



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

BELMAHDI Fatiha

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Electronique

Option télédétection

Intitulé :

Application du filtre de Kalman pour le débruitage des signaux

Devant le jury d'examen composé de :

Mme. AMEUR Zohra	Professeur à l'UMMTO	Présidente
Mr. HADDAB Salah	M. C. A à l'UMMTO	Rapporteur
Mr. LAHDIR Mourad	M. C. A à l'UMMTO	Examineur
Mme. AMIROU Zahia	M. C. A à l'UMMTO	Examinatrice

Soutenu le: 14 / 12 /2015

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH le Tout Puissant pour m'avoir donné le courage, la santé et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon Directeur de mémoire, Mr HADDAB Salah, Maître de conférences (A) à l'UMMTO, pour son encadrement, sa disponibilité et ses bons conseils tout le long de ce travail.

Que Mme AMEUR Zohra, Professeur à l'UMMTO, Directrice du Laboratoire d'Analyse et Modélisation des Phénomènes Aléatoires (LAMPA), trouve ici, l'expression de ma profonde reconnaissance, pour avoir fait l'honneur de présider le jury d'examen de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi aux enseignants, Maîtres de conférences (A), à l'UMMTO, Mme AMIROU Zahia et Mr LAHDIR Mourad pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à l'ensemble du personnel du laboratoire LAMPA et aux enseignants du département mathématique et automatique de l'UMMTO pour m'avoir accordé de leurs temps si précieux, ainsi qu'à tous ceux qui m'ont encouragée, soutenue de près ou de loin.

Je ne saurai terminer sans remercier mes chers parents, mes très chères sœurs Saida et Ghania, ma chère copine Fazia, sa famille et toutes mes amies.

Liste des abréviations

Tns	Traitement numérique du signal.
BCD	Binary Coded Decimal.
TF	Transformée de Fourier.
Tz	Transformée en z.
Rif	Filtres à réponse impulsionnelle finie.
Rii	Filtres à réponse impulsionnelle infinie.
Kf	Kalman filter.
EKF	Extended Kalman filters.
ECG	Electrocardiogramme.
Toc	Transformée en ondelette continue.
Tod	Transformée en ondelette discrète.
Rna	Réseau de neurones artificiels.

Liste des figures

Figure I.1	Numérisation d'un signal	3
Figure I.2	Echantillonnage d'un signal	4
Figure I.3	Le domaine temporel et le domaine fréquentiel	5
Figure I.4	Quantification d'un signal	5
Figure I.5	Opération de filtrage	6
Figure I.6	Symbole du retard	8
Figure I.7	Structures de réalisation transversale	14
Figure I.8	Structures de réalisation récursive	15
Figure II.1	Les étapes du filtre de Kalman	23
Figure II.2	Algorithme récursif du filtre de Kalman	27
Figure II.3	Principe du filtre formeur	32
Figure II.4	Modélisation d'un système avec le filtre formeur sur le bruit d'observation ...	34
Figure III.1	Parcours du signal électrique cardiaque	36
Figure III.2	Synoptique de la chaîne d'acquisition d'un ECG haute résolution	36
Figure III.3	Triangle d'Einthoven	37
Figure III.4	Montage de Goldberger pour l'enregistrement des dérivations unipolaires des Membres.....	37
Figure III.5	Position de 6 électrodes précordiales	37
Figure III.6	Tracé ECG	38
Figure III.7	Densité spectrale de puissance des complexes QRS, des ondes P et T, et des bruits, après moyennes sur 150 battements.....	41
Figure III.8	Les différents types de bruits	43
Figure III.9	Exemple d'ondelette de Morlet	44
Figure III.10	Trois ondelettes filles de Morlet dilatées (gauche), échelle de base (milieu) et comprimées (droite)	45
Figure III.11	Modèle du neurone formel	47

Figure III.12	Réseau de neurones à une couche cachée. Pour modéliser un signal d'une seule variable à une dimension, tel le signal ECG, il suffit d'une entrée unique et d'une sortie	48
Figure III.13	Représentation classique d'attracteurs élémentaires : A. Attracteur ponctuel, B. Cycle limite et C.Tore.....	49
Figure III.14	Cycles limites	50
Figure III.15	Solution des équations III.11.....	52
Figure III.16	Intervalle RR	52
Figure III.17	Trajectoire 3D obtenue à partir des équations (III.11) et (III.12).....	53
Figure III.18	Le signal ECG synthétique sur 2D	54
Figure IV.1	Le signal à débruiter	55
Figure IV.2	Le tracé du signal bruité avec un bruit blanc	58
Figure IV.3	La sortie du filtre de Kalman (signal débruité)	59
Figure IV.4	Tracé de la covariance de l'erreur d'estimation	59
Figure IV.5	Le signal bruité ($x_0 = [100; 1000]$)	60
Figure IV.6	Le tracé de l'estimé de x1 (avec $x_0 = [100; 1000]$).....	61
Figure IV.7	Le tracé de la covariance de l'erreur d'estimation (avec $x_0 = [100; 1000]$).....	61
Figure IV.8	Le signal bruité (Avec une variance de bruit égale à 8.91).....	62
Figure IV.9	La sortie de filtre (avec $\sigma_v=3$).....	62
Figure IV.10	La covariance de l'erreur d'estimation ($\sigma_v=3$).....	63
Figure IV.11	Le signal à débruiter (avec $\sigma_w=0.1$).....	63
Figure IV.12	Le signal obtenu à la sortie du filtre	64
Figure IV.13	La covariance de l'erreur d'estimation (dans le cas $\sigma_w=0.1$).....	64
Figure IV.14	Illustration de l'interpolation linéaire de phase entre deux intervalles R-R Successif	68
Figure IV.15	Le tracé ECG avec une ligne de base déformée (bleu) et le signal obtenu à la sortie de deuxième filtre médian (rouge)	71
Figure IV.16	Le tracé de l'ECG avec une déviation de la ligne de base supprimée.....	71
Figure IV.17	Détection des pics (les points rouge) du signal ECG avec la méthode Pan et Tompkins	72
Figure IV.18	Le tracé de plusieurs cycles d'ECG avec un bruit additif	73

Figure IV.19	La moyenne $\overline{ECG}(\theta)$ en rouge et l'écart type $\sigma_{ECG}(\theta)$ en bleu de plusieurs cycles de signal ECG bruité	73
Figure IV.20	Le signal ECG synthétique bruité	77
Figure IV.21	Le signal ECG synthétique débruité par EKF	77
Figure IV.22	Superposition du signal ECG bruité (vert), débruité (bleu) et original (rouge)...	78
Figure IV.23	Représentation de SNR de sortie en fonction de SNR d'entrée	79
Figure IV.24	Signal ECG à débruiter (signal réel + bruit blanc) en utilisant le EKF	80
Figure IV.25	Le signal ECG réel débruité obtenu à la sortie du filtre de Kalman étendu.....	80
Figure IV.26	Superposition des signaux ECG bruité (vert), débruité (bleu) et original (rouge).....	81
Figure IV.27	Représentation de SNR de sortie en fonction de SNR d'entrée	81
Figure IV.28	Le signal ECG bruité (signal + bruit coloré)	82
Figure IV.29	Le signal ECG débruité obtenu à la sortie de EKF	82
Figure IV.30	Superposition de trois signaux : Le signal ECG bruité avec un bruit rose (vert), le signal original (rouge) et le signal ECG débruité obtenu à la sortie de filtre (bleu).....	83
Figure IV.31	Signal ECG bruité avec un bruit musculaire	83
Figure IV.32	Le signal ECG débruité	84
Figure IV.33	Superposition de trois signaux : Le signal ECG bruité (vert), le signal original (rouge) et le signal ECG débruité obtenu à la sortie de filtre (bleu).....	84
Figure IV.34	Comparaison de SNR de sortie d'EKF pour les trois types de bruit: bruit blanc (bleu), bruit rose (rouge) et bruit musculaire (vert).....	85

Liste des tableaux

Tableau I.1	Exemple de codage sur 4 bits	06
Tableau III.1	Les paramètres de modèle correspondant au signal ECG	53
Tableau IV.1	Les paramètres initiaux de la matrice de covariance P_0	75
Tableau IV.2	Les paramètres de modèle correspondant au signal ECG	76

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I : Généralités sur le filtrage numérique

I.1.Introduction	3
I.2. Numérisation des signaux	3
I.2.1.Echantillonnage	4
I.2.2.Quantification	5
I.2.3.Codage	6
I.3. Réponse impulsionnelle numérique	6
I.4. Les outils de traitement numérique	7
I.4.1. La transformée de Fourier d'un signal discret.....	7
I.4.2. La transformée en z	7
I.4. 2. 1. Définition.....	7
I.4. 2. 2. Propriétés.....	8
I.4. 2. 3. La transformée en z inverse	9
I.4. 3. Relation entre la transformée en z et la transformée de Fourier	9
I.5. Fonction de transfert en z d'un système numérique	10
I.6. Réalisabilité du filtre	11
I.6. 1. Invariance dans le temps	11
I.6. 2. Causalité	11
I.6. 3. Stabilité.....	11
I.7. Différents types de filtre numérique	11
I.7.1. Les filtres à réponse impulsionnelle finie (ou filtre RIF).....	11
I.7.1.1. Caractéristiques des filtres RIF.....	11
I.7.2. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (ou filtre RII)	12
I.7.2.1. Caractéristiques des filtres RII	13
I.8. Structures des filtres numériques	13
I.8.1. Structure transversale (ou non récursive)	13
I.8.2. Structure récursive	14
I.9. Conclusion	15

Chapitre II : Etude du filtre de Kalman

II.1. Introduction	16
II.2. Evolution historique du filtre de Kalman	16

II.3. Notions sur les signaux aléatoires et l'estimation	17
II.3.1. Les signaux aléatoires	17
II.3.2. Notion d'estimation	20
II.4. Présentation du filtre de Kalman	21
II.5. Fonctionnement du filtre de Kalman	23
II.5.1. Les différentes phases du filtrage	23
II.5.2. Notion d'innovation	24
II.5.3. Interprétation de mise à jour	25
II.5.4. Stabilité du filtre de Kalman	26
II.6. Algorithme du filtre de Kalman	27
II.7. Filtre de Kalman étendu	28
II.7.1. Equations du filtre de Kalman étendu (EKF)	29
II.7.2. Algorithme du filtre de Kalman étendu	30
II.8. Les limites du filtre de Kalman	31
II.9. Optimisation du filtre de Kalman par le filtre formeur	32
II.10. Conclusion	34

Chapitre III : Modélisation du signal ECG

III.1. Introduction	35
III.2. Le muscle cardiaque	35
III.3. L'Electrocardiogramme (ECG)	36
III.3.1. Principe d'acquisition du signal ECG	36
III.3.2. Les 12 dérivations électrocardiographiques	37
III.3.3. Le tracé de l'Electrocardiogramme (ECG)	38
III.3.3.1. Ondes de l'ECG	39
III.3.3.2. Intervalles caractéristiques de l'ECG	40
III.3.4. Le contenu spectral de l'ECG	40
III.4. La fréquence cardiaque	41
III.5. Artefacts visibles sur l'électrocardiogramme	41
III.5.1. Bruits techniques	42
III.5.2. Artefacts physiques	42
III.6. Modélisation du signal ECG	43
III.6.1. Les approches classiques	43
III.6.1.1. Modélisation par les ondelettes	44
III.6.1.2. Modélisation avec les réseaux de neurones	47

III.6.2. Modélisation dynamique du signal ECG	48
III.6.2.1. Généralités sur les attracteurs	49
III.6.2.2. Principe de modélisation	51
III.6.2.2.1. La périodicité.....	51
III.6.2.2.2. Amplitude	52
III.7. Conclusion	54

Chapitre IV : Application du filtre de Kalman pour le débruitage des signaux ECG

IV.1. Introduction	55
IV.2. Application du filtre de Kalman au débruitage d'un signal sinusoïdal	55
IV.2.1. Ecriture du modèle d'état (équation d'état et équation de mesure)	56
IV.2.2. Estimation des paramètres du filtre	57
IV.2.3. Implantation du filtre	58
IV.2.4. Les résultats obtenus et discussion	58
IV.2.5. Etude de l'influence de quelques paramètres sur le filtre	60
IV.2.5.1. Influence des valeurs initiales du vecteur d'état	60
IV.2.5.2. Influence de la variance du bruit de mesure	62
IV.2.5.3. Influence de la variance du bruit de système.....	63
IV.3. Application du filtre de Kalman étendu au débruitage du signal ECG	65
IV.3.1. Les étapes nécessaires pour l'application du filtre de Kalman étendu au débruitage des signaux ECG.....	65
IV.3.1.1. Modification du modèle dynamique de l'ECG	65
IV.3.1.2. Discrétisation du modèle de l'ECG	66
IV.3.1.3. Ecriture des équations d'état et de mesure	66
IV.3.1.4. Linéarisation du modèle dynamique de l'ECG	68
IV.3.1.5. Estimation des paramètres du filtre de Kalman	70
IV.3.2. Débruitage des signaux ECG.....	76
IV.3.2.1. Débruitage d'un signal ECG synthétique.....	76
IV.3.2.2. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par différents types de bruit.....	79
IV.3.2.2.1. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par un bruit blanc gaussien	79
IV.3.2.2.2. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par un bruit coloré (rose)	81
IV.3.2.2.3. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par un bruit musculaire réel	83
IV.3.3. Discussion des résultats	84
IV.4. Conclusion	85
Conclusion et perspectives	86

Bibliographie

Annexe

Introduction
générale

Introduction générale

Le traitement du signal est un ensemble de techniques et de méthodes avec, pour objectif, d'extraire le maximum d'informations d'un signal traduisant un phénomène physique donné. Parmi les opérateurs intervenant en traitement du signal le filtrage est quasiment incontournable dans tous les circuits ou programmes de traitement. Selon l'effet attendu d'un filtre et la manière de le concevoir, différentes structures sont alors rencontrées. Notre intérêt dans ce travail porte sur le filtrage de Kalman.

Le filtre de Kalman est un outil mathématique récursif permettant d'estimer l'état d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées. Il est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques, tels que le traitement du signal, l'automatique, le radar et les systèmes de communication [10] [11].

Notre application consiste en l'utilisation de ce filtre pour le débruitage des signaux, en particulier les signaux électrocardiographiques (ECG).

Le signal électrocardiographique (ECG) est la traduction, sous forme électrique de l'activité du cœur. C'est un outil essentiel que ce soit pour la surveillance des patients ou pour le diagnostic des maladies cardiovasculaires. Lors de l'acquisition des signaux ECG, différents types de bruits, inévitables, tels que les artéfacts musculaires, le mouvement des électrodes et le bruit respiratoire tendent à perturber leur analyse.

Plusieurs approches ont alors été proposées pour débruiter les signaux ECG. Au cours de ces dernières années, la recherche a été menée vers la génération des signaux ECG synthétiques quasi réels en utilisant un modèle dynamique non linéaire composé de trois équations différentielles [38]. Ce modèle permet de faciliter la validation de l'algorithme du filtre de Kalman étendu pour le débruitage de ces signaux ECG.

L'idée de base derrière cette méthode, consiste à utiliser les informations à priori des signaux cardiaques, tels que leurs pseudo- périodicités, afin d'améliorer les performances des méthodes existantes et de concevoir de nouvelles techniques de filtrage qui sont spécifiques aux signaux cardiaques.

Dans ce cadre, nous avons structuré notre travail comme suit :

Dans le premier chapitre, consacré aux généralités sur le filtrage numérique nous reprenons les définitions, les outils de traitement, les types de filtres et leurs différentes structures.

Le deuxième chapitre est consacré au principe de fonctionnement du filtre de Kalman linéaire, à son algorithme, et à sa version étendue utilisée lorsque le système est non linéaire.

Le troisième chapitre aborde le problème de modélisation des signaux ECG. Nous y donnons un aperçu sur les approches de modélisation classiques, puis nous présentons l'approche de modélisation dynamique utilisée dans notre application du filtre de Kalman.

Dans le dernier chapitre, nous présentons, dans un premier temps, les étapes et les résultats de l'application du filtre de Kalman linéaire pour débruiter un signal sinusoïdal noyé dans un bruit blanc additif, par la suite, nous appliquons le filtre de Kalman étendu au débruitage d'un signal ECG synthétique bruité par un bruit blanc et puis à un signal ECG réel bruité par différents types de bruits (bruit blanc et bruit coloré) et nous commenterons les résultats obtenus.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale et les perspectives envisagées.

Chapitre I

Généralités sur le filtrage numérique

I.1. Introduction

Le filtrage est une opération courante et très importante en traitement du signal. Les signaux acquis au moyen de capteurs sont, dans la majorité des cas, entachés de signaux indésirables, appelés bruit électronique, qui tendent à perturber, voire noyer complètement le signal utile à acquérir. Le filtrage a, alors, pour but essentiel, d'améliorer la qualité du signal en rejetant la composante perturbatrice tout en conservant la partie porteuse de l'information utile [1], [2].

Le filtrage s'applique à des signaux représentés sous forme analogique (filtres analogiques), ou sous forme numérique après échantillonnage du signal (filtres numériques).

Dans le cas numérique, le filtrage s'effectue par une succession d'opérations mathématiques sur un signal discret [3]. Il peut être réalisé par des circuits intégrés, des processeurs programmables (microprocesseurs, microcontrôleurs, etc.), ou par logiciel dans un ordinateur.

I.2. Numérisation des signaux

Un signal est le résultat de la mesure d'une grandeur physique. Il est dit analogique ou à temps continu si la mesure est disponible à tout instant ou numérique ou à temps discret si la mesure n'est observée qu'à des instants discrets. Le traitement numérique du signal (TNS) consiste à traiter des signaux à temps discret. En TNS, l'information se présente sous forme d'une suite de valeurs numériques constituant ce qu'on appelle un signal numérique [4].

La conversion d'un signal analogique en un signal numérique est appelée numérisation, elle s'effectue en 3 étapes [8] (figure I.1):

- L'échantillonnage : Pour rendre le signal discret.
- La quantification : Pour associer à chaque échantillon une valeur.
- Le codage : Pour associer un code à chaque valeur.

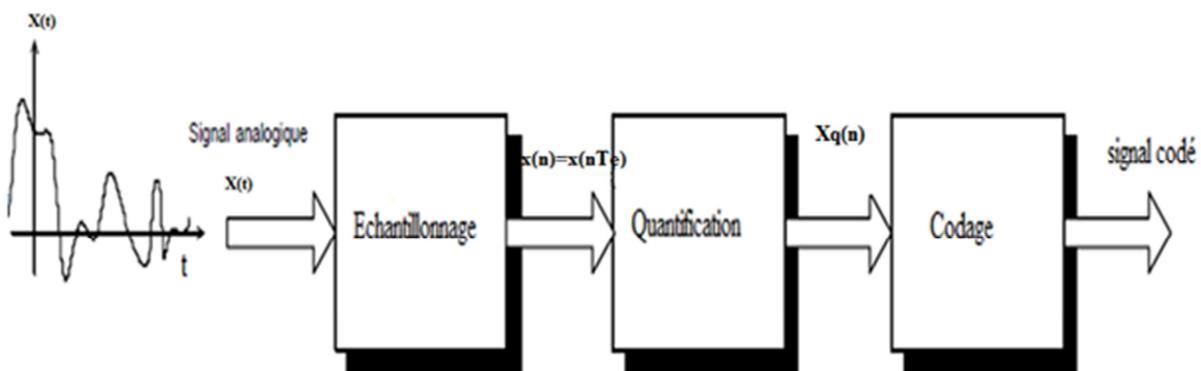


Figure I.1 : Numérisation d'un signal.

I.2.1. Echantillonnage

L'échantillonnage consiste à prélever, à des intervalles de temps réguliers (T_e), les valeurs d'un signal. Le signal analogique $x(t)$, continu dans le temps, est alors représenté par un ensemble de valeurs discrètes.

On a alors

$$x(t) = \sum_n x(n T_e) \quad \text{I.1}$$

Avec :

n : Nombre entier ;

T_e : Période d'échantillonnage.

Pour une simplification d'écriture, on note le signal échantillonné

$$x(t) = x(n) \quad \text{I.2}$$

étant entendu que la durée entre deux échantillons successifs est T_e .

Cette opération est réalisée par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur :

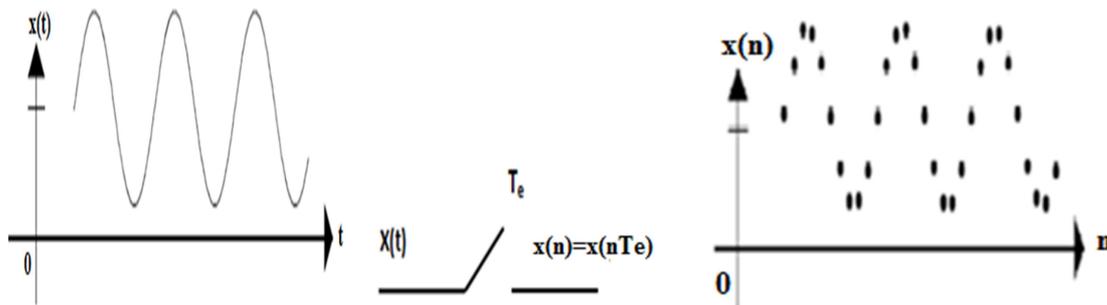


Figure I.2 : Echantillonnage d'un signal.

I.2.1.1. Choix de la période d'échantillonnage : Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon stipule que pour pouvoir reconstituer un signal analogique à partir de ses échantillons, il faut que la fréquence d'échantillonnage $F_e (=1/T_e)$ soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale f_{max} du spectre du signal analogique :

$$F_e \geq 2f_{max} \quad \text{I.3}$$

Avec :

F_e : Fréquence d'échantillonnage $F_e (= 1/T_e)$;

f_{max} : Fréquence maximale du spectre d'amplitude $X(f)$ de $x(t)$.

La fréquence f_{max} est obtenue par la conversion du signal $x(t)$ du domaine temporel vers le domaine fréquentiel par la transformée de Fourier (figure I.3).

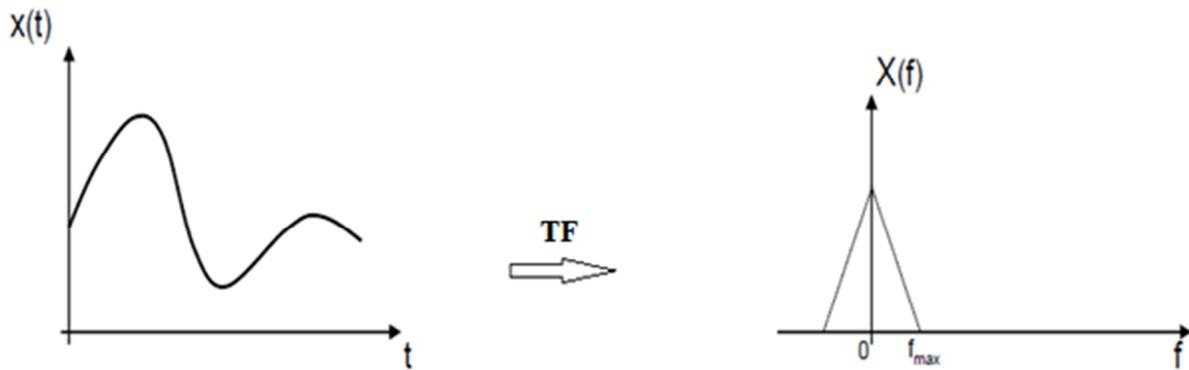


Figure I.3 : Le domaine temporel et le domaine fréquentiel.

I.2.2. Quantification

Le traitement numérique des signaux nécessitant une représentation d'un nombre fini de valeurs discrètes, il faut donc quantifier le signal. Quantifier un signal $x(n)$ revient à une approximation de chaque valeur de ce signal par un multiple entier d'une quantité élémentaire, notée q , appelée pas de quantification.

L'opération de quantification peut être schématisée par la figure I.4 (cas du codage sur 3 bits/8niveaux).

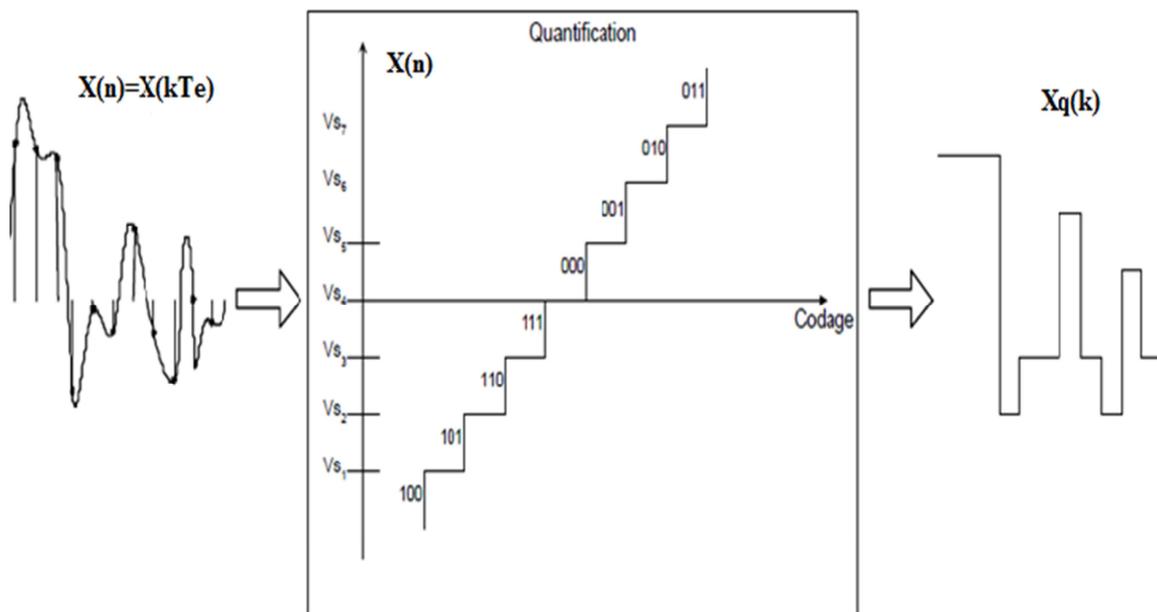


Figure I.4 : Quantification d'un signal [4].

I.2.3. Codage

Une fois la quantification réalisée, les valeurs successives du signal échantillonné sont comparées simultanément à des valeurs références (seuil de quantification : V_{si}). Les résultats de ces comparaisons définissent l'appartenance d'un échantillon à l'un des niveaux de codage (figure I.4).

Parmi les codes les plus connus on peut citer le code binaire naturel, le code Gray (Code à distance unité) et le code BCD (Binary Coded Decimal).

Le tableau suivant présente un exemple de codage sur 4 bits [9]:

Nombre en décimal	Ecriture binaire	BCD (Binary coded decimal)	Gray (Code à distance unité)
0	0000	0000	0000
1	0001	0001	0001
5	0101	0101	0111
10	1010	0001 0000	1111
15	1111	0001 0101	1000

Tableau I.1 : Exemple de codage sur 4 bits [8]

I.3. Réponse impulsionnelle numérique

Un filtre numérique est un système à temps discret dans lequel toutes les variables (entrée, sortie ...) sont sous forme numérique. Les coefficients d'un tel filtre sont également numériques.

La réponse de ce filtre à une excitation s'obtient en effectuant la convolution de cette excitation avec une fonction caractéristique du filtre appelée réponse impulsionnelle et notée $h(n)$.

Soit $h(n)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique et $x(n)$ le signal d'entrée. La réponse $y(n)$ du filtre à ce signal d'entrée est donnée par le produit de convolution discret :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n - k) \quad \text{I.4}$$

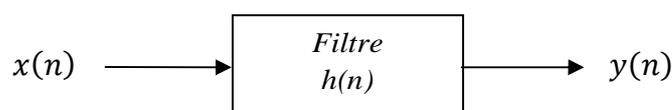


Figure I.5 : Opération de filtrage

Si l'entrée $x(n)$ est l'impulsion de Dirac $\delta(n)$, la sortie $y(n)$ représente la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre [2].

I.4. Les outils de traitement numérique

Outre la transformée de Fourier dans sa version numérique, la transformée en z est l'outil de base pour l'analyse des filtres numériques.

I.4.1. La transformée de Fourier d'un signal discret

La transformée de Fourier (TF) nous permet de passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle d'un signal (et dans l'autre sens pour la TF Inverse). Pour un signal temporel $x(t)$, sa transformée de Fourier notée $X(f)$ est donnée par [2]:

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2j\pi ft} dt \quad \text{I.5}$$

Comme pour les signaux analogiques, on peut définir la transformée de Fourier pour les signaux numériques. Si $x(n)$ est un signal numérique, sa transformée de Fourier $X(f)$ est définie par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf} \quad \text{I.6}$$

I.4.2. La transformée en z

La transformée de Fourier est un outil précieux en traitement de signal numérique et analogique, sur les plans théorique et expérimental. Toutefois, dans certains problèmes, surtout dans ceux qui sont orientés vers l'analyse et la synthèse des systèmes de traitement (par exemple en filtrage numérique), les limites des capacités de la transformation de Fourier sont vite atteintes. Le besoin de créer un outil plus puissant est comblé, principalement, sur le plan théorique, par la transformée en z .

Cette transformation peut être considérée comme une généralisation de la transformée de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier [5].

I.4.2.1. Définition

La transformée en z d'un signal numérique $x(n)$ est définie par [2] [6] [7] [5] :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{I.7}$$

Où z est une variable complexe et $X(z)$ est une fonction complexe de la variable z .

I.4.2. 2. Propriétés

Les propriétés de la transformée en z sont [2] [6]:

❖ **Linéarité**

Si :

$$x_1(n) \xrightarrow{T.z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xrightarrow{T.z} X_2(z)$$

Alors :

$$a x_1(n) + b x_2(n) \xrightarrow{T.z} a X_1(z) + b X_2(z)$$

❖ **Décalage en temps**

$$x(n) \xrightarrow{T.z} X(z)$$

$$x(n - k) \xrightarrow{T.z} z^{-k} X(z)$$

La figure suivante présente le symbole du retard que nous allons utiliser par la suite dans les structures de réalisation de filtre numérique :

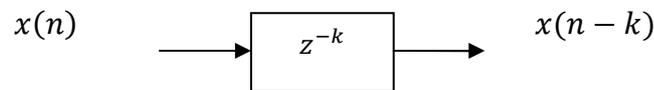


Figure I.6: Symbole du retard.

❖ **Multiplication par une suite exponentielle (ou décalage fréquentiel)**

$$x(n) \xrightarrow{T.z} X(z)$$

$$a^n x(n) \xrightarrow{T.z} X(z/a)$$

❖ **Transformée en z d'un produit de convolution**

Si :

$$x_1(n) \xrightarrow{T.z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xrightarrow{T.z} X_2(z)$$

$$x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{T.z} X_1(z) \cdot X_2(z)$$

❖ **Dérivation de la transformée en z**

$$x(n) \xrightarrow{T.z} X(z)$$

$$n x(n) \xrightarrow{T.z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

❖ **Théorème de la valeur initiale**

Pour un signal causal, on peut établir la relation suivante

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z)$$

I.4. 2. 3. La transformée en z inverse

La transformée en z inverse est donnée par l'expression suivante :

$$X(z) \xrightarrow{T.z.I} x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad \text{I.8}$$

Cette expression représente une intégrale fermée dans le plan des z, le long d'un chemin parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre [5] [6].

En pratique cette transformation inverse formelle est rarement utilisée, puisque, dans nos applications, nous aurons à traiter des transformées en z qui dans la majorité de cas, peuvent s'écrire sous forme d'un rapport de deux polynômes comme suit :

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_M z^{-M}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{I.9}$$

On peut alors déterminer la transformée en z inverse en effectuant la division polynomiale ou en appliquant le théorème des résidus.

