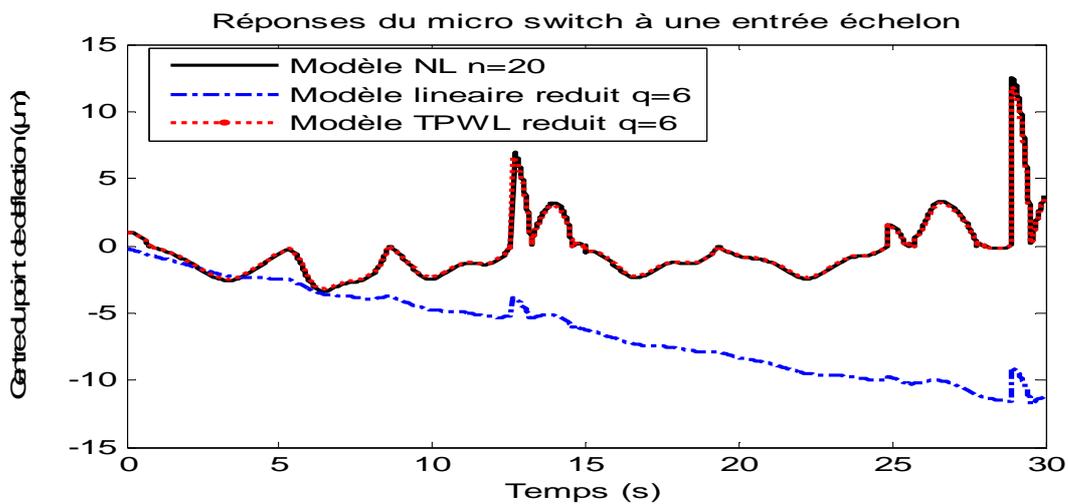


Figure 3.20: Comparaison des sorties du modèle original d'ordre $n = 20$ et des modèles linéaire et TPWL réduits d'ordre $q = 6$.

Nous comparons également les résultats obtenus en utilisant différents algorithmes de construction de bases de réduction (cités au chapitre 2). L'un utilisant une agrégation de bases pour réduire tous les modèles linéaires (§2.2.3.2), et l'autre procédant par réduction de chaque modèle linéaire par la base de réduction lui correspondant avant d'effectuer la pondération (§2.2.3.3).

En utilisant les mêmes paramètres que ci-dessus, à savoir, un modèle non linéaire d'ordre $n = 20$, nous sélectionnons 5 points de linéarisation. On construit deux modèles réduits correspondant aux deux algorithmes de réduction cités. Pour le premier on réduit à l'ordre $q = 6$ pour le second, à l'ordre $q = 5$. La figure suivante montre les résultats obtenus.

Nous remarquons que pour différents ordres de réduction, nous obtenons la même précision. Comme dans le cas du système de micro lignes de transmission, cela est dû au fait que chaque modèle linéaire est réduit avec sa propre base lui correspondant, ce qui assure plus de fidélité de préservation du comportement original. Les courbes d'erreurs confirment cela, et montrent que l'erreur entre les deux modèles réduits et le modèle initial est quasiment la même.

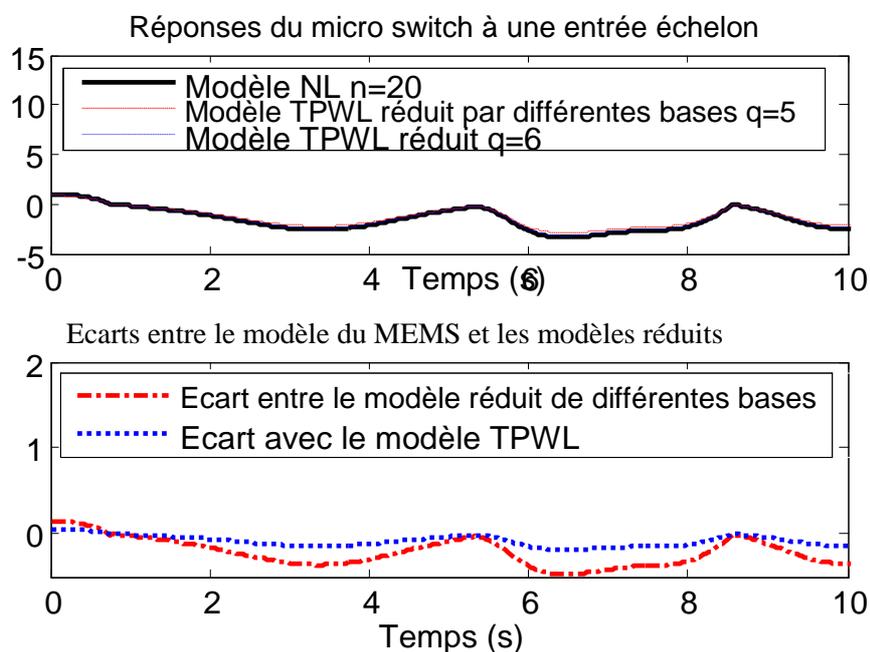


Figure 3.21: Comparaison des sorties du modèle original d'ordre $n = 20$ et des modèles TPWL réduits à l'ordre $q = 5$ et $q = 6$ par différents algorithmes de réduction ainsi que les écarts entre les sorties.

Comme dans le cas du système de micro lignes de transmission, on procède à l'estimation des temps d'extraction et de simulation afin d'évaluer les performances de l'approche des multi linéarisations pondérées sur le système du micro interrupteur. Nous avons évalué pour cela le temps de simulation sur le modèle du micro interrupteur considéré (d'ordre $n = 20$). Nous avons effectué à cet effet, une comparaison entre un modèle réduit par la TPWL et un modèle linéaire réduit par l'approche des sous espaces de Krylov via l'algorithme d'Arnoldi (résultats de la figure 3.20). La table 3.2 montre une comparaison entre les temps d'exécution pour l'extraction des deux modèles réduits considérés.

