

Ministère de l'enseignement supérieur  
et de la recherche scientifique  
Université Mouloud Mammeri de Tizi  
ouzou  
Faculté des sciences économique,  
commerciales et des sciences de gestion  
Département des sciences économiques



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
جامعة مولود معمري تيزي وزو  
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و  
علوم التسيير  
قسم العلوم الاقتصادية

*Polycopié de :*

## **COURS DE MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES**

A l'usage des étudiants de deuxième année sciences économiques

**Assuré par :**

Dr. CHERIEF Wahida

Maître de conférences classe B

Département des sciences économiques

**Année universitaire : 2022/2023**

# Sommaire :

---

***Chapitre1:*** Rappel sur les suites numériques

***Chapitre2:*** Les intérêts simples

***Chapitre3 :*** L'escompte et équivalence des taux et des capitaux

***Chapitre4:*** les intérêts composés

***Chapitre5 :*** les annuités

***Chapitre6 :*** Critères de choix d'investissements

***Chapitre7 :*** Les emprunts et leurs amortissements

***Chapitre8 :*** Evaluation des obligations et des actions

# Introduction :

---

Le présent polycopié est un cours de mathématiques financières conforme au programme d'enseignement des deuxièmes années aux facultés des sciences économiques, commerciales et des sciences de gestion.

Ce cours vise à présenter les différents éléments des mathématiques financières et d'expliquer la notion de la valeur temporelle de l'argent. Il fait apparaître principalement cinq préoccupations :

- La différence entre les différents types d'intérêts (intérêt simple, intérêt composé).
- La différence entre les situations d'actualisation et de capitalisation.
- La méthode de calcul de la valeur future et la valeur présente d'une somme ou d'une suite d'annuités.
- Les grands domaines d'application des mathématiques financières
- Les tableaux d'amortissement des emprunts.

# CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

## 1. Progression Arithmétique :

**1.3.Définition:** une suite arithmétique est une suite de nombre tel que pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours un nombre constant appelé raison.

### Exemple :

Soient les nombres suivants: 3, 8, 13, 18, 23

$(8-3)=(13-8)=(18-13)=(23-18)=5 \rightarrow$  la raison de la progression

Toute progression est caractérisée par trois éléments : le premier terme  $U_1=3$ , la raison  $r=5$ , et le nombre de termes  $n=5$

### 1.3. Propriétés :

- Le premier terme  $U_1$
- Le second terme  $U_2=U_1+r$
- Le troisième terme  $U_3=U_2+r$

$$=(U_1+r)+r$$

$$=U_1+2r$$

- D'une façon générale : le  $n^{\text{ème}}$  terme est :

$$U_n=U_1+(n-1)\times r$$

- Si le premier terme est  $U_0$

$$U_n=U_0+n\times r$$

### 1.3. Détermination de la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique : $S_n$

On a :  $S_n=U_1+U_2+U_3+U_4+\dots+U_n$

$$S_n=U_1+[U_1+r]+[U_1+2r]+\dots+[U_1+(n-2)r]+[U_1+(n-1)r]$$

$$S_n=[U_1+(n-1)r]+[U_1+(n-2)r]+[U_1+(n-3)r]+\dots+[U_1+r]+U_1$$

$$2S_n=[2U_1+(n-1)r]+[U_1+(n-1)r]+[U_1+(n-1)r]+\dots+[U_1+(n-1)r]+[U_1+(n-1)r]$$

$$2S_n=[U_1+(n-1)r]n \quad \text{puisque : } (n-1)r=U_n$$

$$2S_n=[U_1+U_n]n \rightarrow$$

$$S_n=\frac{U_1+U_n}{2}\times n$$

## CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

### Exemple 1:

Soit une progression arithmétique suivante : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... n

Il s'agit d'une progression arithmétique de premier terme 1, de raison 1 et de n termes.

$$S_n = [U_1 + U_n]n/2$$

Déterminer la somme des 25 premiers termes ?

### Solution :

La somme de 25 premiers termes peut se calculer comme suit :

$$\begin{array}{l} U_{1=1} \\ U_{n=25} \\ n=25 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} U_{1=1} \\ U_{n=25} \\ n=25 \end{array}} \right\} \longrightarrow S_n = (1+25) \times 25/2 = 325$$

### Exemple 2:

Le forage d'un puits a coûté 2500 DA pour le premier mètre, le coût du deuxième mètre est de 4000 DA, le troisième est de 5500 DA, le quatrième est de : 7000 DA...

- Déterminer la raison de la progression ?
- Quelle est la profondeur du puits si le coût total du forage de ce puits est de: 365 000 ?

Solution :

$$U_1=2500 ; U_2= 4000 ; U_3=5500 ; U_4=7000$$

- Pour déterminer la raison de cette progression, on doit calculer :  
 $U_2 - U_1 = 4000 - 2500 = 1500$   
 $U_3 - U_2 = 5500 - 4000 = 1500$   
 $U_4 - U_3 = 7000 - 5500 = 1500$   
Alors : il s'agit d'une progression arithmétique car,  $r = (U_2 - U_1) = (U_3 - U_2) = (U_4 - U_3) = 1500$
- Pour trouver la profondeur du puits il faut trouver le nombre de mètres, parce que le coût de forage du puits dépend de nombre de mètres de profondeur  
Le cout total du forage = 367500 DA  
Le cout total de forage = la somme des couts de forage de chaque mètre de profondeur  
Le cout total de forage =  $(U_1 + U_n) \times n / 2$   
Alors :  $367500 = U_1 + (U_1 + (n-1)r) \times n / 2$   
 $735000 = (2U_1 + (n-1)r) \times n$   
 $735000 = (5000 + (n-1) \times 1500) \times n$   
 $735000 = (5000 + 1500n - 1500) \times n$   
 $735000 = 1500n^2 + 3500n$   
 $1500n^2 + 3500n - 735000 = 0$
- Pour trouver le nombre de terme ( la profondeur de puits) il faut résoudre l'équation de 2<sup>ème</sup> degrés.

## CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

$$1500n^2 + 3500n - 735000 = 0 \text{ (calculer } \Delta)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3500^2 - 4 \times 1500 \times (-735000)$$

$$\Delta = 4422250000$$

$$\sqrt{\Delta} = 66500$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-3500 \pm 66500}{3000}$$

$$n = 21$$

$$n = -23.33$$

Alors n=21 mètres

La profondeur de ce puits est de 21 mètres

## 2. Progression Géométrique

**2.4. Définition :** Une suite de nombres constitue une progression géométrique si le Rapport entre 2 nombres consécutifs est une constante : La raison de la progression.(q)

**Exemple :**

- Soit la suite des nombres suivante :
- 3, 12, 48, 192, 768
- Est-ce que c'est une progression géométrique ?
- Si oui, Déterminer sa raison ?

**Solution :**

$$U_1 = 3$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{3} = 4 \rightarrow U_2 = U_1 \times 4$$

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{48}{12} = 4 \rightarrow U_3 = U_2 \times 4 = U_1 \times 4 \times 4 = U_1 \times 4^2$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{192}{48} = 4 \rightarrow U_4 = U_3 \times 4 = U_1 \times 4^2 \times 4 = U_1 \times 4^3$$

$$\frac{U_5}{U_4} = \frac{768}{192} = 4 \rightarrow U_5 = U_4 \times 4 = U_1 \times 4^3 \times 4 = U_1 \times 4^4$$

Le suite de nombres 3,12,48,192,768 est une progression géométrique de premier terme  $U_1=3$  et la raison  $q=4$

### 2.4. Propriétés :

1<sup>er</sup> terme  $U_1$

2<sup>ème</sup> terme  $U_2 = U_1 q$ .

## CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

3ème terme  $U_3 = U_2 q = U_2 q^2$ .

D'une façon générale :

$$U_n = U_1 \times q^{n-1}$$

### 2.3. Détermination de la somme de n premiers termes d'une progression géométrique : $S_n$

On a :  $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-1} + U_n$

$$S_n = U_1 + U_1 q + U_1 q^2 + \dots + U_1 q^{(n-1)}$$

$$S_n = U_1 (q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

$$S_n = U_1 \frac{(1 - q)^n}{1 - q}$$

#### Exemple:

- Calculer le 10<sup>ème</sup> terme d'une progression géométrique dont le premier terme est de 5 et la raison est égale à 2 ?
- Calculer la somme d'une progression géométrique sachant la raison est : 4, le premier terme est : 4 est le nombre de terme est de : 11 ?

#### Solution :

- $U_1=5$  ;  $q=2$  ;  
 $U_{10}=U_1 \times q^{9-1}$   
 $U_{10}=5 \times 2^8$   
 $U_{10}=1280$

- $q=4$  ;  $U_1=4$  ;  $n=11$

$$S_n = U_1 \frac{(1 - q)^n}{1 - q}$$

$$S_n = 4 \times \frac{(1 - 4)^{11}}{1 - 4}$$

$$S_n = 236196$$

### 2.4. Sens de variation d'une progression géométrique

Le sens de variation d'une progression géométrique dépend de la valeur de sa raison « q » :

- **Si  $q < 0$**  ↔ La progression géométrique sera alternée (la n'a pas de sens de variation)
- **Si  $q = 0$**  ↔ La progression géométrique dont  $U_1 =$  une constante et les autres termes seront nuls
- **Si  $0 < q < 1$**  ↔ La progression géométrique sera décroissante

## CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

- **Si  $q=1$**   $\leftrightarrow$  La progression géométrique sera constante
- **Si  $q>1$**   $\leftrightarrow$  La progression géométrique sera croissante

### Exemple :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4% . Au cours de l'année 2001 la production a été de 25000unités .on note  $U_1=25000$  et  $U_n$  la production prévue au cours de l'année 2000+n

1. Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer  $U_6$
3. Si la production descend au-dessous de 15000unités, l'usine sera en faillite, quand cela risque-t-il d'arriver si la baisse de 4% par année, persiste?

### Solution :

1. On a :

$$U_1=25000$$

$$U_2=U_1-0.04U_1= U_1\times(0.96)$$

$$U_3=U_2-0.04U_2=U_2\times(0.96)=U_1\times(0.96)\times(0.96)=U_1\times(0.96)^2$$

$$U_4=U_3-0.04U_3=U_3\times(0.96)=U_1\times(0.96)^2\times(0.96)=U_1\times(0.96)^3$$

Alors on peut écrire  $U_n$  en fonction de  $U_1$  :

$$U_n=U_1\times(0.96)^{n-1}$$

On peut dire que  $U_n$  est une progression géométrique dont la raison  $q=0.96$  et le premier terme  $U_1=25000$

$$U_n=25000\times(0.96)^{n-1}$$

2. Calcul de  $U_6$

$$U_6= U_1\times 0.96^{6-1}=25000\times 0.96^5$$

$$U_6=20384.31744$$

3. En quelle année l'usine sera en faillite ;Si  $U_n < 15000$

$$U_n= 25000\times(0.96)^{n-1}$$

$$15000=25000\times(0.96)^{n-1}$$

$$0.96^{n-1}= 0.6$$

## CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

$$\text{Log } 0.96^{n-1} = \text{Log } 0.6$$

$$(n-1) \text{Log } 0.96 = \text{Log } 0.6$$

$$n-1 = \frac{\text{Log } 0.6}{\text{Log } 0.96}$$

$$n-1 = \frac{-0.2218487}{-0.0177287}$$

$$n-1 = 12.51$$

$$n = 13.51$$

$$\text{si } n = 13.51 \quad U_n = 15000$$

$$\text{pour } n = 14 \quad U_n < 15000$$

alors l'usine sera en faillite dans l'année 2013

### EXERCICES :

#### Exercice 1 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $U_n = 5 - 2n$

1. Calculer  $U_0$ ,  $U_1$  et  $U_2$  ;
2. Démontrer que  $(U_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison ;
3. Que vaut  $U_{100}$  ? Calculer la somme  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{100}$ .

#### Exercice 2 :

On considère une suite géométrique  $(U_n)$  de premier terme  $U_1$  et de raison  $q = -2$  ;

1. Calculer  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  ;
2. Calculer  $U_{20}$  ;
3. Calculer le somme  $S = U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$ .

#### Exercice 3 :

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

- 1<sup>er</sup> contrat : un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
  - 2<sup>ème</sup> contrat : un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.
1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois ;
  2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36<sup>ème</sup> mois) ;
  3. Quel est le contrat le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

## CHAPITRE 1 : Rappel sur les suites numériques

---

### Exercice 4 :

Pour l'achat d'un terrain et la construction d'une maison, un couple souscrit un emprunt. Les futurs propriétaires sont informés que le capital emprunté et les intérêts dus, lorsqu'ils seront remboursés, représenteront la somme de 80.000 €. La première mensualité est fixée à 300€ et le contrat stipule que les mensualités augmentent de 20€ chaque année.

1. On note  $S_n$  le montant annuel remboursé au cours de  $n$  ième année suivant le début du prêt et on note  $n_0$  la dernière année de remboursement. On admet que  $n_0 > 10$ .
  - Calculer  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  ;
  - Expliquer pourquoi la suite  $(S_n)$  se comporte comme une suite arithmétique pour  $n < n_0$  ;
  - Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$  ( pour  $n < n_0$  ) ;
  - Calculer  $S_{10}$  ;
2. On s'intéresse maintenant à la somme  $S_n$  cumulée des montant annuels remboursés au cours des  $n$  premières années :  $S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ .
  - Calculer  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$ .
  - Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$  (pour  $n < n_0$ ) ;
  - Au cours de quelle année le couple propriétaire finira son remboursement ?

## CHAPITRE2 : Les intérêts simples

---

### 1. Notion d'intérêt :

Une personne A prête à une personne B une somme d'argent pendant une durée déterminée.

Ce service rendu par A (le créancier) à B (le débiteur), cette mise à la disposition de B d'un capital suppose, au bénéfice de A, une rémunération appelée « intérêt », et qui n'est autre que le loyer de l'argent prêté.

### 2. Définition :

L'intérêt est le revenu d'une somme d'argent investi (ou placée) le montant d'intérêt et en fonction de capital du taux du placement et la durée de placement.

### 3. La formule générale de l'intérêt simple :

Les opérations financières, à court terme, se déduisent d'une seule et unique formule. La formule fondamentale de l'intérêt simple :  $I = C_0 \cdot n \cdot t$  Le court terme, en finance, ne dépasse pas l'année. Il se compte, en jours, en mois, en trimestres, etc.

- Le montant de l'intérêt vari selon l'importance des capitaux et de la durée du prêt.
- Le taux de placement s'exprime selon la forme de pourcentage.
- Le calcul de la durée se fait selon les règles suivantes :
  - ✓ Une année compte 360 jours, 24 quinzaine, 12 mois selon l'année commerciale.
  - ✓ Si la durée est calculée au jour, les mois sont comptés à leur juste valeur. (le mois de février compte 28 jours)
  - ✓ Si la durée est calculée au mois, on ne tient pas compte de la durée réelle des mois.
- L'intérêt simple est donc calculé comme suit :

$$I = C_0 \cdot \frac{t}{100} \cdot n$$

Nous désignons par :

$C_0$  : le montant du capital prêté (placé) ;

$n$  : la durée du prêt (ou placement) ;

$t$  : le taux de placement en pourcentage ;

#### **Exemple:**

Quel est l'intérêt d'un capital de 3200 DA placé à 7,5% pendant 5 ans ?

$C_0=3200$  DA,  $t=7,5\%$ ,  $n= 5$ ans

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100}$$
$$I = \frac{3200 \times 7,5 \times 5}{100}$$

$$I = 1200DA$$

### 4. Remarques importantes :

- a) Si la durée de placement est exprimée en jours :

## CHAPITRE2 : Les intérêts simples

---

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 360}$$

- Quel est l'intérêt produit par un capital de 1200DA placé à 4,5% de 23/08 au 15/09 ?  
 $C_0=1200$  DA,  $t=4,5\%$ ,  $n= ?$  (du 23/08 au 15/09)

Du 23/08 au 31/08  $\longrightarrow$  8jours

Du 01/09 au 15/09  $\longrightarrow$  15 jours

Alors  $n=23$  jours

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 360}$$

$$I = \frac{1200 \times 4,5 \times 23}{100 \times 360}$$

$$I = 3,45 \text{ DA}$$

- b) Si la durée de placement est exprimée en quinzaine :

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 24}$$

- Quel est l'intérêt produit par un capital  $C_0=2000$  DA placé à 9% pendant 15 quinzaines ?

$C_0=2000$  DA,  $t=9\%$ ,  $n= 15$  quinzaines

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 24}$$

$$I = \frac{2000 \times 9 \times 15}{100 \times 24}$$

$$I = 112,5 \text{ DA}$$

- c) Si la durée de placement est exprimée en mois :

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 12}$$

- Quel est l'intérêt produit par un capital  $C_0=3500$  DA placé à 5% pendant 7mois ?

$C_0=3500$  DA,  $t=5\%$ ,  $n= 7$  mois

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 12}$$

$$I = \frac{3500 \times 5 \times 7}{100 \times 12}$$

$$I = 102,083 \text{ DA}$$

- d) Si la durée de placement est exprimée en 2mois (bimestre):

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{100 \times 6}$$

## CHAPITRE2 : Les intérêts simples

---

- Quel est l'intérêt produit par un capital de 25000DA, placé à 8% pendant 3 bimestres ?  
C0=25000 DA, t=8%, n=3bimestres

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100 \times 6}$$

$$I = \frac{25000 \times 8 \times 3}{100 \times 6}$$

$$I = 100\text{DA}$$

- e) Si la durée de placement est exprimée en trimestre :

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100 \times 4}$$

- Quel est l'intérêt produit par un capital de 15000DA placé à 8,5% pendant 5 trimestres ?

C0=15000 DA, t=8,5%, n=5trimestres

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100 \times 4}$$

$$I = \frac{15000 \times 8,5 \times 5}{100 \times 4}$$

$$I = 1593,75\text{DA}$$

- f) Si la durée de placement est exprimée en semestres :

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100 \times 2}$$

- Quel est l'intérêt produit par un capital de 30000DA placé à un taux de 6% pendant 8 semestres ?

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100 \times 2}$$

$$I = \frac{30000 \times 6 \times 8}{100 \times 2}$$

$$I = 7200\text{DA}$$

### 5. Taux moyen de placement

Le taux moyen de placement est le taux unique « T » auquel il avait placé les différents capitaux pour obtenir un intérêt égal à la somme des intérêts produites pour chacun d'eux, placé à des taux différents.

**Exemple :** Calculer le taux moyen des placements suivants:

C1=1.200 Da placé à 9% pendant 70 jours.

C2=5.400Da placé à 7% pendant 120 jours.

## CHAPITRE2 : Les intérêts simples

**Solution :**

$$\frac{C1 \times T \times n1}{100 \times 360} + \frac{C2 \times T \times n2}{100 \times 360} = \frac{C1 \times t1 \times n1}{100 \times 360} + \frac{C2 \times t2 \times n2}{100 \times 360}$$

$$(C1 \times T \times n1 + C2 \times T \times n2) = (C1 \times t1 \times n1 + C2 \times t2 \times n2)$$

$$T \times (C1 \times n1 + C2 \times n2) = (C1 \times t1 \times n1 + C2 \times t2 \times n2)$$

$$T = \frac{(C1 \times t1 \times n1) + (C2 \times t2 \times n2)}{(C1 \times n1) + (C2 \times n2)}$$

$$T = \frac{(1200 \times 9 \times 70) + (5400 \times 7 \times 120)}{(1200 \times 70) + (5400 \times 120)} = \frac{5292000}{732000}$$

$$T = 7,18\%$$

- La formule générale de taux moyen de placement : Soient les capitaux suivants :

– C1 placé à un taux t1 pendant n1 jours.

– C2 placé à un taux t2 pendant n2 jours

– C3 placé à un taux t3 pendant n3 jours

– C4 placé à un taux t4 pendant n4jours

– .

– .

– .