I.4.3. Relation entre la transformée en z et la transformée de Fourier

En partant de l'expression de la transformée en z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{I.10}$$

où le nombre complexe z peut s'écrire sous la forme suivante :

$$z = r e^{j\theta} = r e^{j2\pi f} \quad \text{I.11}$$

et en posant $r = 1$, on obtient

$$X(z) = X(1 \cdot e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} = X(f) \quad \text{I.12}$$

Il apparait clairement qu'on peut déterminer la transformée de Fourier $X(e^{j\theta})$ à partir de $X(z)$ en remplaçant z par $e^{j\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$ c'est-à-dire en prenant en compte toutes les valeurs de z pour lesquelles $|z| = 1$ (cercle de rayon unité dans le plan des z).

I.5. Fonction de transfert en z d'un système numérique

Pour une entrée $x(n)$ la sortie du filtre $y(n)$ s'obtient en appliquant l'équation de convolution [2]:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \quad \text{I.13}$$

Dans le plan des z , cette relation devient :

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad \text{I.14}$$

$H(z)$, qui est la transformée en z de la réponse impulsionnelle du système linéaire, représente alors sa fonction de transfert.

La fonction de transfert $H(z)$ est, en général, un quotient de deux polynômes en z :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad \text{I.15}$$

On peut aussi utiliser une autre forme pour représenter la fonction de transfert. Soient $z_i ; i = 1$ à m , les racines du numérateur (appelés zéros), et $p_k ; k = 1$ à n , les racines du dénominateur (appelés pôles). On peut exprimer la fonction de transfert selon :

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)} \quad \text{I.16}$$

Lors de la programmation d'un filtre numérique, nous devons nous assurer que celui-ci soit réalisable, c'est-à-dire qu'il puisse être, le cas échéant, câblé et utilisé.

I.6. Réalisabilité du filtre

Pour qu'un filtre numérique soit réalisable, il doit vérifier les trois conditions suivantes [2]:

I.6.1. Invariance dans le temps

Un filtre numérique est invariant dans le temps s'il réagit de la même façon à une excitation d'entrée quel que soit l'intervalle de temps où est appliquée cette excitation [2].

$$y(n) = f(x(n)) \rightarrow y(n - p) = f(x(n - p)) \quad \text{I.17}$$

I.6.2. Causalité

Un filtre numérique est causal si l'absence d'excitation à l'entrée se traduit par un signal nul à la sortie.

I.6.3. Stabilité

La notion de stabilité des filtres est l'un des critères les plus importants à prendre en compte lors de la conception d'un filtre numérique. En effet, si le filtre se révèle instable, il n'aura aucune utilité pratique et peut même se révéler nocif.

✓ Théorème 1

Un filtre numérique de réponse impulsionnelle $\{h(n), n = 1, 2, 3 \dots\}$ est dit stable si et seulement si la somme de tous les échantillons de sa réponse impulsionnelle est finie.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \quad \text{I.18}$$

✓ Théorème 2

Un filtre numérique causal de fonction de transfert $H(z)$ est stable si et seulement si tous les pôles de $H(z)$ sont d'amplitude inférieure à 1. Ceci est équivalent à dire que tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité dans le plan des z .

I.7. Différents types de filtre numérique

L'une des classifications possibles des filtres numériques consiste à tenir compte de la durée de leur réponse impulsionnelle. On distingue alors deux grandes classes de filtres numériques [2] :

I.7.1. Les filtres à réponse impulsionnelle finie (ou filtre RIF)

Ce sont des filtres numériques caractérisés par une réponse uniquement basée sur les valeurs du signal d'entrée. Du fait du nombre fini des échantillons de la réponse impulsionnelle, ces filtres sont toujours stables.

$$\begin{cases} h(n) = 0 & \text{pour } n \geq N \\ h(n) \neq 0 & \text{pour } n = 0, 1, 2 \dots N - 1 \end{cases} \quad \text{I.19}$$

I.7. 1. 1. Caractéristiques des filtres RIF

- $\sum_{i=0}^N |h(n)| < +\infty$ I.20
- La relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie est donnée par :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n - i) \quad \text{I.21}$$

Où les b_i sont des constantes et N désigne la longueur du filtre.

- La fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad \text{I.22}$$

- Une phase linéaire.
- Une plus grande stabilité numérique que les RII.
- Une grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement.

I.7.2. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (ou filtre RII)

Ils sont nommés ainsi parce que, leur réponse impulsionnelle est de durée théorique infinie.

$$h(n) \neq 0 \text{ pour } n = 0, 1, \dots, +\infty$$

Ce sont des filtres numériques tels que le signal de sortie dépend, à la fois, du signal d'entrée et des échantillons précédents de ce signal de sortie. Pour cette raison, ils sont aussi nommés filtres récurrents.

I.7. 2. 1. Caractéristiques des filtres RII

Les principales caractéristiques des filtres RII sont :

- La relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{I.23}$$

- La fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad \text{I.24}$$

- Les RII peuvent être instables en raison de leur structure à base de pôles et de zéros :

$$H(z) = b_0 z^{M-N} \frac{\prod_{i=0}^N (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)} \quad \text{I.25}$$

- Une plus grande sensibilité numérique (quantification des coefficients, bruits de calculs).

Il faut retenir qu'en raison de leur instabilité éventuelle, un soin particulier doit être accordé à la vérification de la stabilité des filtres RII avant toute utilisation de ces derniers.

I.8. Structures des filtres numériques

On distingue deux types de réalisation de filtre numérique : la structure transversale et la structure récursive. Ces réalisations sont effectuées à partir de circuits numériques de base (sommateurs, multiplieurs,...).

I.8. 1. Structure transversale (ou non récursive)

Cette réalisation est dite non récursive ou transversale car elle ne fait apparaître aucun bouclage de la sortie sur l'entrée (la sortie ne dépend que des entrées aux instants précédents). Elle est associée exclusivement aux filtres RIF. C'est essentiellement la partie numérateur de la fonction de transfert $H(z)$.

L'équation aux différences est donnée par:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(n-N+1) + b_N x(n-N) \quad \text{I.26}$$

les b_i représentant les coefficients du filtre.

On a donc, dans le domaine des z :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad \text{I.27}$$

Pour la réalisation de ce filtre il suffit d'effectuer un nombre fini de multiplications et d'additions. Le nombre de multiplications est égal à (N) et le nombre d'additions à $(N - 1)$.

Deux types de modèle sont alors possibles, dits structure directe et structure transposée, représentés par la figure I.8 :

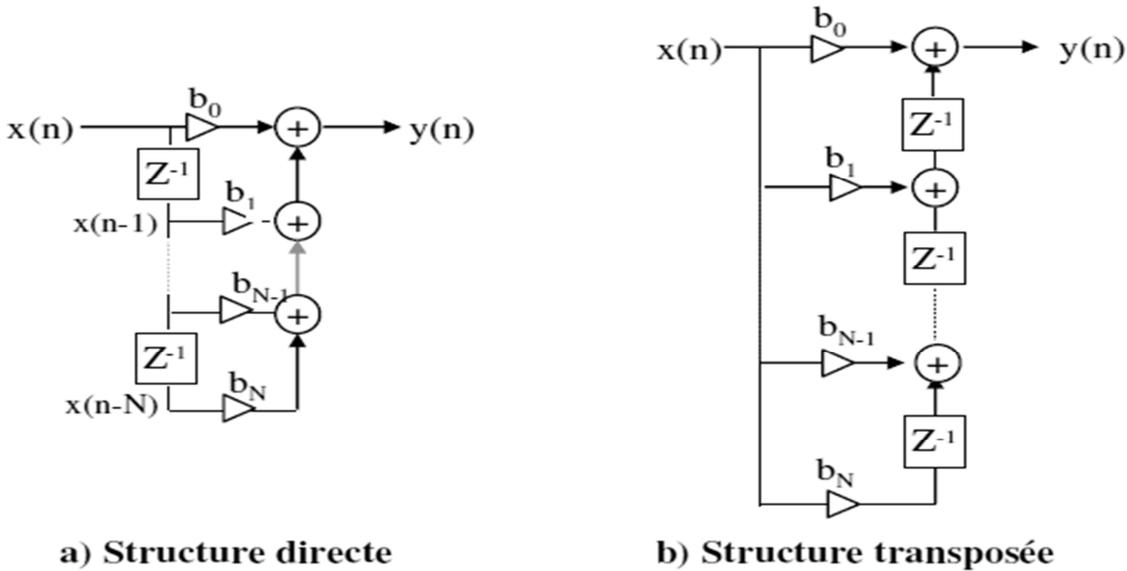


Figure I.7 : Structures de réalisation transversale.

Ces structures ne possédant pas de boucle de retour, elles sont inconditionnellement stables.

I.8. 2. Structure récursive

Elle correspond au cas où la sortie dépend de l'entrée et des sorties précédentes. C'est essentiellement le cas des filtres RII.

L'équation aux différences est donnée par :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n - i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n - i) \tag{I.28}$$

et la fonction de transfert en z par :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \tag{I.29}$$

On distingue alors la structure directe et celle en cascade:

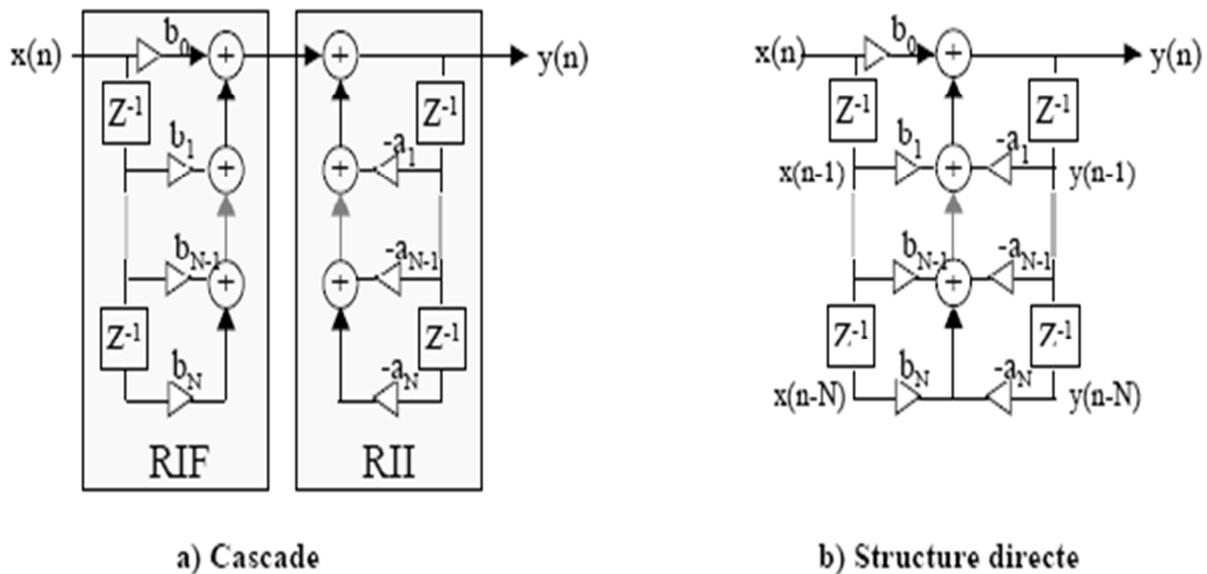


Figure I.8 : Structures de réalisation récursive.

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les notions fondamentales couramment utilisées en traitement numérique du signal telles que la numérisation des signaux, les opérateurs de traitement (la transformée en z essentiellement) et les différentes possibilités et différents types de filtrage numérique.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude d'un type particulier de filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) qui est le filtre de Kalman.

Chapitre II
Etude du filtre de
Kalman

II.1. Introduction

Le filtre de Kalman est un filtre récursif, qui utilise une approche temporelle [9]. Il permet d'estimer l'état (cet état correspond à l'information utile) d'un système dynamique à partir d'une information, à priori, sur l'évolution de cet état (modèle) et de mesures réelles [10]. L'utilisation de ce filtre est particulièrement recommandée lorsque l'imprécision sur les données traitées peut être interprétée comme un bruit aléatoire, dont la distribution est connue à priori [9].

Le filtre de Kalman est un outil de traitement utilisé dans une large gamme de domaines technologiques tels que le traitement du signal, l'automatique le radar et les systèmes de communication. Il est également de plus en plus utilisé en dehors du domaine du traitement du signal, par exemple en météorologie et en océanographie, en finance et en navigation [10] [11].

Ce problème est, en effet, assez général puisqu'il s'agit, dans tous les cas, d'estimer l'état d'un système dynamique à partir d'observations bruitées.

Lorsque le système est modélisé par des équations linéaires, l'estimation d'état réalisée est optimale au sens de la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation à posteriori.

Le filtre de Kalman peut également être utilisé dans les situations où nous voulons lisser, filtrer ou prédire les états d'un système dynamique et linéaire, suivant la quantité d'informations disponibles [12] [10].

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions, les concepts, les définitions et les principes généraux du filtre de Kalman.

II.2. Evolution historique du filtre de Kalman

Rudolf Kalman, né en 1930, poursuit des études scientifiques dans les domaines de l'électronique et de l'automatique et soutint une thèse en 1957 sur le comportement des solutions des équations récurrentes du second degré. A partir de 1955, il travailla dans différentes entreprises en tant qu'automaticien. En 1958, alors qu'il travaillait au Research Institute for Advanced Studies à Blatmore, il eut l'idée originale d'employer le formalisme des équations d'état au filtre de Wiener, ce qui lui permit de construire l'estimateur que nous connaissons aujourd'hui [13].

En 1960, alors que Kalman visitait la NASA, un des responsables, F.Schmidt comprit la possibilité d'appliquer les résultats de Kalman pour le projet "Apollo" pour l'estimation et la commande de la trajectoire [11] [13]. Schmidt travailla sur le sujet et on peut dire que ce fut la première réelle implantation du filtre.

L'application du filtre de Kalman (estimateur linéaire) pour l'estimation de la position d'un objet nécessite, assez souvent, la linéarisation des équations d'un système non linéaire. Cette étape supplémentaire conduit à définir ce que l'on appelle, aujourd'hui, le filtre de Kalman étendu.

II.3. Notions sur les signaux aléatoires et l'estimation

II.3.1. Les signaux aléatoires

La plupart des signaux utilisés en pratique comportent une certaine incertitude dans leurs évolutions. Cette incertitude peut, dans certains cas, être décrite par une loi de probabilité (exemple : Loi gaussienne à paramètres connus ou inconnus).

II.3.1.1. Définition

Un signal aléatoire $x(t, w)$ est une fonction de deux variables dont l'une est généralement le temps (continu ou discret) et l'autre une épreuve dans un espace de probabilité (Ω) [14] [15].

Pour t fixé, $x(t, w)$ est une variable aléatoire ;

Pour w fixé, le signal $x(t, w)$ est un échantillon du signal aléatoire ;

Pour t et w fixés, $x(t, w)$ est un nombre.

II.3.1.2. Moments statistiques

- **Moments statistiques d'ordre 1 (moyenne statistique)**

Ce moment correspond à la moyenne sur l'ensemble des évènements possibles mesurés dans un intervalle de temps donné. Le résultat, dans le cas général, est donc une fonction du temps.

Dans le cas continu :

$$m(t) = E(x(t)) = \int_{\Omega} x(t, w) p(w) dw \quad \text{II.1}$$

Dans le cas discret :

$$m(n) = \sum_{i=1}^l p_i x_i \quad \text{II.2}$$

Si cette moyenne ne dépend pas de temps, on dit que le signal aléatoire est stationnaire à l'ordre 1. Si la moyenne est nulle le signal aléatoire est dit centré.

Les deux propriétés principales de l'espérance mathématique sont données par :

1. L'espérance est linéaire :

$$\forall a, b \in R, \quad E[ax + by] = a E[x] + b E[y] \quad \text{II.3}$$

2. Si les deux variables x et y sont indépendantes, alors :

$$E[x y] = E[x] E[y] \quad \text{II.4}$$

- **Variance :**

On définit la variance d'un signal aléatoire dans le cas continu comme dans le cas discret par [14] :

$$\sigma^2 = E[x^2] - E(x)^2 = E[(x - E(x))^2] \quad \text{II.5}$$

Cette grandeur permet de caractériser la distribution des amplitudes du signal par rapport à sa valeur moyenne.

Pour un signal aléatoire centré ($E(x) = 0$), la variance est alors égale à la puissance.

$$\sigma^2 = E[x^2] = p \quad \text{II.6}$$

- **Covariance :**

Cette grandeur est l'équivalente de la variance appliquée à deux instants différents t_1 et t_2 . On a alors [14] :

Dans le cas continu :

$$\gamma(t_1, t_2) = E[x(t_1) x^*(t_2)] - m(t_1) m^*(t_2) \quad \text{II.7}$$

Dans le cas discret :

$$\gamma(n, k) = E[x_n x_k^*] - m(n)m^*(k) \quad \text{II.8}$$

- **Moment statistique d'ordre 2 (fonction d'autocorrélation statistique) :**

Ce moment R_{xx} correspond à la moyenne statistique des produits des échantillons du signal pris à des instants différents t_1 et t_2 . Ceci correspond, alors, aux expressions suivantes [14] :

Dans le cas continu :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1) x^*(t_2)] \quad \text{II.9}$$

Dans le cas discret :

$$R_{xx}(n, k) = E[x_n x_k^*] \quad \text{II.10}$$

II.3.1.3. Densité spectrale de puissance

Selon le théorème de Wiener-Kintchine la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ d'un signal aléatoire $x(t)$ correspond à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrelation $R_{xx}(\tau)$ [14].

En continu :

$$S_{xx}(f) = TF[R_{xx}(\tau)] \quad \text{II.11}$$

En discret :

$$S_{xx}(v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-2j\pi nv} \quad \text{II.12}$$

τ représentant la durée de l'intervalle entre t_1 et t_2 , soit $\tau = t_1 - t_2$

II.3.1.4. Stationnarité

Un signal aléatoire est dit stationnaire si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine de temps [10].

Ainsi, un signal aléatoire est dit stationnaire à l'ordre 2 si sa moyenne est constante ($m(t) = m$) et sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de la translation τ ($R_{xx}(t, \tau) = R_{xx}(\tau)$).

II.3.1.5. Cas particulier de signaux aléatoires

a) Le signal gaussien :

Un signal gaussien est défini par sa moyenne m et sa variance σ^2 . On le représente par le symbole $N(m, \sigma^2)$. Sa densité de probabilité est donnée par [10] :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{II.13}$$

b) Le bruit blanc :

Un bruit blanc est un signal aléatoire dont la densité spectrale de puissance est de bande de fréquence infinie. Son autocorrelation est alors proportionnelle à un pic de Dirac. Les valeurs d'un tel signal, pris à deux instants, même très proche, ne sont pas corrélées [10].

Si l'on combine les deux signaux précédents, on définit les bruits blancs gaussiens $w(t)$ et $v(t)$ que nous allons utiliser dans le cadre de filtre de Kalman. Ceux-ci sont donc entièrement définis par leurs densités spectrales respectives.

On a alors :

$$E[w(t)w(t + \tau)^T] = W(t) \delta(\tau) \quad \text{II.14}$$

$$E[v(t)v(t + \tau)^T] = V(t) \delta(\tau) \quad \text{II.15}$$

Les matrices $W(t)$ et $V(t)$ deviennent constantes dans le cas du bruit blanc stationnaire.

II.3.2. Notion d'estimation

L'estimation est un domaine des mathématiques statistiques qui permet, à partir de mesures effectuées sur un système, d'estimer les valeurs de différents paramètres de ce système.

II.3.2.1. L'estimateur

Un estimateur de paramètre inconnu θ d'un modèle ou d'une loi de probabilité est une fonction qui fait correspondre à une suite d'observations y_1, y_2, \dots, y_n issues du modèle ou de la loi de probabilité, la valeur $\hat{\theta}$ que l'on nomme estimé ou estimation.

$$\hat{\theta}_n = f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{II.16}$$

Un estimateur ne doit jamais dépendre de θ ; il ne dépend que des observations empiriques.

II.3.2.2. Propriétés d'un estimateur

La qualité d'un estimateur, c'est-à-dire son aptitude à déterminer la grandeur cherchée de la manière la plus précise possible, est caractérisée par un certain nombre de paramètres qui sont les suivants :

- **Biais d'un estimateur**

En statistique un biais est une démarche ou un procédé qui engendre des erreurs dans les résultats d'une étude. Le biais de l'estimateur noté $B(\hat{\theta})$ est la différence moyenne entre sa valeur et celle du paramètre qu'il estime. Le biais doit être égal à 0 pour avoir un estimateur parfait (dans ce cas, l'estimateur est dit donc sans biais) [14].

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad \text{II.17}$$

- **Variance d'un estimateur**

La variance est une grandeur statistique permettant de caractériser la dispersion des échantillons d'une variable aléatoire, c'est-à-dire de quelle manière ces échantillons se répartissent autour de la valeur moyenne.

La variance de l'estimateur, $Var(\hat{\theta})$ permet de renseigner sur la précision de l'estimateur. Plus elle est faible, plus l'estimateur sera précis.

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 \quad \text{II.18}$$

- **Convergence**

Une des propriétés principales que doit vérifier un estimateur est d'être convergent. En d'autres termes, lorsque la taille des échantillons tend vers l'infini, il faut que l'estimateur se rapproche du paramètre qu'il estime.

Il existe plusieurs façons de mesurer cette proximité qui donnent lieu à la définition de plusieurs types de convergence on peut citer:

Définition 1

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent en probabilité si [16] :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0 \quad \text{II.19}$$

Ceci peut se traduire par limite de $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 2

L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent en moyenne quadratique si [16] :

$$Var(\hat{\theta}_n) = 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \quad \text{I.20}$$

Avec :

n : Taille de l'échantillon

II.4. Présentation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant d'un système, l'estimation de l'état précédent et des mesures actuelles sont nécessaires. Le principe d'un tel filtre repose sur un modèle à variables d'état basé sur deux équations [17] :

- L'équation récursive de modélisation du processus aléatoire x_k (vecteur d'état) discret, dite équation d'état ou équation de transition.
- L'équation d'observation (ou équation de mesure) du processus y_k (vecteur de mesure).

Les équations de base du filtre de Kalman sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k & w_k \rightarrow N(0, Q_k) \\ y_k = H_k x_k + v_k & v_k \rightarrow N(0, R_k) \end{cases} \quad \text{II.21}$$

Avec :

x_k : Vecteur d'état à l'instant k qui inclut les quantités à estimer, de taille $n * 1$;

A_k : Matrice de transition. Elle décrit l'évolution du vecteur d'état de l'instant $k - 1$ à l'instant k , de taille $n * n$;

B_k : Matrice de commande à l'instant k , dépend de la modélisation du système ;

H_k : Matrice d'observation (mesure). Elle est en fait le lien entre les paramètres du système et les mesures. de taille $m * n$;

u_k : Vecteur représentant les commandes appliquées au système à l'instant k ;

w_k : Bruit de modélisation lié à l'incertitude que l'on a sur le modèle de processus ;

Q_k : Matrice de variances-covariances du bruit de processus à l'instant k .

y_k : Vecteur de mesure à l'instant k , de taille $m * 1$.

v_k : Bruit de mesure, de taille $m * 1$.

R_k : Matrice de variances-covariances du bruit de mesure à l'instant k .

Les bruits sont considérés comme blancs, gaussiens, centrés, indépendants entre eux et indépendants de l'état du système. On a alors :

$$E(w_k) = 0 \text{ et } E(v_k) = 0 \quad \forall k \quad \text{II.22}$$

$$E(x_0 w_i^T) = 0 \text{ et } E(x_0 v_i^T) = 0 \quad \forall i \quad \text{II.23}$$

$$E(w_k v_i^T) = 0. \quad \forall k, i \quad \text{II.24}$$

$$E(w_k w_i^T) = Q_k \delta_{ik}. \quad \text{II.25}$$

$$E(v_k v_i^T) = R_k \delta_{ik}. \quad \text{II.26}$$

L'objectif est de déterminer une estimation récursive des x_k à partir des mesures y_k et du modèle de génération du processus.

II.5. Fonctionnement du filtre de Kalman

II.5.1. Les différentes phases du filtrage

L'estimation optimale consiste à trouver la meilleure estimation \hat{x}_k de l'état x_k en minimisant un critère qui est la variance de l'erreur d'estimation [18] :

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad \text{II.27}$$

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad \text{II.28}$$

Le filtrage de Kalman comporte deux phases distinctes : Prédiction et mise à jour. La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation courante. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

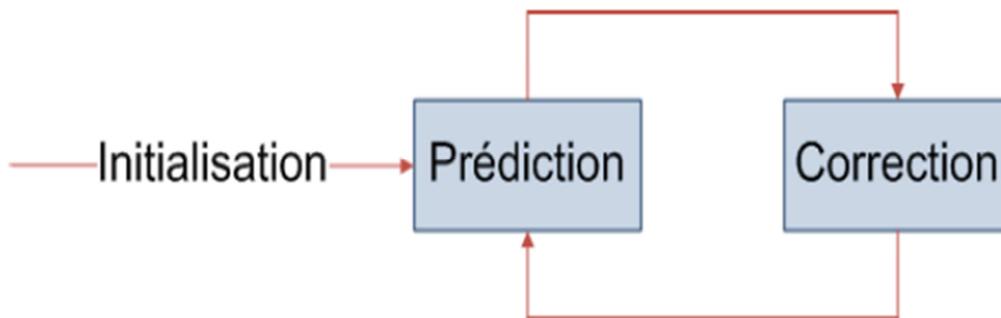


Figure II.1 : Les étapes du filtre de Kalman

- **La phase de prédiction**

On se place à l'instant k . A cet instant, on dispose d'une estimation initiale fondée sur la connaissance du processus et des mesures jusqu'à l'instant précédent, c'est-à-dire $k - 1$. Cette estimation est appelée estimation à priori.

Si on notera $\hat{x}_{k/k-1}$ l'estimation d'état à priori, donc l'erreur à priori est donnée par :

$$e_{k/k-1} = x_k - \hat{x}_{k/k-1} \quad \text{II.29}$$

Ainsi que la matrice de covariance de l'erreur à priori donnée par :

$$P_{k/k-1} = E[e_{k/k-1}(e_{k/k-1})^T] = E[(x_k - \hat{x}_{k/k-1})(x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T] \quad \text{II.30}$$

Les équations de la phase de prédiction sont :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \\ P_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1/k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{cases} \quad \text{II.31}$$

• **La phase de mise à jour (correction)**

Nous allons, maintenant, utiliser la mesure y_k pour corriger l'estimation à priori $\hat{x}_{k/k-1}$ et obtenir l'estimation à posteriori $\hat{x}_{k/k}$.

L'erreur à posteriori est :

$$e_{k/k} = x_k - \hat{x}_{k/k} \tag{II.32}$$

La matrice de covariance de l'erreur à posteriori s'écrit alors :

$$P_{k/k} = E [e_{k/k}(e_{k/k})^T] = E [(x_k - \hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k})^T] \tag{II.33}$$

Les équations de la phase de correction sont :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \\ P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \end{cases} \tag{II.34}$$

Avec :

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \tag{II.35}$$

K_k : Gain de Kalman optimal, au sens de l'erreur quadratique moyenne, c'est-à-dire qui entraîne une erreur à posteriori minimale, est appelé gain de Kalman.

I : est la matrice identité de même taille que $P_{k/k-1}$.

II.5.2. Notion d'innovation

Dans la phase de mise à jour (correction), l'estimation à priori ($\hat{x}_{k/k-1}$) est corrigée par l'ajout du terme correctif ($y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}$), qui est multiplié par le gain de Kalman (K_k).

De façon générale, on rappelle que l'équation d'observation s'écrit:

$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{II.36}$$

A partir des mesures y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , on peut calculer l'estimation $\hat{y}_{k/k-1}$:

$$\hat{y}_{k/k-1} = H_k \hat{x}_{k/k-1} + \hat{v}_{k/k-1} \tag{II.37}$$

Par hypothèse, v_k est indépendant de $y_i, \forall i \leq k-1$. Par conséquent, l'estimation de v_k sachant y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , est égale à la moyenne conditionnelle, qui correspond à la moyenne simple compte tenu de l'indépendance des variables.

On a ainsi l'expression suivante :

$$\hat{v}_{k/k-1} = E[v_k/y_0, y_1 \dots \dots \dots y_{k-1}] = E[v_k] = 0 \quad \text{II.38}$$

étant v_k supposé de moyenne nulle.

On a donc :

$$\hat{y}_{k/k-1} = H_k \hat{x}_{k/k-1} \quad \text{II.39}$$

Le terme correctif peut donc être écrit :

$$y_k - \hat{y}_{k/k-1} = y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1} \quad \text{II.40}$$

Ce terme représente ce qu'on appelle l'innovation (de l'observation) et correspond à l'information nouvelle apportée par l'observation à l'instant k . Le terme innovation vient du fait que cette information n'est pas prédite par les observations jusqu'à l'instant $k - 1$ inclus.

II.5.3. Interprétation de la mise à jour

A partir de l'équation de mise à jour suivante, qui présente l'estimation à posteriori $\hat{x}_{k/k}$ obtenue en ajoutant à l'estimation à priori ($\hat{x}_{k/k-1}$) le terme d'innovation (en utilisant les mesures disponibles à l'instant k) multiplié par le gain K_k :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad \text{II.41}$$

On peut noter ce qui suit :

- Le premier terme de droite s'écrit encore $\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}$, c'est donc la prédiction a priori de x_k en utilisant le modèle, mais pas l'observation.
- Le second terme est la correction de la prédiction fondée sur le modèle seul, correction qui repose elle sur l'innovation, c'est-à-dire directement sur les observations.

On peut remarquer aussi que le gain de Kalman varie selon la confiance (précision des mesures) que l'on peut accorder aux observations, c'est-à-dire le gain de Kalman augmente si les observations deviennent plus précises et inversement.

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} = \frac{P_{k/k-1} H_k^T}{H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k} \quad \text{II.42}$$

- Le gain K_k diminue si l'estimation par le modèle devient plus précise ($P_{k/k-1} \rightarrow 0$);
- Le gain K_k augmente si les observations deviennent plus précises ($R_k \rightarrow 0$).

II.5.4. Stabilité du filtre de Kalman

L'un des avantages du filtre de Kalman provient du fait que, pratiquement, son gain varie dans le temps. Cependant, pour des applications où le filtre, après un certain nombre d'itérations, atteint un état quasi-permanent, le gain est constant, et on peut alors étudier la stabilité de l'équation de mise à jour [17]:

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad \text{II.43}$$

Avec :

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} \quad \text{II.44}$$

D'où l'expression suivante :

$$\hat{x}_{k/k} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} + K_k(y_k - H_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}) \quad \text{II.45}$$

$$\hat{x}_{k/k} = (A_{k-1} - A_{k-1} K_k H_k) \hat{x}_{k-1/k-1} + K_k y_k \quad \text{II.46}$$

En passant dans le domaine de représentation en z , on obtient ce qui suit:

$$\hat{x}_{k/k}(z) = (A_{k-1} - A_{k-1} K_k H_k) z^{-1} \hat{x}_{k/k} + K_k y_k(z) \quad \text{II.47}$$

$$(z - (A_{k-1} - A_{k-1} K_k H_k)) \hat{x}_{k/k}(z) = z K_k y_k(z) \quad \text{II.48}$$

$$\hat{x}_{k/k}(z) = \frac{z K_k y_k(z)}{(z - (A_{k-1} - A_{k-1} K_k H_k))} \quad \text{II.49}$$

En remplaçant $A_{k-1} - A_{k-1} K_k H_k$ par p on obtient :

$$\hat{x}_{k/k}(z) = \frac{z K_k y_k(z)}{(z - p)} \quad \text{II.50}$$

La stabilité du filtre est alors liée aux racines du polynôme caractéristique et spécialement aux pôles qui annulent le dénominateur.

La stabilité est garantie si les valeurs de $A_{k-1} - A_{k-1}K_kH_k$ ont leurs valeurs absolues de partie réelle inférieures à 1.

II.6. Algorithme du filtre de Kalman

Pour obtenir l'état optimal du système, on doit combiner les observations y_k avec l'information fournie par le modèle x_k .

L'algorithme suivant indique les différentes étapes qui permettent d'obtenir un état estimé à chaque instant [18] [19] [20].