Modèle	Temps d'extraction [s]	Temps de simulation [s]
Linéaire	07.29	01.32
TPWL	60.62	08.04

Table3.2: Comparaison des temps de simulation entre le modèle non linéaire original du micro switch et les modèles linéaires et TPWL réduits à $q = 8$.

A partir de la table nous remarquons que, le temps d'extraction du modèle réduit TPWL est plus conséquent que celui du linéaire réduit (de même que dans le cas du système de micro lignes de transmission). Ceci est dû au fait que la construction du modèle TPWL nécessite beaucoup de calculs (Jacobienne, différentes bases de réduction...etc.), de plus, le modèle du micro switch est particulièrement complexe, ce qui influence les paramètres du temps de simulation. Toutefois, le modèle issu de l'approche des multi linéarisations pondérées est beaucoup plus précis (voir figure 3.20), comme le montre les résultats des simulations obtenus.

Par ailleurs, il est à noter également que, le temps de simulation est beaucoup moins lent que le temps de simulation correspondant au système non linéaire original, qui est de 113,64 s.

3.7 Analyse de la stabilité et de la passivité des modèles réduits TPWL

Pour finir cette étude des systèmes réduits par l'approche TPWL, nous procédons à l'analyse de la stabilité et de la passivité de ces derniers.

Pour cela, on considère le système de micro lignes de transmission à l'ordre $n = 5$, qu'on réduit à l'ordre $q = 3$ (de même que dans le cas des simulations effectuées ci-dessus) :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \exp(40(x_1 - x_2)) + (x_1 - x_2) - 1 + \exp(40x_1) + x_1 + 1 \\ \exp(40(x_1 - x_2)) + (x_1 - x_2) - 1 - \exp(40(x_2 - x_3)) - (x_2 - x_3) + 1 \\ \exp(40(x_2 - x_3)) + (x_2 - x_3) - 1 - \exp(40(x_3 - x_4)) - (x_3 - x_4) + 1 \\ \exp(40(x_3 - x_4)) + (x_3 - x_4) - 1 - \exp(40(x_4 - x_5)) - (x_4 - x_5) + 1 \\ \exp(40(x_4 - x_5)) + (x_4 - x_5) - 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.13)$$

et $y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]x(t)$.

$$\text{Avec } f(x) = \begin{pmatrix} \exp(40(x_1 - x_2)) + (x_1 - x_2) - 1 + \exp(40x_1) + x_1 + 1 \\ \exp(40(x_1 - x_2)) + (x_1 - x_2) - 1 - \exp(40(x_2 - x_3)) - (x_2 - x_3) + 1 \\ \exp(40(x_2 - x_3)) + (x_2 - x_3) - 1 - \exp(40(x_3 - x_4)) - (x_3 - x_4) + 1 \\ \exp(40(x_3 - x_4)) + (x_3 - x_4) - 1 - \exp(40(x_4 - x_5)) - (x_4 - x_5) + 1 \\ \exp(40(x_4 - x_5)) + (x_4 - x_5) - 1 \end{pmatrix} \text{ et } f(0) = 0.$$

f étant Lipchitzienne et satisfaisant (2.22) (voir annexe A1), le système autonome correspondant à (3.13) possède un point d'équilibre exponentiellement stable à l'origine.

En supposant certaines conditions sur f et que le système possède un point d'équilibre exponentiellement stable à l'origine, en vertu du Théorème 2.1, le système (2.14) est L_p stable.

En utilisant le théorème 2.4, le système considéré est strictement passif en sortie car $C = B = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et (2.22) est satisfaite.

Nous avons $f(0) = 0$, d'où l'origine est un point d'équilibre du système (3.13). Nous avons choisi les points de linéarisation suivants :

$$x^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x^1 = [0.0144 \ 0.0104 \ 0.0111 \ 0.0115 \ 0.0123]^T \quad \text{et} \\ x^2 = [0.0135 \ 0.0126 \ 0.0117 \ 0.0133 \ 0.0127]^T.$$

Les modèles linéaires obtenus sont:

$$f(x^0) + A_0(x - x^0) + Bu(t) = \begin{pmatrix} -82x_1 - 41x_2 \\ 41x_1 - 82x_2 + 41x_3 \\ 41x_2 - 82x_3 + 41x_4 \\ 41x_3 - 82x_4 + 41x_5 \\ 41x_4 - 41x_5 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$f(x^1) + A_1(x - x^1) + Bu(t) = \begin{pmatrix} -0.9708 - 120.09x_1 + 47.94x_2 \\ 0.205 + 47.94x_1 - 87.83x_2 + 39.89x_3 \\ -0.012 + 39.89x_2 - 80.26x_3 + 40.36x_4 \\ 0.016 + 40.36x_3 - 80.105x_4 + 39.74x_5 \\ -0.032 + 39.74x_4 - 39.74x_5 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$f(x^2) + A_2(x - x^2) + Bu(t) = \begin{pmatrix} -0.767 - 112.106x_1 + 42.46x_2 \\ 42.46x_1 - 84.93x_2 + 42.46x_3 \\ 0.101 + 42.46x_2 - 80.98x_3 + 38.52x_4 \\ -0.088 + 38.52x_3 - 80.49x_4 + 41.97x_5 \\ 0.0249 + 41.97x_4 - 41.97x_5 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Les poids utilisés pour la procédure de pondération sont :

$$w_0 = 0.4999, \quad w_1 = 0.4999 \text{ et } w_2 = 1.269 \cdot 10^{-4} \approx 0.000127, \text{ où } w_0 + w_1 + w_2 = 1.$$

La matrice de réduction utilisée est la suivante :

$$V = \begin{bmatrix} 0.447 & 0.738 & 0.476 \\ 0.447 & 0.246 & -0.581 \\ 0.447 & -0.123 & -0.449 \\ 0.447 & -0.369 & 0.0793 \\ 0.447 & -0.492 & 0.476 \end{bmatrix} \text{ calculée à l'origine par l'algorithme d'Arnoldi (§1.5.1). Etant}$$

orthonormée ($V^T V = I$), elle assure de ce fait que tous les points x_i y seront représentés.

