

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

OPTION : Sciences Des Matériaux

Présenté par: HAMITOUCHE Kahina

THEME:

Endommagement ductile des métaux sous sollicitations dynamiques

Devant les membres du jury :

Mr : Aberkane Méziane	Professeur	U.M.M. Tizi-Ouzou	Président
Mr : Ould Ouali Mohand	Professeur	U.M.M. Tizi-Ouzou	Rapporteur
Mr : Ferhoum Rabah	MCA	U.M.M. Tizi-Ouzou	Examineur
Mr : Almansba Madjid	MCA	U.M.M. Tizi-Ouzou	Examineur

2014-2015

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail:

Je tiens à exprimer mon extrême reconnaissance envers mon promoteur Monsieur **MOHAND OULD OUALI**, pour son encadrement, sa disponibilité et ses précieux conseils durant la réalisation de ce projet.

Je remercie également tous les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.

Monsieur ABERKANE MÉZIANE

Monsieur FERHOUM RABAH

Monsieur ALMANSBA MADJID

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A ma sœur **THINHINENE**.

A mes parents.

A mes sœurs **Lynda, Letitiaa, Thif-agour**, et mon frère **koceila**

A mes neveux **Riles, Méssypsa, Eliane**.

A mes amies **Misiva, Nassima, Milyada**, et à tous mes ami(e)s.

Table des matières

Table des figures	4
Liste des tableaux	7
Notations	8
Introduction générale.....	12
Chapitre I : Synthèse bibliographique	
I.1- Introduction	14
I.2- Comportement élastoplastique des matériaux	14
I.2.1- Elasticité	14
I.2.2-Déformations plastiques	15
I.2.3. Domaine d'élasticité et seuil de plasticité	15
I.2.4.Loi d'écoulement plastique et règle de normalité.....	16
I.3. Critères de plasticité.....	17
I.3.1. Critères de plasticité pour les matériaux isotropes.....	17
I.3.2. Critères de plasticité pour les matériaux anisotropes.....	19
I.3.3. Evolution de surface de seuil : Ecrouissage.....	19
I.4. Extension au cas élastoviscoplastique	21
I.5. Adoucissement thermique.....	22
I.6. Effet de la vitesse de déformation.....	23
I.7. Description de l'endommagement	24
I.7.1. Variables d'endommagement	25
I.7.2. Concept de variables effectives	26
I.7.3. Cadre thermodynamique.....	28
I.7.4. Mécanisme de déformation et d'endommagement en dynamique	30
I.7.4.1. Nature physique de l'endommagement à l'état solide.....	31

I.7.4.2. Glissement, plasticité et déformation irréversible	32
I.7.4.3. Mécanismes physiques de l'endommagement.....	33
I.7.5. Endommagement ductile	34
I.8. Essais dynamiques	35
I.8.1. Classification des essais en dynamique rapide	35
I.8.2. Essais expérimentaux.....	36
I.9. Différents modes de ruines	44
I.9.1. Ecaillage.....	44
I.9.2. Rupture en pétale	45
I.9.3. Poinçonnage.....	45
I.9.4. Cisaillement adiabatique.....	46
I.10. Lois de comportement des métaux sous sollicitations dynamiques.....	47
I.11. Comportement et rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques.....	49
I.12. Loi de comportement pour les grandes vitesses de déformations.....	49
I.12.1. Lois phénoménologiques	50
I.12.2. Lois à base physique	55
I.13. Modèles d'endommagements dynamiques.....	56
I.14. Conclusion	59
 Chapitre II : Mise en œuvre Numérique	
II.1. Introduction	60
II.2. Aspects numériques liés à la discrétisation spatiale et temporelle.....	60
II.3. Intégration des modèles de comportement	64
II.4. Méthode de discrétisation temporelle.....	69
II.4.1. Méthodes d'intégration explicite.....	69

II.4.2.Méthode d'intégration implicite	71
II.5. Implantation du modèle dans Abaqus	73
II.5.1. Etat de contrainte	73
II.5.2. Formulation thermodynamique	73
II.5.3. Hypothèses adoptées quant à l'implémentation numérique	76
II.6. Application numérique	77
II.6.1. Méthode de «Radial Return Mapping.....	79
II.6.2. Procédure d'intégration de la Vumat.....	82
II.7. Conclusion	90
 Chapitre III : Résultats et discussions	
III.1.Introduction	91
III.2. Traction uniaxiale.....	92
III.2.1. Loi de JC	92
III.2.2. Loi de JC plus l'effet de la vitesse de déformation	93
III.2.3. Discussion des résultats.....	97
III.3. Application de l'essai de Taylor.....	98
III.3.1. Description du modèle éléments finis utilisé sur une structure.....	99
III.3.2. Résultats des simulations	103
III.3.3. Application pour les alliages de Titane Ti6I4V	106
III.4. Discussions et conclusions	109
Conclusion générale.	110
Bibliographie	112

Table des figures

I.1 : Le domaine d'élasticité (en vert) et la surface seuil de plasticité (en rouge) dans l'espace des contraintes	16
I.2 : Loi d'évolution de la déformation plastique.....	17
I.3 : Représentation géométrique des surfaces de plasticité selon Tresca et Von Mises, dans le repère des contraintes principales	18
I.4 : Ecrouissage cinématique : translation du domaine de réversibilité.....	20
I.5 : Représentation schématique de l'évolution de la surface de plasticité, lors d'un écrouissage Isotrope.....	21
I.6 : Courbe contrainte – déformation à 4000/s pour des températures variables.....	23
I.7 : Courbe contrainte – déformation pour des températures et taux de déformations variables	24
I.8 : Coupe d'un élément endommagé	26
I.9 : Principe d'équivalence en déformation	27
I.10 : Déformation plastique élémentaire par glissement étant donné par un mouvement de Dislocation	31
I.11 : endommagement élémentaire par nucléation d'une micro-fissure à partir d'une accumulation de dislocation	32
I.12 : Rupture fragile par clivage	33
I.13 : Endommagement ductile d'un matériau sous sollicitation mécanique.....	35
I.14 : Niveau de vitesse de déformation accessible en fonction du type d'essai	36
I.15 : Principe de fonctionnement du dispositif à barre d'Hopkinson	36
I.16 : Principe de fonctionnement d'un canon à gaz	37
I.17 : Principe de génération d'un choc par impact laser	38
I.18 : Essais à déformation plastique	39
I.19 : Essai de Taylor symétrique pour un acier 42CrMo4.....	40
I.20 : Essai de Taylor direct pour un projectile en aluminium.....	41
I.21 : Essai de cisaillement dynamique	41
I.22 : Essai de traction dynamique	42
I.23 : Essai d'extrusion conique.....	43
I.24 : Essai de rupture dynamique.....	44
I.25 : Ecaillage normal (Photographie de l'institut franco-allemand de Saint-Louis)	45

I.26 : Rupture en pétale	45
I.27 : Rupture par poinçonnage.....	46
I.28 : Bande de cisaillement dans un acier de blindage après perforation par un obus flèche.....	47
I.29 : Classification des phénomènes dynamiques en fonction d'un temps caractéristique de variation de chargement.....	48
II.1 : Efforts appliquées aux solides, structure en équilibre.....	61
II.2 : Organisation de résolution du schéma statique implicite.....	66
II.3 : Organigramme de résolution d'un problème mécanique en utilisant un schéma dynamique explicite	68
II.4 : Méthode du point milieu généralisé.....	71
II.5 : Méthode des trapèzes généralisés	72
II.6 : Organigramme de la subroutine Vumat	83
III.1 : Élément 3D utilisé pour les simulations numériques (exemple : Conditions aux limites pour simuler une traction uniaxiale	91
III.2 : Simulation de l'essai de traction dans le cas de l'écroutissage	92
III.3 : Superposition de la courbe d'écroutissage à celle de la viscosité	93
III.4 : Contrainte en fonction de la déformation à différentes vitesses JC Vumat	94
III.5 : Contrainte en fonction de la déformation à différentes vitesses dans le code Abaqus.....	94
III.6 : Contrainte en fonction de la déformation à différentes vitesses modèle de Khan	95
III.7 : Courbe simulée d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Johnson Cook couplé à l'endommagement à différentes vitesses de déformations.....	95
III.8 : Courbe simulée d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Khan couplé à l'endommagement de JC à différentes vitesses de déformations	96
III.9 : Courbe simulée d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Khan couplé l'endommagement de Langseth à différentes vitesses de déformations.....	96
III.10 : Illustration de l'essai de Taylor	99
III.11 : Forme du mur	100
III.12 : Forme du projectile utilisé dans la simulation numérique.....	100
III.13 : Chargement des nœuds à une vitesse de 190 m/s.....	101
III.14 : Profil de l'assemblage maillé.....	102

III.15 : Représentation après impact.....	102
III.16 : Résultats numériques de la simulation de l'essai impact de Taylor à une vitesse de 190 m/s.....	103
III.17 : Graphe de la force en fonction du temps à divers vitesses d'impact.....	103
III.18: Courbe d'évolution de l'endommagement en fonction du temps à divers vitesses d'impact.....	104
III.19: Isocontours de la déformation plastique équivalente à $t=5.4119 \cdot 10^{-3}$ s, $3.7539 \cdot 10^{-2}$ s	104
III.20 : Isocontours de la déformation plastique équivalente à $t=4.5075 \cdot 10^{-2}$ s, $5.000 \cdot 10^{-2}$ s	105
III.21 : Initiation de l'endommagement après impact	105
III.22 : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor	106
III.23 : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor modèle de Khan	107
III.24 : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor modèle de Langseth	107
III.25: Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor en comparant les trois modèles	108

Liste des tableaux

I.1 : Illustration du taux de déformation de 4000/s à des températures variables le modèle de Johnson Cook sous-estime la contrainte d'écoulement.....	23
I.2 : Variables d'états et variables associées.....	28
I.3 : Limite d'élasticité du tantale pur à différentes vitesses de déformation obtenues avec plusieurs méthodes de sollicitation	39
I.4 : Lois constitutives prenant en compte la vitesse de déformation	55
III.1 : Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation de l'essai de traction (Cu).....	93
III.2 : Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation de l'essai de traction (Cu)	94
III.3 : Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation de l'essai de traction (Ti6Al4V) ..	107

Notations

$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$: déformation.

$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$: contrainte.

$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$: tenseurs d'élasticité.

$\underline{\underline{\boldsymbol{S}}}$: tenseurs compliance.

\mathbf{M}_S^3 : espace des tenseurs.

\mathbb{S} : domaine de réversibilité (domaine d'élasticité).

$\partial\mathbb{S}$: surface seuil de plasticité.

$\boldsymbol{\tau}$: force de frottement.

σ_c : valeur critique.

$\dot{\lambda}$: multiplicateur plastique.

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$: vitesse de déformation plastique équivalente

$\bar{\sigma}$: critère isotrope de Von-Mises.

\mathbf{K} : paramètre qui dépend du matériau.

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$: paramètres à déterminer expérimentalement.

$\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}$: tenseur représentant la translation du domaine initial \mathbb{S}_0 .

\mathbf{p} : déformation plastique cumulée.

$\boldsymbol{\varepsilon}^e$: partie élastique réversible.

$\boldsymbol{\varepsilon}^p$: partie plastique incompressible.

$(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$: incrément de la déformation plastique.

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$: Le tenseur des vitesses de déformation.

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$: partie déviatorique.

\mathcal{X} : coefficient de Taylor-Quinney.

ρ : densité.

C_p : chaleur spécifique.

S_D, S : surface.

D_n : densité surfacique de défauts dans le plan de normal \vec{n} .

\tilde{S} : section effective résistante.

$\tilde{\sigma}_{ij}$: tenseur des contraintes effectives.
 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$: déformation élastique.
 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$: déformation plastique.
 ψ : énergie libre de Helmholtz.
 Ψ : potentiel d'état.
 Ψ_e : contribution thermo élastique.
 Ψ_p : contribution plastique.
 Ψ^* : potentiel d'enthalpie libre de Gibbs.
 Ψ_e^* : contribution élastique affectée par l'endommagement.
 Ψ_p : contribution plastique due à l'écroutissage du matériau.
 Ψ_T : contribution due uniquement à la température.
 \bar{q} : flux thermique.
 F : potentiel de dissipation.
 f : fonction relative au critère de plasticité.
 F_x : terme relatif à l'écroutissage cinématique non linéaire.
 F_D : potentiel d'endommagement.
 V_c : vitesse d'impact.
 T_{room} : température de transition.
 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$: vitesse de déformation de référence.
 T_{melt} : température de fusion du matériau.
 C_3, C_4, C_5 : paramètres matériaux.
 n_1, D_0^{pl} : paramètres matériaux.
 σ_{stat} : limite élastique non visqueuse.
 D, P : paramètres matériaux.
 $\boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\varepsilon}_u$: déformations correspondant au seuil de plasticité et à la rupture.
 D_u, D_y, P : paramètres des matériaux.
 σ_0 : limite élastique initiale.
 $\boldsymbol{\varepsilon}_f$: déformation plastique de rupture.
 D_1 à D_5 : constantes du matériau liées à l'endommagement.
 $\boldsymbol{\varepsilon}_d$: déformation plastique équivalente.
 D_C : valeur critique d'endommagement.
 Y : taux de restitution d'énergie élastique.

Y_d : valeur seuil.
 Y_C : valeur critique.
 V : solide de volume.
 F_v : forces volumiques.
 F_s : forces surfaciques.
 F_c : forces de contact.
 Γ_u, Γ : domaines.
 U : déplacement.
 \dot{u} : vitesse.
 \ddot{u} : accélération.
 D : tenseur Eulérien des vitesses de déformation.
 $[N_n]$: fonctions d'interpolation nodales sur l'élément (e).
 $\{u_n^e\}$: vecteur contenant les déplacements de chaque nœud de l'élément.
 $[M^e]$: matrice masse élémentaire cohérente.
 $\{F_{int}^e\}$: vecteur élémentaire des efforts internes.
 $\{F_{ext}^e\}$: vecteur élémentaire des efforts externes.
 $[B_n^e]$: matrice d'interpolation de déformation-déplacement.
 I_e : fonctionnelles élémentaires.
 $\{R\}_{n+1}$: résidu d'équilibre statique.
 $\{\delta U_n\}$: incrément de déplacement.
 K_T : opérateur tangent.
 $[M]$: matrice masse (matrice consistante).
 ω_{max} : plus grande valeur propre du système d'équations mécaniques.
 ξ : valeur de l'amortissement critique.
 L_{min} : plus petite dimension de l'élément du maillage.
 c_d : vitesse d'une onde solide traversant l'élément.
 ρ : densité du matériau.
 E : module de Young.
 a_i, b_i : coefficients de pondération.
 σ_{eq} : contrainte équivalente de Von Mises
 K : module de compressibilité.
 G : module de cisaillement.

$\delta_{ij}, \delta_{kl}, \delta_{jl}$: Delta Kronecker.

$J(\mathbf{x}_i)$: matrice jacobienne.

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$: incrément de déformation.

$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^P$: incrément de déformation plastique équivalente.

$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$: contrainte d'essai.

\mathbf{h} : écrouissage.

\mathbf{S} : tenseur deviatorique.

\mathbf{S}_{n+1}^* : contrainte d'essai deviatorique.

$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{eq*}$: contrainte équivalente de Von Mises d'essai.

$\boldsymbol{\sigma}_n^y$: contrainte d'écoulement.

Introduction Générale

L'étude du comportement dynamique des matériaux et des structures est un domaine en pleine expansion. Certaines applications industrielles exploitent d'ailleurs de plus en plus des phénomènes rapides : abattage de roches par explosif, exploitation pétrolière, usinage à grande vitesse (UGV), mise en forme (exemple : forgeage, extrusion, moulage sous pression), placage ou soudure par explosif. D'autres applications ont des vocations purement militaires avec l'étude de la balistique, des blindages et des explosions. On en trouve aussi dans le domaine du transport et la sécurité automobile tels que les impacts des grêlons, les crashes tests destinés à tester la résistance d'un véhicule face à une collision. Enfin, l'aspect dynamique des matériaux concerne inévitablement le domaine de la santé et du médical. Destruction des cellules cancéreuses, fragmentation des calculs rénaux ou biliaires par ondes de choc.

Ce tour d'horizon succinct et non exhaustif du domaine de la dynamique des matériaux et des sollicitations extrêmes, révèle un panorama varié allant de la recherche fondamentale aux applications industrielles. Dans le cadre de ce mémoire de magister, nous nous intéressons à la réponse dynamique de métaux face à une sollicitation mécanique en fonction de la vitesse de déformation. Un des objectifs majeurs est notamment de caractériser l'endommagement dynamique des matériaux à très haute vitesse de déformation. Dans ce but, nous couplons la loi élastoviscoplastique proposée par Khan et al avec la loi d'endommagement de Langseth. Une fois le modèle formulé nous l'implémentons dans le code éléments fini Abaqus, afin de vérifier la pertinence du modèle.

Ce présent travail dresse l'état de l'art dans différents domaines de recherche qui sont directement liés à cette étude. Il est divisé en trois chapitres.

Le premier chapitre est dédié en premier lieu aux comportements des métaux soumis à un chargement dynamique, il traite aussi l'effet de la température ainsi que l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement dynamique des métaux. En second temps nous avons présenté les mécanismes d'endommagement ainsi que les différents modes de rupture qui surviennent lors des sollicitations rapides. Afin de caractériser le comportement dynamique des matériaux nous avons décrit divers dispositifs expérimentaux selon la nature (gamme de déformations et de vitesses de déformations) de la sollicitation souhaitée : en traction, compression et cisaillement, essai de Taylor, essai de cisaillement et barre

d'Hopkinson. Troisièmement une revue bibliographique sur les lois de comportement pour les grandes vitesses de déformations est présentée. Deux grandes familles de lois constitutives existent: les modèles à base physique et les modèles phénoménologiques.

Le deuxième chapitre est consacré à l'implémentation numérique des modèles de comportement. La discrétisation spatiale par éléments finis employée dans le code de calcul Abaqus, ainsi que les schémas de résolution Statique Implicite (Abaqus standard) et Dynamique Explicite (Abaqus Explicite) sont donnés. Nous exposerons ensuite l'algorithme d'intégration explicite du modèle de comportement implémenté numériquement via la routine VUMAT.

Le dernier chapitre se rapportera à la présentation des résultats des simulations numériques effectuées avec les lois de comportement implémentées dans Abaqus. Une discussion des résultats est donnée.

Nous terminerons par une conclusion générale qui débouchera sur des recommandations futures.

Chapitre I

Synthèse

bibliographique

Chapitre I : Synthèse bibliographique

I.1. Introduction

Lors d'une sollicitation, un matériau peut réagir de différentes manières : par échauffement thermique, par déformation élastique, déformation plastique, par formation et croissance de microcavités ou de microfissures. On appelle modèle de comportement la relation qui relie la contrainte appliquée à la température, la déformation, la vitesse de déformation et l'endommagement. L'endommagement décrit l'état de détérioration du matériau de l'état vierge à l'amorçage de la fissure macroscopique. Les modèles de comportement et d'endommagement font références à la mécanique des milieux continus.

I.2. Comportement élastoplastique des matériaux [DHRT00]

Le matériau élastoplastique est caractérisé par l'élasticité, la plasticité.

I.2.1. Elasticité

Dans les matériaux cristallins, les caractéristiques d'élasticité dépendent essentiellement de l'énergie de cohésion interatomique et de sa sensibilité vis-à-vis d'une petite variation des distances interatomiques. On est donc amené à négliger le terme entropique et à tenir compte seulement de l'équilibre entre les forces répulsives entre atomes et les forces attractives de liaisons : l'application d'efforts mécaniques modifie les distances interatomiques à partir des distances d'équilibre au repos, mais leur suppression conduit au retour à la position initiale, les déformations sont réversibles.

❖ Relation contrainte-déformation

En élasticité linéaire isotrope, en conditions isothermes et en absence de contraintes initiales, il y a dépendance linéaire des tenseurs de contrainte et de déformation. On peut ainsi formellement noter :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{I-1})$$

$\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{S}}$ sont respectivement les tenseurs d'élasticité et de compliance. Ce sont des tenseurs du quatrième ordre et sont représentés par une matrice à 4 dimensions.

I.2.2. Déformations plastiques

Le mécanisme élémentaire de déformation résiduelle des métaux est le défaut d'empilement cristallin que l'on appelle dislocation. Il est visible individuellement à l'échelle du réseau cristallin, mais sa manifestation macroscopique, qu'est la déformation résiduelle met en jeu un très grand nombre de tels défauts. A l'échelle macroscopique, cette collection de défauts cristallins est représentée au niveau de l'élément de volume par un tenseur, dit tenseur de déformation plastique.

I.2.3. Domaine d'élasticité et seuil de plasticité

Les déformations plastiques n'évoluent pas tant que la contrainte reste dans un certain intervalle. Ceci se généralise en postulant qu'il existe à chaque instant dans l'espace des contraintes, c'est-à-dire, dans l'espace $M_{\mathbb{S}}^3$ des tenseurs de deuxième ordre symétriques, un domaine \mathbb{S} dit domaine de réversibilité ou domaine d'élasticité tel que la déformation plastique n'évolue pas tant que les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ restent à l'intérieur. Le bord $\partial\mathbb{S}$ de ce domaine est appelé surface seuil de plasticité. En pratique, il est commode de représenter ce domaine de réversibilité à l'aide d'une fonction $f : M_{\mathbb{S}}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dite fonction seuil ou critère de plasticité. Dans ce cas, \mathbb{S} et $\partial\mathbb{S}$ sont définis

$$\mathbb{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}} \in M_{\mathbb{S}}^3 \mid f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \}, \quad \partial\mathbb{S} = \{ \underline{\underline{\sigma}} \in M_{\mathbb{S}}^3 \mid f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \}$$

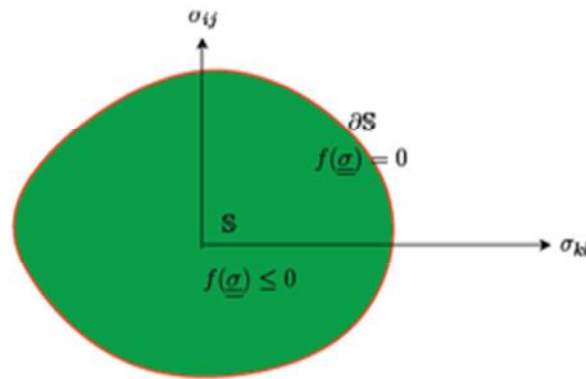


Figure (I-1) : Représentation du domaine d'élasticité (en vert) ainsi que la surface seuil de plasticité (en rouge) dans l'espace des contraintes.

I.2.4. Loi d'écoulement plastique et règle de normalité

A présent il s'agit de préciser la loi d'évolution de la déformation plastique. Le domaine de réversibilité a été introduit pour traduire le fait que la déformation plastique n'évolue pas tant que les contraintes restent à l'intérieur du domaine. On va le traduire par la condition :

$$\underline{\dot{\sigma}}^p = \underline{0} \quad \text{si } f(\underline{\sigma}) < 0 \quad (\text{I-2})$$

L'écoulement plastique peut être régi par une ou plusieurs surfaces, la présentation du cas de la plasticité associée qui signifie une seule surface décrit à la fois le domaine élastique et l'écoulement plastique. Le principe de normalité, selon lequel la vitesse de déformation plastique lors d'un écoulement est normale à la surface de charge, est généralement admis pour un grand nombre de matériaux métalliques. Il s'écrit dans le cas de la plasticité associée :

$$\underline{\dot{\sigma}}^p = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{n} \quad (\text{I-3})$$

λ : est le multiplicateur plastique.

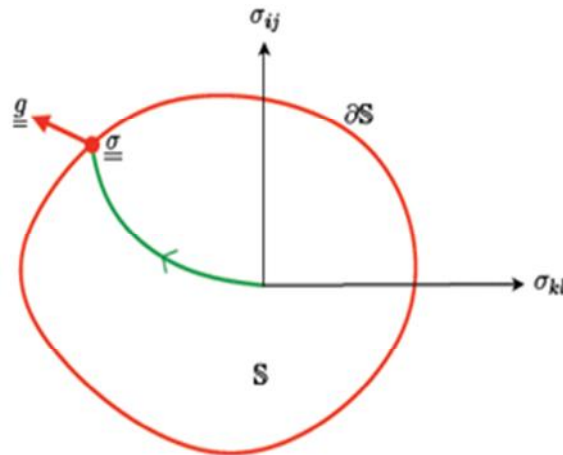


Figure (I-2) : Loi d'évolution de la déformation plastique.

Pas d'évolution de $\underline{\underline{\sigma}}^p$ tant que $\underline{\underline{\sigma}}$ reste à l'intérieur du domaine de réversibilité actuel et évolution possible de $\underline{\underline{\sigma}}^p$ dans une direction donnée lorsque $\underline{\underline{\sigma}}$ atteint le seuil de plasticité.

I.3. Critères de plasticité

I.3.1. Critères de plasticité pour les matériaux isotropes

❖ Critère de Von-Mises [FAR09] [PEN10]:

Le critère isotrope de Von-Mises permet la détermination de la contrainte équivalente, on exprime ce critère avec des invariants du tenseur des contraintes parce qu'il est insensible au changement de repère.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yx}^2 + \sigma_{zx}^2)} \quad (\text{I-4})$$

$$l_1 = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$l_2 = \frac{1}{2}[\text{trace}(\underline{\underline{\sigma}})^2 - \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}^2)]$$

$$l_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}})$$

Le critère est écrit comme suit :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}} \quad (\text{I-5})$$

$$S = -\frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) \quad (\text{I-6})$$

Cela est dû à l'insensibilité du critère de Von-Mises au chargement sphérique qui correspond à une pression.

❖ Critère de Tresca :

Ce critère stipule que l'écoulement plastique commence quand la contrainte maximale de cisaillement atteint une valeur critique, et peut s'exprimer en fonction des contraintes principales :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = k \quad (\text{I-7})$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Où k est un paramètre qui dépend du matériau et se détermine expérimentalement. Dans l'espace des contraintes principales, la surface de plasticité définie par le critère de Tresca est représentée par un cylindre infini à base hexagonale et d'axe d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, (figure I-3).

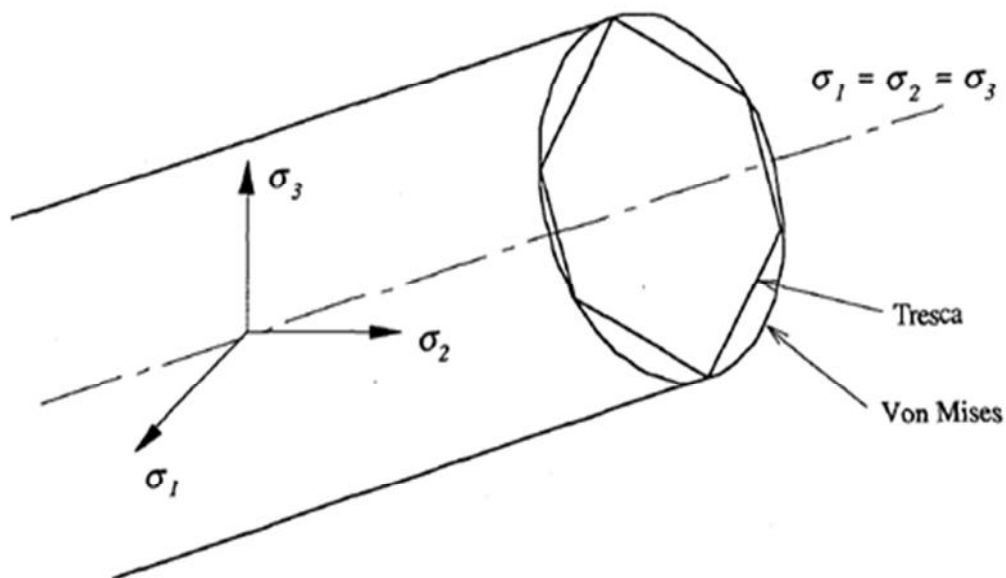


Figure (I-3): Représentation géométrique des surfaces de plasticité selon Tresca et Von Mises, dans le repère des contraintes principales [ZAT00].

I.3.2. Critères de plasticité pour les matériaux anisotropes

❖ Critère de Hill :

Les premières études sur les critères anisotropes ont été réalisées par Jackson et al (1948), Hill (1948) et Dorn (1949). Initialement, ils modifièrent les critères de Tresca ou Von Mises en y ajoutant des constantes supplémentaires, intrinsèques au matériau. On peut citer en exemple le critère de Hill (1950) concernant les matériaux orthotropes :

$$F = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0 \quad (I-8)$$

Où F, G, H, L, M, N sont des paramètres à déterminer expérimentalement et s'expriment en fonction des seuils de plasticité en traction et cisaillement, respectivement suivant les directions principales d'orthotropie. D'autres critères ont été proposés, notamment par Barlat & Lian (1989), Hill (1950), applicables pour des conditions de contraintes planes.

I.3.3. Evolution de surface de seuil : Ecrouissage [PEN10]

Le domaine de réversibilité peut varier au cours du temps ou plus exactement au fur et à mesure que la déformation plastique évolue. Lorsque le domaine est fixe, on parle de plasticité parfaite, alors que lorsqu'il varie, on parle de plasticité avec écrouissage.

Dans les matériaux, cet écrouissage est dû à la difficulté qu'ont les dislocations de se développer du fait de la présence d'amas de dislocations précédemment créés. La conséquence est que dans un essai de traction uniaxiale il faut imposer une contrainte de plus en plus forte pour plastifier le matériau. Mais en contrepartie, pour certains matériaux, il peut s'avérer plus facile ensuite de plastifier le matériau en compression. Ce phénomène est appelé effet Bauschinger.

Quelques exemples d'écrouissages sont représentés dans ce qui suit :

❖ Ecrouissage cinématique

Le domaine de réversibilité se translate dans l'espace des contraintes sans se déformer. On peut alors écrire de façon générale :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{S}}_0 \quad (\text{I-9})$$

Où $\underline{\underline{X}}$ est un tenseur représentant la translation du domaine initial $\underline{\underline{S}}_0$. En termes de la fonction seuil cela s'écrit donc :

$$f(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) \leq 0 \quad (\text{I-10})$$

Cette translation dépend du temps et il reste sans évolution. Un cas particulièrement simple est celui dit d'écoulement cinématique linéaire où $\underline{\underline{X}}$ est proportionnel à la déformation plastique, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{p}} \quad (\text{I-11})$$

H étant le tenseur du quatrième ordre s'appelant le tenseur d'écoulement.

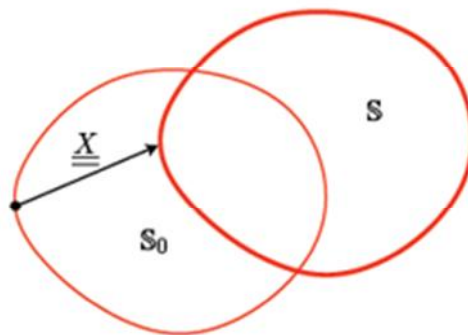


Figure (I-4) : Ecoulement cinématique : translation du domaine de réversibilité.

❖ Ecoulement isotrope

Si on considère un écoulement isotrope, la surface de plasticité évolue de façon homothétique. Lors de l'écoulement plastique, elle conserve sa forme initiale ainsi que son orientation. Cette évolution est schématisée sur la (figure I-5).

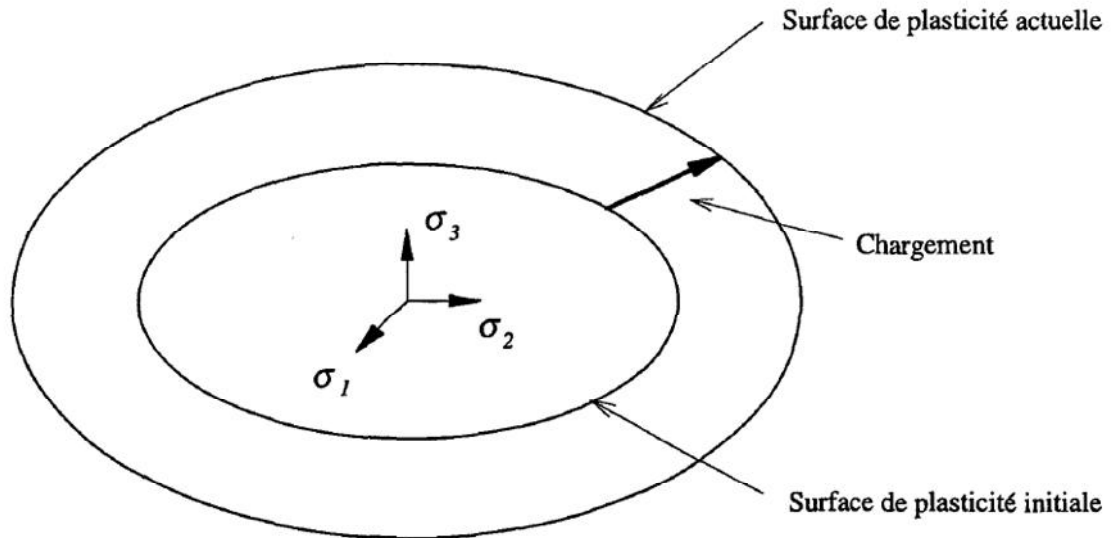


Figure (I-5) : Représentation schématique de l'évolution de la surface de plasticité, lors d'un écrouissage isotrope [ZAT00].

