

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et Informatique

Département Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Automatique

Option : Automatique des Systèmes Continus et Productique

Présenté par :

M^{me} YOUSFI Safia

Sujet : Développement d'algorithmes pour la commande H_∞ des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel.

Mémoire soutenu le :

devant le jury d'examen composé de :

Président :	Moussa DIAF	Professeur	UMMTO
Rapporteur :	Said DJENNOUNE;	Professeur	UMMTO
Examineur :	Kamel HAMMOUCHE	M.C.A	UMMTO
Examineur :	Rachid MANSOURI	M.C.A	UMMTO
Examineur :	Ahmed MAIDI	M.C.B	UMMTO

♣ Remerciements ♣

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Conception de Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou.

J'adresse mes remerciements à Monsieur S. DJENNOUNE, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, et encadreur de ce mémoire, pour sa disponibilité et ses nombreux conseils. Je le remercie pour ses qualités humaines et pédagogiques qui m'ont permis de réaliser ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur M.DIAF, Professeur à l'UMMTO, pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury.

Ma gratitude à Monsieur K. HAMMOUCHE, Monsieur A. MAIDI et Monsieur R. MANSOURI ; Maîtres de conférences à l'UMMTO d'avoir accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur Maâmar BETTAYEB, Professeur à l'université de Sharjah, Emirates Arabes Unies pour son soutien scientifique.

Je tiens particulièrement à remercier mon époux et mes parents pour leur soutien et leur aide. Merci aussi à toute ma famille, mes collègues, mes amis(es) pour leurs encouragements.

Je dédie ce modeste travail :

A la mémoire de ma mère

A mon cher époux

A mon adorable père

A mes frères et sœurs

A tous mes amis(es).

Mme AIT BRAHAM Safia née YOUSFI

NOTATIONS

$R, R^{m \times n}$ Respectivement, ensemble des réels et ensemble des matrices de dimensions $m \times n$ à coefficients dans R .

s la variable de laplace

$\|G(s)\|_{\infty}$ Norme H_{∞} d'une fonction de transfert $G(s)$

$\|G(s)\|_2$ Norme H_2 d'une fonction de transfert $G(s)$

M^T Transposée de M

I_r Matrice identité de dimension r

$\rho(M)$ Rayon spectral de M .

$\sigma_i(M)$ $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de M .

$\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ Respectivement, valeur singulière maximale et minimale.

S_y et T_y Respectivement, fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire en sortie

S_u et T_u Respectivement, fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire en entrée

$\begin{bmatrix} A & | & B \\ \hline C & | & D \end{bmatrix}$ Matrice système associée à la matrice de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$.

$F_b(P, K)$ Transformation Linéaire Fractionnaire Inférieure.

$W(s)$ Filtre de pondération.

LPV Système Linéaire à paramètres variants.

Notations

LTI Système Linéaire invariant dans le temps.

SISO Système monovariante.

MIMO Système multivariante.

LMI Inégalité matricielle linéaire.

BMI Inégalité matricielle bilinéaire.

NLMI Inégalité matricielle non linéaire

BRL Lemme borné réel.

ARE Equations Algébriques de Riccati

SOMMAIRE

Introduction générale	1
Chapitre 1 : La commande robuste	
Introduction.....	5
I.1 Etat de l'art	5
I.2. Principe de la commande robuste.....	8
I.2.1. Asservissement nominal.....	9
I.2.1.1. Objectifs nominaux.....	9
I.2.1.1.1. Stabilité nominale.....	9
I.2.1.1.2. Performances nominales.....	11
I.2.2. Asservissement réel.....	16
I.2.2.1. Représentation des incertitudes.....	17
I.2.2.2. Les objectifs robustes.....	19
I.2.2.2.1. stabilité robuste.....	20
I.2.2.2.2. Performances robustes.....	22
Conclusion.....	23
Chapitre 2 : Commande H_∞ des systèmes linéaires	
Introduction.....	24
II.1. Principe de la commande H_∞	24
II.2. Problème standard.....	25
II.2.1. La problématique de la commande H_∞	26
II.2.2. Introduction des fonctions de pondération.....	27
II.2.3. Problème de sensibilité mixte.....	29
II.3. Calcul de la commande H_∞ par la méthode basée sur les équations de Riccati.....	31
II.3.1. Hypothèses de résolution.....	32
II.3.2. Description de la solution.....	32
II.3.3. γ -itération	34
II.4. Application de la commande H_∞ linéaire.....	35
II.4.1. Application de la commande H_∞ linéaire sur un pendule inversé.....	35

II.4.2. Application de la commande H_∞ linéaire sur une machine synchrone à aimant permanents.....	44
Conclusion.....	52

Chapitre 3 : Commande H_∞ des systèmes non linéaires

Introduction.....	53
III.1. La problématique de la commande H_∞ non linéaire.....	54
III.1.1. Gain L_2	55
III.1.2. Définition d'un système dissipatif.....	55
III.1.3. problème de commande H_∞ non linéaire	56
III.2. Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire.....	56
III.3. Solution du problème H_∞ des systèmes non linéaires.....	58
III.4. Résolution du problème de commande H_∞ non linéaire via la méthode des approximations successives	59
III.5. Application de la commande H_∞ non linéaire.....	63
III.5.1. Application de la commande H_∞ non linéaire sur un modèle de pendule inversé	63
III.5.2. Application de la commande H_∞ non linéaire sur la machine synchrone.....	69
III.5.3. Comparaison des deux commandes linéaire et non linéaire	73
Conclusion.....	74

Chapitre 4 : Résolution du problème de commande H_∞ par les Inégalités Matricielles

Introduction.....	76
IV.1. Définition des Inégalités Matricielles Linéaires	77
IV.2. Problème sous forme LMI.....	78
IV.2.1. La faisabilité.....	78
IV.2.2. L'optimisation.....	78
IV.3. Toolbox LMI de MATLAB.....	79
IV.3.1. Spécifications des LMI.....	79
IV.3.2. Résolution d'une LMI	80
IV.4. Utilisation des LMI dans la commande H_∞ linéaire et non linéaire	80

IV.4.1. Résolution du problème H_∞ standard par les inégalités matricielles linéaires.....	80
IV.4.1.1. La faisabilité.....	82
IV.4.1.2. Réalisation du correcteur.....	82
IV.4.1.3. Synthèse avec contrainte sur l'ordre du correcteur.....	84
IV.4.2. Résolution du problème de commande H_∞ non linéaire via les NLMI ...	85
IV.4.2.1. Méthode des inégalités matricielles non linéaires NLMI.....	85
IV.4.2.2. Conditions de solubilité du problème de commande H_∞ non linéaire.....	86
IV.4.3. Application de la commande H_∞ basée sur les LMI et NLMI.....	88
IV.4.3.1. Application de la commande H_∞ basée sur les LMI et NLMI sur un modèle non linéaire d'un pendule inversé.....	89
IV.4.3.2. Application sur un moteur synchrone.....	93
IV.4.3.3. Etude comparative.....	98
Conclusion.....	105
Conclusion générale	106
Annexe A : Les normes.....	108
Annexe B : Modèle du pendule inversé.....	114
Annexe C : modèle d'une machine synchrone à aimant permanent.....	117
Annexe D : Convexité.....	122

Références bibliographiques

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La synthèse d'une loi de commande d'un système se fait sur un modèle qui est une traduction mathématique d'une réalité physique, établie dans le but de :

- Ø Transcrire le plus exactement possible la réalité observée du système.
- Ø Prédire le comportement du système vis-à-vis des situations pas forcément connues.

La modélisation se fait en considérant le système comme : - *boite noire*, quand on n'a aucune notion sur ce dernier. - *boite blanche*, quand on le connaît parfaitement. - *boite grise* quand le système est partiellement connu. A partir de là, on peut distinguer deux types de modèle : Les modèles de connaissances qui contiennent toutes les informations utiles sur le processus étudié ; et les modèles de représentations qui sont constitués d'un ensemble de relations mathématiques qui relient les différentes variables du processus.

La réalité dynamique d'un processus ne peut être qu'imparfaitement traduite par des relations mathématiques, ceci sousentend que le modèle d'un système est loin de représenter sa réalité, d'où les incertitudes. Lors de la modélisation, les incertitudes peuvent être volontaires (Parfois les modèles très précis sont très complexes, d'où la nécessité de faire des hypothèses de linéarisation, de la réduction de modèle, des approximations numériques, de négliger des dynamiques...) ou involontaires, elles sont dus aux erreurs d'identification des paramètres, aux erreurs de mesure, et aux perturbations externes.

Donc un modèle, aussi parfait soit il, n'est qu'une approximation de la réalité. Or la commande recherchée doit assurer des performances, telles que stabilité, précision, rapidité, atténuation des effets des perturbations et des bruits, . . . , pour le modèle ; mais surtout pour le processus qu'il représente, c'est ainsi que s'introduit l'idée de robustesse qui est définie comme la propriété qui traduit l'invariance d'un comportement en présence des incertitudes.

La première question de l'analyse de la robustesse concerne la stabilité. L'analyse de la robustesse en stabilité consiste à confirmer si le système demeure stable malgré les incertitudes. On peut aussi souhaiter que le système maintient certaines performances. L'analyse de la robustesse en performance nous informe si le système maintient les performances prévues en présence des incertitudes.

Avant l'analyse de la robustesse, c'est-à-dire l'étude des modifications du comportement du système en présence des incertitudes, il convient de connaître son fonctionnement nominal. La première question est celle de la stabilité nominale, la seconde est celle des performances nominales. Une étude de robustesse en stabilité et en performance n'a de sens que si la stabilité nominale et les performances nominales sont assurées.

Introduction générale

Les commandes qui garantissent la robustesse des systèmes sont dites : Commandes robustes. Ces commandes ont été mises en œuvre, pour les objectifs suivants:

- ∅ Suivre les variations de la consigne
- ∅ Atténuer les effets des perturbations et bruit
- ∅ Garantir la robustesse en stabilité et en performance

Parmi ces commandes ils y'a celles qui sont actives donc fournissent de l'énergie, et celle qui sont passives, dissipent ou stockent l'énergie. Les méthodes de synthèse de commande robuste les plus connues sont :

- ∅ La méthode de synthèse robuste QFT (*Quantitative Feedback Theory*) initialement développée par le professeur **Isaac Horowitz** dans les années 1970. Cette approche fréquentielle permet de prendre en compte l'incertitude portant sur le procédé par des domaines d'incertitudes fréquentiels nommés « gabarits » et construits pour un ensemble de fréquences sur le diagramme de Black-Nichols. Cette modélisation totalement structurée de l'incertitude permet d'obtenir des commandes à la fois robustes et aussi performantes que possible.
- ∅ La méthode de synthèse multi-objectifs qui permet de prendre en compte plusieurs critères de synthèse (de type H_∞ , H_2) sans introduire de couplage artificiel entre les contraintes; ceci est possible grâce aux propriétés de la paramétrisation de Youla et l'utilisation de changements de variables numériquement bien posés. Ces propriétés permettent de considérer les objectifs indépendamment les uns des autres en utilisant des fonctions de Lyapunov différentes pour chaque critère
- ∅ La commande prédictive, quant à elle, fait intervenir deux blocs de calcul : le prédicteur, dont la structure est déterminée à partir du modèle du système à commander, effectue le calcul de la prédiction de la sortie sur un horizon de prédiction, et l'optimiseur qui détermine la commande de façon à optimiser un critère de performance tout en tenant compte des contraintes sur les signaux d'entrée/sortie. Le principe de la commande prédictive robuste (RMPC) consiste à prendre en compte les incertitudes de modèle au niveau de la synthèse de la loi de commande, et ensuite introduit sous la forme d'un problème d'optimisation min-max, visant à minimiser par rapport à la commande, le maximum du critère vis-à-vis de l'ensemble des modèles compatibles avec les incertitudes paramétriques.
- ∅ La commande H_∞ est une commande optimale. Il s'agit essentiellement d'une méthode d'optimisation, qui prend en compte une définition mathématique des restrictions du comportement attendu en boucle fermée. La commande H_∞ a pour principal avantage la

capacité d'inclure dans un même effort de synthétisation, les concepts liés à la commande classique et à la commande robuste. Le mot "optimal" est utilisé dans son sens strictement mathématique car la commande H_∞ minimisera l'effet des entrées/sorties du système. Le "infini" dans H_∞ signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type minimax (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel. La norme H_∞ d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Dans le cas d'un système MIMO, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système, ce qui, dans le cas SISO, se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

Notre travail porte sur la commande H_∞ des systèmes linéaires et non linéaires. Cette commande est le résultat d'un grand nombre de travaux qui s'attachèrent à préciser la nature mathématique du problème de robustesse. L'intérêt et l'importance de la commande H_∞ dans le cadre de la commande des systèmes linéaires, résident dans le fait qu'elle repose avant tout sur les idées classiques développées par Black, Bode et Horowitz. Et qu'elle ramène tout les problèmes de robustesse sous une forme simple, appelé *forme standard*, regroupant toutes les incertitudes possibles.

La question qui se pose, est ce que l'on peut formuler un problème de commande non linéaire en des termes semblables ou, de façon plus directe, si l'on peut étendre l'approche H_∞ au contexte non linéaire.

Ce problème n'a jamais été réellement posé dans la littérature : Les articles se rapportant à « La commande H_∞ non linéaire » s'intéressent au problème de la minimisation par bouclage du gain L_2 (La norme H_∞ non linéaire), sans réellement discuter l'intérêt d'une telle minimisation.

Notre travail consiste à développer des algorithmes d'optimisation H_∞ dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires, et les appliquées par simulation à des systèmes non linéaires afin de valider la robustesse de cette commande.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres:

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la commande robuste, en termes d'acquisition des outils de base, la représentation des incertitudes (Structurées et non structurées) et des quatre axes de robustesse (voir stabilité et performance nominale et stabilité et performance robuste).

Le deuxième chapitre consiste à présenter la théorie de la commande H_∞ des systèmes linéaires, voir le problème H_∞ standard et sa résolution par la méthode basée sur les équations

Introduction générale

de Riccati. Dans ce chapitre deux applications seront effectuées, pour mettre en évidence la robustesse d'une telle commande, l'une sur un modèle de pendule inversé, et l'autre sur un système de machine synchrone à aimant permanent.

Le troisième chapitre regroupe la recherche bibliographique sur la commande H_∞ des systèmes non linéaires, en termes de choix de la méthode, ainsi que le contexte de son application. Des simulations sur les deux systèmes, étudiées dans le deuxième chapitre, seront effectuées en utilisant la méthode des approximations successives.

Le dernier chapitre présente les méthodes de résolution basées sur les inégalités matricielles dans le cas linéaire et non linéaires. Ces méthodes sont appliquées aux exemples précédents. Les résultats de simulation sont comparés et interprétés.

Ce mémoire est clôturé par une conclusion générale sur ce qui a été fait et des perspectives de continuation de ce travail.

CHAPITRE 1

COMMANDE ROBUSTE

Introduction

L'étude et la commande d'un processus s'effectuent à partir d'un modèle. Il existe plusieurs types de modèles, principalement les modèles de connaissance d'une part et les modèles de représentation d'autre part.

Les modèles de connaissances sont des modèles qui mettent en œuvre les lois de la physique, de la chimie, de la biologie, ... Ils contiennent toutes les informations utiles sur le processus étudié (boite blanche). Les variables d'un tel modèle ont alors une interprétation physique (pression, courant, température, force accélérations,...).

Les modèles de représentations, quant à eux ne permettent pas l'interprétation physique des phénomènes étudiés. Ils sont constitués d'un ensemble de relations mathématiques qui relient les différentes variables du processus pris comme boîte grise ou boîte noire.

I-1- Etat de l'art

La robustesse est, depuis longtemps, reconnue comme une propriété fondamentale, et c'est bien la recherche des systèmes robustes qui a motivé l'utilisation des boucles de contre réaction. A cette fin furent développées à partir des années 30, des méthodes fréquentielles dites « classiques ». On peut citer les travaux de Black [Bla34], Nyquist [Nyq32], Bode [Bod45], qui permettent, grâce notamment aux notions de marges de gain et de phase, de quantifier la robustesse d'un système monovarié.

Historiquement, l'approche entrée/sortie fût développée durant les années 60, par Sandberg et Zames [SanZam 66], et se révéla fructueuse puisqu'elle conduisit au célèbre théorème du **faible gain** et ses nombreux corollaires. Au même temps, l'utilisation de la norme H_2 à des fins de performance, est apparue avec la théorie de la commande linéaire Quadratique (LQ) et la théorie de la commande linéaire Quadratique Gaussienne (LQG). La Commande linéaire quadratique est une commande optimale par retour d'état au sens de la minimisation d'un critère quadratique, elle est calculée sur un modèle non bruité. La commande linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) quant à elle est adaptée lorsque l'état du système n'est pas entièrement mesurable ou que les mesures sont affectées par le bruit. La commande LQG réunit un contrôleur LQ (Linear Quadratic) et un estimateur de Kalman.

La théorie de la robustesse des systèmes linéaires stationnaires est évoquée par Zames en 1966 [Zam66], *“One of the broader implications of the theory here concerns the use of functional analysis for the study of poorly defined systems. It seems possible, from only coarse*

information about a system, and perhaps even without knowing details of internal structure, to make useful assessments of quantitative behavior.” (cité par Safonov [Saf80]). Mais il faudra attendre la fin des années 70 et le début des années 80 pour que cette idée soit véritablement exploitée [Saf80]. L’accent est alors mis sur l’analyse de la robustesse des systèmes linéaires stationnaires multivariables [Zam81] [Doy81] [Saf81] donnant naissance à la μ -analyse [Doy82]. Ce qui est remarquable, c’est qu’au-delà de la formulation des spécifications de robustesse, ce cadre propose aussi une formalisation pertinente des spécifications de performance proposée par Zames [Zam81], formalisation respectant les concepts de base de l’automatique fréquentielle classique.

Devant le succès à la fois sur les aspects théoriques et pratiques de la commande robuste, une extension aux systèmes non linéaires a été proposée [Fro95] [Fro 99] [Fro 01]. La démarche adoptée est très similaire à celle de la commande robuste linéaire.