– C<sub>k</sub> placé à un taux t<sub>k</sub> pendant n<sub>k</sub> jours

$$\frac{C1 \times T \times n1}{100 \times 360} + \frac{C2 \times T \times n2}{100 \times 360} + \dots + \frac{Ck \times T \times nk}{100 \times 360}$$

$$= \frac{C1 \times t1 \times n1}{100 \times 360} + \frac{C2 \times t2 \times n2}{100 \times 360} + \dots + \frac{Ck \times tk \times nk}{100 \times 360}$$

$$\frac{C1 \times T \times n1}{100 \times 360} + \frac{C2 \times T \times n2}{100 \times 360} + \dots + \frac{Ck \times T \times nk}{100 \times 360}$$

$$= \frac{C1 \times t1 \times n1}{100 \times 360} + \frac{C2 \times t2 \times n2}{100 \times 360} + \dots + \frac{Ck \times tk \times nk}{100 \times 360}$$

$$(C1 \times T \times n1) + (C2 \times T \times n2) + \dots + (Ck \times T \times nk)$$

$$= (C1 \times t1 \times n1) + (C2 \times t2 \times n2) + \dots + (Ck \times tk \times nk)$$

$$T \times (C1 \times n1) + (C2 \times n2) + \dots + (Ck \times nk)$$

$$= (C1 \times t1 \times n1) + (C2 \times t2 \times n2) + \dots + (Ck \times tk \times nk)$$

$$T = \frac{(C1 \times t1 \times n1) + (C2 \times t2 \times n2) + \dots + (Ck \times tk \times nk)}{(C1 \times n1) + (C2 \times n2) + \dots + (Ck \times nk)}$$

$$T = \frac{\sum_{i=1}^k ci \times ti \times ni}{\sum_{i=1}^k ci \times ni}$$

## CHAPITRE2 : Les intérêts simples

---

### 6. La valeur acquise d'un capital placé à intérêt simple :

On ajoutons un capital  $C_0$ , les intérêt qui produit sont la suite d'un placement, on obtient la somme dont dispose le propriétaire des fonds, cet somme est appelée La valeur acquise elle se calcule comme suit:

$$C_n = C_0 + I$$

- $C_n$ : la valeur acquise.
- $C_0$  : le capital initialement placé.
- $n$  : la période de placement

### 7. L'intérêt pré-compté et le taux effectif de placement

Tous les calculs effectués jusqu'à la sont fondés sur le paiement des intérêts par l'emprunteur aux jours de remboursement du capital emprunté. il est cependant fréquent que, par convention entre prêteur et emprunteur, les intérêts soient versés par l'emprunteur le jour de la conclusion du contrat de prêt, jour où l'emprunteur reçoit le capital prêté.

Il est alors évident que les fonds engagés procurent au prêteur un taux de placement supérieur au taux d'intérêt stipulé, taux qui sert lui au calcul de l'intérêt.

**Exemple** : Une personne à placé a un intérêt pré-compté 10.000DA durant un an, taux :10%.

Quel taux effectif de placement réalise-t-elle ?

**Solution :**

L'intérêt procuré par l'opération s'élève à :

$$\frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000DA$$

Le prêteur reçoit immédiatement cet intérêt. Les choses se passent donc comme s'il n'avait déboursé que  $10000 - 1000 = 9000DA$

Le pêteur recevra, dans un an, son capital de 10000DA (il a déjà encaissé les intérêts)

Il aura donc gagné en un an, 1000DA an engageant seulement 9000DA. Le taux effectif  $T$  de placement est donc tel que :

$$\frac{9000 \times T \times 1}{1000} = 1000$$

Soit :  $T = 11,11\%$

## CHAPITRE 2 : Les intérêts simples

---

### Généralisation :

Un capital  $C$  est placé, à intérêt précompté, au taux «  $t$  », pour «  $n$  » années. Exprimer le taux effectif «  $T$  » qui résulte du précompte de l'intérêt.

### Résolution :

Intérêt produit :

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100}$$

Capital effectivement engagé par le prêteur :

$$C0 - \frac{C0 \times t \times n}{100}$$

$$\text{« } T \text{ » est tel que } \frac{(C0 - \frac{C0 \times t \times n}{100}) \times T \times n}{100} = \frac{C0 \times t \times n}{100}$$

$$\text{On en tire } T = \frac{t}{1 - \frac{t \times n}{100}} = \frac{100 \times t}{100 - t \times n}$$

$$\text{Si la durée était exprimée en jours on écrirait : } T = \frac{36000 \times t}{36000 - t \times n}$$

$$\text{Si la durée de placement était exprimée en mois on aurait : } T = \frac{1200 \times t}{1200 - t \times n}$$

La formule générale de taux effectif de placement sera comme suit :

$$T = \frac{t}{1 - t \cdot n}$$

### 8. Intérêt commercial et intérêt civil :

Pour leurs calculs d'intérêt simple, certains pays, quand les durées de placement sont exprimées en jours, retiennent l'année à 365 jours, ce qui conduit à utiliser la formule de calcul de l'intérêt sous la forme :

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{100 \times 365}$$

Nous appellerons intérêt civil l'intérêt ainsi calculé, et intérêt commercial, l'intérêt calculé en comptant l'année à 360 jours, l'intérêt étant évidemment plus élevé que l'intérêt civil.

## CHAPITRE2 : Les intérêts simples

### 9. Calculs sur la formule fondamentale :

La formule générale de calcul de l'intérêt simple met en jeu les quatre quantités  $I$ ,  $C0$ ,  $t$ ,  $n$ , qui supposent donc la résolution de quatre problèmes différents, trois de ces quatre quantités fondamentales pouvant être connues, le problème consistant à calculer la quatrième.

La formule fondamentale permet sans difficulté la résolution de tous ces problèmes.

Ainsi, lorsque la durée de placement est exprimée, par exemple, en jours, on écrira :

$$I = \frac{C0 \times t \times n}{36000} \qquad C0 = \frac{36000 \times I}{t \times n}$$
$$t = \frac{36000 \times I}{C0 \times n} \qquad n = \frac{36000 \times I}{C0 \times t}$$

### Exercices :

#### Exercice 1 :

compléter le tableau suivant

<i>Capital</i>	<i>Taux</i>	<i>Durée</i>	<i>Intérêt</i>	<i>Valeur acquise</i>
4.000	4%	3 ans	?	?
2.000	2,5%	9 mois	?	?
500	3%	3semestres	?	?
800	2%	5 trimestres	?	?
1.000	3,5%	50 jours	?	?
?	5%	2 ans	?	5.000
?	4,1%	7 mois	?	3.500
?	9%	100 jours	?	1.500
2.500	2,75%	? ans	?	2568,75
1.700	3,9%	? mois	?	1722,1
250	9,9%	? jours	?	253,44
900	?	4 ans	68,4	?
1.800	?	13 mois	78	?
3250	?	200 jours	48,75	?
100	?	99 jours	2,78	?

#### Exercice 2 :

Une personne dispose d'un capital qu'elle en place :

- 1/4 à 7% pendant 18 mois ;
- 5/6 du reste à 9% pendant 16 mois ;
- Le reste soit 5.000 Da à 8% pendant un certain temps ;

## **CHAPITRE2 : Les intérêts simples**

---

Ces différents placements ont rapporté un intérêt total de 4.150 Da. Calculer le capital total et la durée de placement des 5.000Da

### **Exercice 3 :**

Un capital de 51.000Da est partagé en trois parts dont les montants sont en progression arithmétique, la première part étant égale aux  $\frac{7}{10}$  la troisième. On place ces trois parts à des taux respectifs  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  qui sont en progression géométrique décroissante, et dont la somme est de 36.4. Les revenus (intérêt) annuels des 2 premières parts sont directement proportionnels aux nombres 84 et 85.

1. Calculer les trois taux de placement.
2. Calculer le taux moyen annuel auquel le capital de 51.000Da a été placé.

## ***CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux***

---

### **1. Notion d'effet de commerce :**

Le 10 mars, A vend à B des marchandises pour un montant de 30.000DA, le règlement devant intervenir le 31 mai.

A, le créancier doit donc attendre le 31 mai pour entrer en possession de ses fonds. Cependant il peut avoir besoin de cet argent bien avant le 31 mai.

Supposons que A sollicite, le 26 mars, une avance de son banquier, avance garantie par la créance qu'il possède sur B. Le banquier n'accordera cette avance que si A, son client, est en mesure de prouver par un document écrit l'existence de cette créance de 30.000DA à échéance du 31 mai.

A se tournera vers B et lui demandera alors :

- Soit de souscrire un billet à ordre, c'est-à-dire de promettre, par écrit, de lui régler une somme de 30.000DA à la date du 31 mai,
- Soit d'apposer sa signature sur une lettre de change, ou traite, rédigée par A, reconnaissant aussi l'existence, au profit de A, d'une créance de 30.000DA, à encaisser le 31 mai.

Billet à ordre et lettre de change sont des effets de commerce.

### **2. L'opération commerciale d'escompte :**

Les deux mentions essentielles portées sur un effet de commerce sont :

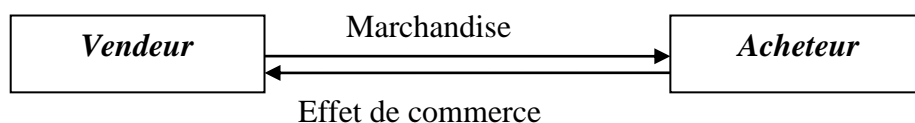
- Le montant de la créance représentée, ici 30.000DA, appelé valeur nominale de l'effet,
- La date du paiement de cette valeur nominale, appelée date d'échéance de l'effet, ou plus simplement échéance, ici le 31 mai.

Le 26 mars A présente l'effet de commerce à son banquier et lui vend. On dit aussi qu'il négocie l'effet, ou encore qu'il le remet à l'escompte. De son côté le banquier escompte l'effet.

Bien entendu le banquier ne consent à cette opération commerciale d'escompte que s'il bénéficie d'une rémunération qu'on appelle escompte commercial.

### **3. Schéma d'une opération d'escompte**

**3.1.Définition :** L'escompte représente le moyen pour lequel une entreprise peut procurer immédiatement d'une créance à terme.



- Dans une opération commerciale, il y a en général 02 parties, l'acheteur et le vendeur.

## ***CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux***

- Dans la vente au comptant, l'acheteur remet au vendeur l'argent nécessaire, et ce dernier lui livre la marchandise convenue.

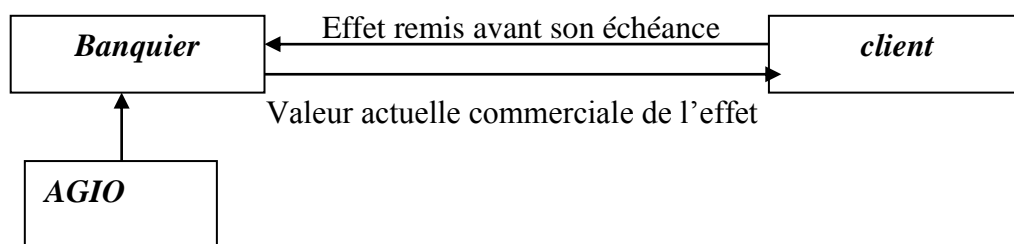
Quand le règlement n'est pas immédiat, il est alors à terme, dans ce cas, l'acheteur remet au vendeur un effet de commerce ( lettre de change, billet à ordre ...) matérialisant la contrepartie de la marchandise livrée

- Le montant inscrit sur l'effet s'appelle « la valeur nominale »
- La date à laquelle cette valeur est payable est dite « échéance »
- En règle générale, le vendeur présente l'effet ainsi obtenu au banquier à la date d'échéance, en contrepartie, la banque verse la valeur nominale.
- En pratique, devant des besoins immédiats de trésorerie, il arrive que le créancier (vendeur) présente l'effet de commerce au banquier avant la date d'échéance fixée.
- On dit que le créancier négocie ou escompte cet effet au près du banquier.

En contrepartie de la remise de l'effet dont l'échéance sera plus au moins éloignée, le banquier remettra une somme « comptant » à la disposition du titulaire de l'effet, déduction faite de l'AGIO qui est rémunération de banquier.

La somme effectivement mise par le banquier à la disposition de son client, représente la différence entre la valeur nominale de l'effet et l'AGIO bancaire. Cette valeur est appelée « valeur actuelle commerciale »

Sur le plan juridique, on dit que l'effet est endossé au banquier qui devient propriétaire par l'endossement.



### **4. Définition de l'escompte commerciale**

Etant le prix du service rendu par le banquier, l'escompte commerciale représente l'intérêt (simple) à taux « t » indiqué par le banquier, d'une somme égale à la valeur nominale de l'effet, calculé sur le nombre de jours « n » qui sépare la date de négociation de l'effet de la date d'échéance. Nous désignons :

## **CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux**

- A: la valeur nominale de l'effet.  
t: le taux d'escompte  
n: le nombre de jours qui reste à couvrir  
e : L'escompte commercial.

$$e = \frac{A \times t \times n}{36000}$$

**Exemple:** soit un effet de commerce de valeur nominale de 20.000DA d'échéance 09 juin , escompté le 20 avril , au taux de 5% , l'escompte commerciale sera?

### **Solution :**

A=20.000DA,

n=le nombre de jours qui séparent la date de la mise à l'escompte à la date d'échéance (le nombre de jours entre le 20avril et le 09 juin)=50 jours ;

- Du 20/04 au 30/04       $\underline{\hspace{1cm}}$  10 jours
- Du 01/05 au 31/05       $\longrightarrow$  31 jours
- Du 01/06 au 09/06       $\longrightarrow$  09 jours

Alors :

$$e = \frac{A \times t \times n}{36000} = \frac{20000 \times 5 \times 50}{36000} = 138,89DA$$

### **5. La valeur actuelle commerciale**

La somme effectivement mise par le banquier à la disposition de son client est appelée « valeur actuelle commerciale » que l'on désigne par « a ».

$$a = A - e$$

**Exemple :** En gardant les mêmes données de l'exemple précédent, calculer la valeur actuelle commerciale ?

### **Solution :**

$$a = A - e = 20000 - 138.89$$

$$a = 19861,11DA$$

### **Remarque :**

La valeur actuelle d'un effet de commerce est fonction linéaire de la valeur nominale de l'effet, et fonction affine du taux de l'escompte, et aussi du nombre de jours retenu pour le calcul de l'escompte, et aussi de la valeur nominale de l'effet.

## **CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux**

---

Pour un effet de valeur nominale donnée, d'échéance connue, négocié au taux  $t$  fixé, il est donc évident que la valeur actuelle commerciale dépendra de la date de négociation de l'effet. Elle sera, par exemple, d'autant plus élevée que la date de négociation sera plus voisine de la date d'échéance.

### **6. Problèmes sur l'escompte commerciale :**

La formule donnant l'escompte commercial met en jeu quatre quantités,  $e$ ,  $A$ ,  $t$ ,  $n$ , qui entraînent la résolution de quatre problèmes différents, chacune de ces quatre quantités pouvant être l'inconnue d'un de ces problèmes. La formule donnant l'escompte commercial permettra donc d'écrire :

$$e = \frac{A \times t \times n}{36000} \qquad A = \frac{36000 \times e}{t \times n}$$
$$t = \frac{36000 \times e}{A \times n} \qquad n = \frac{36000 \times e}{A \times t}$$

Cette dernière formule permettant, si l'on connaît la valeur nominale d'un effet de commerce, le taux d'escompte, le montant de l'escompte commercial, de déterminer :

- La date d'échéance de l'effet, connaissant la date de la négociation ;
- Ou la date de négociation, connaissant la date d'échéance de l'effet.

### **7. Equivalence d'effets ou de capitaux. Notion d'équivalence. Date d'équivalence :**

A une date donnée, deux taux ou plusieurs effets escomptés au même taux sont équivalents, si leurs valeurs actuelles respectives sont égales à la date d'équivalence.

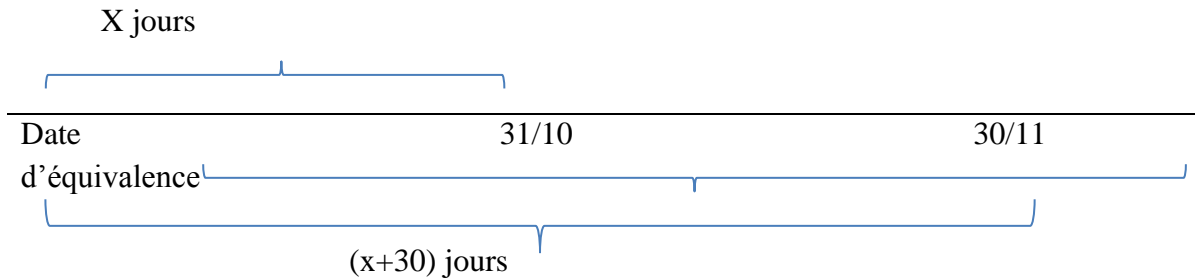
#### **7.1.cas d'équivalence de deux effet :**

- respectives 98.400Da (échéance 31/10) et 99.000Da (échéance 30/11) sont négociés au taux d'escompte de 7,2%.
- On dira que ces deux effets sont équivalents, s'il existe une date à laquelle les valeurs actuelles commerciales de ces 02 effets sont égales, et cette date en question est appelée « la date d'équivalence »

## CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux

### Solution :

Soit « x » le nombre de jours séparant la date d'équivalence cherchée du 31 octobre, « x+30 » le nombre de jours séparant cette date d'équivalence du 30 novembre.



Soit  $a_1, a_2$  les valeurs actuelles commerciales respectives de  $A_1=98400$  et  $A_2=99000$ .

A la date d'équivalence :  $a_1=a_2$

$$a_1=a_2 \rightarrow A_1-e_1=A_2-e_2$$

$$A_1 - \frac{A_1 \times t \times n_1}{100 \times 360} = A_2 - \frac{A_2 \times t \times n_2}{100 \times 360}$$

$$\text{On met : } D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{7,2} = 5000$$

$$A_1 - \frac{A_1 \times n_1}{D} = A_2 - \frac{A_2 \times n_2}{D}$$

$$98400 - \frac{98400 \times x}{5000} = 99000 - \frac{99000 \times (x + 30)}{5000}$$

$$98400 - \frac{98400 \times x}{5000} = 99000 - \frac{99000 \times x}{5000} - \frac{99000 \times 30}{5000}$$

$$\frac{(99000 - 98400)x}{5000} = 99000 - 98400 - \frac{99000 \times 30}{5000}$$

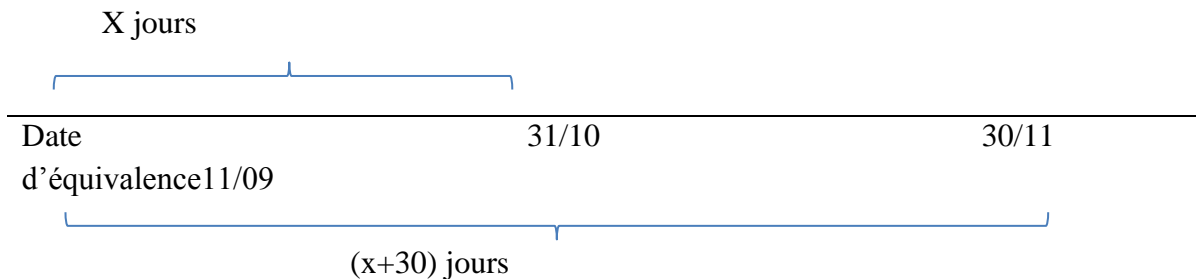
$$\frac{600}{5000}x = 6$$

$$\mathbf{x = 50 \text{ jours}}$$

## CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux

### Conclusion :

La date d'équivalence cherchée est donc de 50 jours avant le 31 octobre, soit le 11 septembre



### Remarque :

- La date d'équivalence de deux effets, si elle existe est antérieure à la date d'échéance de l'effet échéance la plus proche.
- Pour que le problème ait une signification concrète la date d'équivalence doit être postérieure aux dates auxquelles les deux effets ont été créés.

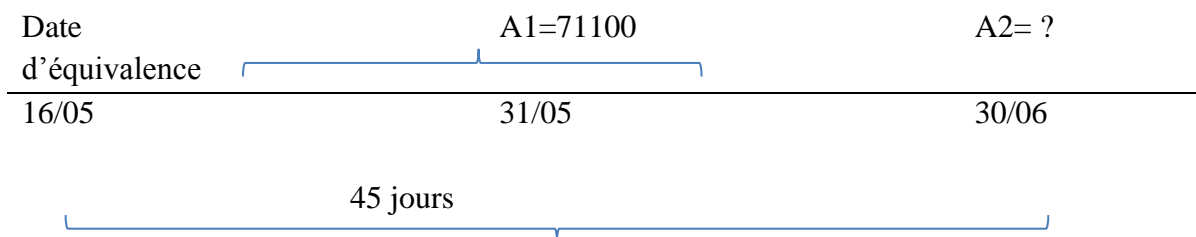
### 7.2.Cas pratiques de renouvellement d'effet

#### – Cas N01:

B doit A une somme de 71.100Da payable le 31/05 sa dette étant constatée par l'acceptation d'un effet de commerce. Le 16/05 dans l'incapacité de faire face au règlement de sa dette du 31/0, B demande à A de remplacer l'effet de commerce à échéance du 31/05 par une autre échéance 30/06.

- Calculer la valeur nominale A2de l'effet de remplacement, d'échéance 30/06, taux d'escompte 10%.

15 jours



Ce problème se raisonne en écrivant le 16/05 la date de la demande de remplacement des deux effets comme une date d'équivalence de ses derniers. Les valeurs actuelles respectives des deux effets sont ce jour égal.