Le gonflement de la surface de charge peut être traduit par l'évolution du rayon R , auquel on associe, comme variable d'écrouissage, la déformation plastique cumulée p qui est définie par :

$$P(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{p} \cdot \dot{p}} \quad (\text{I-12})$$

I.4. Extension au cas élastoviscoplastique [FPZ93], [PEN10]

L'évolution de la contrainte n'est pas seulement sensible à la déformation plastique mais aussi à sa vitesse, la contrainte croît lorsque le chargement est rapide, le changement de la vitesse implique une évolution immédiate de la contrainte :

$$= f(\varepsilon^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}) \quad (\text{I-13})$$

Ce tenseur se décompose en une partie élastique réversible $\dot{\varepsilon}^e$ et une partie plastique irréversible $\dot{\varepsilon}^p$.

La répartition des déformations est :

$$= \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (\text{I-14})$$

La répartition des vitesses de déformation est :

$$= \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (\text{I-15})$$

Le tenseur des vitesses de déformation est également décomposé en une partie déviatorique \mathbf{e} et une partie sphérique tel que :

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} + \frac{1}{3} \text{trace}(\mathbf{D}) \mathbf{I}_d \quad (\text{I-16})$$

De la même façon, les tenseurs \mathbf{e} et \mathbf{p} se décomposent en deux parties :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \frac{1}{3} \text{trace}(\mathbf{e}) \mathbf{I}_d \quad (\text{I-16-a})$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}^p + \frac{1}{3} \text{trace}(\mathbf{p}) \mathbf{I}_d = \mathbf{e}^p \quad (\text{I-16-b})$$

La vitesse de déformation est :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\text{grad}\mathbf{V} + (\text{grad}\mathbf{V})^T] \quad (\text{I-17})$$

Pour le calcul de la loi de comportement, on choisit des formulations multiplicatives telles que Cowper Symonds, Johnson Cook, etc.

I.5. Adoucissement thermique [BAN08], [PEN10]

Les essais rapides sont accompagnés d'une augmentation de chaleur, ce qui provoque un adoucissement dans les aciers. La production de chaleur dû à la déformation plastique, n'a pas le temps de s'évacuer vers l'extérieur, c'est un essai en condition adiabatique.

L'équation est la suivante :

$$C_p \Delta T = \chi \cdot \mathbf{p} \quad (\text{I-18})$$

Une partie du travail plastique est converti en chaleur, l'augmentation de la température ΔT est dû à l'incrément de la déformation plastique (\mathbf{p})

$$\Delta T = \frac{\chi}{\rho C_p} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{I-19})$$

χ est le coefficient de Taylor-Quinney, qui définit la part de conversion d'énergie de la déformation plastique en chaleur, ρ est la densité, C_p chaleur spécifique.

Voici un exemple de l'influence de la température sur la contrainte d'écoulement en utilisant le modèle de Johnson Cook pour le cuivre OFHC.

Les paramètres utilisés sont représentés dans le tableau (I-1) Johnson Cook (1985) :

Tableau I.1 : illustre que pour un taux de déformation de 4000/s à des températures variables le modèle de Johnson Cook sous-estime la contrainte d'écoulement

A	B	C	n	m	$\dot{\epsilon}_0$ (/s)	T_0 (K)	T_m (K)
90	292	0.025	0.31	1.09	1	294	1356

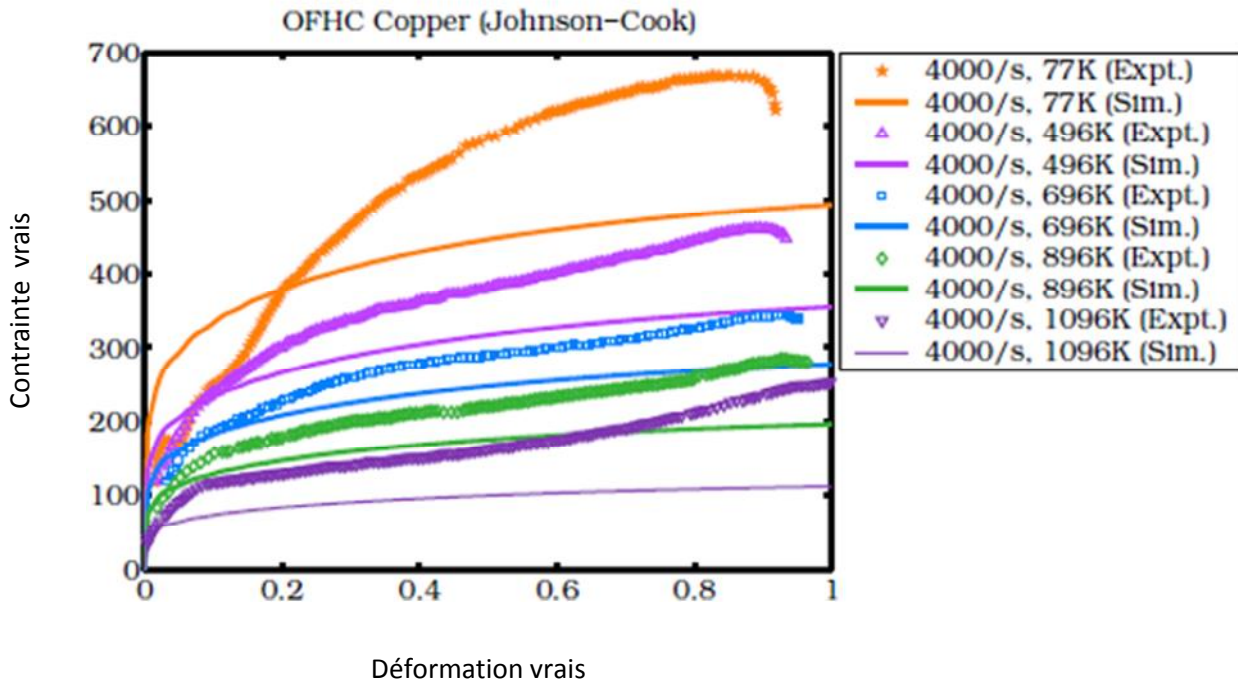


Figure (I-6): Courbe contrainte – déformation à 4000/s pour des températures variables [BAN08].

La figure (I-6) nous montre qu'au fur et à mesure que la température augmente la contrainte diminue.

I.6. Effet de la vitesse de déformation

Exemple de l'influence de la vitesse de déformation sur la contrainte d'écoulement en utilisant le modèle de Johnson Cook pour le cuivre OFHC.

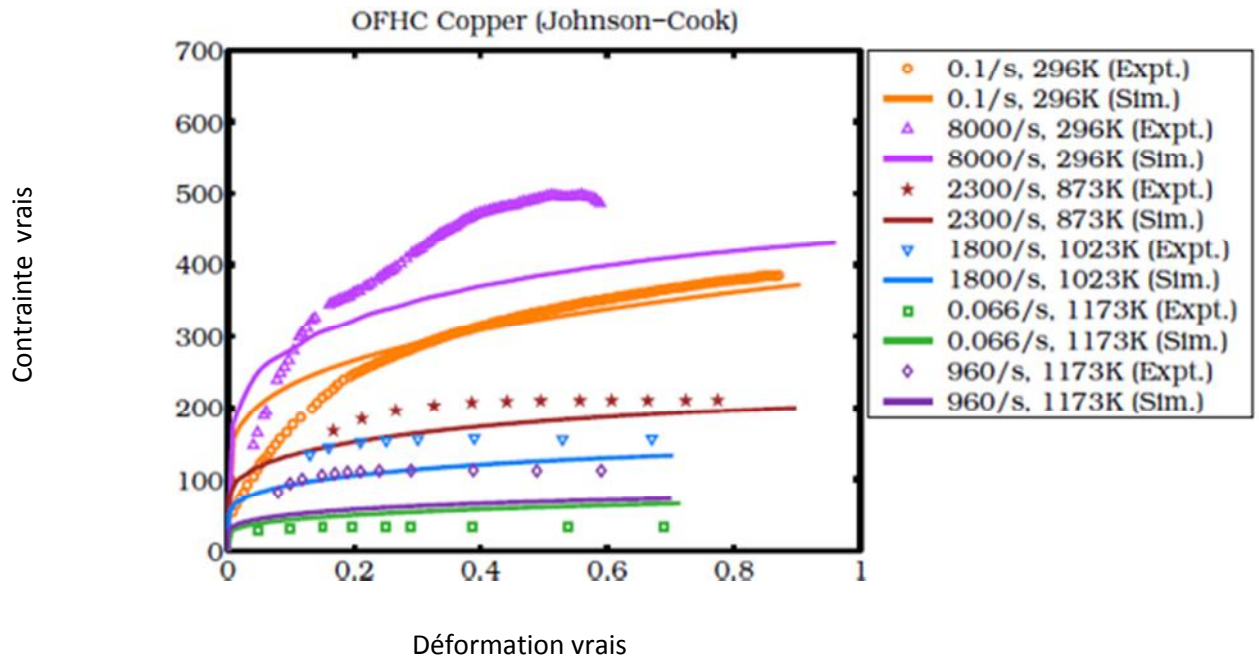


Figure (I-7): Courbe contrainte – déformation pour des températures et taux de déformations variables [BAN08].

Le modèle de Johnson Cook surestime la contrainte initiale d'écoulement dans le cas quasi statique pour un taux de déformation de 0,1/s à la température ambiante de 296 K.

Le taux d'écroutissage est sous-estimé par le modèle à la température ambiante pour un taux de déformation de 8000/s.

La dépendance du taux de déformation à la contrainte d'écoulement est sous-estimée par le modèle à des hautes températures.

I.7. Description de l'endommagement [HOR11]

L'endommagement est considéré comme un phénomène de dégradation de la matière. Les micro-défauts qui apparaissent sont causés par la localisation de dislocations ayant un caractère irréversible.

La mécanique de l'endommagement continu (MEC) est initiée par Kachanov (1958) et Rabotnov (1969). Ce domaine est depuis en plein essor. Chaboche (1977-1996) a réussi à structurer l'approche phénoménologique de l'endommagement dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus avec variables internes.

En général, il existe deux familles d'endommagement, à savoir : l'endommagement instantané et l'endommagement différé.

- **Endommagement instantané :**

Le comportement mécanique est affaibli par les mécanismes physiques de l'endommagement sous un chargement monotone. Deux mécanismes sont observés :

Endommagement ductile : est le résultat de l'instabilité de très grandes déformations locales engendrées au voisinage de défauts de la micro-structure.

Endommagement fragile : c'est la rupture de liaisons inter-atomiques d'une manière quasi-instantanée.

- **Endommagement différé :**

L'endommagement différé peut être décomposé en deux parties :

Sous sollicitations cycliques, la déformation se concentre dans les bandes de glissement, ce qui fait apparaître des extrusions en surface. On parle alors d'endommagement par fatigue.

A haute température par effet de fluage il y a apparition de cavités qui engendrent une rupture inter-granulaire.

I.7.1. Variables d'endommagement

Dans cette formulation, l'endommagement est décrit par des variables scalaires ou tensorielles. Considérons un matériau endommagé à l'intérieur duquel on isole un élément de volume représentatif (EVR) de taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu. On désigne par S l'aire d'une section de ce volume coupé (figure I-8) par un plan de normal \bar{n} et S_D la surface endommagée (cavités, fissures).

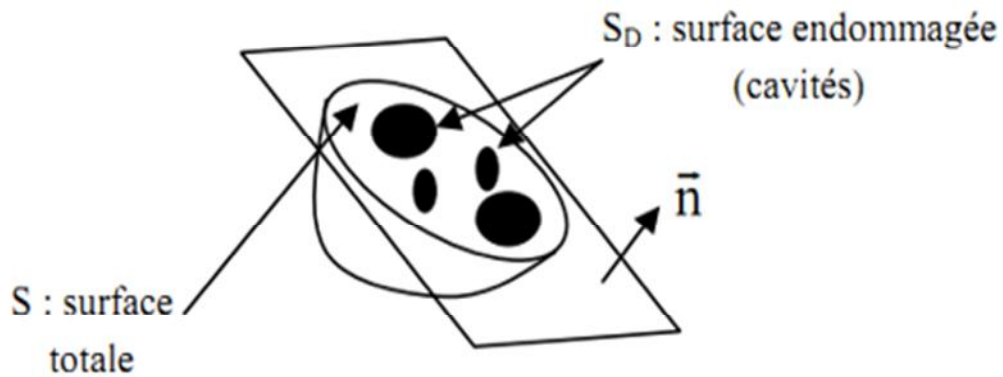


Figure (I-8) : Coupe d'un élément endommagé

La variable d'endommagement est donnée, pour chaque direction \vec{n} , par le rapport entre la surface S_D et la surface S :

$$D_n = \frac{S_D}{S} \quad (I-20)$$

La variable D_n représente la densité surfacique de défauts dans le plan de normale \vec{n} :

$D_n = 0$ correspond au matériau initialement non endommagé.

$D_n = 1$ correspond au matériau totalement rompu dans le plan de normale \vec{n} .

Cette représentation générale permet de rendre compte d'un endommagement anisotrope.

Si on considère que les défauts sont répartis de manière uniforme pour toutes les directions \vec{n} , alors l'endommagement peut être considéré comme isotrope, soit $D_n = D$ \vec{n} .

Cette forme d'endommagement scalaire a été utilisée par de nombreux auteurs de par sa simplicité. Notons qu'il est tout à fait possible d'utiliser plusieurs variables scalaires pour des directions prédéfinies.

Cependant, l'hypothèse d'isotropie n'est pas toujours vérifiée. Il est alors nécessaire d'utiliser des lois d'évolution différentes suivant les directions.

I.7.2. Concept de variables effectives

La notion de contrainte effective introduite par Kachanov découle directement de la densité surfacique de discontinuités. Lorsqu'un matériau est endommagé, les sections élémentaires ne résistent pas dans leur totalité aux efforts. Dans le cas d'un matériau sain, la contrainte exercée sur une surface S soumise à une force perpendiculaire F s'exprime par la relation :

$$= \frac{F}{\tilde{S}} \quad (\text{I-21})$$

Dans un matériau endommagé, la section effective résistante \tilde{S} est plus faible que S du fait de la création de micro cavités. Dans le cas d'un endommagement isotrope, on définit \tilde{S} comme suit :

$$\tilde{S} = S(1 - D) < S \quad (\text{I-22})$$

Dans le cas uniaxial, la contrainte effective est alors définie par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (\text{I-23})$$

Dans le cas tridimensionnel d'un endommagement isotrope, le tenseur des contraintes effectives s'écrit :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-D} \quad (\text{I-24})$$

Afin de tenir compte des effets de concentration de contraintes au voisinage de micro défauts, une hypothèse d'équivalence en déformation (figure I-9) a été introduite par Chaboche et Lemaitre. Le tenseur des contraintes effectives est alors défini de la façon suivante : « Le tenseur des contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ est celui qu'il faudrait appliquer au EVR vierge afin d'obtenir la même déformation que dans l'EVR endommagé soumis à la contrainte σ ».

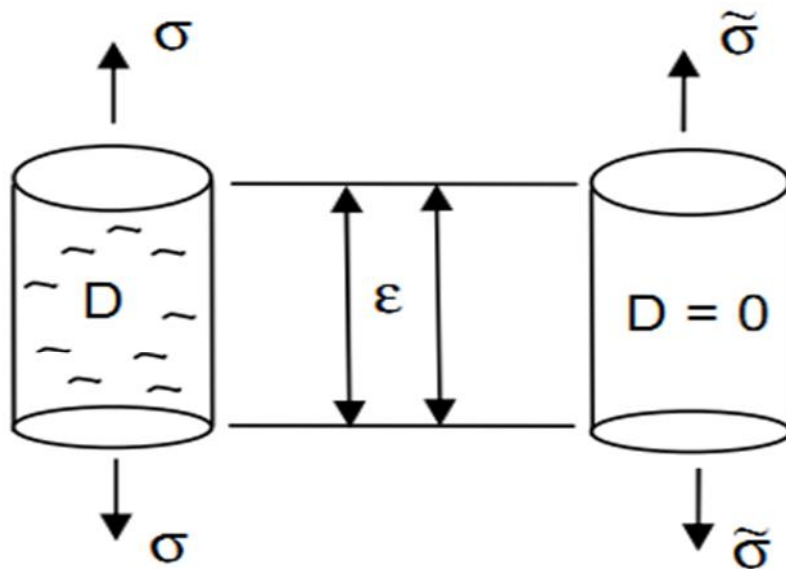


Figure (I-9) : Principe d'équivalence en déformation.

I.7.3. Cadre thermodynamique

Pour modéliser l'endommagement, nous nous plaçons dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus [GER80]. Le comportement thermomécanique est décrit en introduisant dans un premier temps des variables d'état observables telles que la déformation totale ϵ_{ij} et la température T . En considérant l'hypothèse des petites déformations, la déformation totale est dissociée en une partie relative à la déformation thermo élastique ϵ^e et une partie relative à la déformation plastique ϵ^p .

$$\epsilon_{ij} = \epsilon^e_{ij} + \epsilon^p_{ij} \quad (I-25)$$

Des variables d'état internes sont également introduites pour décrire les phénomènes dissipatifs d'écrouissage et d'endommagement. Ces variables représentent l'état interne de la matière (densité de dislocations, micro cavités, ...) mais ne sont pas mesurables directement. Pour chacune de ces variables d'état, il existe une variable associée comme l'indique le Tableau I.2.

Tableau I.2 : Variables d'état et variables associées

Mécanismes	Variables d'état observables	Variable d'état internes	Variables associées
Thermo élasticité	ϵ_{ij}		ϵ_{ij}
Entropie	T		S
Plasticité		ϵ^p_{ij}	$-\epsilon_{ij}$
Ecrouissage isotrope		r	R
Ecrouissage cinématique		χ_{ij}	X_{ij}
Endommagement		D	$-Y$

L'énergie libre de Helmholtz ψ est utilisée comme potentiel thermodynamique d'état ($\epsilon^e, D, r, \chi_{ij}, T$).

Les propriétés élastiques n'étant pas affectées par l'écrouissage, le potentiel d'état est la somme des contributions thermo élastique ψ^e , plastique ψ^p et purement thermique ψ^T :

$$\psi = \psi^e + \psi^p + \psi^T \quad (I-26)$$

Par la suite, nous utiliserons le potentiel d'enthalpie libre de Gibbs qui est déduit de celui de Helmholtz par la relation suivante :

$$\Psi = \sup_{\epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \epsilon \right] = \sup_{\epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^e - \epsilon \right] + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^p - p - T \quad (I-27)$$

Finalement :

$$\Psi = \epsilon + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^p - p - T \quad (I-28)$$

Où :

ρ : est la densité

ϵ : est la contribution élastique affectée par l'endommagement

$p = \frac{1}{\rho} \left(\int_0^r R dr + \frac{1}{3} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \right)$: est la contribution plastique dû à l'écrouissage du matériau

T : est la contribution dû uniquement à la température

L'évolution de la variable d'état dérive du potentiel d'état :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}^e} + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (I-29)$$

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (I-30)$$

De la même façon, les variables associées sont définies par :

$$R = - \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$X_{ij} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{ij}}$$

$$Y = \frac{\partial \Psi}{\partial D}$$

Le second principe de la thermodynamique (inégalité de Clausius Duhem) impose que la dissipation mécanique soit positive :

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - R \dot{r} - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij} + Y \dot{D} - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad}(T)}{T} \geq 0 \quad (I-31)$$

Avec \vec{q} le flux thermique.

Finalement, les lois d'évolution des variables internes dérivent d'un potentiel de dissipation (F) dont l'existence est postulée. Cette fonction, qui est convexe dépend des variables associées, permet d'assurer le second principe de la thermodynamique :

$$F = F(\sigma, R, X_{ij}, Y, D, T) \quad (I-32)$$

Ce potentiel de dissipation peut être décomposé en 3 termes :

$$F = f + F_x + F_D \quad (I-33)$$

f : est la fonction relative au critère de plasticité,

F_x : est un terme relatif à l'érouissage cinématique non linéaire,

F_D : est le potentiel d'endommagement.

Les lois de normalité qui en découlent s'expriment par :

$$\dot{\sigma}_{ij}^p = \frac{\partial F}{\partial(-\sigma_{ij})} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (I-34-a)$$

$$\dot{r} = - \frac{\partial F}{\partial R} \quad (I-34-b)$$

$$\dot{X}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial X_{ij}} \quad (I-34-c)$$

$$D = - \frac{\partial F}{\partial(-Y)} = \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (I-34-d)$$

correspond au multiplicateur plastique, scalaire strictement positif, qui est calculé à partir de la condition de consistance : $\dot{f} = 0$ et $f = 0$.

I.7.4. Mécanismes de déformations et d'endommagement en dynamique

[SAN07] :

L'endommagement des matériaux est le processus de détermination progressive qui conduit à la rupture. La mécanique de l'endommagement est l'étude à travers des variables mécaniques, physiques, des mécanismes impliqués dans cette détérioration lors des chargements variables des matériaux.

❖ A l'échelle microscopique :

L'accumulation des micros contraintes au voisinage des défauts ou des interfaces et la rupture des liaisons intermétalliques sont responsables de l'endommagement.

❖ A l'échelle mésoscopique :

L'augmentation et la jonction de microfissures ou microcavités vont générer la macro fissure de l'élément de volume représentatif (EVR).

❖ A l'échelle macroscopique:

Les variables d'endommagements des mécanismes continus définis à l'échelle mésoscopique sont un moyen efficace pour effectuer l'étude des deux premières étapes, quant à la troisième étape elle sera étudiée à l'aide de la mécanique de la rupture avec les variables définies à cette échelle macroscopique. On constatera une croissance de la macrofissure.

I.7.4.1. Nature physique de l'endommagement à l'état solide

Tous les matériaux ont une composition atomique, assurant la cohésion de la matière par l'interaction des champs électromagnétiques. L'élasticité est directement reliée au mouvement relatif des atomes. L'étude physique de la liaison atomique conduit à la théorie de l'élasticité, mais une manière beaucoup plus facile de décrire les équations constitutives mathématiques peut être obtenue directement à partir des propriétés de déformations irréversibles au niveau mésoscopique, qui implique un rapport linéaire, en incorporant éventuellement les propriétés de linéarité et d'isotropie.

On parle d'endommagement au moment où la décohésion se produit. La contrainte de cisaillement peut causer une déformation plastique, ainsi qu'un glissement des lignes de dislocation dans la structure cristalline des métaux et alliages métalliques. La figure (I-10) illustre bien ces phénomènes.

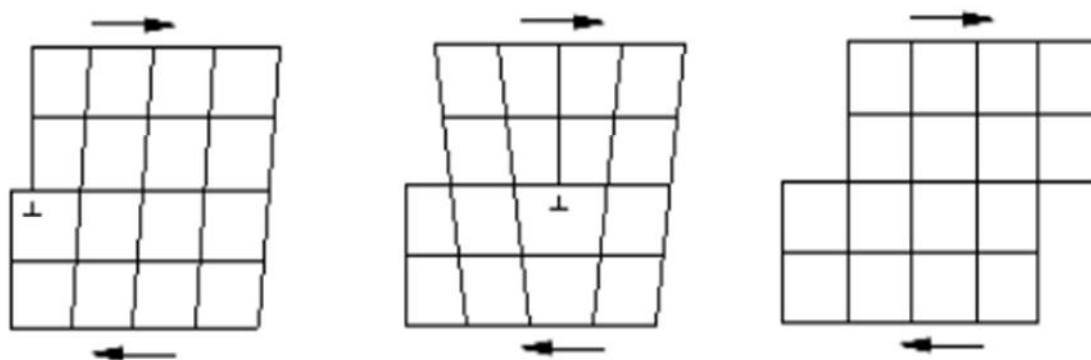


Figure (I-10) : Déformation plastique élémentaire par glissement [SAN07].

Une concentration de micro-contraintes peut se localiser et créer une accumulation de dislocations conduisant à la formation d'une microfissure, si la dislocation est bloquée par un micro-défaut, impureté, joint de grains, etc. Ce processus ne peut produire de décohésion comme représenté sur la figure (I-11).

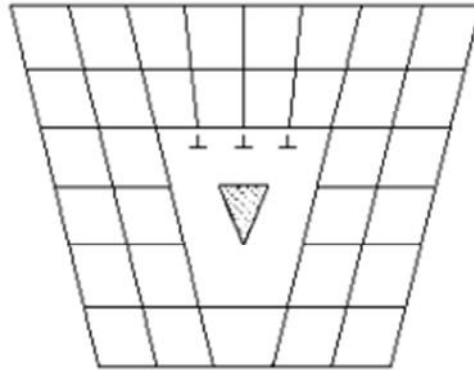


Figure (I-11) : Endommagement élémentaire par nucléation d'une microfissure à partir d'une accumulation de dislocations [SAN07].

Les accumulations de dislocations donnent naissance à une microfissure. Des mécanismes d'endommagement qui sont des décohésions inter granulaires et des décohésions de type inclusion-matrice génèrent des microdéformations plastiques.

❖ Lorsque l'endommagement diminue, le nombre de liaisons atomiques responsables de l'élasticité diminue aussi. L'élasticité est liée à l'endommagement, donc ce dernier diminue la rigidité et la résistance des matériaux.

❖ Lorsque l'endommagement augmente, les déformations croissent aussi, d'où l'importance des calculs couplés, où on calcule simultanément déformations, endommagements et contraintes dans des problèmes d'évolution des propriétés mécaniques.

I.7.4.2. Glissement, plasticité et déformation irréversible : [SAN07]

Il existe une relation entre le glissement des plans cristallins et la plasticité, la figure (I-10) représente le mouvement des dislocations qui produit les glissements et ils se superposent aux déformations élastiques, elles sont en réalité des déplacements d'atomes stables après arrêt de sollicitation. La déformation plastique se fait sans changement de volume appréciable.

I.7.4.3. Mécanismes physiques de l'endommagement

Les déformations élastiques et plastiques qui se situent respectivement au niveau des atomes et des plans cristallins respectent la cohésion de la matière. L'endommagement, par essence, détruit cette cohésion par création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la matière.

Elles se situent souvent à l'échelle plus grande des cristaux : on parlera de microfissures ou de cavités.

L'endommagement se manifeste de plusieurs façons différentes, à l'échelle microscopique par un mécanisme de décohesion, à l'échelle mésoscopique apparaît sous plusieurs formes et cela dépend de la nature des matériaux, du type de chargement et de la température. Quand une fissure se produit, à l'échelle mésoscopique, sans déformation plastique avec une faible énergie de rupture, l'ordre de grandeur qui est exprimé par le rapport de la déformation plastique à la déformation élastique est :

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} < 1 \quad (\text{I-35})$$

On conclut que le clivage s'initie à des efforts inférieurs à ceux des glissements mais plus élevés que pour les efforts de décohesion, la figure (I-12) montre un exemple de rupture fragile par clivage.

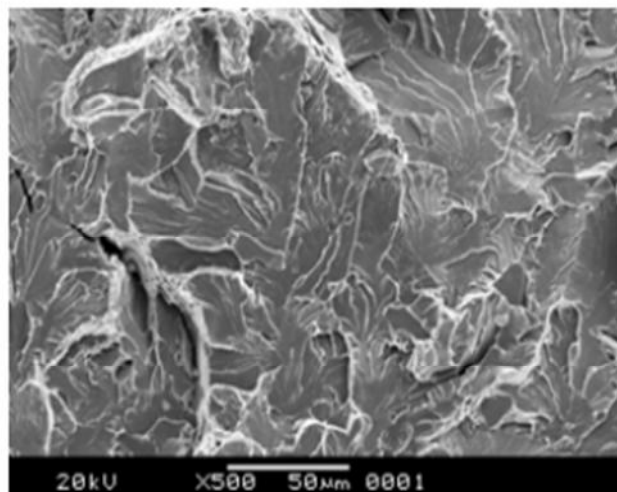


Figure (I-12): Rupture fragile par clivage [SAN07]

I.7.5. Endommagement ductile [LC85], [LCBD85]

Il s'agit de l'endommagement associé aux grandes déformations plastiques qui engendre la croissance et la coalescence de cavités par le mécanisme d'instabilité micro-ductile :

- La déformation plastique cumulée est très grande.
- La courbe d'érouissage présente une grande phase de striction.
- Le matériau peut stocker une énergie importante avant rupture.

L'endommagement ductile est le résultat de l'instabilité des très grandes déformations locales engendrées au voisinage des défauts cristallins. Selon la densité de ces défauts, la déformation macroscopique globale peut être importante ou non, si bien qu'un matériau montrant des faciès de rupture ductile peut présenter un comportement global ductile ou fragile. Les défauts responsables de l'amorçage de l'endommagement ductile sont :

- Les particules d'éléments d'addition dans les alliages.
- Les inclusions.
- Les précipités de mise en solution par traitement thermique.
- Les empilements de dislocations.
- Les joints de grains.

L'endommagement décrit des phénomènes de création de surfaces qui à l'échelle des liaisons atomiques apparaissent selon deux mécanismes: le clivage et la cavitation, au sein d'un matériau soumis à une sollicitation. La théorie de l'endommagement s'applique jusqu'à l'amorçage de fissures macroscopiques comme le montre la figure (I-13).

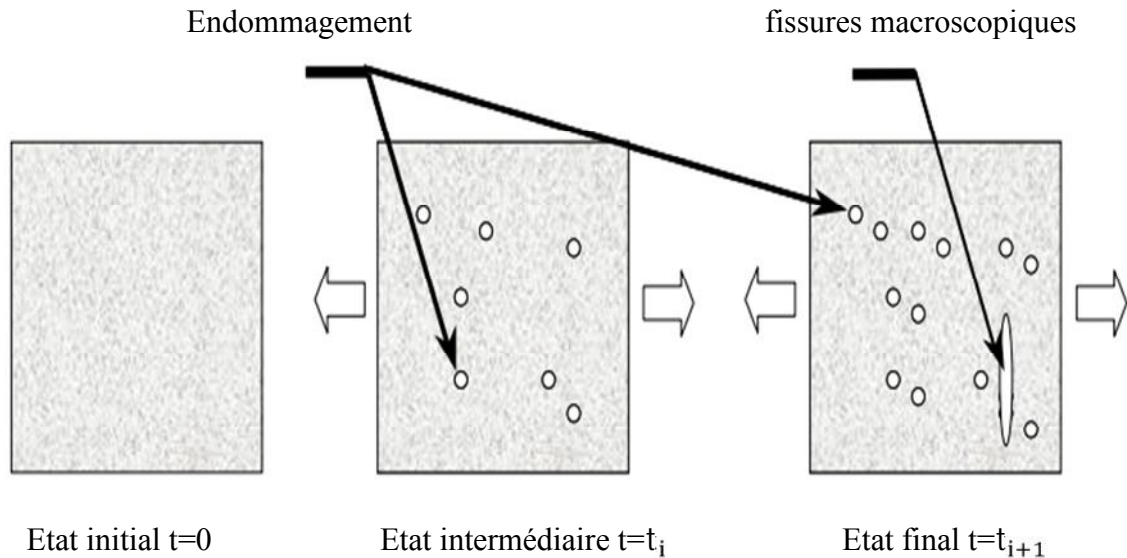


Figure (I-13) : endommagement ductile d'un matériau sous sollicitation mécanique
[CAM03]

I.8. Essais dynamiques

Afin de caractériser le comportement dynamique des matériaux, on fait appel à divers dispositifs expérimentaux selon la nature (gamme de déformations et de vitesses de déformations) de la sollicitation souhaitée, principalement en traction, compression et cisaillement. Certains sont classiques (essai de Taylor et essai de cisaillement), d'autres sont totalement novateurs (essai de traction dynamique et essai de frottement).

L'objectif principal des essais expérimentaux est de fournir à la procédure d'identification les réponses expérimentales des matériaux soumis à de grandes variations des grandeurs thermomécaniques, afin de poursuivre l'identification des paramètres constitutifs des lois et critères qui régissent ces phénomènes.

I.8.1. Classification des essais en dynamique rapide

Le classement des sollicitations dans la dynamique rapide est fait par le niveau du taux des vitesses de déformations. Les sollicitations à faible taux de vitesses de déformations accompagnent généralement certaines opérations industrielles de mise en forme : emboutissage, forgeage, etc. À l'autre extrémité, on trouve les phénomènes d'impact à hypervitesse accompagnés par des sollicitations à très fort taux de vitesses de déformations allant jusqu'à des transformations de phase comme c'est le cas pour la perforation avec des projectiles à charge creuse. Entre ces deux extrémités, il s'agit des sollicitations qui

apparaissent lors de l'usinage à grande vitesse, lors de crash des structures de transport (aéronautique, ferroviaire, automobile) et lors de l'impact.

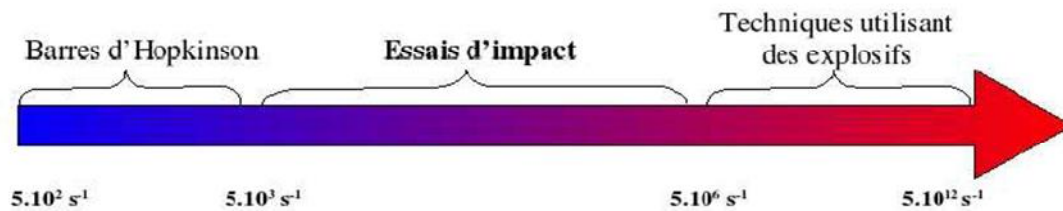


Figure (I-14) : Niveau de vitesse de déformation accessible en fonction du type d'essai [NIS05].