En utilisant le théorème 2.3, on étudie la stabilité exponentielle du système TPWL correspondant au système (3.13) considéré.

$f: R^5 \mapsto R^5$ est une fonction Lipschitz et satisfaisant la condition (2.22) pour $\lambda = 10$. Le théorème stipule que pour $w_i(z) = 0 \quad z \in J = \{ R^q \setminus B_{\mathcal{E}_0}(z_0), B_{\mathcal{E}_1}(z_1), B_{\mathcal{E}_2}(z_2) \}$. Dans notre cas, nous avons tous les $w_i(z) \neq 0$. De là, le système TPWL (autonome) possède un point d'équilibre exponentiellement stable à l'origine.

Pour la stabilité Lp , on utilise le corollaire 2.1 qui exploite le théorème 2.3 et le théorème 2.1 liant la stabilité exponentielle et Lp .

Ses hypothèses étant vérifiées (les mêmes que pour le cas de la stabilité exponentielle de l'origine) nous concluons, en vertu de ce corollaire, que le système TPWL correspondant au système (3.13) est Lp stable.

Nous considérons également le même système pour l'analyse de la passivité des systèmes TPWL. En utilisant le théorème 2.4, le système considéré est strictement passif en sortie car :

$C = B^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ et (2.22) est satisfaite. De plus, selon le corollaire 2.2, le système est strictement passif en sortie quand les hypothèses du corollaire 1 sont satisfaites et $C^T = B$, qui est le cas.

D'après les résultats obtenus, le système TPWL du système (3.13) considéré est stable et passif et de ce fait, préserve les propriétés de stabilité et de passivité du système original considéré, ce qui est confirmé (pour la stabilité) par les résultats de simulations effectuées. En effet, nous remarquons que pour une entrée bornée (entrée échelon unitaire) nous obtenons dans tous les cas une sortie bornée, qui est une définition générale de la stabilité L_p , de plus, A_0 est négative définie.

3.8 Discussion: Avantages et inconvénients

La méthode de réduction des systèmes non linéaires présentée dans ce mémoire permet d'obtenir des modèles réduits précis de systèmes initialement complexes et de grandes dimensions, comme nous avons pu le constater par les résultats de simulations effectuées.

Contrairement aux méthodes de réduction existantes, elle convient parfaitement aux systèmes non linéaires, et particulièrement au défi que posent les MEMS quand d'autres échouent (voir chapitre 1). La théorie permettant d'étudier la stabilité et la passivité des systèmes réduits obtenus, initialement développée dans [46], garantit la préservation de caractéristiques essentielles lors de la réduction, qui est l'un de ses objectifs.

La précision des modèles réduits obtenus par cette approche est conditionnée par différents éléments, notamment, le choix des bases de réduction, des points de linéarisation ou encore des poids ou du choix de la trajectoire de formation.

Cependant, même si les résultats obtenus sont concluants, le temps d'élaboration des modèles réduits est relativement élevé, et augmente d'autant que le système est complexe ou d'ordre très élevé. Aussi, les calculs sont assez denses, notamment pour l'étape du choix des

points de linéarisation et les calculs nécessaires à l'analyse de la stabilité (Matrice Hessienne,...etc.).

En somme, l'approche TPWL assure de bonnes performances en précision, fidélité de reproduction du comportement original et préservation de la stabilité et de la passivité. Néanmoins, elle est contrainte par l'élaboration lente des modèles réduits et les calculs denses.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté dans un premier temps, une brève introduction à la micro technologie ainsi que les avantages, inconvénients et enjeux technologiques qui y sont liés. Les MEMS et microsystèmes sont en général un cas de systèmes complexes dont les modèles représentatifs sont de grandes dimensions. De ce fait, dans un second temps, nous avons choisi d'effectuer des tests de simulation, afin de valider l'approche de réduction des multi linéarisations pondérées proposée au chapitre 2, sur les modèles de MEMS (micro ruban et micro switch).

Les résultats obtenus sont assez concluants, et valident bien la théorie présentée au chapitre2.

Conclusion générale et perspectives

Les systèmes non linéaires décrivent mathématiquement une large et importante classe de dispositifs et de phénomènes dans toutes les branches de l'ingénierie. Aussi, dans ce mémoire nous avons étudié le problème de construction de modèles d'ordre réduit pour des systèmes dynamiques non linéaires de grandes dimensions.

La principale motivation de ce choix, est le manque de méthodes de réduction de l'ordre des modèles (ROM) qui approchent adéquatement ce type de systèmes fortement non linéaires. En effet, la majorité des techniques de ROM sont basées sur les développements polynomiaux au tour d'un seul point (état) du système donné, et de ce fait ne peuvent être appliquées qu'à des systèmes faiblement non linéaires. Cela, malencontreusement, limite considérablement l'objectif de l'application de ces méthodes. Egalement, la plus part des stratégies de réduction existantes, négligent le souci de coût et de complexité des calculs associés à l'extraction de modèles d'ordre réduit. Car, contrairement au cas linéaire, la réduction d'un système non linéaire n'implique pas toujours une réduction des coûts numériques associés à la résolution et l'évaluation de ce dernier. Aussi pour finir, certaines des méthodes de ROM sont caractérisées par un coût d'extraction élevé du modèle réduit, ce qui les élimine d'emblée d'être utilisées pour des systèmes dynamiques de grande dimension.