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow A_1 - e_1 = A_2 - e_2$$

$$A_1 - \frac{A_1 \times t \times n_1}{100 \times 360} = A_2 - \frac{A_2 \times t \times n_2}{100 \times 360}$$

## CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux

$$A1 - \frac{A1 \times n1}{D} = A2 - \frac{A2 \times n2}{D}$$
$$\frac{A1 \times D - A1 \times n1}{D} = \frac{A2 \times D - A2 \times n2}{D}$$

$$\frac{A1 \times (D - n1)}{D} = \frac{A2 \times (D - n2)}{D}$$

$$A1 \times (D - n1) = A2 \times (D - n2)$$

$$A2 = \frac{A1 \times (D - n1)}{(D - n2)}$$

$$A2 = \frac{71100 \times (3600 - 15)}{(3600 - 45)}$$

$$A2 = 71700DA$$

### **Conclusion :**

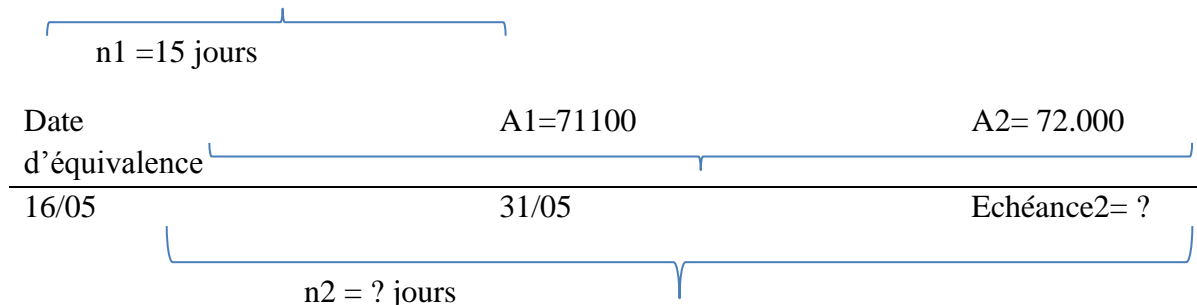
La valeur nominale obtenue est plus élevée que 71.100 DA, ce qui est normal. Le règlement de remplacement ayant lieu plus tard que le règlement primitif doit être de valeur nominale plus élevée.

### **- Cas N02:**

Le débiteur B aurait pu proposer à son créancier de remplacer le premier effet par un autre de valeur nominale de 72.000DA, et dont il faut calculer l'échéance (postérieure au 31/05).

### **Solution :**

Le débiteur B aurait pu proposer à son créancier de remplacer le premier effet par un autre de valeur nominale de 72.000DA dont il aurait fallu calculer l'échéance (postérieur au 31 mai). Ce problème dans la pratique est moins fréquent que le précédent.



## **CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux**

à la date d'équivalence  $a_1 = a_2$

$$a_1 = a_2 \leftrightarrow A_1 - e_1 = A_2 - e_2$$

$$A_1 - \frac{A_1 \times t \times n_1}{100 \times 360} = A_2 - \frac{A_2 \times t \times n_2}{100 \times 360}$$

$$A_1 - \frac{A_1 \times n_1}{D} = A_2 - \frac{A_2 \times n_2}{D}$$

$$\frac{A_1 \times D - A_1 \times n_1}{D} = \frac{A_2 \times D - A_2 \times n_2}{D}$$

$$\frac{A_1 \times (D - n_1)}{D} = \frac{A_2 \times (D - n_2)}{D}$$

$$A_1 \times (D - n_1) = A_2 \times (D - n_2)$$

$$(D - n_2) = \frac{A_1 \times (D - n_1)}{A_2}$$

$$n_2 = D - \frac{A_1 \times (D - n_1)}{A_2}$$

$$n_2 = 3600 - \frac{71100 \times (3600 - 15)}{72000}$$

**$n_2 \cong 60$  jours**

### **Conclusion :**

L'échéance de l'effet de remplacement sera donc fixée à 60 jours, soit le 15 juillet.

### **7.3. Cas d'équivalence d'un effet avec plusieurs autres effets:**

Cette situation se présente concrètement lorsqu'un détenteur de plusieurs effets de commerce procède à leur remplacement par un effet unique.

A la date d'équivalence, la valeur actuelle de l'effet unique doit être égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

**Exemple :** le 06 septembre de débiteur de 03 effets :

$A_1 = 1.000$  Da à échéance du 31/10.

$A_2 = 3.000$  Da à échéance du 30/11.

$A_3 = 2.000$  Da à échéance du 31/12.

Demande à son créancier, le même pour les 03 effets de remplacer ces 03 effets par un effet par un effet unique à échéance du 15/12.

Calculer la valeur nominale de cet effet unique,  $t = 9\%$ .

## **CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux**

### **Solution :**

Du 06/09 au 31/10 on compte 55 jours	→	n1=55 jours
Du 06/09 au 30/11 on compte 85 jours	→	n2=85 jours
Du 06/09 au 31/12 on compte 116 jours	→	n3=116 jours
Du 06/09 au 15/12 on compte 100 jours	→	n=100 jours

Désignons par A la valeur nominale cherchée, on écrira :

$$a = a_1 + a_2 + a_3$$

$$A - e = (A_1 - e_1) + (A_2 - e_2) + (A_3 - e_3)$$

$$\frac{A \times (D - n)}{D} = \frac{A_1 \times (D - n_1)}{D} + \frac{A_2 \times (D - n_2)}{D} + \frac{A_3 \times (D - n_3)}{D}$$

$$A \times (D - n) = A_1 \times (D - n_1) + A_2 \times (D - n_2) + A_3 \times (D - n_3)$$

$$A = \frac{A_1 \times (D - n_1) + A_2 \times (D - n_2) + A_3 \times (D - n_3)}{(D - n)}$$

$$A = \frac{1000 \times (4000 - 55) + 3000 \times (4000 - 85) + 2000 \times (4000 - 116)}{(4000 - 100)}$$

$$A = 6014,87 \text{ DA}$$

### **7.4.Échéance moyenne de plusieurs effets :**

Il existe des cas dans lesquels la somme des valeurs nominales des effets à remplacer est égale à la valeur nominale de l'effet unique. « n » est appelée dans ce cas « échéance moyenne ».

#### **Exemple :**

Reprenons l'exemple précédent, et supposons que les 03 effets soient remplacés par un effet unique de 6.000Da. Chercher l'échéance de cet effet.

#### **Solution :**

Soit « n » le nombre de jours séparant le 06 septembre de l'échéance recherchée

$$a = a_1 + a_2 + a_3$$

$$A - e = (A_1 - e_1) + (A_2 - e_2) + (A_3 - e_3)$$

$$\frac{A \times (D - n)}{D} = \frac{A_1 \times (D - n_1)}{D} + \frac{A_2 \times (D - n_2)}{D} + \frac{A_3 \times (D - n_3)}{D}$$

## CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux

$$A - \frac{A \times n}{D} = A_1 - \frac{A_1 \times n_1}{D} + A_2 - \frac{A_2 \times n_2}{D} + A_3 - \frac{A_3 \times n_3}{D}$$

$$6000 - \frac{6000 \times n}{4000} = 1000 - \frac{1000 \times 55}{4000} + 3000 - \frac{3000 \times 85}{4000} + 2000 - \frac{2000 \times 116}{4000}$$

$$6000 - \frac{6000 \times n}{4000} = (1000 + 3000 + 2000) - \frac{1000 \times 55}{4000} + - \frac{3000 \times 85}{4000} - \frac{2000 \times 116}{4000}$$

$$\frac{6000 \times n}{4000} = \frac{1000 \times 55}{4000} + - \frac{3000 \times 85}{4000} - \frac{2000 \times 116}{4000}$$

$$6000 \times n = (1000 \times 55) + (3000 \times 85) + (2000 \times 116)$$

**$n = 90,33$  jours**

Alors : La date d'échéance de l'effet de 6000 DA interviendra donc 91 jours après le 06septembre soit le 06 décembre. Cette date est l'échéance moyenne des 03 effets donnés.

### 7.5.Généralité du problème d'échéance moyenne

Soit « K » effets de Commerce de valeurs nominales  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  à échéance respectives  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ .

Ces effets sont remplacés par un effet unique de valeur nominale :  $A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k$  .  
Taux d'escompte  $t\%$

-Déterminer la date à laquelle devra être fixée l'échéance de l'effet unique de valeur nominale A?

#### Solution :

A la date d'équivalence :  $a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$

$$A - e = (A_1 - e_1) + (A_2 - e_2) + (A_3 - e_3) + \dots + (A_k - e_k)$$

$$A - \frac{A \times t \times n}{36000} = A_1 - \frac{A_1 \times t \times n_1}{36000} + A_2 - \frac{A_2 \times t \times n_2}{36000} + \dots + A_k - \frac{A_k \times t \times n_k}{36000}$$

$$A - \frac{A \times n}{D} = A_1 - \frac{A_1 \times n_1}{D} + A_2 - \frac{A_2 \times n_2}{D} + \dots + A_k - \frac{A_k \times n_k}{D}$$

$$A - \frac{A \times n}{D} = (A_1 + A_2 + \dots + A_k) - \left( \frac{A_1 \times n_1}{D} + \frac{A_2 \times n_2}{D} + \dots + \frac{A_k \times n_k}{D} \right)$$

$$\frac{A \times n}{D} = \frac{A_1 \times n_1}{D} + \frac{A_2 \times n_2}{D} + \dots + \frac{A_k \times n_k}{D}$$

$$A \times n = A_1 \times n_1 + A_2 \times n_2 + \dots + A_k \times n_k$$

$$n = \frac{A_1 \times n_1 + A_2 \times n_2 + \dots + A_k \times n_k}{A}$$

### **8. Pratique de l'escompte**

Nous avons supposé jusqu'ici que, à l'occasion de l'opération commerciale d'escompte, la retenue effectuée par le banquier se bornait à l'escompte. En réalité le banquier opère d'autres retenues sur la valeur nominale d'un effet. L'ensemble des retenues constitue l'agio, et comprend :

- L'escompte commercial
- Différentes commissions
- La taxe sur la valeur ajoutée (TVA)

La taxe sur la valeur ajoutée supportée à l'occasion d'une remise à l'escompte par un industriel ou un commerçant est, pour l'assujetti, déductible du montant de la taxe qu'il aura ensuite à verser.

Le seul agio qui compte donc aux yeux du banquier escompteur est l'agio avant taxes (agio hors taxes).

### **5.1. Les commissions proportionnelles au temps :**

Elles se calculent sur les mêmes bases que l'escompte, donc proportionnellement à la valeur nominale de l'effet escompté, et à la durée qui sépare la date de négociation à la date d'échéance de l'effet, et au taux attaché à ces commissions

- **L'escompte commercial :**

$$e = \frac{A \times t \times n}{36000}$$

- **La commission d'endossement :**

Elle est calculée sur les mêmes bases que l'escompte, cela veut dire qu'elle est fonction de la valeur nominale de l'effet, de la durée qui lui reste à courir et d'un taux d'intérêt appelé « taux de la commission d'endos ». Elle sert à couvrir le coût d'une opération de réescompte auprès de la banque centrale.

Soient : A: la valeur nominale ;  
t' : le taux de la commission d'endos  
n: échéance de l'effet  
Ce: la commission d'endos

$$Ce = \frac{A \times t' \times n}{36000}$$

## ***CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux***

### **5.2. Les commissions indépendantes du temps :**

Elles sont proportionnelles seulement au capital (la valeur nominale de l'effet), et au taux. Ajoutons que certaines commissions sont fixes, donc indépendantes du nominale de l'effet et du nombre de jours restant à courir à celui-ci.

Les commissions fixes constituent des droits fixes pour chaque effet, elles sont calculées sur la valeur de l'effet. Elles peuvent être directement en unités monétaires, tels que : 500DA, 1000DA...elles peuvent aussi être exprimées en pourcentage : 5%, 8%... Leur calcul se fera dans ce cas comme suit :

$$Cf = \frac{A \times t''}{100}$$

**Exemple :** commissions bancaires, commissions de manipulation, commissions de change...

– **La taxe sur le chiffre d'affaires :**

Si « K » est le taux de la taxe sur le chiffre d'affaires, cette dernière est obtenue en multipliant l'AGIO hors taxes par  $\frac{K}{100-K}$

$$AGIO\ HT = e + Ce + Cf$$

$$TCA\ (taxe\ sur\ le\ chiffre\ d'affaires) = AGIO\ HT \times \frac{K}{100-K}$$

$$AGIO\ TTC = AGIO\ HT + TCA$$

### **5.3. Le taux de rendement d'une opération d'escompte :**

Le taux de rendement d'une opération d'escompte, permet au banquier d'obtenir en versant une somme égale à la valeur nette d'escompte, une valeur égale à l'escompte lui-même « e ».

Donc : si l'on désigne par  $\omega$  le taux de rendement, on aura :

$$e = \frac{\omega \times \text{la valeur nette d'escompte} \times n}{36000}$$

### **5.4. Le taux de revient :**

Le taux de revient représente le cout de revient de l'opération d'escompte pour le client.

$$AGIOTTC = \frac{\text{la valeur nette d'AGIO} \times \theta \times n}{36000}$$

$$\theta = \frac{AGIOTTC \times 36000}{\text{valeur nette d'AGIO} \times n}$$

### **5.5. Le taux réel d'escompte :**

Il est le taux unique qui exprime les trois taux correspondants aux composantes qui constituent l'AGIO hors taxes ( $e + Ce + Cf$ )

## CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux

Si  $\varphi$  exprime le taux réel d'escompte, il correspond au taux qui permet à la valeur nominale de l'effet pour lequel il reste « n » jours à courir, pour obtenir une valeur égale à l'AGIO HT

$$\begin{aligned}AGIOHT &= \frac{A \times \varphi \times n}{36000} \\ \varphi &= \frac{AGIOHT \times 36000}{A \times n} \\ \varphi &= \frac{\left[ \frac{A \times t \times n}{36000} + \frac{A \times t' \times n}{36000} + \frac{A \times t''}{100} \right] \times 36000}{A \times n} \\ \varphi &= \frac{A \times 36000 \times n \left[ \frac{t}{36000} + \frac{t'}{36000} + \frac{t''}{n \times 100} \right]}{A \times n} \\ \varphi &= t + t' + \frac{360}{n} t''\end{aligned}$$

### Exercices :

#### Exercice1 :

Le même jour, deux effets sont remis à l'escompte .le 1<sup>er</sup> de valeur nominale de 4.518 Da , et d'échéance 20 novembre , est remis à l'escompte dans une banque « A » aux conditions suivantes :  $t=10,4\%$  ,  $t'=0,6\%$  ,  $t''=0,25\%$  ; **commission fixe :1,76Da** . Le second de valeur nominale de 4.545Da et d'échéance 30 novembre , est escompté dans une banque « B » aux conditions suivantes : $t=11,4\%$  ,  $t'=0,6\%$  ,  $t''=0,4\%$ .compte non tenu de la taxe , les valeurs nettes des deux effets sont , le jour de la remise à l'escompte , de même montant .

**TAF :** Déterminer la date de remise à l'escompte des deux banques .

#### Exercice2 :

Trois effets dont les valeurs nominales sont en progression arithmétique, sont escomptés commercialement au taux de 9% à la date du 18 mai. S'ils avaient tous les 3 , 36 jours à couvrir , comme le 1<sup>er</sup> ,le total des 3 valeurs actuelles seraient de 17.838 Da . le nominal du 1<sup>er</sup> effet est de 7.000 Da . les nombres de à courir par ces trois effets sont en progression géométrique .l'escompte total effectif s'élève à 245,25 Da. **TAF :** déterminer les valeurs nominales du 2<sup>ème</sup> et du 3<sup>ème</sup> effet , et échéances respectives .

## ***CHAPITRE 3 : L'escompte et équivalence des taux et des capitaux***

### **Exercice 3 :**

Les conditions d'escompte offertes par trois banques sont les suivantes :

<b>Banques \ taux</b>	<b>t</b>	<b>t'</b>	<b>t''</b>
<b>A</b>	9,2%	0,6%	0,5%
<b>B</b>	10,2%	0,6%	0,25%
<b>C</b>	11,2%	0,6%	0,125%

t : taux d'escompte , t' : taux de commission d'endos , t'' : taux de la commission indépendante du temps

1. En supposant un effet de valeur nominale A, à n jours d'échéance, exprimer les agios respectifs retenus par les trois banques .
2. Comparer les tarifs des trois banques suivant les valeurs de n et suivant ces valeurs établir un classement préférentiel entre les trois banques.
3. Quelle est la relation qui existe entre le taux réel d'escompte et l'agio ? démontrez !

### **Exercice 4 :**

Un commerçant possède en portefeuille sur un même débiteur 2 effets respectivement : **4.800(échéance 10 Juin )** et **21.600 (échéance 20 Juillet)**.

Le débiteur propose alors de remplacer ces 2 effets par un effet unique au 30 Août. Quel sera le montant nominal de cet effet au taux d'escompte de 10 % ?

## **CHAPITRE4 : les intérêts composés**

---

### **1. Introduction :**

#### **Notion de capitalisation des intérêts**

Dans les chapitres qui ont précédé les calculs d'intérêt étaient effectués suivant la convention d'intérêt simple, c'est-à-dire que pendant toute la durée de l'opération de prêt, les calculs d'intérêt prenaient pour base le capital initialement prêté. Ce calcul se justifiait, les opérations financières en question étant des opérations à court terme, qui pouvaient ne durer que quelque dizaines de jours.

Quand l'opération de prêt est une opération à long terme, qui peut durer plusieurs années, il semble naturel que le prêteur, à l'expiration d'une durée convenue avec l'emprunteur, l'année par exemple, considère l'intérêt simple fourni par son capital pendant cette année comme un nouveau capital qui, incorporé au capital initial, portera intérêt à son tour pendant l'année suivante.

Ainsi **10.000 DA** placés au taux annuel de **10%**, donneront au cours de la première année **1.000DA** d'intérêt simple qui incorporés, à la fin de cette première année, au capital initial, porteront le capital placé à **10000+1000=11000DA**.

C'est sur ce nouveau capital que sera calculé l'intérêt simple de la deuxième année de placement, intérêt qui sera égal, si le taux de placement reste fixé à **10%**, à **1100DA**.

L'incorporation de cet intérêt au capital portera le capital à **11000+1100=12100DA**. Ce nouveau capital fournira, pendant la troisième année de placement, à 10% un intérêt de **1210DA**. En supposant que la durée du prêt ait été limitée à trois ans la valeur acquise finale du capital placé sera égale à **12100+1210=13310DA**. C'est cette somme que l'emprunteur remettra à son prêteur au bout des trois ans.

Un rapide calcul montrerait que si le prêt avait été stipulé à intérêt simple, c'est-à-dire sans incorporation au capital, à la fin de chaque année, de l'intérêt simple produit pendant l'année, l'emprunteur aurait rendu à son prêteur :

$$10000 + \frac{10000 \times 10 \times 3}{100} = 13000DA$$

La capitalisation (c'est-à-dire l'addition au capital) des intérêts à la fin d'une durée convenue, dans notre exemple l'année, est la caractéristique du prêt à intérêt composé.

### **2. Définition de l'intérêt composé :**

Les intérêts composés concernent les opérations financières à moyen et long terme ;

On dit qu'un capital « *C* » est placé à intérêt composé, lorsque le montant de l'intérêt est ajouté au capital à la fin de chaque période suivante, on parle alors de capitalisation des intérêts.

### **3. Formule fondamentale des intérêts composés :**

Soit un capital « *C* » placé à intérêt composé au début de l'année et à un taux d'intérêt annuel « *i* ». Le principe de calcul est le suivant :

## CHAPITRE 4 : les intérêts composés

- La capitalisation des intérêts veut que la valeur acquise en fin d'année devienne le capital placé au début de l'année suivante ;
- Le montant de l'intérêt annuel résulte toujours du produit : capital placé au début de l'année  $X$  le taux d'intérêt annuel ;
- La valeur acquise en fin de l'année : *capital placé au début de l'année + montant de l'intérêt annuel.*

Soit

$C$  : Le montant du capital placé, exprimé en unité monétaire

$n$  : La durée du placement, exprimée en années

$i$  : Le taux d'intérêt pour une unité monétaire de capital et pour une durée de un an.

par exemple un taux annuel de 8% conduirait à écrire  $i=0,08$

On remarquera, avec les conventions qui sont ainsi faites, que l'intérêt simple, en un an, du capital «  $C$  », placé au taux annuel  $i$  pour une unité monétaire, est égal à  $C \times i$  unités monétaire.

Présentons, sous la forme d'un tableau, les opérations d'intérêt et de capitalisation annuelle des intérêts.