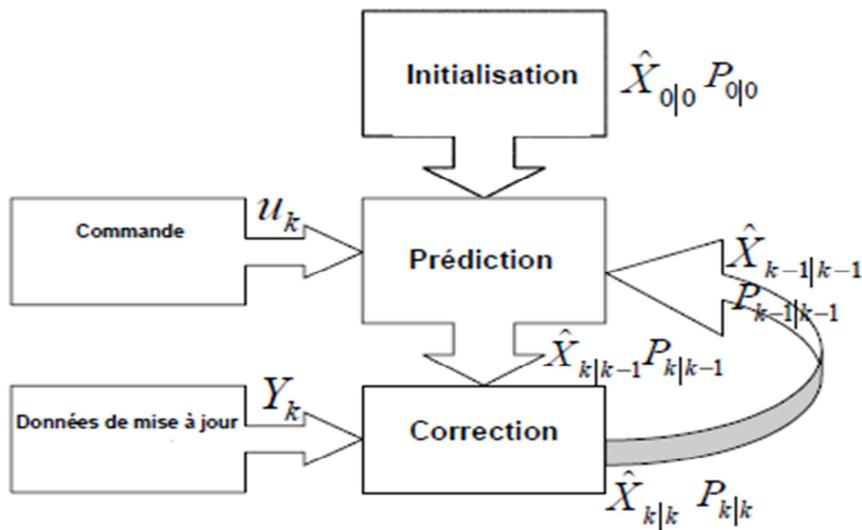


Figure II.2 : Algorithme récursif du filtre de Kalman [19]

Les différentes étapes du calcul sont les suivantes :

1) Initialisation :

Cette étape consiste à calculer les valeurs initiales du vecteur d'état \hat{x}_0 , la matrice de variances-covariances de l'erreur d'estimation P_0 , la matrice de variances-covariances du bruit de processus Q_0 ainsi que la matrice de variances-covariances du bruit de mesure R_0 .

$$\hat{x}_0 = E[x_0] \tag{II.51}$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \tag{II.52}$$

$$Q_0 = E[(w - \bar{w})(w - \bar{w})^T] \tag{II.53}$$

$$R_0 = E[(v - \bar{v})(v - \bar{v})^T] \tag{II.54}$$

- 2) Calcul de l'estimé $\hat{x}_{k/k-1}$ et de la matrice de covariance $P_{k/k-1}$ à partir des mesures disponibles à l'instant $k - 1$:

$$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \quad \text{II.55}$$

$$P_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad \text{II.56}$$

- 3) Calcul du gain de Kalman :

$$K_k = P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1} \quad \text{II.57}$$

- 4) Mise à jour de l'estimation :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - H_k\hat{x}_{k/k-1}) \quad \text{II.58}$$

- 5) Calcul de la matrice de covariance de l'erreur :

$$P_{k/k} = (I - K_kH_k)P_{k/k-1} \quad \text{II.59}$$

- 6) Préparation du pas suivant :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k\hat{x}_{k/k} + B_ku_k \quad \text{II.60}$$

$$P_{k+1/k} = A_kP_{k/k}A_k^T + Q_k \quad \text{II.61}$$

II.7. Filtre de Kalman étendu

La version de base du filtre de Kalman est destinée à être appliquée aux systèmes linéaires. Cependant, les phénomènes physiques sont, dans leur majorité, non linéaires.

La non linéarité peut être associée au modèle du processus, au modèle d'observation ou bien aux deux. Ces non linéarités présentes dans le système rendent inapplicable le filtre de Kalman classique et il devient donc nécessaire de l'adapter.

L'une des approches les plus intuitives consiste à linéariser les fonctions non linéaires à travers un développement de Taylor autour de l'état estimé ; on se trouve alors dans un cas similaire à un filtrage de Kalman linéaire classique, et la technique obtenue est connue sous l'appellation de filtre de Kalman étendue (EKF).

Cette approche est implantée de façon analogue au filtrage classique. La seule différence concerne l'utilisation des matrices d'évolution et de mesure. Dans un filtre de Kalman classique, les matrices (la matrice d'évolution et la matrice de mesure) sont directement issues des équations de mesure et d'état. A l'opposé, dans un EKF estimant un processus non linéaire, ce n'est possible d'obtenir directement les matrices d'observation et d'état, il faut qu'on linéarise les fonctions du système localement (autour du point d'estimation courant). On obtient donc les

matrices de mesure et de transition en prenant les matrices des dérivés partielles des équations non linéaires (appelées aussi les jacobiennes)

Pour le cas d'un système non linéaire, les équations d'état et de mesure deviennent :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, w_k, u_k, k) & w_k \rightarrow N(0, Q_k) \\ y_k = h(x_k, v_k, k) & v_k \rightarrow N(0, R_k) \end{cases} \quad \text{II.62}$$

De la même manière que dans le cas de filtre de Kalman simple, w et v sont des bruits blancs, gaussiens, de moyenne nulle et de variances respectives Q et R .

II.7.1. Equations du filtre de Kalman étendu (EKF)

Les fonctions f et h (de l'équation (II.62) représentant respectivement la fonction d'évolution d'état et la fonction de mesure) ne sont pas des fonctions linéaires. Comme il n'est pas possible de les utiliser directement pour obtenir les équations du filtre de Kalman étendu (calcul des matrices de covariance d'erreur et du gain de Kalman), on utilise les matrices Jacobiennes. Ces dernières sont calculées, à chaque instant, autour du point d'estimation courant \hat{x} .

Le développement en série de Taylor des équations (II.62) s'écrit comme suit [21] [22]:

$$\begin{cases} x_{k+1} \approx f(\hat{x}_k, w_k, k) + A_k(x_k - \hat{x}_k) + F_k(w_k - \hat{w}_k) \\ y_k \approx h(\hat{x}_k, v_k, k) + H_k(x_k - \hat{x}_k) + G_k(v_k - \hat{v}_k) \end{cases} \quad \text{II.63}$$

Et comme les vecteurs de bruit v_k et w_k ont, par hypothèse, une moyenne nulle les équations (II-63) sont approximées en considérant les estimés des bruits comme nuls :

On a alors :

$$\begin{cases} x_{k+1} \approx f(\hat{x}_k, 0, k) + A_k(x_k - \hat{x}_k) + F_k(w_k) \\ y_k \approx h(\hat{x}_k, 0, k) + H_k(x_k - \hat{x}_k) + G_k(v_k) \end{cases} \quad \text{II.64}$$

Avec :

A_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle dynamique f par rapport à x :

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad \text{II.65}$$

F_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle dynamique f par rapport à w :

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w=\hat{w}_k} \quad \text{II.66}$$

H_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle de mesure h par rapport à x :

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad \text{II.67}$$

G_k : Matrice Jacobienne des dérivées partielles du modèle de mesure h par rapport à v :

$$G_k = \left. \frac{\partial h}{\partial v} \right|_{v=\hat{v}_k} \quad \text{II.68}$$

A partir de là, les équations de prédiction et de correction deviennent :

- **Equations de prédiction :**

$$\hat{x}_{k/k-1} = f(\hat{x}_{k-1/k-1}, 0) \quad \text{II.69}$$

$$P_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1/k-1}A_{k-1}^T + F_{k-1}Q_{k-1}F_{k-1}^T \quad \text{II.70}$$

- **Equations de correction :**

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - h(\hat{x}_{k/k-1}, 0)) \quad \text{II.71}$$

$$K_k = P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + G_kR_kG_k^T)^{-1} \quad \text{II.72}$$

$$P_{k/k} = (I - K_kH_k)P_{k/k-1} \quad \text{II.73}$$

II.7.2. Algorithme du filtre de Kalman étendu

A l'issue de ce qui précède, les différentes étapes de l'algorithme de Kalman étendu sont les suivantes [19] :

- 1) **Initialisation du processus :**

$$\hat{x}_0 = E[x_0] \quad \text{II.74}$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad \text{II.75}$$

$$Q_0 = E[(w - \bar{w})(w - \bar{w})^T] \quad \text{II.76}$$

$$R_0 = E[(v - \bar{v})(v - \bar{v})^T] \quad \text{II.77}$$

- 2) Calcul des matrices Jacobiennes de fonction non linéaire f autour de l'état précédent (k-1) :

$$A_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1/k-1}} \quad \text{II.78}$$

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w} \right|_{\hat{x}_{k-1/k-1}} \quad \text{II.79}$$

- 3) Prédiction de l'état à l'instant k par le calcul de l'estimé $\hat{x}_{k/k-1}$ et de la matrice de covariance $P_{k/k-1}$ à partir des mesures disponibles à l'instant k-1 :

$$\hat{x}_{k/k-1} = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1/k-1}, 0) \quad \text{II.80}$$

$$P_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1/k-1}A_{k-1}^T + F_{k-1}Q_{k-1}F_{k-1}^T \quad \text{II.81}$$

- 4) Calcul des matrices Jacobiennes de fonction non linéaire h :

$$H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}} \quad \text{II.82}$$

$$G_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial v} \right|_{\hat{x}_{k/k-1}} \quad \text{II.83}$$

- 5) Correction de l'estimation par la mesure à partir des équations suivantes :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - h(\hat{x}_{k/k-1}, 0)) \quad \text{II.84}$$

$$K_k = P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + G_kR_kG_k^T)^{-1} \quad \text{II.85}$$

$$P_{k/k} = (I - K_kH_k)P_{k/k-1} \quad \text{II.86}$$

6- Bouclage sur l'étape 2

II.8. Les limites de filtre de Kalman : Problème de modélisation

Le filtrage de Kalman est une méthode d'estimation et de prédiction puissante prenant en compte la modélisation du système. Néanmoins, ce filtre n'est pas forcément l'outil à appliquer dans tous les cas [3].

En effet, le système doit être modélisé assez précisément afin d'obtenir un filtre efficace. Le problème provient du fait que certains systèmes sont difficilement modélisables et encore

moins linéaires. Dans le cas où la modélisation est trop approximative, le filtre n'est pas assez performant et l'erreur des estimations ne convergera pas assez rapidement provoquant alors un temps de calcul trop important.

Pour pallier au problème des systèmes non linéaires un filtre de Kalman étendu a été développé et permet de prendre en compte une modélisation non linéaire. Néanmoins, cette technique a quelques défauts. En premier lieu, la covariance de l'erreur ne converge pas obligatoirement. En effet, si le passage d'une estimation à une autre tend à sortir de la zone de linéarité, alors le modèle linéarisé n'est plus valable et il est possible que le filtre diverge. Le second défaut est son coût calculatoire plus important. En effet, de nouvelles matrices coûteuses rentrent en jeu, ce qui peut être une limite à son utilisation.

Une autre limite importante d'une telle méthode est que le filtre de Kalman permet de prendre en compte uniquement un modèle de bruit gaussien. Cette restriction limite donc l'utilisation du filtre de Kalman.

Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation intéressante, mais qui n'est utilisable que lorsque l'on peut décrire assez précisément notre système. S'il est impossible de trouver une modélisation correcte du système, il est préférable de se tourner vers d'autres méthodes.

II.9. Optimisation du filtre de Kalman par le filtre formeur

Le filtre de Kalman est un estimateur optimal si les bruits d'état et de mesure sont des bruits blancs et gaussiens.

Dans le cas où les bruits ne sont pas blancs et gaussiens, le filtre de Kalman ne donne pas une solution optimale. Pour remédier à ce problème, on utilise un filtre formeur.

Un filtre formeur d'un signal aléatoire $x(t)$ donné, est le filtre de fonction de transfert $H(f)$, tel que $x(t)$ généré par le passage d'un bruit blanc $b(t)$ dans $H(f)$ [14].

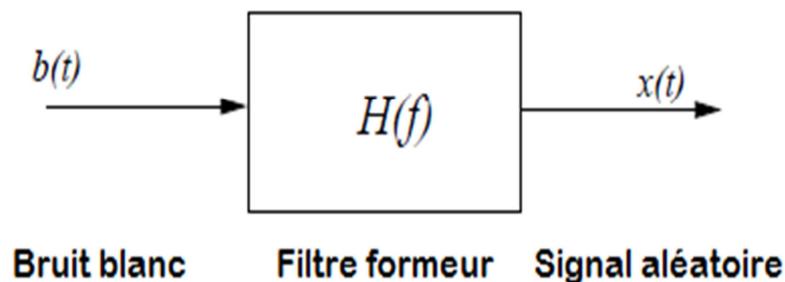


Figure II.3 : Principe du filtre formeur

Nous présentons ci-dessus la manière avec laquelle un filtre formeur est intégré dans la représentation d'état d'un système afin que ce dernier vérifie les hypothèses du filtre de Kalman :

Considérons un système désigné par les relations suivantes qui représentent les équations d'état et de mesure :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t)x(t) + G(t)w(t) \\ z(t) = H(t)x(t) + n(t) + v(t) \end{cases} \quad \text{II.87}$$

Où $n(t)$ désigne un bruit coloré que l'on souhaite définir par un filtre formeur et $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs. Un filtrage de Kalman classique ne pourra pas être employé pour un système de ce type sans risquer des erreurs d'estimation.

On définit alors le filtre formeur qui, à partir du bruit blanc $w_{ff}(t)$ génère le bruit coloré $n(t)$. La représentation d'état de ce filtre est :

$$\dot{x}_{ff}(t) = f_{ff}x_{ff}(t) + G_{ff}(t)w_{ff}(t) \quad \text{II.88}$$

$$n(t) = H_{ff}(t)x_{ff}(t) \quad \text{II.89}$$

L'indice ff est employé pour distinguer les grandeurs relatives au filtre formeur.

A partir de là, les bruits $w(t), w_{ff}(t)$ caractérisant le processeur défini par la représentation d'état sont tous des bruits blancs. On obtient alors les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{ff}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{ff}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(t) & 0 \\ 0 & G_{ff}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ w_{ff}(t) \end{bmatrix} \quad \text{II.90}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} H(t) \\ H_{ff}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{ff}(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad \text{II.91}$$

Le schéma représentant la structure d'un filtre formeur est alors le suivant :

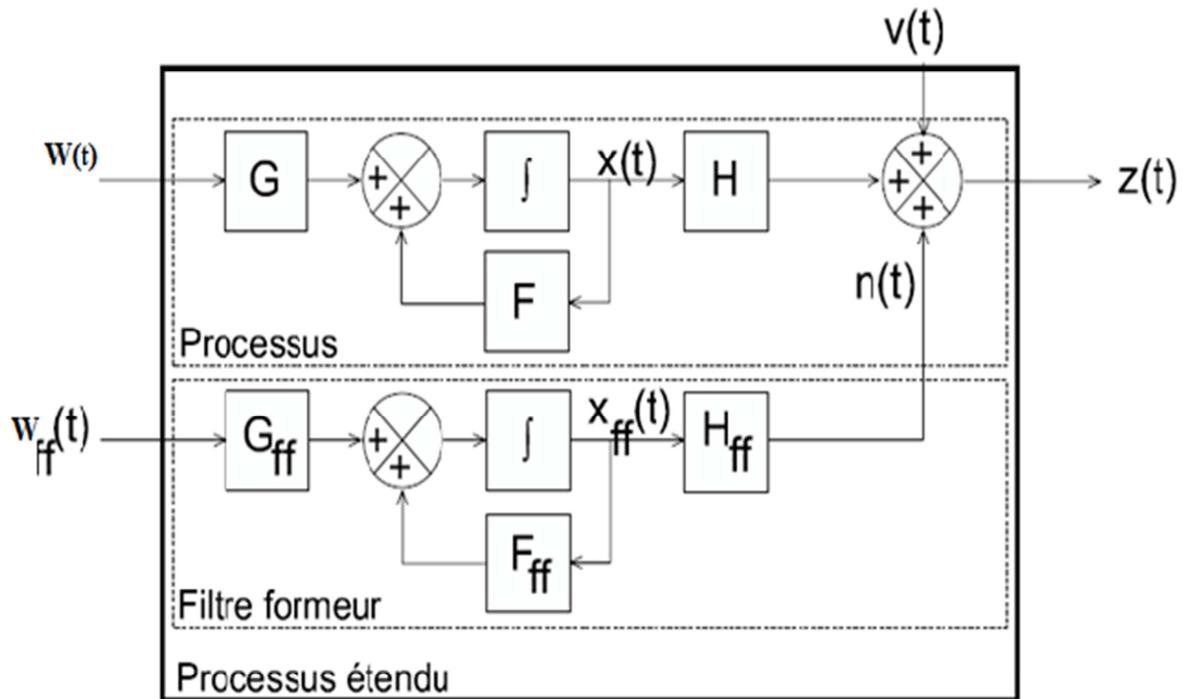


Figure II.4: Modélisation d'un système avec le filtre formeur sur le bruit d'observation.

II.10. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un outil de filtrage de type stochastique, qui est le filtre de Kalman simple utilisé dans le cas des systèmes linéaires puis nous avons introduit le filtre de Kalman étendu pour le cas des systèmes non linéaires.

Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation du signal ECG dans le but de lui appliquer le filtre de Kalman étendu.

Chapitre III

Modélisation du signal

ECG

III.1. Introduction

Comme indiqué précédemment, l'exploitation du filtre de Kalman nécessite de disposer, au préalable, d'un modèle mathématique du problème à traiter.

Dans notre application, nous nous intéressons au débruitage du signal ECG. Ce dernier doit être modélisé. Après un rappel des caractéristiques physiques du signal nous décrirons différentes techniques de modélisation en insistant sur la modélisation dynamique que nous utiliserons dans notre application.

III.2. Le muscle cardiaque

Le cœur occupe une position oblique entre les poumons et repose sur un muscle appelé diaphragme. Cet organe creux et musculaire, comparable à une pompe, assure la circulation du sang dans les veines et les artères et comprend quatre cavités: Deux cavités gauche formant l'oreillette et le ventricule gauche, et deux cavités droites formant l'oreillette et le ventricule droit.

Le cœur sert de moteur au système de circulation sanguine. Il bat avec une fréquence de soixante à quatre-vingt battements par minute chez un adulte en bonne santé. Chaque battement fait avancer un volume de 70 ml de sang [23].

La contraction du muscle cardiaque (ou myocarde) est provoquée par la propagation d'une impulsion électrique le long des fibres musculaires cardiaques, induite par la dépolarisation des cellules musculaires [24].

Dans le cœur, la dépolarisation prend normalement naissance dans le haut de l'oreillette droite (le sinus) et se propage ensuite dans les oreillettes, induisant la systole auriculaire qui est suivie d'une diastole (décontraction du muscle). L'impulsion électrique arrive alors au nœud auriculo-ventriculaire (AV), seul point de passage pour le courant électrique entre les oreillettes et les ventricules. A ce niveau, l'impulsion électrique subit une courte pause permettant au sang de pénétrer dans les ventricules puis emprunte alors le faisceau de His, qui est composé de deux branches principales allant chacune dans un ventricule. Les fibres constituant ce faisceau, complétées par les fibres de Purkinje, propagent l'impulsion électrique en plusieurs points des ventricules, et permettent ainsi une dépolarisation quasi instantanée de l'ensemble du muscle ventriculaire, malgré sa taille importante, ce qui assure une efficacité optimale dans la propulsion du sang ; cette contraction constitue la phase de systole ventriculaire. Enfin, Les fibres musculaires se repolarisent et reprennent leur état initial.

Le parcours du signal électrique est représenté sur la figure III.1.

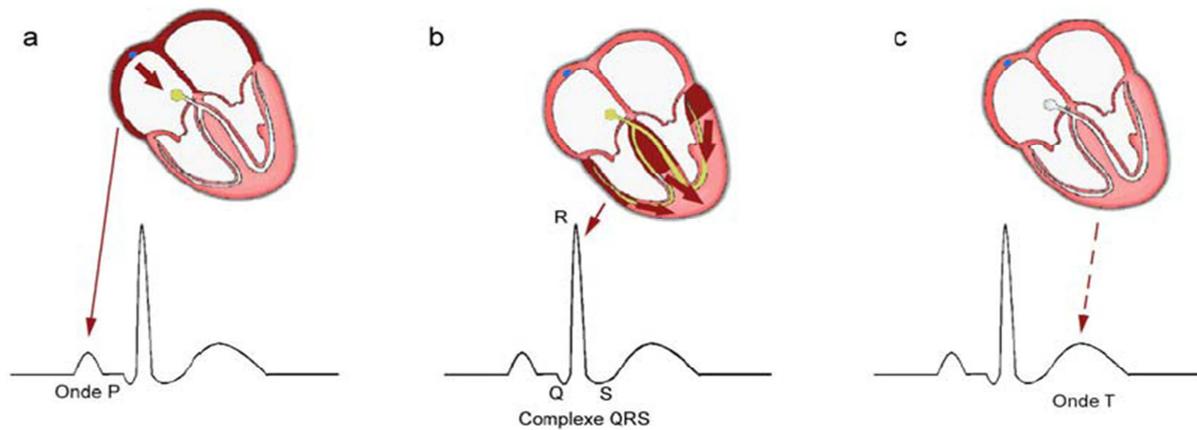


Figure III.1: Parcours du signal électrique cardiaque [24].

III.3. L'Electrocardiogramme (ECG)

Les renseignements sur l'activité électrique des cellules cardiaques sont fournis par l'électrocardiographie. Le signal graphique enregistrable est dit l'électrocardiogramme (ECG).

L'électrocardiogramme (ECG) est l'enregistrement de l'activité électrique du cœur, il se fait grâce à des électrodes cutanées placées à la surface du corps et qui permettent de mesurer les différences de potentiel en fonction du temps et d'obtenir ainsi les différentes dérivations [25]. Cet enregistrement offre au médecin l'opportunité de décider de l'état structurel et fonctionnel du cœur d'un patient.

III.3.1. Principe d'acquisition du signal ECG

L'électrocardiographie consiste à recueillir les variations du potentiel électrique cardiaque, à les amplifier puis les enregistrer. Les signaux captés étant particulièrement faibles, des amplificateurs de haute performances (gain, linéarité, minimum de bruit de fond) sont souvent nécessaires.

Les différentes étapes de l'acquisition du signal ECG sont représentées sur la figure suivante.

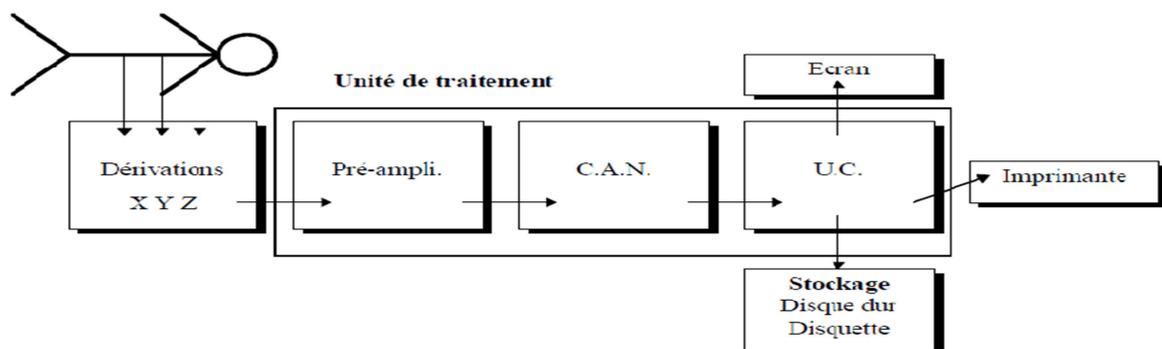


Figure III.2 : Synoptique de la chaîne d'acquisition d'un ECG haute résolution [26].

III.3.2. Les 12 dérivations électrocardiographiques

L'électrocardiogramme (ECG) standard à douze dérivations fut et demeure encore aujourd'hui la technique d'exploitation électrique la plus couramment utilisée. Il est composé de [27]:

- Trois dérivations périphériques bipolaires standards DI, DII et DIII (Einthoven, 1913) (figure III.3);
- Trois dérivations périphériques unipolaires augmentées aVR, aVL et aVF (Goldberger, 1942) (Figure III.4);
- Six dérivations unipolaires précordiales V1 à V6 (Wilson, 1932), leur emplacement est représenté sur la figure III.5.

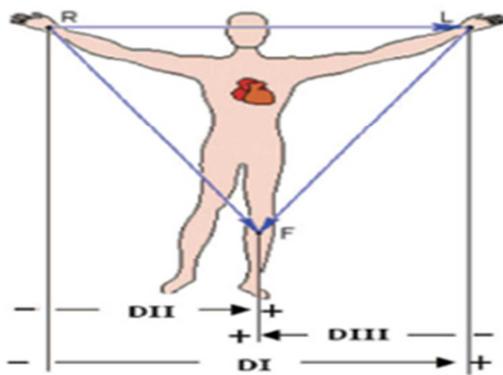


Fig III.3 : Triangle d'Einthoven [29]

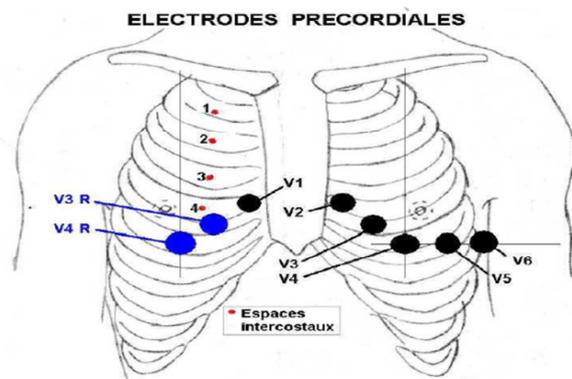


Fig III.5: Position de 6 électrodes précordiales [29]

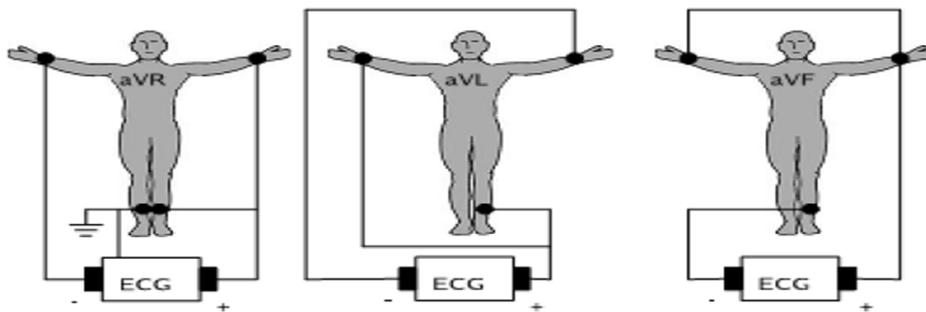


Figure III.4 : Montage de Goldberger pour l'enregistrement des dérivations unipolaires des membres [28]

Si R, L et F désignent respectivement les emplacements bras droit (right), bras gauche (left) et jambe gauche (foot) des électrodes et VR, VL et VF les potentiels correspondants, on obtient :

- Les 6 dérivations périphériques :

$$DI = V_L - V_R$$

$$aVR = VR - (VL + VF) / 2$$

$$DII = V_F - V_R$$

$$aVL = VL - (VR + VF) / 2$$

$$DIII = V_F - V_L$$

$$aVF = VF - (VR + VL) / 2$$

- Les 6 dérivations précordiales :

$$Vi = (VR + VF + VL) / 3$$

i variant de 1 à 6

III.3.3. Le tracé de l'Electrocardiogramme (ECG)

Le processus de dépolarisation et de repolarisation des structures myocardiques se présente dans l'ECG comme une séquence d'ondes superposées à une ligne de potentiel zéro, appelée ligne isoélectrique ou ligne de base.

Ces déflexions sont dites positives si elles sont situées au-dessus de la ligne de base, négatives sinon.

Pour chaque battement cardiaque, l'ECG enregistre, principalement, trois ondes successives comme indiqué sur la figure suivante.

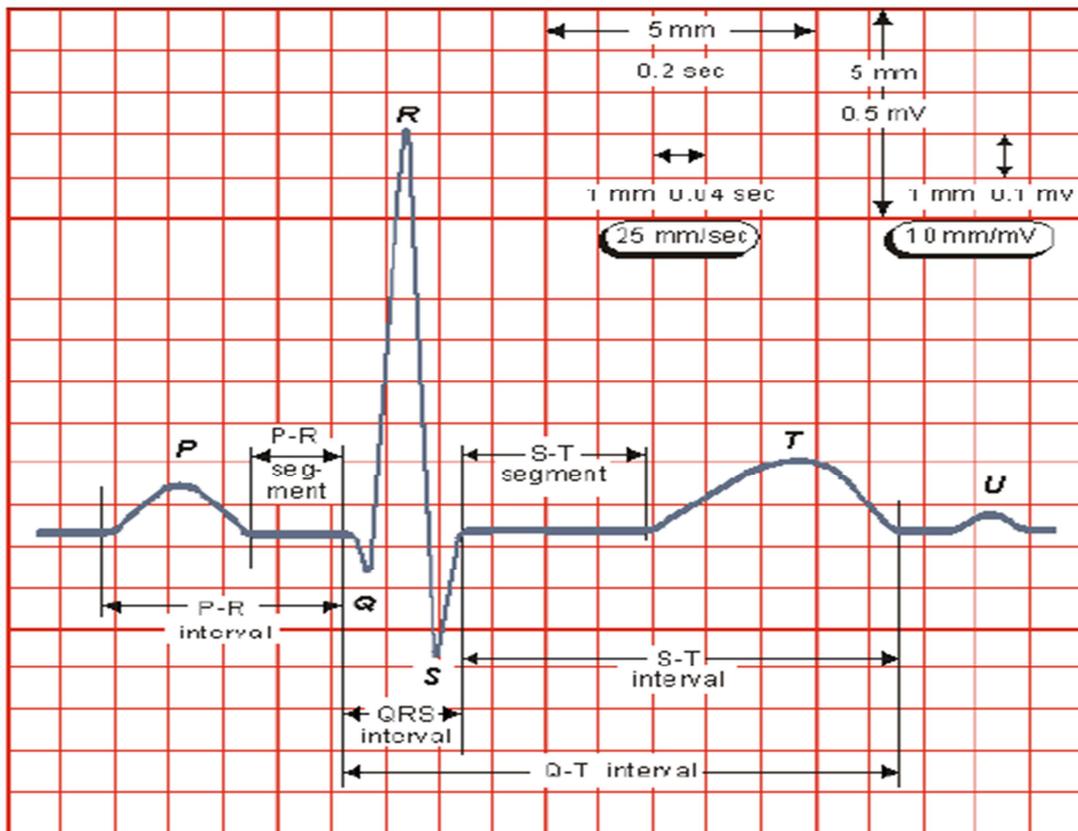


Figure III.6 : Tracé ECG [30].

III.3.3.1. Ondes de l'ECG

Si l'on observe plus en détail le signal ECG on peut le décomposer, dans le domaine temporel, en une succession de différentes tranches appelées ondes :

- **L'onde P**

L'onde P est une onde positive d'allure arrondie qui traduit la dépolarisation auriculaire. Sa durée varie entre 0.08 et 0.11 seconde et son amplitude ne dépasse pas 0.25 mV (2.5mm) [31]. Elle est plus apparente en utilisant les dérivations DII, DIII et VF.

Il faut noter que la repolarisation auriculaire n'est pas visible sur l'ECG car elle coïncide avec le complexe QRS d'amplitude plus importante.

- **Le complexe QRS**

Il correspond à la dépolarisation ventriculaire précédant l'effet mécanique de contraction et il possède la plus grande amplitude de l'ECG. Il se caractérise par une durée moyenne de 0.08 secondes et son amplitude varie de 5 à 20mm (0.5 à 2 mV) [31].

Le complexe comprend trois parties :

- **L'onde Q**

C'est une onde négative de durée inférieure à 0.04 secondes et d'amplitude toujours inférieure à 3mm (0.3mV).

- **L'onde R**

C'est une onde positive qui correspond à l'activation de la paroi libre des ventricules. Son amplitude varie selon la dérivation utilisée. Ainsi, l'onde R est inférieure à 18mm (1.8mV) dans le cas des dérivations périphériques et inférieure à 8mm (0.8mV) pour les dérivations précordiales au point V1 et 25mm (2.5mV) au point V6 [31].

- **L'onde S**

C'est une onde négative de durée inférieure à 0.08 seconde.