Afin de pouvoir prendre en considération les effets fortement non linéaires dans le modèle réduit, l'idée des multiples linéarisations nous a mené à proposer une stratégie de réduction pour des systèmes dynamiques non linéaires, dont le principe est de considérer une combinaison pondérée de modèles linéaires construits au tour de points sélectionnés le long de la trajectoire d'état du système non linéaire original, à savoir l'approche des multi-linearisations pondérées connue sous l'appellation '*Trajectory Piece-Wise Linear*' (TPWL), et qui a pour objectif de :

- Proposer une approximation simple capable d'englober toutes les non linéarités du système en utilisant une combinaison pondérée d'un ensemble petit de modèles linéarisés.
- Développer des procédures pour générer des bases de projection d'ordre réduit, exploitant les approches des sous espaces de Krylov.
- Elaborer des algorithmes pour la sélection des points de linéarisation (au tour des quels sont construits les modèles linéaires) et des poids nécessaires à la pondération.

Les propriétés de l'approche TPWL proposée ainsi que son applicabilité ont été discutées au chapitre 2. Aussi, des tests numériques ont été effectués afin de valider l'approche développée pour extraire des modèles réduits, pour un exemple de système composé d'éléments fortement non linéaires et qui était au par avant considéré comme un challenge pour les approches de réduction existantes. Les exemples consistent en un système de micro lignes de transmission (*microstrip*) dont on considère le circuit équivalent et un micro interrupteur (micro switch). Ce type de systèmes a largement été utilisé par les chercheurs pour tester les différentes méthodes de ROM.

En effet, comme cela été rapporté au chapitre 1, les modèles réduits générés par les méthodes existantes, sont incapables de capturer les effets fortement non linéaires de tels systèmes. Les tests numériques présentés au chapitre 3, montrent que l'approche TPWL améliore les résultats obtenus par rapport aux algorithmes de réduction basés sur les développements polynomiaux au tour d'un seul point. En effet, les modèles d'ordre réduit issus des algorithmes TPWL sont caractérisés par de bonnes performances ainsi qu'une complexité de calculs inférieure, comparés au modèle original de grande dimension.

Un autre aspect de la ROM qui est également important, tout particulièrement si le modèle réduit est utilisé pour remplacer un sous système (dans des réseaux de systèmes), est la propriété de préservation de la stabilité et de la passivité. Au chapitre 2, nous avons discuté de cette propriété, en se focalisant sur de simples conditions qui garantissent la stabilité et passivité des modèles réduits TPWL.

Afin de garantir également une correspondance entre le modèle réduit et le système original correspondant et d'en juger la qualité d'approximation, nous avons abordé le problème d'estimation de l'erreur à posteriori. Pour cela, une procédure de calcul de bornes d'erreur a été présentée.

En résumé, les résultats de simulation indiquent que, utiliser un modèle d'ordre réduit TPWL réduit le temps de calcul et de simulation, et ne nécessite pas autant de ressources de calculs que le système original. Cela confirme que la stratégie des multi-linearisations pondérées atteint l'objectif de la réduction des systèmes. Néanmoins, cette approche est assez couteuse (en temps et calculs) comparée aux autres méthodes de réduction

Par ailleurs, il est à noter que, durant les simulations d'extraction de modèles réduits avec la TPWL pour l'exemple d'application donné, la simulation du système original entier

afin d'obtenir la trajectoire de formation pose problème, et cela, même si une simulation approchée peut être utilisée. La préservation des propriétés de stabilité et de passivité dans le cas où les conditions de définition négative et de monotonie négative ne sont pas vérifiées, pose également problème, et il faudrait d'éventuelles suggestions qui peuvent faire l'objet de nouvelles investigations, voir même de nouvelles extensions de la TPWL telles que :

- Génération de modèles en utilisant de multiples trajectoires de formation
- Optimisation du choix des points de linéarisation
- Généralisation de l'approche TPWL aux systèmes du second ordre

Ce qui promet d'avantage de développement d'algorithmes de réduction basés sur le concept des multi linéarisations pondérées pour l'approximation simplifiée et précise des systèmes dynamiques non linéaires de grandes dimensions.

Annexes

*Références
Bibliographiques*

- [91] R. Amirifar, and N. Sadati, '*A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Controller Order Reduction with Stability and Performance preservation,*' Electrical Engineering Department, Sharif Univ. of Technology, 2001.
- [92] Z. Bai and R. Freund, '*A partial Padé-via-Lanczos method for reduced-order modelling,*' Numerical Analysis Manuscript, no. 99.3.20, 1999.
- [93] K. Gallivan, E. Grimme, D. Sorensen and P. Van Dooren, '*On some modifications of the Lanczos Algorithm and the relation with Padé approximation,*' 1995.
- [94] O. Nilsson, '*Modelling and Model Reduction in Automotive Systems,*' Automatic Control Licentiate Thesis, Lund University, Sweden, 2006.
- [95] M. Rewiensky and J. white, '*Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations,*' Linear Algebra and its Applications, 2004.
- [96] J. Chen, S. M. Kang, J. Zou, C. Liu, and J. E. Schutt-Ainé, '*Reduced-Order Modelling of Weakly Nonlinear MEMS Devices with Taylor-Series Expansion and Arnoldi Approach,*' Journal of Micromechanical Systems, Vol. 13, no. 3, June 2004.
- [97] M. Bettayeb and S. Djennoune, '*Approximation and balanced reduction of nonlinear systems by bilinear models,*' Int. J. Modelling, Identification and Control, Vol. 2, no. 1, 2007.
- [98] Z. Bai, D. Skoogh, '*A projection method for model reduction of bilinear dynamical systems,*' Linear Algebra and its Applications 415, 406–425, 2006.
- [99] J. R. Phillips, '*Projection frameworks for model reduction of weakly nonlinear systems,*' in Proceedings of the 37th Design Automation Conference, pp. 184-9, 2000.
- [100] M. Rewiensky and J. white, '*A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction and Fast Simulation of Nonlinear Circuits and Micro machined Devices,*' IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 22, no. 2, 2003.
- [101] N. Dong and J. Roychowdhury, '*Piecewise Polynomial Nonlinear Model Reduction,*' DAC, Anaheim, California, USA, 2003.
- [102] H. Aling, R. L. Kosut, A. Emami-Naeini, J. L. Ebert, '*Nonlinear Model Reduction with Application to Rapid Thermal Processing,*' in Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 4, pp. 4305-10, 1996.
- [103] B. Bond and L. Daniel, '*Parameterized Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems,*' Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [104] M. Meyer, H. G. Matthies, '*Efficient Model Reduction in Non-linear Dynamics Using the Karhunen-Loeve Expansion and Dual-Weighted-Residual Methods,*' Contributed to a Special Issue of Computational Mechanics, 2002.