La vérification de la robustesse d’un système commandé présente de nombreuses difficultés. La première est liée à la modélisation mathématique du processus physique. En effet, la robustesse d’une loi de commande ne peut être garantie que sous l’hypothèse de l’appartenance effective du processus réel à l’ensemble des modèles mathématiques choisie pour le présenter. Par ailleurs, l’idée selon laquelle on peut représenter le système réel, de façon parfaite, par un unique opérateur, est bien évidemment illusoire [Doy 81]. Ces considérations mènent à introduire la notion de *famille de modèles*. La description mathématique de telles familles de modèles a donné lieu à de nombreux travaux qui précisent la nature mathématique du problème de la robustesse ([Saf 80], [Doy 81], [Zam 81]).

Voici quelques contributions qui semblent avoir tout particulièrement influencé l’approche actuelle du problème de la robustesse des systèmes linéaires.

- Dans [DoSt81], Doyle et Stein généralisent au contexte multivariable les travaux de Bode ([BOD 45]) et Horowitz, à travers l’introduction de la notion d’incertitudes non structurées de modèle, et l’utilisation des valeurs singulières. Le problème de stabilité est étudié à l’aide du critère de Nyquist multivariable [Do79]. Ceci conduit à vérifier la non singularité d’une infinité de matrices complexes. Doyle et Stein posent le problème de la synthèse de correcteurs robuste et performant en termes de recouvrement de transfert souhaités a priori.
- Dans [Zam 81], Zames s’intéresse au problème de la synthèse de correcteurs robustes et performants. Les incertitudes de modèle sont maintenant représentées par une

norme induite pondérée. La robustesse du système est prouvée à l'aide du théorème du faible gain. Par ailleurs, il montre que les objectifs de désensibilisation peuvent être traités, eux aussi, en termes de norme induite pondérée.

- Doyle ([Doy82]) et Safonov ([Saf82]), de façon parallèle, généralisent et systématisent la description des incertitudes de modèle non structurées. Ils introduisent les valeurs singulières structurées (μ analyse).

Ces travaux et bien d'autres permirent de préciser la nature mathématique du problème de robustesse et mirent en lumière l'importance de l'approche entrée/ sortie et le rôle central joué par les normes induites pondérées. En effet, les normes induites fournissent des outils permettant non seulement de prendre en compte le problème de la robustesse mais aussi de traiter le problème de la stabilité.

Les commandes robustes ont pour objectifs de suivre les variations de la consigne, de rejeter les perturbations et le bruit, et de garantir des marges de robustesse. Quelques unes des méthodes de commande robuste font la synthèse à partir d'un modèle nominal du système sur la base de critères de stabilité et de performance, par contre il y a des méthodes qui prennent en compte dans la synthèse des critères explicites de robustesse vis à vis des incertitudes.

Plusieurs méthodes de commande robuste existent dans la littérature, nous citons :

- Commande LQG/LTR (Linéaire Quadratique Gaussienne avec recouvrement de transfert de boucle)
- Commande prédictive (GPC, MPC)
- Approche QFT (Quantitative Feedback Theory)
- Placement de pôle robuste
- Commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier)
- Commande H_∞

I-2- Principe de la commande robuste

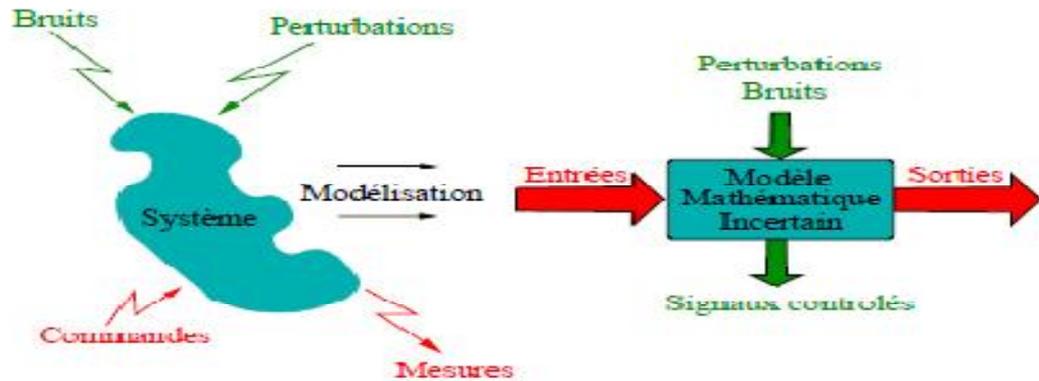


Figure I.1 : Modélisation d'un système réel

En réalité, le modèle d'un système n'est qu'une approximation de ce dernier voir la figure de ci-dessus. En effet, passer d'un système réel à un modèle de connaissance ou de représentation suppose de négliger certaines lois, et certaines principes internes au système.

Le problème de commande robuste consiste à concevoir un correcteur K qui garantie des propriétés de robustesse et de stabilité à un système G . La théorie de commande robuste repose, le plus souvent, sur la structure à contre réaction ; comme le montre l'asservissement suivant.

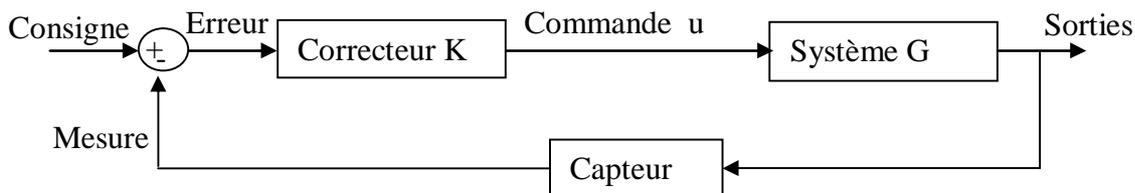


Figure I.2 : Schéma bloc d'un problème de commande robuste

Suivant la forme du système G (avec ou sans les incertitudes « voir la figure ci-dessous »), deux problèmes de commande peuvent se poser :

- ∅ Problème nominal : (sans incertitudes)
- ∅ Problème réel : (avec les incertitudes)

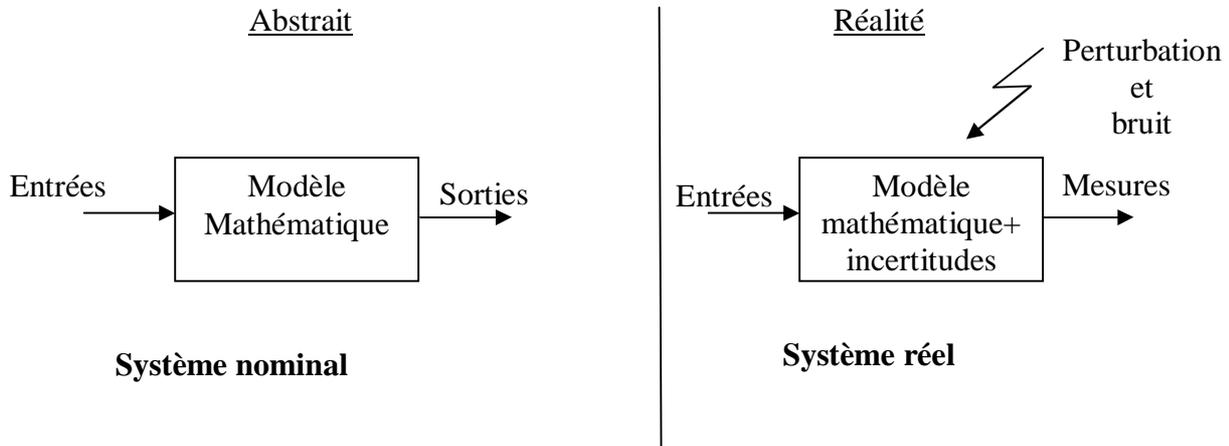


Figure I.3 : Système nominal et système réel

I.2.1. Asservissement nominal

Le problème nominal consiste à trouver un contrôleur K qui garantie la stabilité et certaines performances au système nominal, tout en ignorant les incertitudes.

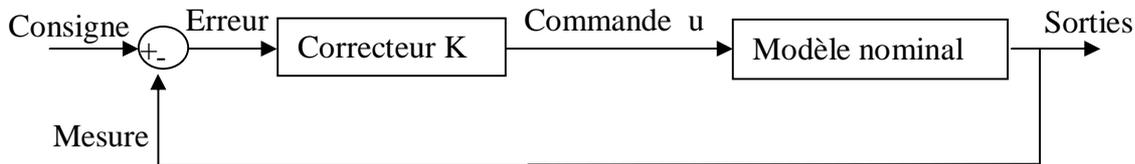


Figure I.4 : schéma bloc d'un asservissement nominal

I.2.1.1. Les objectifs nominaux

La première propriété à assurer au modèle nominal, est la stabilité nominale.

I.2.1.1.1. Stabilité nominale

La stabilité est une exigence critique dans la conception d'un asservissement. On trouve dans [Rey 98], la définition suivante de la stabilité.

Aptitude d'un élément quantifié à retrouver une valeur donnée lorsqu'il en est accidentellement écarté.

Deux façons de comprendre la stabilité se regroupent dans cette définition. La première est celle qui s'intéresse à la convergence de l'état du système (*élément quantifié*) vers des points d'équilibre (*une valeur donnée*), elle est appelée **la stabilité au sens de Lyapunov**. La seconde façon de comprendre la stabilité, est de placer le système dans son environnement (*accidentellement écarté*), on définit alors la stabilité externe au sens entrée/sortie :

Un système est stable au sens entrée/sortie si la sortie du système en réponse à une entrée d'énergie finie, est elle même à énergie finie.

Dans cette optique, de nombreux travaux ont été effectués, [Dosoer 75], [Kailath 80] et [Vidyasagar 78].

La stabilité interne, par contre, se définit par :

Un système interconnecté est stable de manière interne si tout signal borné injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point.

La stabilité des systèmes interconnectés est une notion importante en automatique. Les travaux de [Zam66], [Desoer75] ou plus récemment [Goh 95] et [Iwasaki 98] en témoignent. En plus toutes ces notions sont cohérentes entre elles. [Vidyasagar 78] et [Kailath 80] ont fait le lien entre la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité entrée/sortie.

La stabilité simple signifie que si l'état est dans un certain voisinage de l'équilibre, il demeure par la suite dans le voisinage de l'équilibre. La stabilité asymptotique indique que si l'état est dans un certain voisinage de l'équilibre alors il converge vers l'équilibre. La stabilité asymptotique globale signifie qu'à partir de n'importe quelle condition initiale sur l'état, le système rejoint nécessairement l'équilibre.

Nous nous intéresserons à la stabilité asymptotique du système, puisque un système simplement stable est à la limite de l'instabilité, propriétés inverse de la stabilité qui implique que l'état s'éloigne de l'équilibre.

Plusieurs théorèmes ont été développés pour l'étude de la stabilité. Le théorème du faible gain, proposé au milieu des années 60 dans [Zam66], [Wil69], [DoGlo] et [Des75], permet de vérifier la stabilité interne du système bouclé.

Ø Théorème du faible gain

Soit $G(s)$ la fonction de transfert du système et $K(s)$ celle du correcteur alors, si tous les pôles de $K(s)$ et $G(s)$ sont à partie réelle négative, le système bouclé de transmittance en boucle ouverte $Q(s) = G(s)K(s)$ est stable de manière interne si

$$\|Q\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \forall w \in \mathcal{R} \bar{s}(Q(jw)) < 1 \quad (\text{I-1})$$

où $\|Q\|_{\infty}$ est la norme ∞ de $Q(s)$ et $\bar{s}(Q(jw))$ est la plus grande valeur singulière.

Le problème de stabilité est résolu aussi à l'aide du critère de Nyquist multivariable [Do79].

Ø Critère de Nyquist multivariable :

Le système de transmittance en boucle ouverte $Q(s)$ est stable si et seulement si l'image du contour de Nyquist par la transformé $\det(I_q + Q(s))$ entour l'origine dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles de $Q(s)$ à partie réelle positive.

Etant les modèles linéaires à temps invariants (LTI) sont des objets mathématiques simple à utilisés ; nous nous limitons dans ce mémoire à l'étude des systèmes écrit sous la forme LTI.

I.2.1.1.2. Performances nominales

En plus de la stabilité, la commande doit assurer des propriétés de précision et de rapidité pour le système nominal. Un asservissement est performant s'il réagit rapidement, rejette les perturbations et suit avec précision la consigne. En plus de toutes ces exigences il faut se soucier de la limitation de l'énergie de commande, pour éviter la fatigue des actionneurs.

Ø Réponses temporelles

La stabilité impose aux systèmes de converger vers un équilibre, et les performances temporelles sont étudiées dans le régime transitoire, qui caractérise la façon dont évolue le système entre les conditions initiales et l'équilibre.

Le régime transitoire des systèmes LTI est caractérisé entre autre, par des pôles. Une façon de spécifier le comportement temporel est *localiser les pôles* dans le plan complexe et ainsi donner des indications sur les oscillations, la rapidité, l'amortissement ... Les premiers travaux sur ces problèmes remontent à la fin des années 1960 [Kalman 69a], [Lancaster 69], [Gutman 79], [Gutman 81], [Furuta 98], [Haddad 92] et [Bachelier 98].

Ø Rejet des perturbations

Le système soumis à son environnement doit pouvoir s'acquitter de la tâche demandée, du moins à une certaine tolérance près. L'action de l'environnement est modélisée sous forme de signaux perturbateurs w , leur influence sur le système est évaluée sur des signaux de sortie z à l'aide des normes H_2 et H_∞ .

La norme H_2 d'un transfert $w_2 \rightarrow z_2$ est une mesure précise de la puissance du signal de sortie z_2 pour un bruit blanc unitaire w_2 en entrée. Il s'agit d'un critère qui mesure la performance d'atténuation de la puissance des perturbations.

Définition1

Pour un système LTI certain, dont le transfert $w_2 \rightarrow z_2$ est décrit par la matrice de transfert T_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 w_2(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{22} w_2(t) \end{cases} \quad T_2(s) = C_2 (sI - A)^{-1} B_2 + D_{22} \quad (\text{I-2})$$

$x(t)$ est le vecteur d'état

la norme H_2 d'un système stable est définie par :

$$\Gamma_2 = \|T_2(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[T_2^*(j\omega)T_2(j\omega)] d\omega} \quad (\text{I-3})$$

Un autre critère permet d'évaluer le rejet de perturbation est de considérer la norme H_∞ . Pour un système LTI certain stable, la norme H_∞ d'un transfert $w_1 \rightarrow z_1$ indique la plus grande amplification sur toutes les fréquences pour une entrée sinusoïdale. Le coût H_∞ caractérise la plus grande puissance qui est susceptible d'être transmise par le système pour n'importe quel signal d'entrée.

Définition2

Pour un système LTI certain dont le transfert $w_1 \rightarrow z_1$ est décrit par la matrice de transfert T_1 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w_1(t) \\ z_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} w_1(t) \end{cases} \quad T_1(s) = C_1(sI - A)^{-1} B_1 + D_{11} \quad (I-4)$$

$x(t)$ est le vecteur d'état

La norme H_∞ d'un système stable est définie par :

$$\Gamma_\infty = \|T_1(s)\|_\infty = \sup_w \mathcal{S}_{\max} T_1(j\omega) \quad (I-5)$$

où \mathcal{S}_{\max} est la valeur singulière structurée maximale.

De nombreux travaux portent sur les critères de performance H_2 et H_∞ , en particulier [Lublin 96] et [Paganini 99].

Définissant les fonctions de sensibilités suivantes qui nous permettent de quantifier les performances nominales

Ø Fonction de sensibilité

Considérons l'asservissement de la figure 1.5.

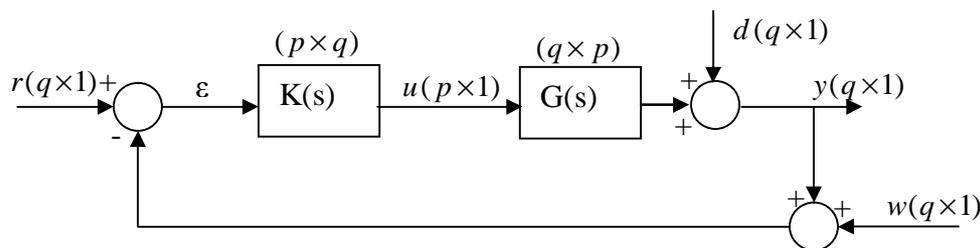


Figure I.5: Schéma bloc d'un système bouclé perturbé

r est la consigne, u est la commande, d est la perturbation, y est la sortie, w est le bruit, ϵ est l'écart d'asservissement, $G(s)$ est la fonction de transfert du système et $K(s)$ celle du correcteur.

a) Fonction de sensibilité en sortie

Soit la matrice de sensibilité en sortie $S_y = (Iq + GK)^{-1}$ (I-6)

et la matrice de sensibilité complémentaire $T_y = (Iq + GK)^{-1} GK$ (I-7)

avec $S_y + T_y = Iq$ (I-8)

alors $y = T_y r + S_y d - T_y w$ (I-9)

$$e = S_y r - S_y d + T_y w \quad (I-10)$$

$$u = K S_y (r - d - w) \quad (I-11)$$

D'où l'interprétation suivante des fonctions de sensibilité :

S_y : - représente l'influence des perturbations sur la sortie et l'erreur.

- représente le transfert entre la référence et l'erreur.

T_y :- représente l'influence des bruits de mesures sur la sortie et l'erreur.

- représente le transfert entre la référence et la sortie.

Les performances nominales que doit satisfaire le contrôleur $K(s)$ sont alors :

- Avoir S_y le plus faible possible.

- Avoir T_y le plus faible possible.

D'après la relation $S_y + T_y = Iq$; ceci conduit à un compromis. Mais puisque les perturbations et la consigne sont, en générale, des signaux de basses fréquences, et le bruit de mesure est un signal de haute fréquence, on peut donc se contenté d'avoir S_y faible en basse fréquence et T_y faible en haute fréquence.

Le même raisonnement pour le cas de sensibilité en entrée.

b) Fonctions de sensibilité en entrée

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, on peut, en permutant G et K dans les expressions ci-dessus, définir deux autres fonctions de sensibilité.