Date (années)	Capital au début de l'année	Intérêt de l'année en cours	Valeur acquise à la fin de l'année après capitalisation de l'intérêt de l'année
1	$C$	$C \times i$	$C + C \times i = C \times (1 + i)^1$
2	$C(1 + i)$	$C(1 + i) \times i$	$C(1 + i) + C(1 + i) \times i = C \times (1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$C(1 + i)^2 \times i$	$C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2 \times i = C \times (1 + i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1 + i)^{n-2}$	$C(1 + i)^{n-2} \times i$	$C(1 + i)^{n-2} + C(1 + i)^{n-2} \times i = C \times (1 + i)^{n-1}$
n	$C(1 + i)^{n-1}$	$C(1 + i)^{n-1} \times i$	$C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i)^{n-1} \times i = C \times (1 + i)^n$

Nous pourrions ainsi écrire que, dans les conditions données, la valeur acquise par le capital  $C$ , donc après  $n$  capitalisations d'intérêt, valeur acquise que nous désignerons par  $C_n$  sera donnée par la formule :

$$C_n = C \times (1 + i)^n$$

## CHAPITRE 4 : les intérêts composés

---

### 4. Quelques remarques importantes

**Remarque 1 :** nous avons supposé pour établir la formule, valeur acquise  $C_n = C \times (1 + i)^n$ , que la capitalisation des intérêts était annuelle, que le taux d'intérêt était annuel et que la durée de placement s'exprimait en années.

Taux de placement et durée de placement s'exprimeraient par référence à la période retenue pour la capitalisation des intérêts. Cette condition doit toujours être remplie pour que la formule soit applicable.

Si par exemple, il est convenu entre prêteur et emprunteur, que les intérêts doivent être capitalisés (incorporés au capital) à la fin de chaque mois, la formule fondamentale sera applicable à la condition que le taux d'intérêt soit mensuel, et que la durée de placement soit exprimée en mois.

**Remarque 2 :** Le tableau précédent montre (colonne 4) que les valeurs acquises successives constatées à la fin des périodes 1, 2, 3, ..., n, après capitalisation des intérêts, sont en progression géométrique de raison  $(1+i)$ , le premier terme de cette progression étant d'ailleurs le capital initial « C ».

**Remarque 3 :** Ce même tableau montre (colonne 3) que les intérêts produits au cours des années 1, 2, 3, ..., n, sont également en progression géométrique de même raison  $(1+i)$ .

**Remarque 4 :** Contrairement aux formules relatives aux calculs d'intérêt simple qui donnaient directement l'intérêt fourni par un placement, la formule fondamentale en matière d'intérêt composé donne la valeur acquise par le capital placé.

On obtiendrait l'intérêt total produit en faisant la différence entre valeur acquise et capital initial.

$$\text{intéret} = C_n - C = C(1 + i)^n - C$$

$$\underline{\text{intéret} = C[(1 + i)^n - 1]}$$

### 5. Exemples simples de calcul d'une valeur acquise

#### Exemple 1 :

Un capital de **70.000€** est placé à intérêt composé au taux annuel de **9%**.

- Quelle est la valeur acquise par ce capital au bout de **sept ans** ?
- Quel est le montant des intérêts générés au cours de cette période de sept ans ?

#### Solution :

$$C=70.000 ; i=9\%=0,09 ; n=7\text{ans}$$

$$\text{– La valeur acquise : } C_n = C \times (1 + i)^n$$

$$\text{La valeur acquise au bout de 7 ans : } C_7 = C \times (1 + i)^7$$

$$C_7 = 70.000 \times (1 + 0,09)^7 \quad \mathbf{C_7 = 127962,7384 \text{ €}}$$

## CHAPITRE4 : les intérêts composés

---

– le montant des intérêts générés au cours de cette période de sept ans

$$\text{intérêt} = C7 - C = 127962,7384 - 70000$$

$$\text{intérêt} = 57962,7384 \text{ €}$$

### Exemple2 :

Un capital de **10.000€** est placé à intérêt composé. Taux trimestriel d'intérêt :  $i=0,025$  pour un euro. Capitalisation trimestrielle des intérêts. Calculer sa valeur acquise au bout de **6ans**.

### Solution :

Pour exprimer la durée et le taux de placement par référence au trimestre qui est la période de capitalisation, la durée de placement sera exprimée en trimestres, soit 24 (un an fait 4 trimestres, alors 6ans faites 24 trimestres). Il y a d'ailleurs 24 capitalisations d'intérêt.

On pourra donc écrire :

$$C24 = 10000 \times 1,025^{24} = 10000 \times 1,808726$$

$$C24 = 18087,26\text{€}$$

## 6. problèmes simples sur la forme fondamentale des intérêts composés :

Rappelons la formule générale :

$$Cn = C \times (1 + i)^n$$

Les calculs envisagés supposent l'emploi de calculatrice, ou de tables financières.

### – Problème 1 : Calcul de la valeur acquise

**Données :** C=20.000€ Capitalisation annuelle des intérêts  
Taux annuel  $i=9,5\%$   
Valeur acquise  $C7= ?$

#### Calcul :

$$C7 = C \times (1 + i)^7$$

$$C7 = 20000 \times (1 + 0,095)^7$$

$$C7 = 37751,0321 \text{ €}$$

### – Problème 2 : calcul du taux

**Données :** C=30.000€ Capitalisation annuelle des intérêts  
 $n=11$  ans Valeur acquise  $C_{11}=89\,971,77\text{€}$   
Taux annuel de placement pour 1 Euro ?

#### Calcul :

$$Cn = C \times (1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n = \frac{Cn}{C}$$

$$(1 + i)^{11} = \frac{89971,77}{30000}$$

$$(1 + i)^{11} = 2,999059$$

$$(1 + i) = \sqrt[11]{2,999059}$$

$$(1 + i) = 1,1049999$$

$$i = 0,1049999$$

$$i = 10,50\%$$

## CHAPITRE4 : les intérêts composés

---

En utilisant la table financière :

La durée **11** étant connue il suffit de chercher, dans la table financière n°1, sur la ligne **11** le nombre **2,999059** qui se trouve dans la colonne correspondant au taux **10,5%** ;

### – Problème3 : recherche de la durée de placement

**Données :** C=40.000€ Capitalisation semestrielle des intérêts  
Taux semestriel d'intérêt : 4,75% ou  $i=0,0475$   
Cn=76597,84€  
Durée de placement, exprimée en semestres, n= ?

**Calcul :**

$$Cn = C \times (1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n = \frac{Cn}{C}$$

$$\log(1 + i)^n = \log \frac{Cn}{C}$$

$$n \times \log(1 + i) = \log \frac{Cn}{C}$$

$$n = \frac{\log \frac{Cn}{C}}{\log(1 + i)}$$

$$n = \frac{\log \frac{76597,84}{40000}}{\log(1 + 0,0475)}$$

$$n = \frac{\log 1,914946}{\log 1,0475} = \frac{0,28215653}{0,02015403}$$

$$n = 14,0000$$

En utilisant la table financière n°1 :

Le taux de 0.0475 étant connu on cherche dans la table financière n°1, colonne 4,75% le nombre 1,914946, que l'on trouve sur la ligne correspondant à n= 14 semestres

### – Problème 4 : recherche du capital placé

**Données :** n=10ans Capitalisation annuelle des intérêts  
C10= 123661,92 Taux annuel :  $i=0,075$   
Capital placé, C= ?

**Calcul :**

$$Cn = C \times (1 + i)^n$$

$$C = \frac{Cn}{(1 + i)^n}$$

$$C = \frac{123661,92}{(1+0,075)^{10}} = \frac{123661,92}{2,061031} = 60000\text{€}$$

## 7. Calculs sur la formule fondamentale des intérêts composés. Calcul de la valeur acquise dans le cas d'un nombre de périodes non entier

### – Problème :

## CHAPITRE4 : les intérêts composés

---

Un capital de 20.000€ est placé à intérêt composé. Capitalisation annuelle des intérêts. Taux de placement  $i=0,11$  (11%). Durée de placement : 7ans et 3mois. Calculer la valeur acquise par le capital à l'expiration de la durée prévue.

### – Résolution :

On calcule la valeur acquise par le capital placé au bout de 7 années de placement (7 est le nombre entier de périodes de placement immédiatement inférieur à la durée exacte du placement), puis on ajoute à cette valeur acquise l'intérêt simple qu'elle produira pendant 3 mois (ou  $\frac{3}{12}$  d'année). On remarquera que le calcul fait à intérêt simple n'a rien d'illogique, la capitalisation des intérêts n'intervenant qu'en fin de période.

Ainsi :

$$C_7 = 20000 \times (1 + 0,11)^7 = 20000 \times 1,11^7 = 20000 \times 2,07616 = 41523,20\text{€}$$

$$C_7 + C_{\text{mois}} = 41523,20 + \left( 41523,20 \times \frac{11}{100} \times \frac{3}{12} \right) = 42665,09\text{€}$$

La valeur acquise dans 7ans et 3 mois est : 42665,09€

## 8. Taux équivalents et taux proportionnels :

### – Taux équivalents :

Un capital  $C$  est placé à intérêt composé au taux annuel  $i$ , pendant  $n$  années. Capitalisation annuelle des intérêts. A l'expiration des  $n$  années sa valeur acquise sera  $C_n = C \times (1 + i)^n$ . Supposons maintenant que ce même capital  $C$  soit placé au taux semestriel «  $i_2$  », pendant la même durée que dans la première hypothèse soit  $(2 \times n)$  semestres les intérêts produits étant capitalisés semestriellement.

Au bout des  $(2 \times n)$  semestres la valeur acquise par le capital  $C$  sera  $C_n = C \times (1 + i_2)^{2n}$ . Si dans les deux hypothèses envisagées les deux valeurs acquises sont égales entre elles, c'est-à-dire si  $(1 + i)^n = (1 + i_2)^{2n}$ , on dira que les taux  $i$  (annuel) et  $i_2$  (semestriel) sont équivalents.

### D'une façon générale deux taux :

$I$ , que l'on supposera annuel,

$i_k$ , attaché à une période  $K$  fois plus faible que l'année, seront dits équivalents si, appliqués à un même capital, et après l'écoulement d'une même durée, ils conduisent à une même valeur acquise, la capitalisation des intérêts étant annuelle dans le premier cas, effectuée à la fin de chaque année  $K^e$  d'année dans le second cas.

Ainsi :

## CHAPITRE4 : les intérêts composés

---

- Capital  $C$ , taux annuel  $i$ , capitalisation annuelle,  $n$  années de placement donc  $n$  capitalisations.
- Capital  $C$ , taux  $i_k$ , capitalisation à la fin de chaque  $K^e$  d'année,  $n$  années de placement donc  $K \times n$  capitalisations.

$i$  et  $i_k$  seront équivalents si :

$$C \times (1 + i)^n = C \times (1 + i_k)^{k \times n}$$

$$(1 + i)^n = (1 + i_k)^{k \times n}$$

$$(1 + i) = (1 + i_k)^k$$

- **Exemples de calcul de taux équivalents :**

### Exemple1 :

Calcul du taux semestriel équivalent au taux annuel  $i=0,095$  ( $k=2$ )

On écrira  $(1 + i_2)^2 = 1,095$

$$(1 + i_2) = 1,095^{\frac{1}{2}}$$

$$i_2 = 1,095^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,04642 - 1 = 0,04642$$

Soit :  $i_2 = 4,64\%$

### Exemple2 :

Calcul du taux mensuel équivalent au taux trimestriel  $0,07$ . Les deux taux, mensuel  $i_{12}$  et trimestriel  $i_4$  sont équivalents à un même taux annuel  $i$ .

On peut donc écrire :

$$(1 + i_{12})^{12} = (1 + i_4)^4$$

$$(1 + i_{12}) = (1 + i_4)^{\frac{4}{12}}$$

$$(1 + i_{12}) = (1,07)^{\frac{4}{12}}$$

$$(1 + i_{12}) = 1,02281$$

$$i_{12} = 0,02281$$

Soit :  $i_{12} = 2,281\%$

## CHAPITRE4 : les intérêts composés

---

### Exemple3 :

Calcul du taux semestriel équivalent au taux mensuel 0,015.

$$(1 + i_2)^2 = (1 + i_{12})^{12}$$

$$(1 + i_2) = (1 + i_{12})^{\frac{12}{2}}$$

$$(1 + i_2) = (1 + 0,015)^6$$

$$(1 + i_2) = 1,015^6$$

$$(1 + i_2) = 1,093443$$

$$i_2 = 0,093443$$

$$\text{Soit : } i_2 = \mathbf{9,34\%}$$

### – Taux proportionnels

On écrira  $\frac{i}{k}$  le taux proportionnel annuel  $i$ , et relatif à une durée  $k$  fois plus petite que l'année.

Ainsi le taux trimestriel au taux annuel  $i=0,08$  est  $\frac{0,08}{4} = 0,02$

### Remarque :

- Nous observons qu'avec un taux annuel  $i=12\%$ , le taux trimestriel équivalent (2,8737 %) est inférieur au taux semestriel proportionnel (3%). Et cette constatation peut être généralisée ;
- Le taux équivalent  $i_k$  est inférieur au taux proportionnel  $\frac{i}{k}$  du fait de la capitalisation des intérêts générés par  $i_k$  au cours de l'année.

### 9. Valeur actuelle commerciale (VAC) :

Si je place un capital  $C$  à intérêt composé au taux  $i$  pendant  $n$  périodes, la valeur acquise sera  $C_n = C \times (1 + i)^n$

Si, on connaît cette valeur acquise, je me demande dans les mêmes conditions de placements, combien vaut aujourd'hui ce que je toucherai dans  $n$  périodes.

### Exemple :

Deux personnes A et B doivent recevoir 10000€ le 01/01/2016. Combien recevraient-elles si elles étaient payées le 01/01/2011 en tenant compte d'un taux d'intérêt composé de 8% ?

### Solution :

Il faut actualiser les 10000€ au 01/01/2011, donc soit une période de 5ans.

$$C_{2016} = 10000\text{€}$$

$$C_{2011} = 10000 \times 1,08^{-5} = 10000 \times 0,680583$$

$$\mathbf{C_{2011} = 6805,83\text{€}}$$

## CHAPITRE 4 : les intérêts composés

---

### Exercices :

#### Exercice 1 :

Trois capitaux égaux sont placés à intérêts composés, pendant deux ans, aux conditions suivantes :

- ✓ 1<sup>er</sup> Capital : taux annuel, capitalisation annuelle des intérêts (6%) ;
  - ✓ 2<sup>ème</sup> Capital : taux semestriel 3%, capitalisation semestrielle des intérêts ;
  - ✓ 3<sup>ème</sup> Capital : taux trimestriel 1.5% , capitalisation trimestrielle des intérêts ;
1. Au bout des deux années de placement, les intérêts produits par les deux premiers capitaux présentent une différence de 859.05 DA. Calculer la valeur commune des 03 capitaux placés ;
  2. Quelle est la différence des intérêts produits par les placements du 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> capital;
  3. A quel taux d'intérêts simples le 1<sup>er</sup> capital devrait –il être placé pour que après 02 années de placements, la valeur acquise à intérêts simples soit égale à la valeur à intérêts composés, les intérêts dans ce dernier cas étant calculés aux taux annuel de 6% ?
  4. Au bout de combien de temps le 1<sup>er</sup> capital placé à intérêts simples au taux annuel de 6% donnerait –il une valeur acquise égale à la valeur acquise du même capital placé à intérêts composés à 6% pendant 02 ans ?

#### Exercice 2 :

Soit un capital « a » placé à intérêts composés à 5% pendant 5ans ; a1 , a2 , a3 , a4, a5 , les valeurs acquises à la fin des 5 années consécutives ;

1. Exprimez-les en fonction de « a » ;
2. Sachant que  $a+a1=164.000DA$  ;  $a4+a5=199.342,50 DA$ , Calculez le taux de placement, le capital placé et la valeur acquise à la 5<sup>ème</sup> année .

#### Exercice 3 :

on place à intérêts composés une somme de 20.000 DA à un taux « i » et une somme de 50.000DA à un taux « i' » .

Elle retire après 4ans, capitaux et intérêts réunis une somme de 88.253,77DA .Si le capital de 20.000DA avait été placé au taux « i' » et le capital de 50.000DA au taux « i » , la somme des valeurs acquises aurait été de 89.335,48DA.

- Calculer les deux taux « i » et « i' ».

#### Exercice 4 :

Une personne lègue un capital de 240.000DA à ses trois héritiers âgés respectivement, lors du décès du testateur, de 14 ans et demi, de 11ans et 3mois , et de 6ans. Chaque héritier entrera en possession de sa part le jour de sa majorité (21ans).

1. Si le capital légué était partagé également le jour de décès, quelle somme recevrait chaque héritier le jour de sa majorité en supposant que chaque part est placé à intérêts

## **CHAPITRE 4 : les intérêts composés**

---

composés à 4%, du jour du partage au jour de la majorité de l'héritier ? utiliser toutes les méthodes vues en cours.

2. En supposant que le partage soit fait de façon à ce que chaque héritier perçoive la même somme à sa majorité (après capitalisation à 4% ), faire le partage des 240.000DA.

### **Exercice 5 :**

Deux capitaux X et Y sont tels que :  $\text{Log } X - \text{Log } Y = 1,90309$

Si l'on plaçait ces deux capitaux à intérêts composés pendant 10ans au taux de 6%, leurs valeurs acquises seraient différentes de 17.910DA.

1. Quels sont ces deux capitaux ?
2. Au bout de combien de temps leurs valeurs acquises seraient-elles égales si l'on plaçait X à 6% et Y à 3% ?

### **Exercice 6 :**

Une personne doit encaisser, le 15/01/2005, une créance de 1.000.000DA .le 15/01/1989, elle vend son titre de créance contre une somme, payable au comptant et représentant la valeur actuelle, à intérêts composés et au taux annuel de 5% de la créance qu'elle devait encaisser le 15/01/2005. La somme ainsi obtenue est investie immédiatement dans un placement à intérêts composés à 6% par année.

1. quel capital la personne obtiendra-elle le 15/01/2005 ?
2. Déterminer à quelle date elle obtiendra 1.000.000DA ?
3. Quel prélèvement pourrait-elle effectuer sur la somme encaissée le 15/01/1989 pour que le solde placé dans les conditions indiquées, produise 1.000.000DA le 15/01/2005 ?
4. En utilisant les résultats précédents, apprécier l'opportunité de l'opération effectuée le 15/01/1989

### **Exercice 7 :**

Un capital de 10.000DA à 5ans doit être remplacé par des créances de valeurs nominales égales, à échéances respectivement de 1, 2, 3, 4 et 5ans .taux d'intérêt 5%.

1. Calculer le nominal commun des 5 créances.
2. Même problème si les créances sont en progression géométrique de raison 1.05.
3. Même problème si les créances sont en progression arithmétique de raison +100.

### **Exercice 8 :**

L'acheteur d'un terrain a le choix, pour le règlement, entre deux modalités :

1. Payer comptant 175.000DA.
  2. Accepter de payer en 02 tranches de 100.000DA chacune à échéances de 02ans et 03ans.
- Quelle modalité de paiement choisira-t-il ? taux d'intérêt 6%.

### 1. Définitions et caractéristiques

On appelle annuités une suite de versements perçus ou réglés à intervalles de temps réguliers. Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période. Les versements effectués ont pour but :

- constituer un capital, il s'agit d'annuités de placement (versement en début de période) ou de capitalisation (versements en fin de période) ;
- rembourser une dette, c'est le cas des annuités de remboursements ou d'amortissements.

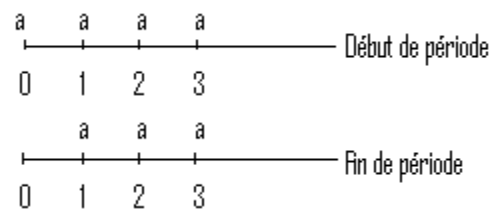
L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.

Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

### 2. Les annuités constantes

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.



#### 2.1. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de fin de période désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.

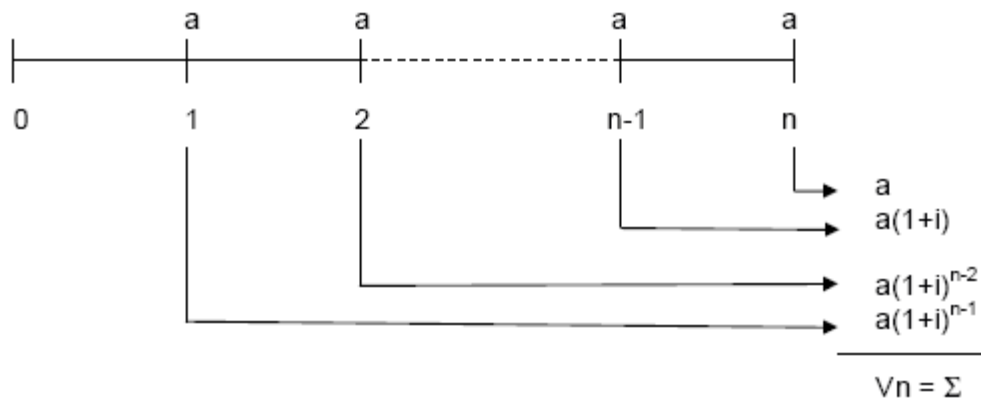
Désignons par :

$a$  : le montant constant de l'annuité ;

$n$  : le nombre d'annuités (de périodes) ;

$i$  : le taux d'intérêt ;

$V_n$  : la valeur acquise par la suite d'annuités au terme de la dernière ;



On a alors:

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique  $q = (1+i)$  et comprenant  $n$  termes. La formule devient donc:

$$V_n = a \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \right]$$

$$V_n = a \left[ \frac{[(1+i)n] - 1}{i} \right]$$

Le terme  $(1+i)^n - 1/i$  est fourni par la table financière n°3.