- **L'onde T**

Elle correspond à la repolarisation ventriculaire et a un aspect asymétrique avec une pente initiale plus faible que son versant descendant, c'est-à-dire une montée plus lente que la descente [32].

L'onde T est normalement positive sur toutes les dérivations sauf aVR. Sa durée doit être inférieure à 0.20 secondes et son amplitude inférieure à 4mm (0.4mV) en V6 [31].

- **L'onde U**

C'est une onde positive faisant suite à l'onde T et inconstante. Elle représente la repolarisation des fibres du His-Purkinje.

II.3.2. Intervalles caractéristiques de l'ECG

A partir de l'allure du signal ECG et ses différentes ondes, on peut définir les écarts séparant ces dernières. Les valeurs de ces intervalles sont très utiles lorsqu'il s'agit d'interpréter le signal et de diagnostiquer un éventuel dysfonctionnement.

L'ECG est ainsi caractérisé par plusieurs intervalles comme indiqué sur la figure précédente.

- **L'intervalle RR**

Il est délimité par les sommets de deux ondes R consécutives et permet d'évaluer la fréquence cardiaque instantanée. Cet intervalle est utilisé pour la détection des arythmies ainsi que pour l'étude de la variabilité de la fréquence cardiaque.

- **Le segment PQ**

Il représente le temps que met l'influx électrique pour aller du nœud sinusal au début de l'activation ventriculaire. Il est mesuré du début de l'onde P au début de l'onde Q. Ce qui est mesuré est donc l'intervalle PQ. La durée de cet intervalle varie chez l'adulte de 0.12 seconde à 0.20 seconde.

- **L'intervalle QT**

C'est un intervalle important à mesurer. Il correspond à la systole électrique du myocarde ventriculaire, ce qui comprend la durée de dépolarisation et de repolarisation ventriculaires. Il va de début du complexe QRS à la fin de l'onde T. Sa durée varie entre 0.3 et 0.44 seconde.

III.3.4. Le contenu spectral de l'ECG

L'étude de Thakor et al en 1984 [33] présente l'analyse spectrale des complexes QRS isolés avec différentes sources de bruit. Les spectres observés, moyennés sur 150 battements, sont présentés sur la figure (III.7). Il a été démontré que les composantes fréquentielles d'un ECG normal ont les caractéristiques suivantes [34] :

- Le spectre de l'ECG varie entre une fréquence nulle et environ 100 Hz ;
- L'onde P se caractérise par une bande spectrale de basse fréquence, entre 0.5 Hz et 10 Hz et une faible amplitude ;
- L'onde T se caractérise par une bande spectrale analogue à celle de l'onde P ;
- Le complexe QRS possède un contenu fréquentiel variant entre 5 Hz et 15 Hz et d'amplitude bien plus importante que les autres ondes de l'ECG ;

- Le contenu fréquentiel de la ligne de base et des éventuels artefacts de mouvement se situe entre 0.5 Hz et 7 Hz.

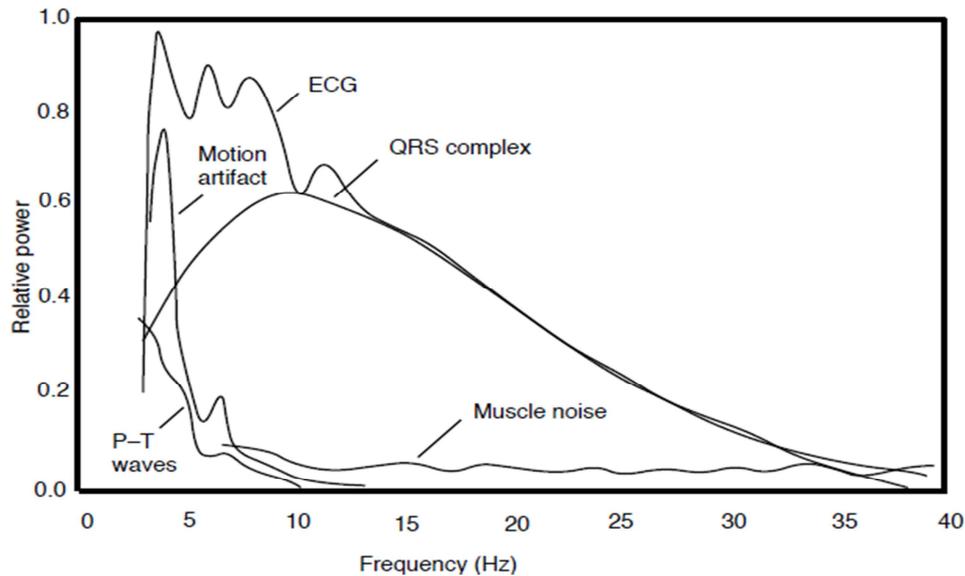


Figure III.7: Densité spectrale de puissance des complexes QRS, des ondes P et T, et des bruits, après moyennes sur 150 battements [34]

III.4. La fréquence cardiaque

La fréquence cardiaque est le nombre de cycles cardiaques par unité de temps (par minute en général). Elle est très rapide chez le nouveau-né, rapide chez un enfant et légèrement plus lente chez une personne âgée.

La fréquence cardiaque est aussi le nombre de contractions ventriculaires par unité de temps ; autrement dit, sur l'ECG on la repère grâce au nombre de complexes QRS, donc de dépolarisations des ventricules par une impulsion électrique, à chaque minute.

La fréquence normale du cœur varie entre 50-100 bpm (battements par minute) [35]. On parle de bradycardie (brady=lent) en dessous de 50 bpm et de tachycardie (tachy=rapide) au dessus de 100bpm.

III.5. Artefacts visibles sur l'électrocardiogramme

Sur tout enregistrement électrocardiographique il peut apparaître des événements indésirables pouvant brouiller le tracé et, parfois, induire en erreur le diagnostic final. Ces bruits sont parfois reconnaissables par l'œil expérimenté d'un spécialiste qui les identifie avant d'effectuer son diagnostic. Les effets indésirables peuvent avoir plusieurs sources: Techniques, physiques ou pathologiques [30].

III.5.1. Bruits techniques

Le matériel utilisé lors de l'enregistrement doit être manipulé avec précaution car il peut être source de bruits lors de l'enregistrement. Les plus courants de ces bruits sont présentes ci-dessous.

III.5.1.1. Bruit dû au secteur

Le réseau de distribution électrique peut parfois brouiller le signal électrocardiographique avec une onde dont l'harmonique principale est à 50 Hz comme montré sur la figure (III.8). Ce type de bruit apparaît sur tout l'enregistrement et peut être assez fort mais il s'élimine facilement avec un filtre sélectif à bande étroite centrée sur 50 Hz.

III.5.1.2. Bruit dû aux mouvements des électrodes

Lorsque les électrodes sont connectées incorrectement, des sauts brusques de la ligne de base apparaissent. L'effet sur le tracé peut aller de la simple diminution d'amplitude à l'apparition de pics lorsque les électrodes sont en contact intermittent avec la peau. Ces pics peuvent parfois être confondus avec les ondes du tracé normal. Ce type de bruit intermittent à bande spectrale large s'élimine difficilement car son énergie se trouve dans la même gamme de fréquence que le complexe QRS.

III.5.1.3. Autres bruits courants

Parmi les bruits courants on peut citer les artefacts dus aux mouvements des câbles électriques, les mauvais câblages etc.

III.5.2. Artefacts physiques

Les artefacts physiques sont dus aux activités électriques du corps humain telles que les commandes de contraction des muscles ou la respiration.

III.5.2.1. Effets sur la ligne de base

Lors de l'enregistrement de l'électrocardiogramme, l'activité respiratoire peut faire osciller la ligne de base de l'ECG à un rythme régulier. D'autres perturbations peuvent avoir pour effet de déplacer temporairement la ligne de base comme, par exemple, les mauvais contacts entre la peau et les électrodes. Ces perturbations sont, généralement, peu gênantes pour l'analyse de l'ECG et peuvent être, en grande partie, filtrées car leur énergie se situe dans une bande de fréquence basse, qui empiète peu sur celle de l'ECG normal.

III.5.2.2. Bruit myoélectrique ou tremblement somatique

La contraction d'un muscle est commandée par une dépolarisation des cellules musculaires et, bien que les électrocardiographes soient construits pour être surtout sensibles aux fréquences du myocarde, l'ECG enregistre également les contractions des muscles squelettiques comme montré sur la figure (III.8). Ces perturbations sont assez gênantes lorsque le patient bouge beaucoup ou lorsqu'il frissonne car elles peuvent noyer les ondes P et T et

empêcher un diagnostic fiable. L'apparition de ces perturbations dépend de l'état du patient. S'il est très tendu ou atteint de maladie de Parkinson, l'enregistrement peut être de mauvaise qualité sur toutes les voies de l'ECG.

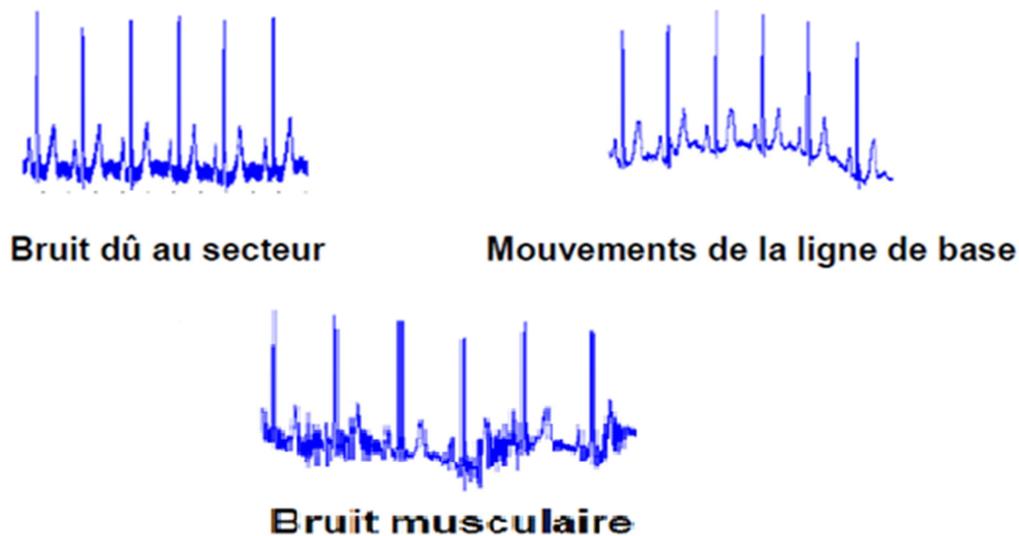


Figure III.8 : Les différents types de bruits

III.6. Modélisation du signal ECG

La modélisation du battement cardiaque est une étape essentielle pour l'identification automatique des ondes caractéristiques. Elle a pour objectif de trouver une représentation mathématique, aussi simple et compacte que possible, de la forme de chaque onde constitutive du battement cardiaque.

Il existe plusieurs approches de modélisation du signal ECG :

III.6.1. Les approches classiques

Ce type de modélisation consiste à décomposer un battement de cœur en une somme de fonctions paramétrées permettant de localiser et de caractériser les ondes. On peut fonder ce type de modélisation sur des algorithmes aussi divers que la décomposition en ondelettes, la régression polynomiale, l'approximation par les réseaux de neurones ..., ce qui conduit, à chaque fois, à une représentation analytique du battement de cœur considéré.

Nous allons, dans ce qui suit, décrire les principales méthodes de modélisation utilisées.

III.6.1.1. Modélisation par les ondelettes

III.6.1.1.1. Définition de l'ondelette

Selon Yves Mayer [37], « c'est le signal transitoire le plus simple que l'on puisse imaginer ». Une ondelette est un objet mathématique relativement simple : Il s'agit d'une fonction Ψ , localisée et oscillante de moyenne nulle.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad \text{III.1}$$

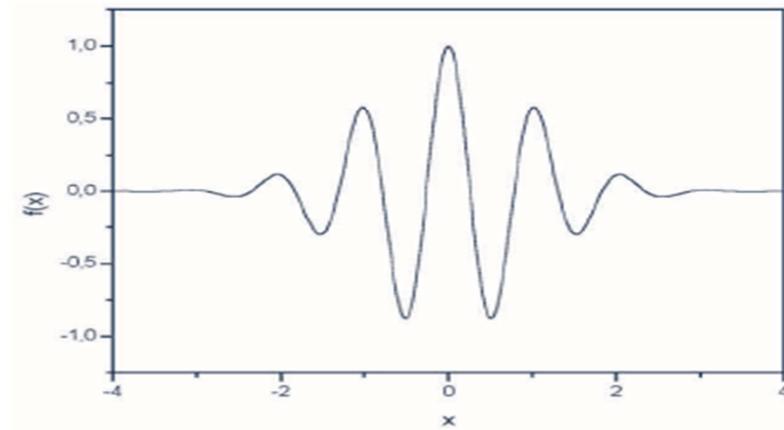


Figure III.9: Exemple d'ondelette de Morlet [36]

Il existe plusieurs types d'ondelettes telles que celle de Haar, de Morlet, de Daubechies, etc. Le choix des types d'ondelettes dépend essentiellement des propriétés recherchées.

Par défaut, lorsqu'on emploie le terme d'ondelette, il faut entendre ondelette mère Ψ , car elle va servir de prototype de base pour générer toute une famille d'ondelettes $\Psi_{a,b}$ (les ondelettes filles), aussi appelées atome de base. Ce sont des copies dilatées, comprimées et translatées dans le temps de l'ondelette mère. D'où la formule d'un atome de base :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \quad \text{III.2}$$

Le paramètre $a > 0$ est le paramètre d'échelle, c'est celui qui va agir sur la compression ou la dilatation de l'atome de base. Lorsque $0 < a < 1$, l'atome de base est comprimé et lorsque $a > 1$ l'atome de base est dilaté.

Le paramètre b est le paramètre de position, il permet de translater l'atome de base à gauche ($b < 0$) ou à droite ($b > 0$), le long du signal à analyser.



Figure III.10: Trois ondelettes filles de Morlet dilatées (gauche), échelle de base (milieu) et comprimées (droite).

III.6.1.1.2. La transformée en ondelette continue

La transformée en ondelette continue (TOC) est une opération mathématique qui consiste à transformer une fonction originale $f(t)$ qui dépend du temps, en une nouvelle fonction $C_f(a, b)$ qui dépend à la fois de l'échelle et du temps.

$$C_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t)^* dt \quad \text{III.3}$$

$\Psi_{a,b}^*$: Est le conjugué de $\Psi_{a,b}$

Dans la transformée en ondelette, on décompose le signal à étudier $f(t)$ selon une base de fonctions d'ondelettes localisées dans le temps. On obtient alors les coefficients d'ondelettes numériques $C_f(a, b)$.

Pour retrouver le signal f d'origine on utilise la transformée inverse donnée par :

$$f(t) = c \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(a, b) \Psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} \quad \text{III.4}$$

Où $c > 0$ est une constante qui dépend que de Ψ .

III.6.1.1.3. Transformée en ondelette discrète (TOD) :

Dans la pratique, les variables a et b de la transformée en ondelette ne varient pas continuellement dans R , mais sont discrétisées. Ainsi, la transformée en ondelettes discrète consiste à trouver une sous famille dénombrable $(\Psi_{a_j, b_k})_{a_j, b_k \in R}$ de la famille $(\Psi_{a,b})_{a,b \in R}$.

Morlet à proposé de créer des bases de fonctions construites sur le modèle suivant [34]:

$$\Psi_{j,k}(t) = a_0^{-\frac{j}{2}} \Psi(a_0^{-j} t - kb_0) \quad \text{III.5}$$

Avec :

a_0 et b_0 fixés et $j, k \in Z$.

Cette discrétisation attribue des valeurs à l'échelle a sur une échelle logarithmique avec des paramètres de translation qui lui sont proportionnels : $a = a_0^j$ et $b = kb_0 a_0^j$

Une gamme d'échelles couramment utilisée est la gamme dyadique, soit $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$. On obtient, ainsi, des familles constituées des fonctions de la forme :

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - k) \quad \text{III.6}$$

III.6.1.1.4. Principe de décomposition du battement cardiaque en ondelettes

L'algorithme de décomposition en ondelettes permet de passer d'un battement échantillonné, donc représenté par un vecteur constitué des amplitudes des points d'échantillonnage, à un battement représenté comme une somme pondérée de fonctions [25].

Le signal à décomposer est donc un battement cardiaque, la transformée en ondelettes discrètes impose une contrainte : Le nombre de points d'échantillonnage des signaux doit être une puissance entière de 2 ; or la durée des battements dépend du rythme cardiaque. Pour cette décomposition, le battement sera donc représenté par un vecteur de dimension égale à la puissance de 2 la plus proche, par valeur supérieure, du nombre de points d'échantillonnage du battement, en complétant par des zéros placés avant et après celui-ci.

Si on considère le signal S d'un battement à modéliser, le signal S_0 utilisé pour la décomposition est le vecteur composé du signal S précédé et suivi par des zéros.

La première étape de la décomposition est la construction de la base d'ondelettes. Si S_0 est le signal à décomposer de longueur N_p (le nombre de points), la base est constituée de N_p ondelettes orthogonales, qui sont toutes déduites de l'ondelette mère choisie par translation et dilatation.

Soit Ψ l'ondelette mère ; la base se construit de la manière suivante :

$$B = \{\Psi(2^m x \mp n), n \in [1 \dots 2^{m-1}], m \in [1 \dots \log_2(N_p)]\} \quad \text{III.7}$$

Où m et n sont respectivement le coefficient de dilatation et de position de chacune des ondelettes, et N_p la longueur du signal à modéliser. Les $N_p - 1$ fonctions de base sont notées $\{\Psi_i\}_{i=1 \dots N_p - 1}$.

Une fois la base construite, la décomposition du signal S_0 revient à appliquer au vecteur S_0 la matrice de passage de la base canonique à la base d'ondelettes, ou en d'autres termes, à calculer les coordonnées du vecteur S_0 dans la base d'ondelettes.

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N_p-1} \langle S_0 / \Psi_i \rangle \Psi_i \quad \text{III.8}$$

Où $\langle S_0 / \Psi_i \rangle$ représente la i -ème coordonnées du signal dans la base d'ondelettes.

Ainsi, on peut choisir un nombre d'ondelette N inférieur à N_{p-1} pour modéliser le signal S_0 , le meilleur modèle Y sera obtenu avec les N ondelettes ayant le plus grand produit scalaire en valeur absolue avec le signal.

$$Y(t) = \sum_{i \in \{A\}} \langle S/\Psi_i \rangle \Psi_i(t) \quad \text{III.9}$$

Où A représente les indices de N plus grands produits scalaires en valeur absolue entre les Ψ_i et S_0 .

III.6.1.2. Modélisation avec les réseaux de neurones

Par analogie avec les neurones biologiques, on appelle réseaux de neurones des ensembles de calculateurs numériques qui agissent comme des unités élémentaires. Ils sont reliés entre eux par un ensemble d'interconnexions pondérées qui transmettent des informations numériques d'un « neurone formel » à l'autre.

III.6.1.2.1. Le neurone formel

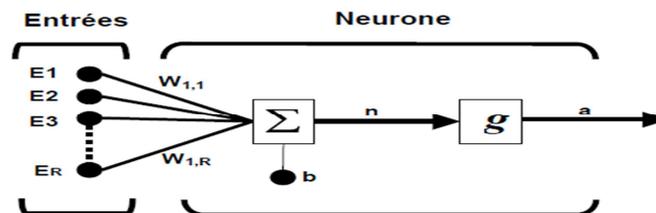


Figure III.11 : Modèle du neurone formel

Un neurone réalise une fonction non linéaire, paramétrée, à valeurs bornées entre les entrées et les sorties. Autrement dit un neurone réalise une fonction non linéaire d'une combinaison des entrées E_j pondérées par les paramètres (ou poids) w_{ij} .

La combinaison linéaire est appelée potentiel (n), à laquelle s'ajoute un terme b_i ou biais (seuil).

La sortie du neurone est donnée par :

$$a = g(n) = g\left(\sum_{j=1}^R w_{ij} E_j + b_i\right) \quad \text{III.9}$$

III.6.1.2.2. Principe de modélisation avec les réseaux de neurones :

Un réseau de neurones artificiels (RNA), est un ensemble de neurones formels associés en couches et fonctionnant en parallèle. Chaque neurone dans une couche est connecté, généralement, à tous les neurones de la couche suivante.

Dans un réseau de neurones, l'information se propage de la couche d'entrée à la couche de sortie en passant par une ou plusieurs couches intermédiaires dites couche cachées.

Chaque neurone caché est généralement la tangente hyperbolique (parmi les fonctions d'activation les plus utilisées) d'une somme pondérée des variables de modèle. Il est commode de représenter graphiquement le modèle, comme dans la figure suivante pour un réseau à une seule variable (le temps), ce qui correspond à la modélisation d'un signal temporel tel que celui de l'ECG.

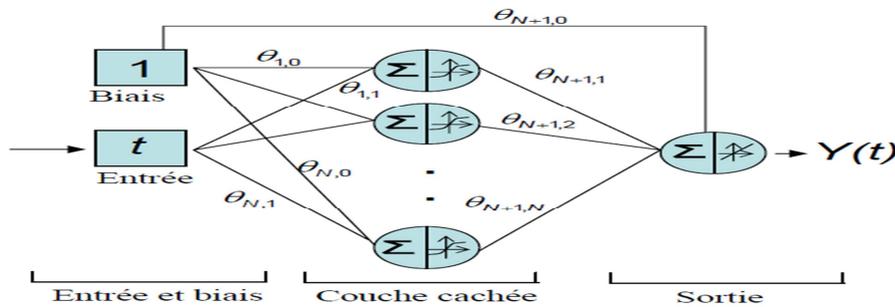


Figure III.12: Réseau de neurones à une couche cachée. Pour modéliser un signal d'une seule variable à une dimension, tel le signal ECG, il suffit d'une entrée unique et d'une sortie [25].

Le modèle $y(t)$ obtenu s'écrit de la manière suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \theta_{N+1,i} \tanh(\theta_{i,1} t + \theta_{i,0}) + \theta_{N+1,0} \tag{III.10}$$

Où

N : Est le nombre de neurones cachés ;

$\theta_{i,1}$: La pondération de la variable du modèle dans la fonction réalisée par le neurone caché i ;

$\theta_{N+1,i}$: La pondération du neurone caché i dans la sortie du modèle (indicée $N+1$) ;

$\theta_{i,0}$: La pondération du biais dans la fonction réalisée par le neurone caché i ;

$\theta_{N+1,0}$: La pondération du biais dans la sortie du modèle.

III.6.2. Modélisation dynamique du signal ECG

En 2003 Mcsharry et al [38] ont proposé un modèle de synthèse de l'ECG qui unifie la morphologie et la répartition des impulsions du signal ECG dans un seul modèle dynamique non-linéaire. Ce modèle repose sur l'approche d'espace d'état basé sur la théorie des équations différentielles.

Ce modèle a un nombre variable de paramètres qui le rendent adaptable à une large classe de signaux ECG normaux et anormaux [39]. Cependant, les travaux précédents sont limités à la modélisation d'un seul canal ECG, ce qui signifie que les paramètres du modèle doivent être recalculés à chacune des voies d'enregistrement.

III.6.2.1. Généralités sur les attracteurs

III.6.2.1.1. Espace de phase

C'est un espace qui sert à représenter l'évolution des systèmes dynamiques (continus ou discrets) sous forme géométrique. La dimension de l'espace de phase correspond au nombre de degrés de liberté du système.

III.6.2.1.2. Les attracteurs

A chaque instant, l'état du phénomène est représenté par un point dans l'espace des phases. L'évolution du système est décrite par la trajectoire de ce point. Pour les phénomènes les plus simples, ce point est attiré vers un point d'équilibre ou une courbe limite, près desquels il repasse périodiquement. Les mathématiciens appellent ces courbes limites des attracteurs. Autrement, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace de phase qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

III.6.2.1.2.1. Bassin d'attraction

C'est l'ensemble des points de l'espace des phases qui subissent le phénomène d'attraction. Les trajectoires de ces points évoluent toutes vers l'attracteur.

III.6.2.1.2.2. Les différents types d'attracteurs

Jusqu'en 1963 on ne connaissait que trois types d'attracteurs : le point fixe, le cycle limite et le tore [40].

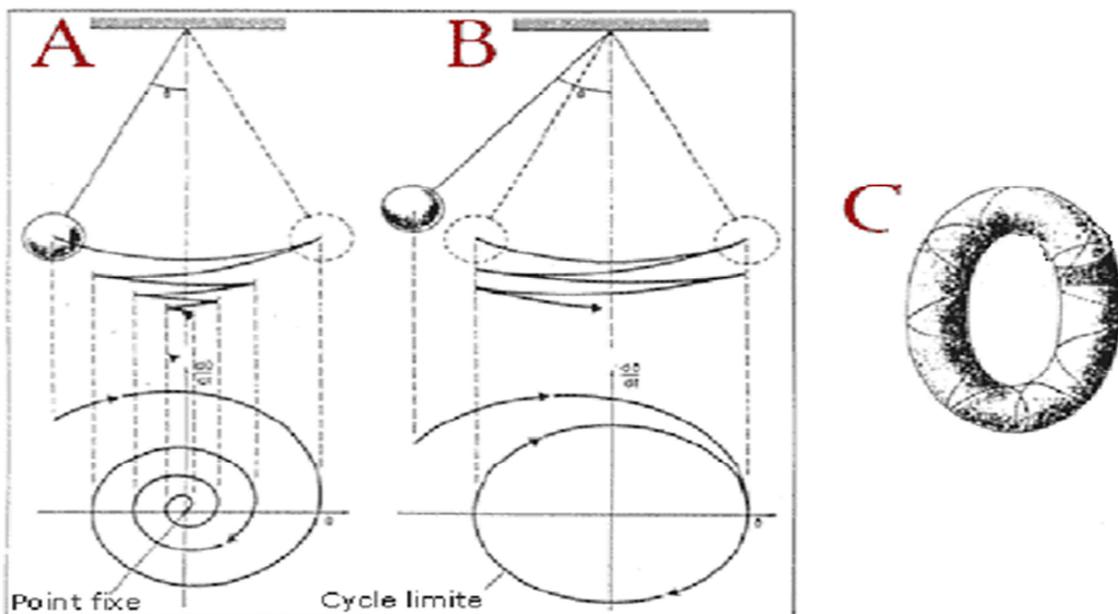


Figure III.13 : Représentation classique d'attracteurs élémentaires : A. Attracteur ponctuel, B. Cycle limite, C. Tore [40].

- **Le point fixe**

Dans un système élémentaire, l'attracteur est représenté par un point fixe: L'exemple en est le pendule simple qui oscille en spirale en perdant de l'énergie et qui finit pas s'arrêter sur un point final appelé « point fixe ». Ce point constitue un attracteur ponctuel (figure III.13A).

- **Le cycle limite**

D'autres systèmes ne s'immobilisent jamais et leur évolution est cyclique et périodique, comme le pendule d'une horloge dont les oscillations sont entretenues. Dans ce cas, l'ensemble des trajectoires ne débute pas au centre de coordonnées (point fixe) mais tendent vers un cycle, et cet attracteur est appelé cycle limite (figure III.13B)

Un cycle limite est une trajectoire fermée et isolée, où le terme isolée signifie que ses trajectoires avoisinantes ne sont pas fermées. Si les trajectoires avoisinantes convergent sur le cycle limite alors le cycle est dit stable ou attracteur. Dans le cas contraire, le cycle est dit instable ou demi-stable.

Ces trois cas sont représentés sur la figure suivante :

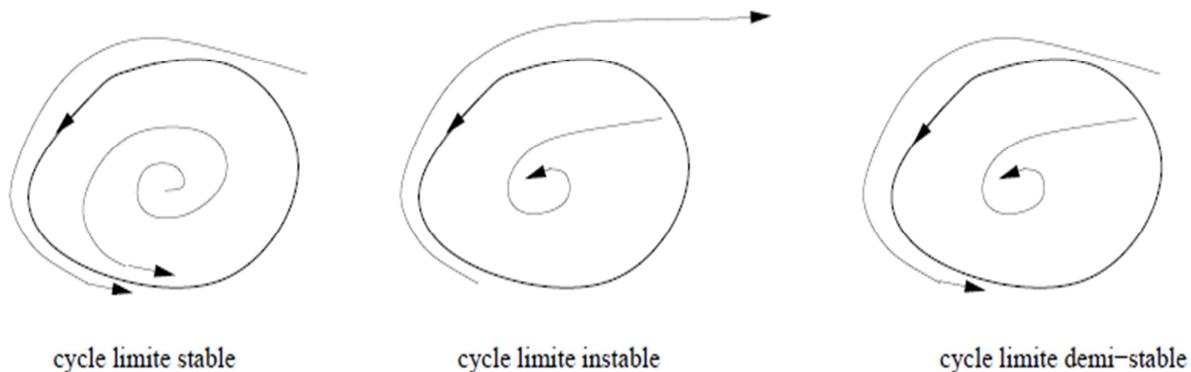


Figure III.14 : Cycles limites.

Un cycle limite stable implique des oscillations maintenues. Toute perturbation qui éloignerait la trajectoire du cycle limite s'atténuerait avec le temps.

Cette notion de cycle limite stable est très importante car elle modélise des systèmes à oscillation auto-entretenu, c'est-à-dire qui oscillent sans être soumis à une force extérieure périodique. A titre d'exemple, on peut citer les **battements du cœur**, les activations des neurones, les oscillateurs dans les réactions chimiques...

Dans tous les cas, il y a une oscillation standard à une fréquence et une amplitude données et, si le système est perturbé, il revient au cycle standard.

- **Le tore**

Il existe une troisième forme d'attracteur simple, l'attracteur torique, dont la surface est en forme de chambre à air et qui représente les mouvements résultant de deux oscillations indépendantes dont les trajectoires s'enroulent autour d'un tore (figure III.13C).

Le tracé représentant l'évolution d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps se comporte de manière « étrange » par rapport aux attracteurs des systèmes simples, c'est pourquoi il s'appelle « attracteur étrange ».

III.6.2.2. Principe de modélisation du signal ECG

Le modèle génère une trajectoire dans un espace d'état tridimensionnel avec les coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Son principe est basé sur l'assimilation d'un battement de cœur à une rotation de cycle limite. Donc deux points doivent être assurés : La périodicité (intervalle RR) et l'amplitude (les cinq gaussiennes P, Q, R, S et T) du signal ECG.

III.6.2.2.1. La périodicité

La quasi-périodicité du signal ECG se traduit par le mouvement de la trajectoire autour d'un cycle limite de rayon unitaire dans le plan (x, y) [38]. Ce cycle correspond à l'activité isoélectrique du cœur [39]. Chaque rotation de ce cycle correspond à un intervalle RR ou un battement du cœur.

Les deux équations différentielles qui permettent de tracer ce cycle limite sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y \\ \dot{y} = \alpha y + \omega x \end{cases} \quad \text{III.11}$$

Avec :

$$\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

ω : Vitesse angulaire ($\omega = 2\pi f = 2\pi/T$) ;

La variation de la longueur RR peut donc se traduire par la variation de ω .

La solution de ces équations est donnée par la figure (III.15) :

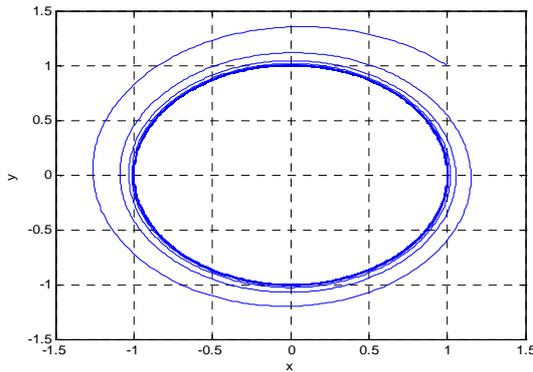


Figure III.15 : Solution des équations III.11 (pour $\omega = 2\pi$)

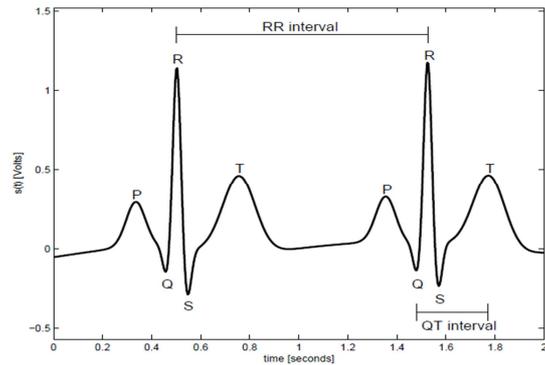


Figure III.16: Intervalle RR

La figure (III.15) nous donne la solution des équations (III.11) qui présente un cycle limite de rayon unitaire. Chaque rotation de ce cycle correspond à un intervalle RR (voir la figure III.16) ou un battement du cœur.