$S_u = (Ip + KG)^{-1}$ fonction de sensibilité en entrée. (I-12)

$T_u = (Ip + KG)^{-1} KG$ fonction de sensibilité complémentaire. (I-13)

Ces deux fonctions vérifient également $Su + Tu = Ip$ (I-14)

On peut par dualité donner à Su et Tu une interprétation comparable à celle de Sy et Ty . En effet, le schéma de la figure 1 est équivalent à celui de la figure suivante, en posant :

$$w = G w' \quad d = G d' \quad r = G r' \quad \text{et} \quad y = G y'$$

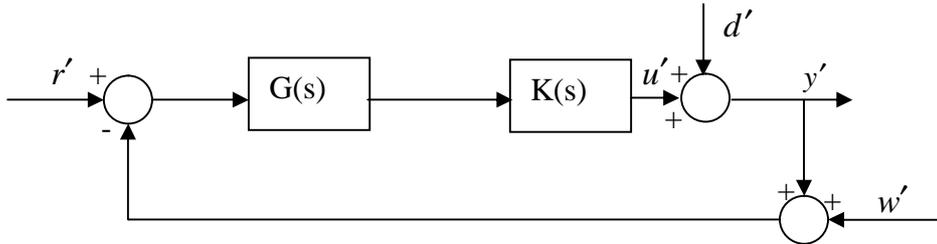


Figure I.6 : Schéma bloc d'un système bouclé perturbé

Les atténuations souhaitées pour les fonctions de sensibilités sont exprimées au moyen des fonctions de pondération ajoutées au modèle du système.

L'approche par loop-shaping [MCF], [ALA] consiste à régler, avant le calcul du correcteur, les performances en modelant la boucle ouverte, par l'ajout des fonctions de pondération, suivant les principes de l'automatique classique.

Ø Loop-shaping

La minimisation de l'erreur statique et le rejet des perturbations dans le système demandent à la matrice de transfert en boucle ouverte un gain élevé en basses fréquences (les entrées et les perturbations sont des signaux lentement variables dans le temps, donc de basses fréquences). Par contre l'atténuation des bruits dans la chaîne impose un gain élevé de la matrice de transfert en boucle ouverte en hautes fréquences (les bruits sont généralement des signaux de hautes fréquences).

Partant de ces principes, nous définissons les trois matrices de pondération suivantes :

- une matrice $W_1(s)$ tel que $W_1(s) = w_1(s)I_p$, où $w_1(s)$ est une fonction de transfert scalaire du type passe-bas avec un gain élevé en basses fréquences
- une matrice $W_2(s)$ tel que $W_2(s) = w_2(s)I_m$, où $w_2(s)$ est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain élevé en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes additives.

ü Une matrice $W_3(s)$ tel que $W_3(s) = w_3(s)I_p$, où $w_3(s)$ est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain élevé en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes multiplicatives.

Les fonctions $w_1(s)$, $w_2(s)$ et $w_3(s)$ sont dites fonctions de pondération.

Les trois objectifs précédents se traduisent alors par les trois inégalités suivantes :

$$\ddot{\text{ü}} \quad \|W_1 S_y\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(S_y(j\omega)) < \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (\text{I.15})$$

$$\ddot{\text{ü}} \quad \|W_2 K S_y\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(K(j\omega)S_y(j\omega)) < \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \quad (\text{I.16})$$

$$\ddot{\text{ü}} \quad \|W_3 T_y\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(T_y(j\omega)) < \frac{1}{|W_3(j\omega)|} \quad (\text{I.17})$$

Ø Interprétation des fonctions de sensibilité

- *Atténuation des perturbations en sortie* : Atténuer les perturbations en sortie revient à minimiser la fonction de sensibilité S_y , ceci revient à choisir sa norme ∞ la plus faible possible.
- *Poursuite du signal de référence* : La poursuite idéale de la référence par la sortie signifie que $\bar{\sigma}(S_y)$ est minimale. Cette condition rejoint celle du rejet des perturbations en sortie.
- *Rejet des bruits de mesure* : Pour réduire l'effet des bruits de mesure, il faut choisir la valeur singulière $\bar{\sigma}(T_y)$ la plus faible possible.

I.2.2. Asservissement réel

Le problème réel de la commande robuste consiste à trouver un contrôleur K qui garantie la stabilité et certaines performances au système nominal additionné aux incertitudes.

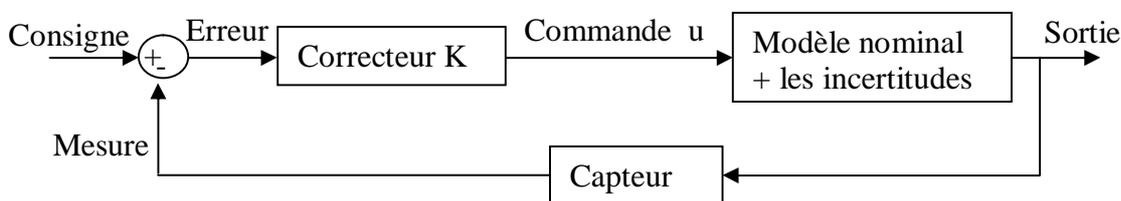


Figure I.7 : schéma bloc d'un asservissement réel

La réalité physique des processus n'est pas complètement perceptible par l'observateur, d'où les modèles incertains (système réel) qui permettent de prendre en compte la méconnaissance des paramètres régissant les dynamiques internes, par des lois mathématiques d'appartenance à des ensembles, et c'est vis-à-vis de ces ensembles d'incertitudes que la robustesse est mesurée.

Lors de la modélisation, les sources d'incertitudes sont : les approximations numériques, les erreurs d'identification des paramètres, les diverses hypothèses de linéarisation, la réduction de modèle, les dynamiques négligées et les erreurs de mesure...

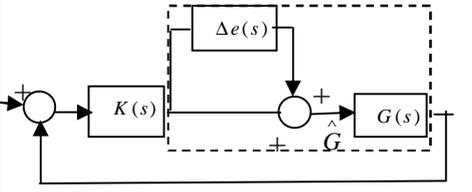
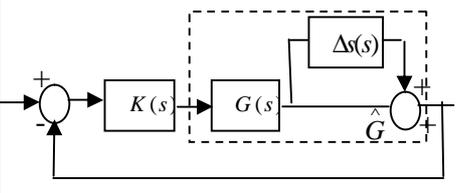
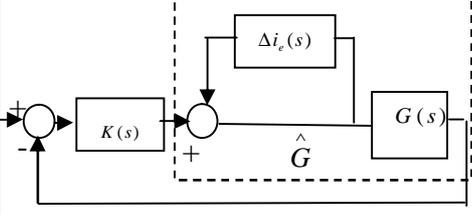
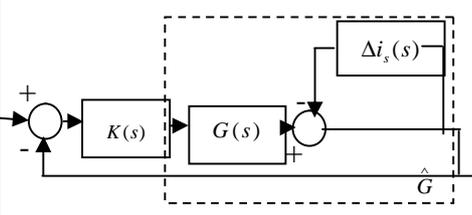
Toutes les incertitudes sont regroupées dans la fonction Δ qui est soit paramétrique (nommées **Incertainces structurées**), soit non paramétrique (appelé **Incertainces non structurées**). Dans le premier cas, l'incertitude, le plus souvent réel, modélise la méconnaissance des valeurs numériques du modèle. Dans le second cas, l'incertitude ne vient pas des paramètres du système mais des dynamiques négligées ou des effets de la linéarisation.

I.2.2.1. Représentation des incertitudes

a) **Incertainces non structurées** : Dans ce cas l'erreur est caractérisée globalement par une matrice de transfert, sans préjuger de la façon dont les différentes sources d'erreurs interviennent dans le modèle. Cette incertitude peut être représentée sous différentes formes à partir de la matrice de transfert du modèle nominal.

La représentation des incertitudes non structurées reflète notre connaissance des phénomènes physiques qui les causent et notre capacité à les représenter sous forme simple et facile à manipuler. Le tableau suivant regroupe les incertitudes les plus courantes [Doyle 81], [Doyle 82a].

Type	Système	Structure	Nature de l'erreur
<p>Forme additive</p>	$\hat{G}(s) = G(s) + \Delta a(s)$		<p>Incertainces paramétriques</p>

<p>Forme multiplicative directe en entrée</p>	$\hat{G}(s) = G(s) + G(s) \Delta e(s)$ $= G(s)[Ip + \Delta e(s)]$		<p>Actionneurs incertains</p>
<p>Forme multiplicative directe en sortie</p>	$\hat{G}(s) = G(s) + \Delta s(s) G(s)$ $= [Iq + \Delta s(s)]G(s)$		<p>Capteurs incertains</p>
<p>Forme multiplicative inverse en entrée</p>	$\hat{G}(s) = G(s)[Ip + \Delta i_e(s)]^{-1}$		<p>Actionneurs incertains</p>
<p>Forme multiplicative inverse en sortie</p>	$\hat{G}(s) = [Iq + \Delta i_s(s)]^{-1} G(s)$		<p>Capteurs incertains</p>

Nous considérons $G(s)$ comme la fonction de transfert du système nominal et $K(s)$ celle du correcteur. Δ représente les incertitudes, et $\hat{G}(s)$ représente la fonction de transfert du système réel incertain.

∅ *Les incertitudes additives* : représentent, en générale, des incertitudes absolues par rapport au modèle nominal. Cette représentation est souvent utilisée pour modélisée des dynamiques ou des non linéarités négligées [Duc 93], [Doy 90].

∅ *Les incertitudes multiplicatives* : permettent de définir les écarts en terme de variation par rapport au modèle nominal. Elles peuvent être introduites sous forme multiplicative en entrée ou en sortie. Elles peuvent être prises en considération sous forme directe ou inverse.

Les formes multiplicatives en entrée sont généralement utilisées pour prendre en compte les erreurs de modélisation des actionneurs. Par contre, les incertitudes multiplicatives en sortie modélisent généralement les défauts des capteurs de mesure [Duc 93], [Doy 90].

b) Incertitudes structurées

Contrairement aux incertitudes non structurées, confinées toutes dans un seul bloc, les incertitudes structurées permettent de tenir compte de chaque type d'incertitude, paramétrique ou autre, aux différents points de notre système.

Le schéma général des incertitudes structurées représente un cas particulier du schéma général des incertitudes non structurées, dans lequel la matrice traduisant les incertitudes à une structure bloc diagonal.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \Delta 2 & \mathbf{O} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & \Delta q \end{bmatrix} \tag{I.18}$$

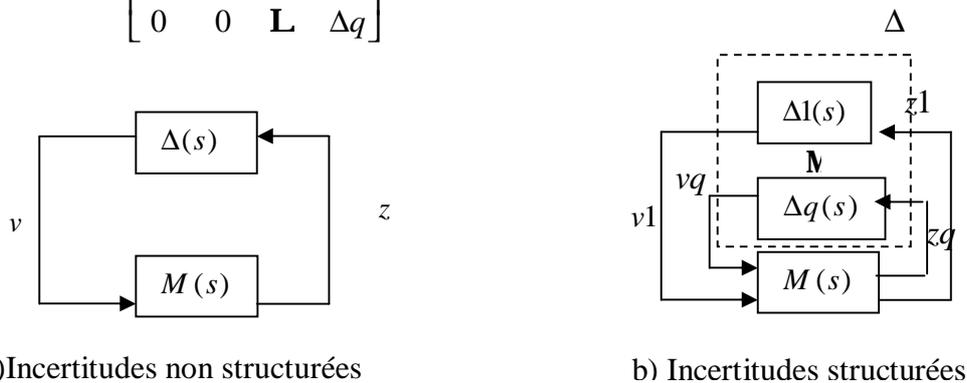


Figure I.8 : représentation des incertitudes

Avec le système réel, il ya pas question des objectifs nominaux, mais des objectifs robustes.

I.2.2.2. Les objectifs robustes

Le contrôleur doit assurer la stabilité et des performances pas pour le modèle uniquement, mais aussi pour le système réel qu'il représente (avec les incertitudes).

I.2.2.2.1. Stabilité robuste

A la différence des systèmes certains, les systèmes incertains, en général, sont définis par une loi dynamique $\dot{x}(t) = f(x(t), \Delta(t))$, (où $x(t)$ est le vecteur d'état, et $\Delta(t)$ représente les incertitudes) et leur stabilité est conditionnée par la stabilité des incertitudes.

Un système est robustement stable si pour chaque incertitude $\Delta(t)$, le système $\dot{x}(t) = f(x(t), \Delta(t))$ est stable.

L'étude de la stabilité robuste peut se faire par plusieurs Approches :

Ø Approche algébrique

Cette approche principalement fondée sur les travaux de **Kharitonov [Kharitonov 78]**, envisage la stabilité par l'étude des polynômes caractéristiques des systèmes. Elle étend les critères de Routh_Hurwitz au cas de polynômes incertains. Dans cette approche, les systèmes sont modélisés par les polynômes du numérateur et dénominateur des fonctions de transfert.

Les difficultés freinant l'applicabilité des méthodes de l'approche algébrique sont principalement liées à ce que les coefficients du polynôme caractéristique sont couplés entre eux. L'approche algébrique prend difficilement en compte le couplage des coefficients quand ils dépendent des mêmes paramètres incertains et quand ils sont couplés par les coefficients du modèle d'un éventuel correcteur.

Ø Approche temporelle

La stabilité dans cette approche est étudiée sur la base de la théorie de Lyapunov. Le problème exact de stabilité robuste revient à chercher une matrice de Lyapunov « P » qui vérifie pour le système $\dot{x} = A(\Delta)x + B u$; l'inégalité suivante :

$$x^T [A^T(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta)]x < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{I.19})$$

où x est le vecteur d'état et u le vecteur de commande.

Une condition suffisante est la recherche d'une fonction de Lyapunov unique pour toutes les incertitudes tel que :

$$x^T [A^T(\Delta)P + P A(\Delta)]x < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{I.20})$$

Ce problème est connu dans la littérature sous l'appellation *stabilité quadratique*.
La stabilité quadratique est une condition suffisante de la stabilité robuste

La stabilité quadratique donnée dans [Hollot 80], a été la base de très nombreux travaux, comme les résultats importants en stabilisation de, [Bernussou 89], [Khagonekar 90], [Haddad 91], [Geromel 91], [Garcia 95a], [El Ghaoui 96b], [Shim 96b] et [Peaucelle 97]. Sa place dans la littérature tient à ce que cette condition soit une condition suffisante de la stabilité robuste pour tout type d'incertitudes. Le pessimisme de la stabilité quadratique vis-à-vis du problème de stabilité robuste dans le cas d'incertitudes constantes reste problématique, même si pour un nombre non négligeable de problèmes, l'approche est concluante. Les applications dans [Garcia 97], [Magni 97] et [El Ghaoui 00] en témoignent.

Pour aller au-delà du pessimisme de la stabilité quadratique est apparue les FLDP (*Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres*), ces FLDP sont des fonctions quadratique dont la matrice $P(\Delta)$ dépend des paramètres. L'utilisation de FLDP est récente dans la littérature où l'on peut trouver les références [Feron 96], [Fu 99], [Fu 00], [Gahinet 96], [Helmerson 99], [Iwasaki 99], [Peaucelle 00b] et [Arzelier 00b].

Ø Approche fréquentielle

Cette approche repose sur une représentation fréquentielle des incertitudes. Les premières études marquantes portent sur la synthèse LQG/LTR (*Linear quadrique gaussian/ Loop transfert Recovery*). Elles se basent sur la constatation que l'étape d'estimation de l'état nécessaire aux régulateurs LQG, peut rendre peu robuste la boucle fermée. Sur ce thème, on peut citer les travaux de [Doyle 81], [Lehtomaki 81] et [Kazerooni 86].

Dans le domaine fréquentiel, les modèles incertains peuvent être de type additif ou multiplicatif. Une forme plus générale est maintenant adoptée [Zhou 96], c'est la forme LTI de la figure suivante

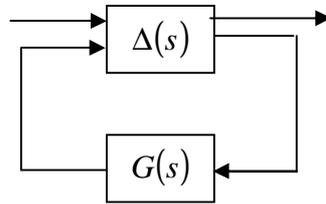


Figure I.9 : représentation d'un système incertain

Sur la base de cette modélisation, les travaux de [Zames 81] sont à l'origine de la commande H_∞ qui suppose que l'opérateur $\Delta(s)$ non structuré complexe et borné (au sens de la norme H_∞). Cette commande H_∞ fera l'objet des prochains chapitres.

I.2.2.2.2. Performances Robustes

Dans le cadre de la modélisation incertaine, les performances du système sont valides dans la mesure où l'ensemble des réalisations incertaines satisfait simultanément les mêmes performances. On dit qu'un système incertain satisfait une performance robuste si et seulement si l'ensemble des systèmes LTI qui le constituent satisfait cette même performance.

Chaque incertitude admissible définit un transfert $w. \rightarrow z.$ noté $T.(\Delta, s)$. Le coût H_∞ de ce transfert dépend nécessairement de l'incertitude :

$$\Gamma. \geq \|T(\Delta, s)\|_\infty \quad (\text{I.21})$$

Fixer un objectif de performance robuste pour un système incertain revient à imposer une borne supérieure à l'ensemble des coûts $\Gamma.(\Delta)$. Cette spécification permet de garantir une borne maximum sur toutes les incertitudes de l'amplification des perturbations, en termes de coût H_∞ .

Les différentes méthodes pour résoudre ce problème se comparent entre elles suivant que le coût est minimum. La problématique des performances de coût robuste est alors d'approcher au mieux le coût dans la pire des cas.

La fonction de sensibilité S_y définie précédemment, traduit parfaitement les performances, puisqu'elle représente le transfert entre la référence et l'erreur, et intervient

également dans le transfert entre la perturbation et l'erreur. On peut donc imposer un gabarit à cette fonction, si elle peut s'écrire comme suit :

$$\forall \omega, \bar{\sigma}(S_y(j\omega)) < \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \Leftrightarrow \|W_1(j\omega)S_y\|_{\infty} < 1 \quad (\text{I.22})$$

Avec le même raisonnement, la condition de robustesse en performance s'écrit donc :

$$\|W_1 \widetilde{S}_y\|_{\infty} < 1 \quad \text{avec} \quad \widetilde{S}_y = (I + \widehat{G}K)^{-1} \quad (\text{I.23})$$

$\widehat{G}(s)$ est la fonction de transfert du système réel (avec les incertitudes).