### Exemple :

Une personne place 5000 D chaque année pendant 8 ans. Ces versements sont capitalisés au taux de 7%. Déterminer le capital constitué au terme du dernier versement.

$$V_8 = 5000 \left[ \frac{[(1,07)^8] - 1}{0,07} \right] = 51299,01$$

## 2.2. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de capitalisation

La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période est la somme des annuités actualisées exprimée à la date origine (une période avant le premier versement).

Soit :

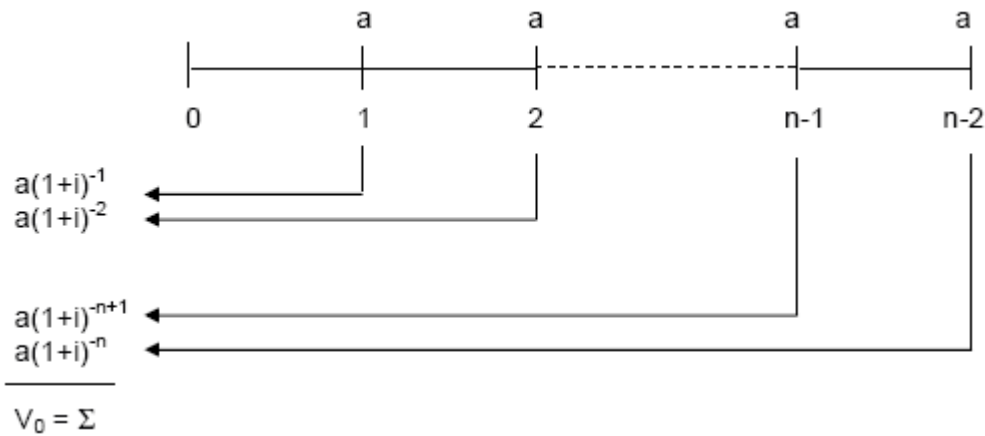
$V_0$  = la valeur actuelle par la suite des annuités

$a$  = l'annuité constante de fin de période

$n$  = le nombre de périodes (d'annuités)

$i$  = le taux d'intérêt par période de capitalisation

## CHAPITRE 5 : les annuités



Alors:

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$$

On a donc une suite géométrique de premier terme  $a(1+i)^{-1}$ , de raison géométrique  $q = (1+i)^{-1}$  et comprenant  $n$  termes. La formule devient :

$$V_0 = a(1+i)^{-1} \left[ \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \right]$$

$$V_0 = a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

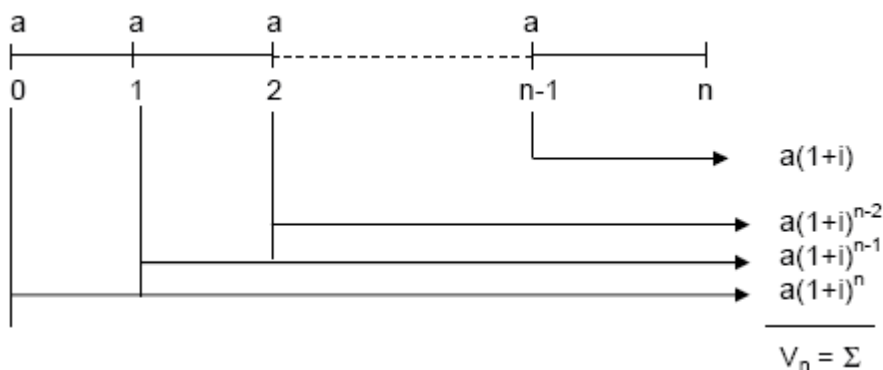
Le terme  $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  est fourni par la table N°4

**Exemple :** Le bénéficiaire d'une créance représentée par 10 annuités, égales chacune à 1500D, a besoin de trésorerie immédiate. Il escompte au taux de 12%. Quelle somme recevra-t-il en échange ?

$$V_0 = 1500 \left[ \frac{1 - (1,12)^{-10}}{0,12} \right] = 8475,33455$$

### 2.3. La valeur acquise d'une suite d'annuités constantes de placement

La valeur acquise par la suite d'annuités est égale à la somme des valeurs acquises par les versements successifs.



## CHAPITRE 5 : les annuités

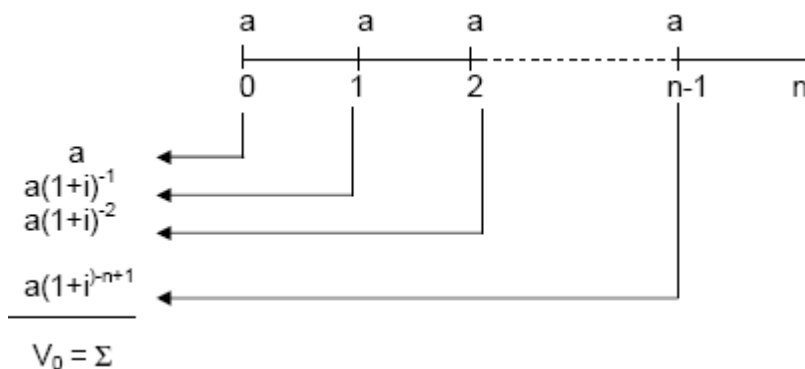
$$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

On a donc une suite géométrique de premier terme  $a(1+i)$ , de raison géométrique  $q = (1+i)$  et comprenant  $n$  termes. La formule devient donc :

$$V_n = a(1+i) \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

### 2.4. La valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de placement

Pour actualiser une suite d'annuités constantes de fin de période, on s'est placé à l'époque zéro, c'est-à-dire au moment de la signature du contrat, c'est-à-dire aussi, une période avant le premier versement. Pour actualiser les annuités de début de période, on se place à l'époque zéro, celle qui correspond au premier versement.



$$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n+1}$$

On a donc une suite géométrique de premier terme  $a$ , de raison géométrique  $q = (1+i)^{-1}$  et comprenant  $n$  termes. La formule devient :

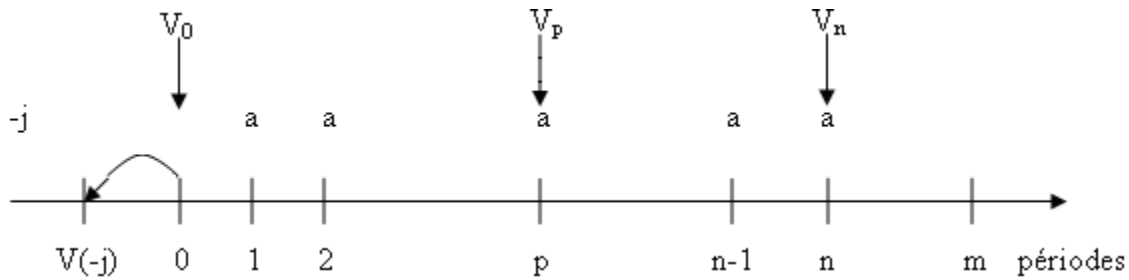
$$V_0 = a \left[ \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \right]$$

$$V_0 = a(1+i) \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

### 2.5. Evaluation d'une suite d'annuités constantes à une date quelconque

La notion d'équivalence s'applique également aux suites d'annuités. L'évaluation à une date quelconque implique là encore le recours aux principes d'actualisation et de capitalisation.

Il est possible d'évaluer une suite d'annuités constantes à n'importe quelle époque. Le problème se résumant soit à une opération de calcul de valeur acquise, ou de calcul de valeur actuelle, à partir du moment où sont précisées les périodes.



**2.5.1. Evaluation à l'époque m (m>n) :**

La valeur acquise à l'époque (m) serait :

$$Vm = Vn(1 + i)^{m-n}$$

Ou :

$$Vm = V0(1 + i)^m$$

Ainsi on obtient :

$$Vm = a \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] (1 + i)^m$$

**2.5.2. Evaluation à l'époque p (0<p<n) :**

En partant de V<sub>0</sub>, V<sub>0</sub> sera capitalisé pendant p périodes :

$$Vp = V0(1 + i)^p$$

$$Vp = a \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] (1 + i)^p$$

En partant de V<sub>n</sub>, V<sub>n</sub> sera actualisé pendant (n-p) périodes:

$$Vp = Vn(1 + i)^{-(n-p)}$$

$$Vp = a \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] (1 + i)^{-(n-p)}$$

$$Vp = a \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] (1 + i)^p$$

### 2.5.3. Evaluation à l'époque (j); (j<0) :

A partir de  $V_0$  :

$$V_{-j} = V_0(1+i)^{-j}$$

$$V_{-j} = a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-j}$$

A partir de  $V_n$ :

$$V_{-j} = V_n(1+i)^{-(n+j)}$$
$$V_{-j} = a \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)^{-n}(1+i)^j$$

$$V_{-j} = a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-j}$$

L'évaluation peut avoir lieu à n'importe quelle époque; connaissant le point de départ, et le point d'arrivée, en utilisant soit le calcul de la valeur acquise, soit le calcul de la valeur actuelle, soit les deux à la fois.

#### Exemple :

Une suite comporte 8 annuités de fin de période de 4000D chacune. Evaluer sa valeur au taux de 10% :

- 4 périodes avant le premier versement ;
- Au terme de la 5ème annuité ;
- 3 périodes après le dernier versement ;

#### Solution :

– Détermination des valeurs actuelle et acquise :

$$V_0 = a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] = 4000 \left[ \frac{1 - (1,10)^{-8}}{0,10} \right] = 21339,7$$

$$V_n = a \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = 4000 \left[ \frac{(1,10)^8 - 1}{0,10} \right] = 45743,55$$

## CHAPITRE 5 : les annuités

### – Evaluation de la suite d'annuités

Dates d'évaluation	Evaluation fondée sur la valeur actuelle	Evaluation fondée sur la valeur acquise
4 périodes avant le 1er versement	Soit 3 périodes avant l'origine. $V_{-3} = V_0 (1+i)^{-3} = 21\,339,70(1,10)^{-3} = 16\,032,83D$	Soit 11 périodes avant le terme. $V_{-3} = V_8 (1+i)^{-11} = 45742,55(1,10)^{-11} = 16032,83D$
Au terme de la 5ème annuité	Soit 5 périodes après l'origine. $V_5 = V_0 (1+i)^5 = 21339,70(1,10)^5 = 34367,80D$	Soit 3 périodes avant le terme. $V_5 = V_8 (1+i)^{-3} = 45743,55(1,10)^{-3} = 34367,80D.$
3 périodes après le dernier versement	Soit 11 périodes après l'origine. $V_{11} = V_0 (1+i)^{11} = 21339,70(1,10)^{11} = 60884,65D$	Soit 3 périodes après V8. $V_{11} = V_8 (1+i)^3 = 45743,55(1,10)^3 = 60884,66D.$

#### **Remarque :**

Evaluation de la suite d'annuités 4 périodes avant le premier versement : si l'on procède à l'évaluation à partir de la valeur actuelle, cela signifie que la valeur à déterminer précède de 3 périodes seulement la date originale, celle-ci étant par définition antérieure d'une période au premier versement.

Qu'elle soit fondée sur la valeur actuelle ou la valeur acquise, l'évaluation produit le même terme (au centième près) dans les deux cas.

### **2.6. Remplacement d'une suite d'annuités constantes**

#### **2.6.1. Remplacement d'une suite d'annuités constantes par une autre**

Une suite d'annuités constantes peut être remplacée par une autre si, pour un taux d'intérêt donné et à une date quelconque, leur équivalence est établie. A l'époque zéro, l'équivalence est exprimée par l'égalité des valeurs actuelles des deux suites.

$$V_0 = V'$$

$$a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] = a' \left[ \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i} \right]$$

Les applications relatives au remplacement d'une suite d'annuités posent généralement le problème de la détermination des valeurs  $a'$  et  $m$ .

#### **2.6.2. Remplacement d'une suite d'annuités par un versement unique : cas général de l'échéance commune**

Dans le cas présent, la nouvelle suite d'annuités constantes est réduite à un seul terme, qui sera désigné par  $U$ . Le nombre de périodes au terme desquelles  $U$  est payé sera noté  $u$ .

$$U(1+i)^{-u} = a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

## CHAPITRE 5 : les annuités

Les applications traitant de ce cas impliquent la détermination de la valeur de  $U$ . si celui-ci est connu, la valeur de  $u$  cherchée correspond à l'échéance commune des annuités constantes de la suite initiale.

### 2.6.3. Cas particulier de l'échéance moyenne d'une suite d'annuités constantes

A l'instar du cas précédent, la nouvelle suite ne comporte qu'un seul terme. Dans le cas présent, ce terme est constitué par la somme des annuités constantes de la suite initiale.

L'équivalence à l'époque zéro s'écrit :

$$U(1+i)^{-u} = a \left[ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \quad \text{Avec : } U = n.a$$

$$\begin{aligned} \text{D'où:} \quad n.a(1+i)^{-u} &= a \left[ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \\ n(1+i)^{-u} &= \left[ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right] \end{aligned}$$

L'échéance moyenne  $u$  s'obtient à partir de:

$$(1+i)^u = n \left[ \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right]$$

La valeur de  $u$  est indépendante de celle de l'annuité constante de la suite initiale ( $a$ ).

La valeur de  $\left[ \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right]$  est donnée par la table financière n°5.

#### Exemple :

Un débiteur engagé initialement par le remboursement de 10 annuités constantes de 8000 D envisage d'acquitter sa dette soit par :

- le versement de 12 trimestrialités constantes,
- un versement unique de 80000D,

Déterminer, au taux annuel de 10% :

- le montant de chaque trimestrialité,
- l'échéance du versement unique

#### Solution :

- Montant constant des trimestrialités. :La détermination de ce montant nécessite le recours à un taux trimestriel équivalent au taux annuel de 10%

$$i = (1+i)^{1/4} - 1 = (1,10)^{1/4} - 1 = 0,0241137.$$

Egalisons à présent les valeurs à l'instant zéro de la suite initiale de 10 annuités constantes de 8000 D et de la nouvelle suite de 12 trimestrialités de  $T$  dinars chacune.

$$T \left[ \frac{1 - (1,0241137)^{-12}}{0,021137} \right] = 8000 \left[ \frac{1 - (1,10)^{-10}}{0,10} \right] = 4766,45$$

- Echéance du versement unique de 80000 D : Le montant de ce versement est égal à la somme des annuités constantes de la suite initiale. L'échéance à déterminer est donc l'échéance moyenne.

$$(1+i)^u = n \left[ \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right]$$

$$(1, 10)^u = 10 \left[ \frac{0.10}{1 - (1, 10)^{-10}} \right] = 1.627454$$

$$U = \frac{\log 1,627454}{\log 1,10} = 5,11$$

Le versement unique de 80000D doit être intervenir au terme de 5 ans, 1 mois et 10 jours. Cette date correspond à l'échéance moyenne des annuités de la suite initiale.

**3. Les annuités variables**

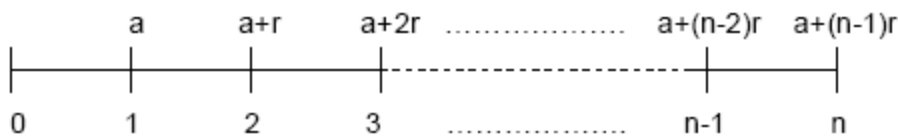
La variation de ces annuités est fondée sur une loi donnée. Il convient de distinguer deux types d'annuités variables :

- les annuités en progression arithmétique : quel que soit le terme de cette suite d'annuités, il s'obtient en ajoutant au précédent une valeur constante, notée r et appelée raison de la progression ;
- les annuités en progression géométrique : chaque terme de cette suite s'obtient en multipliant le précédent par une valeur, notée q, qui constitue la raison de la progression.

**3.1. Les annuités en progression arithmétique**

**3.1.1. La valeur acquise**

La valeur acquise  $V_n$  au taux d'intérêt  $i$  d'une suite de  $n$  annuités de fin de période en progression arithmétique désigne la somme des valeurs acquises par chacune de ces annuités, déterminée immédiatement après le versement de la dernière.



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + \dots + (a+(n-2)r)(1+i) + (a+(n-1)r)$$

$$V_n = a [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1] + r[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \dots + (n-2)(1+i) + (n-1)]$$

La première partie du membre à droite représente la somme de  $n$  termes en progression arithmétique de raison  $(1+i)$ , de premier terme : 1. Si l'on désigne la somme des termes en  $r$  par  $S$ ,  $V_n$  devient :

$$V_n = a \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + r \cdot S \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Avec } S = (1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \dots + (n-2)(1+i) + (n-1) \dots \dots \dots (2)$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par  $(1+i)$ :

$$S(1+i) = (1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \dots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i) \dots \dots \dots (3)$$

La différence, membre à membre et terme à terme de même ordre, entre les égalités (2) et (3) s'écrit :

$$S(1+i) - S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)$$

$$Si = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) - n$$

Les termes de la somme délimitée par la ligne forment une progression géométrique de  $n$  termes, de raison :  $(1+i)$ , de premier terme : 1.

$$Si = \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n$$
$$S = \frac{1}{i \left[ \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - n \right]}$$

Transposons à présent la valeur de S dans l'égalité (1):

$$V_n = \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) \right] - \left[ \frac{n \cdot r}{i} \right]$$

Cette formule permet de calculer la valeur acquise par une suite d'annuités différées, dont les termes sont en progression arithmétique.

### 3.1.2. La valeur actuelle

La valeur actuelle  $V_0$  au taux d'intérêt  $i$  d'une suite de  $n$  annuités de fin de période en progression arithmétique désigne la somme des valeurs actuelles de chacune des annuités, exprimée une période avant le premier versement.

La valeur actuelle résulte de l'actualisation de la valeur acquise :

$$V_0 = V_n (1+i)^{-n}$$

Remplaçons par  $V_n$  par l'expression établie précédemment :

$$V_0 = \left[ \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) \right] - \left[ \frac{n \cdot r}{i} \right] \right] (1+i)^{-n}$$

Ajoutons et retranchons  $nr/i$ , il vient :

$$V_0 = \left[ \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) \right] - \left[ \frac{n \cdot r}{i} \right] \right] (1+i)^{-n} + \left[ \frac{n \cdot r}{i} \right] - \left[ \frac{n \cdot r}{i} \right]$$
$$V_0 = \left[ \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) \right] \right] + nr \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] - \frac{nr}{i}$$

$$V_0 = \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) + nr \right] - \frac{nr}{i}$$

#### Exemple:

Calculer les valeurs acquise et actuelle d'une suite d'annuités dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = 12000$ ,  $r = 1200$ ,  $i = 0,08$ ,  $n = 10$  ;

– Calcul de la valeur acquise :

$$V_n = \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) \right] - \left[ \frac{n \cdot r}{i} \right]$$

$$V_{10} = \left[ \frac{(1,08)^{10} - 1}{0,08} \right] \left[ 12000 + \left( \frac{1200}{0,08} \right) \right] - \left[ \frac{10 \times 1200}{0,08} \right]$$

$$V_{10} = 241137,19$$

– Calcul de la valeur actuelle:

$$V_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = V_{10}(1+i)^{-10}$$

$$V_0 = 241137,19(1,08)^{-10}$$

$$V_0 = 111693,13$$

Ou

$$V_0 = \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \left[ a + \left( \frac{r}{i} \right) + nr \right] - \frac{nr}{i}$$

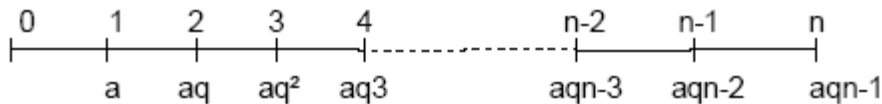
$$V_0 = \left[ \frac{1 - (1,08)^{-10}}{0,08} \right] \left[ 12000 + \left( \frac{1200}{0,08} \right) + 10 \times 1200 \right] - \frac{10 \times 1200}{0,08}$$

$$V_0 = 111693,13$$

### 3.2. Les annuités en progression géométrique

#### 3.2.1. La valeur acquise

La valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période en progression géométrique désigne la somme des valeurs acquises de chacune de ces annuités, déterminées immédiatement après le versement de la dernière.



Les termes de cette somme sont donc les suivants:

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + \dots + aq^{n-2}(1+i) + aq^{n-1}$$

Les termes du membre de droite forment une progression géométrique dont  $a(1+i)^{n-1}$  est le premier terme,  $n$  est le nombre de termes,  $q/(1+i)$  est la raison.