I.8.2. Essais expérimentaux

➤ Essais par barre d'Hopkinson (1914) ([NIS05], [CUQ06], [SAN07], [JEU08])

Les dispositifs à barres d'Hopkinson permettent d'effectuer des sollicitations (traction, compression ou torsion) à des vitesses de déformation jusqu'à 5000 s^{-1} . L'échantillon est placé entre une barre d'entrée et une barre de sortie (figure I-15). Un projectile est lancé sur l'extrémité libre de la barre d'entrée, ce choc génère une onde qui se propage dans la barre d'entrée. A la surface de contact barre d'entrée - échantillon, une partie de cette onde se propage dans l'échantillon et l'autre partie est réfléchiée. L'onde transmise traverse l'échantillon et rencontre la surface échantillon - barre de sortie. Une partie de cette onde est une nouvelle fois réfléchiée et traverse à nouveau en sens inverse l'échantillon. Cette propagation d'onde permet de générer ainsi une sollicitation dynamique de l'éprouvette. La mesure sur les barres d'entrée et de sortie du passage des ondes permet de revenir à la déformation de l'échantillon et à la force appliquée.

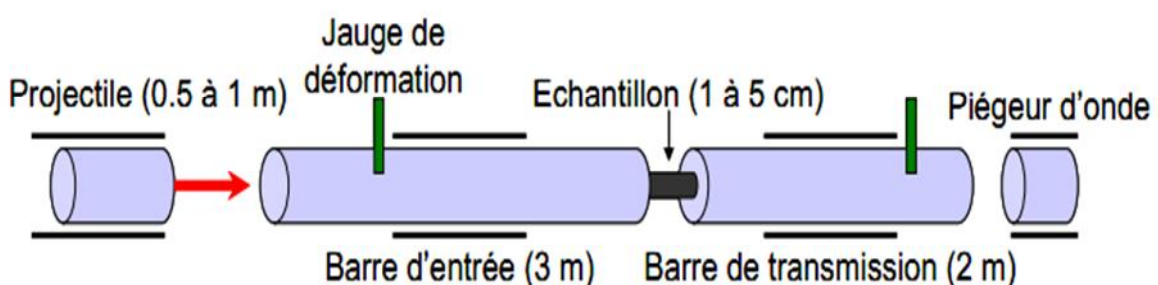


Figure (I-15) : Principe de fonctionnement du dispositif à barre d'Hopkinson [CUQ06].

➤ **Les chocs par Explosifs (1945) ([CUQ06])**

Bien que les explosifs soient exploités depuis le début du 20^{ème} siècle, la détonation en tant que sollicitation fut surtout étudiée après la fin de la 2^{ème} Guerre Mondiale. Cette méthode consiste à placer une charge explosive à proximité d'une cible. L'explosion de la charge génère une onde de détonation qui se transmet ensuite dans la cible solide. L'amplitude et la durée de l'onde générée dépend de l'explosif utilisé et du rapport d'impédance entre la charge et la cible, permettant d'atteindre la dizaine de Mbar au maximum à des vitesses de déformation pouvant aller jusqu'à 10^5s^{-1} .

➤ **Les Impacts de plaque par canon à gaz (1960) ([CUQ06], [NIS05])**

Un canon à gaz illustré en (figure I-16) est essentiellement constitué d'un réservoir de gaz comprimé à ouverture ultra-rapide, d'un tube de lancement, d'une chambre porte-cible et d'un dispositif de récupération des éclats. Le projectile est constitué d'un sabot poussant un disque qui constitue l'impacteur. Le projectile est mis en vitesse à l'ouverture de la vanne du réservoir à gaz par différence de pression. La stabilisation de la vitesse du projectile s'établit dans le tube de lancement et l'issue de sa course, il frappe l'échantillon instrumenté fixé dans la chambre du porte-cible. Pour induire un choc plan, la face avant de l'échantillon et de « l'impacteur » doivent être parallèle. Dans un échantillon donné, l'intensité du choc et sa durée ne dépendent que de la pression motrice, du poids du projectile, de la polaire de choc et de l'épaisseur de l'impacteur. Les chocs peuvent atteindre quelques Mbar dans le cas des impacts hypervéloces (quelques km/s) à des vitesses comprises entre 10^4 et 10^6s^{-1} .

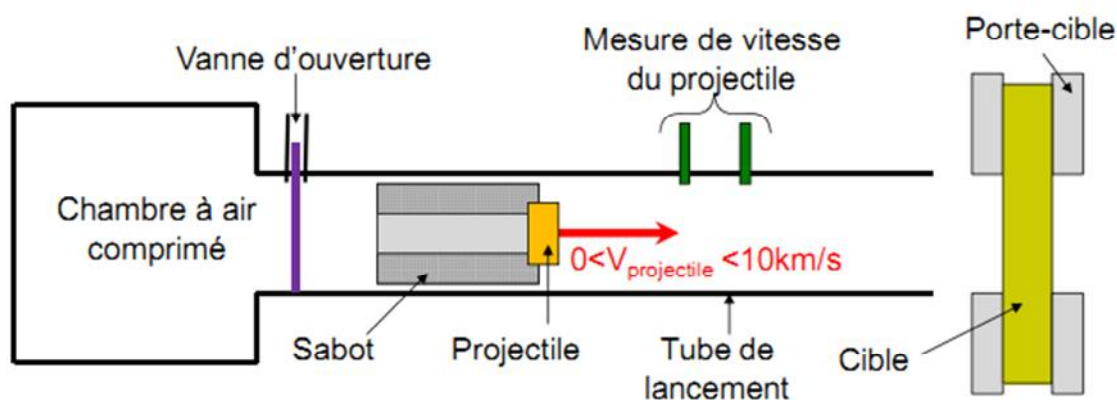


Figure (I-16) : Principe de fonctionnement d'un canon à gaz [CUQ06]

➤ **Les chocs induits par laser de puissance nanoseconde (1974) [CUQ06] :**

La génération d'une onde de choc consiste à concentrer une impulsion laser de haute puissance sur une surface solide (figure I-17). L'énergie déposée interagit avec la matière, portant la face irradiée à très haute température. Cela a pour effet d'ablater une fine couche de matière qui est vaporisée ou transformée en plasma en fonction de l'intensité énergétique. Celle-ci se détend et par principe d'action/réaction entraîne une onde de compression de la cible. Cette méthode offre actuellement les pressions les plus hautes (à l'exception des essais nucléaires) de l'ordre de plusieurs dizaines de Mbar, avec les durées de sollicitation les plus courtes (de 1 à quelques dizaines de nanosecondes) et des vitesses de déformation pouvant atteindre 10^7 s^{-1} .

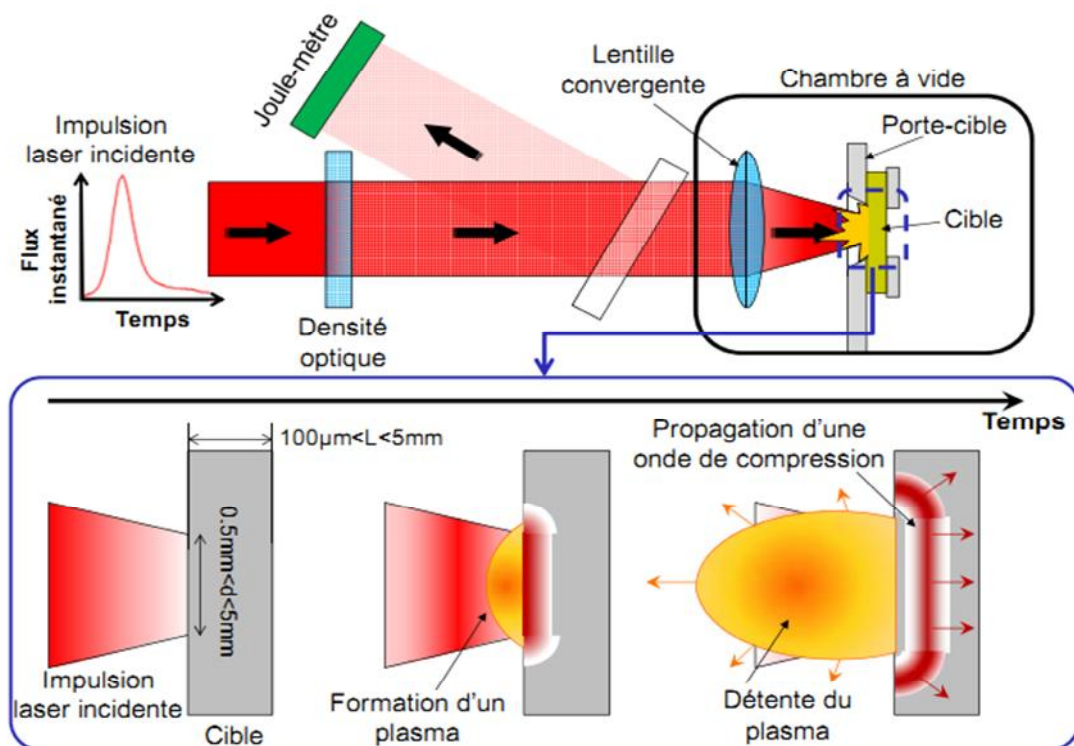


Figure (I-17) : Principe de génération d'un choc par impact laser [CUQ06].

Chaque dispositif présenté couvre une plage dynamique qui lui est propre et qui est liée à la durée de maintien de la sollicitation. Ainsi, l'utilisation transversale de ces générateurs de choc permet de déduire l'évolution des propriétés d'un matériau en fonction de la vitesse de déformation.

Tableau I.3 : Limite d'élasticité du tantale pur à différentes vitesses de déformation obtenues avec plusieurs méthodes de sollicitation [CUQ06].

Méthode utilisée	Vitesse de déformation (s^{-1})	Limite d'élasticité (MPa)
Quasi-statique	10^{-4}	180
Barres d'Hopkinson	10^2	310
Impact de plaques par Canon	$2 \cdot 10^4$	550
Choc laser ns	$1,4 \cdot 10^6$	890

Les essais d'impact peuvent ainsi être groupés en deux catégories :

- les essais à déformation plastique qui servent à l'identification des lois de comportement volumique uniaxial et surfacique à forts taux de déformation.
- les essais d'endommagement et rupture dynamique qui utilisent les lois déterminées par les essais de la première catégorie afin d'identifier les paramètres des critères d'endommagement et rupture dynamique.

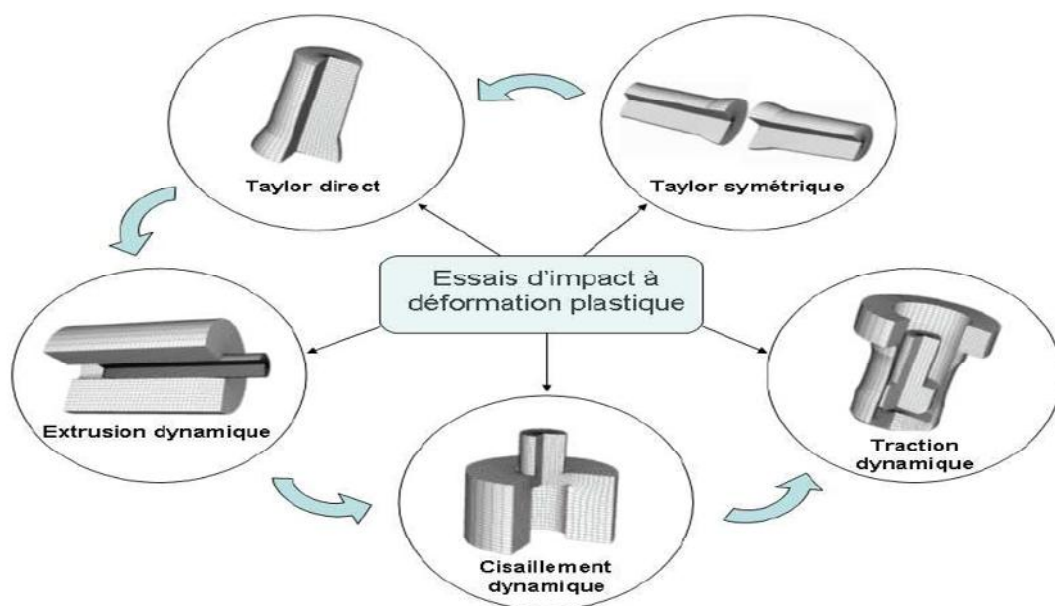


Figure (I-18) : Essais à déformation plastique [NIS05].

➤ **Essais de compression**

Deux essais sont compris dans cette classe, l'essai de Taylor direct et l'essai de Taylor symétrique, qui diffèrent par leur réalisation. L'objectif étant le même, l'identification des paramètres des lois de comportement en compression aux fort taux de déformation.

➤ **Essai d'impact de Taylor [PAN05]**

L'essai d'impact de Taylor est par excellence l'essai classique permettant de caractériser le comportement en compression des matériaux aux forts taux de déformation (10^4 - 10^5 s⁻¹), il est relatif au comportement dynamique, consiste à projeter un échantillon cylindrique sur une cible rigide dans le cas de l'essai de Taylor direct ou sur un échantillon identique dans le cas d'un essai de Taylor symétrique. La difficulté principale de réalisation d'un essai de Taylor symétrique réside dans l'alignement de l'axe de la cible avec l'axe du projectile lors du tir. La (figure I-19) montre les échantillons et le sabot après impact pour un acier 42CrMo4 dans une configuration d'essai symétrique pour une vitesse d'impact $V_c = 328$ m/s.



a) Echantillon cible déformé.



b) Sabot et échantillon projectile déformé.

Figure (I-19) : Essai de Taylor symétrique pour un acier 42CrMo4 [PAN05]

La gamme des déformations pouvant être obtenues avec des essais d'impact de Taylor est relativement large comme illustrée sur la (figure I-20) présentant l'état déformé d'un échantillon d'aluminium, de dimensions identiques à celui en acier,

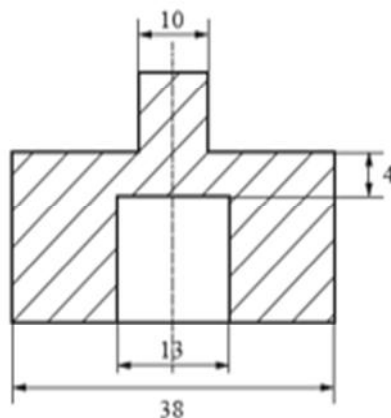
après un essai d'impact direct sur une cible en acier pour vitesse d'impact $V_c=278\text{m/s}$. Les très forts taux de déformation obtenus lors de cet essai conduisent ainsi à la présence de zones endommagées et fissurées sur le projectile.



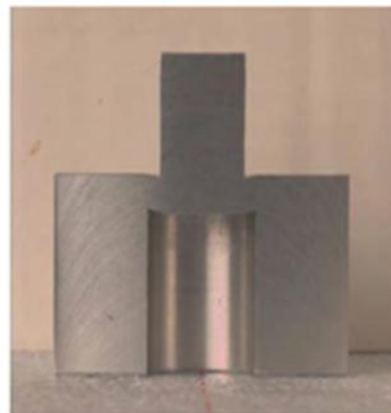
Figure (I-20) : Essai de Taylor direct pour un projectile en aluminium [PAN05].

➤ **Essai de cisaillement dynamique**

Le principe de cet essai est similaire à celui de l'essai de Taylor, mais la forme de l'échantillon (figure I-21) est telle que l'essentiel de la déformation plastique obtenue résulte du cisaillement dans une zone confinée de la cible. Cette forme, généralement connue sous la dénomination de « éprouvette chapeau » est issue des travaux de Meyers et al. (figure I-21-a), (figure I-21-b) montre un échantillon en aluminium 2017 déformé après un impact par un projectile constitué d'un cylindre de Taylor à une vitesse $V_c=111\text{m/s}$.



(a) Schéma de principe



(b) Echantillon déformé

Figure (I-21): Essai de cisaillement dynamique [PAN05].

➤ **Essai de traction dynamique**

Cet essai sert à caractériser le comportement d'un matériau soumis à une sollicitation de traction dynamique. La cible, un tube creux (figure I-22), est soumise à une sollicitation de traction sur sa partie utile (la zone centrale) suite à l'impact du projectile sur le fond intérieur. Après impact, la longueur de la zone utile, la longueur totale et le diamètre de la cible sont pris en compte afin d'identifier les paramètres de la loi de comportement. La (figure I-22 c) montre une vue d'un échantillon totalement rompu après impact.

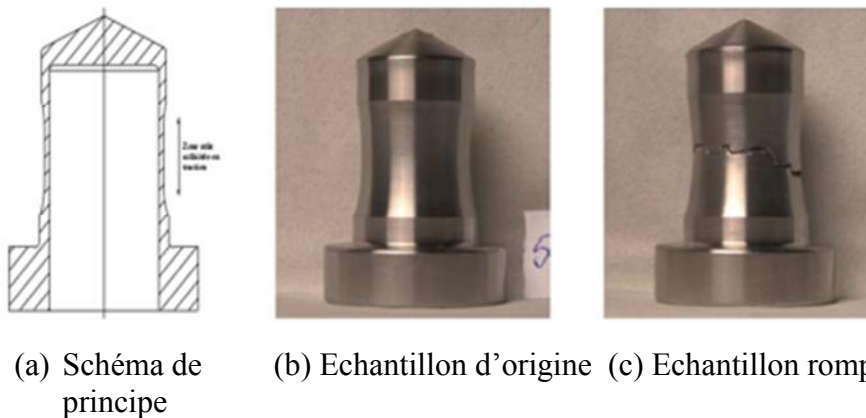


Figure (I-22) : Essai de traction dynamique ([PAN05], [PNC03]).

➤ **Essai d'extrusion conique**

Cet essai est dévolu à l'étude du frottement dynamique à grande vitesse pour l'identification de la loi de contact associée à un couple de matériaux A et B. L'essai d'extrusion conique développé consiste à projeter un lopin d'un matériau A dans une cible en matériau B percée d'un alésage en forme de tronc de cône prolongé par une forme cylindrique (figure I-23). La partie en tronc de cône en tête de l'échantillon facilite l'auto-adaptation du projectile dans la cible. La conception du système a pour objectif l'obtention d'une énergie de dissipation par frottement la plus grande possible (au moins 60% de l'énergie totale dissipée). L'ensemble est dimensionné afin que le projectile soit stoppé par frottement dans la cible au cours de l'essai. Après l'essai, on mesure la déformée du lopin, en particulier la longueur d'extrusion obtenue.

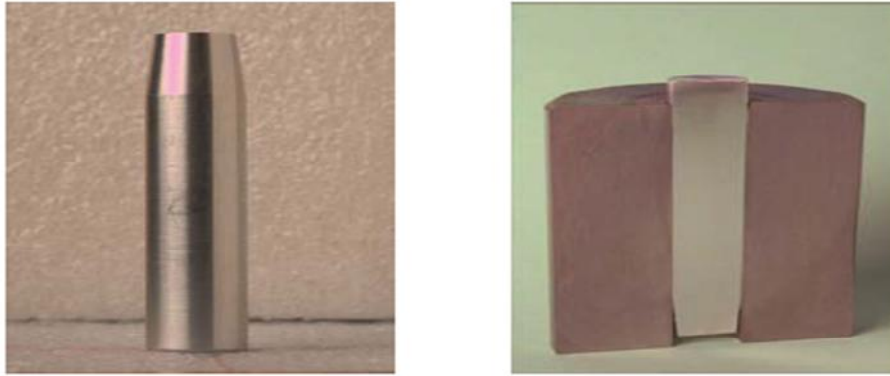


Figure (I-23) : Essai d'extrusion conique ([PAN05], [PNC03])

➤ **Essais d'impact avec endommagement et rupture dynamique**

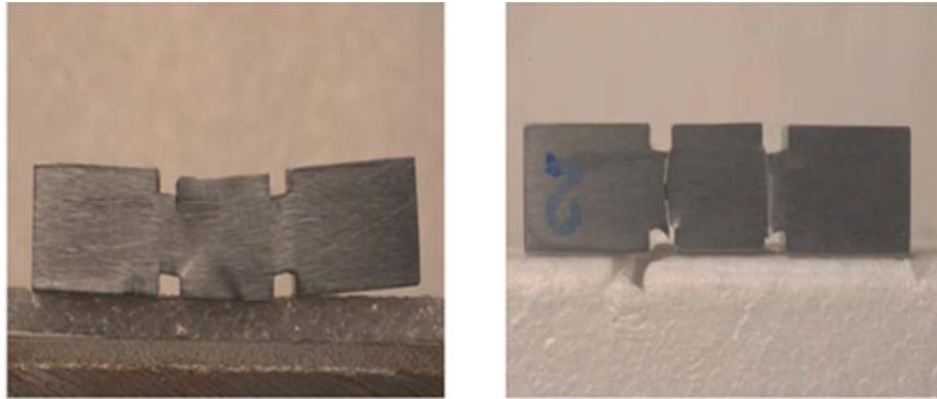
Le besoin d'étudier le comportement des matériaux au-delà de l'état de déformation plastique a imposé une réflexion sur le développement d'un nouvel essai d'impact capable de caractériser l'endommagement et la rupture des matériaux métalliques soumis aux sollicitations dynamiques.

➤ **Essai de rupture dynamique**

La gamme des essais de caractérisation de la loi de comportement est complétée par la caractérisation de la loi d'endommagement du matériau basée sur un essai de rupture par cisaillement dynamique (figure I-24). Cet essai consiste à impacter un échantillon entaillé de forme parallélépipédique avec un projectile de type cylindre de Taylor.

Deux configurations peuvent être mises en œuvre :

- un essai à déformation contrôlée, dans lequel on contrôle le déplacement de la face arrière de l'échantillon lors de l'impact comme indiqué sur la (figure I-24-a),
- un essai à déformation libre dans lequel on peut observer la rupture complète de l'échantillon comme indiqué sur la (figure I-24-b).



(a) Essai à déformation contrôlée (b) Essai sans contrôle de la déformation

Figure (I-24) : Essai de rupture dynamique [PAN05].

I.9. Différents modes de ruines [CAM03]

Plusieurs modes de ruines existent, lors de l'impact à grande vitesse d'un projectile sur une cible.

I.9.1. Ecaillage

L'effet des ondes de chocs donne naissance au phénomène d'écaillage. Lorsqu'une onde de choc, suivie d'ondes de détentes ($C+$), se réfléchit à la surface libre du milieu, créant des ondes de détentes ($C-$) qui interfèrent avec le faisceau ($C+$) incident, il y a un processus d'endommagement qui se produit, au moment où l'on projette une plaque d'épaisseur finie sur une cible à grande vitesse.

La conjonction des deux faisceaux fait rompre le solide en deux parties qui se séparent l'une de l'autre : c'est l'écaillage normal, la (figure I-25) représente l'écaillage.



Figure (I-25) : Ecaillage normal (Photographie de l'institut franco-allemand de Saint-Louis) [CAM03].

I.9.2. Rupture en pétale

Ce mode d'endommagement entre en jeu lors de la pénétration d'un projectile dans une plaque mince de matériaux comme le montre la (figure I-26). Ce mécanisme est utilisé sur des matériaux ductiles sous l'effet de l'effort de flexion qui s'exerce sur la face arrière de la cible. La rupture part de l'axe de pénétration et s'étend dans plusieurs directions pour former des pétales.

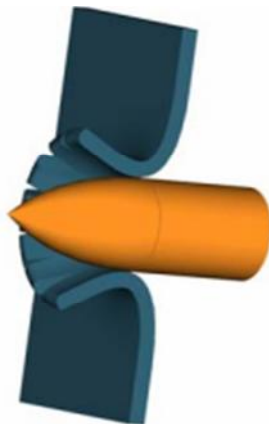


Figure (I-26) : Rupture en pétale [CAM03]

I.9.3. Poinçonnage

Le mode de rupture par poinçonnage apparaît lorsqu'un projectile perce une plaque mince à une vitesse inférieure à 1000m/s. Le cratère a juste le diamètre du projectile (figure I-27). Le projectile vient cisailer la plaque exactement à la manière d'un poinçon.

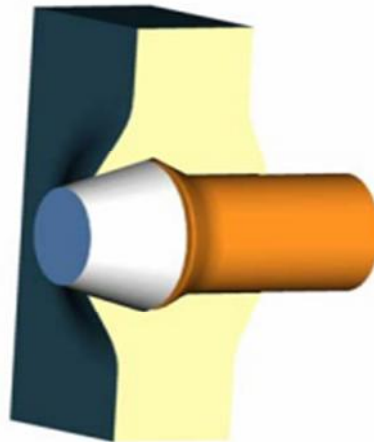


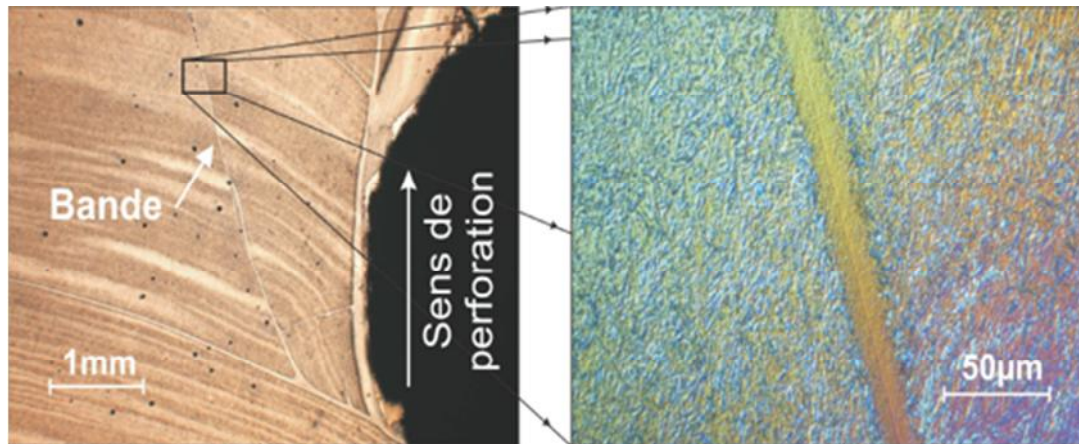
Figure (I-27) : Rupture par poinçonnage [CAM03].

I.9.4. Cisaillement adiabatique [RAN04]

Le cisaillement adiabatique est un mécanisme de ruine intervenant le plus souvent dans les matériaux ductiles, par exemple les métaux, lors de sollicitations dynamiques mettant en jeu de grandes vitesses de déformation. Ce phénomène est caractérisé par une localisation de la déformation plastique de cisaillement sous forme de bandes de faibles épaisseurs. Ce sont les propriétés thermiques et plus précisément la diffusivité thermique qui détermine l'épaisseur de la bande. Cette localisation s'accompagne d'une dissipation de l'énergie de déformation plastique sous forme de chaleur.

Lors d'une sollicitation dynamique, le temps de déformation est si court que la chaleur ne peut s'évacuer par conduction. C'est la raison pour laquelle ce phénomène est qualifié d'adiabatique. Cependant à l'échelle de dimension des bandes, la conduction n'est pas négligeable. Le cisaillement adiabatique conduit à des déformations intenses très localisées qui sont les précurseurs de la création de microcavités et donc de fissures. En phase terminale, le cisaillement adiabatique est donc le siège de la propagation d'une fissure.

L'étude des bandes de cisaillement adiabatique (BCA) sont faites dans le but d'améliorer la connaissance des phénomènes mis en jeu, afin de développer des critères de ruine intégrables dans des codes de calcul et de limiter le coût inhérent aux essais dynamiques.



Vue générale

Agrandissement

Figure (I-28) : Bande de cisaillement dans un acier de blindage après perforation par un obus flèche [RAN04].

I.10. Lois de comportement des métaux sous sollicitations dynamiques

Pour décrire le comportement dynamique des matériaux métalliques, il est important d'utiliser des lois qui tiennent compte de la vitesse de déformation plastique équivalente mais aussi de la température. Les modèles les plus couramment utilisés sont les modèles thermo-élastoplastiques.

Dans ce qui suit, nous donnerons quelques modèles dynamiques en distinguant les modèles phénoménologiques et les modèles élaborés à partir des considérations microphysiques (les modèles prenant en compte la microstructure du matériau).

On a constaté une remarquable augmentation de la demande d'analyses thermomécaniques sous sollicitations rapides. Divers régimes dynamiques en fonction de l'importance des effets inertiels ont été mis en évidence.

La nature dynamique des phénomènes est régie par plusieurs degrés de complexité : propagation des ondes, échauffement et influence de la température sur le comportement, phénoménologie dépendant de la vitesse de sollicitation, hétérogénéité des chargements, sont des effets à considérer.

L'étude des sollicitations lentes, appelées « quasi-statiques », appliquées à l'échelle de la minute ou de la seconde, l'étude des sollicitations rapides, appliquées à l'échelle de la milli-

ou de la microseconde, voir (figure I-29). Ce cloisonnement tend actuellement à s'estomper sous l'impulsion de nouvelles problématiques, on donnera quelques exemples de telles applications par ordre croissant de rapidité.

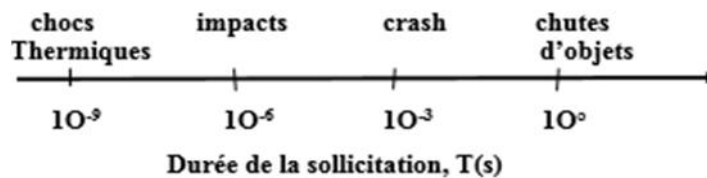


Figure (I-29) : Classification des phénomènes dynamiques en fonction d'un temps caractéristique de variation de chargement [DHRT00].

Certaines applications industrielles exploitent de plus en plus les phénomènes rapides tels que l'abattage de roches par explosif, l'exploitation pétrolière, l'usinage à grande vitesse, mise en forme, le placage ou soudure par explosif, la destruction de calculs rénaux ou biliaires par impacts laser, etc.

Les sollicitations rapides sont dites « dynamiques », lorsque les effets d'inertie ne peuvent plus être négligés, et que l'énergie cinétique n'est plus négligeable par rapport à l'énergie de déformation. Le dimensionnement des structures est plus difficile à effectuer.

Tout processus de déformation qui invoque des vitesses de chargement supérieure à 1 s^{-1} sont dynamiques, et ces derniers se composent de trois régimes : le dynamique lent, dynamique moyen, et pour finir le régime dynamique rapide.

❖ Le régime dynamique lent :

Entre 1 et 10 s^{-1} on peut l'approcher avec les mêmes outils que le processus quasi statique. Ces vitesses de sollicitation correspondent aux capacités maximales des moyens d'essais classiques et de leur instrumentation.

❖ Le régime dynamique moyen :

Entre 10 et 1000 s^{-1} ce régime possède une échelle temporelle de l'ordre de la milliseconde, le phénomène de crash est situé dans cette partie.

❖ Le régime dynamique rapide :

Au-delà de 10^4 s^{-1} il utilise le chargement transitoire par essence qui est la mise en œuvre de pressions et de taux de triaxialités très élevés. Le temps caractéristique de cette gamme peut atteindre la nanoseconde et elle est décrite comme étant hydrodynamique, elle représente des phénomènes d'une extrême violence.

Ce régime est caractérisé par le phénomène de propagation d'ondes mécaniques, et en particulier d'ondes de choc.

I.11. Comportement et rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques

La prise en compte de la dépendance du comportement par rapport à la température et de la dissipation mécanique dans l'équation de la chaleur est indispensable pour l'étude de l'adiabaticité des phénomènes rapides. Cela devient d'autant plus difficile dans le domaine dynamique moyen.

Il existe quelques phénomènes de chargements rapides qui se produisent sous forme localisée. L'adoucissement thermique associé à l'échauffement adiabatique par dissipation provoquant une génération de bandes de cisaillement ultra fines, prévoit à des ruptures catastrophiques, où des zones à grandes traction triaxiale très localisées se développent par croisement d'ondes de détente consécutives à des impacts ou des explosions. Le phénomène très rapide, n'autorise pas de fissuration macroscopique, trop lente, et on assiste à la germination, croissance et coalescence de microcavités ou de microfissures. Sachant qu'un matériau connu par sa ductilité en quasi-statique peut relever d'un endommagement quasi-fragile par microfissuration en dynamique, prenant le polycarbonate soumis à un impact : la dégradation fait apparaître un réseau de microfissures absent aux faibles vitesses, lorsque la vitesse du projectile est suffisante.

I.12. Loi de comportement pour les grandes vitesses de déformations [JEU08]

Il existe deux grandes familles de lois constitutives, les modèles à base physique et les modèles phénoménologiques ou empiriques.

➤ **La modélisation phénoménologique :**

Elle ne prend pas directement en considération la microstructure du matériau, mais se base sur des considérations mathématiques qui exigent une bonne compréhension des phénomènes physiques.

➤ **La modélisation physique :**

Elle prend en considération les mécanismes physiques microscopiques se produisant dans le matériau, la classe de matériaux considérée, ou la structure analysée. Ses capacités d'extrapolation devraient théoriquement être meilleures que celles de l'approche phénoménologique. La formulation tridimensionnelle nécessite des hypothèses fortes. Ces choix se posent à chaque étape de la démarche précédente.

Dans le cadre de l'étude de dynamique rapide la vitesse de déformation est prise en compte dans l'évolution de la limite élastique. Une étude de différents types de lois incluant la vitesse de déformation est réalisée par Lagrange et al.

I.12.1. Lois phénoménologiques

Obtenues par une procédure expérimentale dont la formulation est plus ou moins complexe.

➤ **Modèle de Johnson Cook (1983) [JUT08]**

La loi empirique multiplicative de type Johnson-Cook est la plus répandue, elle permet de représenter l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation équivalente, de la vitesse de déformation et de la température. G. R. Johnson et W. H. Cook [JC83] ont montré expérimentalement, sur une classe très large des alliages métalliques, que l'on peut écrire cette loi de comportement sous la forme multiplicative de l'équation (I-36) tant que la température du matériau n'a pas atteint une température de transition T_{room} . Au-delà de cette température, l'adoucissement thermique n'est plus négligeable et doit être pris en compte pour décrire le comportement du matériau. La loi de comportement s'écrit alors comme le présente l'équation (I-36).