Conclusion

Dans le cadre d'une meilleure approche dans la conception d'une commande robuste, ce chapitre nous a permis de définir les notions relatives à la robustesse et aux incertitudes, ainsi que les principales directions de la robustesse d'un système bouclé, voir stabilité nominale, performance nominale, robustesse en performance et robustesse en stabilité.

Ce qui nous renvoie à trouver une commande robuste adéquate qui tiendrait compte de la robustesse ainsi que les performances désirées en boucle fermée.

L'une des meilleures commandes robustes, qui est née d'essais de prise en compte a priori d'objectifs de robustesse lors d'une synthèse, est la commande H_{∞} qui fera l'objectif des chapitres suivants.

CHAPITRE 2

COMMANDE H_∞ DES SYSTEMES LINEAIRES

Introduction

Les années quatre-vingt ont été marquées par l'émergence de la notion de robustesse dans de multiples domaines tels que la synthèse et l'analyse de lois de commande. De nouvelles méthodes de commande sont ainsi apparues, et en particulier la commande H_∞ , initiée par Zames [Zam81] et développée entre autre par **Doyle, Glover, Khargonekar** et **Francis** [DoGKhFr89], qui proposent une méthode désormais classique de résolution du problème en variables d'état.

Si l'on peut considérer dans un premier temps la commande H_∞ comme une procédure de stabilisation robuste face à une perturbation non structurée de modèle, on peut également, dans un deuxième temps, la considérer plutôt comme une méthode permettant de modéliser les matrices de transfert de la boucle fermée et d'intégrer ainsi différents objectifs de performance et de robustesse dans la procédure de synthèse du correcteur.

Face à la commande H_∞ standard, se développa également la commande H_∞ par facteurs premiers [GIMcF89, McF192], qui reprend l'idée de **Doyle** et **Stein** [DoSt81] de modéliser les valeurs singulières de la boucle ouverte (« Loop shaping ») et y associe une procédure de stabilisation robuste face à des perturbations sur les facteurs premiers du processus.

Dans ce chapitre, nous étudierons les notions générales sur la commande H_∞ linéaire, et sa résolution. Puis nous appliquerons cette commande à deux systèmes. Le premier est le pendule inversé. Le second est la machine synchrone à aimant permanent. Ces deux correcteurs seront calculés moyennant la méthode basée sur les équations de Riccati.

II.1. Principe de la commande H_∞

Le problème H_∞ consiste à concevoir un correcteur K donné par (II.1) assurant la stabilité asymptotique du système bouclé ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système.

$$K: \begin{cases} \dot{x}_c = A_k x_c + B_k y \\ u = C_k y \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

x_c est le vecteur d'état du correcteur, y représente le vecteur sortie du système à commandé et u le vecteur de commande.

Les entrées sont constituées des signaux de consignes et éventuellement des perturbations liées à l'environnement du système, comme le montre la figure suivante :

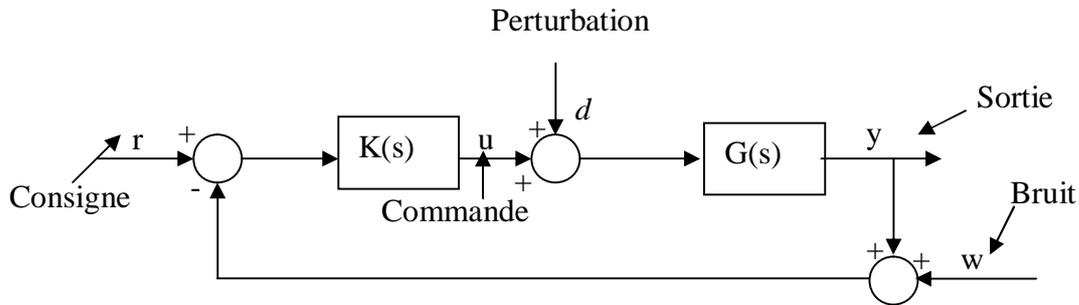


Figure II.1 : asservissement en boucle fermée

II.2. Problème standard

Afin d'apporter une facilité méthodologique à la résolution des problèmes H_∞ , une représentation connue sous la dénomination « forme standard » a été introduite, elle est donnée par la figure II.2.

La notion de problème standard représenté par la figure II.2, consiste à chercher un correcteur qui permet de borner ou de minimiser la norme H_∞ (voir l'annexe A) de la matrice de transfert $P(s)$ qui modélise les interactions dynamiques entre les deux ensembles d'entrées w et u et les deux ensembles de sorties e et y .

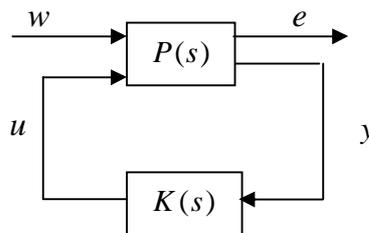


Figure II.2 : Problème H_∞ standard

- w : représente les entrées extérieures, telles que les signaux de référence, les perturbations et les bruits
- u : représente les commandes élaborées par le correcteur $K(s)$
- e : représente le vecteur des erreurs que l'on veut maintenir à 0, ou du moins minimiser (Il est choisie pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement).

- y : représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

La matrice de transfert $P(s)$ peut être partitionnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} e \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

donc

$$\begin{aligned} e &= P_{11} w + P_{12} u \\ y &= P_{21} w + P_{22} u \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

avec $u = K y$

En éliminant u et y de ces équations, nous obtenons :

$$e(s) = (P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}) w(s) \quad (\text{II-4})$$

Si nous considérons $F_b(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21}$ (II-5)

alors,

$$e(s) = F_b(P, K) w(s) \quad (\text{II-6})$$

$F_b(P, K)$ est une transformation linéaire fractionnaire de $P(s)$ et $K(s)$ [SP96], c'est à dire une fonction K dont les coefficients sont les différents blocs de P . L'indice b (bas) indique que K est appliqué à la partie inférieure de P .

II.2.1. La problématique de la commande H_∞

D'une manière générale, le calcul d'un correcteur H_∞ de la forme standard peut se ramener d'une part à un problème de stabilisation du système bouclé et de rejet de perturbations, d'autre part à un problème de minimisation.

La synthèse H_∞ du correcteur est définie par le problème suivant :

$P(s)$ et g étant données, trouver $K(s)$ qui :

- stabilise de manière interne le système bouclé de la figure II.2
- assure $\|F_b(P(s), K(s))\|_\infty \leq \mathbf{p} g$.

Les correcteurs satisfaisant ces deux conditions sont dits **sous optimaux**. Et le problème H_∞ dit **optimal** consiste finalement à synthétiser une loi de commande $u = K y$, qui, parmi l'ensemble des correcteurs K stabilisant le système, minimise la norme H_∞ du transfert $F_b(P, K)$ entre les entrées exogènes et les sorties régulées, ce qui peut être réécrit comme suit :

Problème H_∞ standard optimal : $P(s)$ étant donné, trouver $K(s)$ qui :

- stabilise de manière interne le système bouclé de la figure II.2
- minimise $\|F_b(P(s), K(s))\|_\infty$.

II.2.2. Introduction des fonctions de pondération

Pour atteindre les objectifs de stabilité et de performance, des fonctions dites de pondération sont introduites sur les différents signaux ; sous forme de filtres permettant, suivant le signal auquel elles s'appliquent, de privilégier un domaine de fréquences particulier.

Nous considérons à cette fin le schéma de la figure suivante, dans lequel l'erreur est pondérée par le filtre $W_1(s)$, la commande u par $W_2(s)$, et l'entrée de perturbation par $W_3(s)$.

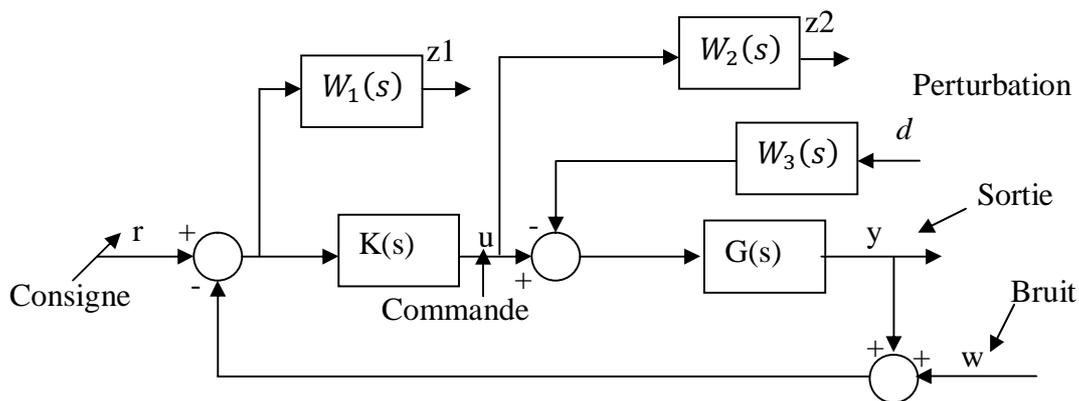


Figure II.3 : Introduction des fonctions de pondérations

Les signaux r et d sont les entrées et z_1, z_2 sont les sorties objectives ; nous avons donc le transfert suivant :

$$\begin{bmatrix} z1(s) \\ z2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)Sy(s) & W_1(s)Sy(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)Sy(s) & W_2(s)K(s)Sy(s)G(s)W_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II-7})$$

Avec $Sy = (I + GK)^{-1}$ est la fonction de sensibilité en sortie.

Le problème H_∞ de ce transfert est le suivant :

Déterminer un nombre $\gamma > 0$ et un correcteur $K(s)$ stabilisant le système bouclé et assurant :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1Sy & W_1SyGW_3 \\ W_2KSy & W_2KSyGW_3 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{II-8})$$

L'avantage de considérer ce problème plutôt que le problème précédent, est que les filtres $W_1(s), W_2(s)$ et $W_3(s)$ permettent de modeler les différents transferts "Sy KSy SyG KSyG "

Si l'équation (II-8) est vérifiée alors les propriétés suivantes le sont aussi ;

$$\|W_1Sy\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |Sy(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \quad (\text{II-9a})$$

$$\|W_2KSy\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)Sy(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \quad (\text{II-9b})$$

$$\|W_1W_3SyG\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |Sy(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)W_3(j\omega)|} \quad (\text{II-9c})$$

$$\|W_2W_3KSyG\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)Sy(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)W_3(j\omega)|} \quad (\text{II-9d})$$

On voit donc que la réponse fréquentielle de chacune des fonctions Sy KSy SyG KSyG est contrainte par un gabarit qui dépend des filtres choisis.

Choix des fonctions de pondération

Nous rappelons brièvement les critères qui déterminent le choix les fonctions de pondération :

- W_1 est en général sous la forme : $W_1 = \frac{1}{M_s} \frac{s+wb}{s+wb \varepsilon} M_s$

Pour respecter les hypothèses restrictives de résolution du problème H_∞ , ε est fixé, en général, à une valeur faible mais non nulle. Ce choix donne naissance à une action presque intégrale au sein du correcteur assurant ainsi un gain élevé en basses fréquences, ce qui implique une minimisation de la fonction de sensibilité Sy dans cette bande donc une bonne précision en régime permanent.

La pulsation wb sera choisie proche de la bande passante minimale souhaitée pour le système corrigé en boucle ouverte.

La valeur de M_s limite le maximum de $\sigma(Sy(j\omega))$ en hautes fréquences.

- W_2 s'écrit sous la forme : $W_2 = \frac{1}{\varepsilon_u} \frac{s+wh/M_u}{s+wh/\varepsilon_u}$

Le choix de ε_u faible, nous assure l'atténuation de KS aux hautes fréquences et par suite le rejet des erreurs de mesure et la limitation de l'énergie de commande.

La pulsation wh limite la plage d'amplification des bruits de mesure. Cette pulsation doit être choisie suffisamment éloignée de la pulsation propre désirée pour l'asservissement en boucle fermée.

La valeur de M_u limite le maximum de $\sigma(KSy(j\omega))$

- W_3 spécifie le type de perturbation et du bruit à rejeter.

Les fonctions de pondération ne sont pas nécessairement des fonctions du premier ordre. Elles peuvent être constantes, ou d'ordre supérieur, suivant les contraintes du cahier de charges et les besoins du concepteur pour la réalisation du correcteur. Le choix de ces fonctions n'est pas implicite et il est sujet de quelques tâtonnements pour arriver aux « meilleures » fonctions de pondération.

II.2.3. Problème de sensibilité mixte

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que, pour $Sy = (I + GK)^{-1}$ fonction de sensibilité en sortie:

∅ L'objectif de performance nominale est atteint si :

$$\|W_1 Sy\|_\infty < 1 \quad (\text{II-10})$$

∅ L'objectif de la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous la forme additive non structurée est atteint si :

$$\|W_2 KSy\|_\infty < 1 \quad (\text{II-11})$$

∅ L'objectif de la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous la forme multiplicative directe non structurée est atteint si :

$$\|W_3 T\|_\infty < 1 \quad (\text{II-12})$$

T est la fonction de sensibilité complémentaire

Tout en assurant la stabilité du système bouclé. Les pondérations $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ ne peuvent être choisies arbitrairement. En particulier, du fait que :

$$S_y + T_y = I \quad (\text{II-13})$$

$W_1(s) = w_1(s)I_p$, où $w_1(s)$ est une fonction de transfert scalaire du type passe-bas avec un gain élevé en basses fréquences.

$W_2(s) = w_2(s)I_m$, où $w_2(s)$ est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain élevé en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes additives que le système doit tolérer.

$W_3(s) = w_3(s)I_p$, où $w_3(s)$ est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain important en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes multiplicatives que le système doit tolérer.

Les trois objectifs recherchés peuvent se résumer en un problème unique :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \\ W_3 T_y \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II-14})$$

$K S_y$ et T_y jouent des rôles semblables ; donc il suffit de résoudre l'un des 2 problèmes suivant :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_3 T_y \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II-15})$$

Ces deux problèmes sont désignés dans la littérature sous le nom de problème de sensibilité mixte. Dans notre mémoire, nous résoudrons uniquement le problème $\left\| \begin{array}{c} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \end{array} \right\|_\infty < 1$.

La commande H_∞ a connu des applications multiples dans des domaines très variés. Elle est devenue ces dernières années une des meilleures méthodes de la « commande robuste ». Sa présentation théorique est donnée dans de nombreux ouvrages [BGF94] [ZDG95] [GL95] [SP96] [Lar96] [Toi98] [DF99] [CAS01].

Différentes méthodes peuvent être envisagées pour résoudre le problème H_∞ standard [GD88], [DGK+89], [Gah92], [ZDG95]. Nous présenterons ici l'approche par équation de Riccati [DGK+89] (Dans laquelle la valeur optimale de g est recherchée par dichotomie),

II.3. Calcul de la commande H_∞ par la méthode basée sur les équations de Riccati

L'analyse et la synthèse sont des problématiques qui pour être résolues, nécessitent des calculs mathématiques. Pour un système donné, un certain nombre de calculs sont nécessaires avant, par exemple, de conclure à la stabilité en exhibant une fonction de Lyapunov ou de conclure à la localisation des pôles en exhibant un correcteur. On a longtemps recherché des méthodes fournissant des solutions exactes. Un exemple bien connu est celui du problème LQG dont la solution exacte repose sur la résolution de deux équations algébriques de Riccati (ARE).

Les propriétés mathématiques des équations de Riccati sont étudiées en détail dans [Zhou 96]. Une de leur caractéristique principale est que la résolution d'une ARE passe par le calcul d'une décomposition de Schur, ce qui est une opération numériquement stable linéaire [Golub 96]. Un problème formulé sous forme d'ARE se résout par des manipulations algébriques et exhibe une solution exacte unique. Au cours de ce mémoire, une partie des travaux ont été formulés à l'aide des équations de Riccati, [Arzelier 00a], [Arzelier 98b], [Peaucelle 97], Puisque, la méthode basée sur les équations de Riccati, fondée sur une approche d'état, aussi connue sous le nom d'algorithme de **Golver-Doyle** [DGK+89], est la méthode de résolution la plus utilisée.

Cette méthode utilise une représentation d'état de la matrice d'interconnexion $P(s)$, que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-16})$$

avec $x \in R^n$ le vecteur d'état, $w \in R^{nw}$ le vecteur des entrées exogènes, $u \in R^{nu}$ est le vecteur de commande, $e \in R^{ne}$ le vecteur des erreurs, et $y \in R^{ny}$ le vecteur de sorties

La résolution du problème H_∞ dit sous optimal, via les équations de Riccati, consiste à trouver, pour un réel positif g donné, un correcteur $K(s)$ stabilisant le système et vérifiant :

$$\|F_b(P(s), K(s))\|_\infty \mathbf{p} g \tag{II-17}$$

g est calculé par dichotomie donné plus loin

La résolution du problème, par la méthode basée sur les équations de Riccati n'est possible que sous les quatre hypothèses suivantes :

II.3.1. Hypothèses de résolution du problème H_∞ via la méthode basée sur les équations de Riccati

H1) (A, B_u) est stabilisable et (C_y, A) est détectable. Cela garantit l'existence d'une loi de commande K qui stabilise le système en boucle fermé.

H2) $\text{rang}(D_{eu}) = nu$ et $\text{rang}(D_{yw}) = ny$. Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la loi de commande K soit propre.

H3) $\forall w \in R \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - jwI_n & B_u \\ C_e & D_{eu} \end{bmatrix} = n + nu$. Garantit que le transfert P_{12} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

H4) $\forall w \in R \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - jwI_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + ny$. Garantit que le transfert P_{21} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

II.3.2. Description de la solution

Pour simplifier le calcul de la solution du problème de commande H_∞ par la méthode basée sur les équations de Riccati, les hypothèses suivantes sont considérées

$$\begin{aligned} D_{ew} &= 0 & D_{yu} &= 0 \\ D_{eu}^T [C_e \quad D_{eu}] &= [0 \quad I_{nu}] \\ \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{ny} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{II-18}$$

Contrairement aux hypothèses présentées précédemment. Ces relations ne sont pas nécessaires à la résolution du problème.

Les deux théorèmes suivants permettent de décrire les solutions du problème standard.