III.6.2.2.2. Amplitude

L'amplitude du signal ECG est reproduite par la variation de la trajectoire précédente dans la direction z. En effet, on fait introduire cinq gaussiennes (correspondent aux ondes P, Q, R, S et T) à des instants précis dans la direction de l'axe z avec pour but de représenter l'amplitude du signal ECG.

Les points singuliers du signal ECG, tels que P, Q, R, S et T sont décrits par des évènements correspondant aux attracteurs positifs ou négatifs dans la direction z. Ces évènements sont placés à des angles fixes le long du cercle unitaire donnés par $\theta_p, \theta_Q, \theta_R, \theta_S$ et θ_T (figure III.17).

Lorsque la trajectoire se rapproche de l'un de ces évènements, elle est poussée vers le haut ou vers le bas loin du cycle limite puis, après un certain moment, elle sera retirée vers le cycle limite [38].

Dans le but de caractériser les amplitudes de l'ECG on utilisant une troisième équation différentielle donnée par :

$$\dot{z} = \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta\theta_i \exp\left(-\frac{\Delta\theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z - z_0) \quad \text{III.12}$$

Avec :

$$\Delta\theta_i = (\theta - \theta_i) \text{mod } 2\pi ;$$

$$\theta = \text{atan2}(x, y) \text{ (le quatrième quadrant arc tangente de la partie réelle de } x \text{ et } y \text{ avec } -\pi \leq \text{atan2}(x, y) \leq \pi) ;$$

$z_0(t) = A \sin(2\pi ft)$ (représente la ligne de base de l'ECG)

Avec : $A = 0.15mV$ et $f = 0.25Hz$ (fréquence respiratoire)

Le tableau suivant représente les paramètres de modèle correspondant au signal ECG [38]:

Indice(i)	P	Q	R	S	T
θ_i (radian)	$\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{12}\pi$	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
a_i (amplitudes des gaussiennes)	1.2	-0.5	30.0	-7.5	0.75
b_i (largeurs des gaussiennes)	0.25	0.1	0.1	0.1	0.4

Tableau III.1 : Les paramètres de modèle correspondant au signal ECG

Le tableau précédent représente les paramètres (θ_i, a_i, b_i) utilisés pour tracer le signal ECG synthétique.

Donc, d'après ce que nous avons vu le signal ECG est obtenu à partir de la résolution de trois équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y \\ \dot{y} = \alpha y + \omega x \\ \dot{z} = \sum_{i \in \{P,Q,R,S,T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z - z_0) \end{cases} \quad \text{III.13}$$

La figure ci-dessous représente alors le signal ECG synthétique tracé en 3 dimensions à partir des équations (III.13)

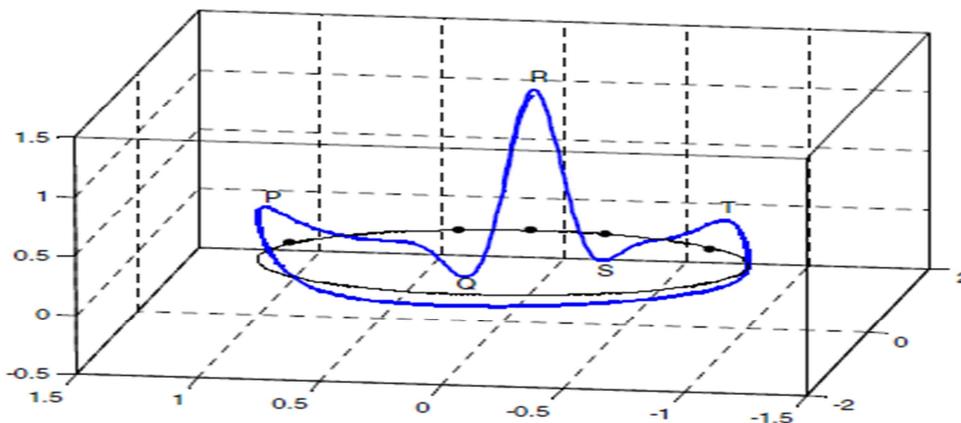


Figure III.17: Trajectoire 3D obtenue à partir des équations (III.11) et (III.12) [41]

- **La projection du signal 3D**

Le signal ECG appelé ECG synthétique sera obtenu par la projection de la trajectoire 3D sur l'axe des z. la figure suivante (III.18) nous donne le signal ECG synthétique sur deux dimensions obtenu à partir de la projection de la trajectoire 3D de la figure (III.17) sur l'axe des z.

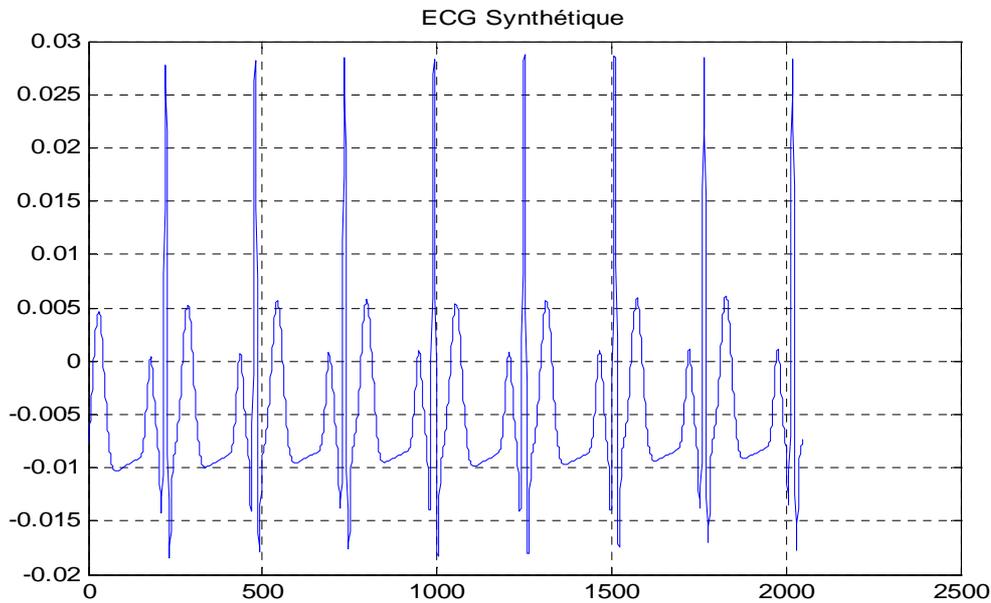


Figure III.18 : Le signal ECG synthétique sur 2D.

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le signal électrocardiographie ECG, qui est un signal qui traduit l'activité électrique du cœur, et nous avons introduit quelques approches de sa modélisation.

Dans notre application nous nous intéressons au modèle dynamique, basé sur trois équations différentielles qui ont permis de générer un signal ECG quasi-réel. Ce modèle sera ainsi utilisé dans le futur chapitre dans l'application de filtre de Kalman étendu pour le débruitage des signaux ECG.

Chapitre IV

*Application du filtre de
Kalman étendu pour le
débruitage des signaux
ECG*

IV.1. Introduction

Après avoir présenté le principe de fonctionnement du filtre de Kalman dans ses différentes versions et mis en valeur la nécessité de modéliser préalablement le signal ECG à filtrer, nous avons décrit différentes méthodes de modélisation de signaux.

Notre objectif, maintenant, est d'appliquer le filtrage de Kalman pour le débruitage du signal ECG. Dans un premier temps, et afin de tester l'effet des différents paramètres sur la qualité du filtrage, nous allons présenter un exemple de filtrage de Kalman linéaire. Pour ce faire, nous considérons le cas d'un signal sinusoïdal bruité généré à partir du logiciel Matlab. Par la suite, nous passerons au cas non linéaire utilisant le filtre de Kalman étendu (EKF) pour le débruitage d'un signal ECG modélisé et bruité par un bruit blanc et enfin nous terminerons par le cas d'un signal ECG réel bruité par différents types de bruit (bruit blanc, bruit rose et bruit musculaire).

IV.2. Application du filtre de Kalman au débruitage d'un signal sinusoïdal

Cette première partie de notre travail consiste à faire un essai d'application du filtre de Kalman linéaire au débruitage d'un signal sinusoïdal.

Nous allons préciser les différentes étapes nécessaires pour le débruiter: Ecriture du modèle d'état (équation d'état et de mesure), estimation des paramètres du filtre (conditions initiales et variances de bruit d'état et de mesure) et implantation du filtre. Enfin, nous présenterons les différents résultats du filtrage et étudierons l'influence de quelques paramètres sur la qualité du filtrage.

Le signal sinusoïdal bruité que nous allons utiliser est généré à l'aide du logiciel matlab. Il est de la forme $x(t) = a \cos(2\pi ft)$, de fréquence $f=0.1\text{Hz}$ et d'amplitude $a=1\text{mV}$. Ace signal nous ajoutons un bruit blanc additif v de variance $R=0.25 \text{ (mV}^2\text{)}$ (figure IV.1).

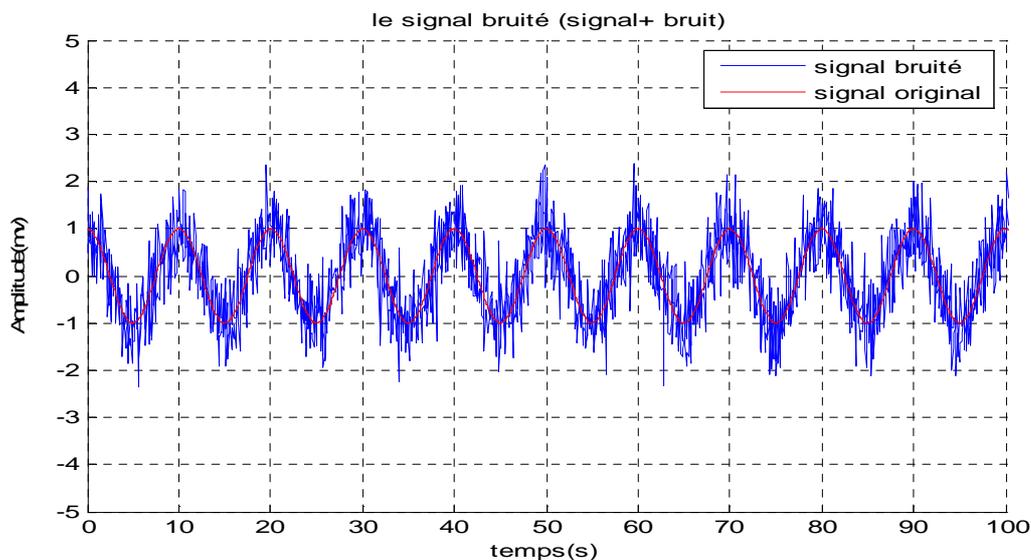


Figure IV.1 : Le signal à débruiter

IV.2.1. Ecriture du modèle d'état (équation d'état et équation de mesure)

Nous avons vu dans le chapitre II, que le principe du filtre de Kalman est basé sur un modèle à variables d'état, ce qui impose, pour toute application du filtre, la modélisation du problème en fonction des paramètres à estimer et des mesures de capteurs.

Nous devons donc définir deux équations : L'équation d'état qui décrit l'évolution du système de l'instant k à l'instant $k + 1$ et l'équation de mesure (ou d'observation).

Dans le cas d'un signal sinusoïdal le vecteur d'état est un vecteur à deux composantes [42], la première composante d'état $x_1(t)$ étant le signal à estimer.

$$\begin{cases} x_1(t) = a \cos(\omega t) \\ x_2(t) = a \sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{IV.1}$$

Si on pose $a=1$ et si T est la période d'échantillonnage on obtient :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{IV.2}$$

et

$$\begin{cases} x_1(t + T) = \cos \omega(t + T) = \cos \omega T \cos \omega t - \sin \omega T \sin \omega t \\ x_2(t + T) = \sin \omega(t + T) = \sin \omega T \cos \omega t + \cos \omega T \sin \omega t \end{cases} \quad \text{IV.3}$$

L'équation IV.3 peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$x(t + 1) = A x(t) \quad \text{IV.4}$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega T & -\sin \omega T \\ \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix} \quad \text{IV.5}$$

A représente la matrice de transition ou de l'évolution de l'état du système de l'instant k à l'instant $k + 1$.

En ajoutant $w(t)$ le bruit d'état lié à l'erreur de modélisation du signal on obtient l'équation d'état suivante :

$$x(t + 1) = A x(t) + w(t) \quad \text{IV.6}$$

L'équation de mesure en fonction de vecteur d'état s'écrit alors :

$$y(t) = H x(t) + v(t) \quad \text{IV.7}$$

Avec :

$H = (1 \ 0)$: La matrice de mesure

$v(t)$: Bruit de mesure relié aux appareils de mesure.

Les équations IV.6 et IV.7 nous donnent alors le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} x(t+1) = A x(t) + w(t) \\ y(t) = H x(t) + v(t) \end{cases} \quad \text{IV.8}$$

IV.2.2. Estimation des paramètres du filtre

Le modèle d'état étant construit, on peut donc directement extraire la matrice de transition A et la matrice de mesure H à partir de ce modèle, mais il nous reste à définir les conditions initiales (le vecteur d'état initial x_0 et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation P_0) et les variances des bruits d'état et de mesure.

- Définition des conditions initiales

Nous considérons que les composantes du vecteur d'état sont nulles à l'origine et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est initialisée à dix fois la matrice identité comme suit :

$$x_0 = [0; 0]$$
$$P_0 = 10 * [1 \ 0; 0 \ 1]$$

- Les variances des bruits

Le bruit de mesure est le bruit relié au capteur. Dans notre cas nous allons générer avec le logiciel matlab un bruit blanc gaussien comme suit :

$$V = \text{sigmav} * \text{randn}(\text{size}(t))$$

Avec :

$$\text{sigmav} = 0.5 \text{ mV.}$$

Ainsi, la variance du bruit de mesure est égale à la variance de V .

Pour ce qui concerne le bruit de système, dans le cas de notre signal il n'y a pas de bruit de modélisation car on cherche un signal dont on connaît parfaitement la valeur de sa pulsation. Mais on peut introduire dans le programme un bruit blanc gaussien de petite variance.

$$w = \text{sigmaw} * \text{randn}(\text{size}(t))$$

Avec :

$$\text{sigmaw} = 10^{-10}$$

Donc la variance de ce bruit est obtenue par le calcul de la variance de w .

IV.2.3. Implantation du filtre

Une fois les matrices de transition et de mesure, les conditions initiales et les variances des bruits définies il ne reste plus qu'appliquer les équations de prédiction et de mise à jour du filtre de Kalman pour débruiter le signal sinusoïdal.

Les équations de prédiction :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1/k-1} \\ P_{k/k-1} = A_{k-1}P_{k-1/k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \end{cases} \quad \text{IV.9}$$

Les équations de correction :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(y_k - H_k\hat{x}_{k/k-1}) \\ K_k = P_{k/k-1}H_k^T(H_kP_{k/k-1}H_k^T + R_k)^{-1} \\ P_{k/k} = (I - K_kH_k)P_{k/k-1} \end{cases} \quad \text{IV.10}$$

IV.2.4. Résultats obtenus et discussion

Les différents résultats du filtrage sont alors représentés sur les figures suivantes.

La figure suivante (IV.2) représente le signal d'entrée de filtre qui est un signal sinusoïdal bruité avec un bruit de mesure de variance égale à 0.25 mV^2 .

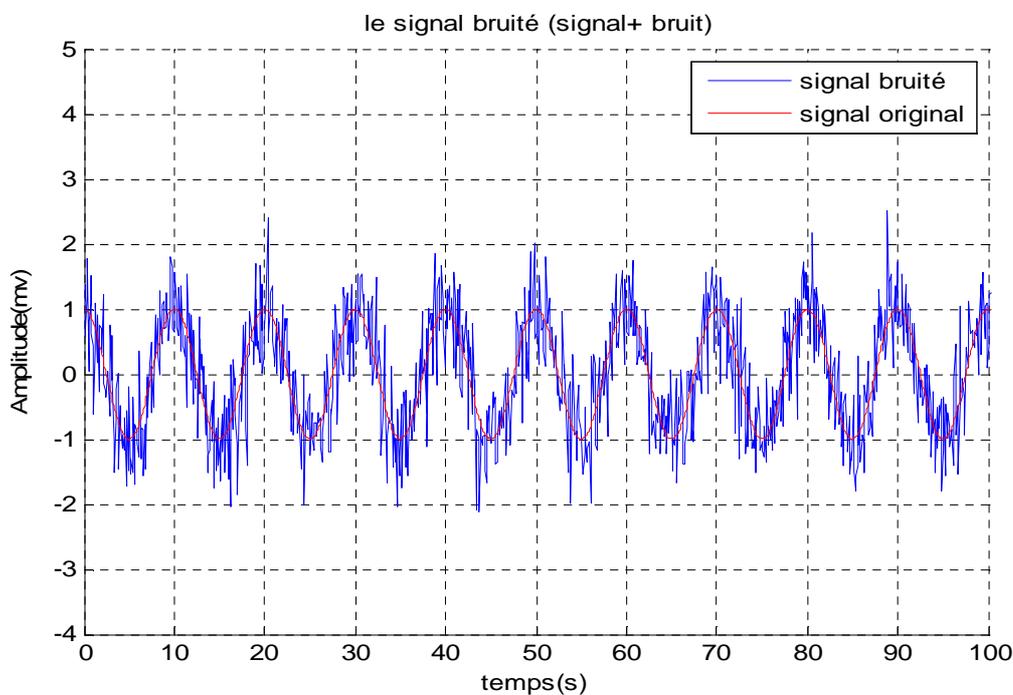


Figure IV.2 : Le tracé du signal bruité avec un bruit blanc

La figure suivante (IV.3) représente le signal filtré obtenu à la sortie du filtre de Kalman.

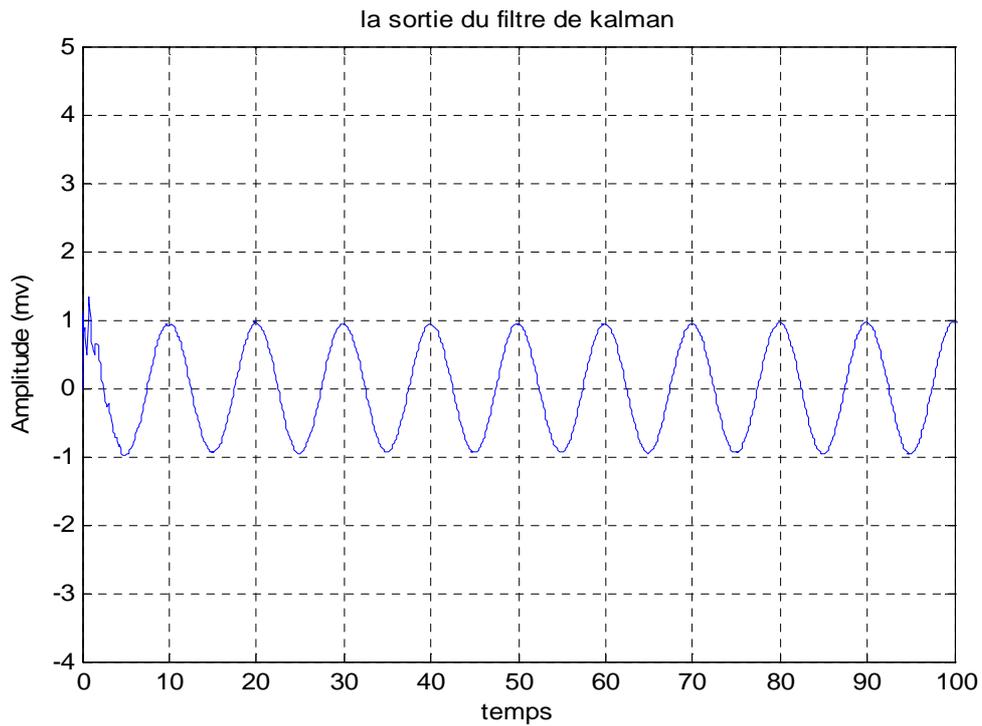


Figure IV.3 : La sortie du filtre de Kalman (signal débruité)

La figure suivante (IV.4) nous donne la covariance de l'erreur d'estimation du signal sinusoïdal traité par le filtre de Kalman.

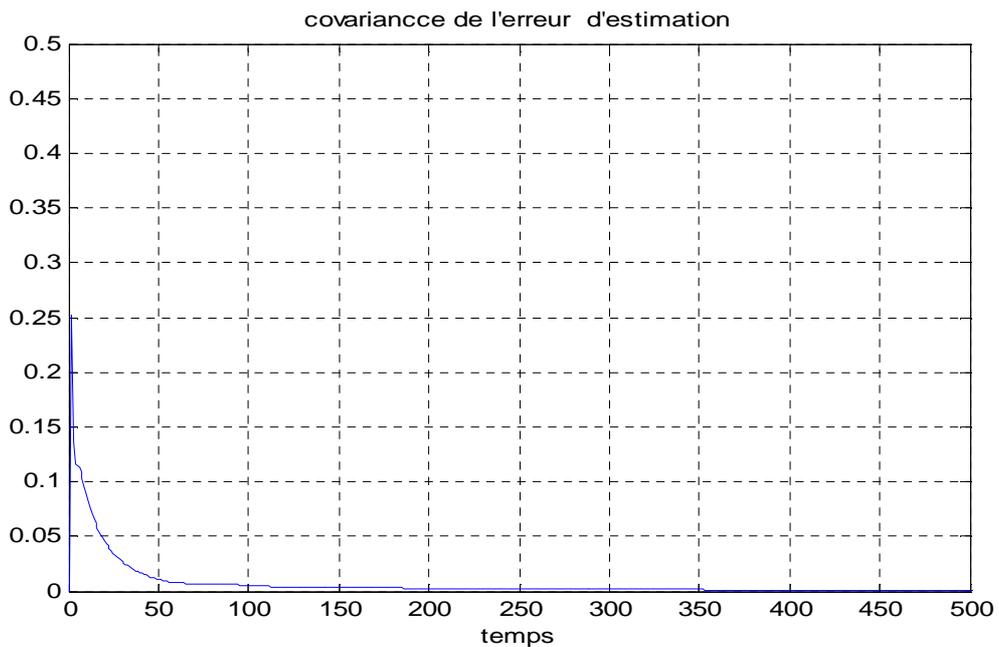


Figure IV.4 : Tracé de la covariance de l'erreur d'estimation

D'après les résultats obtenus (figures IV.3 et IV.4) on peut dire que le filtre de Kalman a permis de débruiter le signal sinusoïdal. La covariance de l'erreur d'estimation est proche de 0 ce qui traduit la bonne qualité de l'estimation.

IV.2.5. Etude de l'influence de quelques paramètres sur le filtre

La qualité du filtrage peut dépendre de la nature du signal à traiter et des conditions d'initialisation du filtre. Nous allons, dans ce qui suit étudier l'influence de certains paramètres sur le résultat du filtrage de Kalman.

IV.2.5.1. Influence des valeurs initiales du vecteur d'état

Si nous faisons varier les valeurs initiales de vecteur d'état de $x_0 = [0; 0]$ à $x_0 = [100; 1000]$ nous obtenons les résultats représentés par les figures suivantes :

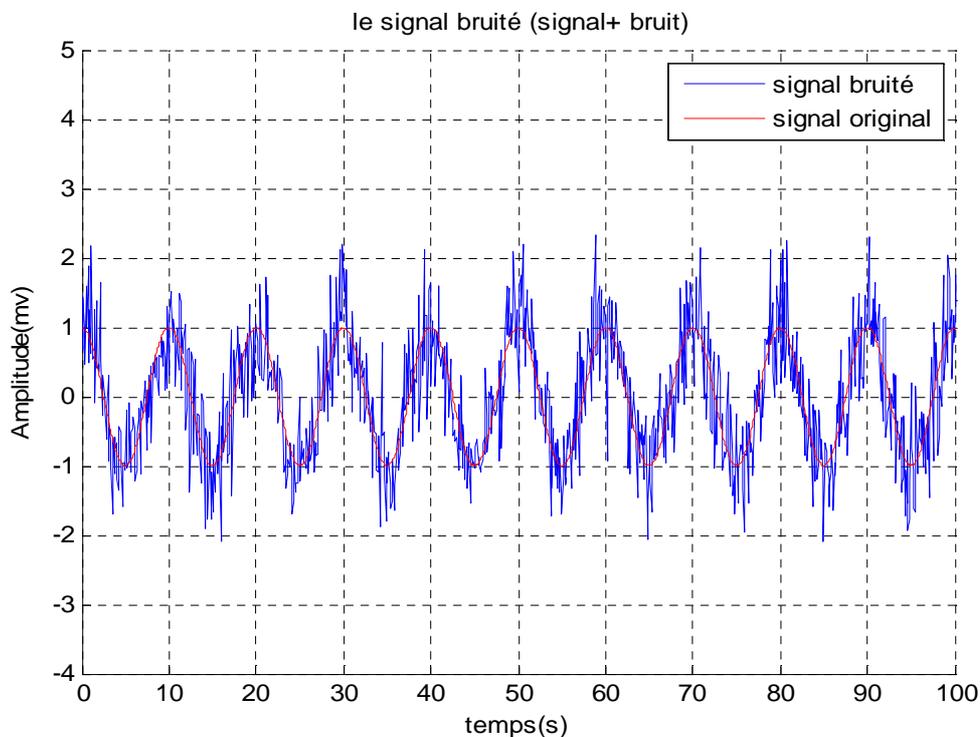


Figure IV.5 : Le signal bruité ($x_0 = [100; 1000]$)

La figure suivante donne la sortie de filtre :

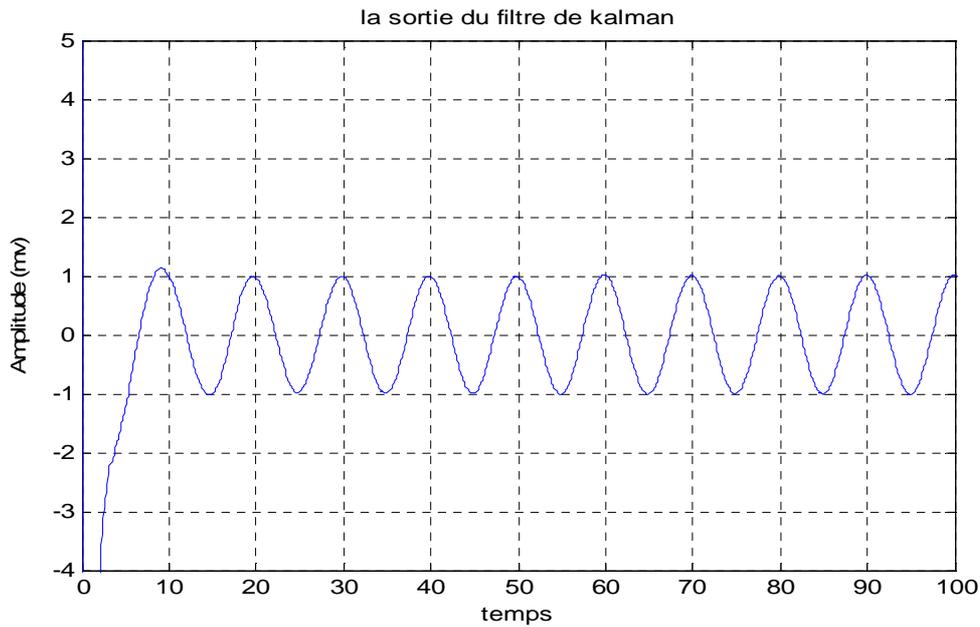


Figure IV.6 : Le tracé de l'estimé de x_1 (avec $x_0 = [100; 1000]$)

La figure (IV.7) représente la covariance l'erreur d'estimation :

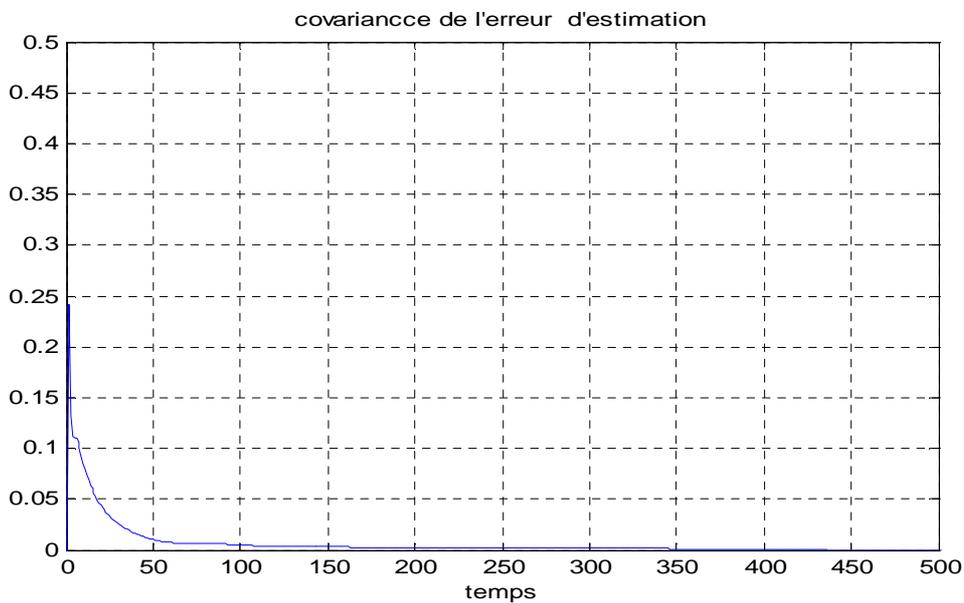


Figure IV.7 : Le tracé de la covariance de l'erreur d'estimation (avec $x_0 = [100; 1000]$)

D'après les résultats obtenus nous constatons que le filtre de Kalman converge vers la solution mais après un retard de dix itérations (figure IV.6). Pour ce qui concerne la covariance de l'erreur d'estimation nous ne constatons pas de changement.