La loi de Johnson-Cook s'écrit pour $T \leq T_{\text{room}}$:

$$\left(\bar{\epsilon}^{pl}, \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}, T \right) = \left(A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^n \right) \left(1 + C \ln \left| \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0} \right| \right) \quad (\text{I-36})$$

Le premier facteur de l'expression représente la dépendance de la limite élastique à la déformation plastique, le deuxième facteur représente la sensibilité à la vitesse de déformation et le troisième facteur modélise l'adoucissement thermique dû à l'élévation de la température résultant de la déformation.

et pour $T_{\text{melt}} \geq T \geq T_{\text{room}}$

$$\left(\bar{\epsilon}^{\text{pl}}, \dot{\bar{\epsilon}}^{\text{pl}}, T \right) = \left(A + B(\bar{\epsilon}^{\text{pl}})^n \right) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{\text{pl}}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right) \left(1 - \frac{T - T_{\text{room}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}} \right)^m \quad (\text{I-37})$$

L'équation (I-37) se décompose en trois termes : le premier correspond à l'écrouissage, le second au durcissement dynamique, et le dernier terme correspond à l'adoucissement thermique.

Le terme d'écrouissage compte trois coefficients : A, B et n. A est la contrainte d'écoulement à déformation plastique nulle, c'est-à-dire quand le matériau n'a pas déjà été sollicité dans le domaine plastique. Les deux autres paramètres correspondent respectivement à la partie linéaire et à la partie non linéaire de l'écrouissage. Ces trois paramètres seront identifiés à partir d'un test de traction en quasi-statique et à température ambiante.

Le terme de durcissement dynamique compte deux paramètres (C et $\dot{\bar{\epsilon}}_0$) : C est un coefficient permettant de mettre en évidence la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation qui présente une forme logarithmique. Si la vitesse de déformation est inférieure à la vitesse de référence, alors le terme n'est pas pris en compte, ce dernier a pour effet d'élever la courbe déformation-contrainte. $\dot{\bar{\epsilon}}_0$ est la vitesse de déformation de référence. Le paramètre C est obtenu grâce à des tests mécaniques de compression à différentes vitesses de déformation.

Le dernier terme correspond à l'adoucissement thermique. Il comporte 3 paramètres : m montrant la sensibilité du matériau à l'élévation de la température, T_{room} la température de transition à partir de laquelle l'adoucissement thermique est pris en compte, et T_{melt} la température de fusion du matériau, température pour laquelle la contrainte d'écoulement est nulle. Le paramètre m est déterminé à l'aide d'essais de traction à différentes températures et en général en quasi-statique.

Ce modèle a l'avantage de nécessiter très peu de constantes à identifier, tout en offrant une bonne représentation du comportement mécanique des matériaux métalliques. Ce qui rend aisé son implémentation dans les codes de calcul numériques.

L'inconvénient majeur du modèle de Johnson Cook réside dans sa formulation qui découple les effets d'érouissage, de la vitesse de déformation et de la température sur la contrainte d'écoulement. De plus, l'influence de la vitesse de déformations sur la contrainte étant prise comme une fonction logarithmique, l'effet non linéaire de la vitesse n'est pas pris en compte. Dans ce cas, le champ d'application du modèle reste limité aux vitesses de déformation inférieures à 10^3 s^{-1} .

Plusieurs extensions ont été proposées vu l'insuffisance de la loi de Johnson Cook.

➤ **Modèle de Holmquist et Johnson (1991)**

Cette extension propose une loi de type puissance en la vitesse de déformation, la limite élastique augmente plus rapidement avec la vitesse de déformation au-delà de 1000 s^{-1} pour les matériaux ductiles.

$$\sigma_{\text{crit}} = (A + B(\bar{\epsilon}^{\text{pl}})^n) \left(\frac{\dot{\epsilon}^{\text{pl}}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^c (1 - T^m) \quad (\text{I-38})$$

➤ **Modèle de Rules et Jones**

$$1 + C_3 \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^{\text{pl}}}{\dot{\epsilon}_0} \right) + C_4 \left(\frac{1}{C_5 - \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^{\text{pl}}}{\dot{\epsilon}_0} \right)} - \frac{1}{C_5} \right) : C_6 \quad (\text{I-39})$$

Rules et Jones remarquent un accroissement très important de la limite élastique pour des vitesses de déformation supérieures à 1000 s^{-1} .

C_3, C_4, C_5 représentent les paramètres matériaux.

$\frac{1}{(C_5 - \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^{\text{pl}}}{\dot{\epsilon}_0} \right))} - \frac{1}{C_5}$: Ce terme représente la vitesse de déformation.

➤ **Modèle de Kang et Kuh (2000)**

Kang et Kuh utilisent une forme quadratique en logarithme de la vitesse de déformation pour un meilleur ajustement de la variation de la limite élastique par rapport à la vitesse de déformation.

$$\dot{\epsilon}_{crit} = (A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^n) \left(1 + C_1 \ln^{-pl} + C_2 (\ln^{-pl})^2 \right) (1 - T^m) \quad (I-40)$$

L'intérêt de ce modèle est d'augmenter la sensibilité à la vitesse de déformation.

➤ **Modèle de Khan et al (2007)**

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \left[A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^{n_0} \left(1 - \frac{\ln \bar{\epsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1} \right] \left(\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{D} \right)^c (1 - T^m) \quad (1-41)$$

Khan et al ajoutent un terme en viscosité au facteur d'écrouissage. L'avantage de ce modèle est d'ajouter une plus grande dépendance par rapport à la vitesse de déformation du taux d'écrouissage.

n_1 et D_0^{pl} sont les paramètres matériaux.

➤ **Modèle de Cowper-Symonds (1957)**

Cette loi est très utilisée dans la littérature, elle consiste à multiplier la limite élastique dite statique par un facteur dépendant de la puissance de la vitesse de déformation plastique, elle ne dépend pas de la température.

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \dot{\epsilon}_{stat} \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{D} \right)^{\frac{1}{P}} \right] \quad (1-42)$$

$\dot{\epsilon}_{stat}$: est la limite élastique non visqueuse, D et P sont des paramètres matériaux.

D'autres auteurs, tels Markiewicz, l'utilisent avec d'autres types de lois, par exemple une loi de type puissance.

Plusieurs extensions ont été proposées.

➤ **Jones et al**

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \dot{\epsilon}_{stat} \left[1 + \left(\frac{(\epsilon_u - \epsilon_y) \dot{\epsilon}}{(\epsilon - \epsilon_y) D_u + (\epsilon_u - \epsilon) D_y} \right)^{\frac{1}{P}} \right] \quad (I-43)$$

$\dot{\epsilon}_y$, $\dot{\epsilon}_u$, $\dot{\epsilon}_y$ et $\dot{\epsilon}_u$ sont respectivement les déformations correspondant au seuil de plasticité et à la rupture. D_u , D_y et P sont des paramètres matériaux. Cette formulation présente le désavantage d'un grand nombre de paramètres, et également le fait que les coefficients de la

vitesse de déformation plastique sont dépendants de la déformation totale, ce qui rend difficile son extension à trois dimensions.

➤ Alvez généralise la relation Cowper-Symonds sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \dot{\epsilon}_{stat} + \dot{\epsilon}_{ref} \left(\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{D} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (I-44)$$

Autres lois :

Nous illustrons quelques lois de comportements dynamiques les moins répandues.

✓ Khobayashi et Dodd, Sheik-Ahmad et Twomey, Lee et al utilisent cette forme :

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \dot{\epsilon}_0 \left(\bar{\epsilon}^{pl} \right)^n \left(\dot{\epsilon}^{pl} \right)^m (1 - T) \quad (I-45)$$

✓ Daridon et al, Batra et Chen, Klopp et al utilisent cette forme :

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\bar{\epsilon}^{pl}_0} \right)^n \left(\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}^{pl}_0} \right)^m \left(\frac{T}{T_0} \right)^v \quad (I-46)$$

Le modèle de Zhao permet de prendre en compte l'évolution de l'écroutissage et le frottement visqueux, il est sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \left(A + B \left(\bar{\epsilon}^{pl} \right) + \left(C + D \left(\dot{\epsilon}^{pl} \right)^m \right) \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0} \right) + E \left(\dot{\epsilon}^{pl} \right)^k \right) (1 - \mu T) \quad (I-47)$$

✓ Rusinek et Klepaczko proposent un modèle phénoménologique qui est de cette forme :

$$\dot{\epsilon}_{crit} = \frac{E(T)}{E_0} \left(\sigma_{\mu} \left(\bar{\epsilon}^{pl}, \dot{\epsilon}^{pl}, T \right) + \left(\dot{\epsilon}^{pl}, T \right) \right) \quad (I-48)$$

✓ Modèle de Teodosiu et étendu par Uenishi est de la forme :

$$\dot{\epsilon}_{crit} = Y_0 + R + f S \quad (I-49)$$

Tableau I.4 : Lois constitutives prenant en compte la vitesse de déformation [JEU08].

Auteur(s)	$\sigma_{yield}(\dot{\epsilon}^{pl})$	$G(\dot{\epsilon}^{pl}, T)$	Paramètres
Cowper-Symonds	Courbe analytique/linéaire par morceaux	$1 + (\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{D})^{1/p}$	D, p
Johnson-Cook	$(A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^n) \left(1 - \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m$	$\left[1 + C \ln \frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0}\right]$	A, B, n, m, C
Jones	Courbe analytique/linéaire par morceaux	$1 + \left(\frac{(\dot{\epsilon}_u - \dot{\epsilon}_y)\dot{\epsilon}^{pl}}{(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_y)D_u + (\dot{\epsilon}_u - \dot{\epsilon}_y)D_y}\right)$	$D_u, D_y, \dot{\epsilon}_u, \dot{\epsilon}_y, m$
Molinari	$\dot{\sigma}_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^n \left(\frac{T}{T_0}\right)^v$	$\left[\frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0}\right]^m$	$\dot{\sigma}_0, m, n,$
Kobayashi	$\dot{\sigma}_0 (\bar{\epsilon}^{pl})^n (1 - T)$	$(\dot{\epsilon}^{pl})^m$	$\dot{\sigma}_0, n, m,$

I.12.2. Lois à base physique

Prenant en compte des phénomènes macroscopiques tels que la taille des grains, la structure cristalline ou la structure des dislocations.

➤ **Modèle de Zerilli-Armstrong (1987)**

Cette loi représente l'évolution de la limite élastique pour un métal cubique à faces centrées CFC. Cette loi est largement utilisée, elle n'est pas une loi empirique mais repose sur les mécanismes microscopiques de dislocation dans les métaux. Les effets de l'écrouissage visqueux et non-visqueux, ainsi que l'adoucissement thermique sont basés sur l'analyse de l'activation thermique et ont été intégrés de cette façon à la loi constitutive.

$$\sigma_{crit} = \dot{\sigma}_0 + C_2(\bar{\epsilon}^{pl})^{n2} \exp(C_3 T + C_4 T \ln \dot{\epsilon}^{pl}) \tag{I-50}$$

Pour un métal cubique centré le modèle de Zerilli-Armstrong s'écrit comme suit :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5(\bar{\varepsilon}^{pl})^{n1} + C_2 \exp(-C_3 T + C_4 T \ln^{-pl}) \quad (I-51)$$

Où σ_0 est la limite élastique initiale et C_2, C_3, C_4, C_5, n_1 et n_2 sont des paramètres matériaux.

Extensions du modèle de Zerilli-Armstrong :

✓ Voyiadjis et Abed proposent deux formules :

Pour un matériau CFC :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_2(\bar{\varepsilon}^{pl})^{n2} + \left[1 - (C_3 T + C_4 T \ln^{-pl})^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (I-52)$$

p et q sont des paramètres du matériau.

Pour un matériau CC :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5(\bar{\varepsilon}^{pl})^{n1} + C_2 \left[1 - (C_3 T + C_4 T \ln^{-pl})^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (I-53)$$

I.13. Modèles d'endommagements dynamiques [JEU08], [RAN04]

➤ Le modèle de Johnson-Cook

Le modèle d'endommagement proposé par Johnson et Cook, utilisé entre autre dans Pantalé et al et Singh et al, définit la variable d'endommagement D variant de 0 à 1, avec $D = 0$ pour le matériau vierge et $D = 1$ pour le matériau rompu. Le critère de rupture est donc :

$$D = D_c = 1$$

L'évolution de la variable d'endommagement D est décrite par l'équation suivante :

$$D = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\varepsilon_f} \quad (I-54)$$

ε_f est la valeur de la déformation plastique de rupture. Johnson et Cook ont proposé l'expression suivante pour la déformation plastique de rupture :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 ()) \left(1 + D_4 \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right) \quad (I-55)$$

D_1 à D_5 sont les constantes du matériau liées à l'endommagement.

➤ **Le modèle de Langseth**

Ce modèle a été proposé par Børvik et al. Il est basé sur la loi constitutive de Johnson-Cook.

L'évolution de la variable d'endommagement est reliée aux déformations plastiques. De plus, l'expérience montre que l'endommagement ne reste nul au début de la déformation plastique. Il existe donc une valeur seuil de la déformation plastique équivalente $\bar{\epsilon}_d$ au-delà de laquelle l'endommagement est initié. L'évolution de la variable d'endommagement prend alors la forme :

$$D = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\epsilon}^{pl} < \bar{\epsilon}_d \\ \frac{D_C}{\epsilon_f - \bar{\epsilon}_d} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} & \text{si } \bar{\epsilon}^{pl} \geq \bar{\epsilon}_d \end{cases} \quad (I-56)$$

D_C est la valeur critique d'endommagement, $\bar{\epsilon}_d$ est le seuil d'endommagement et ϵ_f est une déformation de rupture dépendant de la triaxialité des contraintes, de la vitesse de déformation et de la température. L'expression de la valeur de la déformation plastique de rupture est une variante de la loi proposée par Johnson et Cook.

$$\epsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 ()) \left(1 + \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right) \quad (I-57)$$

D_1 et D_5 sont des paramètres matériaux liés à l'endommagement.

➤ **Le modèle à e et retard de Su s et Combescure**

Ce modèle a été présenté par Allix et Deu pour des matériaux composites sous sollicitations dynamiques. Il est essentiellement utilisé pour des matériaux aux comportements élastiques (voir entre autres Ladevèze et al). Su s et Combescure ou encore Allix et al. Mais il a été étendu aux matériaux au comportement viscoplastique.

Dans ce modèle, la loi d'évolution de la variable d'endommagement D est définie à partir du taux de restitution d'énergie élastique Y , est linéaire entre une valeur seuil Y_d et une valeur critique Y_c . L'endommagement est supposé évoluer seulement en traction. La loi d'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$D = \frac{1}{\tau_c} (1 - \exp(-af(Y) - D)) \quad \text{si } D < 1 \quad (I-58)$$

$D = 1$: la fonction f prend la forme suivante selon que l'on considère un modèle élastique ou élastoplastique.

$$f(Y) = \frac{\bar{Y} - \sqrt{Y_d}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_d}} \quad \text{pour un matériau élastique}$$

$$f(\bar{\epsilon}^{pl}) = \frac{\bar{\epsilon}^{pl} - \sqrt{\epsilon_d^{pl}}}{\sqrt{\epsilon_c^{pl}} - \sqrt{\epsilon_d^{pl}}} \quad \text{pour un matériau élastoplastique}$$

$\sqrt{\epsilon_d^{pl}}$ et $\sqrt{\epsilon_c^{pl}}$ sont respectivement les déformations plastiques équivalentes seuil et limite.

Les lois présentées diffèrent l'une de l'autre par la loi d'évolution de la variable d'endommagement D . Dans le cadre de ce travail, nous avons opté pour le modèle d'endommagement de Johnson Cook pour les applications dynamiques.

I.14. Conclusion

La modélisation de la réponse mécanique des matériaux métalliques soumis à des chargements dynamiques est un domaine de recherche d'actualité, tant d'un point de vue théorique que pratique. Des recherches fondamentales ont été menées afin de développer des modèles basés sur des considérations physiques. Des mécanismes basiques de la déformation plastique ont été pris en compte.

Plusieurs stratégies sont possibles pour traiter le comportement, la dégradation et la rupture sous sollicitations dynamiques. On oppose souvent les approches dites phénoménologique et physique. La modélisation phénoménologique se base sur un ensemble de résultats expérimentaux macroscopiques dont elle réalise l'interpolation ; elle intègre le plus souvent une connaissance minimale et implicite des mécanismes microscopiques les plus saillants sans entrer dans le détail, mais lui conférant a priori des capacités d'extrapolation raisonnables.

Nous avons en outre présenté la notion d'endommagement dynamique ainsi que les différents modes de ruines.

Au cours de ce chapitre, nous avons mis en évidence la diversité des essais dynamiques et leurs applications. Avec l'amélioration de ces méthodes expérimentales, il a été possible de connaître un peu mieux le comportement des matériaux en dynamique, et donc de comprendre ce qui se passait au cours des brefs instants d'interaction entre les solides. On en a déduit un classement des phénomènes en fonction de leur caractère dynamique.

Chapitre II

Mise en œuvre

Numérique

Chapitre II :

Mise en œuvre Numérique

II.1. Introduction

L'implémentation numérique des modèles de comportement est une étape cruciale dans la qualité de prédiction de divers phénomènes en calcul de structures et en mise en forme. La richesse physique de ces modèles peut être compromise par les erreurs liées à l'approximation numériques de la solution exacte du problème qui n'est pas connue. L'étude de performances des schémas d'intégration est nécessaire, afin de s'assurer de la précision de la solution recherchée. De nombreux schémas sont disponibles et chacun possède ses avantages et ses inconvénients.

Ainsi, les schémas les plus précis sont à stratégie de résolution itératives ont eu peu de succès à cause des difficultés de convergence, ces difficultés ont motivé le développement et l'utilisation de schémas non itératifs tels que les schémas dynamique explicite.

Ce chapitre est consacré à l'intégration du modèle de comportement suivant le schéma explicite. L'algorithme de l'intégration explicite, utilisé pour l'implémentation numérique via la routine VUMAT, est ensuite présenté, et la validation de ces intégrations numériques est effectuée à travers des résultats de la littérature.

Avant d'aborder les deux schémas d'intégration, il est nécessaire de rappeler que ces intégrations sont valables dans le cas des petites déformations, cette hypothèse permet de faciliter l'implémentation.

Les intégrations de modèle d'élasto-visco-plastique isotrope en tenant compte du couplage comportement-endommagement ainsi que du couplage thermomécanique sont de plus en plus développés dans le but de prendre en compte les différents phénomènes mis en jeux dans les procédés de fabrications.

II.2. Aspects numériques liés à la discrétisation spatiale et temporelle [ABA13]

Une description de la discrétisation spatiale par EF employée dans le code de calcul Abaqus est présentée en premier lieu, ainsi que les schémas de résolution Statique Implicite (Abaqus standard) et Dynamique Explicite (Abaqus Explicite) dans le cas d'un problème

mécanique. La méthode utilisée pour résoudre le problème mécanique ; est basée sur la technique de différences finies centrées. Si la réponse du système est fortement non-linéaire, cette méthode doit être employée avec un incrément variable de temps, elle consiste à calculer une solution à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des quantités connues à l'instant t .

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles du mouvement d'équilibre dans un solide on utilise la discrétisation spatiale qui est basée sur une formulation variationnelle en déplacement et en temps.

✚ Formulation variationnelle

➤ *Problème mécanique, Principe des puissances virtuelles*

Considérons un solide de volume V , de frontière Γ en équilibre à un instant donné, comme le montre la figure (II-1). Ce solide est soumis à des forces volumiques F_v , surfaciques F_s et des forces de contact F_c , qui s'appliquent sur le domaine Γ_u et Γ . Des conditions aux limites en déplacement $U=U^*$ sont imposées au solide.

La résolution d'un problème mécanique, consiste à déterminer les champs de contraintes $\sigma(x,y)$ et du déplacement U (problème dynamique) à tout instant t et en tout point x du solide en connaissant les conditions initiales et les conditions aux limites formulées comme suit :

- Conditions aux limites en déplacement.

$$U=U^* \text{ sur } \Gamma_u$$

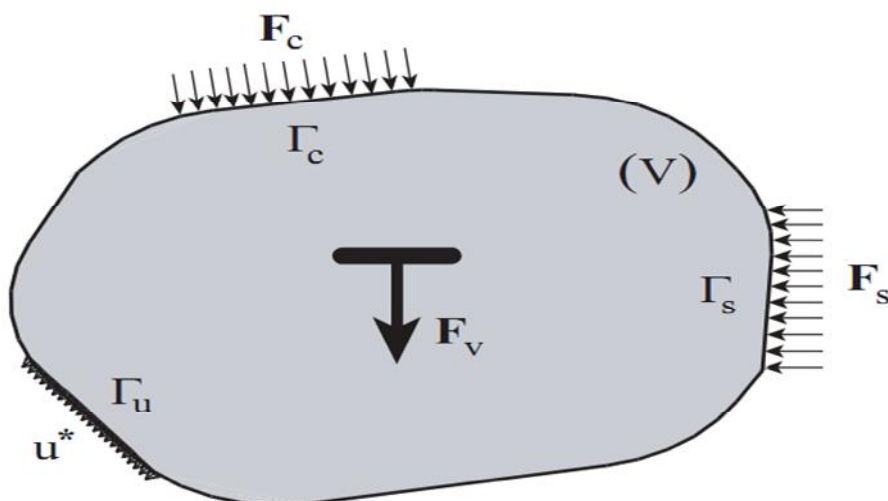


Figure (II-1) : Efforts appliqués au solide, structure en équilibre [OUL07].

- Conditions aux limites pour les efforts.

$$\sigma \cdot n = F_s \quad \text{sur } s \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma \cdot n = F_c \quad \text{sur } c$$

Les champs mécaniques et les variables d'états doivent vérifier en chaque point du solide V le principe des puissances virtuelles formulé par :

$$-\int_V \rho \, D \, dV + \int_V F_V \cdot u \, dV + \int_{\Gamma_s} F_s \cdot u \, d\Gamma_s + \int_{\Gamma_c} F_c \cdot u \, d\Gamma_c = \int_V \rho \, u \cdot \dot{u} \, dV \quad (\text{II-2})$$

Où :

u : la vitesse.

\dot{u} : l'accélération.

D : le tenseur Eulérien des vitesses de déformation

$$D = \frac{1}{2} [\text{grad } u + (\text{grad } u)^T] \quad (\text{II-3})$$

➤ *Discretisation spatiale [ABA13]*

La base d'une formulation élément finis en déplacement est l'introduction d'approximation spatiale de la solution.

La fonctionnelle (II-2) est une équation non linéaire, qui doit être résolue par une méthode itérative en utilisant la méthode des éléments finis.

Les déplacements réels et virtuels de tout point du solide V sont reliés aux déplacements des nœuds adjacents par des fonctions appropriées.

$$\{u^e\} = [N_n] \{u_n^e\} \quad (\text{II-4})$$

$$\{\dot{u}^e\} = [N_n] \{\dot{u}_n^e\}$$

$[N_n]$: sont les fonctions d'interpolation nodales sur l'élément (e).

$\{u_n^e\}$: désigne le vecteur contenant les déplacements de chaque nœud de l'élément.

Les vitesses réelles et virtuelles ainsi que l'accélération sont interpolées en dérivant les équations précédentes.

$$\{\ddot{u}^e\} = [N_n] \{\ddot{u}_n^e\} \quad (\text{II-5})$$

$$\{u^e\} = [N_n]\{u_n^e\}$$

$$\{u^e\} = [N_n]\{u_n^e\}$$

En introduisant les approximations (II-4), (II-5) dans l'équation (II-3), la fonctionnelle élémentaire prend la forme.

$$I_e = ([M^e]\{u^e\} + \{F_{int}^e\} - \{F_{ext}^e\})\{u^e\} = 0 \quad (II-6)$$

$$[M^e] = \int_V {}^T N_n N_n dV \quad (II-7)$$

$$\{F_{int}^e\} = \int_{V_e} {}^T [B_n^e] dV \quad (II-8)$$

$$\{F_{ext}^e\} = \int_{V_e} {}^T N_n F_v dV + \int_{\Gamma_s^e} {}^T N_n F_s d_s + \int_{\Gamma_c^e} {}^T N_n F_c d_c \quad (II-9)$$

Où $[M^e]$ est la matrice masse élémentaire cohérente, $\{F_{int}^e\}$ vecteur élémentaire des efforts internes, $\{F_{ext}^e\}$ vecteur élémentaire des efforts externes.

Et $[B_n^e]$ la matrice d'interpolation de déformation-déplacement s'écrit comme suit :

$$[B_n^e] = \frac{[\partial N_n]}{\partial X_n} \quad (II-10)$$

Le système algébrique traduisant l'équilibre mécanique global du solide est obtenu en assemblant les fonctionnelles élémentaires I_e sur toute la structure, et s'écrit sous la forme :

$$I = I_e = [([M^e]\{u^e\} + \{F_{int}^e\} - \{F_{ext}^e\})] \{u^e\} = 0 \quad (II-11)$$

Ou encore:

$$I = ([M^e]\{u^e\} + \{F_{int}^e\} - \{F_{ext}^e\}) = 0 \quad (II-12)$$

En introduisant :

$$\{R\} = \{F_{int}\} - \{F_{ext}\} \quad (2-13)$$

Nous écrivons :

$$[M^{ki}]\ddot{u}^i + [R^k u^i] = 0 \quad (2-14)$$

Le système algébrique précédant est non linéaire, il exprime l'équilibre dynamique de la structure, sa résolution incrémentale par linéarisation sur chaque incrément de temps peut être envisagée par plusieurs méthodes statiques implicites ou bien dynamiques explicites.

II.3.Intégration des modèles de comportement

Lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis, nous discrétisons le problème dans le temps de différentes manières. Les deux plus classiques sont l'intégration implicite et l'intégration explicite. Chacune d'entre elles présente des avantages et des inconvénients.

Avec une formulation implicite, on résout le problème mécanique en statique ou en dynamique. A chaque pas de temps, l'équilibre est vérifié. Ce schéma d'intégration temporel est inconditionnellement stable, ce qui signifie qu'il ne limite pas la durée du pas de temps. Ce dernier ne dépend que de la discrétisation temporelle que l'on souhaite obtenir. Finalement, les formulations implicites peuvent être utilisées en association avec tous les types d'éléments, elles sont simples, robustes et efficaces.

Cependant, la résolution du système d'équations à chaque pas de temps nécessite l'inversion de la matrice de rigidité. Cette étape est longue, surtout quand le nombre de degrés de liberté grandit. Dans les cas non linéaires, il faut utiliser une méthode de résolution itérative de type Newton-Raphson, qui entraîne une inversion de matrice par incrément. L'implémentation d'une nouvelle loi de comportement est fastidieuse. De plus, l'algorithme peut dans certains cas ne pas converger.

Les formulations explicites permettent de résoudre les problèmes mécaniques dynamiques. La résolution d'un pas de temps peut être immédiate si l'on utilise une condensation diagonale de la matrice de masse. Il n'est alors pas nécessaire de résoudre un système d'équation et on peut directement mettre à jour les variables nœud par nœud, ce qui est un avantage important pour le calcul parallèle par exemple. Le temps de résolution d'un pas de temps est donc minime, que ce soit pour des lois de comportement simples, ou complexes avec de fortes non-linéarités. Par contre, ce schéma d'intégration temporel est conditionnellement stable, ce qui signifie que la valeur du pas de temps ne peut dépasser une valeur critique.

✚ Méthodes de résolution

➤ Méthode Statistique Implicite (problème mécanique)

Le schéma Statistique Implicite correspond à la situation où le terme d'inertie qui apparaît dans l'équation (II-14) peut être négligé.

$$\{R\}_{n+1} = \{F_{int}\}_{n+1} - \{F_{ext}\}_{n+1} \quad (II-15)$$

Où $\{R\}_{n+1}$ est le résidu d'équilibre statique à l'instant t_{n+1} .

La résolution de cette équation dans Abaqus / Standard est effectuée par la méthode itérative de Newton Raphson modifiée.

Le résidu $\{R\}_{n+1}$ est linéarisé en utilisant un développement limité de Taylor d'ordre 1.

$$\{R\}_{n+1}^{iter+1} = \{R\}_n^{inter} + \left(\frac{\partial \{R_n\}}{\partial u_{n+1}} \right)^{iter} \{U_n\} + \dots = 0 \quad (II-16)$$

Avec $\{U_n\} = \{U\}_{n+1}^{iter+1} - \{U\}_n^{iter}$: est l'incrément de déplacement entre les itérations successives (iter) et (iter+1). Ce processus itératif continue jusqu'à la convergence du système.

$$(|\{R\}_{n+1}| < \epsilon)$$

L'équation (II-16) fait apparaître l'expression de la matrice tangente à l'interaction (iter)

$$[K_T^{iter}(U_n)] = - \left(\frac{\partial \{R_n\}}{\partial u_{n+1}} \right)^{iter} \quad (II-17)$$

$K_T^{iter}(U_n)$ joue un rôle central dans la vitesse de convergence de ce schéma itératif implicite. La détermination de cet opérateur se fait par le calcul du résidu $\{R_n\}$. Après développement, nous obtenons :

$$[K_T^e(U_n)] = [B_n^e] : \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial D} \right\} : [B_n^e] J_{\Gamma^e} dV_e^0 - [N_n^e] \left\{ \frac{\partial F_e}{\partial U_n} \right\} J_{s_d} \cdot e^0 \quad (II-18)$$

$$K_T = \left| \frac{-R}{\Delta u} \right|$$

L'équation (II-18) fait apparaître l'opérateur tangent K_T . Ce dernier dépend de la loi de comportement à travers les variables d'état qui interviennent dans le calcul de la contrainte σ_{n+1} à chaque itération.

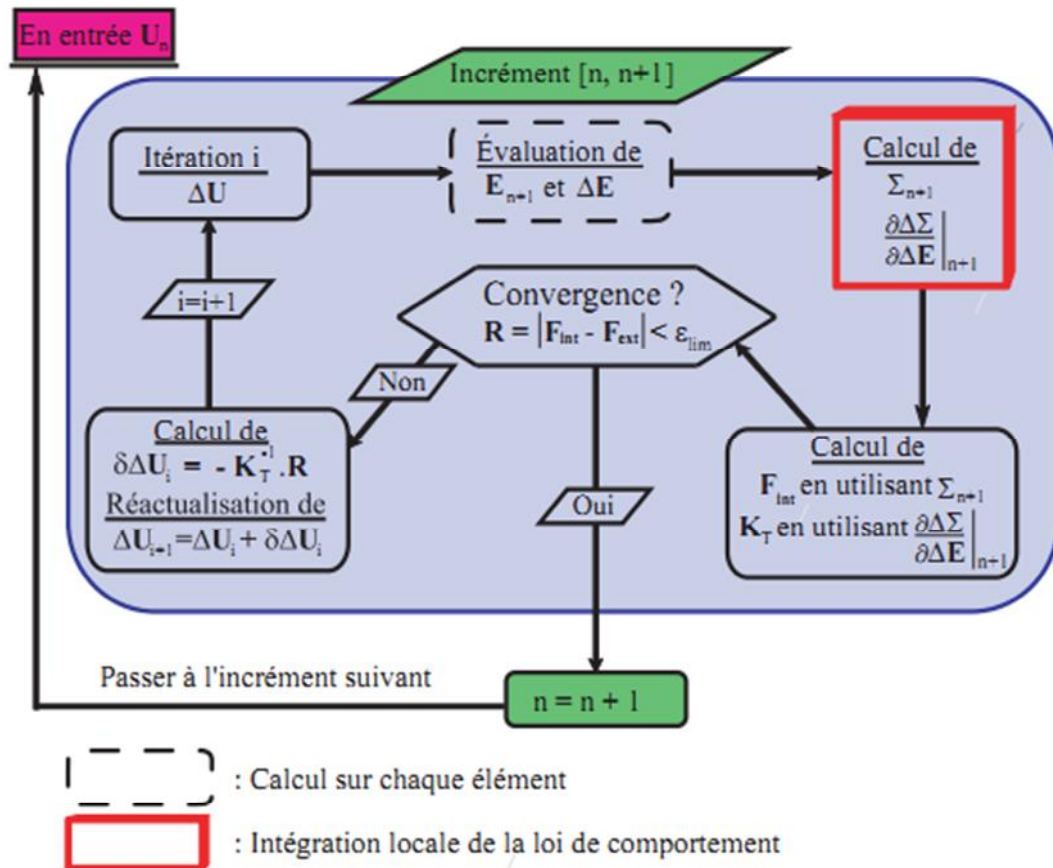


Figure (II-2) : Organigramme de résolution du schéma statique implicite [OUL07].

Les principales étapes de résolution d'un problème mécanique dans le cas du schéma statique sont données par la figure (II-2).

➤ *Schéma dynamique explicite* [CZA06]

A l'inverse de la méthode implicite le schéma de résolution explicite n'est pas itératif, il consiste en une résolution explicite de l'équation du mouvement. De plus cet algorithme ne nécessite pas le calcul de la matrice tangente qui peut s'avérer une tâche ardue pour certains modèles de comportement qui font intervenir plusieurs variables internes pour tenir compte de plusieurs phénomènes couplés tel que l'écrouissage, l'endommagement, effet thermique,....

L'équation (II-13) s'écrit dans le cadre d'une analyse dynamique explicite sous la forme :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [R] = 0 \quad (\text{II-19})$$

La recherche de la solution de l'équation (II-19) dans le cadre de ce schéma dynamique utilise la méthode des différences centrées.

$$\{\ddot{U}_n\} = [M_n]^{-1}\{R_n\} \quad (\text{II-20})$$

$[M]$ étant la matrice masse appelée matrice consistante, elle est calculée avec les fonctions d'interpolations N de l'élément, la matrice masse devient diagonal après arrangement. On l'utilise parce que son inverse est simple à calculer et que sa multiplication par les vecteurs forces extérieurs et intérieurs exige seulement n opérations, n, étant le nombre de degrés de liberté dans le modèle. Les procédures explicites n'exigent aucune itération et aucune matrice tangente de rigidité.