Théorème 1 :

Sous les hypothèses H1 à H4 et les conditions (II-18). Il existe un correcteur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure l'inégalité (II-17) si et seulement si :

i) la matrice $H_\infty = \begin{bmatrix} A & g^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe

imaginaire.

ii) Il existe une matrice symétrique $X_\infty \geq 0$ solution de l'équation de Riccati

$$X_\infty A + A^T X_\infty + X_\infty (g^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X_\infty + C_e^T C_e = 0 \quad (\text{II-19a})$$

iii) la matrice $Y_\infty = \begin{bmatrix} A^T & g^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y \\ -C_w C_w^T & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe

imaginaire.

iv) Il existe une matrice symétrique $Y_\infty \geq 0$ solution de l'équation de Riccati

$$Y_\infty A^T + A Y_\infty + Y_\infty (g^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y) Y_\infty + B_w B_w^T = 0 \quad (\text{II-19b})$$

v) $r(X_\infty Y_\infty) \mathbf{p} g^2 \quad (\text{II-19c})$

où $r(\cdot)$ désigne le module de la plus grande valeur propre.

La recherche du g optimal est effectuée par dichotomie en testant, à chaque itération, l'existence d'une solution $K(s)$ pour le g défini. Les algorithmes couramment implantés fournissent une solution appelée « correcteur central ». Cependant, il existe une infinité de solutions au problème sous optimal, pour un g fixé. [NOS95].

Théorème 2 [NOS+95]:

Sous les conditions du théorème1, les correcteurs $K(s)$ stabilisant le système et satisfaisant $\|F_b(P(s), K(s))\|_\infty \mathbf{p} g$ sont données par :

$$K(s) = F_b(K_a(s), f(s)) \quad (\text{II-20})$$

où $f(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ est une matrice de transfert arbitraire de dimension $nu \times ny$ de norme H_∞ inférieur à g ($\|f(s)\|_\infty \mathbf{p} g$), et $K_a(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T & 0 & I_{nu} \\ -C_y & I_{ny} & 0 \end{bmatrix}}_{K_a(s)} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

$$\hat{A}_\infty = A + g^{-2} B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C_y \quad (\text{II-22})$$

$$Z_\infty = (I_n - g^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\text{II-23})$$

X_∞ et Y_∞ sont les solutions des deux équations de Riccati (II-19a) et (II-19b)

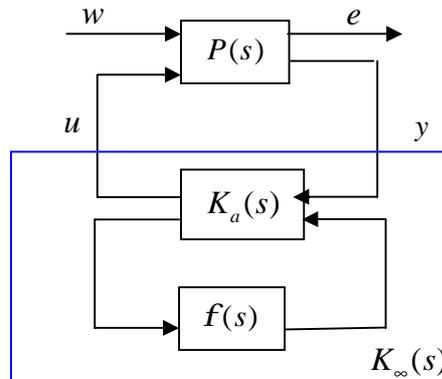


Figure 4 : Paramétrisation de la solution du problème sous optimal

Parmi tous les contrôleurs, on peut distinguer celui correspondant à $f(s) = 0$, appelé **correcteur central** défini par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T & 0 \end{bmatrix}}_{K_0(s)} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

La mise en œuvre de cette solution consiste à utiliser, tout d’abord, les résultats du théorème 1, pour approcher la valeur optimale de g par dichotomie (appelée aussi « γ -itération »), calculer, ensuite, le correcteur central en appliquant le théorème 2.

II.3.3. γ -itération

γ -itération est un algorithme permettant d’approcher par dichotomie la valeur optimale de g , en suivant les étapes suivantes :

- Ø Choisir 2 valeurs g_{inf} et g_{sup} et une tolérance h . g_{inf} doit être tel que l’une des conditions du théorème 1 ne soit pas vérifiées, alors qu’elles doivent toutes l’être pour g_{sup} .
- Ø Tester les conditions pour $g = \frac{g_{\text{inf}} + g_{\text{sup}}}{2}$. Si elles sont vérifiées, poser $g = g_{\text{sup}}$ sinon poser $g = g_{\text{inf}}$.

- Ø si la différence entre les 2 dernières valeurs de g est supérieur à h , retourner à la deuxième étape.
- Ø Calculer le correcteur central pour la dernière valeur de g vérifiant les conditions.

II.4. Application de la commande H_∞ linéaire

Pour tester la robustesse de cette commande, deux applications seront effectuées. L'une sur un modèle de pendule inversé et l'autre sur le modèle d'une machine synchrone à aimant permanent.

II.4.1. Application de la commande H_∞ linéaire sur un modèle de pendule inversé

Nous considérons un système de pendule inversé décrit dans l'annexe B, dont la dynamique est donnée par.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u \quad (\text{II-25})$$

25)

$$y = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{II-26})$$

Nous rappelons que les états du système sont

$x_1 = r$ est le déplacement

$x_2 = \dot{r}$ est la vitesse linéaire

$x_3 = q$ est l'angle (déplacement angulaire)

$x_4 = \dot{q}$ est la vitesse angulaire

Le déplacement est en mètre (m), et l'angle est en (rad).

Notre objectif est de stabiliser le système et de le maintenir à la position verticale, tout en assurant une bonne rejection des perturbations et une bonne atténuation des bruits.

Pour calculer un correcteur H_∞ , il faut tout d'abord déterminer des gabarits qui permettent de définir des spécifications (temps de réponse en boucle fermée, erreur statique...). Dans notre cas, les spécifications à respecter sont les suivantes :

- Bon suivi de la consigne avec une erreur d'ordre 10^{-6} sur la deuxième et la dernière sortie.
- Rejection de toutes les perturbations et tous les bruits.
- Minimisation de l'effort de commande.

Pour se faire, nous introduisons les fonctions de pondérations suivantes ;

- W_x sur l'erreur de poursuite
- W_u sur la commande pour la contrainte sur les actionneurs.
- W_d et W_n sur les entrées exogènes (perturbations et bruits respectivement).

Notre système devient alors sous la forme suivante:

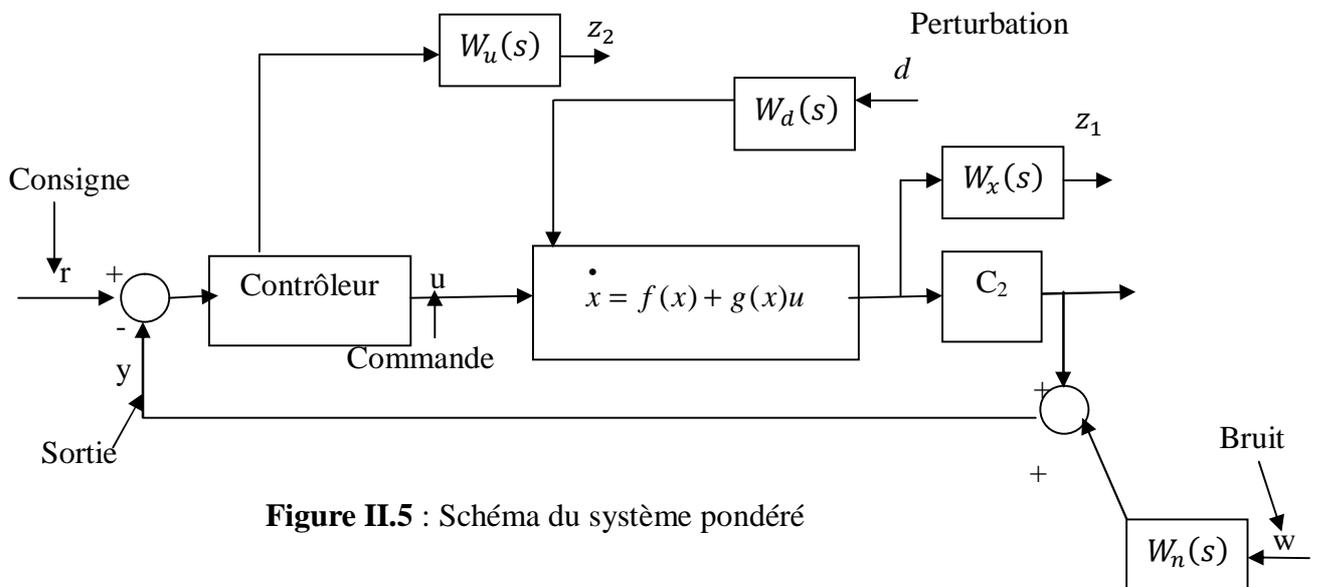


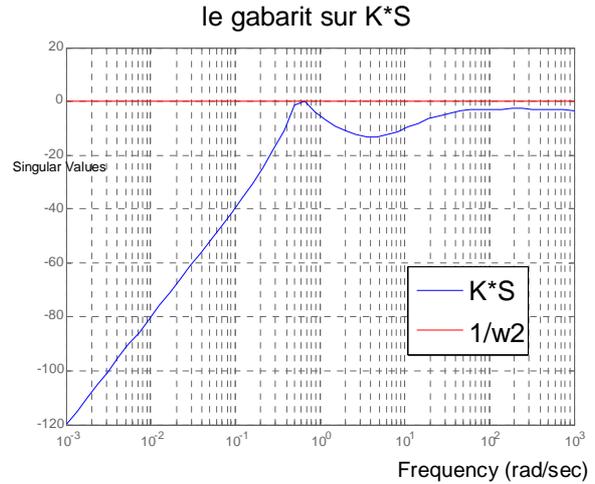
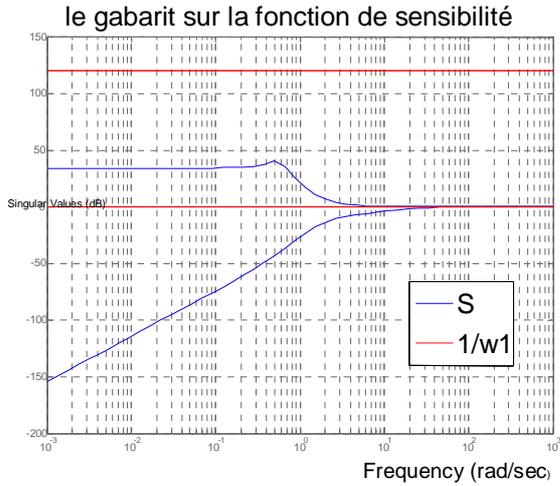
Figure II.5 : Schéma du système pondéré

Les fonctions de pondérations qui répondent au cahier de charge et vérifient les contraintes (II-9), sont les suivantes

$$W_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, W_d = I_4, W_n = I_2 \text{ et } W_u = 1 \quad (\text{II-27})$$

Dans notre cas tous les gabarits ont une forme diagonale, ce qui permet de spécifier des performances pour chaque variable du système MIMO (Multi Inputs Multi Outputs).

Les figures suivantes illustrent les gabarits sur la fonction de sensibilité S_y et le transfert KS_y , respectivement. Où $W_x = W_1$, $W_u = W_2$, W_n et W_d sont regroupés dans W_3



En introduisant toutes ces fonctions de pondérations, la représentation d'état du pendule inversé devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + [w_d \quad 0]w \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \end{aligned} \tag{II-28}$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + [0 \quad w_n] w \tag{II-29}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ w_u \end{bmatrix} u \tag{II-30}$$

La première étape est de linéariser le système. En linéarisant ce système, nous aboutirons au système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24.1314 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{array} \right. \quad (II-31)$$

Le transfert du système nominal est le suivant

$$G_{nom} = \begin{bmatrix} 1/s^2 \\ 2.461/s^2 - 24.13 \end{bmatrix} \quad (II-32)$$

Et celui du système réel (avec les incertitudes) est le suivant

$$G_{reel} = \begin{matrix} 1/s & 1/s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6}/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 & 1/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 \\ 0 & 0 & 2.413*10^{-5}/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 & 10^{-6}s/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/s & s^2+1/s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2+s-24.13/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 & 1/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 \\ & & 0 & 1/s^2 \\ & & 0 & s+10^{-6}/s \\ & & 0 & -2.461/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 \\ & & 0 & -2.461*10^{-6}s/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 1/s^2 \\ & & 0 & -2.461/s^2+8.882*10^{-16}s-24.13 \end{matrix} \quad (II-33)$$

Alors les incertitudes sont non structurées et elles interviennent sous la forme multiplicative en entrées.

La commande H_∞ calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati s'écrit en fonction de la solution de l'équation de Riccati associé à ce système.

La solution de l'équation de Riccati ainsi que le gamma optimal sont calculés par Matlab et leurs valeurs sont :

$$X_\infty = \begin{bmatrix} 1.8258 & 1.6660 & 5.3303 & 1.0859 \\ 1.6660 & 2.4959 & 8.6347 & 1.7594 \\ 5.3303 & 8.6347 & 69.6382 & 14.1508 \\ 1.0859 & 1.7594 & 14.1508 & 2.8797 \end{bmatrix} \quad (\text{II-34})$$

$$g = 55 \quad (\text{II-35})$$

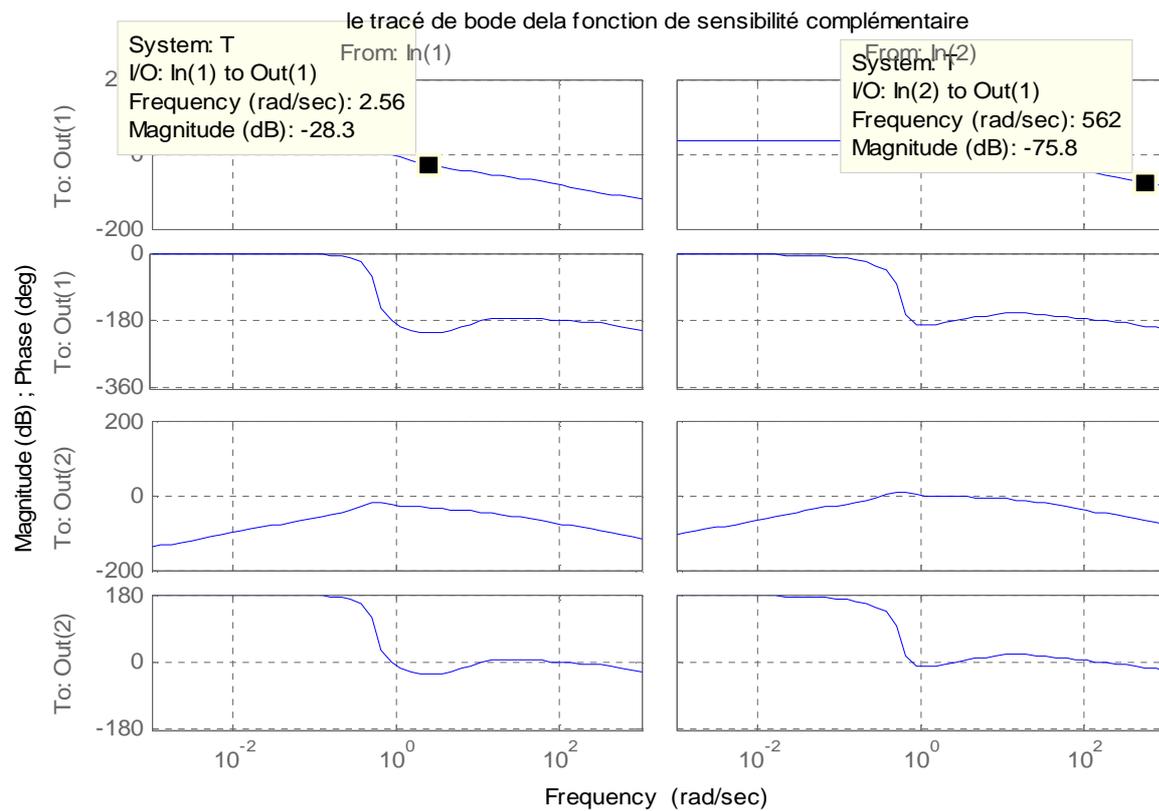
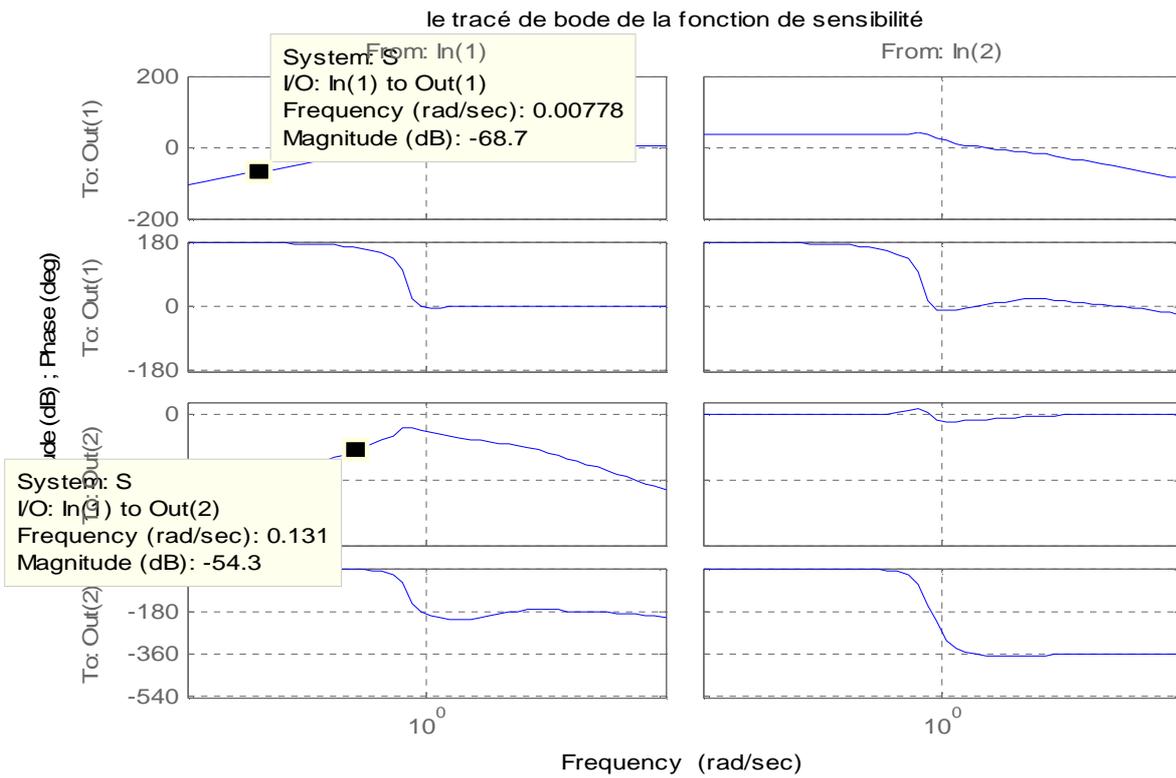
Nous appliquons la commande H_∞ calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati, par simulation, sur ce système, pour différentes conditions initiales et perturbations. et cela dans le but de tester la robustesse de cette commande.