References Bibliographiques

- [1] Y. Chen, J. White, 'A Quadratic Method for Nonlinear Model Order Reduction,' in Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation of Microsystems, 2000, pp. 477-80.
- [2] Y. Chen, 'Model Order Reduction for Nonlinear Systems,' M.S. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1999.
- [3] M. Chou, J. White, 'Efficient Reduced-Order Modelling for the Transient Simulation of Three-dimensional Interconnect,' in Proceedings of the 1995 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design, 1995, pp. 40-4.
- [4] M. Kamon, N. A. Marques, L. M. Silveira, J. White, 'Automatic Generation of Accurate Circuit Models of 3-D Interconnect,' IEEE Transactions on Components Packaging, and Manufacturing Technology – Part B, vol. 21, no. 3, pp. 225-40, 1998.
- [5] J. R. Phillips, 'Projection-Based Approaches for Model Reduction of Weakly Nonlinear, Time-Varying Systems,' IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 22, no. 2, pp. 171-87, 2003.
- [6] L. Daniel, J. Phillips, 'Model Order Reduction for Strictly Passive and Causal Distributed Systems,' in Proceedings of the Design Automation Conference, pp. 46 -51, 2002.
- [7] J. Phillips, L. Daniel, L. M. Silveira, 'Guaranteed passive balancing transformations for model order reduction,' in Proceedings of the 39th Design Automation Conference, pp. 52-7, 2002.
- [8] P. Rabiei, M. Pedram, 'Model order reduction of large circuits using balanced truncation,' in Proceedings of the ASP-DAC Design Automation Conference, vol. 1, pp. 237-40, 1999.
- [9] T. Bechtold, A. Verhoeven, E. J. W. Ter Maten and T. Voss, 'Model Order Reduction: An Advanced, Efficient and Automated Computational Tool for Microsystems,' WSPC-Proceedings, 2007.
- [10] J. Chen, S-M. Kang, 'An algorithm for automatic model-order reduction of nonlinear MEMS devices,' in Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, vol. 2, pp. 445-8, 2000.
- [11] M. Innocent, P. Wambacq, S. Donnay, H. A. C. Tilmans, W. Sansen and H. De Man, 'An Analytic Volterra-Series-Based Model for a MEMS Variable Capacitor,' IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 22, no. 1, pp. 124-31, 2003.
- [12] Y. C. Liang, W. Z. Lin, H. P. Lee, S. P. Lim, K. H. Lee, D. P. Feng, 'A neural-network-based method of model reduction for the dynamic simulation of MEMS,' Journal of Micromechanics and Micro engineering, vol. 11, pp. 226-33, 2001.
- [13] T. Mukherjee, G. K. Fedder, D. Ramaswamy, J. White, 'Emerging Simulation Approaches for Micro-machined Devices,' IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, vol. 19, no. 12, pp. 1572-89, 2000.

- [14] D. Ramaswamy, '*Automatic Generation of Macromodels for Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS)*,' Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2001.
- [94] P. Benner, '*Model Reduction at ICIAM '07*,' From SIAM News, vol. 40, N 8, October 2007.
- [15] B. Madelaine, '*Détermination d'un Modèle Pertinent pour la Commande: de la Réduction à la construction*,' Thèse de Doctorat, L'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, France, 1998.
- [16] Lall, S., Marsden, J., and Glavaski, S., '*Empirical Model Reduction of Controlled Nonlinear Systems*,' *Proceedings of the IFAC World Congress*, Vol. F, International Federation of Automatic Control, Beijing, pp. 473–478, 1999.
- [17] K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover, '*Robust and Optimal Control*,' Prentice Hall, 1996.
- [18] G. Berkooz, P. Holmes, J. Lumley, '*The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows*,' *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 25, pp. 539-75, 1993.
- [19] C.W. Rowley, '*Model Reduction for Fluids, Using Balanced Proper Orthogonal Decomposition*,' *Int. J. on Bifurcation and Chaos*, 2005.
- [20] H. M. Hardin and j. H. Van Schuppen, '*System Reduction of Nonlinear Positive Systems by Linearization and Truncation*,' Dept. of Molecular Cell Physiology, the Netherlands, 2005.
- [21] M. J. Korenberg, I. W. Hunter, '*The Identification of Nonlinear Biological Systems: Volterra Kernel Approaches*,' *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 24, pp. 250-68, 1996.
- [22] Y. Zhang, M. A. Henson, Y. G. Kevrekidis, '*Nonlinear model reduction for dynamic analysis of cell population models*,' *Chemical Engineering Science*, vol. 58, pp. 429-45, 2003.
- [23] K. S. Lee, Y. Eom, J. W. Chung, J. Choi, D. Yang, '*A control-relevant model reduction Technique for nonlinear systems*,' *Computers and Chemical Engineering*, vol. 24, pp. 309-315, 2000.
- [24] E. B. Rudnyi and J. G. Korvink, '*Model Order Reduction for Large Scale Finite Element Engineering Models*,' *European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2006*.
- [25] S. Lall, J. E. Marsden, S. Glavaski, '*A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems*,' *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, pp. 519-35, 2002.
- [26] B. Lohmann, '*Application of Model Order Reduction to an Hdropneumatic Vehicle Suspension*,' *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 3, no. 1, 1995.
- [27] L. Cordier et M. Bergmann, '*Réduction de dynamique par Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)*,' *Ecole de printemps OCET Optimisation et Contrôle des Ecoulements et des Transferts, Aussois*, 2006.