Connaissant l'accélération, les équations du mouvement du solide sont intégrées en utilisant la méthode des différences centrées qui se traduit par :

$$\{\dot{U}_{n+\frac{1}{2}}\} = \{\dot{U}_{n-\frac{1}{2}}\} + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} \{\ddot{U}_n\} \quad (\text{II-21})$$

$$\{U_{n+1}\} = \{U_n\} + t_{n+1} - t_n \{\dot{U}_{n+\frac{1}{2}}\}$$

La stabilité et la précision de la résolution dépendent fortement du pas de temps Δt . Une bonne estimation est proposée dans Abaqus:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$$

Où ω_{\max} est la plus grande valeur propre du système d'équations mécaniques.

Pour contrôler les oscillations à hautes fréquences, un facteur d'amortissement a été introduit ; ce qui nous donne comme nouveau domaine de validité :

$$\Delta t \leq t_{\text{stable}} = \frac{2}{\omega_{\max}} (\sqrt{1 + \gamma^2} - \gamma) \quad (\text{II-22})$$

Où ζ est la valeur de l'amortissement critique $\zeta = 1$ dans le mode d'oscillations le plus élevé. Grace à ce coefficient, on a pu réduire la valeur de l'incrément de temps.

La plus grande valeur propre du système peut être retrouvée si l'on détermine le mode maximum de dilatation volumique sur l'ensemble des éléments.

Une approximation de la limite de stabilité de la solution mécanique est donnée par :

$$t_{\text{stable}} = \frac{L_{\text{min}}}{c_d} \quad (\text{II-23})$$

Où L_{min} est la plus petite dimension de l'élément du maillage et c_d est la vitesse d'une onde solide traversant l'élément. Cette vitesse peut être déterminée en calculant les différents modules effectifs du matériau élastique de la réponse matérielle :

$$c_d = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{II-24})$$

Où ρ est la densité du matériau et E est le module de Young.

Par mesure de sécurité afin d'éviter les effets de non-linéarités et de plasticité, il est souvent pris, comme pas de temps critique, un pas de temps plus petit (de 10% environ), que celui qui vient d'être calculé :

$$t_{\text{stable}}^{\text{réel}} = 0.9 \times t_{\text{stable}}^{\text{théorique}} \quad (\text{II-25})$$

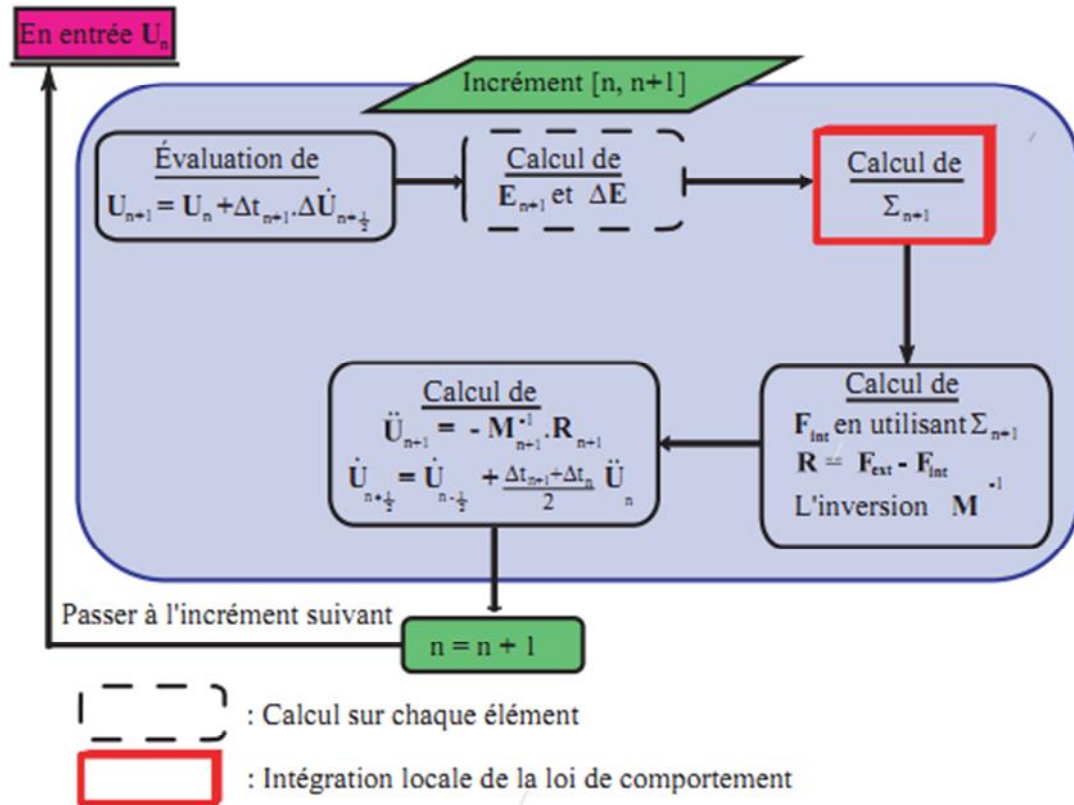


Figure (II-3) : Organigramme de résolution d'un problème mécanique en utilisant un schéma dynamique explicite [OUL07].

II.4.Méthode de discrétisation temporelle

L'analyse de problèmes dynamiques non linéaires complexes par éléments finis nécessite l'utilisation d'algorithmes d'intégration pas à pas pour résoudre l'équation d'équilibre, nous décrivons ci-dessous les deux grandes familles de méthode d'intégration qui sont méthodes d'intégration explicite et méthodes d'intégration implicite.

II.4.1.Méthodes d'intégration explicite [JEU08], [CZA06]

La résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) nécessitent l'utilisation des schémas d'intégrations.

Les trois schémas explicites sont : Euler explicite, Runge – Kutta d'ordre 2 et Runge – Kutta d'ordre 4. Ces derniers sont à pas indépendant où la valeur prédite à la fin de l'incrément ne dépend que de la solution obtenue à la fin de l'incrément précédent.

Les lois d'évolutions des variables internes sont de type EDO elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$y = h(t, y) \tag{II-26}$$

➤ **Méthode d'Euler explicite**

Le schéma d'intégration le plus simple de ce système d'équations est le schéma d'Euler explicite qui estime l'incrément de y avec des variables du début d'incrément tel que

$$k_1 = y = h(t_n, y_n) \quad .1 \quad (\text{II-27})$$

A la fin de l'incrément la valeur de y est obtenue explicitement par :

$$y_{n+1} = y_n + k_1 \quad (\text{II-28})$$

➤ **Méthode de Runge – Kutta d'ordre 2**

Schéma de Runge – Kutta d'ordre 2 ou du point milieu est une amélioration de la méthode d'Euler explicite, la solution est approchée par le développement de Taylor limité à l'ordre 2.

L'intégration se fait en deux étapes successives, on utilise en premier lieu les variables y à l'instant n , ensuite leur prédiction explicite à $n+1$.

$$k_1 = h(t_n, y_n) \quad .1 \quad (\text{II-29})$$

$$k_2 = y = h(t_n + \frac{1}{2} t, y_n + 1/2k_1) \quad .2 \quad (\text{II-30})$$

La solution est obtenue explicitement par

$$y_{n+1} = y_n + 1/2(k_1 + k_2) \quad (\text{II-31})$$

➤ **Méthode de Runge – Kutta d'ordre 4**

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 introduit quatre étapes d'estimations de l'incrément de y . Elle représente l'une des méthodes les plus utilisées de ces schémas explicites.

$$k_1 = h(t_n, y_n) \quad .1 \quad (\text{II-32})$$

$$k_2 = h(t_n + \frac{1}{2} t, y_n + 1/2k_1) \quad .2 \quad (\text{II-33})$$

$$k_3 = h(t_n + \frac{1}{2} t, y_n + 1/2k_2) \quad .3 \quad (\text{II-34})$$

$$k_4 = h(t_n + t, y_n + k_3) \quad .4 \quad (\text{II-35})$$

La solution est obtenue explicitement par

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \quad (\text{II-36})$$

➤ **Forme unifiée des trois méthodes**

Ces trois méthodes peuvent être regroupées en une seule écriture pour faciliter leur implantation numérique en utilisant un seul algorithme d'intégration.

Cette forme est donnée par :

$$y_0 = 0$$

$$y_i = h(t_n + a_i, y_n + a_i y_{i-1}) \quad ; i = 1 \text{ à } N \quad (\text{II-37})$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^N b_i y_i \quad (\text{II-28})$$

a_i et b_i sont des coefficients de pondération.

II.4.2.Méthode d'intégration implicite

Ces schémas d'intégration où le second membre est évalué avec la solution recherchée y_{n+1} , qui est l'inconnue du système, ceci est la différence avec les schémas explicites où le second membre est évalué à partir d'un y connu à l'avance.

➤ **La thêta méthode**

Elle consiste à introduire dans l'équation d'Euler un paramètre, compris entre 0 et 1.

On trouve deux familles de schémas d'intégration implicite pour les équations différentielles de la forme :

$$y = H(t, y) \quad (\text{II-29})$$

Ces schémas se présentent comme suit :

➤ La méthode du point milieu généralisée est basée sur la pondération de y et sa formulation est donnée par :

$$y_{n+\theta} = (1 - \theta)y_n + \theta y_{n+1} \quad (\text{II-30})$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t H(t_{n+\theta} + y_{n+\theta}) \tag{II-31}$$

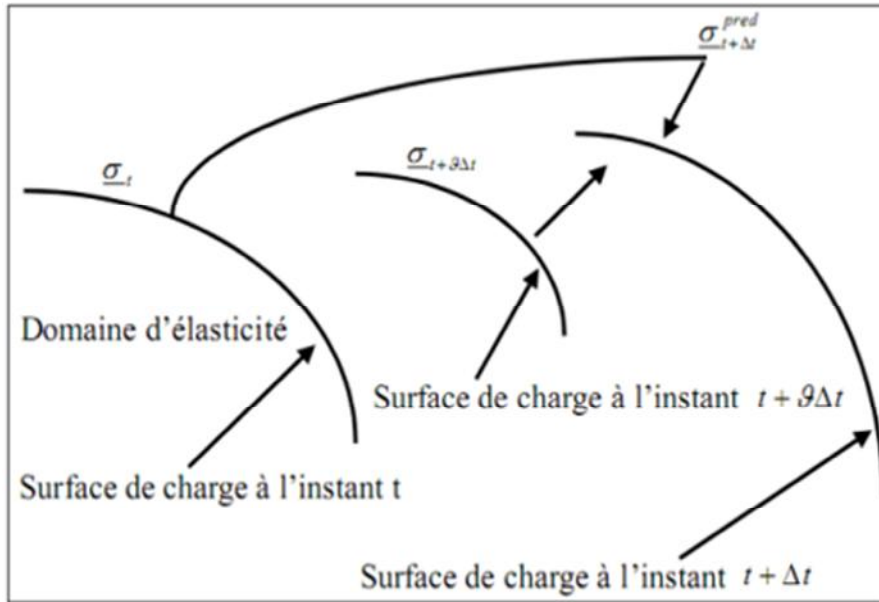


Figure (II-4) : Méthode du point milieu généralisé

➤ La méthode des trapèzes généralisée est basée sur une pondération de la fonction h et sa formulation est donnée par :

$$h_{n+\theta} = (1 - \theta)H(t_n, y_n) + \theta H(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{II-32}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t h_{n+\theta} \tag{II-33}$$

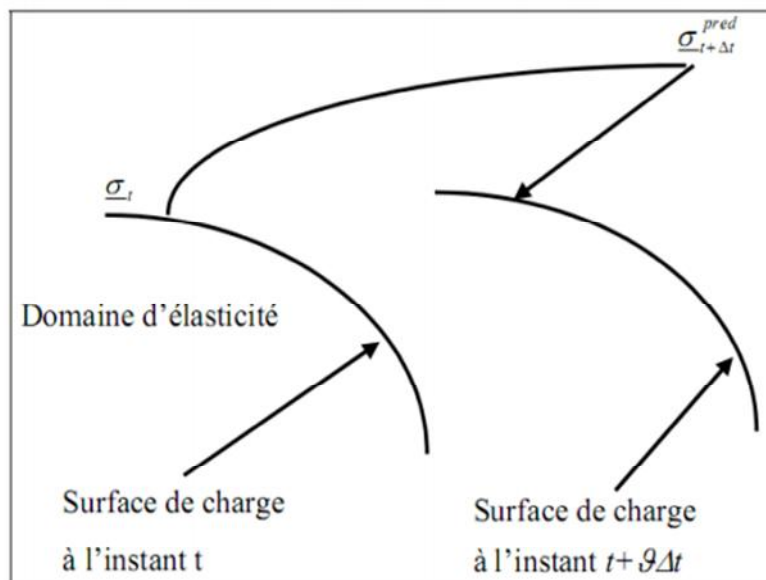


Figure (II-5): Méthode des trapèzes généralisés

Selon la valeur de θ nous trouvons plusieurs schémas d'intégration, exemple pour $\theta=0$ nous retrouverons le schéma d'Euler explicite pour les deux cas.

Les deux méthodes donnent un schéma implicite, pour $\theta=1/2$ le schéma est dit semi implicite. Pour $\theta=1$ le schéma est dit Euler implicite.

➤ Méthode asymptotique

On applique cette méthode uniquement pour des EDO du premier ordre de la forme suivante :

$$\dot{y} = \phi(y)[A(y) - y] \quad (\text{II-34})$$

Cette équation peut être intégrée comme suit

$$y_{n+\theta} = e^{-\theta\phi(y_{n+\theta})\Delta t}y_n + [1 - e^{-\theta\phi(y_{n+\theta})\Delta t}]A(y_{n+\theta}) \quad (\text{II-35})$$

Pour $\theta=1$, l'intégration asymptotique donne

$$y_{n+1} = e^{-\phi(y_{n+1})\Delta t}y_n + [1 - e^{-\phi(y_{n+1})\Delta t}]A(y_{n+1}) \quad (\text{II-36})$$

L'inconnu y_{n+1} apparaît dans le second membre donc c'est une équation implicite.

II.5. Implantation du modèle dans Abaqus

La plupart des codes éléments finis tel qu'Abaqus disposent d'une famille de lois de comportement standards. Elles couvrent un large spectre de comportement avec des mécanismes physiques tel que l'élasticité, la viscoélasticité, la plasticité, la viscoplasticité, l'endommagement ..., etc. Par contre cette famille exhaustive ne représente pas des lois de comportement des structures complexes.

Afin de compléter les lois existantes la plupart des codes proposent une routine utilisateur par le biais de laquelle il est possible d'introduire une loi de comportement spécifique. Dans le cas d'Abaqus, il s'agit de la routine Vumat.

II.5.1. Etat de contrainte

Les états de déformation et de contrainte gérés par le logiciel Abaqus sont stockés sous forme vectorielle.

Consécutivement, dans toute la théorie relative à l'implémentation, le formalisme vectoriel sera utilisé et l'ordre des composantes sera respecté.

➤ II.5.2. Loi de comportement viscoplastique

La surface d'écoulement doit représenter la forme des courbes d'écrouissage. Elle est posée sous la forme suivante :

$$f = \sigma_{eq} - R(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}, T) \quad (\text{II-37})$$

Où R est défini par

$$R(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}, T) = (A + B(\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m \quad (\text{II-38})$$

f s'écrit alors,

$$f(\sigma, \bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}, T) = \sigma_{eq} - (A + B(\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m \quad (\text{II-39})$$

σ_{eq} est définie selon le critère d'écoulement Von Mises :

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} S : S\right)^{1/2} \quad (\text{II-40})$$

Condition de consistance :

$$f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \dot{\dot{p}} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (\text{II-41})$$

➤ Détermination des dérivées : \dot{p} , $\dot{\dot{p}}$, \dot{T} , $\dot{\sigma}$

En utilisant les lois suivantes

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{S}{\sigma_{eq}} \quad (\text{II-42})$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial}{\partial R} = \quad (\text{II-43})$$

$$\dot{p} = \quad (\text{II-44})$$

est obtenu on dérivant l'équation suivante par rapport au temps, et en substituant \dot{p}

$$= E : \dot{\varepsilon}^e = E : [\dot{\varepsilon} - \dot{p}] \quad (\text{II-45})$$

$$= E: [- \cdot P] = E: [- \frac{3}{2} \frac{S}{\sigma_{eq}}] \quad (\text{II-46})$$

$$\text{En posant } N = \frac{3}{2} \frac{S}{\sigma_{eq}}$$

En remplaçant dans l'équation de $\cdot P$

$$\cdot P = N \quad (\text{II-47})$$

$$= E: [- \cdot P] = E: [- N] \quad (\text{II-48})$$

$$T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\chi \lambda}{\rho C_p} \right) = \frac{\chi}{\rho C_p} \cdot_{eq} \quad (\text{II-49})$$

➤ Détermination du multiplicateur plastique à partir de la loi de consistance

Les équations d'évolution sont en fonction de la dérivée temporelle du multiplicateur plastique λ . Pour déterminer ce multiplicateur, les équations d'évolution sont remplacées dans la condition de consistance. Il reste à développer les dérivés partielles de f .

La dérivée de f par rapport au tenseur de la contrainte σ s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3S}{2\sigma_{eq}} = N \quad (\text{II-50})$$

La dérivée de f par rapport à la déformation plastique cumulée p s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial p} = n B (p)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{T-T_0}{T_{melt}-T_0} \right)^m \right] * \left(1 + C \cdot \text{Ln} \left(\frac{\dot{p}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \quad (\text{II-51})$$

La dérivée de f par rapport à la vitesse de déformation plastique cumulée \dot{p} s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = \left((A + B(p)^n) \cdot C \cdot \left[1 - \left(\frac{T-T_0}{T_{melt}-T_0} \right)^m \right] \right) / \dot{p} \quad (\text{II-52})$$

La dérivée de f par rapport à la température T s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial T} = (A + B(p)^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \frac{m}{T_0 - T_{\text{melt}}} \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^{m-1} \quad (\text{II-53})$$

En remplaçant les dérivées temporelles des variables d'état, et les dérivées partielles de f on obtient la condition de consistance en fonction des dérivées du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \dot{\dot{p}} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (\text{II-54})$$

$$\begin{aligned} f = N : E : \dot{\varepsilon} - [N : E : N] \dot{\lambda} + [n B(p)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^m \right] * (1 + C \ln(\dot{p}/\dot{\varepsilon}_0))] \dot{\lambda} \\ + \left[(A + B(p)^n) C \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^m \right] \right] / p \dot{\lambda} \\ + \left[(A + B(p)^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \frac{m}{T_0 - T_{\text{melt}}} \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^{m-1} \left(\frac{\mathcal{X}}{\rho C_p} \right)_{\text{eq}} \right] \dot{\lambda} \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-55})$$

En posant

$$x_1 = [N : E : N] \quad (\text{II-56})$$

$$h = \frac{\partial f}{\partial p} = n B(p)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^m \right] * \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \quad (\text{II-57})$$

$$y = \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = \left[(A + B(p)^n) C \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^m \right] \right] / p \quad (\text{II-58})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial T} = (A + B(p)^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \frac{m}{T_0 - T_{\text{melt}}} \left(\frac{T - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^{m-1} \quad (\text{II-59})$$

$$x_2 = \frac{\mathcal{X}}{\rho C_p} \Big|_{\text{eq}} \quad (\text{II-60})$$

Et en regroupant les termes en $\dot{\lambda}$ et $\dot{\lambda}$ la condition de consistance devient une équation différentielle dont la solution est le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$.

$$\dot{\lambda} + \frac{x_1 + h + \theta x_2}{y} \dot{\lambda} + \frac{N : E : \dot{\varepsilon}}{y} = 0 \quad (\text{II-61})$$

Afin de déterminer le multiplicateur plastique on utilise la méthode incrémentale qui est basée sur la méthode d'intégration d'Euler et utilise la technique de Newton-Raphson pour la solution des équations non linéaires.

II.5.3. Hypothèses adoptées quant à l'implémentation numérique

Dans le cadre de notre travail, nous nous limiterons à développer une solution aux problèmes d'élasticité et d'inélasticité isotrope. Ceci implique que les composantes du tenseur E s'écrit alors :

$$E = E_{ijkl} = K \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (\text{II-62})$$

Où $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ est le module de compressibilité, où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement et δ_{ij} , δ_{kl} , δ_{jl} sont le Delta Kronecker.

Les matériaux métalliques en général se déforment plastiquement à volume constant, ce qui fait que l'écoulement ne dépend pas de la contrainte hydrostatique.

II.6. Implémentation numérique

Cette partie explique la procédure numérique utilisée pour résoudre l'équation différentielle et implémenter les équations obtenues par la formulation thermodynamique du modèle pour prédire l'évolution des variables d'états.

La plupart des solutions des éléments finis utilisent typiquement une procédure incrémentale itérative pour résoudre cette équation. Le choix de la méthode numérique utilisée affecte énormément la stabilité et l'efficacité de la solution. Les méthodes d'intégration numérique implicite ont montré un grand niveau de stabilité et de performance s'agissant des problèmes de plasticité et de viscoplasticité. La méthode la plus reconnue et la méthode d'Euler qui se divise en deux méthodes :

- ❖ Méthode d'Euler – avant (explicite).
- ❖ Méthode d'Euler – arrière (implicite).

Les équations d'évolution sont déjà dérivées et en tenant compte des hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité plastique et en se basant sur celles-ci et sur la méthode d'Euler, les équations constitutives sous forme incrémentale s'écrivent :

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T = E: (T_{n+1} - T_{n+1}^p) \quad (\text{II-63})$$

Où $T_{n+1}^p = T_n^p + \Delta T^p$

et

$$\Delta T^p = N_{n+1}$$

avec

$$N_{n+1} = \frac{3S_{n+1}}{2\sigma_{n+1}^{eq}} \quad (\text{II-64})$$

La contrainte équivalente sous forme incrémentale devient :

$$\sigma_{n+1}^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1} : S_{n+1}} \quad (\text{II-65})$$

La température après un temps Δt évolue incrémentalement par :

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T \quad (\text{II-66})$$

$$\Delta T = \frac{\chi}{\rho C_p} \sigma_{n+1}^{eq} \quad (\text{II-67})$$

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \Delta \rho \quad (\text{II-68})$$

Pour résoudre les équations non – linéaires ci-dessus, on a recours à la technique de Newton-Raphson.

En écrivant les équations incrémentales sous la forme résiduelle, on obtient le système linéaire suivant :

$$T_{n+1} - E: (\epsilon_{n+1} - T_n^p - N_{n+1}) = 0 \quad (\text{II-69})$$

$$T_{n+1}^p - T_n^p + N_{n+1} = 0 \quad (\text{II-70})$$

$$T_{n+1} - T_n + N_{n+1} = 0 \quad (\text{II-71})$$

Où la seule inconnue est N_{n+1}

Généralisant l'équation de Newton-Raphson $x_{i+1} = x_i - \frac{r(x_i)}{r'(x_i)}$ pour résoudre le système non linéaire. La technique de Newton-Raphson s'écrit :

$$x_{i+1} = x_i - J^{-1}(x_i)r(x_i) \quad (\text{II-72})$$

$J(x_i)$ est la matrice jacobienne

La détermination des dérivées nécessaire dans le calcul de la matrice jacobienne est difficile. Cette complexité rend l'algorithme de la solution lourde et instable. Les dérivées des équations sont incalculables et deviennent coûteuses numériquement. Pour ces raisons on a recours à des algorithmes qui surpassent ces difficultés.

L'algorithme «return mapping» est une forme spéciale de la méthode d'Euler et souvent utilisé pour l'intégration des relations constitutives en élastoplasticité et élasto-viscoplasticité.

II.6.1. Prédiction élastique /correction plastique [FAR09] [SH98]

Comme on remarque dans le système non linéaire, les équations sont dépendantes de l'incrément du multiplicateur plastique λ . Une fois cet incrément déterminé, l'évolution des variables d'états devient explicite.

Soit l'équation de la surface d'écoulement sous forme incrémentale

$$f_{n+1} = f_{n+1}^{eq} - (A + B(p_{n+1})^n) \left(1 + C \ln \frac{\Delta \lambda}{\Delta t \dot{\epsilon}_0} \right) \left(1 - \left(\frac{T_{n+1} - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right)^m \right) \quad (\text{II-73})$$

Le multiplicateur plastique est déduit de la condition de consistance. Cette condition implique que pour toute contrainte σ_{n+1} :

- Si $f(\sigma_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1}, R_{n+1}, T_{n+1}) < 0$, il s'agit alors d'un chargement dans le domaine élastique.
- Si $f(\sigma_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1}, R_{n+1}, T_{n+1}) = 0$, et $df = 0$, il s'agit alors d'un chargement dans le domaine plastique.
- Si $f(\sigma_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1}, R_{n+1}, T_{n+1}) = 0$, et $df < 0$, il s'agit alors d'un déchargement.

L'algorithme «radial return mapping» permet de résoudre les équations constitutives tout en respectant les conditions pour un incrément de temps Δt et une histoire de chargement connue. En supposant que les états initiaux sont connus ($\sigma_n, \dot{\epsilon}_n, R_n, T_n \dots$), les différentes étapes pour trouver l'état final ($\sigma_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1}, R_{n+1}, T_{n+1} \dots$) sont les suivantes :

1. On suppose qu'après l'incrément de déformation on est toujours dans le domaine élastique.

$$\sigma_{n+1} = E \cdot \epsilon_{n+1} \quad (\text{II-74})$$

Dans ce cas la contrainte d'essai σ_{n+1} se calcule

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E \cdot \Delta \epsilon_{n+1} \quad (\text{II-75})$$

Cette tentative suppose que la contrainte évolue élastiquement et qu'il n'y a aucun écoulement plastique. Cette hypothèse est à vérifier dans la prochaine étape.

2. L'équation de la surface d'écoulement est évaluée pour la valeur de la contrainte d'essai σ_{n+1}

$$f_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_{n+1} - (A + B(p_n + \sigma_n)^n) \left(1 + C \ln \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \frac{1}{\dot{\epsilon}_0} \right) \left(1 - \left(\frac{T_n + \Delta \lambda x_2 - T_{\text{room}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}} \right)^m \right) \quad (\text{II-76})$$

Une fois la valeur de f_{n+1} déterminée, deux cas se présentent

- Si $f_{n+1} \leq 0$ alors l'hypothèse posée à la première étape est valide, le matériau n'a subi aucune déformation plastique et la valeur de la contrainte d'essai σ_{n+1} est acceptée.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}$$

Comme il n'y a aucun écoulement plastique, les variables sont les mêmes on retourne alors à l'étape 1 pour la solution du prochain incrément.

- Si $f_{n+1} > 0$ alors le matériau a subi un écoulement viscoplastique et une correction doit être apportée à la contrainte d'essai σ_{n+1} . En effet il faut retrancher de la contrainte d'essai la partie supposée élastique alors qu'elle est viscoplastique.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1} - E \cdot \Delta \epsilon_{n+1} \quad \Delta p = \sigma_{n+1} - 2G N_{n+1}$$

Sous l'hypothèse de l'incompressibilité plastique et d'écrouissage isotrope, la surface d'écoulement dans l'espace de contrainte déviatorique forme une sphère et le tenseur N_{n+1} est le tenseur normal à cette surface. Cette propriété nous permet d'affirmer que l'évolution de la contrainte est radiale et que les tenseurs normaux à la surface sont égaux :

$$N_{n+1} = N_{n+1} = \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{eq*}} S_{n+1} \quad (\text{II-77})$$

$$\text{Où } \dot{\epsilon}_{n+1}^{\text{eq}*} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1} : S_{n+1}}$$

Les prochaines étapes expliquent la procédure de la solution durant un écoulement viscoplastique.

Les autres équations sont similairement déduites en fonction de :

$$\dot{\epsilon}_{n+1}^{\text{eq}} = \dot{\epsilon}_{n+1}^{\text{eq}*} - 3G \quad (\text{II-78})$$

$$\dot{p} = N_{n+1} \quad (\text{II-79})$$

$$\dot{p}_{n+1} = \dot{p}_n + \dot{p} = \dot{p}_n + N_{n+1} \quad (\text{II-80})$$

$$p_{n+1} = p_n + \quad (\text{II-81})$$

$$T_{n+1} = T_n + x_{2n+1} \quad (\text{II-82})$$

$$x_{2n+1} = \frac{x}{\rho C_p} \dot{\epsilon}_{n+1}^{\text{eq}} \quad (\text{II-83})$$

$$R_{n+1} = (A + B(p_{n+1})^n) \left(1 + C \ln \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \frac{1}{\dot{\epsilon}_0} \right) \left(1 - \left(\frac{T_{n+1} - T_{\text{room}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}} \right)^m \right) \quad (\text{II-84})$$

On remplace toutes ces équations en fonction de dans la loi d'écoulement

$$f_{n+1}(\) = \dot{\epsilon}_{n+1}^{\text{eq}*} - 3G - (A + B(p_{n+1})^n) \left(1 + C \ln \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \frac{1}{\dot{\epsilon}_0} \right) \left(1 - \left(\frac{T_{n+1} - T_{\text{room}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}} \right)^m \right) \quad (\text{II-85})$$

Résoudre maintenant cette équation pour en utilisant la méthode de Newton-Raphson

$$(\)^{i+1} = (\)^i - \frac{r((\Delta \lambda)^i)}{r'((\Delta \lambda)^i)} \quad (\text{II-86})$$

Où le résidu $r(\) = f_{n+1}(\)$

$$r(\) = \dot{\epsilon}_{n+1}^{\text{eq}*} - 3G - (A + B(p_{n+1})^n) \left(1 + C \ln \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \frac{1}{\dot{\epsilon}_0} \right) \left(1 - \left(\frac{T_{n+1} - T_{\text{room}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}} \right)^m \right) \quad (\text{II-87})$$

Et $r'(\)$ la dérivée du résidu par rapport à $(\)$

$$r'(\Delta \lambda) = -3G + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial p_{n+1}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial T_{n+1}} \frac{\partial T_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \dot{p}_{n+1}} \frac{\partial \dot{p}_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} \quad (\text{II-88})$$

En se référant aux équations citées précédemment,

$$r^{(\Delta\lambda)} = -3G + h_{n+1} + \rho_{n+1} x_{2n+1} + \frac{y_{n+1}}{\Delta t} \quad (\text{II-89})$$

Où h_{n+1} , ρ_{n+1} , y_{n+1} sont les équations suivantes avec leur forme incrémentale :

$$h_{n+1} = n B (p_{n+1})^{n-1} \left[1 - \left(\frac{T_{n+1} - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^m \right] * \left(1 + C \ln \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t \bar{\epsilon}_0} \right) \right) \quad (\text{II-90})$$

$$y_{n+1} = \left[(A + B(p_{n+1})^n) - C \left[1 - \left(\frac{T_{n+1} - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^m \right] \right] / \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right) \quad (\text{II-91})$$

$$\rho_{n+1} = (A + B(p_{n+1})^n) \left(1 + C \ln \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta t \bar{\epsilon}_0} \right) \right) \frac{m}{T_0 - T_{\text{melt}}} \left(\frac{T_{n+1} - T_0}{T_{\text{melt}} - T_0} \right)^{m-1} \quad (\text{II-92})$$

Dès que λ est déterminé on le remplace dans les équations constitutives et les variables d'états sont déterminées. Pour un nouvel incrément de déformation λ et de temps t , les valeurs obtenues sont considérées initiales et on retourne à l'étape 1 pour la détermination des nouvelles valeurs à la fin de l'incrément.

II.6.2. Procédure d'intégration de la Vumat

Afin d'éviter des itérations locales nous avons procédé à l'intégration basée sur l'algorithme d'intégration explicite.

Au début la prédiction élastique de la contrainte est générée en utilisant la contrainte de Von-Mises d'un comportement purement élastique.

La contrainte d'essai est obtenue, si le prédicteur élastique est supérieur à l'écoulement, l'écoulement plastique se produit, donc on calcule l'incrément de la déformation plastique équivalente qui est :

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \frac{\sigma_{n+1}^{eq} - \sigma_n^y}{3G + h} \quad (\text{II-93})$$

Où $h = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\epsilon}^p}$ représente l'écoulement au début de l'incrément, cette approximation est raisonnable du moment que le pas de temps est généralement petit dans Abaqus explicit.