IV.2.5.2. Influence de la variance du bruit de mesure

Nous faisons varier la variance de bruit de mesure en augmentant la valeur $\sigma_{\text{mav}}=0.5$ à $\sigma_{\text{mav}}=3$. On obtient alors les figures suivantes :

La figure suivante représente le signal bruité avec un bruit de variance égale à 8.91 :

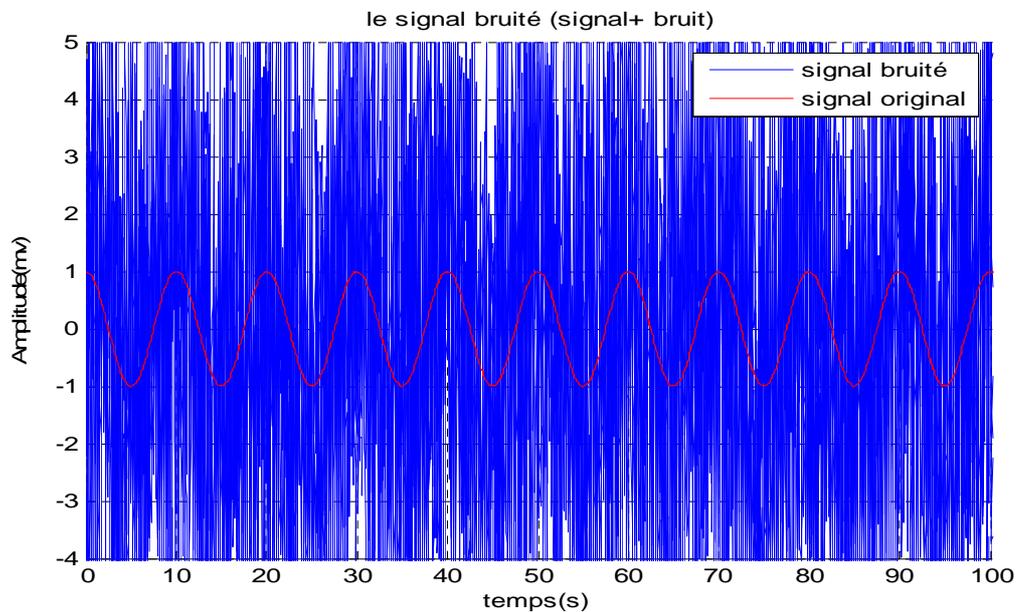


Figure IV.8 : Le signal bruité (avec une variance de bruit égale à 8.91)

La sortie du filtre en variant la valeur de bruit de mesure est représentée sur la figure suivante :

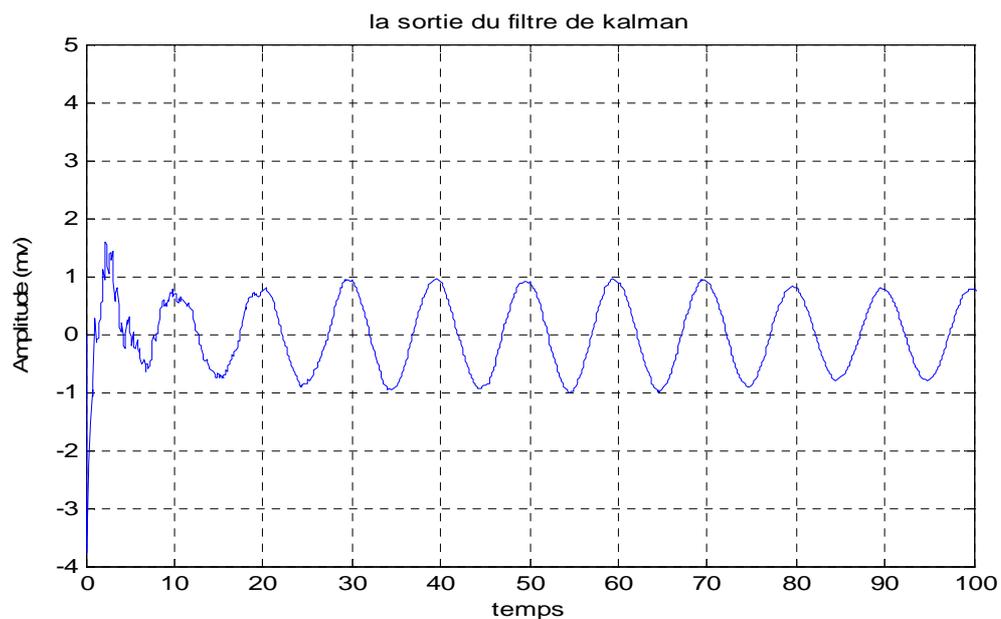


Figure IV.9 : La sortie de filtre (avec $\sigma_{\text{mav}}=3$)

L'erreur d'estimation obtenue dans le cas de la nouvelle variance du bruit est représentée sur la figure ci-dessous :

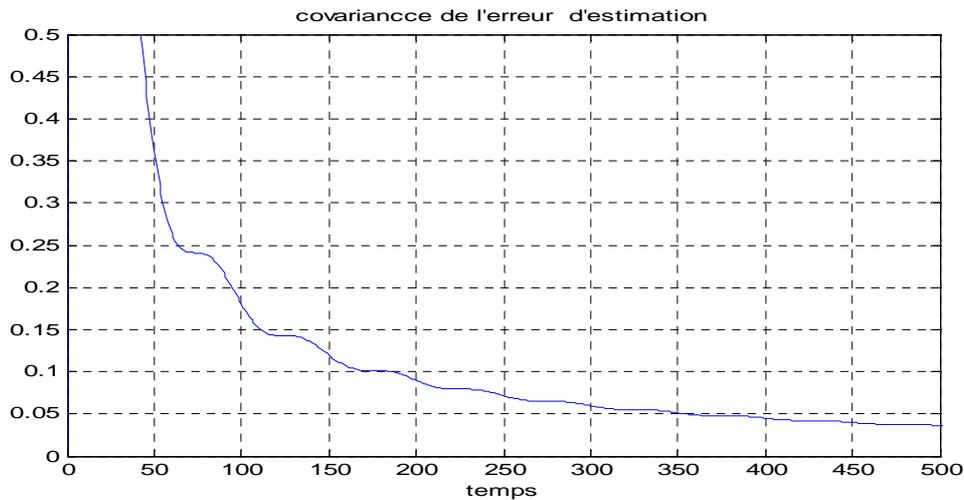


Figure IV.10 : La covariance de l'erreur d'estimation (sigmav=3)

D'après les figures nous constatons que le filtre a débruité le signal malgré la valeur importante du bruit de mesure mais la covariance de l'erreur d'estimation, au bout de 500 itérations, n'atteint pas 0. Donc on peut dire que la qualité de l'estimation a diminué.

IV.2.5.3. Influence de la variance du bruit de système

Nous faisons varier la valeur de la variance du bruit d'état de $\text{sigmaw}=10^{-10}$ à $\text{sigmaw}=0.1$ on obtient les figures suivantes :

La première figure représente le signal à débruiter :

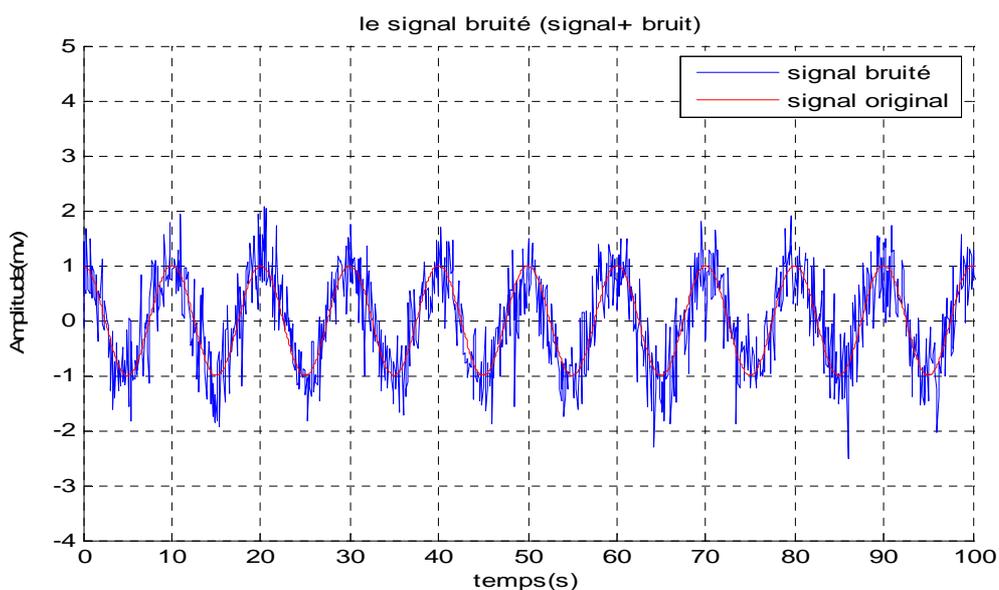


Figure IV.11 : Le signal à débruiter (avec sigmaw=0.1)

La figure suivante représente le signal obtenu à la sortie du filtre :

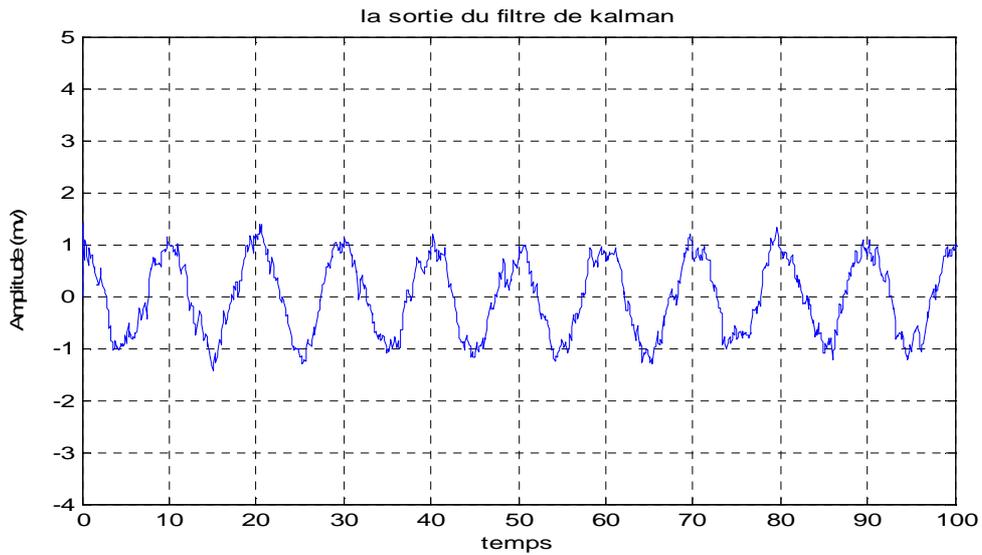


Figure IV.12 : Le signal obtenu à la sortie du filtre

L'erreur d'estimation dans ce cas est donnée par la figure ci-dessous :

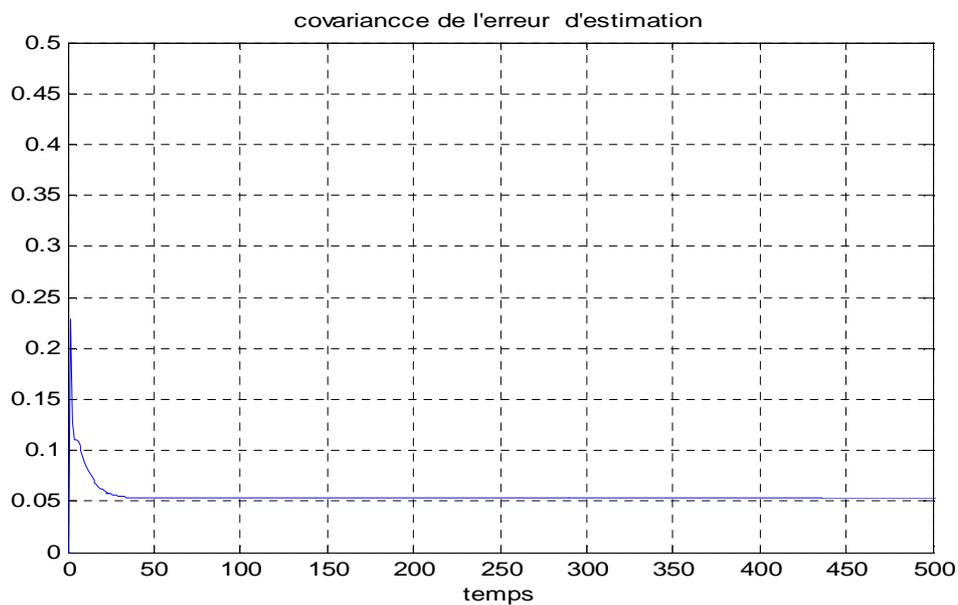


Figure IV.13 : La covariance de l'erreur d'estimation (dans le cas $\sigma_w=0.1$)

Nous remarquons qu'après avoir augmenté la valeur de la variance du bruit de système, la qualité du filtrage a diminué et la covariance de l'erreur d'estimation, au bout de 500 itérations, ne s'approche pas de zéro.

Comme conclusion nous pouvons dire que :

- En augmentant les valeurs initiales du vecteur d'état, le filtre atteint la solution après un retard de quelques itérations, donc ces valeurs influencent sur la convergence du filtre.
- En faisant augmenter les valeurs des variances des bruits (de mesure ou d'état), la qualité du filtrage diminue, donc la performance du filtre est influencée par les valeurs des variances des bruits.

Pour assurer le bon fonctionnement du filtre, le bon choix des conditions initiales et des variances des bruits est donc nécessaire.

IV.3. Application du filtre de Kalman étendu au débruitage du signal ECG

Le filtre de Kalman est, à la base, un estimateur de paramètres des systèmes linéaires. Dans notre cas, le modèle dynamique du signal ECG, que nous avons vu dans le chapitre trois, est un modèle non linéaire. Il est donc nécessaire de lui appliquer le filtre de Kalman étendu (EKF) pour le débruiter.

Dans notre application, nous allons prendre deux types de signaux ECG: Un signal ECG synthétique (obtenu à partir de la simulation du modèle) et un signal ECG réel.

Le signal ECG synthétique sera bruité en utilisant un bruit blanc gaussien avec différentes valeurs de SNR (rapport signal sur le bruit) d'entrée et pour le signal ECG réel nous allons le bruite par différents types du bruit avec différentes valeurs de SNR d'entrée.

Dans ce qui suit, nous allons donner les étapes nécessaires pour l'application du filtre de Kalman étendu au débruitage des signaux ECG : Modification du modèle dynamique de l'ECG, discrétisation du modèle, écriture des équations d'état et de mesure (d'observation), linéarisation du modèle et estimation des paramètres du filtre de Kalman (les matrices de covariances des bruits) et les conditions initiales du filtre. Par la suite, nous présenterons les différents résultats du filtrage obtenus.

IV .3.1. Les étapes nécessaires pour l'application du filtre de Kalman étendu au débruitage des signaux ECG

IV.3.1.1. Modification du modèle dynamique de l'ECG

Le modèle d'ECG permettant de générer ce dernier, initialement proposé dans le chapitre précédent en coordonnées cartésiennes [38] peut se réécrire en coordonnées polaires sous forme suivante [43] :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{z} = -\sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z - z_0) \end{cases} \quad \text{IV.11}$$

Avec :

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \quad i \in \{P, Q, R, S, T\}$$

$$\Delta\theta_i = (\theta_k - \theta_i)$$

r et θ étant, respectivement, les variables radiales et angulaires en coordonnées polaires.

Cette modification permet une interprétation plus simple et claire des signaux [43] [44]. En effet, la deuxième et la troisième équation de (IV.11) sont indépendantes de r et la première équation peut donc être supprimée puisque elle n'a pas d'effet sur le signal ECG synthétique (la variable d'état z) [43]. Un autre avantage de cette représentation est que le paramètre θ est une variable explicite qui indique la position des ondes P, Q, R, S et T.

IV.3.1.2. Discrétisation du modèle de l'ECG

Le filtre de Kalman étendu (EKF) que nous allons utiliser étant un système discret il faut donc, au préalable, discrétiser les équations du modèle de l'ECG.

L'équation utilisée pour la discrétisation des équations du modèle de l'ECG est la formule d'Euler suivante [41] :

$$x'(k) = (x(k+1) - x(k))/h \quad \text{IV.12}$$

h : Représentant le pas d'échantillonnage.

Après discrétisation on obtient :

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) + \omega h \\ z(k+1) = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} h \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \Delta\theta_i \exp\left(-\frac{\Delta\theta_i^2}{2b_i^2}\right) - ((h-1)z(k) - hz_0) \end{cases} \quad \text{IV.13}$$

IV.3.1.3. Ecriture des équations d'état et de mesure

- Equation d'état

Si on considère le vecteur d'état $X_k = [\theta_k \quad z_k]^T$ l'équation précédente devient :

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} \theta(k+1) \\ z(k+1) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta(k) + \omega h \\ - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} h \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \Delta\theta_i \exp\left(-\frac{\Delta\theta_i^2}{2b_i^2}\right) - ((h-1)z(k) - hz_0) \end{array} \right\} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ X(k+1) \quad = \quad f(X_k) \end{array} \quad \text{IV.14}$$

Sachant que la période d'échantillonnage h du signal ECG est faible par rapport à 1 et la valeur de la ligne de base z_0 est négligeable, le terme $(1 - h)z(k) + hz_0$ peut être approximé par $z(k)$. Pour rendre le système plus réaliste, on rajout un bruit additif w qui représente l'imprécision sur le modèle.

La forme discrète de l'équation (IV.14) devient alors:

$$\begin{cases} \theta(k+1) \\ z(k+1) \end{cases} = \begin{cases} \theta(k) + \omega h \\ -\sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} h \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) + z(k) + w \end{cases} \quad \text{IV.15}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ X(k+1) & = & f(X_k, w_k) \end{matrix}$$

La phase θ_k et l'amplitude z_k sont les composantes de vecteur d'état X_k . Dans (IV.15), ω , α_i , b_i , θ_i , et w sont des variables aléatoires considérées comme bruit de processus [43].

Ainsi, l'équation $X(k+1) = f(X_k, w_k)$ représente l'équation d'état.

Le vecteur d'état et le vecteur du bruit de processus sont alors définis comme suit :

$$\begin{cases} X_k = [\theta_k \ z_k]^T \\ w_k = [\alpha_p \dots \alpha_T, b_p \dots b_T, \theta_p \dots \theta_T, \omega, w]^T \end{cases} \quad \text{IV.16}$$

- **Equation de mesure (d'observation)**

Les enregistrements de signal ECG bruité sont supposés être les observations du filtre de Kalman. En plus de la mesure de l'ECG bruité, noté y_k , une autre observation peut être additionnée. En effet, le pic R est toujours supposé situé à $\theta = 0$ et le contenu de l'ECG se trouve entre deux intervalles R-R successifs (voir la figure IV.14) supposés avoir une phase entre 0 et 2π (ou $-\pi$ et π). Donc, pour une simple détection de pic R, une observation additionnelle nommée ϕ_k est ajoutée.

Le vecteur d'état défini par la phase θ_k et son amplitude z_k peut être relié aux observations par :

$$\begin{bmatrix} \phi_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad \text{IV.17}$$

Où u_k et v_k sont les bruits d'observations supposés de moyenne nulle et de covariance $R_k = \begin{bmatrix} [u_k, v_k] \\ [u_k, v_k]^T \end{bmatrix}$

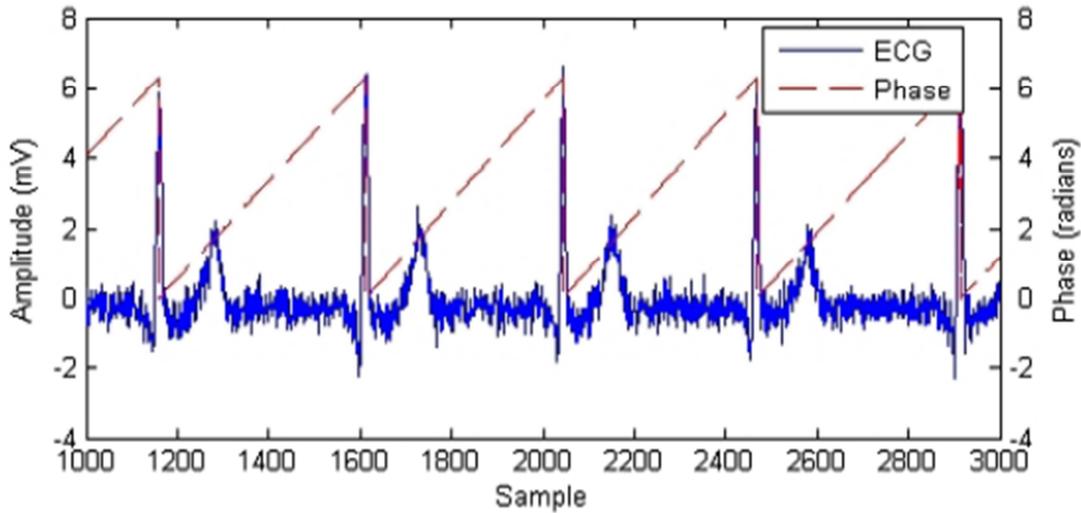


Figure IV.14 : Illustration de l'interpolation linéaire de phase entre deux intervalles R-R Successifs [44].

IV.3.1.4. Linéarisation du modèle dynamique de l'ECG

L'application du filtre de Kalman étendu nécessite la linéarisation des équations de modèle (pour le calcul des matrices de covariances de l'erreur et le calcul de gain de Kalman). En utilisant le développement en série de Taylor comme suit :

$$\begin{cases} x_{K+1} \approx f(\hat{x}_k, 0, k) + A_k(x_k - \hat{x}_k) + F_k(w_k) \\ y_k \approx h(\hat{x}_k, 0, k) + H_k(x_k - \hat{x}_k) + G_k(V_k) \end{cases}$$

Avec :

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k}, \quad F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w=\hat{w}_k}, \quad H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad \text{et} \quad G_k = \left. \frac{\partial h}{\partial v} \right|_{v=\hat{v}_k}$$

le modèle (IV.15) peut être réécrit comme un ensemble de deux équations différentielles non linéaires de la façon suivante :

$$\begin{cases} \theta(k+1) = F(\theta(k), \omega) \\ z(k+1) = G(\theta(k), z(k), \alpha_i, b_i, \theta_i, \omega, w) \end{cases} \quad \text{IV.18}$$

La linéarisation des équations (IV.18) en respectant les variables d'état θ_k et z_k , nous donne les éléments de la matrice A_k suivants:

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \theta} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{IV.19}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 1 & \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial G}{\partial z} &= 1 \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} &= - \sum_{i \in (P,Q,R,S,T)} h \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \left[1 - \frac{\Delta \theta_i^2}{b_i^2} \right] \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) \end{aligned}$$

D'une façon similaire, F_k est obtenu par la linearisation de (IV.18) en respectant le bruit de processus :

$$F_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \omega} & \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial F}{\partial b_i} & \frac{\partial F}{\partial \theta_i} & \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial G}{\partial \omega} & \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial G}{\partial b_i} & \frac{\partial G}{\partial \theta_i} & \frac{\partial G}{\partial w} \end{pmatrix} \quad \text{IV.20}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \omega} &= h, & \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F}{\partial w} = 0, & \frac{\partial G}{\partial \omega} &= 1 \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha_i} &= -h \frac{\omega \Delta \theta_i}{b_i^2} \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) \\ \frac{\partial G}{\partial b_i} &= 2h \frac{\alpha_i \omega \Delta \theta_i}{b_i^3} \left[1 - \frac{\Delta \theta_i^2}{b_i^2} \right] \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) \\ \frac{\partial G}{\partial \theta_i} &= h \frac{\alpha_i \omega}{b_i^2} \left[1 - \frac{\Delta \theta_i^2}{b_i^2} \right] \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) \\ \frac{\partial G}{\partial w} &= - \sum_{i \in (P,Q,R,S,T)} h \frac{\alpha_i \Delta \theta_i}{b_i^2} \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) \end{aligned}$$

Notons que l'équation de mesure donnée dans (IV.17) est linéaire, alors :

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_k = 1 \quad \text{IV.21}$$

IV.3.1.5. Estimation des paramètres du filtre de Kalman

Avant l'implantation du filtre de Kalman il est nécessaire d'estimer la matrice de covariance du bruit de mesure, la matrice de covariance du bruit d'état et les conditions initiales (le vecteur d'état initiale X_0 et la matrice de covariance de l'erreur P_0).

La covariance du processus Q_k est estimée en supposant que les sources des bruits ne sont pas corrélées c'est-à-dire que Q_k est une matrice diagonale. La matrice de covariance du bruit de mesure R_k est aussi considérée diagonale.

La méthode d'estimation des paramètres du filtre que nous allons décrire est une méthode automatique proposée par Sameni et al [43].

L'estimation des paramètres initiaux du filtre de Kalman Q_k , R_k , X_0 et P_0 est réalisée en utilisant les informations recueillies à partir du signal. Pour cela, la procédure est basée sur trois étapes : L'étape de prétraitement, l'étape d'extraction des caractéristiques et l'étape d'estimation des paramètres du filtre.

IV.3.1.5.1. Le prétraitement

L'étape de prétraitement permet de supprimer la déformation de la ligne de base du signal ECG afin d'assurer l'extraction correcte de ses caractéristiques. Si la déviation de la ligne de base n'est pas réduite avant l'étape d'extraction des paramètres, une détection erronée des pics R est possible, due au changement soudain de leurs amplitudes. Plusieurs méthodes ont été présentées dans la littérature afin d'éliminer ce type de bruit. Dans notre travail un filtre médian à fenêtre glissante à deux étapes est utilisé.

Le filtre médian est un outil efficace pour corriger le signal sans perte d'information. C'est un filtre classique non linéaire [45].

L'idée de ce filtre est de faire glisser une fenêtre au-dessus du signal et d'attribuer la valeur de la médiane de la fenêtre à l'échantillon de chaque centre de cette fenêtre.

Dans la première étape, un filtre médian à fenêtre glissante étroite est utilisé pour éliminer le complexe QRS de signal original et dans la deuxième étape, un second filtre médian d'une fenêtre plus large que la première est utilisé pour éliminer les ondes P et T de signal obtenu à la sortie du premier filtre. Le signal résultant de la deuxième opération ne contient donc que la ligne de base. Le signal corrigé est alors obtenu par une soustraction entre le signal original et le signal obtenu à la sortie de deuxième filtre, et on obtient ainsi une ligne isoélectrique placée à 0mV (figure IV.15).

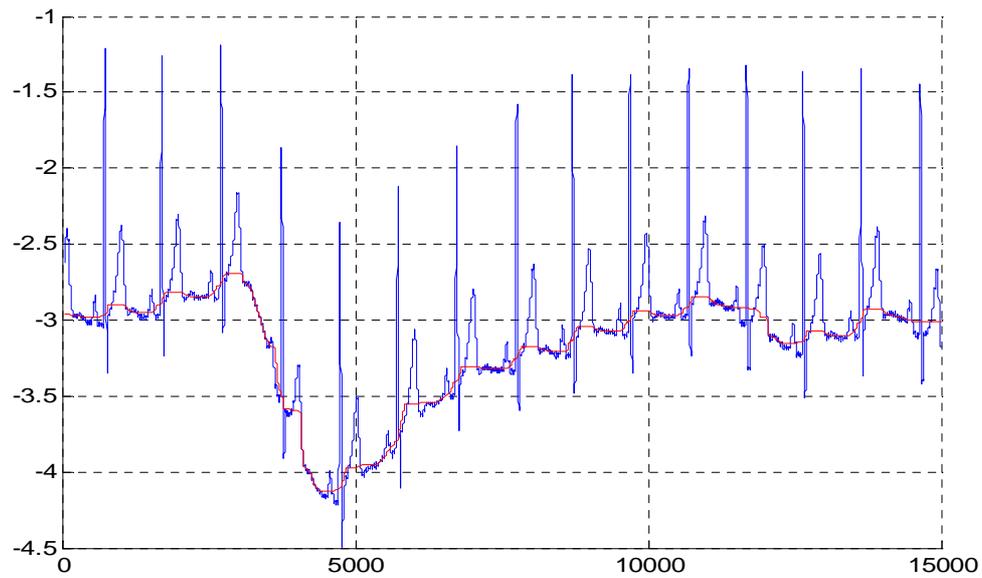


Figure IV.15 : Le tracé ECG avec une ligne de base déformée (bleu) et le signal obtenu à la sortie de deuxième filtre médian (rouge). (une soustraction entre ces deux signaux nous donne le signal de la figure IV.16).

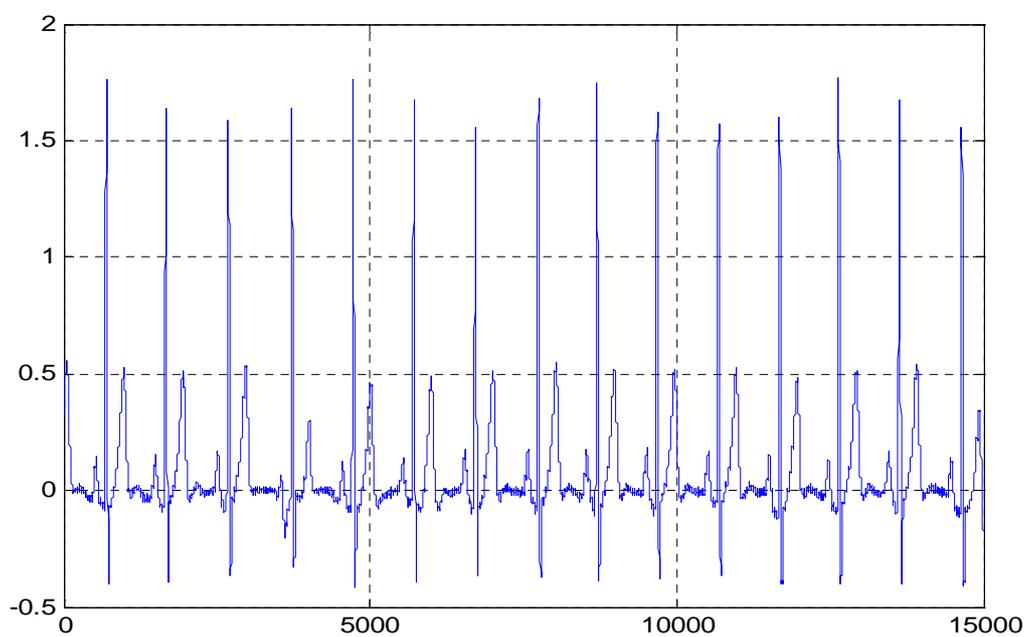


Figure IV.16 : Le tracé de l'ECG avec une déviation de la ligne de base supprimée.

IV.3.1.5.2. Extraction des caractéristiques

Comme nous avons vu, les équations de modèle (l'équation d'état et l'équation d'observation) dépendent de certains paramètres (les cinq fonctions gaussiennes (α_i, b_i et θ_i) et les valeurs de phase θ du vecteur de mesure).

L'objectif à ce niveau consiste à extraire les informations nécessaires à partir du signal ECG pour estimer ces paramètres et ceux du filtre de Kalman étendu, tels que la matrice de covariance du bruit de mesure et la matrice de covariance du bruit de système.

- **Détection des pics R**

La première étape consiste en détection de tous les pics du signal ECG, qui sont nécessaire pour la construction des valeurs de phase θ du vecteur de mesure.

Pour la détection du pic R, l'algorithme le plus populaire de détection de complexe QRS de Pan et Tompkins [46] est utilisé. Cet algorithme propose de construire un filtre passe bande à partir d'un filtre passe bas et d'un filtre passe haut. On applique ensuite au signal la série d'opérations suivantes : Filtre dérivateur, filtre quadratureur, filtre à moyenne glissante et seuillage.

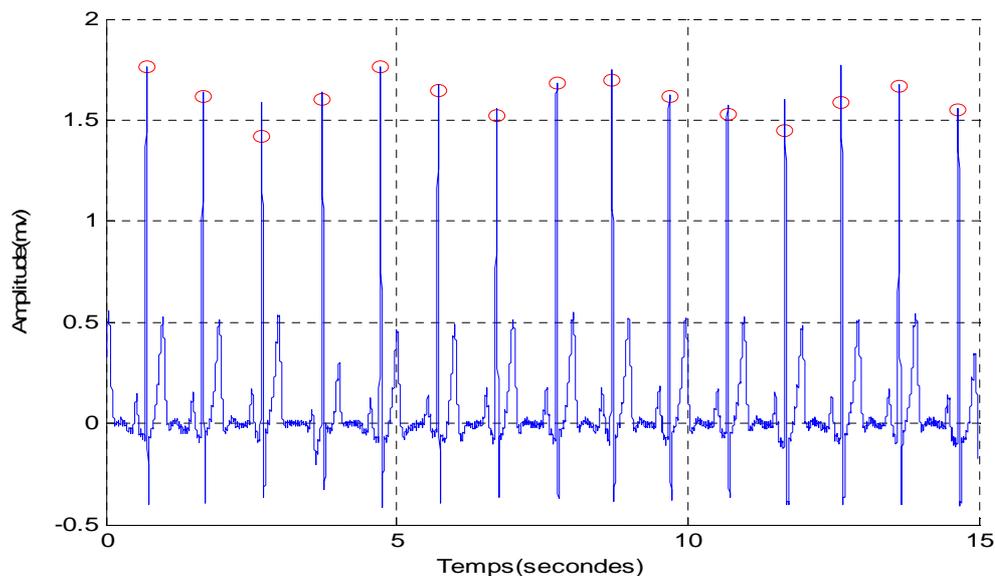


Figure IV.17 : Détection des pics (les points rouge) du signal ECG avec la méthode Pan et Tompkins.