La somme de ces termes s'obtient directement par :

$$V_n = a \left[ (1+i)^{n-1} \frac{\left[ \frac{q}{1+i} \right]^n - 1}{\left[ \frac{q}{1+i} \right] - 1} \right]$$

$$V_n = a \left[ (1+i)^{n-1} \frac{\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q - (1+i)}{(1+i)}} \right]$$

$$V_n = a \left[ (1+i)^{n-1} \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \times \frac{(1+i)}{(1+i)^n} \right]$$

$$V_n = a \left[ \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} \right]$$

$$V_n = a \left[ \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \right]$$

### 3.2.2. La valeur actuelle

On sait que:

$$V_0 = V_n (1+i)^{-n}$$

Alors:

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left[ \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \right]$$

#### Remarque:

Ces formules permettent de calculer les valeurs acquise et actuelle par une suite d'annuités dont les termes sont en progression géométrique et si la raison  $q$  est différente de  $(1+i)$ .

Dans le cas où  $q = 1+i$ , les formules deviennent ainsi :

La valeur acquise :  $V_n = n \cdot a(1+i)^{n-1}$

La valeur actuelle :  $V_0 = V_n(1+i)^{-n} = n \cdot a(1+i)^{n-1} \times (1+i)^{-n}$

$$V_0 = n \cdot a(1+i)^{-1}$$

$$V_0 = \frac{n \cdot a}{(1+i)}$$

$$V_0 = \frac{n \cdot a}{q}$$

#### Exemple :

Déterminer les valeurs acquises et actuelle au taux de 8% d'une suite de 10 annuités qui progressent au rythme de 5% et dont le premier versement est égal à 6000 D. Même question avec un taux de croissance de 8%.

Solution :

- **Le taux de croissance de 5%, donc  $q = 1,05$**

- Valeur acquise :

$$V_n = a \left[ \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \right]$$

$$V_{10} = 6000 \left[ \frac{1,05^{10} - (1,08)^{10}}{1,05 - 1,08} \right]$$

$$V_{10} = \mathbf{106006,07}$$

Valeur actuelle :

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left[ \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} \right]$$

## CHAPITRE 5 : les annuités

---

$$V_0 = \frac{6000}{(1,08)^{10}} \times \left[ \frac{1,05^{10} - (1,08)^{10}}{1,05 - 1,08} \right]$$

$$V_0 = \frac{106006,07}{(1,08)^{10}}$$

$$V_0 = \mathbf{49101,32}$$

- Le taux de croissance de 8%, donc  $q=i+1=1,08$ .

Valeur acquise :

$$V_n = n \cdot a(1+i)^{n-1}$$

$$V_{10} = 10 \times 6000(1,08)^{10-1}$$

$$V_{10} = \mathbf{119940,28}$$

Valeur actuelle :

$$V_0 = \frac{n \cdot a}{q}$$

$$V_0 = \frac{10 \times 6000}{1,08}$$

$$V_0 = \mathbf{55555,56}$$

### Exercices :

#### Exercice 1 :

Une personne verse, à intervalles réguliers égaux à 1 an, des sommes constantes de montant 10.000€ chacune, à un organisme de capitalisation. Taux d'intérêt : 10%. Date du premier versement : 01/12/2009 ; date du dernier versement : 01/12/2024. Calculer le montant du capital constitué :

1. à la date du 01/12/2024,
2. à la date du 01/12/2025. On rappelle que le dernier versement est daté du 01/12/2024. On suppose que le titulaire du capital constitué le 01/12/2024 n'a pas retiré ce capital,
3. à la date du 01/12/2029 ; même hypothèses qu'en (2).

#### Exercice 2 :

1. Dix annuités de 1.000€ chacune ont une valeur acquise de 15.800€. calculer le taux de capitalisation.
2. « n » annuités de 25.000€ chacune, capitalisées à 11%, ont une valeur acquise de 400.000€. calculer « n ».
3. Calculer la valeur acquise de 10 versements, de chacun 10.000€, effectués tous les deux ans. Taux annuel d'intérêt : 8,5%.

## **CHAPITRE5 : les annuités**

---

### **Exercice3 :**

1. Calculer à la date du 15 octobre 2011 la valeur d'une suite d'annuités de chacune 12.500€, date de versement de la première : 15octobre2012 ; date de versement de la dernière : 15 octobre 2024. Taux : 10,5%.
2. Calculer la valeur de cette même suite d'annuités à la date du 15 octobre 2009. Même taux .

### **Exercice4 :**

1. 18 annuités constantes ont une valeur à l'origine de 300.000€. taux : 12%. Calculer l'annuité.
2. 14 annuités de 50.000€ chacune ont une valeur actuelle de 400.000€. calculer de taux ;

### **1. Typologie des investissements :**

Le plan comptable classe les investissements en fonction de leur destination dans les immobilisations. Trois classes sont définies : investissements incorporels, corporels et financiers.

Bien que cette classification n'apporte aucune information à propos de la nature de la politique d'investissement de l'entreprise, elle permet, toutefois de bien saisir la diversité des projets.

Différentes catégories peuvent être distinguées en fonction de la nature ou l'objet lié à la nature de l'entreprise.

**Selon l'objet**, on peut distinguer quelques catégories :

**1.1. Les investissements de remplacement :** sont destinés à renouveler les actifs productifs usés ou obsolètes afin de maintenir le potentiel productif de l'entreprise.

**1.2. Les investissements d'expansion (croissance) :** qui permettent à l'entreprise d'accroître la capacité de production et de commercialisation des produits existants.

**1.3. L'investissement de productivité :** les investissements de productivité visent à réduire les coûts unitaires ou à augmenter les niveaux de production, ils se combinent généralement avec l'investissement de remplacement.

**1.4. L'investissement stratégique :** à caractère défensif ou offensif.

**Selon la nature**, on distingue :

**1.5. L'investissement commercial :** il comprend tout ce qui concourt au positionnement de produit ainsi que dans le développement de ses ventes.

**1.6. L'investissement financier :** concerne l'acquisition des titres financiers afin d'obtenir un revenu.

**1.7. L'investissement immatériel :** comprend essentiellement les dépenses en capital humain et les dépenses liées à la recherche et au développement.

### **2. Les paramètres d'un projet d'investissement :**

Le problème d'investissement revient à sélectionner des projets en comparant le coût de l'investissement  $I_0$  et ce qu'il peut rapporter, c'est à dire les gains futurs espérés. La connaissance de ces flux est indispensable à la préparation de la décision.

#### **2.1. Le capital investi**

L'ensemble des dépenses directes ou indirectes nécessaires à la réalisation du projet doit être évalué :

- Prix d'acquisition des biens incorporels et financiers,
- Frais accessoires d'achat, de transport, de douane, de manutention, d'installation...
- Augmentation des besoins de financement d'exploitation (BFE).

En ce qui concerne l'augmentation du BFE, un projet d'investissement conduit à une augmentation de l'activité et donc du BFE. La prévision de cette augmentation est nécessaire. L'investissement initial et l'augmentation du BFE initiale sont engagés en début du premier exercice (ou des exercices pour lesquels ils sont engagés). Rappelons qu'en fin de projet, le BFE est récupéré, car les stocks sont liquidés, les créances clients sont recouvrées et les dettes fournisseurs réglées.

### **2.2. Cash-flow ou solde des flux de trésorerie induits par le projet**

Il s'agit du surplus monétaire créé par l'investissement. Conventionnellement, l'année sert de base périodique pour le mesurer bien que ce soit un phénomène continu. Ce surplus est mesuré sur la durée de vie de l'immobilisation acquise. Il est égal à la différence entre les recettes et les dépenses induits par le projet.

Les cash-flows sont le résultat de prévisions de chiffres d'affaires, des différents coûts d'exploitation et des impôts. Ils sont dégagés de façon continue tout au long d'un exercice. Afin de simplifier les calculs, on considérera qu'ils sont dégagés en fin d'exercice. Ils sont aussi calculés en tenant compte de la fiscalité (IS, TVA...)

$$\begin{aligned} \text{Cash flow} &= \text{recettes induites du projet} - \text{dépenses induites du projet} \\ &= \text{produits encaissables} - \text{charges décaissables} \\ &= \text{capacité d'autofinancement d'exploitation} \end{aligned}$$

Comme on peut écrire aussi :

$$\text{CAF d'exploitation} = \text{résultatnet} + \text{dotations d'exploitation}$$

On a donc :

$$\text{Cash flow} = \text{résultatnet} + \text{dotations d'exploitation}$$

Les cash-flows prévisionnels correspondent au flux de trésorerie net engendré chaque année par l'exploitation du projet, leur détermination se fait au niveau du compte de produits et charges prévisionnels.

$$\begin{aligned} C.F &= \text{Résultat prévisionnel avant charges et après impôts} \\ &+ \text{dotations aux investissements d'exploitation} \end{aligned}$$

### **2.3. La durée de vie du projet**

Un projet a une durée de vie qui conditionnera l'échéancier des cash-flows. Généralement, la durée de vie économique d'un projet excède la durée d'amortissement fiscal.

### **2.4. La valeur résiduelle**

A la fin de la durée de vie, les biens ont une valeur résiduelle. Cette valeur est à prendre en compte pour le choix des projets.

Elle est égale à la valeur vénale nette des impôts sur les plus values. Elle doit être ajoutée au cash flow de la dernière année du projet

### 3. Les critères de choix d'investissement en univers certain

Ces méthodes considèrent que le cadre de décision est reconnu et que l'avenir est prévisible. Elles comparent la dépense initiale aux recettes attendues dans les années à venir.

Mais cette comparaison doit se faire à la même date, en général, la date 0. La technique d'actualisation (traduction économique de la valorisation du présent par rapport au futur) permettra notamment de comparer des projets d'investissement à durée de vie différente. Toutefois, il convient de choisir un taux d'actualisation qui est lié à des facteurs subjectifs (attentes et exigences de l'investisseur) et objectifs (coût de capital, rentabilité des actifs ...)

#### 3.1. La valeur actuelle nette (VAN)

Elle est égale à la différence entre les flux nets de trésorerie actualisés sur la durée de vie de l'investissement et le montant du capital.

***VAN = cash-flows actualisés – Investissement initial***

En cas de cash-flows constants

$$VAN = -I + CF \times \left[ \frac{1 - (1 + t)^{-n}}{t} \right]$$

En cas de cash-flows variables

$$VAN = -I + \sum_{i=1}^n CF(1 + t)^{-i}$$

Avec :

**I** : l'investissement initial ;

**CF** : cash-flow ;

**n** : durée de vie,

**t** : taux d'actualisation.

La valeur actuelle nette mesure l'avantage absolu susceptible d'être retiré d'un projet d'investissement. Elle dépend donc de l'importance du capital investi dans le projet. Elle constitue :

- Un critère de rejet pour tout projet dont elle est négative ;
- Un critère de sélection entre deux projets, sera retenu celui dont la VAN est la plus forte.

#### 3.2. Le Taux Interne de Rentabilité (TIR)

Le taux interne de rentabilité TIR est le taux pour lequel la valeur actuelle nette est nulle. Autrement dit, c'est le taux qui rend égaux le montant de l'investissement et les cash-flows induits par ce même investissement.

$$I = \sum_{i=1}^n CF(1 + t)^{-i}$$

Le TIR constitue :

- Un critère de rejet pour tout projet dont le TIR est inférieur au taux d'actualisation – plancher requis par l'investisseur.
- Un critère de sélection entre deux ou plusieurs projets pour retenir le projet dont le TIR est le plus élevé.

### **Remarque**

Si le TIR est égal au taux d'actualisation, le projet est neutre à l'égard de la rentabilité globale de l'entreprise. Par contre, si le TIR est inférieur, la réalisation du projet entraînera la chute de la rentabilité globale de l'entreprise.

Lorsque plusieurs projets sont en compétition, l'application des deux méthodes peut parfois conduire à des conclusions différentes. La VAN est une fonction décroissante du taux d'actualisation. Les VAN de deux projets se coupent en un taux-pivot pour lequel les VAN sont égales. Le croisement des courbes provient du fait que les échéanciers des cash-flows sont différents. Le choix dépendra des objectifs de l'investisseur. Celui ayant des besoins de trésorerie privilégiera les investissements générant des flux de trésorerie les plus immédiats. Au contraire, l'investisseur n'ayant pas des besoins de trésorerie privilégiera une rentabilité meilleure mais plus éloignée.

### **3.3. L'Indice de profitabilité (IP)**

Il mesure le profit induit par un dirham du capital investi. Il mesure l'avantage relatif susceptible d'être retiré d'un projet d'investissement. Il constitue un critère de rejet pour tout projet dont l'indice est inférieur à 1. Pour deux ou plusieurs projets, sera celui dont l'indice de profitabilité est le plus élevé.

$$IP = \sum_{i=1}^n \frac{CF(1+t)^{-i}}{I}$$

### **3.4. Le Délai de Récupération du capital investi (DRC)**

Il correspond au délai au bout duquel le montant cumulé des cash-flows actualisés est égal au montant du capital investi ; c'est le délai le plus court possible. Il constitue un critère de rejet pour tout projet dont le DRC est supérieur à la norme fixée par l'entreprise. Au niveau de la comparaison entre deux projets, sera retenu celui dont le DRC est le plus court.

L'utilisation du DRC en tant que critère de sélection n'est valable que pour des projets à durée de vie identique.

### **Remarque :**

Lorsque des projets ont une durée de vie différente, les critères utilisés précédemment deviennent non pertinents. En effet, l'hypothèse sous-jacente à l'utilisation de ces critères est que les cash-flows dégagés par l'investissement sont capitalisés (réinvestis au fur et à mesure de leur sécrétion).

Dans le cas de la VAN, de l'IP et du DRC, ce réinvestissement se fait au taux qui correspond au coût moyen de financement, ou du taux de rendement minimum attendu par les

actionnaires. Mais, dans le cas du TIR, le taux calculé est un taux de rentabilité marginal, souvent très élevé, qui ne correspond qu'à un investissement ponctuel. Cette nuance peut entraîner des discordances entre les résultats obtenus par les différents critères. En outre, ces discordances peuvent être dues à une répartition différente des cash-flows ou par des durées de vie inégales des projets.

### 4. Les critères de choix d'investissement en avenir aléatoire :

En situation d'incertitude, certains événements sont connus mais leur réalisation n'est pas certaine alors que d'autres sont inconnus. Dans le cas des premiers, il est possible de leur attribuer une probabilité d'occurrence parce qu'ils sont scientifiquement connus. La prévision des cash-flows peut être réalisée à partir de plusieurs hypothèses relatives à l'environnement. Ainsi, généralement on établit une hypothèse optimiste, une hypothèse moyenne et une hypothèse pessimiste.

A chacune de ces hypothèses correspond une série de cash-flows à partir de laquelle on applique les différents critères d'évaluation.

Si, dans le cas de l'hypothèse pessimiste le projet s'avère rentable, il peut alors être accepté sans problème car le risque devient alors très faible. Dans le cas contraire, la décision dépend du degré d'aversion pour le risque du décideur.

Mais, cette analyse peut être affinée en recourant aux probabilités, chacune des hypothèses pouvant être probabilisée, dans ce cas, on peut calculer l'espérance mathématique  $E(VAN)$ , la variance et l'écart-type de la VAN d'un projet.

L'espérance mathématique peut alors représenter une mesure de la rentabilité du projet, tandis que la variance (ou l'écart-type) permettra plutôt d'apprécier le risque que représente le projet.

Néanmoins, le recours aux probabilités est plus ou moins complexe selon que les cash-flows sont ou non interdépendants.

#### 4.1. Décisions uniques

Lorsque les variables (cash-flows) sont indépendants, l'espérance mathématique de la VAN est égale à la VAN des espérances mathématiques des cash-flows.

Si l'on appelle  $n$  la durée du projet,  $t$  le taux d'actualisation.

$$\begin{aligned} VAR(VAN) &= VAR(-I) + VAR(CF_1)(1+t)^2 + \dots + VAR(CF_n)(1+t)^{-2n} \\ &= VAR(-I) + \sum_{i=1}^n VAR(CF_i)(1+t)^{-2i} \end{aligned}$$

Avec  $VAR(-I) = 0$  ; ( $I$  est constante) et  $VAR(CF_i) = \sum_{j=1}^m (CF_{ji} - E(CF_i))^2 \times P_{ji}$

Plus la variance, l'écart-type est élevé, plus le risque du projet pris isolément n'est grand.

Quand on compare des projets de montants différents, on peut mesurer le risque relatif de chaque projet en établissant le rapport :

$$\frac{\text{Ecart – type(VAN)}}{\text{Espérance(VAN)}}$$

Plus ce rapport appelé coefficient du risque est bas, plus le risque relatif du projet est faible.

On accepte le projet lorsque l'espérance mathématique de la VAN est positive. Entre plusieurs projets, on retient celui qui possède l'espérance mathématique la plus élevée.

Mais, le critère de l'espérance ne tient pas compte de la dispersion et donc du risque attaché à la distribution de probabilités. C'est pourquoi, le recours au calcul de la variance permet de mesurer le risque du projet et de le comparer à la norme fixée en la matière.

Si la variance ou l'écart-type est supérieur à cette norme, le projet peut être rejeté. Entre plusieurs projets, on est finalement amené à comparer les différentes espérances mathématiques en tenant compte du risque lié à ces projets.

### **4.2. Décisions séquentielles (Variables interdépendants)**

La décision n'est pas toujours unique, elle peut apparaître sous la forme de choix successifs alternant avec une série de conséquences possibles.

Le décideur est confronté à plusieurs opportunités, chacune pouvant entraîner des événements différents auxquels il est possible d'attacher des probabilités de réalisation. Le décideur peut répondre à chaque événement au moyen d'une décision appropriée qui, elle-même, aura un certain nombre de conséquences (événements) également prévisibles, et pondérables, et ainsi de suite. La connaissance des probabilités associées à chaque événement et du résultat engendré par chaque opportunité (décision) rend possible le calcul de l'espérance de gain associée à chaque décision. C'est le principe de *l'arbre de décision*.

Un arbre de décision permet une représentation visuelle de la série de choix successifs. Deux contraintes doivent être respectées :

- Contraintes d'exclusivité : les décisions doivent être exclusives les unes des autres.
- Contraintes d'exhaustivité : l'ensemble des décisions possibles doit être envisagé.

### **5. Choix d'investissement en avenir incertain**

Lorsque l'investisseur ne peut attribuer des probabilités objectives aux différentes issues possibles pour ses projets, il n'a comme recours que les critères subjectifs. En se basant sur son expérience et sur son intuition, l'investisseur peut attribuer une probabilité subjective aux différentes situations et à leurs conséquences. Notamment, le projet peut provoquer des réactions de la part des entreprises concurrentes. Sa décision dépendra ensuite de son attitude face au risque.

Ce cadre de décision prenant en compte le risque et les réactions des autres acteurs est précisément celui étudié dans la théorie des jeux. Plusieurs critères peuvent alors s'appliquer au choix d'investissement.

Soit le cas d'une entreprise placée en situation d'oligopole et assurant 20% de la production du marché, le reste se partageant entre les autres concurrents de taille équivalente. Pour accroître sa part de marché, elle doit choisir entre trois stratégies d'investissement :

- 1) Lancement d'un produit nouveau,

## CHAPITRE6 : Critères de choix d'investissements

---

- 2) Lancement d'une campagne de publicité agressive,
- 3) Politique de réduction des coûts.

La réaction de la concurrence peut être forte, moyenne ou faible. En fonction de ces paramètres, les dirigeants peuvent établir une matrice des résultats possibles en termes de VAN par exemple.

Réactions \ Stratégies	R1	R2	R3
S1	-800	700	1500
S2	-200	500	1300
S3	-100	500	1100

La théorie des jeux propose plusieurs critères d'aide à la décision suivant l'attitude des dirigeants face au risque.

### 5.1. Critère du MAXIMIN

C'est un critère de prudence qui tente de minimiser les pertes éventuelles en prenant le résultat minimum le plus élevé.

Si  $S1=-800$ ,  $S2=-200$  et  $S3=-100$ , on choisit la troisième stratégie.

### 5.2. Critère du MAXIMAX

On sélectionne les gains les plus élevés de chacune des stratégies. On choisit le résultat maximum le plus élevé.

Si  $S1=1500$ ,  $S2=1300$  et  $S3=1100$ , on choisit la première stratégie qui est la plus audacieuse.

### 5.3. Critère du MINIMAX

On sélectionne le projet qui procure le plus petit des résultats les plus élevés

Si  $S1=1500$ ,  $S2=1300$  et  $S3=1100$ , on choisit la troisième stratégie.

### 5.4. Critère de Laplace

La meilleure décision est celle pour laquelle la moyenne arithmétique des résultats prévisionnels est la plus élevée (toutes les situations étant équiprobables).