- [28] V. Snasel, M. Polovincak and H. M. Dahwa, 'Concept Lattice Reduction by Singular Value Decomposition,' Proceedings of the Spring Young Researcher's Colloquium on Database and Information Systems, Moscow, Russia, 2007.
- [29] E. C. Waymirey, 'Probability & incompressible Navier-Stokes equations: An overview of some recent developments,' Department of Mathematics, Oregon State University, Corvallis, USA, 2004.
- [30] M. Kiehn, 'Turbulence and the Navier-Stokes Equations,' disponible sur <http://www.cartan.pair.com>, 2007.
- [31] K. E. Willcox, J. D. Paduano, J. Peraire and K. C. Hall, 'Low order aerodynamic models for aeroelastic control of turbomachines,' in *Proceedings of the American Institute of Aeronautics and Astronautics Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, vol. 3, 1999, pp. 2204-14.
- [32] C. F. Chen and L. S. Shieh, 'A Novel Approach to Linear Model Simplification,' *Int. J. Control.*, vol.8, pp.561-570, 1968.
- [33] E. J. Davison, 'A method for simplifying linear dynamic systems', *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-11, pp. 93-101, Jan. 1966.
- [34] E. J. Davison, 'A new method for simplifying large linear dynamic systems', *IEEE Trans. Auto. Contr. (Correspondence)*, AC-13, pp. 214-215, Apr. 1968.
- [35] M. R. Chidambara and E. J. Davison, 'On A method for simplifying linear dynamic Systems', *IEEE Trans. Auto. Contr. (Correspondence)*, AC-12, pp. 119-121, Feb. 1967.
- [36] M. R. Chidambara and E. J. Davison, 'Further remarks on simplifying linear dynamic systems', *IEEE Trans. Auto. Contr. (Correspondence)*, AC-12, pp. 213-214, Apr. 1967.
- [37] M. Aoki, 'Control of large Scale Dynamic Systems by Aggregation,' *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. AC-13, pp. 246-253, 1968.
- [38] M. Aoki, 'Aggregation,' In D.A. Wismer, editor, *Optimization Methods for Large Scale Systems*, pages 191-232. Mc Graw-Hill, New-York, 1971.
- [39] M. Aoki, 'Somme Approximation Method for Estimation and Control of large Scale Systems,' *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. AC-23, pp. 173-181, 1978.
- [40] S. Janardhanan, 'Model Order Reduction and Controller Design Techniques,' Doctoral Thesis, Indian Institute of Technology, Mumbai, 2002.
- [41] R. Darsonville, 'Réduction Optimale et non optimale: Application à des modèles Aéroélastiques,' *Projet de fin d'études*, ENSEEIHT, 1994.
- [42] D. A. Wilson, 'Optimum Solution of Model-Reduction Problem', *Proc. IEE*, Vol. 117, No. 6, pp. 1161-1165, Jun. 1970.
- [43] K. Glover, 'All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems, and Their L-infinity error Bounds,' *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1145-1193, 1984.

- [44] D. C. Hyland, D. S. Bernstein, '*The Optimal Projection Equations and the Relationships among the Methods of Wilson, Skelton and Moore,*' IEEE Trans. On Automatic Control AC-30, pp. 1201-1211, 1985.
- [45] M. Bettayeb and U. M. Al-Saggaf, 'Practical Model Reduction Techniques for Power Systems,' Electric Power Systems Research, 25(3): 169-179, Dec. 1992.
- [46] M. J. Rewiensky, '*A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear dynamical Systems,*' Doctoral Thesis, MIT, 2003.
- [47] M. F. Hutton and B. F. Friedland, '*Routh Approximations for Reducing Order of Linear Time Invariant Systems,*' IEEE Trans. Automatic Control. Vol. AC-20, pp. 329-337, 1975.
- [48] Y. Shamash, '*Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and the Padé Approximation Technique,*' INT. J. Control., vol. 21, pp.475-484, 1975.
- [49] T. C. Chen, C. Y. Chang and K. W. Han, '*Reduction of Transfert Functions by the Stability Equation Method,*' Franklin Institute, vol. 308, pp. 389-404, 1979.
- [50] M. F. Aburdene, '*On the Routh Approximation Technique and Least Squares Errors,*' Paper submitted for presentation at the Tenth Annual Pittsburgh Conference on Modelling and Simulation, MIT, 1979.
- [51] Y. Choo and D. Kim, '*Routh Approximants with Arbitrary Order,*' Trans. On Control Automation and Systems Engineering, vol. 1, N. 1, June 1999.
- [52] D. C. Williamson and N. A. Thacker, '*Padé Approximant: How to... and Why,*' Imaging Science and Biomedical Engineering Division, Medical School, University of Manchester, 2007.
- [53] F. Ahmad and W. A. Albarakati, '*Application of Padé' Approximation to Solve the Blasius Problem,*' Proceeding of Pakistan Academy Sciences, Vol. 44(1), pp. 17-19. 2007.
- [54] J. Pal, '*Improved Padé Approximants Using Stability Equation Method,*' Electron Lett, vol. 19, N 11, pp. 426, 1983.
- [55] P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley Jr. and P. Sannuti, '*Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory- An Overview,*' Automatica, 12(2): 123-132, 1976.
- [56] C. Sun, '*Model Reduction of Systems Exhibiting Two-Time Scale Behaviour or μ Parametric Uncertainty,*' Doctoral Thesis, Texas A&M University, 2006.
- [57] R. G. Phillips and P. V. Kokotovic, '*A Singular Perturbation Approach to Modelling and Control of Markov Chains,*' IEEE Trans. On Automatic Control, vol. AC-20, October 1981.
- [58] Y. Liu, B. Anderson, '*Singular Perturbation Approximation of Balanced systems,*' Proceedings of the 28th conference on Decision and Control, 1989.
- [59] D. Vasilyev, M. Rewiensky and J. White, '*Perturbation analysis of TBR model reduction in application to trajectory-piecewise linear algorithm for MEMS structures,*' NSTI-Nanotech, Vol. 2, 2004.