- **Calcul de la moyenne et de la variance du signal ECG bruité**

L'équation d'observation est formée à partir de l'ECG bruité enregistré et de la phase θ_k . Le filtre utilise les valeurs de phase pour synchroniser la trajectoire du modèle avec le signal de référence. Cette phase est générée en utilisant le complexe QRS comme référence et en attribuant

des phases linéaires entre les pics R. En effet, les valeurs de phase θ_k sont des valeurs périodiques qui commencent à $\theta = 0$ correspondant au pic R et prenant la valeur de $\theta = 2\pi$ au prochain pic R (figure IV.14).

La figure (IV.18) représente la version en trois dimensions du signal ECG. A partir de cette dernière on peut extraire la moyenne et la variance du signal.

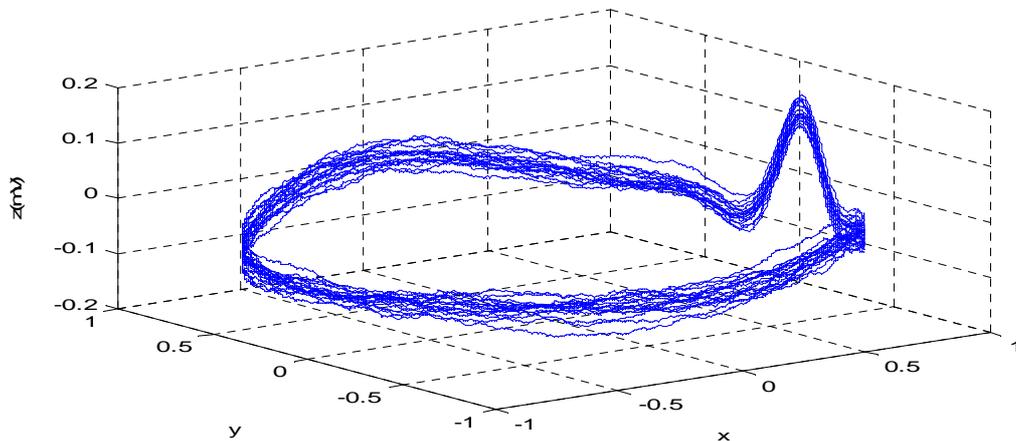


Figure IV.18: Le tracé de plusieurs cycles d'ECG avec un bruit additif.

La moyenne et la variance de l'ECG notées $\overline{ECG}(\theta)$ et $\sigma^2_{ECG}(\theta)$ respectivement, peuvent être trouvées en calculant la moyenne et la variance de toutes les phases entre 0 et 2π (figure IV.19).

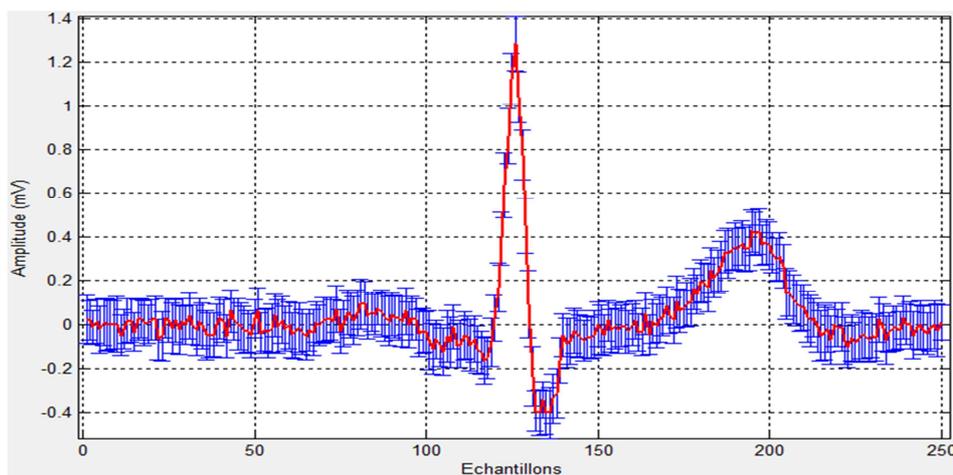


Figure IV.19: La moyenne $\overline{ECG}(\theta)$ en rouge et l'écart type $\sigma_{ECG}(\theta)$ en bleu de plusieurs cycles de signal ECG bruité.

Une fois la moyenne et la variance sont calculées, il est maintenant possible d'estimer les paramètres du modèle dynamique et ceux du EKF à partir de ces valeurs.

IV.3.1.5.3. Estimation des paramètres du filtre

Après l'extraction des caractéristiques, l'étape suivante consiste à trouver une estimation optimale des paramètres du modèle et des valeurs des variances des bruits.

- **Estimation des paramètres du modèle dynamique**

A partir de la moyenne obtenue, le modèle peut être construit à l'aide des gaussiennes. Ces dernières essayent de garder la meilleure forme de la moyenne de l'ECG obtenue précédemment. En d'autre terme, le problème consiste à trouver l'estimation optimale des paramètres de modèle α_i, b_i et θ_i , convenable à la meilleure forme de moyenne ECG. Ce problème peut être résolu en utilisant l'approche des moindres carrées [43].

- **Estimation de la matrice de covariance de bruit d'état**

Théoriquement, la valeur de covariance du bruit d'état Q_k est une mesure de l'uniformité de la morphologie de l'ECG [43]. Nous pouvons pratiquement trouver une estimation de Q_k , en utilisant la marge d'erreur comme elle est montrée sur la figure (IV.19) qui correspond à la déviation de différents cycles ECG autour de la moyenne.

La matrice de covariance du bruit de processus est définie par la matrice diagonale suivante :

$$Q_k = E[w_k w_k^T] \quad \text{IV.21}$$

$$Q_k = \text{diag}(\sigma_{\alpha_p}^2 \dots \sigma_{\alpha_T}^2, \sigma_{b_p}^2 \dots \sigma_{b_T}^2, \sigma_{\theta_p}^2 \dots \sigma_{\theta_T}^2, \sigma_\omega^2, \sigma_w^2)$$

Les valeurs initiales α_i, b_i et θ_i des cinq fonctions gaussiennes sont déterminées dans $\overline{ECG}(\theta)$. Les variances des paramètres des cinq fonctions gaussiennes $\sigma_{\alpha_i}^2, \sigma_{b_i}^2$ et $\sigma_{\theta_i}^2$ sont estimées en trouvant les grandeurs de déviation de ces paramètres autour de la moyenne ECG estimée permettant de générer la bonne forme de la moyenne ECG dans les limites inférieures et supérieures ($\overline{ECG}(\theta) - \sigma_{ECG}(\theta)$ et $\overline{ECG}(\theta) + \sigma_{ECG}(\theta)$). Ce problème se réduit à un problème de moindre carrée non linéaire qui nécessite de trouver les valeurs maximales et minimales de chaque paramètre pour qu'il reste dans les limites.

La fréquence angulaire ω est approximée par $\omega = \frac{2\pi}{T}$, où T (intervalles RR) est la période de chaque cycle ECG. Pour les signaux où les déviations entre les intervalles RR sont petites, une simple approximation est de prendre la valeur globale de ω en utilisant la moyenne des intervalles RR de tout le signal. Parfois, les valeurs des intervalles PR et QT des battements changent avec la variation de rythme cardiaque, qui peut causer la variation de ω en fonction de temps. La variance σ_ω^2 est obtenue à partir des écarts entre les battements.

La variance de bruit de processus w doit être aussi estimée. En notant que w est un paramètre qui représente l'imprécision du modèle dynamique. Une simple estimation de ce paramètre serait une variable gaussienne avec une moyenne nulle et une variance appropriée [43] [44].

Une valeur intuitive de cette variance peut être trouvée à partir de la déviation de la ligne de base entre la fin de l'onde T et le début d'une autre onde P ou entre la fin de l'onde P et le point Q [43], puisque aucune déformation de la ligne de base n'est produite durant cette période.

- **Détermination de la matrice de covariance de bruit de mesure**

La matrice de covariance du bruit de mesure R_k contient deux types de bruits, le bruit du mesure de phase u_k et le bruit du mesure de signal ECG v_k . Elle est définie par la matrice diagonale suivante:

$$R_k = \text{diag}(\sigma_{u_k}^2, \sigma_{v_k}^2) \quad \text{IV.22}$$

La phase pour n'importe quel battement est déterminée à partir de pic R du signal ECG. Une source de bruit possible pour u_k est l'erreur d'échantillonnage qui se produit lorsque le pic R est situé entre deux instants d'échantillonnage [43].

Pour modéliser l'imprécision du temps d'échantillonnage, la détection de pic R est modélisée par une variable aléatoire qui est répartie uniformément entre deux échantillons consécutifs. En considérant, que le cycle ECG est équivalent à 2π dans le domaine de phase, la plage angulaire d'un seul échantillon est ωh , où h désigne la période d'échantillonnage et ω est la fréquence angulaire. Donc u_k est uniformément distribuée entre $-\omega h/2$ et $+\omega h/2$. Alors $E\{(u_k)^2\} = (\omega h)^2/12 = \sigma_{u_k}^2$ [43].

La variance de bruit de mesure $\sigma_{v_k}^2$ est estimée à partir de la puissance du signal ECG à phase enveloppée, $\sigma_{ECG}^2(\theta)$.

- **Estimation des conditions initiales du filtre**

La première valeur du signal ECG et sa phase attribuée sont choisies comme des valeurs initiales estimées du vecteur d'état \hat{X}_0 . La matrice de covariance de l'erreur P_0 est une matrice diagonale, ses paramètres sont donnés dans le tableau IV.1.

Les valeurs initiales estimées \hat{X}_0 et P_0 , n'ont pas un effet sur la performance du filtre parce que l'état estimé \hat{X}_k devient indépendante des valeurs initiales quand k augmente [20]. Quand l'estimation des valeurs initiales est inexacte, le système a besoin de plusieurs itérations pour atteindre la solution et quand la sélection des paramètres (\hat{X}_0 et P_0) est précise le filtre converge vers la bonne solution dès les premières itérations.

Paramètres	Valeurs
θ_k	2π
z_k	10% de l'amplitude de pic maximum de l'ECG

Tableau IV.1 : Les paramètres initiaux de la matrice de covariance P_0

Finalement, les étapes nécessaires pour l'application du filtre de Kalman étendu au débruitage des signaux ECG sont données, la mise en œuvre du filtre maintenant est possible.

IV.3.2. Débruitage des signaux ECG

Nous allons maintenant appliquer le filtre de Kalman étendu (EKF) au débruitage du signal ECG dans les deux cas suivants : Le cas des signaux synthétiques obtenus par modélisation selon la méthode précédemment décrite et bruités par un bruit blanc puis le cas des signaux ECG réels bruités par différents types de bruits avec différentes valeurs du rapport signal sur bruit SNR d'entrée.

Pour l'évaluation quantitative des performances du filtre, nous allons calculer le rapport signal sur le bruit (SNR) à la sortie du filtre, en utilisant la formule suivante [41] :

$$SNR_{sortie}(dB) = \frac{\sum_i (x(i))^2}{\sum_i (x_d(i) - x(i))^2} \text{ (dB)}$$

Avec :

x : Le signal non bruité (original) ;

x_d : Le signal débruité (la sortie de filtre).

IV.3.2.1. Débruitage d'un signal ECG synthétique

Dans ce cas, nous allons appliquer le filtre de Kalman étendu au débruitage d'un signal ECG synthétique obtenu à partir du modèle décrit dans le chapitre précédent en choisissant les paramètres présentés dans le tableau (IV.2) ci-dessous :

Le signal est échantillonné à une fréquence de 1KHz et bruité par un bruit blanc gaussien de SNR d'entrée égal à 0 dB (figure IV.20).

Indice(i)	P	Q	R	S	T
θ_i (radian)	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{12}\pi$	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
a_i (amplitudes des gaussiennes)	1.2	-0.5	30.0	-7.5	0.75
b_i (largeurs des gaussiennes)	0.25	0.1	0.1	0.1	0.4

Tableau IV.2 : les paramètres de modèle correspondant au signal ECG synthétique [38]

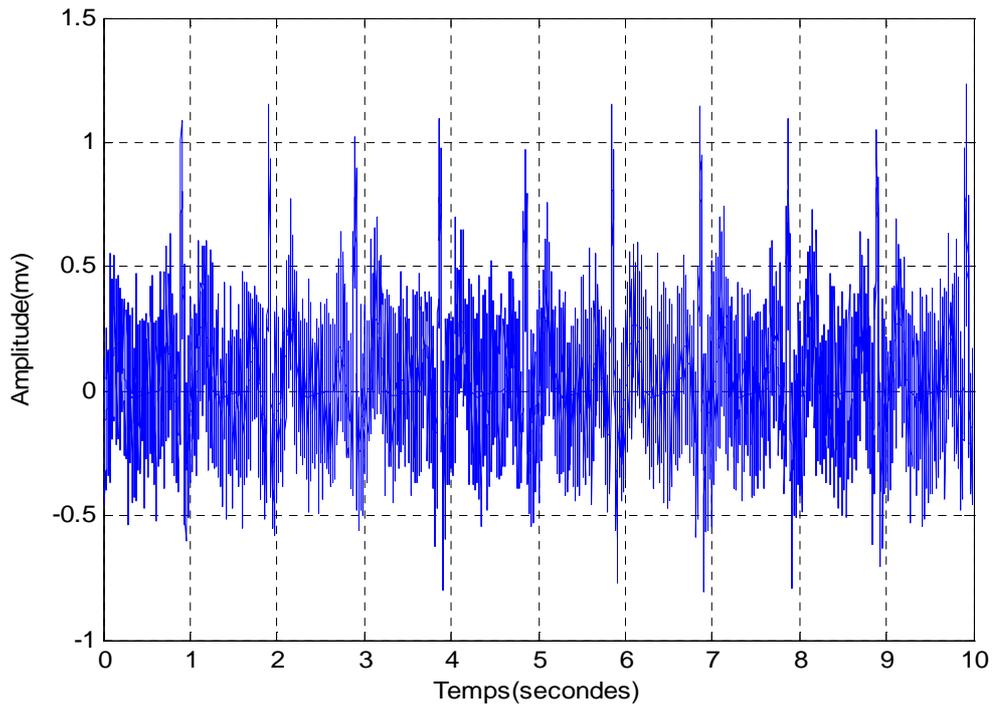


Figure IV.20 : Le signal ECG synthétique bruité

Les figures suivantes présentent les résultats obtenus à la sortie du filtre :

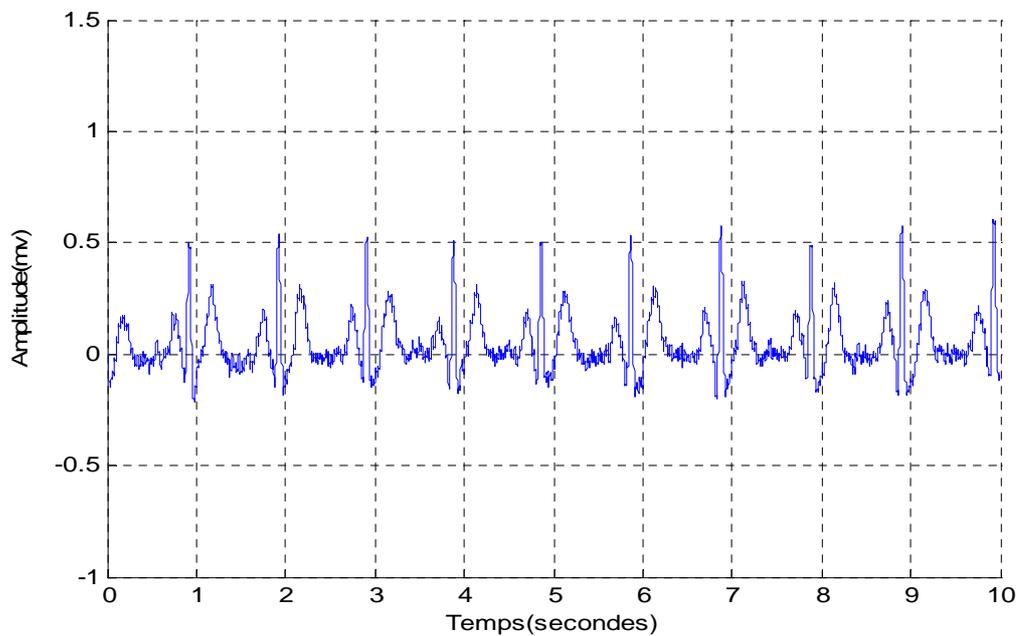


Figure IV.21 : Le signal ECG synthétique débruité par EKF.

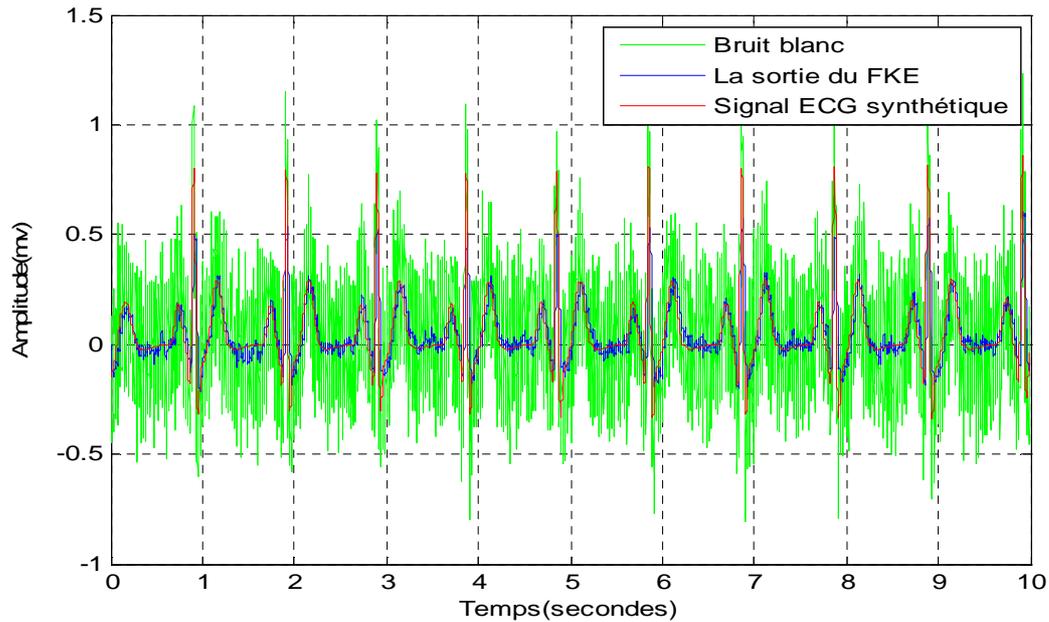


Figure IV.22 : Superposition du signal ECG bruité (vert), débruité (bleu) et original (rouge)

Dans les figures précédentes nous avons présentés le signal ECG bruité (IV.20) avec un SNR d'entrée égale à 0 dB et le signal ECG débruité obtenu à la sortie du filtre avec un SNR égal 4.29 dB (figure IV.21).

Pour faire une comparaison visuelle, nous avons présenté sur la (IV.22) une superposition des trois signaux : ECG bruité, ECG débruité et le signal original. Et pour l'évaluation quantitative de la qualité du filtrage nous avons calculé le SNR de sortie du filtre en fonction de SNR d'entrée entre l'intervalle -15 à 15 dB (figure IV.23)

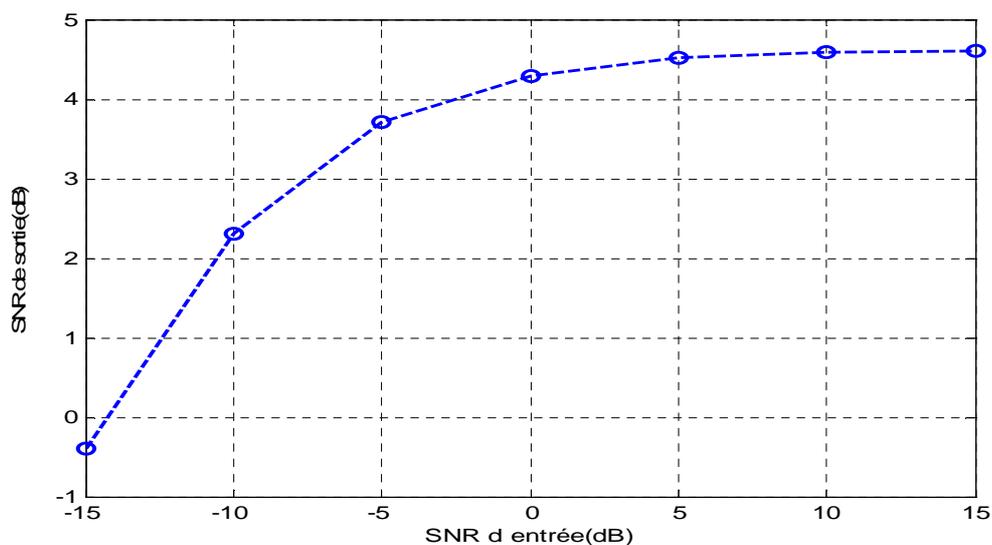


Figure IV.23 : Représentation de SNR de sortie en fonction de SNR d'entrée

La courbe obtenue dans la figure (IV.23), montre que les valeurs de SNR de sortie augmentent progressivement et considérablement en fonction des valeurs de SNR d'entrée dans la plage [-15 dB 0dB]. A partir d'environ 5dB, les valeurs varient légèrement.

IV.3.2.2. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par différents types de bruit

Dans cette partie, nous allons utiliser des signaux ECG réels, échantillonnés à une fréquence de 1000Hz. Ces signaux sont faiblement bruités. Afin de mieux faire ressortir l'effet du filtrage de Kalman étendu, nous allons alors leur ajouter des bruits de types différents avec différentes valeurs de SNR d'entrée.

IV.3.2.2.1. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par un bruit blanc gaussien

Dans cette étape nous allons bruite le signal ECG réel avec un bruit blanc gaussien. Le rapport signal sur le bruit à l'entrée égale à 0 dB, comme il est montré dans la figure suivante :

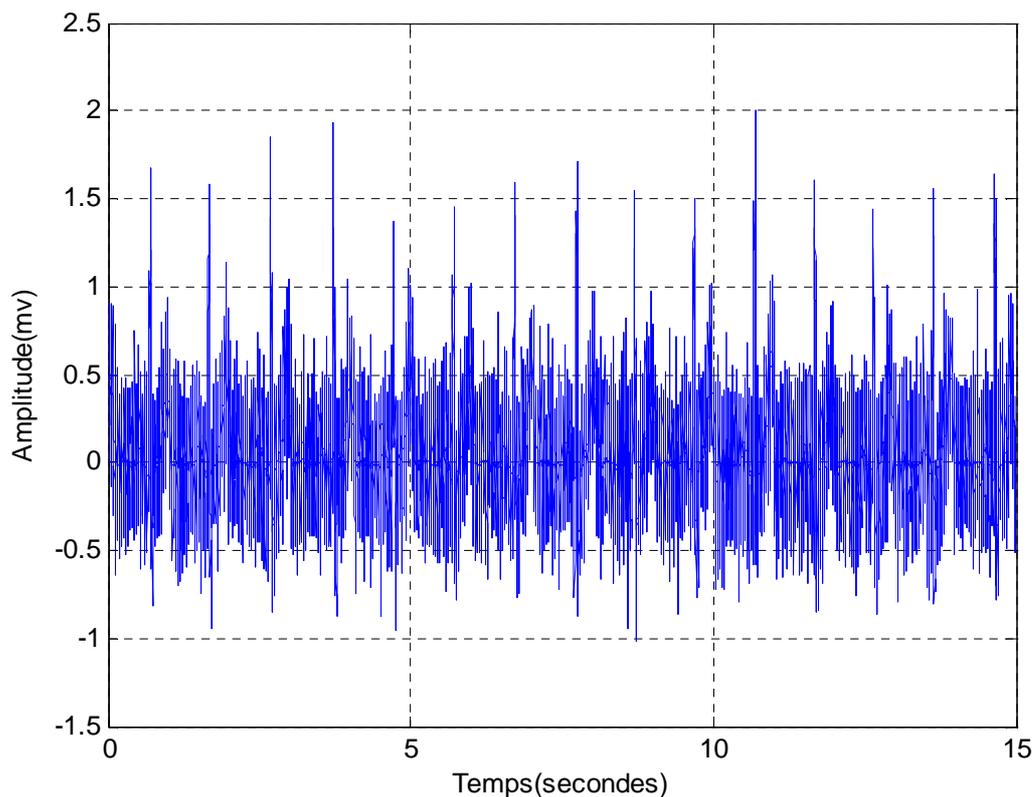


Figure IV.24 : Signal ECG à débruiter (signal réel + bruit blanc) en utilisant le EKF.

La figure suivante représente le signal ECG obtenu à la sortie du filtre de Kalman étendu :

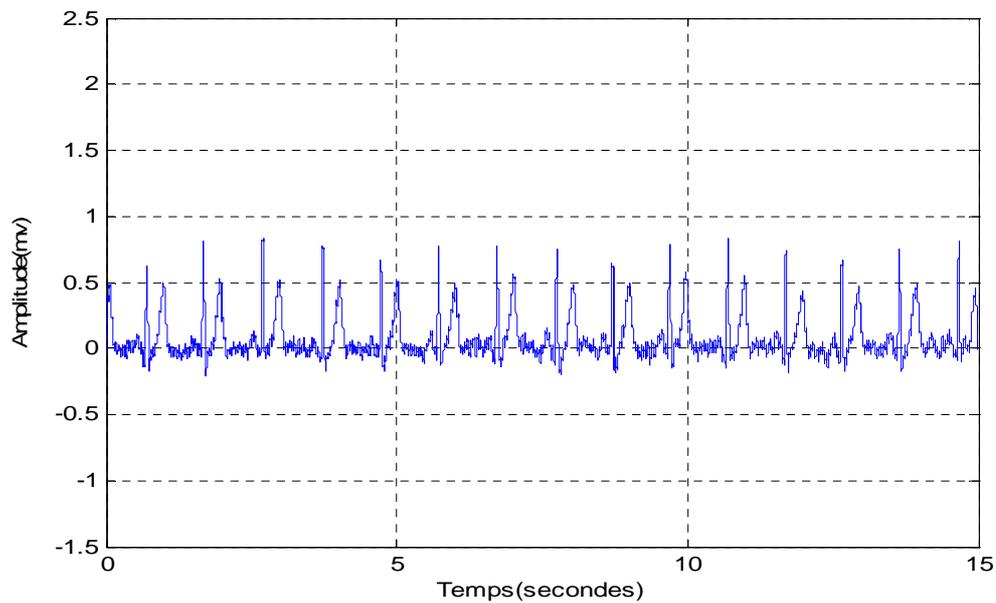


Figure IV.25: le signal ECG réel débruité obtenu à la sortie du filtre de Kalman étendu.

Dans la figure suivante nous présentons le signal ECG bruité à l'entrée du filtre et le signal ECG débruité obtenu à la sortie du filtre.

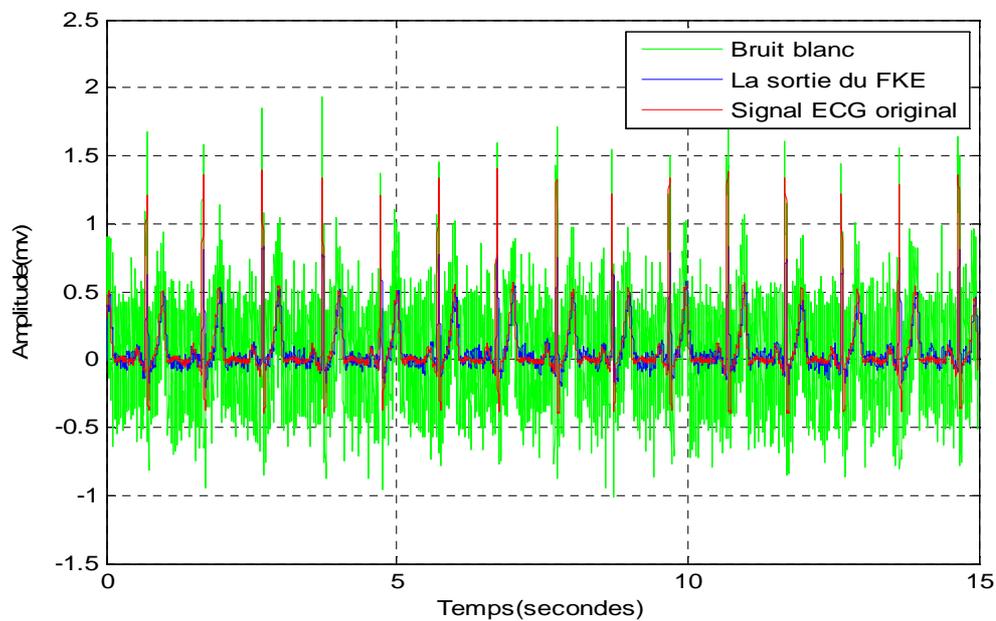


Figure IV.26 : Superposition des signaux ECG bruité (vert), débruité (bleu) et original (rouge)

D'après les résultats illustrés sur les figures ci-dessus, nous pouvons dire que le filtre de Kalman étendu a réussi à débruiter le signal ECG réel bruité avec un bruit blanc gaussien

Nous avons effectué plusieurs mesures en faisant varier le SNR d'entrée, la figure suivante représente le SNR de sortie en fonction de SNR d'entrée.

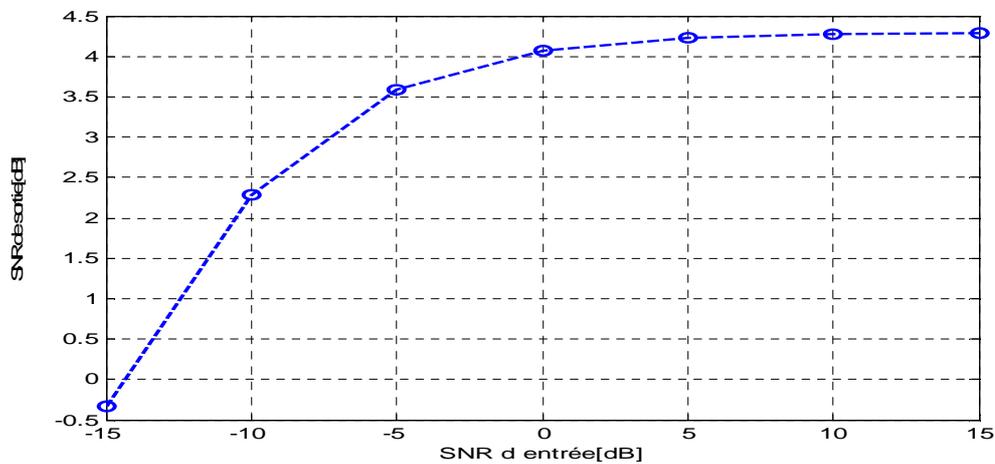


Figure IV.27 : Représentation de SNR de sortie en fonction de SNR d'entrée

La courbe représentée dans la figure ci-dessus est la même avec celle obtenue dans la figure IV.23 sauf que les valeurs SNR augmentent d'une façon moins importante.