L'étude fréquentielle

Pour que la stabilité d'un système soit assurée en toutes circonstances (perturbations comprises), il faut que sa courbe de réponse harmonique en BO passe suffisamment loin du point critique. On quantifie le degré de stabilité d'un système linéaire au moyen de la marge de gain et la marge de phase. La marge de gain est le nombre de dB dont le gain doit être augmenté pour atteindre le point critique. La marge de phase est le déphasage supplémentaire qui permet d'atteindre le point critique.

	Système nominal	Système incertain
Marge de gain	30dB	24dB
Marge de phase	55°	62°

Les figures suivantes montrent les allures de la fonction de sensibilité $S_y = (Iq + GK)^{-1}$ et la fonction de sensibilité complémentaire $T_y = (Iq + GK)^{-1}GK$



La fonction de sensibilité en sortie montre un gain très faible en basse fréquence (-68.7dB à 0.0077rad/s et -54.3dB à 0.131rad/s) ce qui implique une erreur statique très faible et une bonne rejection des perturbations.

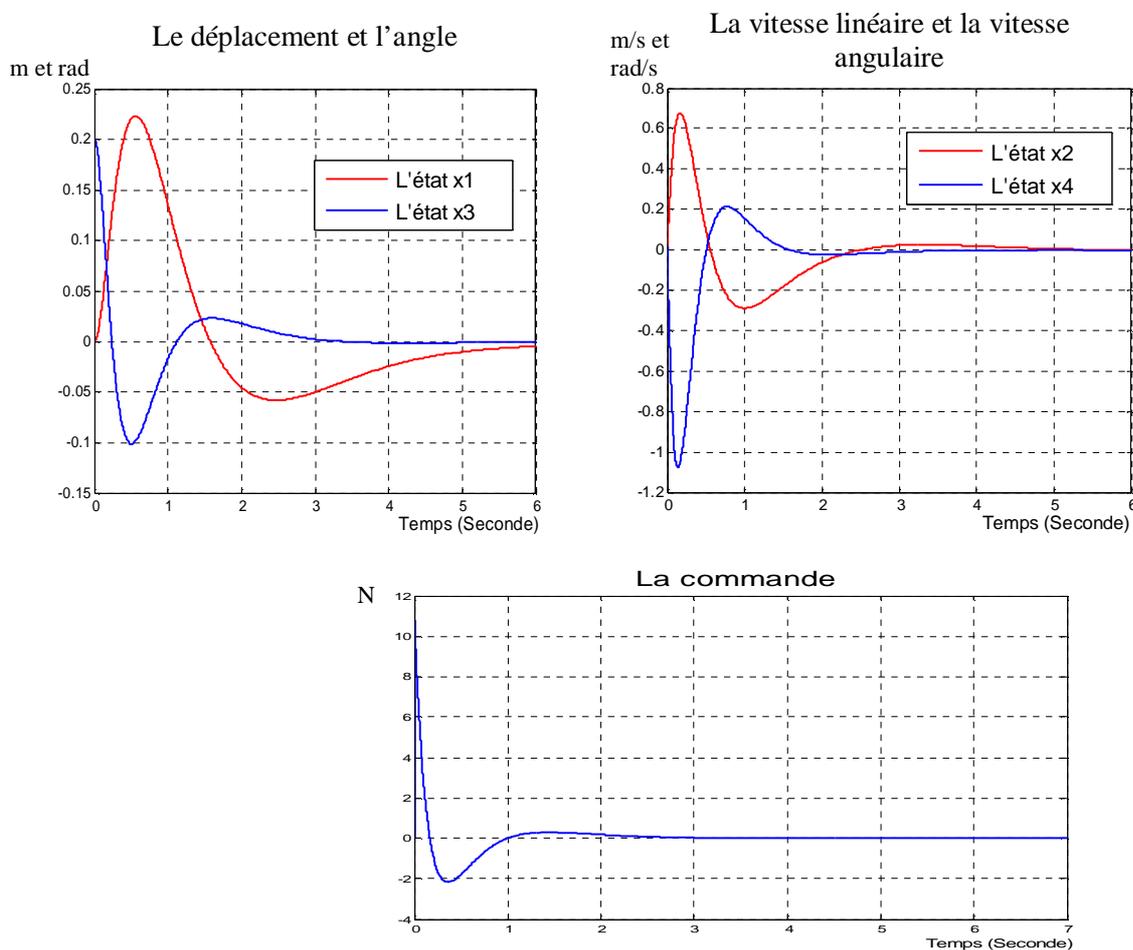
La fonction de sensibilité complémentaire montre un gain très faible en haute fréquences (-28.3dB à 2.56 rad/s et -75.8dB à 562 rad/s) ce qui nous assure une très bonne atténuation des bruits.

L'étude temporelle

En appliquant la commande H_∞ linéaire calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati sur le pendule inversé, nous aboutissons aux résultats de simulation suivants :

Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène nulle

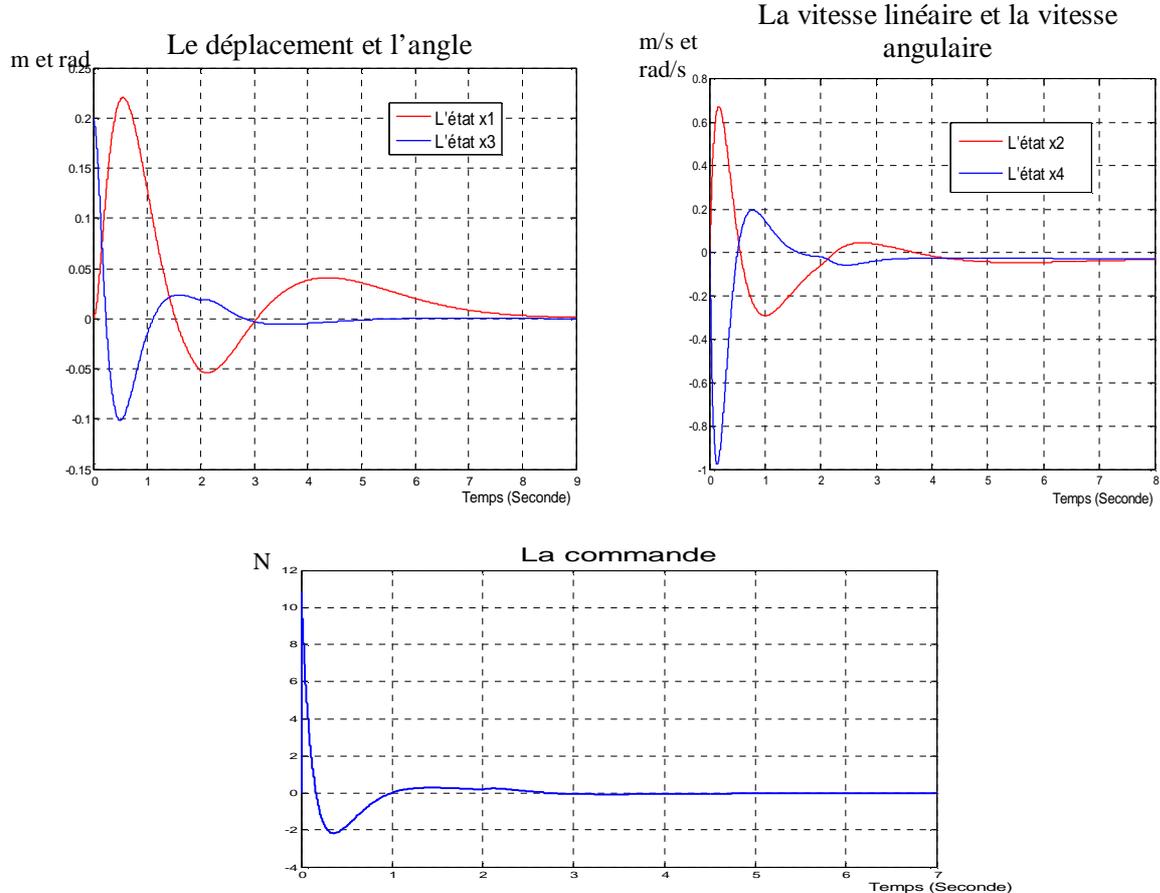
$w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, nous avons les résultats des figures suivantes :



La commande représente la force qu'il faut appliquée pour maintenir le pendule à la position verticale.

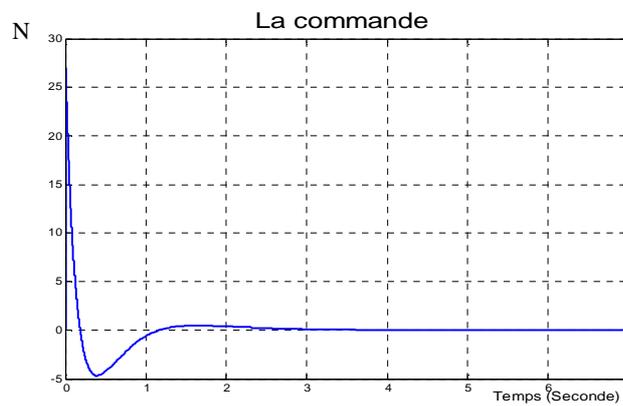
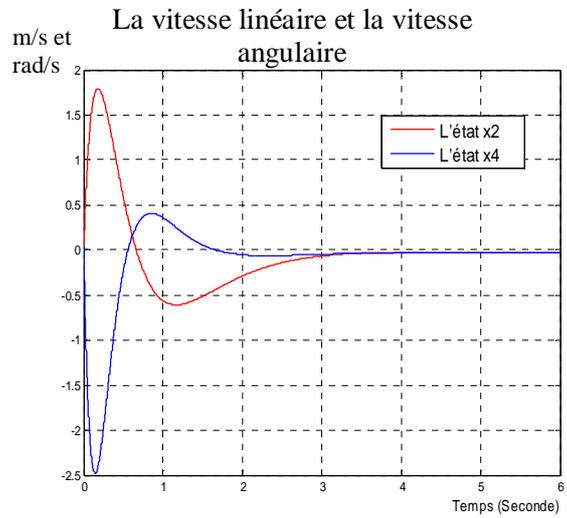
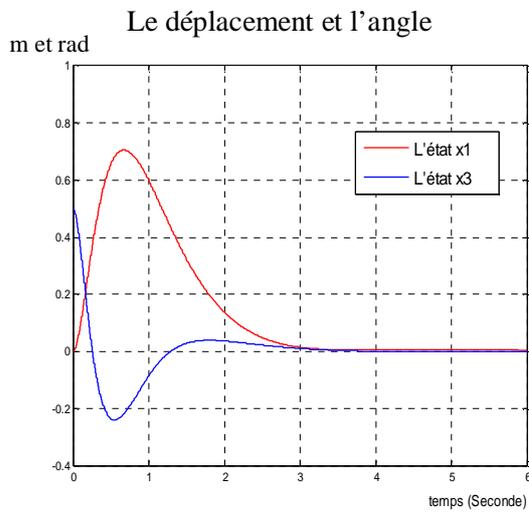
Sans perturbations, et pour une valeur initiale $x_3 = q = 0.2 \text{ rad}$, le système commandé se stabilise à la position verticale après 6 secondes. Ayant une erreur maximale de 0.22 m sur r et une erreur maximale de 0.1 rad dans le sens négatif de q .

Pour les mêmes conditions initiales, nous ajoutons une perturbation à l'instant $t=2s$ (à $t < 2s w = 0$), dont la valeur est de $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, nous aboutissons aux résultats suivants



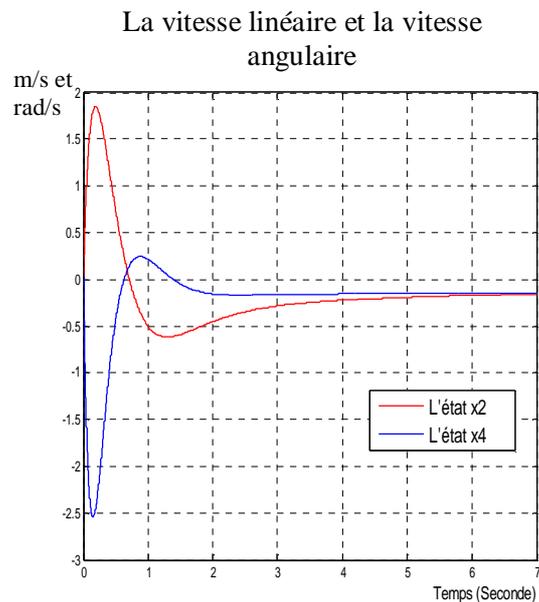
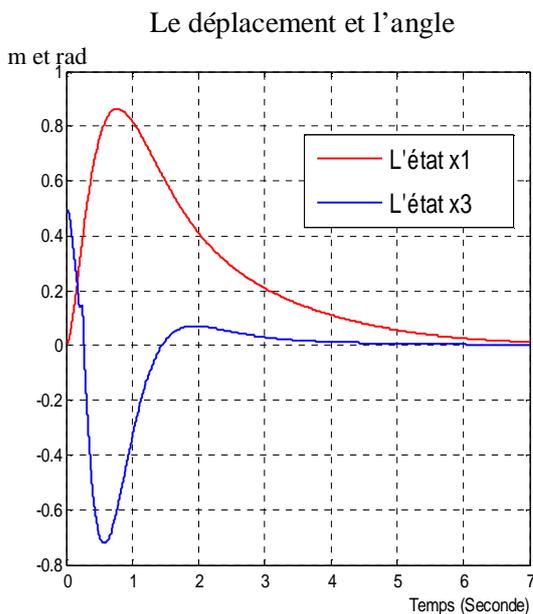
La commande stabilise le système à la position verticale après 8 secondes. Les erreurs maximales sur r et θ sont respectivement : 0.22 m et 0.1 rad.

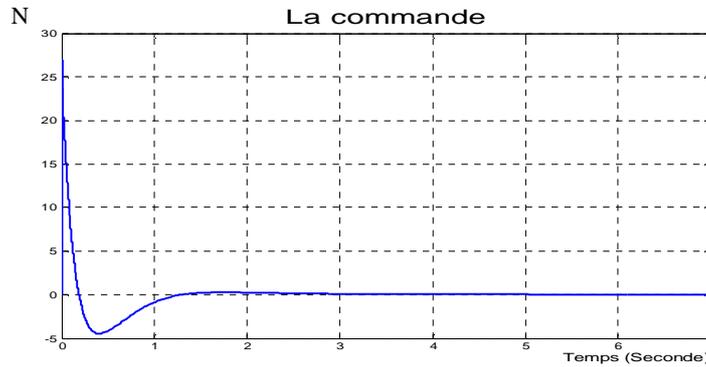
Nous changeons, maintenant, les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ l'entrée exogène est égale à $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, elle est appliquée à $t=0s$, Les résultats sont, alors, donnés par les figures suivantes :



Le système commandé se stabilise à la position verticale après 3 secondes. L'erreur maximale du déplacement est 0.22 m et L'erreur maximale de l'angle est de 0.1 rad.

La valeur de l'entrée exogène étant égale à $w = 0.15 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, et appliquée à $t=0s$, nous avons les résultats de simulations suivants :





La commande stabilise le système à la position verticale après 6 secondes. L'erreur maximale sur r est de 0.85 m et celle de l'angle θ est de 0.7 rad.

Avec les perturbations, la commande appliquée ramène tous les états à 0, mais le temps de réponse varie selon les conditions initiales, la valeur des incertitudes et le moment de leur application.

Pour les différentes valeurs des perturbations, et peu importe à quel instant les perturbations sont introduites, le pendule est maintenu à la position verticale.

D'après les résultats de simulation de cette application, la commande H_∞ linéaire, calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati, atteint les objectifs de stabilité et atténuation de l'effet des perturbations puisqu'elle maintient, toujours le pendule à la position verticale, malgré les perturbations.