- [60] A. Rachid et D. Mehdi, '*Réalisation, Réduction et Commande des Systèmes Linéaires*', Editions Technip, Paris, 1997.
- [61] B. C. Moore, '*Principal Component Analysis in Linear System: Controllability, Observability and Model Reduction*', 'IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26:17-32, 1981.
- [62] L. Pernebo and L.M. Silverman, '*Model reduction via balanced state space representation,*' IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27. No. 2, pp. 382-382, 1982.
- [63] A.C. Antoulas and D.C. Sorensen, '*Projection methods for balanced model reduction,*' to appear in *Linear Algebra and Its Applications*, 2004.
- [64] J.-R. Li, "*Model Reduction of Large Linear Systems via Low Rank System Gramians,*" Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2000.
- [65] A.C. Antoulas, '*Approximation of linear dynamical systems,*' Encyclopedia of Electrical and Electronics engineering, 1998.
- [66] D. Enns, '*Model reduction with balanced realizations: An error bound and a frequency weighted generalization,*' in the Proceedings of the IEEE Conf. Decision and Control, 1984.
- [67] N. Singh, R. Prasad and H. O. Gupta, '*Reduction of Large Scale Systems Using Hankel Norm Approximation,*' Electrical Engineering Department, Uttaranchal, India, 2002.
- [68] M. Bettayeb, '*Approximation of Linear Systems: New Approach Based on Singular Value Decomposition,*' PhD Thesis, University of South California, L. A., 1981.
- [69] J. Wang and W. Xu, '*Optimal Hankel-Norm Reduction of Active Suspension Model with Application in Suspension Multiobjective Control,*' Int. J. Vehicle Design, Vol. 40, Nos. 1/2/3, 2006.
- [70] A. C. Antoulas, D. C. Sorensen and S. Gugercin, '*A survey of model reduction methods for large-scale systems,*' 2004.
- [71] J. L. Lumley, '*The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows,*' In A. M. Yaglom, & V. I. Tatarski (Eds.), *Atmospheric Turbulence and Radio wave Propagation* (pp. 167–178), Moscow: Nauka. 1967.
- [72] M. Kirby and L. Sirovich , '*Application of the Karhunen-Loève procedure for the characterization of human faces*', IEEE trans. PAMI Vol. 12, No. 1 p. 103, 1990.
- [73] V.R. Algazi and D. J. Sakrison '*On the Optimality of the Karhunen-Loeve Expansion,*' IEEE Trans. Inform. Theory, IT-15(2) 319-321, 1969.
- [74] C. A. Andrews and al., '*Adaptive Data Compression,*' Proc. IEEE., vol. 55, pp. 267-277, 1967.
- [75] K. Afanasiev and M. Hinze '*Adaptive control of a wake flow using Proper Orthogonal Decomposition,*' In *Shape Optimization and Optimal Design*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, volume 216. Marcel Dekker, 2001.

- [76] T. Bechtold, B. Salimbahrami, E. B. Rudnyi, B. Lohmann and J. G. Korvink, ' *Krylov-Subspace-Based Order Reduction Methods Applied to Generate Compact- Electro-Thermal Models for MEMS,*' 2003.
- [77] B. Lohmann and B. Salimbahrami, ' *Introduction to Krylov Subspace Methods in Model Order Reduction,*' Computing in science and Engineering, IEEE, Vol. 2, Issue 1, 2003.
- [78] E. J. Grimme, ' *Krylov Projection Methods for Model Reduction,*' Ph.D. dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, IL, 1997.
- [79] S. Sidi-Ali-Cherif and K. M. Grigoriadis, ' *Efficient model reduction of large scale systems using Krylov-subspace iterative methods,*' International Journal of Engineering Science, vol. 41, pp. 507-20, 2003.
- [80] B. Salimbahrami, B. Lohmann, T. Bechtold and J. G. Korvink, ' *Two-sided Arnoldi Algorithm and Its Application in Order Reduction of MEMS,*' Proceedings 4th Mathmod Vienna, 2003.
- [81] B. Salimbahrami and B. Lohmann, ' *Modified Lanczos Algorithm in Model Order Reduction of MIMO Linear systems,*' Institute of Automatica, University of Bremen, Germany, 2002.
- [82] B. Salimbahrami, ' *Structure Preserving Order Reduction of Large Scale Second Order Models,*' Doctoral thesis, 2005.
- [83] B. Salimbarhami and B. Lohmann, ' *Krylov Subspace Method for the Reduction of First and Second Order Large-scale Systems,*' University of Bremen, 2003.
- [84] Q. Su, V. Balakrishnan and C-K. Koh, ' *Efficient Approximate Balanced Truncation of General Large-Scale RLC Systems via Krylov Methods,*' School of Electrical and Computer Engineering, Purdue University, 2002.
- [85] S. Gugercin, K. Willcox, ' *Krylov projection framework for Fourier model reduction,*' MIT, volume 44, Issue 1, pp. 209-215 2008.
- [86] R. W. Freund, ' *Krylov subspaces associated with higher-order linear dynamical systems,*' BIT Numerical Mathematics, 2005.
- [87] K. D. Ikramov, ' *Reducing Complex Matrices to Condensed Forms by Unitary Congruence Transformations,*' Moscow State University, 2006.
- [88] T. Bechtold, E. B. Rudnyi, and J. G. Korvink ' *Error Estimation for Arnoldi-based Model Order Reduction of MEMS,*' Technical Proceedings of the 2004 Nanotechnology Conference and Trade Show, Nanotech 2004, vol. 2, Boston, Massachusetts, USA, pp. 430-433, 2004)
- [89] L. El Ghaoui, S. L. Niculescu, ' *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in control,*' Philadelphia: SIAM, 2000.
- [90] A. Helmersson, ' *Model Reduction from an H_∞ /LMI Perspectives,*' Dept of Electrical Engineering, Linköping university, Sweden, 1994.