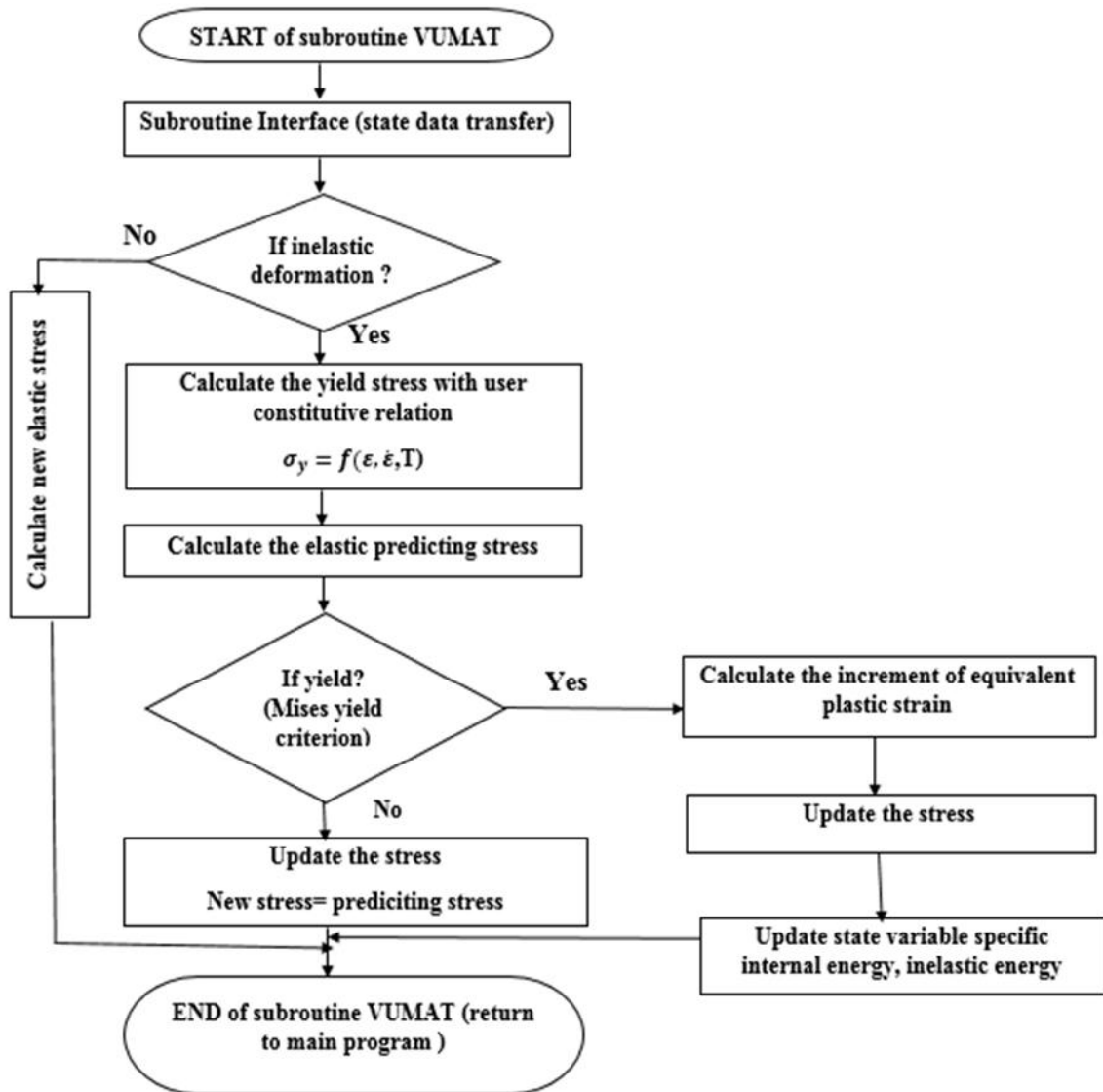


Figure (II-6): Organigramme de la subroutine Vumat.

➤ Intégration explicite

Mise en équation du modèle

$$S = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\epsilon) I = -\frac{1}{3} \epsilon_m I \quad (\text{II-94})$$

S tenseur des contraintes dévatoriques

a n + 1 la contrainte d'essai s'écrit :

Considérant uniquement l'écroutissage

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \quad (\text{II-95})$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\sigma_{n+1}^{eq*} - \sigma_n^y}{3G + \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p}} \quad (\text{II-96})$$

$$y_t = (A + B \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^n \quad (\text{II-97})$$

$$h_1 = \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = Bn (\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^{n-1} \quad (\text{II-98})$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\sigma_{n+1}^{eq*} - \sigma_t^y}{3G + h_1} \quad (\text{II-99})$$

L'incrément de la contrainte est donné par :

$$\Delta = \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II-100})$$

$$y_{n+1} = y_t + \Delta \cdot y \quad (\text{II-101})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II-102})$$

$$y_{n+1} = y_n + h_1 \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II-103})$$

$$y_{n+1} = y_n + Bn (\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^{n-1} \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II-104})$$

$$y_{n+1} = y_n + h_1 \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II-105})$$

➤ Considérant l'écoulement et la viscosité

En utilisant le développement de Taylor on aura :

$$y_{n+1} = y_t + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\Delta t} \quad (\text{II-106})$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\sigma_{n+1}^{eq*} - \sigma_n^y}{3G + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{1}{\Delta t}} \quad (\text{II-107})$$

$$\text{On pose } h_2 = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{1}{\Delta t} = \frac{C \Delta t}{\Delta \bar{\varepsilon}^p} \frac{1}{\Delta t} (A + B \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^n$$

$$h_2 = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \frac{1}{\Delta t} = \frac{C}{\Delta \bar{\varepsilon}^p} (A + B \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^n \quad (\text{II-108})$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\sigma_{n+1}^{eq*} - \sigma_n^y}{3G + h_1 + h_2} \quad (\text{II-109})$$

$$\sigma_n^y = (A + B\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^n (1 + C \ln \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_0}) \quad (\text{II-110})$$

$$h_1 = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = Bn(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^{n-1} (1 + C \ln \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_0}) \quad (\text{II-111})$$

$$\Delta \sigma^y = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \Delta \bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \dot{\varepsilon}^p} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}^p}{\Delta t} \quad (\text{II-112})$$

$$\Delta \sigma^y = Bn(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^{n-1} (1 + C \ln \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_0}) \Delta \bar{\varepsilon}^p + \frac{C}{\Delta \bar{\varepsilon}^p} \Delta t \frac{\Delta \bar{\varepsilon}^p}{\Delta t} (A + B\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^n \quad (\text{II-113})$$

$$\Delta \sigma^y = Bn(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^{n-1} (1 + C \ln \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_0}) \Delta \bar{\varepsilon}^p + C(A + B\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)^n \quad (\text{II-114})$$

L'incrément de la contrainte est donné par :

$$\Delta \sigma^y = h_1 (1 + C \ln \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}_0}) \Delta \bar{\varepsilon}^p + h_2 \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (\text{II-115})$$

On écrit :

$$h = \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial \sigma_n^y}{\partial \dot{\varepsilon}^p} \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{II-116})$$

$$h = h_1 + h_2 \quad (\text{II-117})$$

$$\dot{\varepsilon}_{n+1}^p = \dot{\varepsilon}_n^p + \frac{3}{2} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{S^*}{\sigma_{n+1}^{eq*}} \quad (\text{II-118})$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (\text{II-119})$$

➤ Comportement viscoplastique couplé à l'endommagement

Le critère de rupture de Johnson Cook est un modèle purement phénoménologique. L'endommagement scalaire D est donné par le rapport de la déformation plastique équivalente à la déformation plastique équivalente à rupture.

La mise en équation de l'endommagement D de déformation plastique équivalente et de la déformation plastique équivalente à la rupture ε_R :

$$D = \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_R} \quad (\text{II-120})$$

La rupture se produit lorsque $D=1$. La déformation plastique équivalente à la rupture $\bar{\epsilon}_R$ est donnée par :

$$\bar{\epsilon}_R = (D_1 + D_2 \exp D_3(\dot{\epsilon})) \left(1 + D_4 \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^{Pl}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right) \quad (II-121)$$

Où $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}}$

Ce modèle permet de prendre en compte les influences du taux de triaxialité, de la vitesse de déformation et de la température sur l'évolution de l'endommagement.

D_1 représente un seuil de déformation plastique équivalente.

$$(D_1 + D_2 \exp D_3(\dot{\epsilon})) \quad (II-122)$$

D_4, D_5 représente l'influence de la vitesse de déformation et celle de la température sur l'évolution de l'endommagement.

Dans le cas d'endommagement, les caractéristiques d'un état d'un point de la structure sont $\bar{\epsilon}_n, \dot{\epsilon}_n^P, Y_n, D_n$. A partir de l'incrément de déplacements nodaux nous pouvons calculer l'incrément de déformation : $\Delta \bar{\epsilon}^T = \Delta \bar{\epsilon}^e + \Delta \bar{\epsilon}^P$. Le but est de déterminer les grandeurs à l'instant t_{n+1} qui sont $\bar{\epsilon}_{n+1}, \dot{\epsilon}_{n+1}^P, Y_{n+1}, D_{n+1}$.

➤ Prédiction élastique

A l'instant t_n , nous donnons un incrément de déformations totales $\Delta \bar{\epsilon}$ que nous supposant purement élastique.

$$\begin{cases} \Delta \bar{\epsilon}^P = 0 \\ \Delta \bar{\epsilon}^e = \Delta \bar{\epsilon} \\ \Delta Y = 0 \\ \Delta D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}_{n+1}^P = \bar{\epsilon}_n^P \\ \bar{\epsilon}_{n+1}^e = \bar{\epsilon}_n^e + \Delta \bar{\epsilon} \\ Y_{n+1} = Y_n \\ D_{n+1} = D_n \end{cases} \quad (II-123)$$

A la fin de l'incrément t_{n+1} on calcul une contrainte appelée la contrainte d'essai $\bar{\sigma}_{n+1}$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_n(t) + (1 - D_n)(2G \bar{\epsilon}_{n+1} + EKGtr \bar{\epsilon}_{n+1}) \quad (II-124)$$

Avec $\bar{\epsilon}_{n+1} = \bar{\epsilon}_n^e + \Delta \bar{\epsilon}$

En remplaçant la valeur de la contrainte d'essai dans le critère de plasticité

$$f_{n+1} = J_2(\underline{\sigma}_{n+1}) - \sqrt{1 - D_n} \cdot y \quad (\text{II-125})$$

Si $f_{n+1} < 0$ le comportement est purement élastique, l'intégration est finie pour la contrainte est égale à la contrainte d'essai.

Les variables internes à l'instant t_{n+1} sont :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p \\ \bar{\dot{\varepsilon}}_{n+1}^p &= \bar{\dot{\varepsilon}}_n^p \\ Y_{n+1} &= Y_n \\ D_{n+1} &= D_n \end{aligned} \quad (\text{II-126})$$

Actualisation de la contrainte dans le cas élastique :

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}_{n+1} - (2GN_{n+1}\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (\text{II-127})$$

Si dans le cas contraire le critère est positif $f_{n+1} > 0$, la solution est élastoplastique, une correction plastique sur la contrainte d'essai est nécessaire pour calculer $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \bar{\dot{\varepsilon}}_{n+1}^p, Y_{n+1}, D_{n+1}$ et assurer $f_{n+1}(\underline{\sigma}_{n+1}, Y_{n+1}, D_{n+1})$

Calcul de l'écoulement plastique :

$$N_{n+1} = \frac{3 S_{n+1}^*}{2 \sigma_{n+1}^{eq*}} \quad (\text{II-128})$$

La contrainte équivalente sous forme incrémentale devient :

$$\sigma_{n+1}^{eq*} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{n+1} : S_{n+1}} \quad (\text{II-129})$$

L'incrément de déformation plastique équivalente s'écrit :

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p = \frac{\sigma_{n+1}^{eq*} - \sigma_n^y}{3G + \frac{\partial\sigma_n^y}{\partial\bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial\sigma_{n+1}^y}{\partial\bar{\varepsilon}^p \Delta t}} \quad (\text{II-130})$$

$$D = \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon_R} \quad (\text{II-131})$$

L'incrément de l'endommagement s'écrit :

$$\Delta D = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p}{\varepsilon_R} \quad (\text{II-132})$$

$$D_{n+1} = D_n + D \quad (\text{II-133})$$

$$D_{n+1} = D_n + \Delta D \quad (\text{II-134})$$

Actualisation de la contrainte

$$\bar{\epsilon}_{n+1} = \bar{\epsilon}_{n+1} - (1 - D_n)(2GN_{n+1}\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p) \quad (\text{II-135})$$

Une fois la contrainte actualisée on procède au stockage des résultats.

➤ **Modèle de Khan et al (2007)**

$$\sigma_{crit} = \left(A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^{n_0} \left(1 - \frac{\ln \bar{\epsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1} \right) \left(\dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \right)^c (1 - T^m) \quad (\text{II-136})$$

$$\left(\bar{\epsilon}^{pl} \right) = \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right) \quad (\text{II-137})$$

Mise en équation du modèle de Khan

$$h_1 = \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \quad (\text{II-138})$$

$$h_1 = B(\bar{\epsilon}^{pl})^{n_0-1} \left(1 - \frac{\ln \bar{\epsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1} \left(\bar{\epsilon}^{pl} \right) \quad (\text{II-139})$$

$$h_2 = \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \quad (\text{II-140})$$

$$h_2 = \left(A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^{n_0} \right) \left[\left(\frac{n_1 dt}{\bar{\epsilon}^{pl} \ln D_0^{pl}} \left(1 - \frac{\ln \bar{\epsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1-1} \right) \left(\dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \right) + \left(\left(\frac{c}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^{c-1} \left(1 - \frac{\ln \bar{\epsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1} \right) \right] \quad (\text{II-141})$$

$$h = \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{\partial \sigma_t^y}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{II-142})$$

➤ **Modèle de Khan couplé avec l'endommagement de Johnson Cook**

$$\sigma_{crit} = \left(A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^{n_0} \left(1 - \frac{\ln \bar{\epsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1} \right) \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^c (1 - T^m) \quad (\text{II-143})$$

$$\sigma_R = (D_1 + D_2 \exp D_3(\quad)) \left(1 + D_4 \ln \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right) \right) \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right) \quad (\text{II-144})$$

➤ **Modèle de Khan couplé avec l'endommagement de Langseth**

$$\tau_{\text{crit}} = \left(A + B(\bar{\varepsilon}^{\text{pl}})^{n_0} \left(1 - \frac{\ln \bar{\varepsilon}^{\text{pl}}}{\ln D_0^{\text{pl}}} \right)^{n_1} \right) \left(\frac{\bar{\varepsilon}^{\text{pl}}}{\varepsilon_0} \right)^c (1 - T^m)$$

$$D = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{\text{pl}} < \varepsilon_d \\ \frac{D_c}{\varepsilon_f - \varepsilon_d} \bar{\varepsilon}^{\text{pl}} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{\text{pl}} \geq \varepsilon_d \end{cases}$$

L'ensemble des résultats des simulations obtenus à partir de l'implémentation des modèles présentés dans ce chapitre sont exposés dans le chapitre suivant.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre les aspects numériques et la méthode d'intégration des lois de comportement, liés à la modélisation du comportement mécanique des métaux en dynamique est exposés.

Nous avons présenté l'algorithme d'intégration implicite et explicite pour le comportement élastoplastique.

Le modèle de Johnson Cook a été mis en équation, au départ uniquement l'écroutissage a été pris en compte, ensuite l'effet de la vitesse a été rajouté.

Par la suite nous avons mis en équation les variantes du modèle de Johnson Cook à savoir le modèle de Khan couplé avec l'endommagement de Johnson Cook, et le modèle de Khan couplé avec l'endommagement de Langseth.

A la fin de ce chapitre nous avons présenté la méthode de modélisation du comportement mécanique élastoplastique couplé à l'endommagement. La modélisation basée sur la thermodynamique des processus irréversibles avec variables d'état est utilisée pour traduire le couplage entre le comportement plastique isotrope à écroutissage isotrope et un endommagement ductile isotrope.

Chapitre III

Résultats et discussions

Chapitre III : Résultats et discussions

III.1.Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation des résultats numériques effectués à partir de l'implémentation, dans le sous-programme utilisateur du code élément finis Abaqus/Explicit. Dans cette étude nous avons utilisé le modèle phénoménologique de Johnson-Cook, ce modèle prend en compte l'érouissage et la vitesse de déformation.

Les modèles implémentés sont utilisés premièrement sur un élément de volume 3D cubique (figure III.1), sollicité en traction uniaxiale sous différentes vitesses de sollicitations. Puis sur une structure pour simuler l'essai d'impact, (impact d'une barre cylindrique sur une plaque rectangulaire discret rigid).

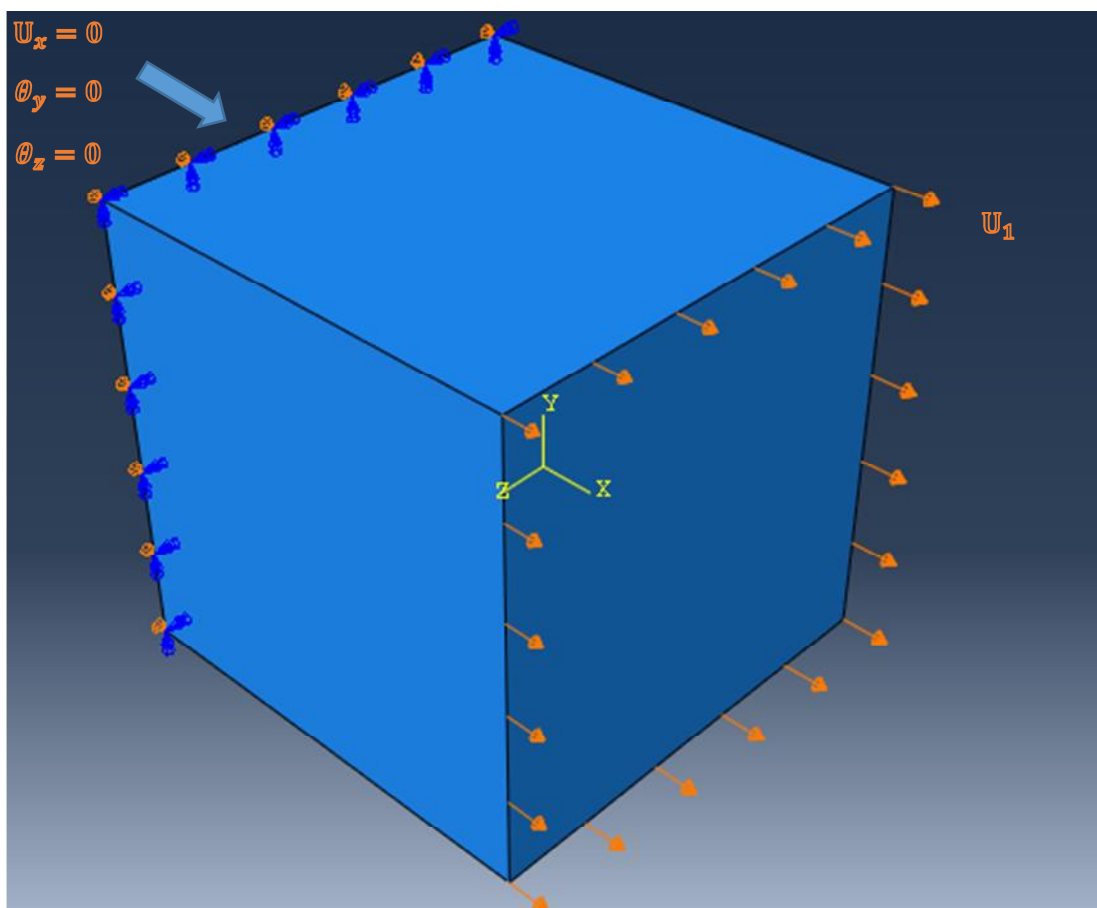


Figure (III.1) : Élément 3D utilisé pour les simulations numériques (exemple : Conditions aux limites pour simuler une traction uniaxiale).

III.2. Traction uniaxiale

Nous présentons dans ce qui suit quelques résultats de l'essai de traction uniaxiale en prenant en considération uniquement le premier terme de la loi de Johnson-Cook qu'est l'écrouissage puis on ajoute l'effet de la vitesse de déformation.

III.2.1. Loi de JC

$$\sigma(\bar{\epsilon}^{pl}) = (A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^n)$$

La figure III.2 représente l'essai de traction en utilisant uniquement l'écrouissage de Johnson Cook.

Les coefficients utilisés pour les diverses simulations sont regroupés dans le tableau 1.

Tableau III.1 : Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation de l'essai de traction (Cu) [JC83].

Paramètres	E(Mpa)	ν	A(Mpa)	B(Mpa)	N
Simulation	192000	0.33	90	292	0.31

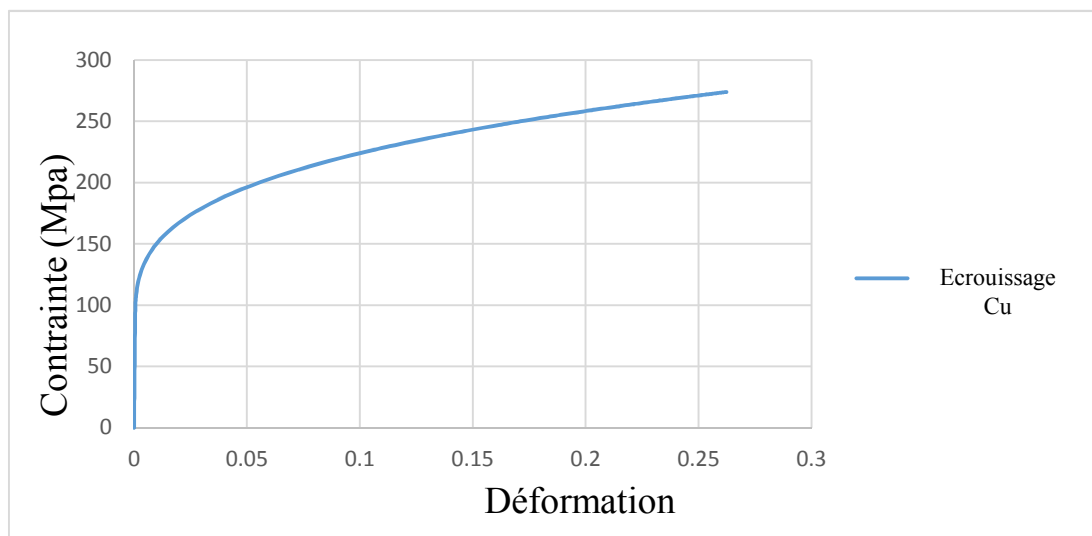


Figure (III.2) : Simulation de l'essai de traction dans le cas d'écrouissage.

III.2.2. Loi de JC plus l'effet de la vitesse de déformation.

$$\sigma(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}) = (A + B(\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)$$

Les coefficients utilisés pour les diverses simulations sont regroupés dans le tableau III.2.

Tableau III.2 : Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation de l'essai de traction (Cu). [JC83].

Paramètres	E(MPA)	ν	A(Mpa)	B(Mpa)	N	M	C	$\dot{\varepsilon}_0$	T_{room}	T_{melt}
Simulation	$192 \cdot 10^3$	0.33	90	292	0.31	0.31	0.025	10^{-5}	298	1356

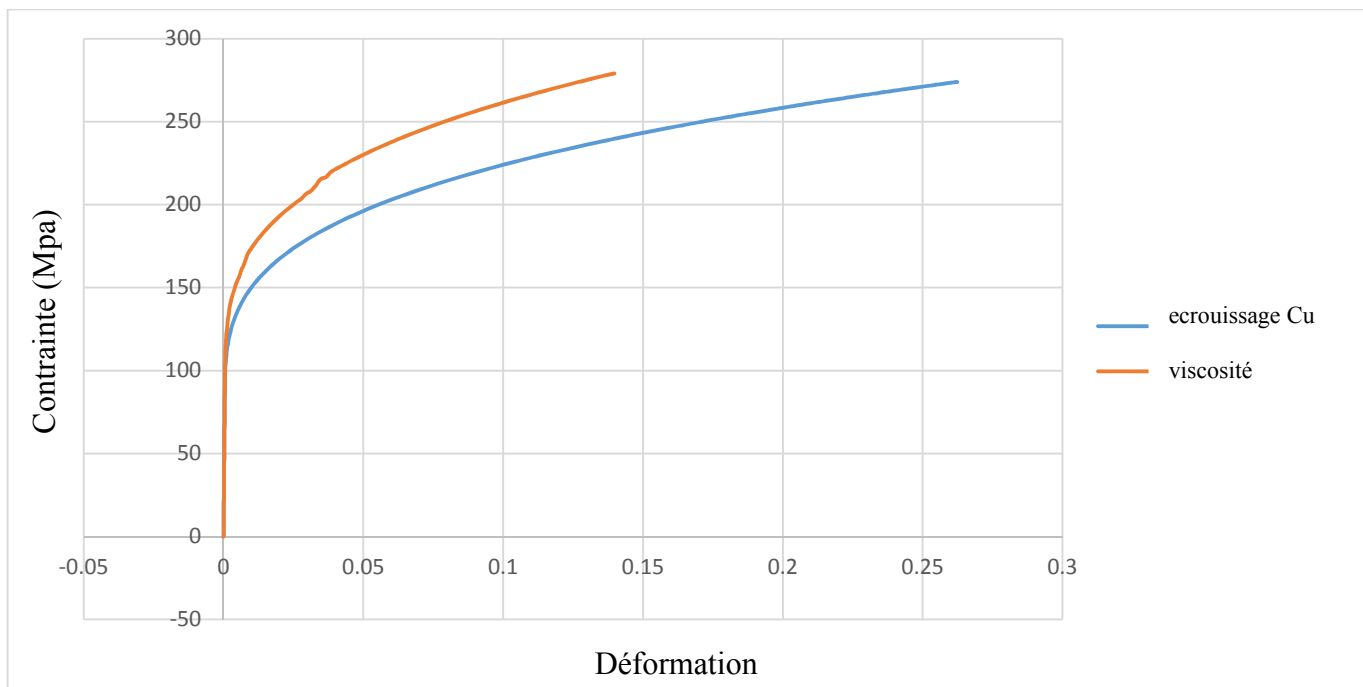


Figure (III.3) : Superposition de la courbe de l'écrouissage à celle de la viscosité (Johnson-Cook).

La figure III.4 représente l'essai de traction pour divers vitesses de déformations.

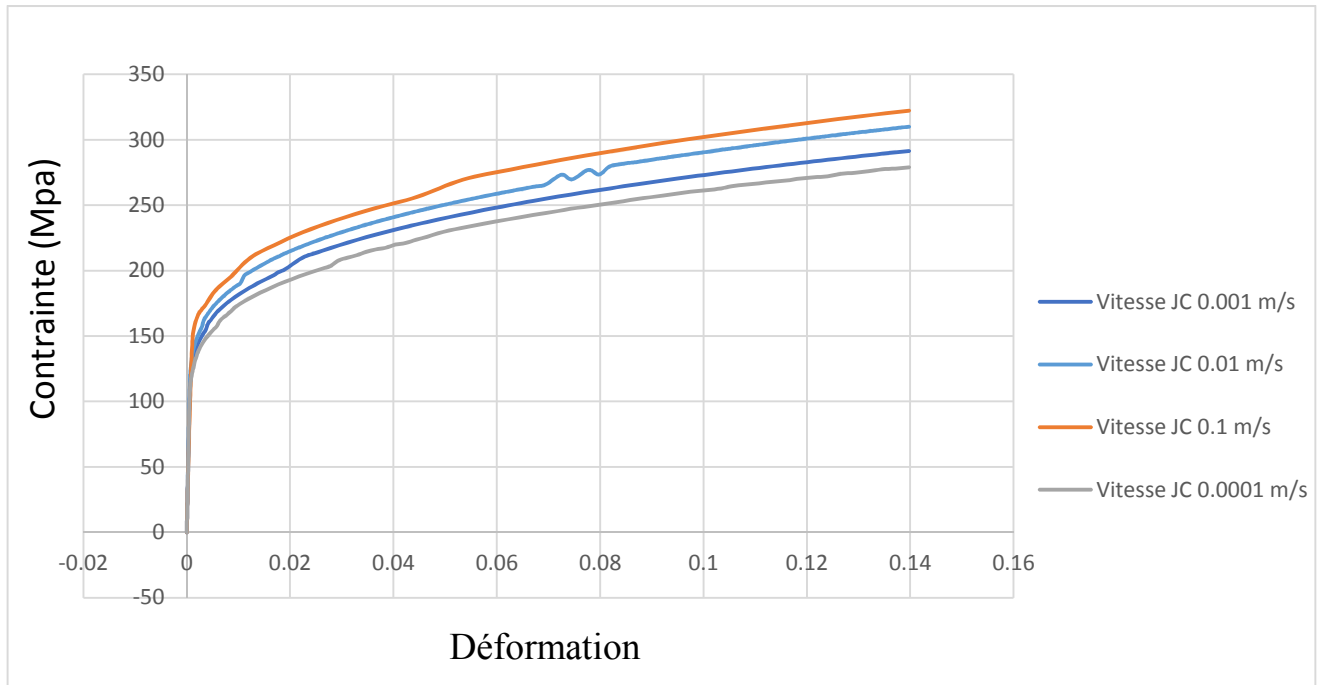


Figure (III.4) : Contrainte en fonction de la déformation à différentes vitesses de déformations JC Vumat.

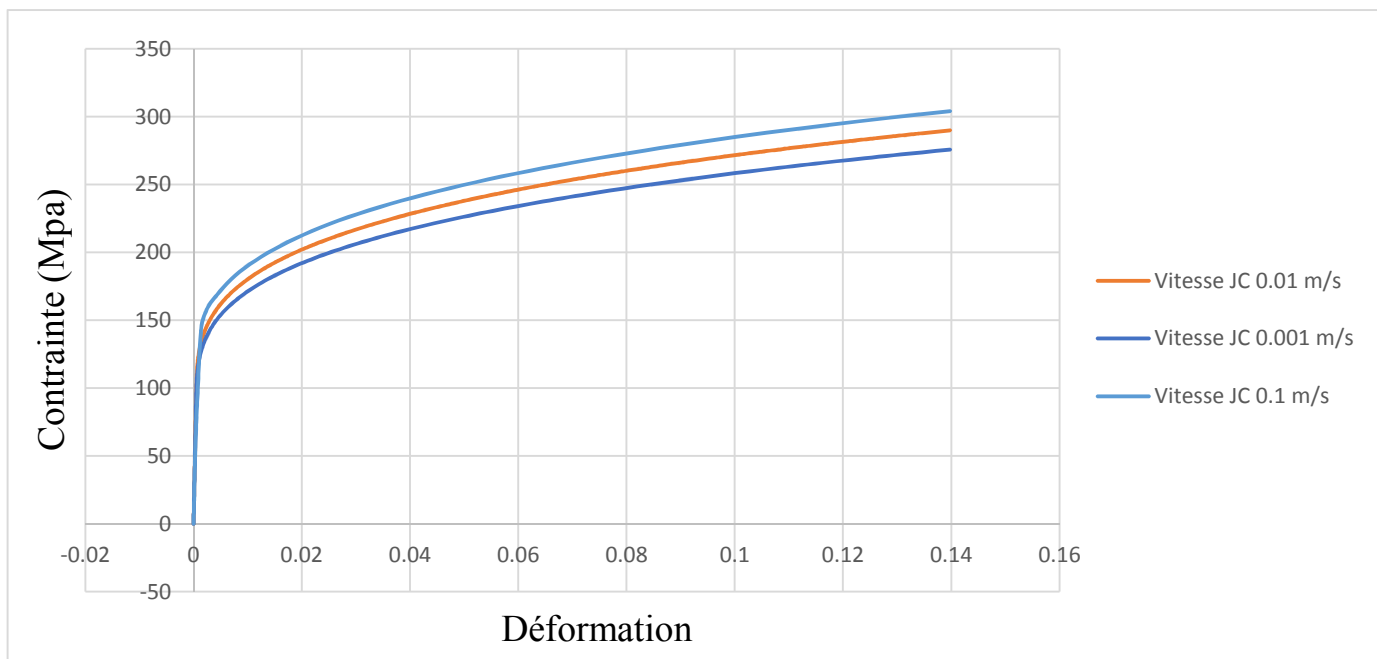


Figure (III.5) : Contrainte en fonction de la déformation à différentes vitesses de déformations dans le code Abaqus.

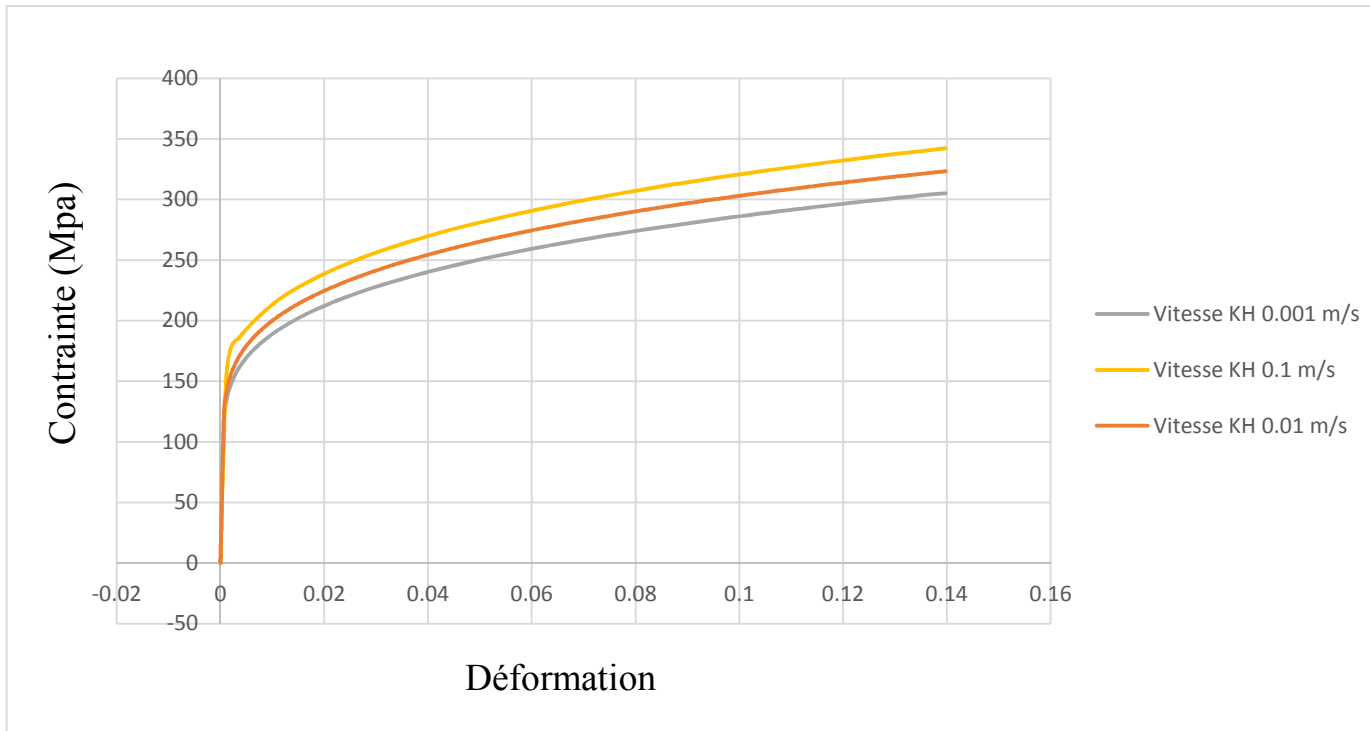


Figure (III.6) : Contrainte en fonction de la déformation à différentes vitesses de déformations Khan.