II.4.2. Application de la commande H_∞ linéaire sur une machine synchrone à aimant permanents

Nous considérons la dynamique des erreurs d'un moteur synchrone à aimant permanent (voir l'annexe C):

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + k(x_e) w \\ z = \begin{pmatrix} C_0 x_e \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (\text{II-36})$$

où

$$x_e = (V_e \ w_e \ i_{qe} \ i_{de})^T, u = (u_q \ u_d)^T$$

(II-37)

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_2 & a_{10} & 0 \\ 0 & -a_{10} & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (\text{II-38})$$

38)

$$w = \left(a_{1v} \ a_{2v} \ a_{3v} \ a_{4v} \ a_{5v} \ a_{5v} \dot{V}_r \ a_{5v} f_1 \ a_{5v} i_{dr} \ w_9 \ w_{10} \ w_{11} \right)^T \quad (\text{II-39})$$

39)

tel que

$$w_9 = a_{1v} f_1 \frac{1}{a_{10}} - a_{2v} \dot{V}_r - c_v, w_{10} = I_1 - a_{3v} f_1 \frac{1}{a_{10}} - a_{4v} \dot{V}_r + a_{5v} I_2 \quad (\text{II-40})$$

$$w_{11} = a_{5v} I_3 - a_{3v} i_{dr}$$

40)

$$k(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & X_1(x_e) & \frac{a_2}{a_{10}} X_1(x_e) & 0 \\ 0 & X_2(x_e) & \frac{a_2}{a_{10}} X_2(x_e) & 0 \\ 0 & 0 & -X_1(x_e) & -i_{de} \\ 0 & 0 & X_2(x_e) & 0 \\ 0 & 0 & X_3(x_e) & X_4(x_e) \\ 0 & 0 & \frac{p}{a_{50}} i_{de} & -\frac{p}{a_{50}} X_1(x_e) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{a_{50} a_{10}} X_2(x_e) \\ 0 & 0 & -\frac{p}{a_{50}} X_2(x_e) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (\text{II-41})$$

Avec

$$\begin{aligned}
 X_1(x_e) &= \frac{a_1}{a_{10}} V_e - \frac{a_2}{a_{10}} w_e + i_{qe} \\
 X_2(x_e) &= k_1 V_e - w_e \\
 X_3(x_e) &= \bar{a}_3 V_e + \bar{a}_4 w_e + \bar{a}_5 i_{qe} + x_q(x_e) - \frac{p}{a_{50}} X_2(x_e) i_{de} \\
 X_4(x_e) &= \frac{a_{30} - k_4}{a_{50}} i_{de} + x_d(x_e) + \frac{p}{a_{50}} X_1(x_e) X_2(x_e) \\
 \bar{a}_3 &= \frac{1}{a_{50}} \left(-\frac{1}{a_{10}} (a_1 k_1 - a_{30} a_1 - a_2) - a_{40} k_1 \right) \\
 \bar{a}_4 &= \frac{1}{a_{50}} \left(-\frac{1}{a_{10}} (a_2 k_2 + a_1 - a_{30} a_2) + a_{40} - a_{10} \right) \\
 \bar{a}_5 &= \frac{1}{a_{50}} (-k_3 - a_2 + a_{30}) \\
 I_1 &= \frac{1}{a_{50}} \left(\frac{1}{a_{10}} \dot{f}_1 + a_{30} \frac{1}{a_{10}} f_1 + p \dot{V}_r i_{dr} + a_{40} \dot{V}_r \right) \\
 I_2 &= \frac{1}{a_{50}} \left(a_{30} i_{dr} - p \dot{V}_r \frac{1}{a_{10}} f_1 + \frac{di_{dr}}{dt} \right)
 \end{aligned} \tag{II-42}$$

$$T = 0.14 \text{ s}, k_1 = k_2 = 250, \text{ et } k_3 = k_4 = 300 \tag{II-43}$$

Les valeurs nominales des paramètres sont

$$\begin{aligned}
 R_0 &= 0.6 \Omega, J_0 = 0.0011 \text{ Kgm}^2, L_0 = 0.0014 \text{ H}, \\
 f_0 &= 0.0014 \text{ Nms}, p = 4, km_0 = 0.48 \text{ Wb}
 \end{aligned} \tag{II-44}$$

Nous supposons que les paramètres de cette machine varient de la manière suivante

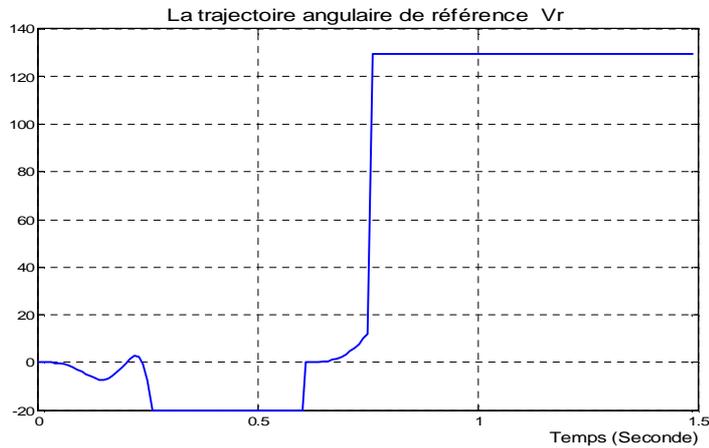
$$\begin{aligned}
 C_l &= C_{l0} + 0.1 C_{nom} \sin \frac{2p}{T} t \\
 J &= J_0 \left(1 + 0.6 \sin \frac{W}{2p} t \right) \\
 f &= f_0 (1 + 0.5 \sin 50wt) \\
 R &= R_0 (1 + e^{-t/0.1}) \\
 L &= L_0 \left(1 + 0.35 \sin \frac{W}{pP} t \right)
 \end{aligned} \tag{II-45}$$

Nous imposons une trajectoire angulaire de référence

$$V_r(t) = \begin{cases} (35R_1^4 - 84R_1^5 + 70R_1^6 - 20R_1^7)V_{r\infty} & \text{if } t \in [0, t_{f1}] \\ V_{r\infty} & \text{if } t \in [t_{f1}, t_a] \\ (10R_2^3 - 15R_2^4 + 6R_2^5)w_{r\infty} & \text{if } t \in [t_a, t_{f2}] \\ t_a w_{r\infty} - \frac{t_{f2}}{2} + V_{r\infty} & \text{if } t \in [t_{f2}, 1.5] \end{cases} \quad (\text{II-46})$$

avec $R_1 = \frac{t}{t_{f1}}, R_2 = \frac{t-t_a}{t_{f2}}, t_a = 0.6s, V_{r\infty} = -20rad, w_{r\infty} = 250rad/s, t_{f1} = 0.25, t_{f2} = 0.75$

La trajectoire angulaire de référence est donc donnée par la figure suivante



L'objectif de la commande H_∞ est de suivre la trajectoire angulaire de référence V_r , et d'avoir une meilleure atténuation des variations des paramètres.

Dans cette application nous avons considéré le problème de commande H_∞ non pondéré.

Pour calculer la commande H_∞ linéaire, nous commençons par linéariser le système

$$\text{système linéaire : } \begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + k w \\ z = \begin{pmatrix} C_0 x_0 \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (\text{II-47})$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_2 & a_{10} & 0 \\ 0 & -a_{10} & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (\text{II-48})$$

48)

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II-49)

Avec Matlab on trouve le g optimal est égale à $g = 3.33 \cdot 10^{-3}$

La solution de l'équation de Riccati utilisé pour le calcul du correcteur est égale à

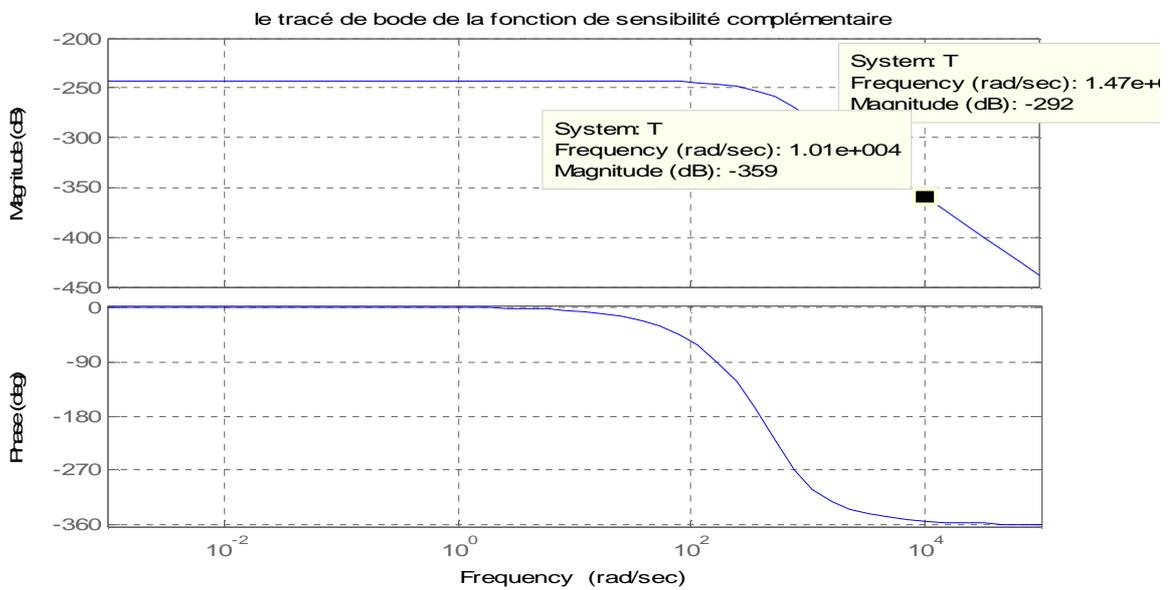
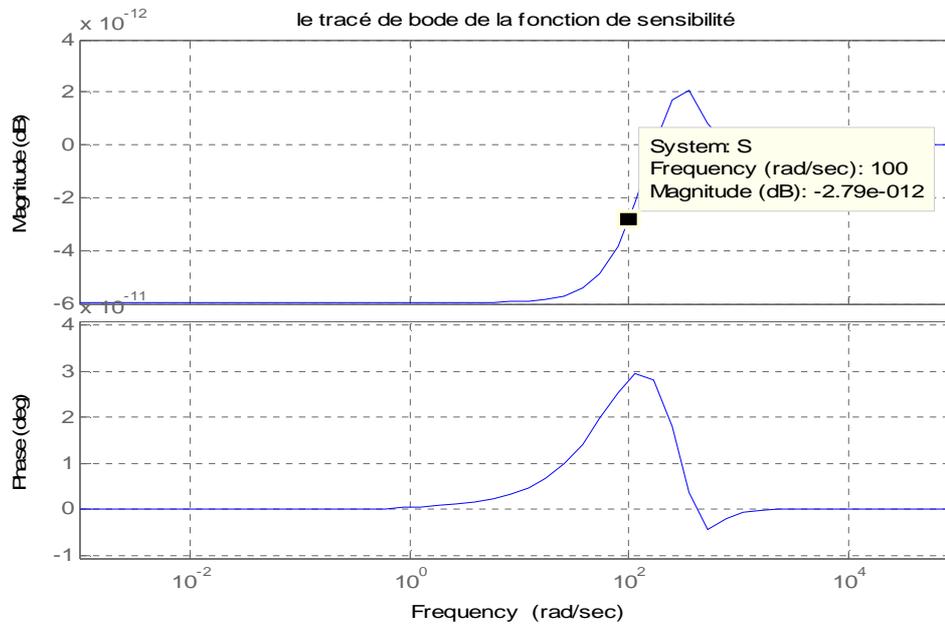
$$X = \begin{bmatrix} 2.0010^{-3} & 2.3610^{-6} & 1.8710^{-6} & 0 \\ 2.3610^{-6} & 4.0710^{-9} & 3.0810^{-9} & 0 \\ 1.8710^{-6} & 3.0810^{-9} & 4.4810^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.3310^{-3} \end{bmatrix} \quad (\text{II-50})$$

L'étude fréquentielle

Pour notre système, les marges de gain et de phase sont données par le tableaux suivant :

	Système nominal	Système incertain
Marge de gain	26dB	24dB
Marge de phase	70.6°	49.5°

Les deux figures suivantes montrent l'allure de la fonction de sensibilité et celle de la fonction de sensibilité complémentaire.

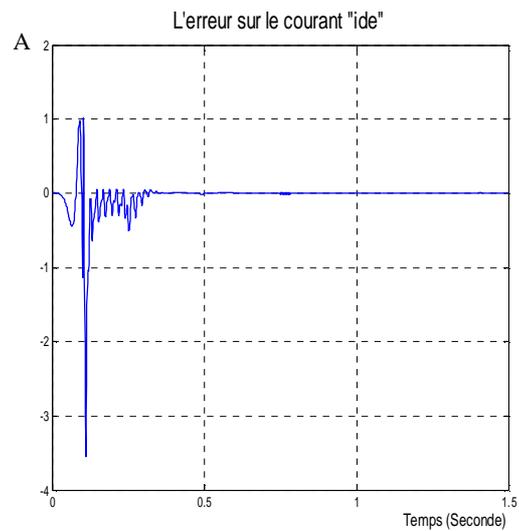
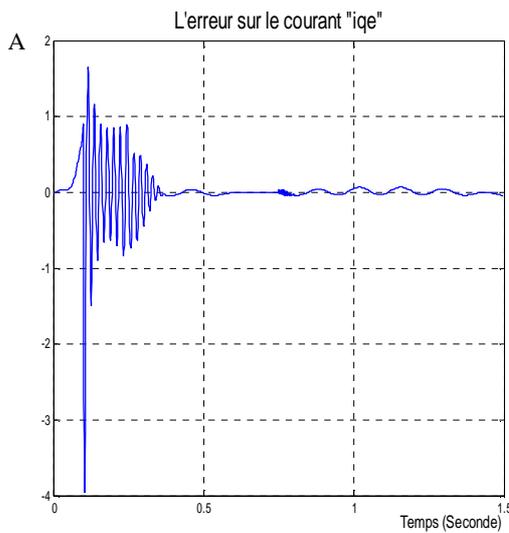
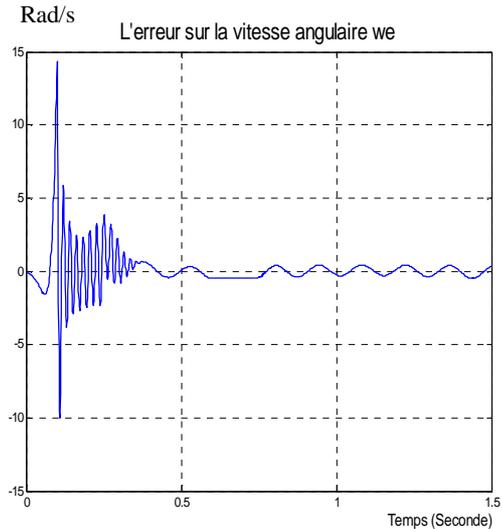
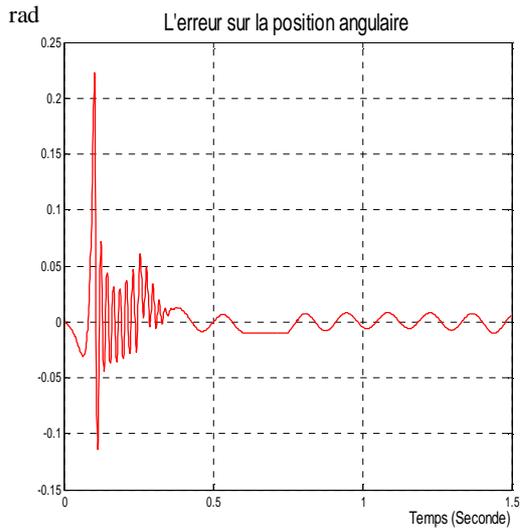


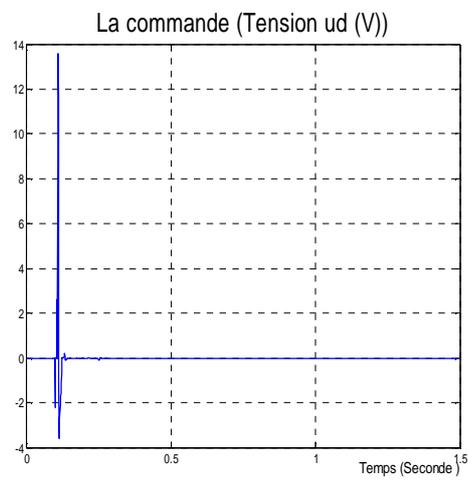
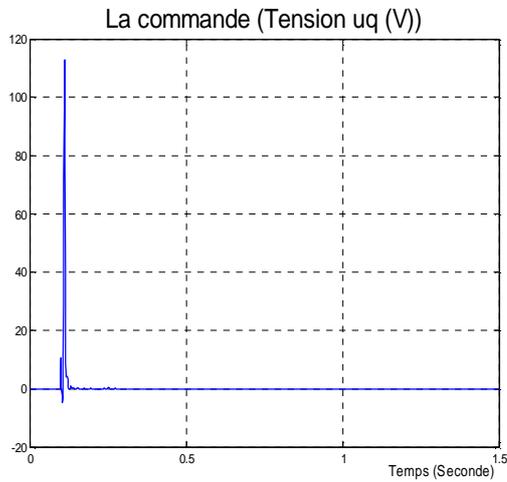
La fonction de sensibilité à un gain très faible ($-2.79 \cdot 10^{-12}$ dB à 100rad/s) donc l'erreur statique est faible. La fonction de sensibilité complémentaire montre un gain très faible en hautes fréquence (-292 dB à $1.47 \cdot 10^3$ rad/s et -359 dB à 11000rad/s) donc bonne atténuation des perturbations.