IV.3.2.2.2. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par un bruit coloré (rose)

Ici, nous allons bruite le signal ECG avec un bruit coloré (bruit rose), comme il est montré sur la figure suivante :

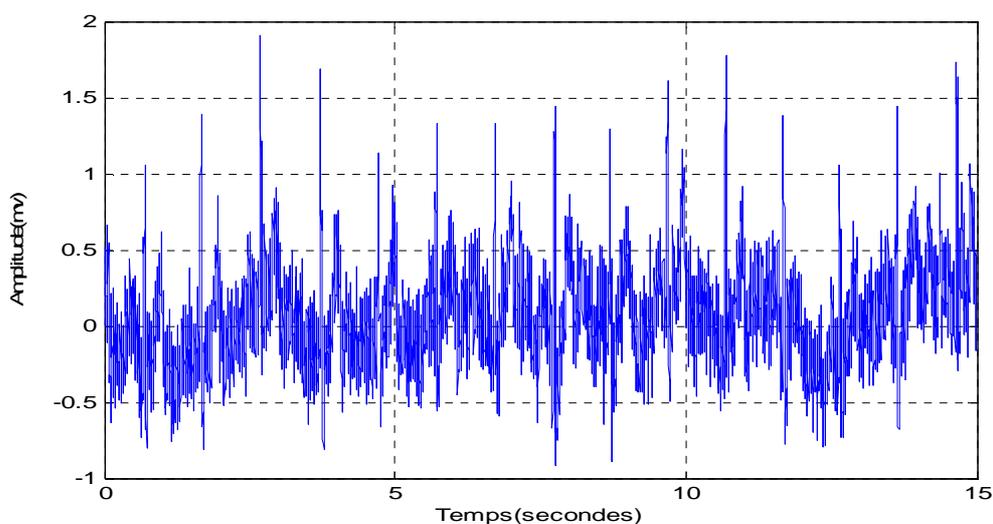


Figure IV.28 : Le signal ECG bruité (signal + bruit coloré).

La figure suivante représente le signal ECG débruité obtenu à la sortie de filtre :

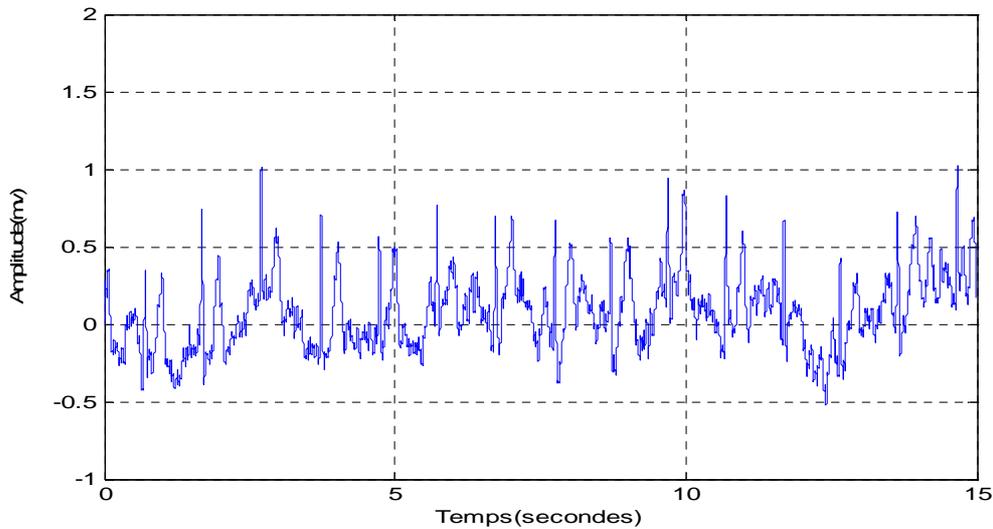


Figure IV.29 : Le signal ECG débruité obtenu à la sortie de EKF.

La figure suivante illustre le signal ECG bruité avec un bruit coloré, le signal ECG obtenu à la sortie de filtre et le signal original.

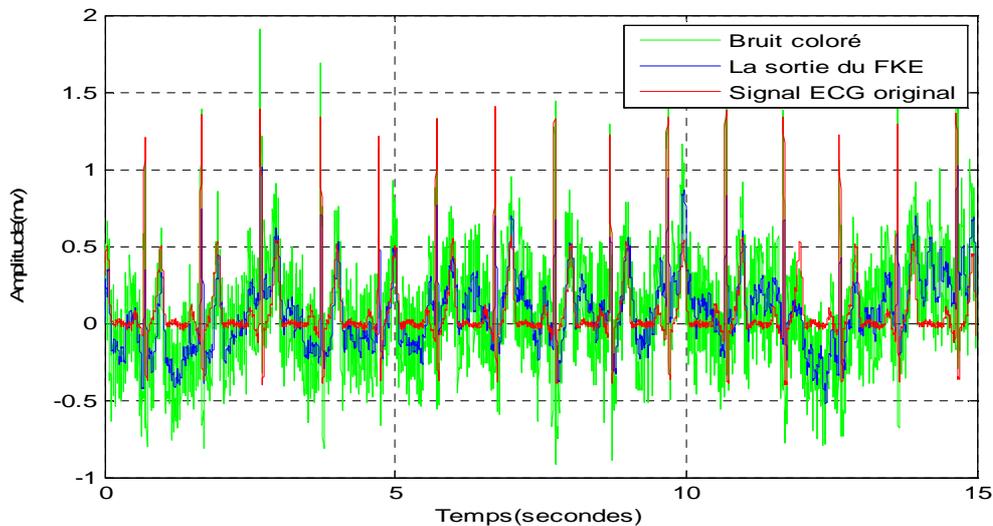


Figure IV.30 : Superposition de trois signaux : Le signal ECG bruité avec un bruit rose (vert), le signal original (rouge) et le signal ECG débruité obtenu à la sortie de filtre (bleu).

D'après les résultats obtenus dans les figures nous remarquons que le filtre n'a pas donné de bons résultats, le signal de sortie ne suit pas l'allure du signal original.

IV.3.2.2.3. Débruitage d'un signal ECG réel bruité par un bruit musculaire réel

Dans cette dernière étape nous allons bruite le signal ECG avec un bruit musculaire réel pris de MIT-BIH Noise Stress Test Database [48], les bruits de cette base de données sont échantillonnés avec une fréquence de 360Hz. Pour que la fréquence d'échantillonnage du signal soit correspondue à celle de bruit musculaire, ce dernier est rééchantillonné à une fréquence de 1000 Hz.

La figure suivante représente le signal ECG bruité avec un bruit musculaire :

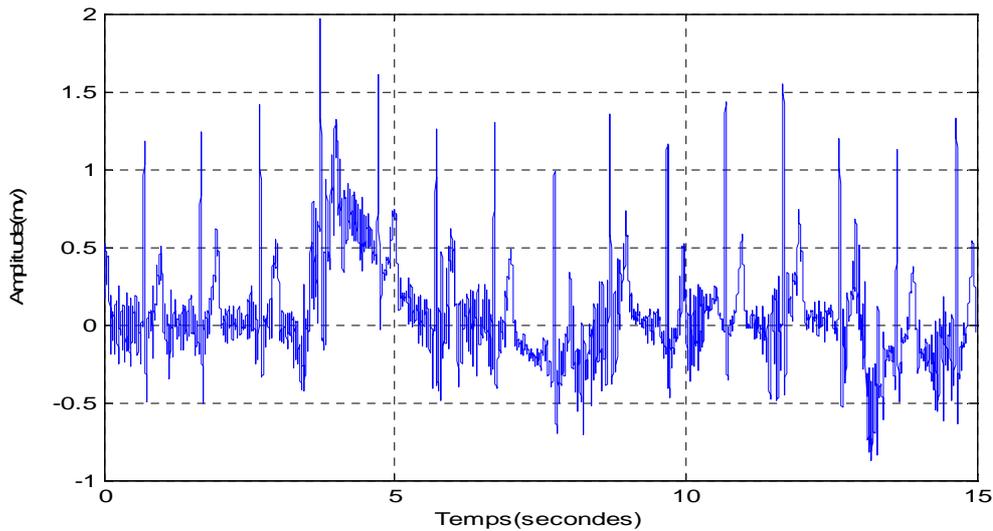


Figure IV.31 : Signal ECG bruité avec un bruit musculaire.

Les figures IV.32 et IV.33 suivantes représentent les résultats de débruitage d'un signal ECG bruité par un bruit musculaire :

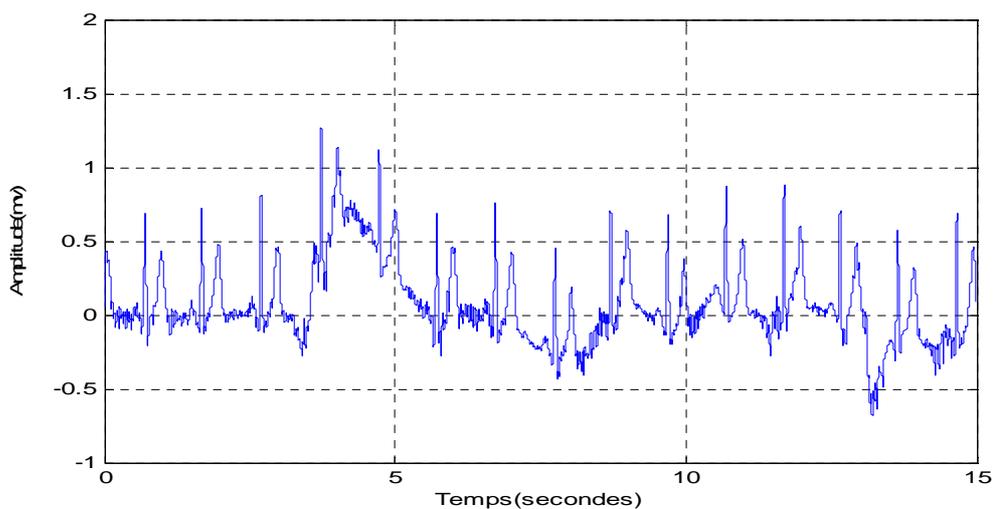


Figure IV.32 : Le signal ECG débruité.

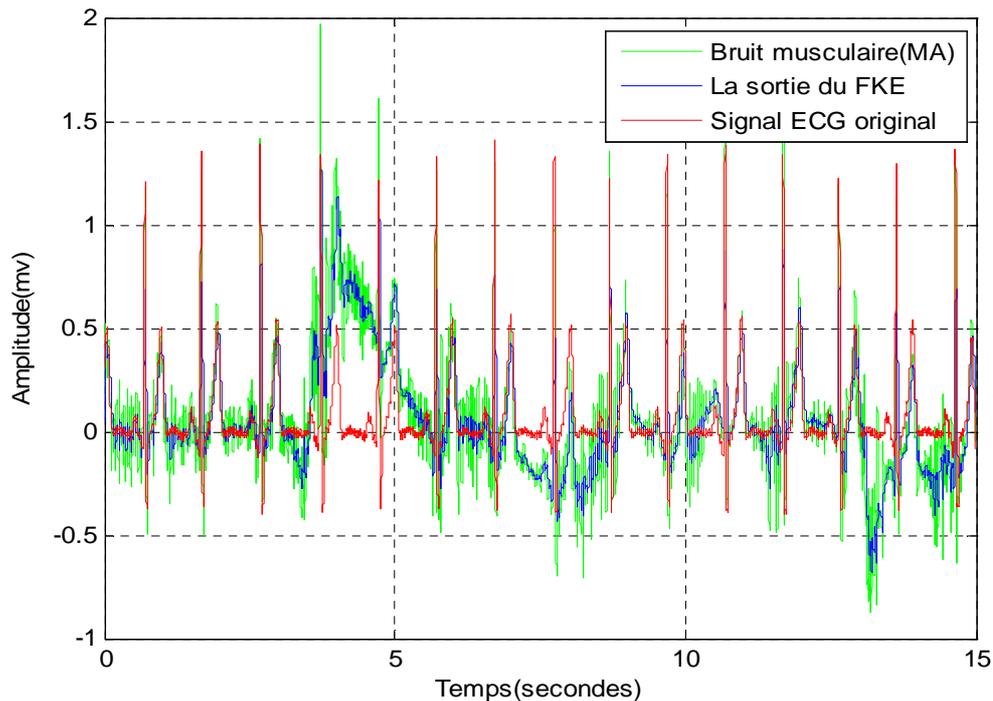


Figure IV.33 : Superposition de trois signaux : Le signal ECG bruité (vert), le signal original (rouge) et le signal ECG débruité obtenu à la sortie de filtre (bleu).

Nous constatons que nous obtenons des performances dégradées du filtre. L'allure du signal de sortie ne suit pas vraiment le signal original.

IV.3.3. Discussion des résultats

A partir des résultats illustrés dans les figures précédentes, nous pouvons dire que le filtre de Kalman étendu est efficace pour le débruitage des signaux ECG synthétiques et réels bruités par des bruits blancs gaussiens. Mais dans le cas des bruits colorés on n'a pas obtenu de bons résultats (les signaux sont mal estimés).

Pour bien comparer les résultats du filtrage obtenus dans les différents cas, nous avons calculé le SNR de sortie en fonction de SNR d'entrée entre -15 dB et 15 dB (figure IV. 34).

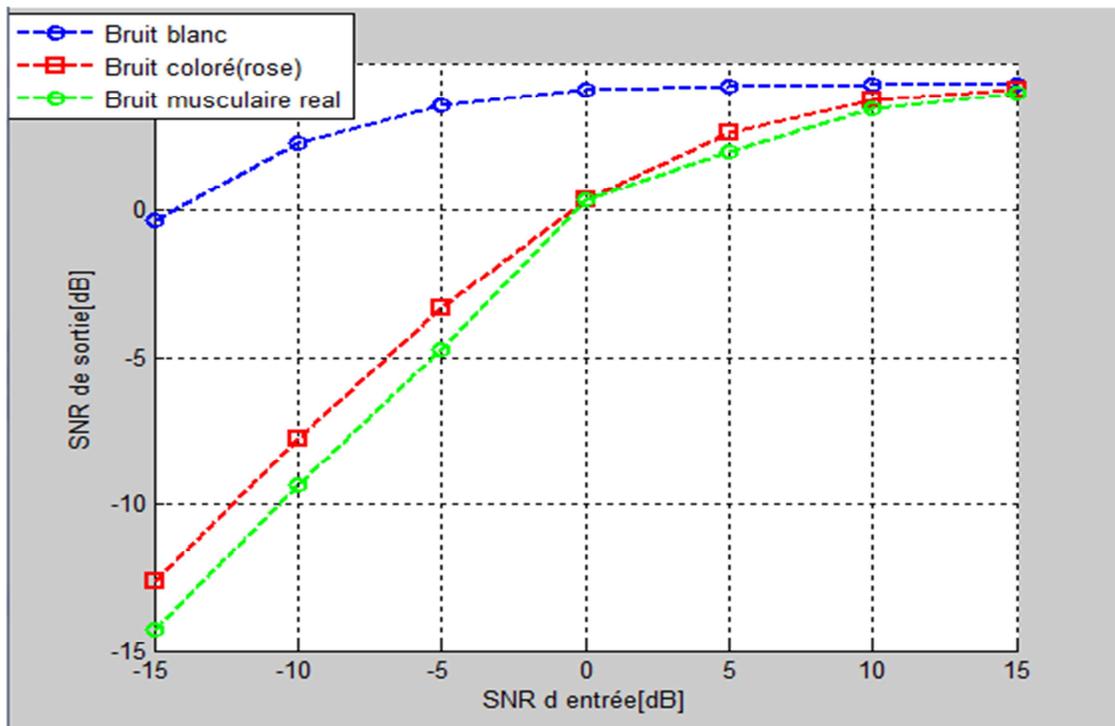


Figure IV.34 : Comparaison de SNR de sortie de EKF pour les trois types de bruit: bruit blanc (bleu), bruit rose (rouge) et bruit musculaire (vert).

Les courbes de la figure (IV.34), confirment la dégradation des performances du filtre de Kalman dans les cas des bruits colorés en particulier le bruit musculaire.

Nous constatons, aussi d'après la figure IV.34, que le filtre de Kalman étendu est efficace dans le cas où les SNR d'entrée sont faibles et à partir d'environ 10 dB devient moins important. Le signal bruité (à l'entrée) diffère légèrement du signal original.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les étapes et les résultats d'application du filtre de Kalman pour débruiter un signal sinusoïdal noyé dans un bruit blanc additif. Puis, nous avons appliqué la version étendue du filtre au débruitage d'un signal ECG synthétique bruité par un bruit blanc gaussien et pour débruiter un signal ECG réel bruité par différents types de bruits.

Dans le cas où les bruits sont blancs et gaussiens nous avons obtenus de bons résultats même avec des valeurs de SNR d'entrée faibles. Mais dans le cas des bruits colorés les performances de filtre de Kalman sont dégradées.

*Conclusion et
perspectives*

Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous avons étudié le filtre de Kalman dans le but de l'appliquer dans le domaine de traitement du signal au débruitage des signaux et nous nous sommes consacrés au signal ECG.

Pour cela, nous avons étudié le filtre du Kalman et sa version étendue puis nous avons présenté une méthode de modélisation mathématique des signaux ECG basée principalement sur la théorie des cycles limites, et qui a ensuite utilisé pour le débruitage des signaux ECG.

Nous avons présenté un exemple d'application du filtre de Kalman classique pour le débruitage d'un signal sinusoïdal, afin d'étudier l'influence des paramètres sur la qualité du filtrage puis nous avons appliqué la version étendue du filtre au débruitage des signaux ECG synthétiques bruités par un bruit blanc gaussien et au débruitage des signaux ECG réels bruités par différents types de bruit (bruit blanc et coloré).

Les résultats de cette étude montrent la capacité du filtre de Kalman étendu au débruitage des signaux ECG synthétiques et réels bruités par des bruits blancs gaussiens même dans le cas où les valeurs des rapports signal sur le bruit des signaux d'entrée sont très faibles.

Dans le cas des bruits colorés les performances du filtre sont dégradées, cela est dû aux hypothèses de travail du filtre de Kalman. En effet, pour une simplification des calculs mathématiques du filtre de Kalman les bruits de mesure et d'état sont supposés blancs et gaussiens, ce qui n'est pas le cas des bruits réels.

Comme perspective de ce travail, nous proposons d'augmenter le modèle du système par des filtres formeurs (filtres générateurs), qui permettent de modéliser le bruit considéré (bruit coloré) à partir d'un bruit blanc gaussien, afin de pouvoir appliquer le filtre de Kalman en préservant son optimalité.

Une autre perspective, est d'appliquer le filtre de Kalman au débruitage des autres signaux physiologiques tels que l'EMG et EEG.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] MARTIN J.N. (2005). Signaux et système, débiter en traitement numérique du signal. Application au filtrage et au traitement des sons cours et exercices résolus, éd., Ellipses Marketing, Paris.
- [2] KPALMA K. et HAESE-COAT V. (2003). Traitement numérique du signal, éd., Ellipses Marketing. Paris.
- [3] [Www.ferdinandpiette.com](http://www.ferdinandpiette.com).
- [4] QUERTIER-DAGORN .B. (2004). Système de Filtrage Numérique pour le Corrélateur de l'Interféromètre ALMA. Thèse de Doctorat. Université Bordeaux I. Paris.
- [5] KUNT M. (1999). Traitement numérique des signaux, éd., Lausanne. P.P.U.R. Suisse.
- [6] VAN DEN ENDEN A.W.M et VERHOECKX N.A.M. (2003). Traitement numérique du signal une introduction, éd., Dunod, Paris.
- [7] MORI Y. (2007). Electronique pour le traitement du signal-volume 6. Filtrage numérique, éd., Lavoisier, Paris. France.
- [8] DUMARTIN T. (2005). Rappels traitement du signal, Note de cours. Licence Professionnel Optronique.
- [9] ROTELLA D. Filtrage Optimal. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes.
- [10] ALAZARD D. (2006). Introduction au filtre de Kalman. Notes de cours, Exercices, sessions Matlab.
- [11] [Fr.wikipedia.org/wiki/filtre_de_Kalman](http://fr.wikipedia.org/wiki/filtre_de_Kalman).
- [12] Kalman R. E. (1960). *A New Approach to linear Filtering and Prediction Problems. Transaction of the ASME- Journal of Basic Engineering, 82 (series D): 35-45.*
- [13] HILAIRET M. (2001). Application des outils du traitement du signal à la commande des machines tournantes. Thèse de Doctorat. Université de Nantes. France.
- [14] MAMMAR S. Traitement statistique du signal (cours). Institut Universitaire Professionnalisé d'Evry-Val d'Essonne. France.
- [15] HERUT R. et RAKOTOMAMONJY A. (2012). Introduction aux signaux aléatoires. INSA Rouen. France.
- [16] CONCORDET D. Introduction à la statistique inférentielle. Unité de Biométrie Ecole Vétérinaire de Toulouse. France.
- [17] JUTTEN C. (2010). Filtrage linéaire optimal. Cours de cinquième année du département 3i Options Image et Signaux et Automatique. Université Joseph Fourier-Polytech' Grenoble. France
- [18] WELCH G. et BISHOP G. (2006). An Introduction to the Kalman Filter. Department of the Computer Science. University of North Carolina at Chapel Hill. États-Unis.

- [19] NDJENG NDJENG A. (2009). Localisation robuste multi-capteurs et multi-modèles. Thèse de Doctorat. Université D'evry Val d'Essonne. France.
- [20] GREWAL M.S. et ANDREWS A.P. (2008). Kalman Filtrng. Theory and Practice Using Matlab. Éd., John Wily et Sons, Inc.
- [21] NØRGAAD M. (2002). KALMTOOL. State Estimation for Nolinear Systems. Technical Report IMM-REP-2000-6 (Revised Edition, Dec 2001). Technical University of Denmark.
- [22] SAMENI R. SHAMSOLLAHI M.B. et JUTTEN C. (2005). *Filtering Electrocardiogram Signals Using the Extended kalman Filter. IEEE.*
- [23] MARIEB E.N. (1999). Anatomie et physiologie humaine. Edition de nouveau pédagogique Inc. Canada.
- [24] DUBOIS R. (2004). Application des nouvelles méthodes d'apprentissage à la détection précoce d'anomalies en électrocardiographie. Thèses de Doctorat. Université Paris 6. France.
- [25] HAMLADJI R.M. (2010). Précis de sémiologie. Office des publications universitaire. Alger.
- [26] GOMES. J.A. (1993). Signal Averaged Electrocardiography. éd., Spring Science et Business Media Dordrecht.
- [27] EL DAJANI R.M. (2002). Modélisation cognitive et prédictive du comportement dynamique de l'activité électrique du cœur par approche neuronales. Thèse Doctorat. Institut national des sciences appliquées de Lyon. France.
- [28] RENALI R. (2013). Analyse du signal ECG par réseaux adaptatif d'ondelettes en vue de la reconnaissance de pathologie cardiaques. Thèse de Doctorat. Université Abou Bekr Belkaid. Algérie.
- [29] [http:// www. etudiantinfirmier.com](http://www.etudiantinfirmier.com)
- [30] TALBI M.L. (2011). Analyse et traitement du signal électrocardiographie (ECG).Thèse de Doctorat. Université Mentouri Constantine. Algérie.
- [31] AMABILE N. (2008). Electrocardiogramme : Indications et interprétation (309). Faculté de Médecine de Marseille. France.
- [32] MARIUS O. Traitement automatique des signaux ECG. Rapport de stage. Ecole Nationale Supérieur de Télécommunication de Bretagne.
- [33] THAKOR N.V, WEBSTER J.G et TOMPKINS W.J. (1984). *Estimation of QRS complex Power Spectra for Design of QRS Filter. BME-31, NO 11, pp. 702-706.*
- [34] CABASSON A. (2008). Estimation et analyse des intervalles cardiaques. Thèse de Doctorat. Université de Nice-Sophie Antipolis. France.
- [35] LELOUCHE N et LEFEVERE. J. (1999). MEMO ECG. Edition VERNAZOBERES-GREGO. 99, bd de l'Hopital. 75013. Paris. France.
- [36] MORIZET N. (2006). Initiation aux ondelettes l'article invite. ISEP, Département électronique. Paris. France.

- [37] MISITI M, MISITI G, OPPENHEEIM G et POGGI J. M. (2003). Les ondelettes et leurs applications. Lavoisier. France.
- [38] McSHARRY P.E, CLIFFORD G.D, TARASSENKO L et SMITH L.A. (2003). *A Dynamical Model for Generating Synthetic Electrocardiogram Signals. IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 50, NO.3, pp.289-294.
- [39] SAMENI R. (2008). Extraction of Fetal Cardiac Signals from an Array of Maternal Abdominal Recording. Thèse de Doctorat. Institut polytechnique de Grenoble. France.
- [40] HYPPEAU R. (2005). CHAOS ET ITERATIONS «Attracteur de Hénon ». Cours ENSMM.
- [41] OUALI M.A, KHAEIRDDINE. C, MOUNA G, LORENTE. L.M et ROJAS D.B. (2013). *ECG denoising using Extended Kalman Filter. IEEE*
- [42] MOKHTARI M. (2000). MATLAB 5.2 et 5.3 et SIMULINK 2 et 3 pour étudiants et Ingénieurs, éd., Springer, Allemagne.
- [43] SAMENI R, SHAMSOLLAHI M.B, JUTTEN. C et CLIFFORD G.D. (2007). *A Non linear Bayesian Filtring Framwork for ECG Denoising. IEEE Transactions on Biomedical Enginering*, vol. 54, NO.12.
- [44] NIKNAZAR M, (2013). Extraction et débruitage de signal ECG de fœtus. Thèse de Doctorat. Université de Grenoble. France.
- [45] CHALABI Z.E.K, BOUDJEMAOUUI A, SAADIA L et BERRACHED N. (2009). *Détection et classification Automatique d'Arythmies cardiaque*. 5th International Conference. TUNISIA.
- [46] PAN J et TOMPKINS W. (1985). *A Real- Time QRS Detection Algorithm. IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol.BME-32, NO.3.
- [47] MOODY G.B, MULDROW W.E and MARK. The MIT BIH Noise Stress Test Database. [http:// www.physionet.org/physiobank/database/nstdb/](http://www.physionet.org/physiobank/database/nstdb/)

Annexe

Annexe

I. Génération du bruit :

Le bruit est un signal aléatoire qui possède des propriétés statistiques caractéristiques. Parmi elles la densité spectrale de puissance, qui peut être utilisée pour distinguer les différents types de bruit. Cette classification par la densité spectrale donne une terminologie de « couleur ». Chaque type est défini par une couleur.

Le bruit blanc est défini d'avoir une densité spectrale de puissance constante quelque soit la fréquence. Cependant, le bruit coloré possède une densité spectrale de puissance qui varie d'une façon monotone avec la fréquence.

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta}$$

Où :

$S(f)$: Densité spectrale de puissance.

f : La fréquence

β : Est un nombre qui détermine la couleur du bruit (bruit blanc ($\beta=0$), bruit rose ($\beta = 1$) et bruit marron ($\beta=2$)).

II. Algorithme de détection de complexe QRS de Pan et Tompkins

Cet algorithme comprend cinq étapes : Filtre basse bas, filtre basse haut, filtre dérivateur, filtre quadrateur et filtre à moyenne glissante comme il est schématisé ci-dessous :

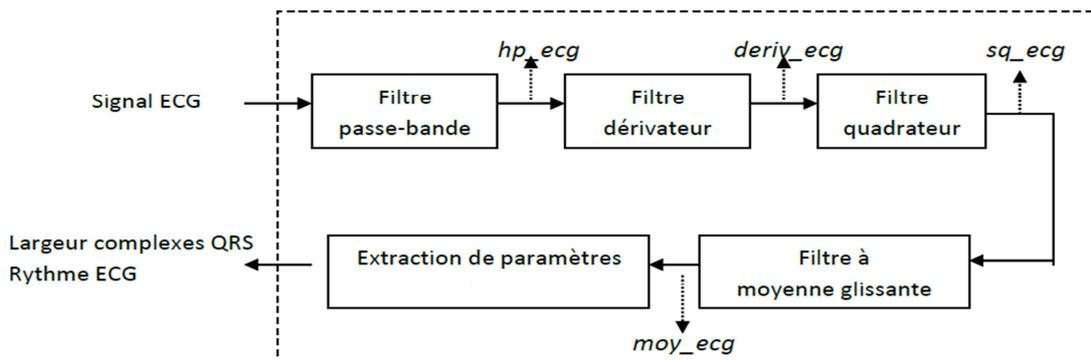


Figure (1) : Schéma bloc de détection du complexe QRS par la méthode de Pan et Tompkins

Dans la suite, nous décrivons le rôle de chaque filtre :

- Filtre passe bande (filtre passe bas+ filtre passe haut) : Elimine le bruit présent en dehors de la bande spectrales des complexes QRS [5Hz 15Hz].
- Filtre dérivateur : Permet de détecter de brusques variations dans la dérivée du signal, dans la pente de celui-ci. Les complexe QRS sont ici mis en évidence puisque qu'ils présentent une forte variation d'amplitude comparée au reste du signal.
- Filtre quadrateur : Amplifie le signal en sortie du filtre dérivateur et rend le signal positif, ce qui permet de mettre plus en valeur les parties du signal présentant une grande variation d'amplitude
- Filtre à moyenne glissante : Transforme le signal pour connaitre plus facilement son amplitude maximale et la largeur de celui-ci

La figure suivante donne l'allure du signal obtenu à la sortie de chaque filtre :

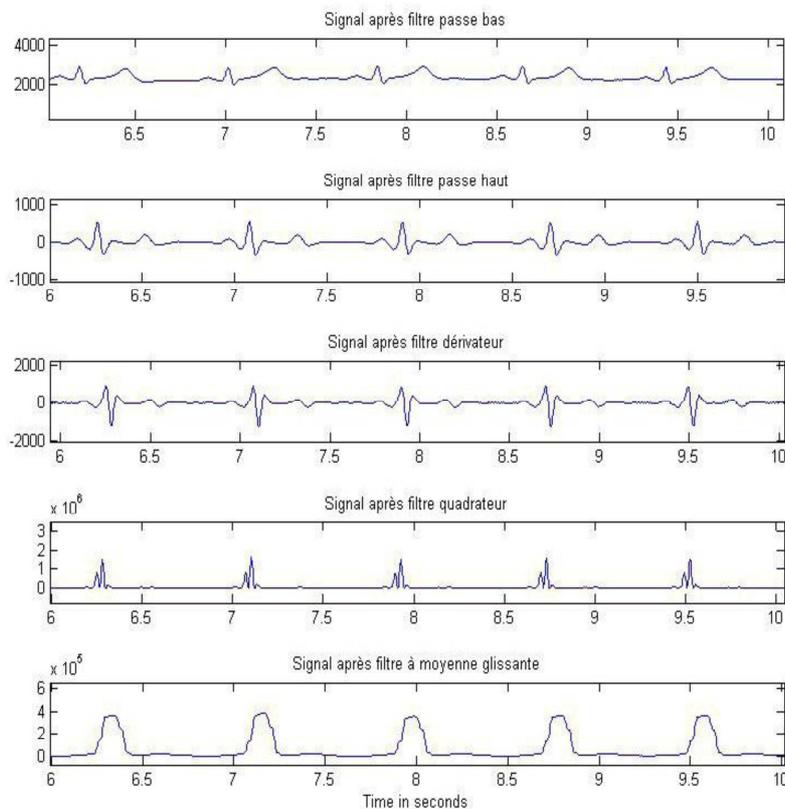


Figure (2) : Allure du signal ECG obtenu à la sortie de chaque filtre

Résumé :

Notre travail porte sur l'application du filtre de Kalman dans le domaine de traitement du signal, pour le débruitage des signaux en particulier les signaux électrocardiographiques ECG. Pour se faire, nous avons étudié le filtre de Kalman et sa version étendue, puis nous avons présenté une méthode de modélisation mathématique des signaux ECG basée sur la théorie des cycles limites qui est ensuite utilisée pour le débruitage des signaux ECG bruités par différents types de bruits.

Les résultats de cette étude montrent la capacité du filtre de Kalman étendu au débruitage des signaux ECG synthétiques et réels bruités par des bruits blancs gaussiens. Dans le cas des bruits colorés les performances du filtrage sont dégradées.

Mots-clés : Electrocardiographie (ECG), Modélisation dynamique, débruitage, filtre de Kalman, bruit gaussien, bruits colorés.

Abstract:

Our work focuses on the application of the Kalman filter in the signal processing field, for noise suppression signals in particular the electrocardiographic ECG signal. To do this, we studied the Kalman filter and extended version and we presented a mathematical modeling method of ECG signals based on the theory of limit cycle which is then used for denoising of noisy ECG signals by different types of noise.

The results of this study demonstrate the ability of the extended Kalman filter to denoising synthetic ECG and real ECG signals noisy by white Gaussian noise. In the case of colored noise, the filtering performances are degraded.

Keywords: Electrocardiographic (ECG), dynamic modelisation, denoising, Kalman filter, gaussian noise, colored noise.