Les constantes d'endommagements $D_1=0.05$, $D_2=0.005$, $D_3=-2.12$, $D_4=0.02$, $D_c=0.95$

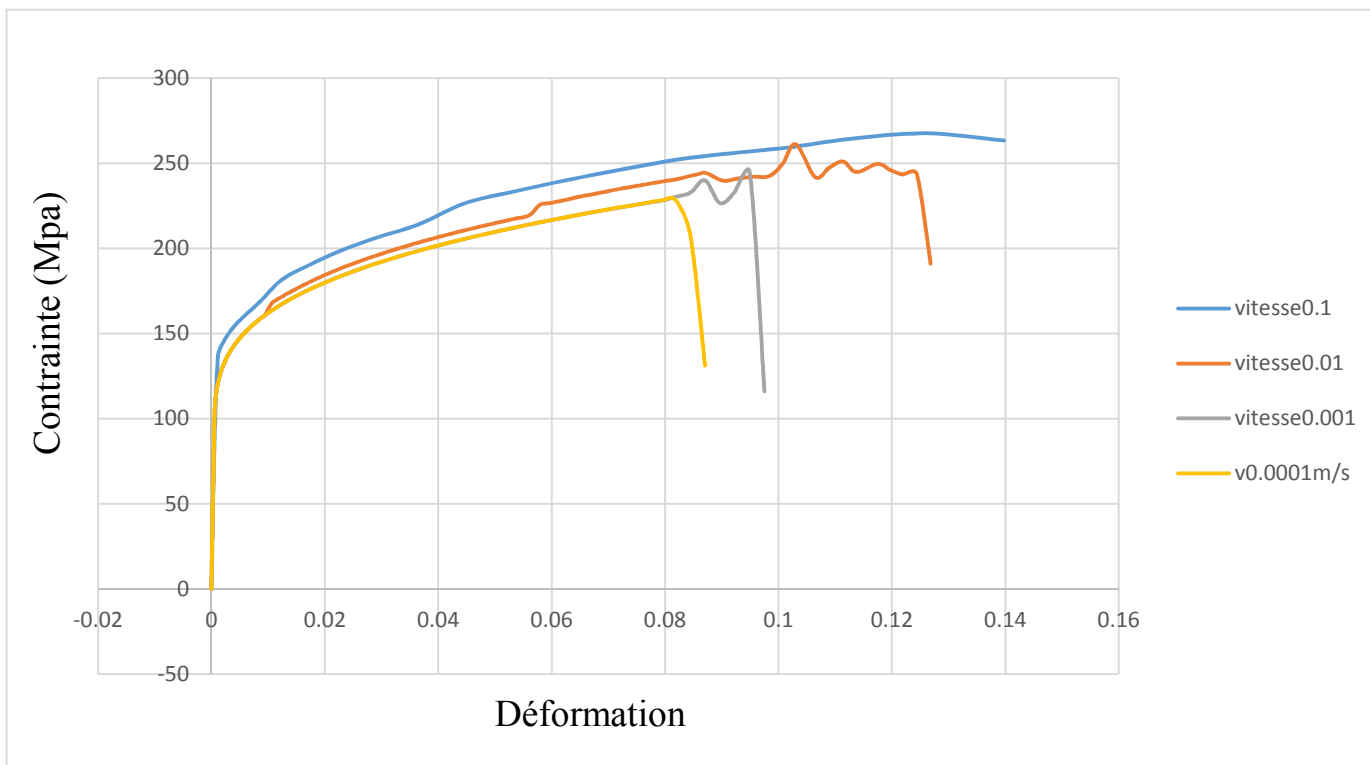


Figure (III.7) : Courbe simulée d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Johnson Cook couplé à l'endommagement à différentes vitesses de déformations.

Cas d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Khan couplé à l'endommagement de Johnson Cook à différentes vitesses de déformations.

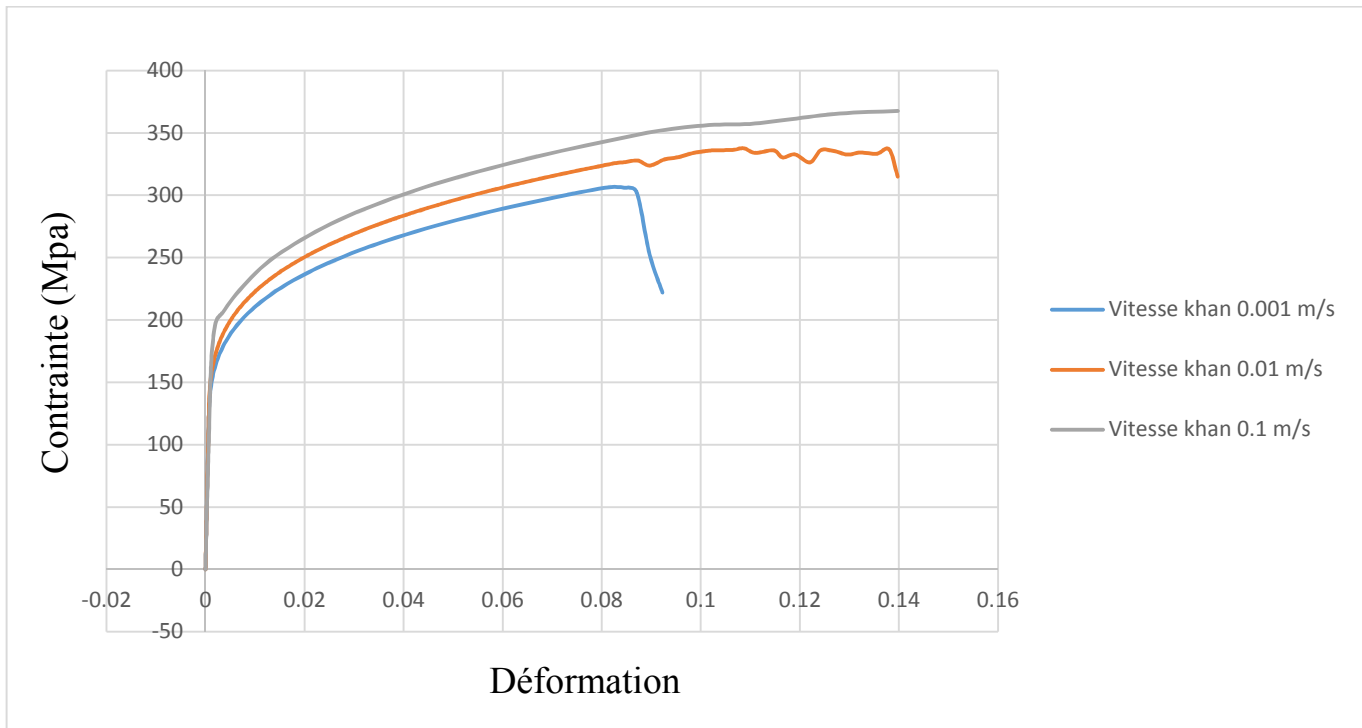


Figure (III.8) : Courbe simulée d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Khan couplé à l'endommagement de JC à différentes vitesses de déformations.

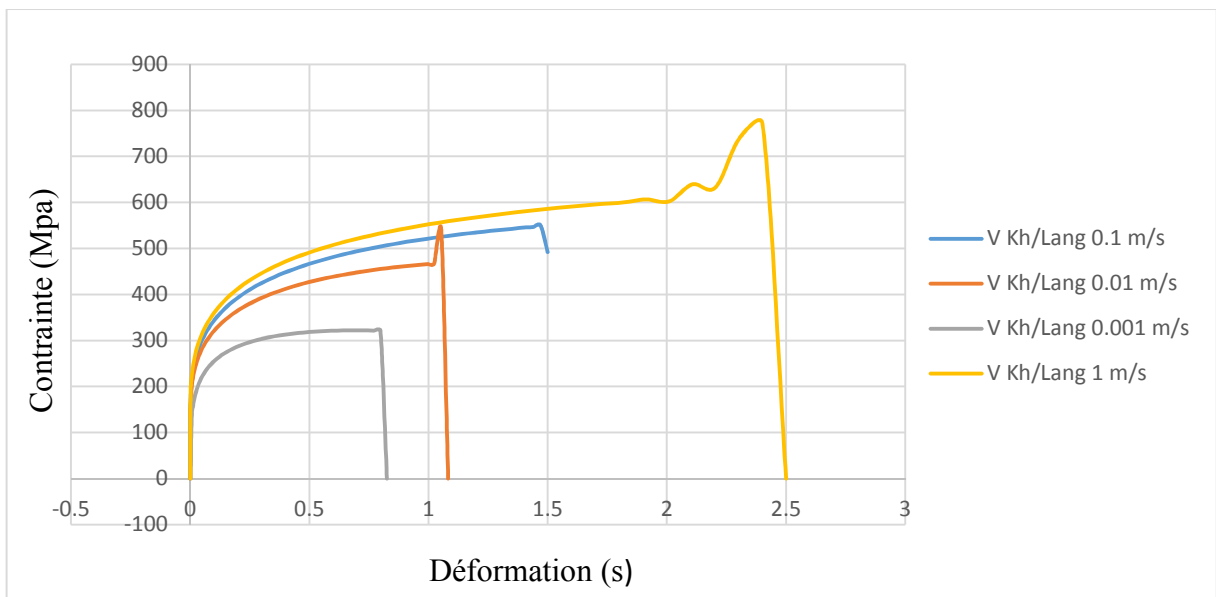


Figure (III.9) : Courbe simulée d'un essai de traction uniaxiale du modèle de Khan couplé à l'endommagement de Langseth à différentes vitesses de déformations.

III.2.3. Discussion des résultats

Ce chapitre a été consacré à la présentation des résultats des simulations effectuées à partir de l'implémentation des modèles développés au chapitre précédent. Ces simulations concernent des essais de traction uniaxiale à différentes vitesses de déformations.

Les figures précédentes présentent les différentes courbes numériques contrainte-déformation pour les modèles matériaux présentés, dans le cas d'un test de traction uniaxiale. Considérant au début la loi viscoplastique de Johnson-Cook sans endommagement et la loi d'écrouissage de Khan.

Ensuite en second lieu nous avons utilisé la loi d'écrouissage et d'endommagement de Johnson-Cook puis on a utilisé le modèle de Khan couplé au modèle d'endommagement de Johnson-Cook et en dernier nous avons couplé le modèle de Khan avec l'endommagement de Langseth.

Afin de mettre en évidence le comportement viscoplastique du modèle proposé à travers l'effet de la vitesse de chargement, nous avons réalisé des simulations de traction avec trois vitesses de déformation.

On remarque que le modèle de Johnson-Cook est limité aux vitesses de déformations inférieures à 1000 s^{-1} du fait que la vitesse de déformation est une fonction logarithmique et l'effet non linéaire de la vitesse est négligé.

On note que la limite d'élasticité et l'écrouissage varient proportionnellement avec la vitesse de déformation.

Pour les courbes avec endommagement on remarque qu'à chaque fois qu'on augmente la vitesse de déformation la courbe se plastifie d'avantage avant endommagement ceci est dû aux effets thermiques.

Contrairement à la variante de la loi de Johnson-Cook qu'est le modèle de Khan et qui a l'avantage d'ajouter une autre constante du matériau, n_1 , le modèle de Khan représente bien l'effet de vitesses de déformation dans le régime dynamique.

Le modèle de Khan couplé à l'endommagement de Langseth illustré par la figure (III.9) n'est pas représentatif pour les petites vitesses contrairement aux grandes vitesses.

III.3. Application de l'essai de Taylor

Cette application est destinée à valider l'implémentation des lois constitutives à grandes vitesses de déformations.

L'impact de Taylor occupe une place particulièrement importante pour obtenir des données en grandes vitesses de déformation dans la gamme de 10^4 - 10^5 s⁻¹. De nombreuses études, expérimentales et numériques, d'impact de Taylor ont été menées depuis plusieurs années.

Le test de Taylor consiste à projeter un cylindre métallique fait du matériau étudié contre une cible rigide.

Les vitesses d'impact sont telles que le cylindre s'écrase contre la cible en prenant l'aspect d'une patte d'éléphant.

Une partie H du cylindre se déforme plastiquement, l'autre X reste élastique. Cependant, dans le cas du test de Taylor, les états de contrainte, de déformation et de vitesse de déformation ne sont pas homogènes dans tout l'échantillon. D'où l'intérêt de cette expérience pour la validation des lois de comportement.

La simulation d'un tel essai permet de tester les différentes lois dans une configuration plus complexe.

Les résultats obtenus seront comparés avec des résultats expérimentaux.

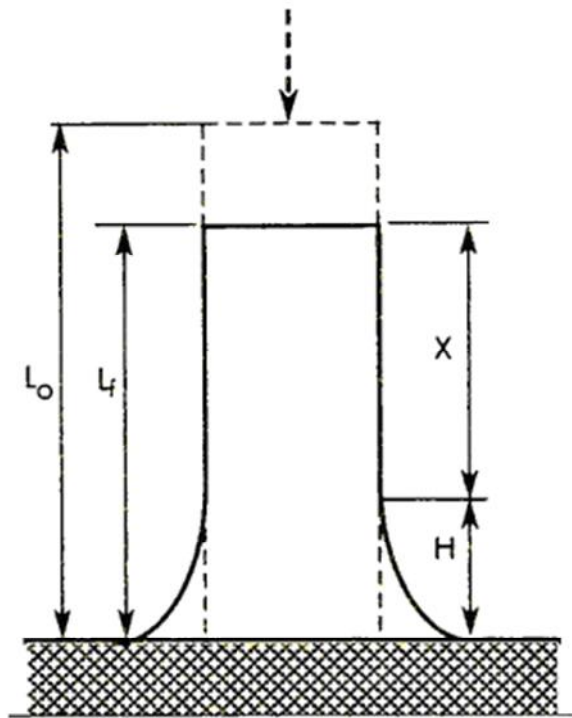


Figure (III.10) : Illustration de l'essai de Taylor.

III.3.1. Description du modèle éléments finis utilisé sur une structure

Le modèle élément finis envisagé ici est destiné à une analyse en 3D du problème d'impact en vue de prendre en compte notamment l'effet de la vitesse. Le projectile de forme cylindrique a été modélisé comme un corps déformable tridimensionnel. Impacter un mur en 3D discret rigid de dimensions avec une vitesse de 190 m/s.

➤ Dimensions du mur figure (III.11)

Longueur : $L = 10 \text{ mm}$

Largeur : $l = 10 \text{ mm}$



Figure (III.11) : Forme du mur

➤ **Dimensions du projectile utilisé**

Projectile de forme cylindrique en cuivre

Longueur : $L = 53.1$ mm

Diamètre : $D = 5.31$ mm

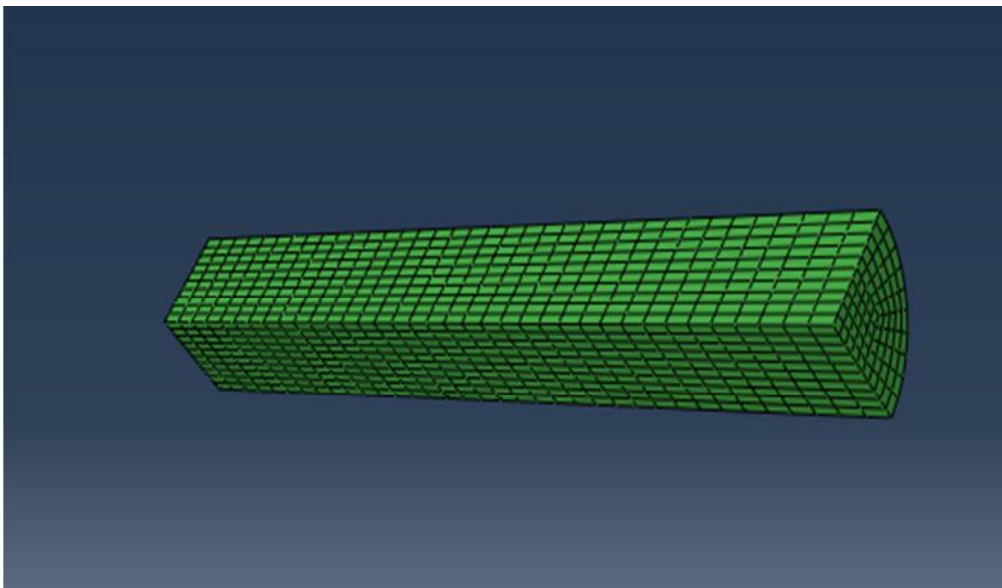


Figure (III.12) : Forme du projectile utilisé dans la simulation numérique.

➤ **Propriétés mécaniques du projectile**

Le projectile est en cuivre ayant les caractéristiques mécaniques suivantes : le module de Young suivant $E= 124\ 000\ \text{MPa}$, coefficient de poisson $\nu = 0.3$.

➤ **Propriétés physiques du projectile**

Densité du cuivre est de $8970\ \text{kg/m}^3$

➤ **Degrés de liberté (ddl)**

Les degrés de liberté au point de référence de la plaque sont bloqués.

Les déplacements des plans symétriques sont bloqués suivant les deux directions radiales (x,y) quant aux autres nœuds ils sont soumis à une vitesse de $190\ \text{m/s}$.

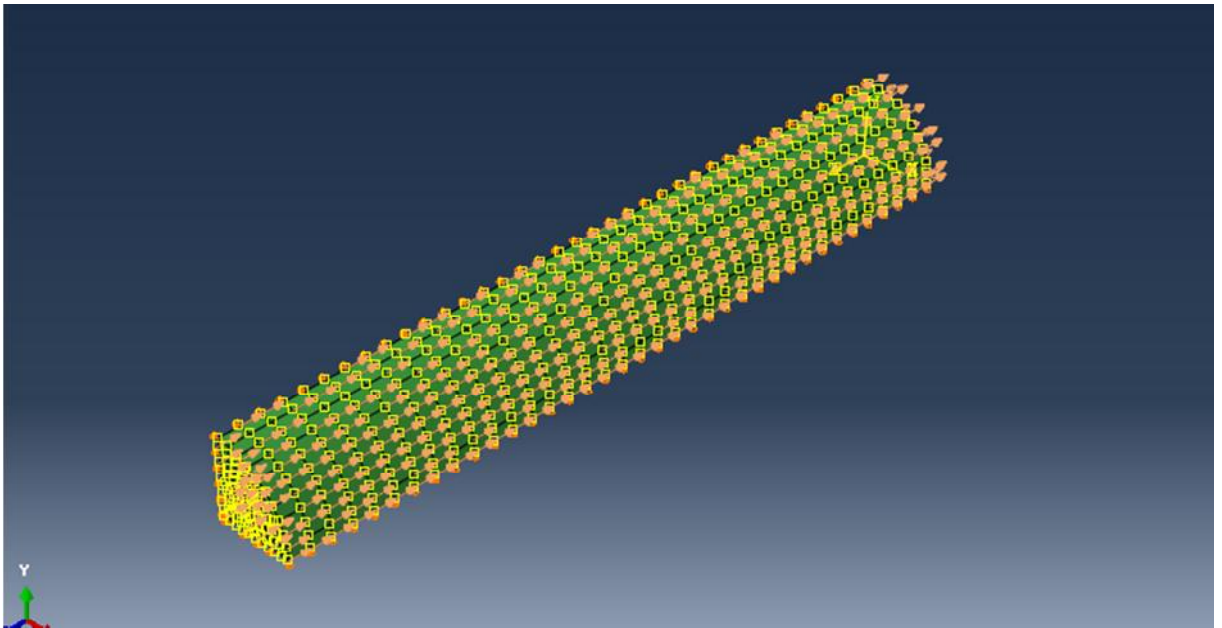


Figure (III.13) : Chargement des nœuds à une vitesse de $190\ \text{m/s}$.

➤ **Maillage**

Le maillage du projectile est composé d'éléments de type 3D à intégration réduite de type C3D8R à 8 nœuds.

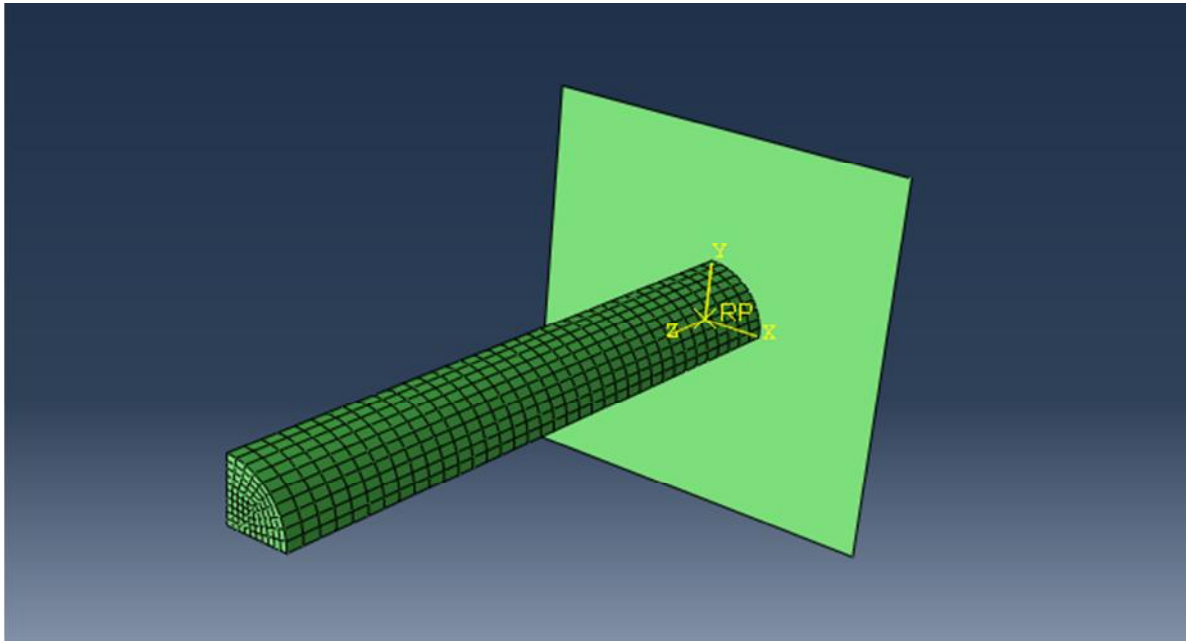


Figure (III.14) : Profil de l'assemblage maillé

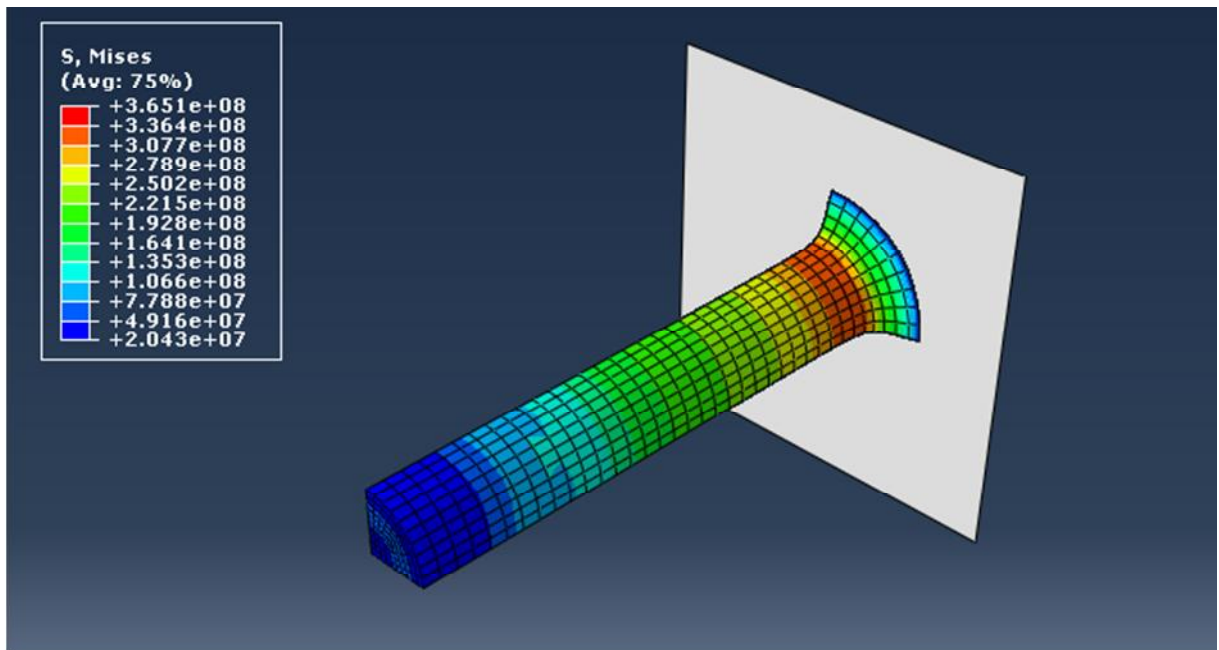


Figure (III.15): Représentation après impact.

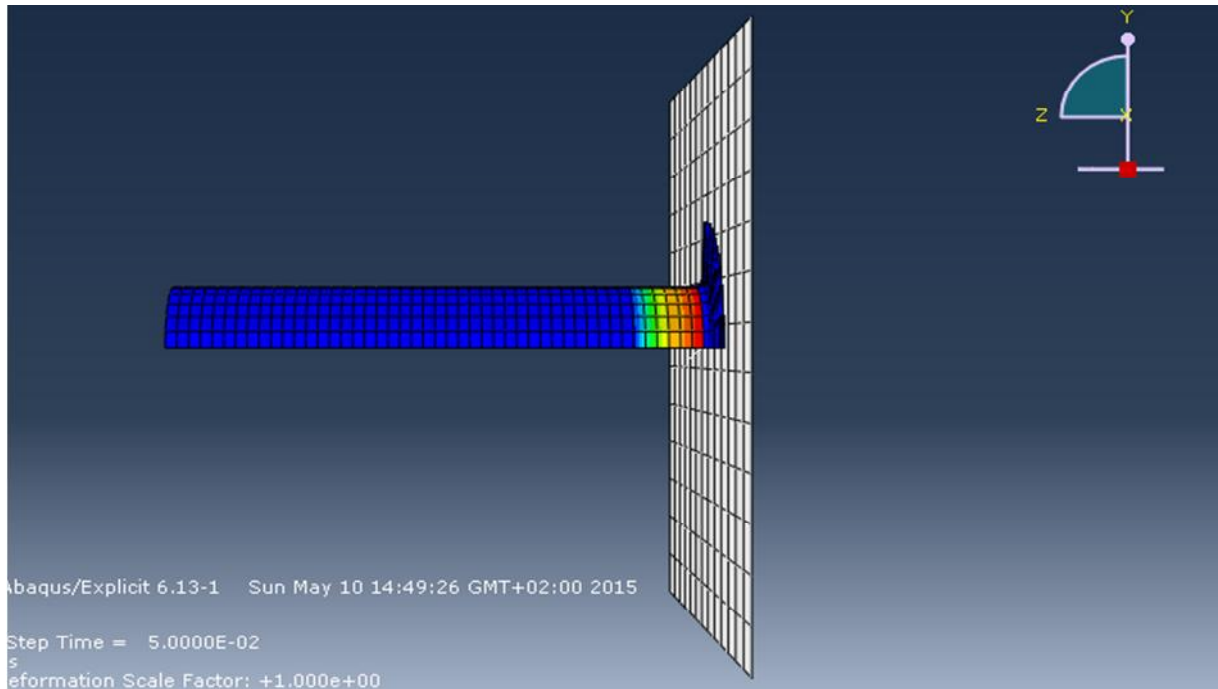


Figure (III.16) : Résultats numériques de la simulation de l'essai impact de Taylor à une vitesse de 190 m/s.

III.3.2. Résultats des simulations

Des essais de simulation sont effectués sur le logiciel Abaqus pour impact barre cylindrique contre un mur, nous avons abouti aux résultats illustrés par la figure suivante :

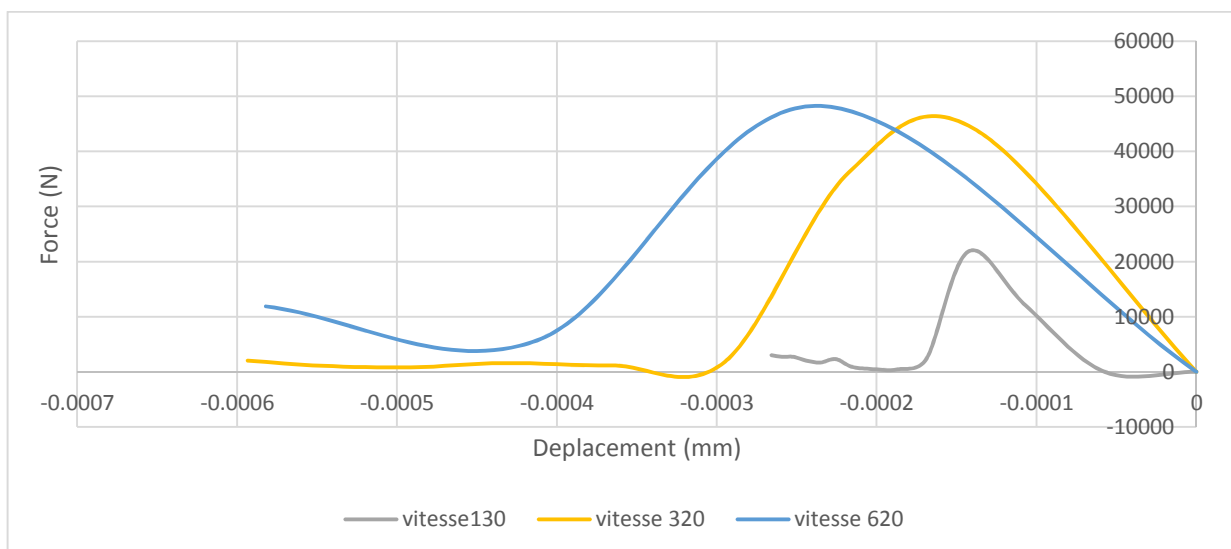


Figure (III.17) : Force en fonction du déplacement à divers vitesses d'impact.

On remarque que l'endommagement est sensible à la vitesse d'impact.

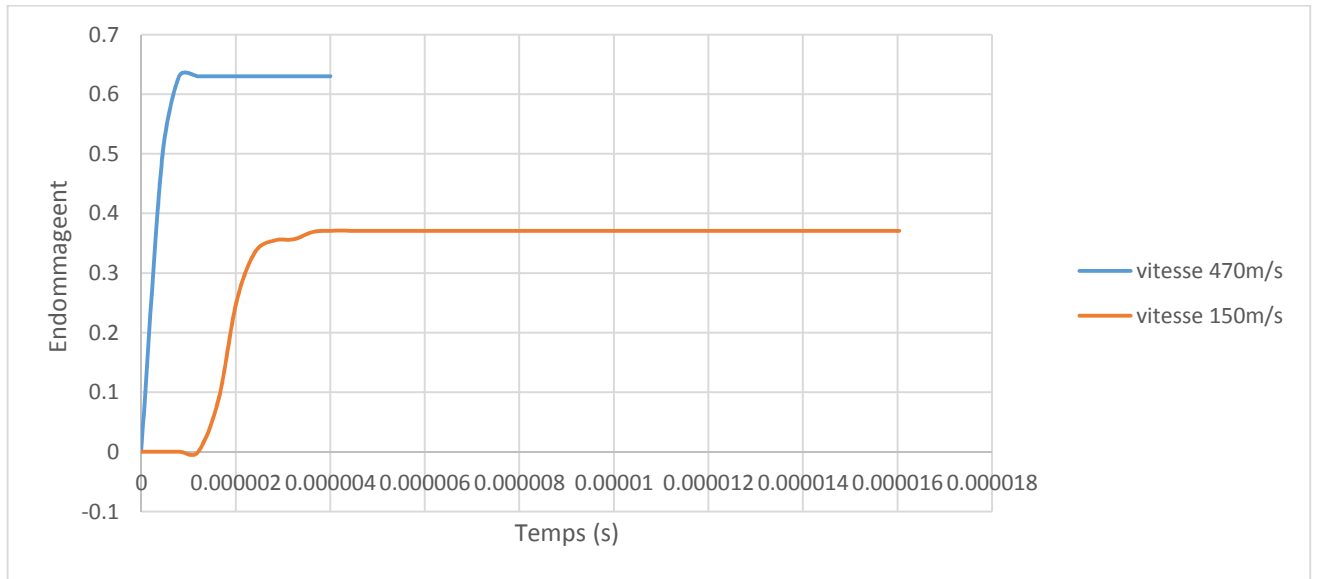


Figure (III.18) : Courbe d'évolution de l'endommagement en fonction du temps à divers vitesses d'impact.