Pour  $S1 : (-800+700+1500)/3=466,66$

Pour  $S2 : (-200+500+1300)/3=533,33$

Pour  $S3 : (-100+500+1100)/3=500$

On choisit donc la deuxième stratégie.

### 5.5. Critère de Savage

On calcule pour chaque cas, le regret correspondant à la différence entre le cas le plus favorable et le cas étudié. Comme on recherche la prudence, on choisit la décision où le regret maximum est le plus faible.

## CHAPITRE 6 : Critères de choix d'investissements

Réactions Stratégies	R1	R2	R3	Regret max
S1	$-100 - (-800) = 700$	$700 - 700 = 0$	$1500 - 1500 = 0$	700
S2	$-100 - (-200) = 100$	$700 - 500 = 200$	$1500 - 1300 = 200$	200
S3	$-100 - (-100) = 0$	$700 - 500 = 200$	$1500 - 1100 = 400$	400

On choisit donc la deuxième stratégie

On ne peut que constater que ces critères conduisent à des choix différents, car ils sont personnels et dépendent des appréciations des individus.

Bref, quelle que soit la situation, l'utilisation des critères de choix ne peut pas prévaloir dans la décision en raison de leur de fiabilité. Tout aussi importantes sont l'expérience du décideur, de son équipe et les impératifs stratégiques.

### Exercices :

#### Exercice 1:

Un ami vous propose de vendre votre machine pour un investissement de 2000 D (correspondant à sa valeur résiduelle) dans un projet ayant un cash-flow qui double chaque période sur une base de 400 D assurée pendant 3 périodes alors que le taux moyen géométrique d'intérêt du marché est de 5%.

- Calculer la VAN
- Calculer le TRI.

#### Exercice 2:

La société X désire diversifier sa production en fabricant un produit nouveau A. pour ce faire, les dirigeants hésitent entre deux matériels  $\alpha$  et  $\beta$ . Tous les deux ont des durées de vie équivalentes de cinq ans. Quel que soit le choix fait,  $\alpha$  et  $\beta$  sont capables d'assurer la production désirée. La différence entre les deux machines et l'hésitation des dirigeants tient au fait que  $\alpha$  est un matériel d'occasion et que  $\beta$  est un nouveau matériel susceptible d'être amorti selon le mode dégressif. Par ailleurs, il est à prévoir que la machine  $\alpha$  demandera des réparations.

*Eléments d'informations*

- Prix HT de  $\alpha$  : 200 000 D ;
- Prix HT de  $\beta$  : 300 000 D ;
- Valeurs résiduelles nulles au bout de 5 ans ;
- Prix de vente unitaire A : 8 D ;
- Coût de fabrication (sans amortissement) : 5 D ;
- Volume prévisionnel des ventes du produit A :

Année	Année	Année	Année	Année
1	2	3	4	5
20 000	50 000	80 000	100 000	100 000

## **CHAPITRE6 : Critères de choix d'investissements**

---

Dépenses prévisionnelles d'entretien du matériel  $\alpha$  :

Année	Année	Année	Année	Année
1	2	3	4	5
10 000	30 000	40 000	40 000	40 000

Coefficient d'amortissement dégressif utilisé pour  $\beta$  : 2 ;

- Amortissement linéaire pour  $\alpha$  ;

- Les matériels sont livrés et payés le premier jour de la première année ;

- L'impôt sur les sociétés est acquitté à la fin de chaque année, il est de 50% ;

**TAF** : il vous est demandé, compte tenu des éléments ci-dessus de :

1. De déterminer les cash flows annuels générés par  $\alpha$  et  $\beta$  ;
2. De conseiller les dirigeants sur le choix à opérer sachant que le taux d'actualisation de référence est de 12% ;
3. D'indiquer si la décision serait modifiée pour le cas où  $\beta$  serait amorti de manière linéaire

### 1. Les emprunts indivis

#### 1.1. Définition :

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.

Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période.

Chaque annuité est composée de deux éléments:

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

#### 1.2. Remboursement d'un emprunt

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	$C_0$	$I_1 = C_0 \times i$	$m_1$	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \times i$	$m_2$	$a_2 = I_2 + m_2$
P	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \times i$	$m_p$	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \times i$	$m_{n-1}$	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \times i$	$m_n$	$a_n = I_n + m_n$

Avec:

$C_0$  : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.

$I_p$  : intérêt de la  $p^{\text{ème}}$  période.

$m_p$  : amortissement de la  $p^{\text{ème}}$  période.

$a_p$  : annuité de la  $p^{\text{ème}}$  période.

$C_{p-1}$ : capital restant dû au début de la  $p^{\text{ème}}$  période.

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital :

$$\sum_{p=1}^n m_p = C_0$$

Après le paiement du  $n^{\text{ème}}$  amortissement  $m_n$ , le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de  $m_n$  est égale à  $m_n$  c'est à dire  $C^{n-1} = m_n$

## CHAPITRE 7 : Les emprunts et leurs amortissements

### 1.2.1 Relation entre deux annuités successives :

$$a_p = m_p + I_p = m_p + (C_{p-1} \times i)$$

$$a_{p+1} = m_{p+1} + I_{p+1} = m_{p+1} + (C_p \times i)$$

$$a_{p+1} - a_p = [m_p + (C_{p-1} \times i)] - [m_{p+1} + (C_p \times i)]$$

$$a_{p+1} - a_p = m_p - m_{p+1}(1 + i)$$

### 1.2.2. Remboursement in fine (à la fin de la durée d'emprunt) :

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (**I**) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

Tableau d'amortissement

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement t	Annuité de fin de période
1	$C_0$	$I_1 = I = C_0 \times i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	$C_0$	$I_2 = I = C_0 \times i$	---	$a_2 = I_2 = I$
P	$C_0$	$I_p = I = C_0 \times i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	$C_0$	$I_{n-1} = I = C_0 \times i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	$C_0$	$I_n = I = C_0 \times i$	$C_0$	$a_n = I_n + C_0$ $= I + C_0$

### 1.2.3. Remboursement par annuités constantes :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement t	Annuité de fin de période
1	$C_0$	$I_1 = C_0 \times i$	$m_1$	$a = a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \times i$	$m_2$	$a = a_2 = I_2 + m_2$
P	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \times i$	$m_p$	$a = a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \times i$	$m_{n-1}$	$a = a_{n-1}$ $= I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \times i$	$m_n$	$a = a_n = I_n + m_n$

On a,  $a_1 = a_2 = \dots = a_p = \dots = a_n = a$

et,  $a = I_n + m_n = m_n + C_{n-1} \times i \Leftrightarrow a = m_n + m_n \times i$

$$a = m_n(1 + i)$$

**1.2.3.1. Loi de succession des amortissements :**

On a :  $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p(1 + i)$

Et  $a_{p+1} = a_p$

Alors :  $m_{p+1} = m_p(1 + i)$

D'après la relation précédente, on aura:

$$m_2 = m_1(1 + i)$$

$$m_3 = m_2(1 + i) = m_1(1 + i)^2$$

$$m_4 = m_3(1 + i) = m_1(1 + i)^3$$

$$m_p = m_1(1 + i)^{p-1}$$

On a :

$$m_n = m_1(1 + i)^{n-1}$$

Or,  $a = m_n(1 + i)$

D'où,  $a = m_1(1 + i)^{n-1}(1 + i)$

Donc :

$$a = m_1(1 + i)^n$$

**1.2.3.2. Relation entre  $C_0$  et le premier amortissement ( $m_1$ )**

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_n$$

$$C_0 = m_1 + m_1(1 + i) + m_1(1 + i)^2 + m_1(1 + i)^3 + \dots + m_1(1 + i)^{n-1}$$

$$C_0 = m_1[(1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \dots + (1 + i)^{n-1}]$$

$$C_0 = m_1 \left[ \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

Et :

$$m_1 = C_0 \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

### 1.2.3.3. Relation entre $C_0$ et l'annuité constante (a)

La valeur actuelle des annuités =  $C_0$

$$C_0 = a \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Et :

$$a = C_0 \left[ \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right]$$

#### Exemple :

Le tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par annuités constantes indique que les intérêts payés l'avant dernière année s'élèvent à 12300 dinars et les intérêts payés la dernière année sont égaux à 6300 dinars. Enfin, la différence entre les intérêts de la 1<sup>ère</sup> année et ceux de la 2<sup>ème</sup> année s'élève à 4061,040 dinars.

Déterminer  $i$ ,  $a$ ,  $m_1$  puis  $C_0$ .

#### Solution :

On a:  $I_{n-1} = 12300$  dinars =  $C_{n-2} \times i = (m_{n-1} + m_n) \times i$

$I_n = 6300$  dinars =  $C_{n-1} \times i = m_n \times i$

$I_1 - I_2 = 4061,040$  dinars =  $(C_0 \times i) - (C_1 \times i) = (C_0 - C_1) \times i = m_1 \times i$

On sait que:  $m_n = m_{n-1}(1+i)$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6300 \\ (m_{n-1} + m_n) \times i = 12300 \end{cases} \quad \begin{cases} m_n \times i = 6300 \\ (m_n \times (1+i)^{-1} + m_n) \times i = 12300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6300 \\ (m_n[1 + (1+i)^{-1}]) \times i = 12300 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1 + (1+i)^{-1}} = \frac{6300}{12300}$$

$$i = 0,05 \Rightarrow i = 5\%$$

$$m_n \times i = 6300 \Leftrightarrow m_n = 126000$$

$$a = m_n(1+i) = 126000(1+0,05) \Leftrightarrow a = 132300$$

$$I_1 - I_2 = 4061,040 = m_1 \times i \Rightarrow m_1 = \frac{I_1 - I_2}{i} = \frac{4061,040}{0,05} = 81220,800$$

## CHAPITRE 7 : Les emprunts et leurs amortissements

$$a = m_1 + C_0 \times i \Leftrightarrow C_0 = \frac{a - m_1}{i} = \frac{132300 - 81220,800}{0,05}$$

$$C_0 = 1021584$$

### 1.2.3.4. Expression de la dette amortie et non amortie après le versement de p<sup>ième</sup> annuités

Après le paiement de la p<sup>ème</sup> annuité, la partie de l'emprunt qui a été remboursée s'élève à la somme des p premiers amortissements:  $R_p$

$$R_p = [m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_p]$$

$$R_p = m_1 [(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{p-1}]$$

$$R_p = m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i} . \text{ or, } m_1 = C_0 \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$\text{Alors : } R_p = C_0 \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

Donc :

$$R_p = C_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

La dette non amortie est égale à  $C_0 - R_p$

### 1.2.4. Remboursement d'un emprunt par amortissements constants :

Soit:

$C_0$ : le montant de l'emprunt

$n$  : le nombre d'annuités

$m$  : amortissement constant

$$\begin{cases} m = \frac{C_0}{n} \\ I_p = C_{p-1} \times i \end{cases} \Rightarrow \text{Donc, les annuités ne sont pas constantes}$$

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	$C_0$	$I_1 = C_0 \times i$	$m$	$a_1 = I_1 + m$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \times i$	$m$	$a_2 = I_2 + m$
P	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \times i$	$m$	$a_p = I_p + m$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \times i$	$m$	$a_{n-1} = I_{n-1} + m$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \times i$	$m$	$a_n = I_n + m$

## CHAPITRE7 : Les emprunts et leurs amortissements

### 1.2.4.1. Loi de succession des annuités :

On a :  $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p(1 + i)$

Or:  $m_{p+1} = m_p = \frac{C_0}{n} \times i$

Donc:

$$a_{p+1} = a_p - \frac{C_0}{n} \times i$$

On remarque que les annuités sont en progression arithmétique de raison  $\left(-\frac{C_0}{n} \times i\right)$

### Exemple :

Un emprunt indivis contracté au taux annuel  $i$  est remboursable par 5 annuités:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

Les amortissements successifs  $m_1, m_2, m_3, m_4$  et  $m_5$  forment une progression géométrique de raison  $(1+k)$ ,  $k$  étant différent de  $i$ .

1) Sachant que:

- Les intérêts de la 2ème année  $I_2 = 102102$  dinars
- Les intérêts de la 4ème année  $I_4 = 55902$  dinars.
- le 2ème amortissement  $m_2 = 440000$  dinars.

Calculer  $i$

2) Déterminer le montant de l'emprunt et dresser le tableau d'amortissement.

### Solution :

1. On a  $I_2 = 102102 = C_1 \times i$

$$I_4 = 55902 = C_3 \times i$$

$$m_2 = 440000$$

$$I_2 = C_1 \times i = (C_0 - m_1) \times i = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1) \times i \\ = (m_2 + m_3 + m_4 + m_5) \times i$$

$$I_4 = C_3 \times i = [C_0 - (m_1 + m_2 + m_3)] \times i \\ = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1 - m_2 - m_3) \times i = (m_4 + m_5) \times i$$

$$D'où, I_2 = (m_2 + m_3 + m_4 + m_5) \times i = 102102 \dots\dots\dots(1)$$

$$I_4 = (m_4 + m_5) \times i = 55902 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow (m_2 + m_3) \times i = 102102 - 55902 = 46200 \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{(m_4 + m_5) \times i}{(m_2 + m_3) \times i} = \frac{55902}{46200} = 1,21$$

$$\frac{m_4 + m_4(1 + K)}{m_2 + m_2(1 + K)} = 1,21 \Leftrightarrow \frac{m_4[1 + (1 + K)]}{m_2[1 + (1 + K)]} = 1,21 \Leftrightarrow \frac{m_4}{m_2} = 1,21$$

## CHAPITRE 7 : Les emprunts et leurs amortissements

$$\text{Or, } m_4 = m_2(1 + K)^2 \Rightarrow \frac{m_4}{m_2} = \frac{m_2(1+K)^2}{m_2} = 1,21 \Leftrightarrow (1 + K)^2 = 1,21$$

$$(1 + K) = \sqrt{1,21} \Rightarrow K = 0,1$$

$$K = 10\%$$

$$\text{A partir de (3), on a: } (m_2 + m_3) \times i = 46200 \Leftrightarrow i = \frac{46200}{(m_2 + m_3)}$$

$$i = \frac{46200}{440000 + 440000(1,1)} = 0,05$$

$$\text{Donc : } i = 5\%$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_1(1 + K) + m_1(1 + k)^2 + m_1(1 + k)^3 + m_1(1 + k)^4$$

$$C_0 = m_1 \frac{(1+K)^5 - 1}{K} \quad \text{or} \quad m_1 = \frac{m_2}{1+K} = \frac{440000}{1,10} = 400000$$

$$C_0 = 400000 \frac{(1,1)^5 - 1}{0,1} = 2442040$$

Le tableau d'amortissement de cet emprunt se présente comme suit :

Période	Capital restant	amortissement	annuité	Intérêt
1	2442040	400000	122102	522102
2	2045040	440000	102102	542102
3	1602040	484000	80102	564102
4	1118040	532000	55902	588302
5	585640	585640	29282	614929

## 2. Les emprunts obligataires :

### 2.1. Définition :

Lorsque le montant de l'emprunt est très élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés « obligataires » ou « souscripteurs ». En effet, le montant de l'emprunt est divisé en parts égales négociables appelées obligations.

En dehors de certains cas particuliers, l'obligation donne à son détenteur le droit de percevoir un intérêt annuel (coupon) et d'être remboursé de son titre à l'échéance.

Les principes mathématiques sont identiques à ceux des emprunts indivis sauf que le capital emprunté est remboursé à différents prêteurs. Donc, pour constituer un capital de nominal  $C_0$ , l'emprunteur émet  $N$  obligations égales d'un montant  $V_N$ . On aura:

$$C_0 = V_N \times N$$

### **2.2. Les principales caractéristiques d'une obligation :**

Les obligations sont caractérisées par les éléments suivants:

- *La valeur nominale (VN)*: C'est la valeur faciale de l'obligation. Elle est unique pour toutes les obligations d'un même emprunt. Elle constitue le montant à partir duquel est établi le tableau d'amortissement et la base de calcul des intérêts.
- *La valeur d'émission (VE)*: C'est la somme effectivement payée par l'obligataire pour l'achat d'une obligation. Ce prix peut être différent du nominal. Lorsqu'il est égal au nominal, on dit que l'obligation est émise « au pair », s'il en est inférieur, on dit que l'obligation est « au-dessous du pair » alors que s'il en est supérieur, on dit que l'émission est « au-dessus du pair ». La différence entre la valeur d'émission et la valeur nominale est appelée prime d'émission.
- *La valeur de remboursement (VR)*: C'est la somme versée par l'emprunteur au moment du remboursement de l'obligation. Cette somme peut être égale à la valeur nominale, on parle dans ce cas d'un remboursement « au pair », ou supérieure à la valeur nominale et on parle alors d'un remboursement « au-dessus du pair ». La différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission est appelée prime de remboursement. Le mode de remboursement peut être:
  - En bloc ou in fine: tous les titres sont remboursés en une seule fois à l'échéance.
  - Par amortissement constant: un même nombre d'obligations tirées au sort est remboursé chaque année.
  - Par annuités sensiblement constantes: les obligations à amortir chaque année sont également tirées au sort. Les annuités ne sont pas strictement constantes parce que l'amortissement doit concerner un nombre entier d'obligations.
- *Le taux nominal (i)* : C'est la rémunération de l'obligation. On l'appelle aussi taux facial. Appliqué à la valeur nominale, il permet de calculer le montant des intérêts (coupon).
- *La date de souscription* : C'est la date de règlement de l'achat de l'obligation par le souscripteur.
- *La date de jouissance* : C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- *Le coupon (c)*: c'est le montant des intérêts servis à chaque échéance, pour chaque obligation. On a :  $c = V_N \times i$ .

### **2.3. Remboursement d'un emprunt obligataire :**

Soit :

- N: nombre des obligations émises.
- $V_E$ : prix d'émission de l'obligation.
- $V_N$ : valeur nominale de l'obligation.
- $V_R$ : valeur de remboursement de l'obligation.
- $i$  : taux du coupon.
- $c$ : coupon =  $V_N * i$ .

## CHAPITRE 7 : Les emprunts et leurs amortissements

- $N_1, N_2, \dots, N_n$  : nombre d'obligation restant en circulation après le 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup>, ..., n<sup>ème</sup> tirage. ( $N_n = 0$ ).
- $m_1, m_2, \dots, m_n$  : nombre de titres amortis au 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup>, ..., n<sup>ème</sup> tirage.
- $a_1, a_2, \dots, a_n$  : montant de l'annuité relative au 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup>, ..., n<sup>ème</sup> tirage.

Période	Dette de début de période	Intérêts	amortissements	Annuités	Nombre de titres en circulation
1	$C_0 = N \times V_N$	$N \times c$	$m_1 \times V_R$	$a_1 = N \times c + m_1 \times V_R$	$N_1 = N - m_1$
2	$C_1 = N_1 \times V_N$	$N_1 \times c$	$m_2 \times V_R$	$a_2 = N_1 \times c + m_2 \times V_R$	$N_2 = N_1 - m_2$
P	$C_{p-1} = N_{p-1} \times V_N$	$N_{p-1} \times c$	$m_p \times V_R$	$a_p = N_{p-1} \times c + m_p \times V_R$	$N_p = N_{p-1} - m_p$
n-1	$C_{n-2} = N_{n-2} \times V_N$	$N_{n-2} \times c$	$m_{n-1} \times V_R$	$a_{n-1} = N_{n-2} \times c + m_{n-1} \times V_R$	$N_{n-1} = N_{n-2} - m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = N_{n-1} \times V_N$	$N_{n-1} \times c$	$m_n \times V_R$	$\times$	$N_n = N_{n-1} - m_n$

$$N_n = N_{n-1} - m_n = 0 \Rightarrow N_{n-1} = m_n$$

Or:  $a_n = N_{n-1} \times c + m_n \times V_R = m_n \times c + m_n \times V_R = m_n \times (c + V_R)$

$$a_n = m_n \times (c + V_R)$$

$$a_{p+1} = N_p \times c + m_{p+1} \times V_R \Leftrightarrow a_{p+1} = (N_{p-1} - m_p) \times c + m_{p+1} \times V_R$$

Et  $a_p = N_{p-1} \times c + m_p \times V_R$

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= [(N_{p-1} - m_p) \times c + m_{p+1} \times V_R] - [N_{p-1} \times c + m_p \times V_R] \\ &= m_{p+1} \times V_R - m_p \times c - m_p \times V_R \\ &= m_{p+1} \times V_R - m_p \times (c + V_R) \end{aligned}$$

D'où  $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} \times V_R - V_R \times m_p \left( \frac{c}{V_R} + 1 \right)$

Posons,  $r$  : le taux d'intérêt, qui appliqué à la valeur de remboursement, nous donne le

coupon :  $r = \frac{c}{V_R}$

On aura alors,

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} \times V_R - V_R \times m_p (r + 1)$$

### 2.4. Remboursement d'un emprunt obligataire par annuités constantes

#### 2.4.1. Loi de succession des amortissements

On a  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$

Or  $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} \times V_R - V_R \times m_p (r + 1)$

D'où  $m_{p+1} \times V_R = m_p \times V_R (r + 1)$

Donc  $m_{p+1} = m_p \times (r + 1)$

Les amortissements sont en progression géométrique de raison  $(1+r)$ .