- [105] X. Maa, A. F. Vakakis and L. A. Bergman, ‘*Karhunen–Loeve analysis and order reduction of the transient dynamics of linear coupled oscillators with strongly nonlinear end attachments,*’ *Journal of Sound and Vibration* 309 (2008) 569–587, 2007.
- [106] J.M.A. Scherpen, ‘*Balancing for nonlinear systems,*’ PhD dissertation, Systems and Control Group Faculty of Applied Mathematics, University of Twente, 1994.
- [107] K. Fujimoto and J. M.A. Scherpen, ‘*Model Reduction for Nonlinear Systems Based on the Differential Eigenstructure of Hankel Operators,*’ *Proc. Of the 40th IEEE, Conf. on design and control,* 2001.
- [108] M. Condon et R. Ivanov, ‘*Empirical Balanced Truncation of Nonlinear Systems,*’ *J. Nonlinear Science,* Vol. 14: pp. 405–414, 2004.
- [109] L. Nechak, ‘*Réduction et Commande des Systèmes Dynamiques Polynomiaux,*’ *Mémoire de Magister, Automatique des Systèmes Continus et Productique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, Faculté de Génie Electrique et d’Informatique,* 2007.
- [110] S. Prajna, ‘*POD Model Reduction with Stability Guarantee,*’ *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, HI.* 2003.
- [111] B. Lohmann, ‘*Order reduction and determination of dominant state variable of nonlinear systems,*’ *Mathematical Modelling of Systems* 1(2), 77–90, 1995.
- [112] I. Balk, “*Arnoldi based passive model order reduction algorithm,*” in *Proceedings of the IEEE Conference on Electrical Performance of Electronic Packaging,* pp. 251-4, 2000.
- [113] S. Azou, ‘*Réalisation Equilibrée de Systèmes par Orthogonalisation de Fonctions d’Entrée-Gramians et Approximation,*’ *Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale,* 1997.
- [114] G. Obinata and B. D. O. Anderson, ‘*Model reduction for control system design,*’ *London, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag,* 2001.
- [115] M. G. Safonov, R. Y. Chiang, ‘*A Schur method for balanced model reduction,*’ in *proc. Amer. Contr. Conf.,* pp.15-17, 1988.
- [116] J. Hladuvka, A. Konig and E. Groller, ‘*Exploiting Eigenvalues of the Hessian Matrix for Volume Decimation,*’ disponible sur <http://www.cg.tuwien.ac.at/home/>.
- [117] L.T. Pillage and R.A. Rohrer, ‘*Asymptotic Waveform Evaluation for Timing Analysis,*’ *IEEE. Trans. Computer-Aided Design Int. Circ. and Syst.,* 9(4):352.366, April 1990.
- [118] R. Kao and M. Horowitz, ‘*Timing Analysis for Piecewise Linear Rsim,*’ *IEEE Transactions on Computer-Aided Design Of Integrated Circuits and Systems,* Vol. 13, N°. 12, 1994.
- [119] D. Gratton and K. Willcox, ‘*Reduced-order, trajectory piecewise-linear models for nonlinear computational fluid dynamics,*’ *34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit* 28 June - 1 July 2004, Portland, Oregon.

- [120] M. Rewienski et J. White, ‘*Improving Trajectory Piecewise-Linear Approach to Nonlinear Model Order Reduction for Micro machined Devices Using an Aggregated Projection Basis*,’ in Proceedings of the 5th International Conference on Modelling and Simulation of Microsystems, pp. 128-31, 2002.
- [121] D. Vasilyev, M. Rewienski, J. White, ‘*A TBR based Trajectory Piecewise Linear Algorithm for Generating Accurate Low order Models for Nonlinear Analog Circuits and MEMS*’, DAC 2003. June 2–6, 2003, Anaheim, California, USA.
- [122] J. P. Demailly, ‘*Analyse numérique et équations différentielles*’, EDP Editions, Presse Université de Grenoble, 1996.
- [123] A. H. K. Khalil, ‘*Nonlinear Systems*’, 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [124] H. Fabbender and P. Benner ‘*Passivity Preserving Model Reduction via a Structured Lanczos Method*,’ Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design Munich, Germany, October 4-6, 2006.
- [125] B. Salimbahrami and B. Lohmann, ‘*Stable Reduced Order Modelling of Large Scale Systems Using Prescribed Poles*,’ IFAC, 2005.
- [126] J. K. Hale, ‘*Ordinary Differential Equations*’, John Wiley and Sons Inc., N.Y. 1996.
- [127] J. Lienemann, ‘*Complexity Reduction Techniques for Advanced MEMS Actuators Simulation*’, Doctoral Dissertation, Albert-Ludwigs University, Freiburg, 2006.
- [128] E. Hung, Y.-J. Yang, S. D. Senturia, “*Low-Order Models For Fast Dynamical Simulation of MEMS Microstructures*,” in Proceedings of the IEEE International Conference on Solid State Sensors and Actuators (Transducers '97), vol. 2, pp. 1101-04, 1997.
- [129] A. Chaehoi, ‘*Conception et Modélisation de MEMS Monolithiques CMOS en Technologie FSBM: Application aux Accéléromètres*’, Thèse Doctorale, Université de Montpellier II, 2005.
- [130] S. MURATET, ‘*Conception, caractérisation et modélisation: Fiabilité prédictive de MEMS à actionnement électrothermique Conception, caractérisation et modélisation: Fiabilité prédictive de MEMS à actionnement électrothermique*’, Thèse doctorale, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2005.
- [131] A. Greiner, J. Lienemann, E. Rudnyi, and J. G. Korvink, ‘*Automatic Order Reduction for Finite Element Models*,’ 2004.
- [132] Y. Zhu and H. D. Espinosa, ‘*Design of Radio Frequency (RF) MEMS Switches – Modelling*’, Proceedings of IMECE'03: 2003 ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition Washington, D.C., November 16-21, 2003.
- [133] R. Herbin, ‘*Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*,’ Master de mathématiques, France, disponible sur <http://www-gm3.univ-mrs.fr/~herbin/>, 2007.