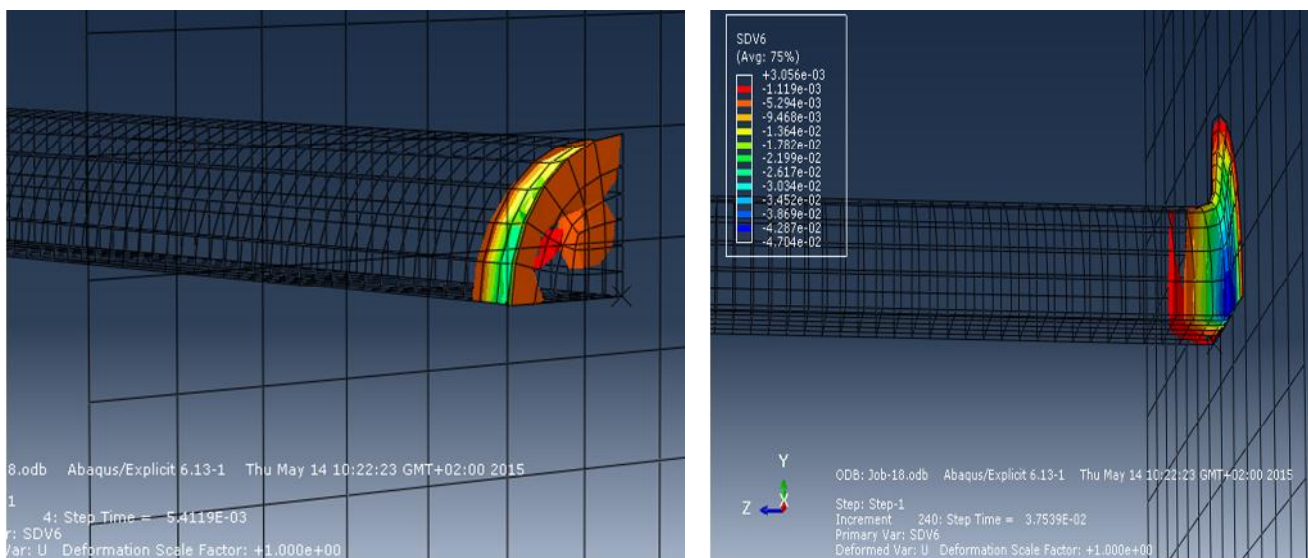


Figure (III.19) : Isocontours de la déformation plastique équivalente à $t=5.4119 \cdot 10^{-3}$ s, $3.7539 \cdot 10^{-2}$ s.

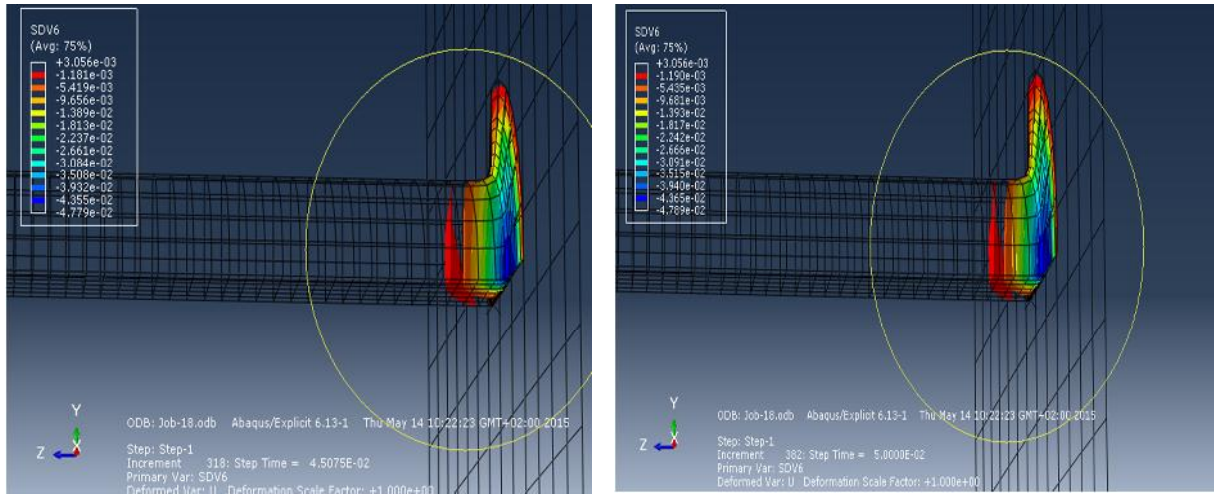


Figure (III.20) : Isocontours de la déformation plastique équivalente à $t=4.5075 \cdot 10^{-2}$ s, $5.000 \cdot 10^{-2}$ s.

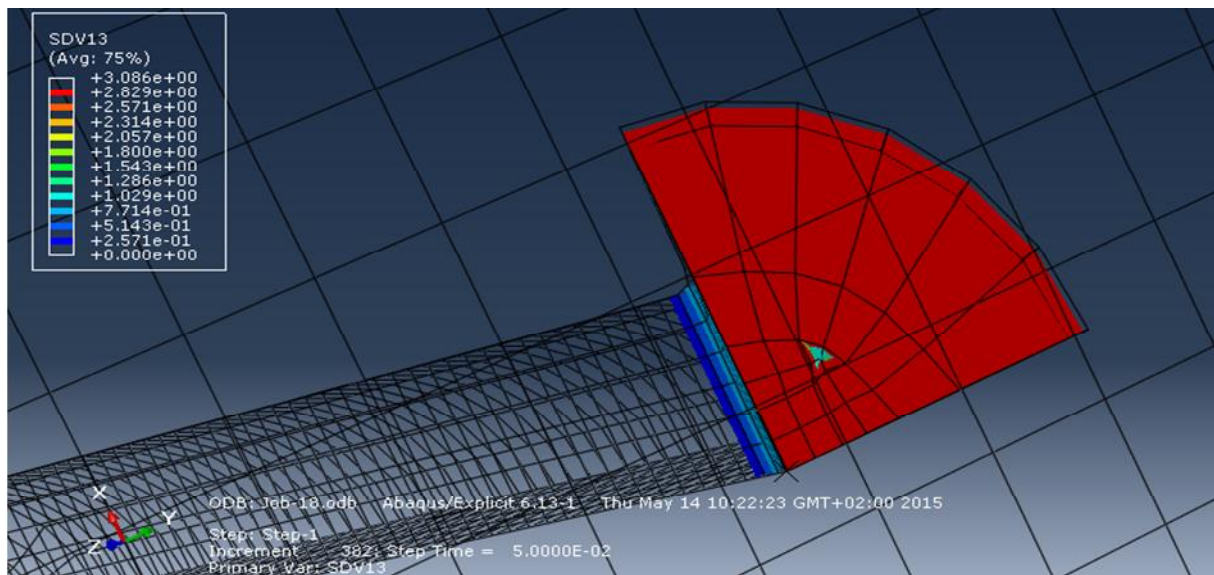


Figure (III.21) : Initiation de l'endommagement après impact.

III.3.3. Application pour les alliages de titane Ti6Al4V

Tableau III.3 : Les paramètres du modèle utilisés pour la simulation de l'essai de traction (Ti6Al4V).

Paramètres	E(Mpa)	ν	A(Mpa)	B(Mpa)	N	M	C	$\bar{\sigma}_0$	
Simulation	110 10 ³	0.3	236	245	0.539	0.31	0.0125	10 ⁻⁵	4600g/cm ³

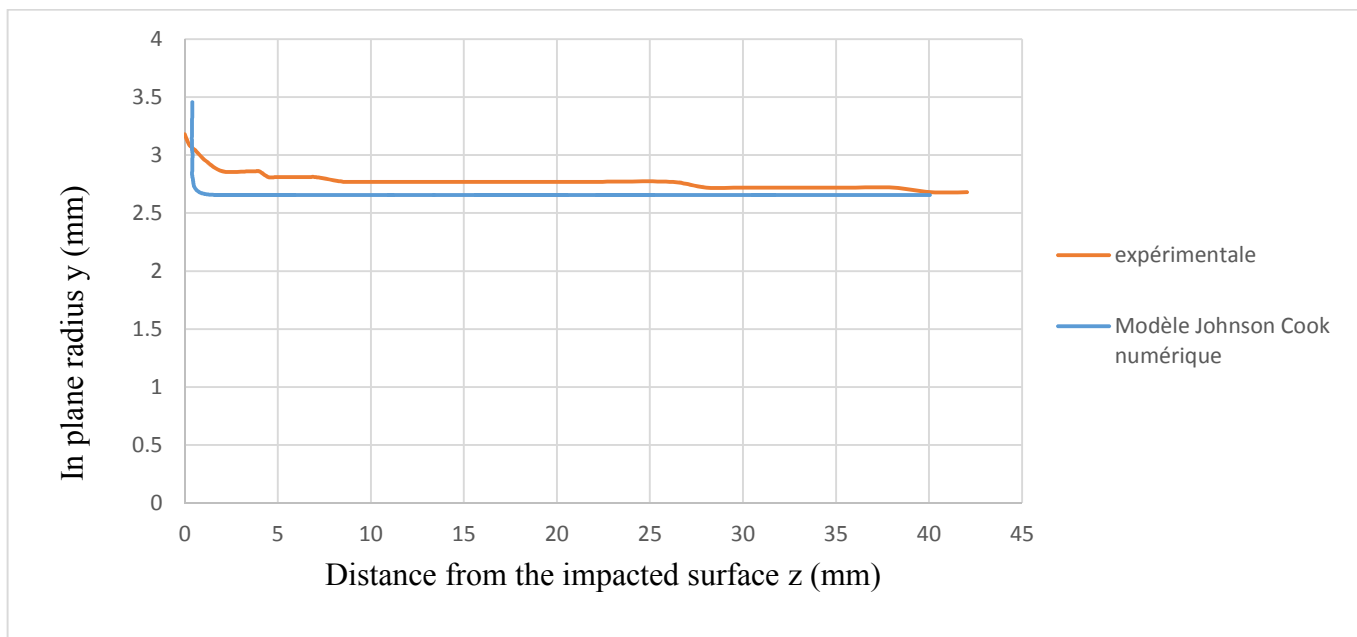


Figure (III.22) : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor[BCFK13].

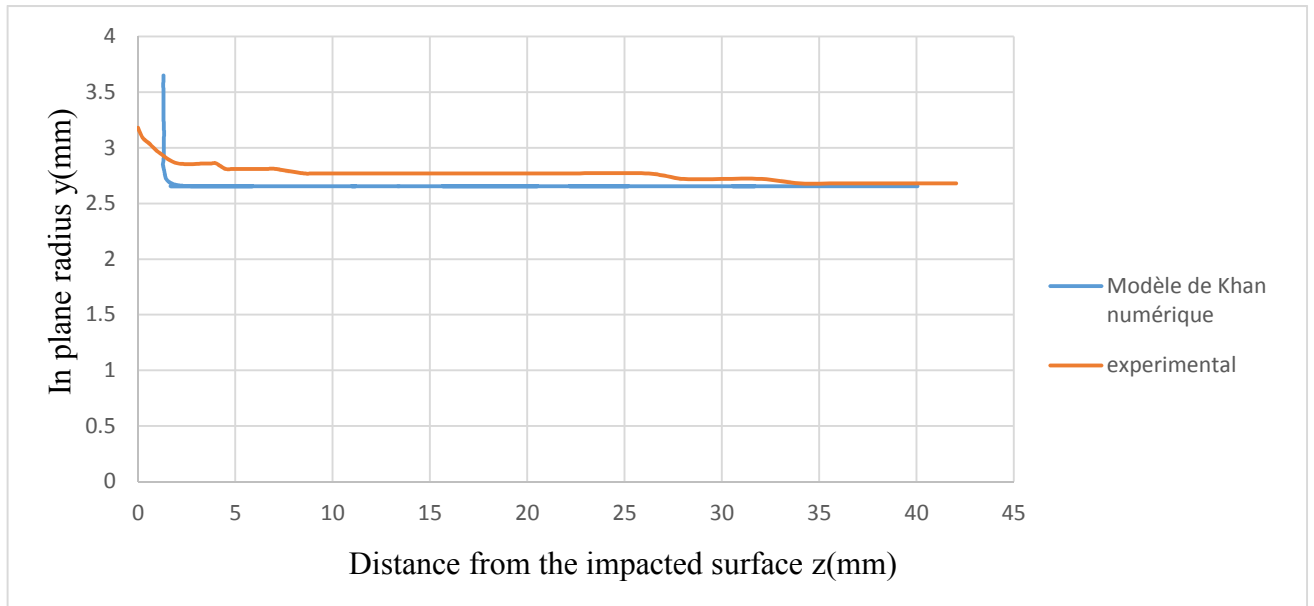


Figure (III.23) : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor modèle de Khan [BCFK13].

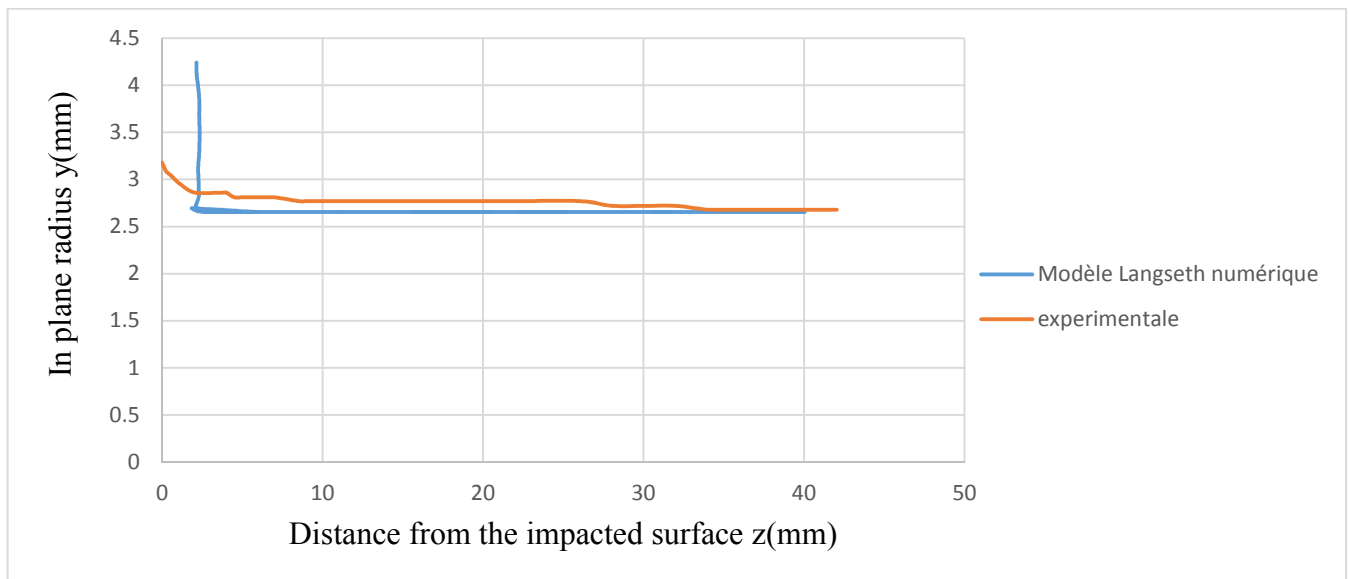


Figure (III.24) : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor modèle de Langseth [BCFK13].

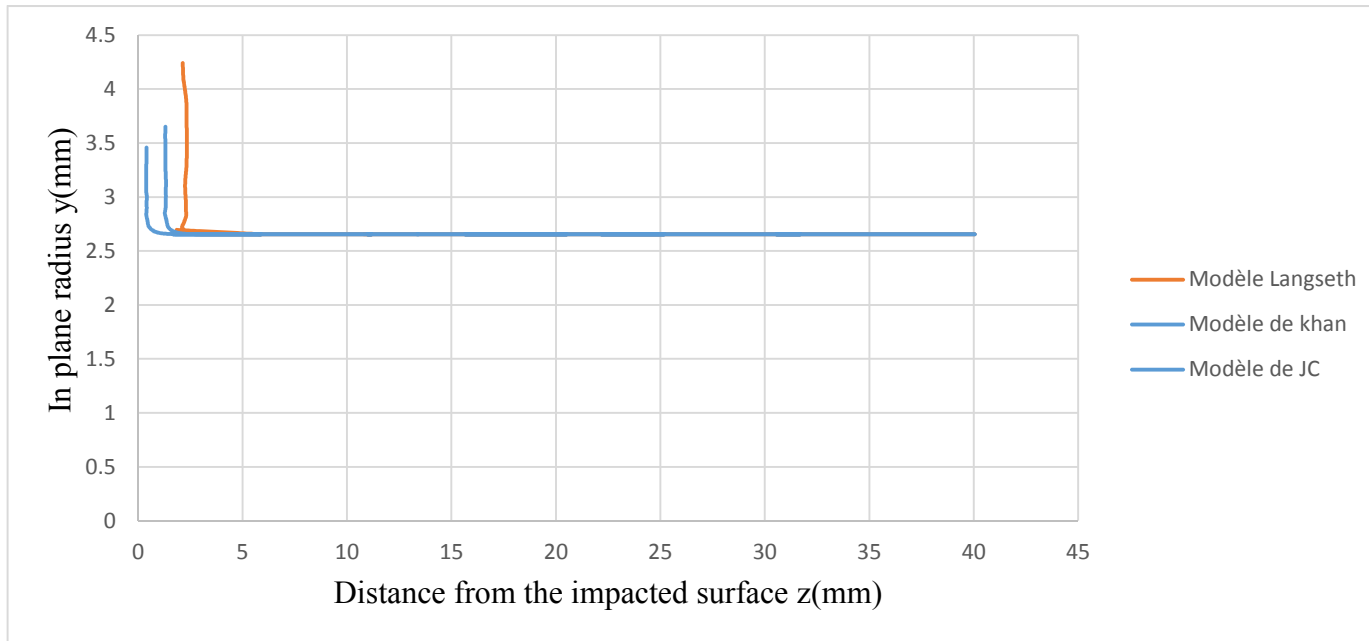


Figure (III.25) : Forme du projectile après déformation plastique durant l'impact de Taylor en comparant les trois modèles [BCFK13].

III.4. Discussion des résultats:

D'après les résultats numériques, il apparaît nettement que lorsqu'on impacte une plaque rigide, le diamètre du projectile augmente de manière très significative et la longueur finale du projectile diminue.

A chaque fois que la vitesse augmente le diamètre du projectile augmente.

La figure (III-19) illustre la distribution de la déformation plastique équivalente dans le spécimen après essai d'impact de Taylor à 190 m/s. Une large déformation est observée à la partie finale impactée du spécimen.

La distribution de la déformation plastique après impact de Taylor est déterminée par le phénomène de la propagation d'onde.

Une bonne concordance entre les résultats des simulations numériques et expérimentaux concernant les profils des projectiles.

Conclusion Générale

Dans cette étude nous avons présenté d'une façon générale, le comportement des matériaux soumis à un chargement dynamique et nous avons mis en évidence l'influence des effets visqueux sur le comportement des matériaux. Les aspects numériques et théoriques liés à ce travail ont été présentés et certains points importants détaillés.

Les résultats des simulations numériques effectués en utilisant le modèle implémenté dans le code de calcul éléments finis en utilisant la routine Vumat ont été présentés et discutés. La validation de ces prédictions numériques est effectuée en se basant sur les résultats de la littérature.

Donc, le modèle implémenté est testé :

- sur un élément de volume sollicité en traction à différentes vitesses de déformations. Les résultats obtenus ont montré que :
 - ✓ Le modèle de Johnson Cook affiche une sensibilité pour une gamme de vitesse de déformation, car il est limité aux vitesses de déformation inférieure à 1000 s^{-1} ;
 - ✓ La limite d'élasticité et l'écroutissement sont proportionnels à la vitesse de déformation ;
 - ✓ Le modèle de Khan couplé à l'endommagement de Langseth n'est pas représentatif pour les petites vitesses contrairement aux grandes vitesses ;

- sur une structure afin de simuler le test de Taylor qui consiste à la projection d'un cylindre métallique contre une cible rigide. Les résultats obtenus numériquement ont montrés :
 - ✓ Une bonne concordance entre les résultats des simulations numériques et ceux de l'expérimental concernant les profils des projectiles ;
 - ✓ Qu'à chaque fois que la vitesse augmente, le diamètre du projectile augmente ;
 - ✓ Qu'après impact le diamètre du projectile augmente de manière très significative et la longueur finale du projectile diminue ;
 - ✓ Que l'endommagement est sensible à la vitesse d'impact.

Au vu de tous les résultats obtenus, il s'avère qu'un travail supplémentaire est nécessaire afin de compléter cette étude. Nous pouvons citer principalement :

- Mener une campagne d'essais dynamiques pour différents matériaux à différentes vitesses de déformations afin de mieux valider les résultats numériques.
- Prendre en compte l'influence des effets thermiques dans le modèle.
- Utiliser un schéma d'intégration implicite.
- Utiliser une approche physique pour l'étude du comportement dynamique.
- Utiliser ces modèles sur d'autres matériaux hors que les métaux (polymères, composites).

Bibliographie

[ABA13] Abaqus standard, version 6.13 : *Theory manual et Standard user's manual*, 2013.

[BAN08] B. BANERJEE. *An evaluation of plastic flow stress models for the simulation of high-temperature and high-strain-rate deformation of metals*. Department of Mechanical Engineering, University of Utah. USA. 2008.

[BCFK14] B.R. BAUDARD, O. CAZACU, P. FLATER, G. KLEISER. *Plastic deformation of high-purity α -titanium: Model development and validation using the Taylor cylinder impact test*. Mechanics of Materials. Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Florida, REEF, 1350 N. Poquito Rd., Shalimar, FL 32579, USA. 2014.

[BEU11] M. BEUSINK. *Measurements and simulations on the (dynamic) properties of aluminium alloy AA6060*. Eindhoven University of Technology. 2011.

[BRU12] M. BRUNET. *Mécaniques des matériaux et des structures*. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012

[BS02] A.P. BORES, R.J. SCHMIDT. *Advanced mechanics of materials*. John Wiley & Sons, Inc, 2002.

[CAM03] L. CAMPAGNE. *Modélisation et simulation de la viscoplasticité et de l'endommagement en grande vitesse de déformation*. Thèse Université Louis Pasteur de Strasbourg, 2003.

[CHA78] J.L. CHABOCHE. *Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. France. 1978.

[COU06] G. COURT. *Prévision objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : Modèle d'épuisement plastique à taux limités*. Thèse, Ecole

Normale Supérieure de Cachan, 2006. [CRI91] M.A. CRISFIELD. *Non linear finite element analyses of solids and structures*. Imperial College of Science, Technology and Medicine London, UK. 1991

[CUQ06] J.P. CUQ LELANDAIS. *Etude du comportement dynamique de matériaux sous choc laser sub-picoseconde*. Thèse Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique de Poitiers (ENSMA). 2006.

[CZA06] C. CZARNOTA. *Endommagement ductile des matériaux métalliques sous chargement dynamique-Application à l'écaillage*. Thèse. Université Paul Verlaine de Metz. 2006.

[DEV05] B. DEVINCRE. *Études de la plasticité des solides cristallins par dynamique des dislocations à l'échelle mésoscopique*. Université de Paris XI-Orsay, 2005.

[DHRT00] A. DRAGON, F. HILD, L. ROTA, H. TRUMEL. *Modélisation du comportement et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques*. Revue Mécanique et Industrie 2000.

[DP05] F. DUNNE, N. PETRENIC. *Introduction to computational Plasticity*. Oxford University UK, 2005.

[FAR09] E. FARAH. *Modèle constitutif du comportement viscoplastique d'un matériau CFC*. Maitrise Ès Sciences Appliquées, Ecole polytechnique de Montréal, 2009.

[FPZ93] D. FRANÇOIS, A. PINEAU et A. ZAOUI. *Comportement mécanique des matériaux*, ISBN 2-86601-348-4, Hermès, 1993.

[FRA09] M. FRANÇOIS. *Lois de comportement élastoplastiques avec endommagement continu*. Université de Technologie de Troyes, 2009.

[GER80] P. GERMAIN. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Edition Masson, Paris. 1980.

[GRJA12] M. GRAZKA, J. JANISZEWSKI. *Identification of Johnson-Cook equations constants using finite element method*. Military University of Technology. Poland. 2012.

[HJDK01] H.W. MEYER, Jr. and D.S. KLEPONIS. *An Analysis of Parameters for the Johnson-Cook Strength Model for 2-in-Thick Rolled Homogeneous Armor*. Army Research Laboratory Aberdeen Proving Ground, MD 21005-5066, 2001.

[HOR11] A. HOR. *Simulation physique des conditions thermomécaniques de forgeage et d'usinage – caractérisation et modélisation de la rhéologie et de l'endommagement*. Thèse École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Paris Tech, 2011.

[JAO08] B. JAOUL. *Étude de la plasticité et application aux métaux*. Ecole de Mines de Paris. 2008.

[JEU08] P.P. JEUNECAMPS. *Simulation numérique, à l'aide d'algorithmes thermomécaniques implicites, de matériaux endommageables pouvant subir de grandes vitesses de déformation. Application aux structures aéronautiques soumises à impact*. Thèse Université de Liège. 2008.

[JUT08] M. JUTRAS. *Improvement of the characterisation method of the Johnsonn-Cook model*. Université Laval Québec. 2008.

[KIR09] E. KIRANLI. *Determination of material constitutive equation of a biomedical grade Ti6Al4V alloy for cross -wedge rolling*. Thèse Izmir Institute of Technology, 2009

[LC85] J. LEMAITRE et J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris. 1985.

[LCBD09] J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE, A. BENALLAL et R. DESMORAT. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris. 2009.

[LEM01] J. LEMAITRE. *Handbook of materials behavior models*. Université Paris 6 LMT Cachan, 2001.

[LES03] P. LESTRIEZ. *Modélisation numérique du couplage thermomécanique endommagement en transformation finies application à la mise en forme*. Université de Technologie de Troyes, 2003.

[LOR] J.P. LORRAIN. *Critère de ductilité basé sur la perte d'ellipticité du module tangent elastoplastique déduit d'un modèle autocohérent*. L'école Nationale Supérieure d'Art et Métier.

[MAN04] P.Y. MANACH. *Lois de comportement et mise en forme des matériaux Métalliques*. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Bretagne Sud Ecole doctorale pluridisciplinaire, 2004.

[MBMP94] N. MOULIN, J. BONTAZ, E. MARTINEZ et J. PENAUD. *Etude du comportement dynamique des matériaux : prise en compte de l'élastoplasticité et de l'endommagement*. Journal de Physique IV, 1994.

[MOR] R.F. MOREAS. *Implementation of constitutive equations for viscoplasticity with damage and thermal softening into the LS-Dyna finite element code with application to dynamic fracture of ring steffend welded structures*. ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique.

[NIS05] I. NISTOR. *Identification expérimentale et simulation numérique de l'endommagement en dynamique rapide : application aux structures aéronautiques*. Thèse Institut National Polytechnique de Toulouse. 2005.

[OUL07] M.OULD OUALI. *Approche micromécanique de la rupture ductile dans les procédés de mise en forme des matériaux. Prise en compte de l'effet de forme des cavités*. Thèse Université de Reims Champagne-Ardenne, 2007.

[PAN05] O. PANTALE. *Plateforme de prototypage virtuel pour la simulation numérique en Grandes Transformations Thermomécaniques Rapides*. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Institut National Polytechnique de Toulouse. 2005.

[PEN10] A. PENIN. *Etude sous chargement dynamique biaxial d'une tôle en acier DP450: influence sur le comportement et la formabilité*. Thèse Université de Bretagne Sud, 2010.

[PNC03] O. PANTALE, I. NISTOR, S. CAPERAA. *Identification et modélisation du comportement des matériaux métalliques sous sollicitations dynamiques*. Communications scientifiques « Technologies Modernes » Roumanie Ministère De La Défense Académie Technique Militaire. 2003.

[RAN04] N. RANC. *Etude des champs de température et de déformation dans les matériaux métalliques sollicités à grande vitesse de déformation*. Thèse Université Paris X, Nanterre. 2004.

[RAV10] S. RAVINDRAN. *Prediction of material damage in orthotropic metals for virtual structural testing*. Thèse Phd, Cranfield University, 2010.

[RBH13] K.G. RÅKVAG , T. BORVIK, O.S. HOPPERSTAD. *A numerical study on the deformation and fracture modes of steel projectiles during Taylor bar impact tests*. International Journal of Solids and Structures. Department of Structural Engineering, Norwegian University of Science and Technology. 2013

[RG91] A.M. RAJENDRAN, D.J. GROVE, et al. *A dynamic failure model for ductile Materials*. University of Dayton Research Institute. 1991.

[SAN07] U. SANCHEZ SANTANA. *Comportement dynamique des matériaux et structures après sollicitation en fatigue*. Université des Sciences et de Technologies de Lille, 2007.

[ŠDF12] M. ŠLAIS, I. DOHNAL, M. FOREJT. *Determination of Johnson-Cook equation parameters*. Acta Metallurgica Slovaca, Vol. 18, 2012, No. 2-3, p. 125-132.

[SH98] J.C. SIMO -T.J.R. HUGHES. *Computational Inelasticity*. Springer New York, 1998.

[STA98] C. STAUB. *Modélisation dynamique de procédés de forgeage*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1998.

[VIG09] B. VIGUIER. *Plasticité : rappels de base et aspects microscopiques*. *Plast Ox* 2007 (2009) 1–2C _EDP Sciences, 2009DOI: 10.1051/ptox/2009002,2009.

[VL02] VLADO, A. LUBARDA. *Elastoplasticity Théory*. CRC Press Boca Raton London New York Washington, D.C, 2002.

[WAN05] X.B. WANG. *Temperature distribution in adiabatic shear band for ductile metal based on Johnson-Cook and gradient plasticity models*. *Revue Science Direct*, 2005.

[ZAT00] P. ZATARIN. *Etude de l'intégration d'un modèle polycristallin dans un code d'éléments finis en élastoplasticité*. Thèse Université de Metz. 2000.

ANNEXE

Dans l'impact de Taylor le cylindre est soumis à une compression, il n'est pas facile de prédire numériquement la rupture ductile.

Modes de ruine en dynamique:

Mode champignon

Ce type de déformation est connu sous le nom de champignon ceci est dû aux ondes de contraintes élastiques, la partie impactée est déformée radialement tandis que la partie arrière reste presque indéformable.

La figure 1 (a) montre un exemple de mode de ruine en champignon pour l'acier soudé 460 E ce dernier est soumis à une vitesse $V_0=400$ m/s.

Les éléments à l'interface n'ont pas été rompus même si, ils sont sujets à de large déformation plastique.

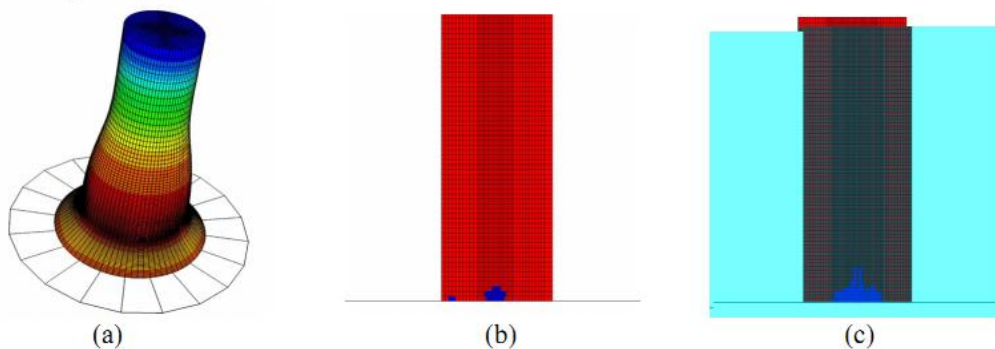


Figure 1 : (a) mode de ruine en champignon à 400m/s pour l'acier soudé 460 E.

Rupture confiné

En augmentant la vitesse d'impact à 500 m/s différents modes de ruine sont observés, en plus du mode champignon plusieurs éléments se sont rompus dans la région impactée en avant et sur l'axe central, ce phénomène est illustré dans la figure La figure 1 (b), La figure 1 (c)

Ce mode de ruine est causé par la nucléation, croissance et coalescence des cavités

Mode en pétales

Le mode de ruine en pétales est prédit avec l'augmentation de la vitesse de déformation à 600 m/s, ceci est illustré par la figure 2.

Initialement plusieurs fissures sont formées à l'interface et se développent à la périphérie externe du projectile. Ces fissures sont finalement arrêtées lors de la diminution de la vitesse d'impact.

Figure 2 : Le processus de ruine en pétale pour l'acier soudé 460 E à 600 m/s.

Bandes de cisaillements :

Ce mode de ruine est identifié à la vitesse de 240 m/s il est illustré sur la figure 3.

Plusieurs fissures sont observées à la périphérie de la surface impactée.

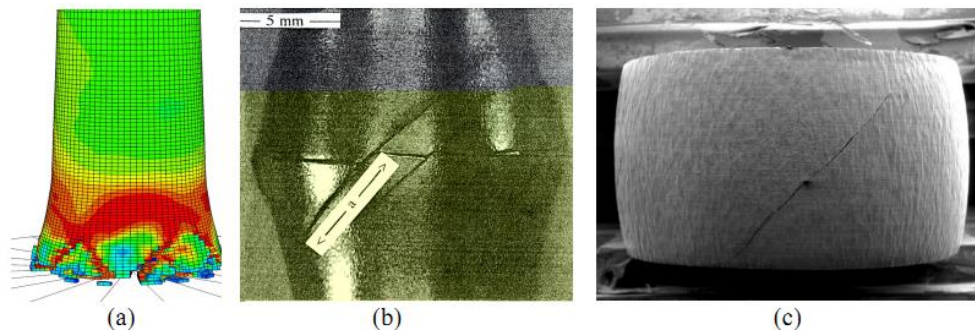


Figure 3 : Bande de cisaillement (impact de Taylor).