### **2.4.2. relation entre le nombre d'obligations et l'annuité (n) constante**

On peut démontrer que

$$a = N \times V_R \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

### **2.5. Remboursement d'un emprunt obligataire par amortissements constants**

Comme pour l'emprunt indivis, les annuités sont en progression arithmétique de raison

$$\left(-\frac{c_0}{n} \times i\right)$$

### 1. Evaluation des obligations

#### 1.1. Définition des obligations

Une obligation est un titre de dette, émis par une société ou par l'État, avec les caractéristiques suivantes :

- Montant emprunté (nominal)
- Taux d'intérêt (taux nominal)
- Echéance (ou maturité)
- Prix d'émission (qui peut différer du nominal)
- Valeur de remboursement (qui peut différer du nominal)
- Modalité de paiement des intérêts (coupons) : une fois par an, *in fine*
- Modalité de remboursement du capital : *amortissement constant, annuités constantes, in fine*

#### 1.2. Actualisation d'une séquence de flux

La valeur actuelle (en  $t=0$ ) d'une série de flux monétaires identiques  $A$  est obtenue à partir de l'actualisation de chaque élément de la série. Les flux peuvent être positifs ou négatifs.

- Avec  $i$  constant, on obtient pour  $n$  années:

$$VA = \sum_{t=1}^n \frac{A}{(1+i)^t}$$

Soit :

$$VA = A \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

#### Exemple :

- Un titre financier vous rapportera 50 euros par an sur les 4 prochaines années. Combien vaut ce titre, si le taux sans risque est de 4% ?

$$VA = A \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 50 \times \frac{1 - (1+0,04)^{-4}}{0,04} = 181,5 \text{ €}$$

- Et si le taux sans risque augmente à 5% ?

$$VA = A \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 50 \times \frac{1 - (1+0,05)^{-4}}{0,05} = 177,3,5 \text{ €}$$

*Quand les taux montent, le cours des obligations baisse, et inversement*

#### 1.3. Evaluer une obligation zéro coupon (un seul cash-flow) :

Une obligation zéro coupon est une obligation qui ne verse qu'un seul cash-flow, à l'échéance (la valeur de remboursement). Aucun coupon n'est versé pendant sa durée de vie.

##### 1.3.1. Intérêt des obligations zéro coupon :

- toute obligation peut être décomposée en une somme d'obligations zéro coupon d'échéances différentes.
- La valeur de l'obligation globale est égale à la somme des valeurs des obligations zéro coupon qui la composent.

##### 1.3.2. Le taux de rendement actuariel (TRA)

## CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions

### Exemple 1 :

L'obligation Grük est émise à 880 euros, et sera remboursée dans un an pour 930 euros.

Taux de rentabilité de l'obligation =  $\frac{930-880}{880} = 5,68\%$

On parle de **Taux de Rendement Actuariel** (TRA) : le taux d'intérêt équivalent pour investisseur qui garde l'obligation jusqu'à l'échéance.

On a  $TRA=i$ , tel que  $880 = \frac{930}{(1+i)^1}$

On trouve  $i = 5,68\%$

### Exemple 2 :

L'obligation NoufNouf est émise à 850 euros, et sera remboursée dans deux ans pour 970 euros.

On a  $TRA = i$ , tel que :  $850 = \frac{970}{(1+i)^2}$

On trouve  $i = 5,68\%$

### 1.3.3. Taux d'actualisation unique :

**Exemple :** une obligation ordinaire nous versera 100 € par an sur 3 ans.

– Tableau des cotations de 3 obligations zéro coupon distinctes :

Échéance	Cotation au % de valeur nominale	TRA (annuel)
1 an	95%	5,26%
2 ans	88%	6,60%
3 ans	80%	7,72%

– Comment déterminer un taux d'intérêt unique, taux d'actualisation sur 3 ans ?

#### Solution :

1) Estimer les valeurs actuelles des 3 Cash-Flows

– Cash-Flow 1 =  $100 \times 0,95 = 100 / 1,0526 = 95 \text{ €}$

– Cash-Flow 2 =  $100 \times 0,88 = 100 / 1,06602 = 88 \text{ €}$

– Cash-Flow 3 =  $100 \times 0,80 = 100 / 1,07723 = 80 \text{ €}$

– VA totale = 263 €

2) Calcul de  $i$

$n$	$i$	VA	VF	PMT	Résultat
3	?	- 263	0	100	$i = 6.88\%$

## CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions

**Conclusion :**

*Si taux différents selon les échéances*

$$VA \text{ de l'obligation} = \sum(\text{valeurs actuelles des Cash} - \text{Flows})$$

### 1.4. Evaluer une obligation ordinaire, exprimée comme une suite d'obligations zéro coupon

#### 1.4.1. Cas des obligations au pair

Prix d'émission = valeur nominale  $\Rightarrow$  rendement = taux nominal

#### 1.4.2. Cas des obligations au-dessus du pair : Cours boursier > valeur nominale

##### Exemple

- Obligation au nominal de 1000 € émise pour 20 ans au taux nominal de 10% par an. A l'époque de l'émission la courbe des taux est plate.
- Aujourd'hui (19 ans après), le cours de l'obligation est de 1047.62€. Il reste encore 1 coupon.
- Quel est son rendement ?

$$\text{Rendement actuel} = \frac{\text{coupon}}{\text{cours}} = \frac{100}{1047,62} = 9,55\%$$

Le rendement actuel ne tient pas compte du fait que l'obligataire ne recevra pas 1047.62 € mais 1000 € à l'échéance du titre.

$$\begin{aligned} \text{Rendement à l'échéance} &= \frac{\text{Coupon} + \text{Nominal} - \text{Prix d'achat}}{\text{Prix d'achat}} \\ &= \frac{100 + 1000 - 1047,62}{1047,62} = 5\% \end{aligned}$$

Le rendement à l'échéance (ou TRA) intègre la totalité des revenus perçus de l'obligation, y compris son remboursement

**Généralisation du rendement à l'échéance (TRA) à 1 nombre  $n$  de cash-flows restant à verser :**

$$\begin{aligned} VA &= \frac{\text{coupon}}{(1+i)} + \frac{\text{coupon}}{(1+i)^2} + \dots + \frac{\text{coupon}}{(1+i)^n} + \frac{\text{Nominal}}{(1+i)^n} \\ VA &= \sum_{t=1}^n \frac{\text{coupon}}{(1+i)^t} + \frac{\text{Nominal}}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

Où  $i$  = taux de rendement à l'échéance (TRA)

**Cours boursier > valeur nominale  $\Rightarrow$  rendement à l'échéance < rendement actuel < taux nominal**

#### 1.4.3. Cas des obligations en dessous du pair

Cours boursier < valeur nominale  $\Rightarrow$  rendement à l'échéance > rendement actuel > taux nominal

## CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions

### 1. Evaluation des actions

Bien que les actions soient des titres très différents des obligations, leur évaluation procède de la même démarche : la valeur d'une action est égale à la valeur actualisée de tous les flux de trésorerie qu'elle procurera dans le futur. Mais ici, contrairement aux obligations, les actions ne versent pas de sommes connues à l'avance et il n'existe pas d'échéance. L'évaluation des actions est de ce fait beaucoup plus délicate.

#### 2.1. Le modèle général du dividende actualisé :

Pour valoriser une action, il faut se placer dans la situation de l'investisseur qui l'achète et applique notre règle d'or évoquée précédemment. Il anticipe qu'elle distribuera des dividendes dans le futur et/ou que son cours dans  $n$  années ( $V_n$ ) sera plus élevé le jour où il la revendra. La valeur de l'action correspond ainsi à la valeur actualisée de ses dividendes futurs et de son prix de revente à terme, soit :

$$V_0 = \frac{D_1}{(1 + R_c)} + \frac{D_2}{(1 + R_c)^2} + \dots + \frac{D_{n-1}}{(1 + R_c)^{n-1}} + \frac{D_n}{(1 + R_c)^n} + \frac{V_n}{(1 + R_c)^n}$$

Où  $R_c$  représente le coût des fonds propres de la société, qui correspond au taux d'actualisation à utiliser. Or le cours de l'action à la date de revente,  $V_n$  est lui-même fonction des dividendes qui seront versés après la cession. En poussant la logique jusqu'au bout, la valeur d'une action est donc fonction de ses dividendes futurs, sur un horizon potentiellement infini. On parle alors de modèle du dividende actualisé ou DDM (Dividend Discount Model). Ceci nous conduit à la formule suivante :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + R_c)^t}$$

Le fait de raisonner sur un horizon infini peut, à première vue, paraître choquant car si certaines sociétés peuvent être centenaires, beaucoup n'atteignent pas une telle longévité. En fait le raisonnement sur un horizon infini n'est pas problématique car, du fait de l'actualisation, les dividendes les plus éloignés dans le temps ont une valeur actualisée qui tend vers zéro. Dès lors, l'essentiel de la valeur de l'action trouve son origine dans les dividendes qui seront versés au cours des 10 ou 20 prochaines années. Raisonner sur un horizon illimité est donc une bonne approximation de la réalité et permet de simplifier nombre de calculs.

Exemple :

Soit une société arrivée en phase de maturité dont le prochain dividende est de 10 et le coût des fonds propres est de 10 %.

On considère que le dividende sera stable dans le temps.

- Sur un horizon infini, la valeur de cette action est de :

$$V_0 = 10 / 0.10 = 100$$

- Sur un horizon de 10 ans, la valeur de l'action est de :

$$V_0 = 10 * (1 - 1.10^{-10}) / 0.10 = 61.44$$

- Sur un horizon 20 ans, la valeur de l'action est de :

$$V_0 = 10 * (1 - 1.10^{-20}) / 0.10 = 85.13$$

## CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions

- La valeur d'une action ayant une durée de vie illimitée est donc constituée à 61% par la valeur des dividendes des 10 premières années, et à 85 % par celle des 20 premières années

### 2.2. Le modèle du dividende actualisé à croissance unique :

Dans le modèle général, le dividende peut être variable, c'est-à-dire qu'il peut augmenter ou diminuer d'une année sur l'autre. Dans le cas de sociétés cotées, on observe cependant une certaine régularité dans les distributions des dividendes. Alors que les résultats de ces entreprises peuvent être relativement variables d'un exercice sur l'autre, les dirigeants ont tendance à lisser les dividendes.

Il est donc possible, dans certains cas, de faire l'hypothèse que l'action à évaluer distribuera un dividende en augmentation constante chaque année de  $g$  pourcents, toujours sur un horizon infini. La valeur de l'action est alors de :

$$V_0 = \frac{D_1}{(1+R_c)} + \frac{D_1(1+g)}{(1+R_c)^2} + \frac{D_1(1+g)^2}{(1+R_c)^3} + \dots = D_1 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+R_c)^t}$$

Or, lorsque  $n$  tend vers l'infini et que  $R_c$  est supérieur à  $g$ , cette équation devient :

$$V_0 = \frac{D_1}{(R_c - g)}$$

Ce modèle est généralement appelé modèle de Gordon-Shapiro, du nom des deux universitaires américains qui en sont à l'origine. Comme nous le verrons plus loin, sa simplicité de mise en œuvre est également sa faiblesse. **Il ne convient que dans le cas très particulier des sociétés dont l'activité est arrivée à maturité.**

#### Exemple :

En janvier 2006, le dividende anticipé par le marché boursier de Paris pour Danone est de 1.74 euro. La société étant sur un secteur relativement mature, il est possible de faire l'hypothèse que son dividende va croître à l'avenir au taux de 3 % par an. Sachant que son coût des fonds propres est de 5.4 %, la valeur de l'action est :

$$\text{Valeur action} = 1.74 / (0.054 - 0.03) = 72.5 \text{ €}$$

Début 2006, le cours de l'action est de 83 euros, ce qui est relativement proche de la valeur obtenue.

Le taux de croissance  $g$  est l'élément central de ce modèle. Une modification d'un point de ce dernier peut avoir un impact très fort sur la valeur de l'action. Comment l'estimer ? Tout d'abord, il faut avoir présent à l'esprit qu'il représente le taux de croissance moyen, à très long terme des bénéfices et dividendes de l'entreprise. Dès lors, une simple moyenne des taux de croissance passés de l'entreprise n'est pas nécessairement pertinente.

D'un point de vue économique, une société ne peut avoir une croissance durablement supérieure à celle de l'économie en général. Peu après la publication de l'article Gordon et Shapiro, un analyste financier qui se croyait plus intelligent que deux universitaires réunis publia un article particulièrement critique sur leur modèle où il montrait qu'en l'appliquant à IBM, et en retenant son taux de croissance des bénéfices de l'année écoulée (très élevé à

## CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions

l'époque), on aboutissait à une capitalisation boursière supérieure à celle du PNB américain avant la fin du siècle.

Il avait juste oublié que le modèle de **Gordon-Shapiro** ne vaut pas pour les sociétés de croissance mais uniquement pour celles arrivées à maturité. **Dans la pratique, on retient un taux de croissance maximal identique à celui du PIB sur longue période, soit environ 3-4 %. Mais rien n'interdit de retenir un taux plus faible, voire négatif si l'activité est en déclin.**

Une autre façon de procéder consiste à estimer le taux de croissance soutenable de la société. Ce taux représente le niveau maximal de croissance que la société peut atteindre dans le futur, sans avoir besoin de financements externes (dettes ou augmentations de capital). La société autofinance ici sa croissance. Il s'estime à partir de la rentabilité des capitaux propres de l'entreprise ( $R_C$ ) et de son taux de rétention des bénéfices ( $b$ ), c'est-à-dire la proportion des bénéfices qui est mise en réserves et non distribuée aux actionnaires, et qui va donc servir à financer sa croissance.

La croissance soutenable est égale à :

$$g = b * R_C$$

Une société qui distribue 65 % de ses bénéfices et dont la rentabilité des capitaux propres est de 10 % a un taux de croissance soutenable  $g$  de :

$$g = (100\% - 65\%) * 10\% = 3.5\% \text{ par an}$$

### 2.3. Le modèle du dividende actualisé à croissance multiple :

Le modèle précédent est particulièrement réducteur en ce sens qu'il impose une croissance constante des dividendes sur un horizon infini. Pour y remédier, il est possible de ne faire débiter cette période de croissance stable non pas dès le prochain dividende mais dans  $n$  années. Le modèle de valorisation devient alors :

$$V_0 = \sum_{t=1}^n \frac{D_t}{(1 + R_C)^t} + \frac{D_{n+1}}{R_C - g} \times (1 + R_C)^{-n}$$

La période de croissance stable débute avec le dividende ( $n + 1$ ). Or nous cherchons une valeur à l'année 0.  $\frac{D_{n+1}}{R_C - g}$  représente la valeur actualisée à l'année  $n$  des dividendes de ( $n + 1$ ) à l'infini. Pour ramener cette valeur en 0, il faut donc l'actualiser sur  $n$  années, d'où  $(1 + R_C)^{-n}$ .

### 2.4. La valeur des opportunités de croissance :

Voyons maintenant quel est l'impact des opportunités d'investissement dont peut disposer une entreprise sur la valeur de ses actions. Supposons deux sociétés, Croissance + et Dividendes +, dont le bénéfice prévisionnel est dans les deux cas de 10 par action. Si on pose l'hypothèse que ces deux sociétés vont distribuer l'intégralité de leur bénéfice sous la forme de dividendes qui seront constants dans le temps et que leur coût des fonds propres est de 10%, alors la valeur des actions de ces deux sociétés sera identiques.

$$V_0 = \text{Div} / R_C = 10 / 0,10 = 100$$

Supposons maintenant que la société Croissance + dispose d'un projet d'investissement qui peut lui rapporter 15 %. Bien évidemment, elle a intérêt à réduire le montant des dividendes qu'elle avait l'intention de distribuer afin de financer ce projet. **Le fait de réduire les**

## CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions

---

**dividendes va-t-il faire baisser le cours boursier de Croissance + ?** Au contraire, la réduction des dividendes afin de financer un projet d'investissement rentable va le faire augmenter, à hauteur de la VAN du projet. On parle d'information incorporée dans les cours. Cette augmentation du cours boursier du fait de l'existence d'un projet d'investissement correspond à ce que l'on appelle la **VAOC, la valeur actuelle des opportunités de croissance**.

De façon plus générale, il est possible de décomposer la valeur d'une action en deux éléments :

- Réaliser de projets d'investissement ;
- Le supplément de valeur lie aux projets futurs de la société, la VAOC.

Cette VAOC correspond à la valeur qui est attribuée par le marché aux différents projets, connus ou non, que la société réalisera dans le futur. Cette valeur est basée sur les anticipations des investisseurs et ne procède pas nécessairement d'un calcul actuariel comme dans l'exemple précédent. **Il est ainsi possible de calculer cette VAOC par différence entre le cours boursier de l'action et sa valeur théorique en l'absence de projets d'investissement.**

Cette valeur théorique s'estime en considérant que la société distribue la totalité de ses bénéfices sous la forme de dividendes, ce qui permet d'utiliser le modèle du dividende actualisé pour valoriser l'action, en considérant que le bénéfice par action (BPA) (et donc le dividende) sera constant dans le temps. Il n'a, en effet, aucune raison d'augmenter puisque la société n'investit plus. La valeur des opportunités de croissance (VAOC) est donc :

$$\text{VAOC} = \text{Cours} - (\text{BPA} / R_c)$$

### 2.5. Le (Price Earning):

Parfois appelé « multiple de capitalisation », le PER est un ratio utilisé pour sélectionner les actions surcotées et les actions sous-cotées.

$$\text{PER} = \text{Cours de l'action} / \text{BPA attendu pour l'année en cours}$$

Si PER élevé → action surcotée → vendre ...

SI PER faible → action sous-cote → acheté ...

Pour comprendre cette logique, remarquons que l'inverse du

PER : **Bénéfice net par action/cours de l'action** exprime le rendement de l'action.

#### Remarque :

- Même si les prévisions sont de qualité, il est toujours difficile d'interpréter avec certitude une valeur donnée du PER. Certes, le PER étudié peut être comparé à la moyenne des PER du secteur considéré, mais cela ne valide pas « l'impression » qu'il s'agit d'un PER trop élevé, ou trop faible, ou normal... De même, si deux sociétés ont le même PER, l'analyste ne dispose pas de bases solides pour déterminer laquelle est la plus performante.
- Pour améliorer la pertinence du PER, la tendance actuelle est de lui intégrer le taux moyen de croissance du bénéfice par action (g), calculé sur les 2 ou 3 années à venir.
- On obtient alors le PEG (Price Earning Growth = Taux de croissance du PER) de formule générale :
- $\text{PEG} = \text{PER} / g$

## ***CHAPITRE 8 : évaluation des obligations et des actions***

---

- L'interprétation généralement admise du PEG est la suivante :  
Si  $PEG > 1.5$  → action surévaluée,  
Si  $PEG < 1$  → action sous-évaluée.

## **BIBLIOGRAGHIE :**

---

1. *Bonneau M.P : Mathématiques financières approfondies,1992.*
2. *Piermay M : Mathématiques financières .1989.*
3. *Quihard Pinon F : Mathématiques financières .2002.*
4. *Pariénté Simon :Analyse Mathématiques financières .1991.*
5. *Louineau Katerine : Mathématiques financières :exercices corrigés.1989.*
6. *Hamimi Allali : Mathématiques financières .1990,*
7. *Hamimi Allali : Mathématiques financières :corrigé des exercices.*
8. *Hamimi Allali : Mathématiques financières: corrigé des exercices,2005.*
9. *Zaarti Mohamed : Mathématiques financières :au certificat de maîtrise des techniques comptables.1988.*
10. *Boissonnade Marie : Mathématiques financières.2002,*
11. *Boissonnade Marie : Mathématiques financières.2002.*
12. *Lounes M : Problèmes de Mathématiques financières au cap commerciaux . 1985.*
13. *Ronaldo Thierry : Mathématiques financières.2006*
14. *Arquaud Jean-Philippe : Mathématiques financières : Méthodes mathématiques pour le finance.2006.*
15. *Masieri Walder : Notions essentielles de mathématiques financières ,1974.*
16. *Masieri Walder : Mathématiques financières, 2001, Masieri Walder : Mathématiques financières, 2008.*
17. *Schlachter Didier : comprendre les mathématiques financières :cours et exercices résolus.*
18. *Boubaker Miloudi : Mathématiques financières :cours et exercices.1997.*
19. *Posière J.P : Mathématiques appliquées à la gestion,2005 .*
20. *Massal Marguerite : Mathématiques financières :questions...,2004.*
21. *Makhlouf .F: Mathématiques financières :outils de gestion ,2007.*