L'étude temporelle

Les résultats de simulation de l'application de la commande H_∞ linéaire basée sur les équations de Riccati sur une machine synchrone sont comme suit:

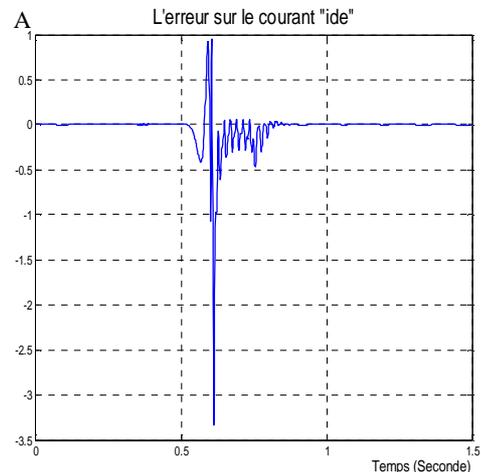
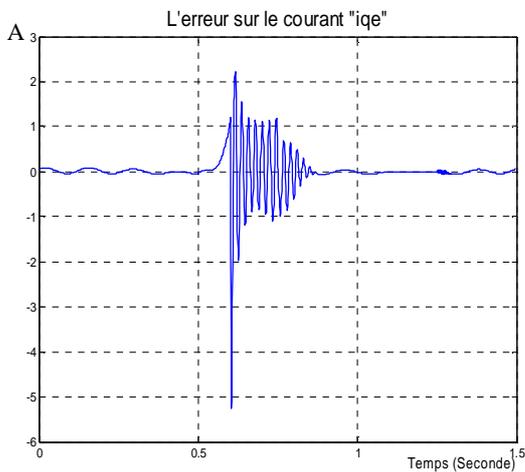
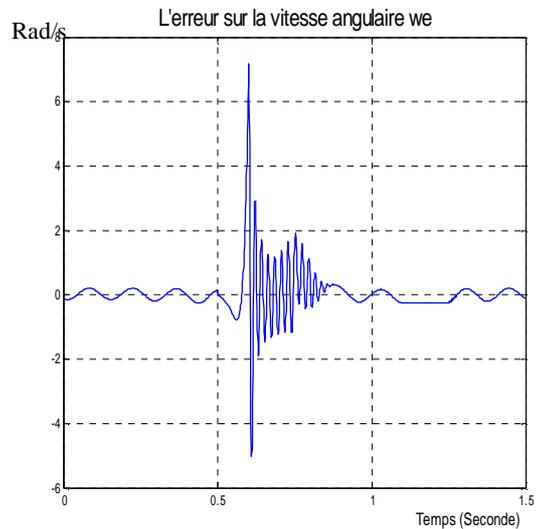
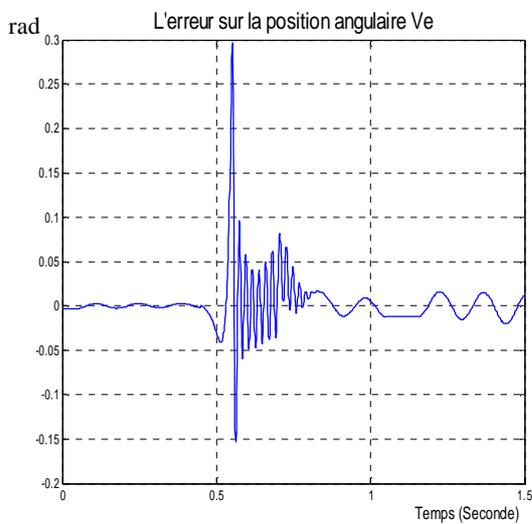
Nous considérons, dans un premier temps, que les variations des paramètres commencent à l'instant $t=0.07s$, les simulations nous donnent les résultats suivants

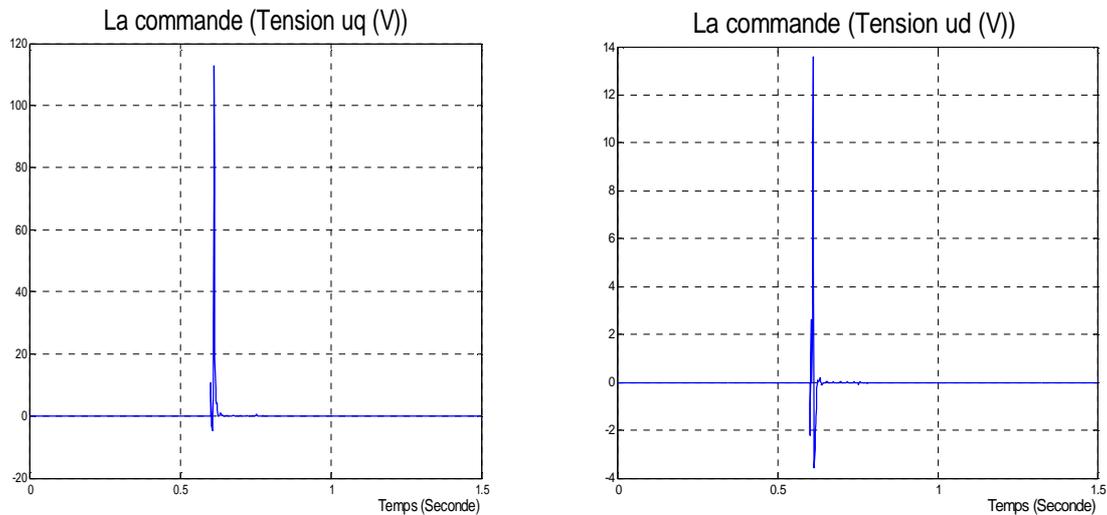




L'erreur sur la trajectoire est de 0.22rad mais cette erreur devient 0.015rad après 1seconde.
 Tout les autres états tendent vers 0 à l'instant $t=0.4s$.

Maintenant les paramètres varient à $t=0.6s$, les résultats de simulation sont comme suit.





L'erreur sur la trajectoire à un maximum de 0.3rad mais après 0.4 seconde de l'application de la perturbation, l'erreur devient 0.02rad. Dans ce cas aussi, les autres états sont ramenés à 0.

D'après les résultats de simulation, l'erreur sur la trajectoire angulaire est de 0.25m pour des variations des paramètres à $t=0.07s$ et de 0.3m pour des variations à $t=0.6s$. La machine a donc suivi la trajectoire imposée, et la commande à pu ramener tout les états, qui sont les erreurs sur la trajectoire angulaire, la vitesse angulaire et les courants des deux axes, à 0 et ceci avec une rapidité remarquable.

A partir de ces résultats, nous concluons que l'objectif de la commande H_∞ linéaire, qui est d'avoir une meilleure atténuation des variations des paramètres est atteint.

A partir des deux applications, la robustesse de la commande H_∞ linéaire est mise en évidence, et cela pour des objectifs de stabilité, de rejet de perturbation et l'atténuation des effets des variations des paramètres

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la problématique de la commande H_∞ linéaire ainsi que la méthode de résolution basée sur les équations de Riccati. Une autre méthode plus récente et plus efficace pour le calcul de la commande H_∞ est l'approche par les inégalités matricielles linéaires (LMI) qui sera exposée en détail dans le chapitre 4.

Etant la majorité des systèmes réels sont non linéaires, il est nécessaire de présenter la commande H_∞ des systèmes non linéaires, qui fera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE 3

COMMANDE H_∞ DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Introduction

Du fait de l'augmentation constante des exigences de qualité et de performance des systèmes asservis et l'exigence de plus en plus forte du « meilleur compromis », les cahiers des charges d'asservissement industriels sont de plus en plus complexes et serrés. Tout cela a pour conséquence d'invalider l'hypothèse de linéarité : les effets non linéaires des systèmes ne sont plus négligeables, ou même s'ils le sont, des correcteurs non linéaires sont souvent nécessaires pour satisfaire les exigences de performance. La question majeure dans ce contexte est de trouver un cadre théorique capable de formuler la vérification des performances recherchées par la caractérisation de propriétés mathématiques du modèle non linéaire. C'est l'ensemble de ces points qui ont conduit certains auteurs à s'intéresser aux problèmes de commande non linéaire, notamment l'extension de l'approche H_∞ dans le cadre non linéaire. [BaHe 89], [BasBer 90] et [VDS 91] ont été les premiers travaux, concluants, effectués sur la commande H_∞ des systèmes non linéaires.

Nous citons, ici, quelques travaux qui ont contribué, de manière particulière, à la résolution du problème de commande H_∞ non linéaire.

- Ø **Ball** et **Halton** dans [BaHe88], ont développé la théorie de la commande H_∞ des systèmes non linéaires, en faisant la liaison avec la théorie des systèmes différentiels.
- Ø Dans [VDS91] et [VDS92], **Van der Schaft** donne la définition de la norme H_∞ dans le cas non linéaire « gain L_2 », et montre que la solution du problème de commande H_∞ non linéaire est calculée à partir de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, qui est la version non linéaire de l'équation de Riccati du problème de commande H_∞ linéaire, et fait ainsi, la relation entre la commande H_∞ des systèmes non linéaires et la commande H_∞ des systèmes linéarisés.
- Ø **Isidori** et **Astolfi** ont développé une condition suffisante pour l'existence de la commande H_∞ non linéaire, et démontrent la stabilité asymptotique d'un système grâce au principe d'invariance de Salle [IsAs92].
- Ø **Lu** et **Doyle** généralisent la solution standard dans l'espace d'état du problème de commande H_∞ linéaire, et paramétrisent le contrôleur H_∞ en utilisant des transformations fractionnaires non linéaires [LuDo95].
- Ø **Isidori** en 1992, décrit une solution du problème de commande H_∞ non linéaire, sous l'hypothèse de l'existence d'une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi [Is 92].

- Ø En 1994, Astolfi applique, sur un modèle d'un robot, la méthode donnée par Isidori [As 94].
- Ø Les auteurs de [VDS 92] et [IsAs 92] montrent que le problème de commande H_∞ non linéaire est dérivé de l'analyse du gain L_2 , basé sur le concept de la dissipation d'énergie. Ils donnent alors, une solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi.

III.1. La problématique de la commande H_∞ non linéaire

Le problème de commande H_∞ non linéaire consiste à concevoir un contrôleur dynamique de modèle d'état non linéaire, sous la forme

$$K : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_k(\mathbf{x}) + B_k(\mathbf{x})y \\ u = C_k(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

qui assure

- Ø La stabilité asymptotique du système non linéaire en boucle fermée.
- Ø L'atténuation des effets des entrées exogènes.

ζ est le vecteur d'état du correcteur, y est le vecteur de sortie du système et u la commande.

La structure du contrôleur non linéaire (III-1) est linéaire. Ce contrôleur est composé d'un observateur non linéaire (observateur de ζ) et d'une action de control.

Le problème d'atténuation des entrées exogènes par retour d'état d'un système non linéaire est équivalent à trouver une commande qui rend ce système dissipatif.

Avant de définir un système dissipatif, nous allons parler de la norme H_∞ non linéaire :

La norme H_∞ linéaire est définie comme une norme sur les matrices de transfert, et ne se généralise pas directement aux systèmes non linéaires. Cependant, dans le domaine de temps, la norme H_∞ n'est rien d'autre que la norme induite par la norme \mathcal{L}_2 sur ses signaux ; c'est à dire pour un système Σ de vecteur d'entrée u , et vecteur de sortie y :

$$\|\Sigma\|_\infty = \max_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad (\text{III-2})$$

Cette dernière norme convient également aux systèmes non linéaires, et elle est appelée « gain L_2 » d'un système non linéaire [VDS92].

III.1.1. Gain L_2 : [VDS92]

Nous considérons la forme générale d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = Z(x, u) \\ y = Y(x, u) \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure, $z \in R^s$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène.

Le gain L_2 d'un tel système est définie par

$$\text{gain } L_2 = \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (\text{III-4})$$

T est l'horizon

Un système non linéaire avec l'état initial $x(0)=0$ a un gain L_2 inférieur ou égale à g ($g \geq 0$) si pour tout $T \geq 0$ et $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, T]$ (L'espace \mathcal{L}_2 est défini dans l'annexe A)

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq g^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (\text{III-5})$$

III.1.2. Définition d'un système dissipatif : [IsKa95]

Un système non linéaire de la forme générale (III-3) est dissipatif s'il existe une fonction $V(x)$ non négative telle que $V(0) = 0$ et

$$\int_0^T \left\{ \|z\|^2 - g^2 \|w\|^2 \right\} dt \leq V(0) - V(T) \leq -V(T) \quad (\text{III-6})$$

Cette dernière inégalité signifie que la norme H_∞ du système, pour $T \rightarrow \infty$, est inférieure ou égale à g [HuCha98].

Pour $g = 1$, cette inégalité signifie que l'énergie en entrée est plus grande ou égale à l'énergie de la sortie. En d'autre terme, l'énergie a été dissipée d'où le nom système dissipatif [HuCha98].

III.1.3. Problème de commande H_∞ non linéaire

Le problème de commande H_∞ non linéaire est équivalent à trouver un correcteur K de la forme (III-1) qui :

Ø stabilise le système (III-3)

$$\text{Ø minimise } \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \tag{III-7}$$

III.2. Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire

La résolution du problème de commande H_∞ non linéaire n'est possible que sous les hypothèses suivantes [IsKa95]:

Ø Hypothèse 1

Il existe des fonctions uniques $w_*(x, p)$ et $u_*(x, p)$ définies au voisinage de $(0, 0)$ qui satisfont

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) &= 0 \\ w_*(0, 0) &= 0 \quad u_*(0, 0) = 0 \end{aligned} \tag{III-8}$$

tel que

$$\begin{aligned} H(x, p, w, u_*(x, p)) &\leq H(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) \\ &\leq H(x, p, w_*(x, p), u) \end{aligned} \tag{III-9}$$

où H est la fonction Hamiltonienne définie par

$$H(x, p, w, u) = p^T F(x, w, u) + \|z(x, u)\|^2 - g^2 \|w\|^2 \quad (\text{III-10})$$

et
$$p^T = V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{III-11})$$

Ø Hypothèse 2

Chaque trajectoire $x(t)$ du système $\dot{x}(t) = F(x(t), 0, u(t))$ satisfait $Z(x(t), u(t)) = 0$ pour tout $t \geq 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Cette dernière hypothèse est la version non linéaire qu'un système linéaire ayant une entrée u et une sortie z ($w = 0$) n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire.

Dans la littérature, le problème de commande H_∞ non linéaire est traité pour une classe particulière des systèmes non linéaires. Cette classe est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{11}(x)w + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w + K_{22}(x)u \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure, $z \in R^s$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène.

Les systèmes non linéaires, qui s'écrivent de cette manière, sont appelés systèmes non linéaires affins aux entrées.

Dans le but de simplifier l'analyse de la commande H_∞ non linéaire, les hypothèses suivantes ont été considérées.

Ø Hypothèses simplificatrices [ChDaSe98]

Ø $K_{11}(x) = 0$ et $K_{22}(x) = 0$ (III-13a)

Ø $K_{12}(x)^T [h_1(x) \quad K_{12}(x)] = [0 \quad I]$ (III-13b)

Ø $\begin{bmatrix} g_1(x) \\ K_{21}(x) \end{bmatrix} K_{21}^T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ (III-13c)

Ø $[h_1(x) \quad f(x)]$ est détectable à l'état nul (III-13d)

Ø Le système nominal est atteignable à l'origine

Sous ces hypothèses, le système donné par l'équation (III-12) peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

III.3. Solution du problème H_∞ des systèmes non linéaires

La solution du problème de commande H_∞ non linéaire est donnée moyennant le théorème suivant

Théorème : [IsKa95] [HuCH98] [ChDaSe98]:

Sous les hypothèses précédentes, s'il existe une fonction positive définie « V » au voisinage de $x=0$ tel que $V(0)=0$, qui satisfait l'inégalité (III-6) ; alors la loi de commande

$$u = -\frac{1}{2}g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = -g_2^T X \quad (\text{III-15})$$

résout le problème de commande H_∞ non linéaire (stabilité interne et atténuation des perturbations). Et le contrôleur H_∞ non linéaire est donné par :

$$K: \begin{cases} \dot{\zeta} = A_k(\zeta) + B_k(\zeta)y \\ u = C_k(\zeta) \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

où

$$A_k = f(\zeta) + \gamma^{-2}g_1(\zeta)g_1^T(\zeta)X(\zeta) + g_2(\zeta)C_k(\zeta) - B_k(\zeta)h_2(\zeta) \quad (\text{III-17})$$

$$C_k(\zeta) = -g_2^T(\zeta)X(\zeta) \quad (\text{III-18})$$

et $B_k(\zeta)$ satisfait l'équation suivante

$$[Y(x) - X(x)]^T B_k(\zeta) = \gamma^2 h_2^T(\zeta) \quad (\text{III-19})$$

ζ est le vecteur d'état du correcteur, et y et le vecteur de sortie du système.

$X(\zeta)$ et $Y(\zeta)$ sont les solutions de deux équations dites **équations de Hamilton Jacobi**, données par (III-20a) et (III-20b).

$$H_{FI}(V, x) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (\gamma^{-2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T h_1 = 0 \quad (\text{III-20a})$$

$$H_{FC}(U, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial x} f + \gamma^{-2} h_1^T h_1 - h_2^T h_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial U^T}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-20b})$$

$$\text{où} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2X \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2Y \quad (\text{III-20c})$$

Ces deux équations sont la version non linéaire des deux équations de Riccati. L'équation (III-20a) est dite de filtrage, et l'équation (III-20b) est dite de contrôle.

III.4. Résolution du problème de commande H_∞ non linéaire via la méthode des approximations successives [HuyaJu00]

La théorie de commande H_∞ des systèmes non linéaires a été développée de l'analyse du gain L_2 , basé sur le concept de la dissipation d'énergie. Ses applications ne sont pas faciles à cause des équations (inégalités) de Hamilton Jacobi, dont la solution exacte est inexistante ou impossible à calculer. Deux approches ont été particulièrement utilisées dans la littérature pour résoudre ce problème. La première est l'approche utilisant un algorithme des approximations successives pour le calcul de la solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi [HuYaCh99] [HuyaJu00], qui sera exposée dans la partie suivante. La seconde est l'approche basée sur les inégalités matricielles non linéaires (NLMI) [YiPa99] [Asep03] et [Naj00], qui fera l'objet du prochain chapitre.

Pour trouver un contrôleur H_∞ du théorème précédent, nous avons besoin de résoudre l'équation de Hamilton Jacobi (III-20a), dont la solution est inconnue ou difficile à calculer. Une approximation de la solution de l'équation de Hamilton Jacobi peut être calculée par la méthode des approximations successives que nous présenterons dans cette partie.

Cette méthode est le résultat de l'extension, au cas non linéaire, de la méthode basée sur les équations de Riccati dans le cas de commande H_∞ linéaire. Le principe de cette méthode repose sur une discrétisation spatiale dont la mise en œuvre nécessite la linéarisation du système non linéaire.

La première étape est donc, de considérer le modèle linéarisé de (III-14) autour du point $(0, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases} \quad (\text{III-21})$$

$$\begin{aligned} \text{Où} \quad A &= \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} & B_1 &= g_1(0) & B_2 &= g_2(0) & C_1 &= \left. \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \\ C_2 &= \left. \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0} & D_{12} &= K_{12}(0) & D_{21} &= K_{21}(0) \end{aligned}$$

La solution approximée de l'équation de Hamilton-Jacobi est, alors calculée à partir de cette égalité.

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)} \quad (\text{III-22})$$

où $k \geq 3$ est un entier.

avec

$$F_c = A + R_s X$$

ou X est la solution de l'équation de Riccati suivante

$$A^T X + X A + X (g^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (\text{III-23})$$

$$R_s = g^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \quad (\text{III-24})$$

f_h, R_h et Q_h sont calculées à partir des équations suivantes :

$$f(x) = Ax + f_h(x) \quad (\text{III-25})$$

$$\frac{1}{4} (Y^{-2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) g_2^T(x)) = \frac{1}{4} (Y^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) + R_h(x) \quad (\text{III-26})$$

$$h_1^T(x) h_1(x) = x^T C_1^T C_1 x + Q_h \quad (\text{III-27})$$

$$f_h(x) = O(x^2) \quad R_h(x) = O(x) \quad Q_h(x) = O(x^3) \quad (\text{III-28})$$

$O(x)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre 1.

$O(x^2)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre 2.

$O(x^3)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre 3.

En effet, on peut établir une série d'équations linéaires en comparant les coefficients des deux membres de l'égalité (III-22). $V^{(k)}$ est la solution unique de toutes ces équations linéaires.

Pour chaque étape k

$$V^{[k]}(x) = \sum_{m=2}^k V^{(m)}(x) = x^T X x + \sum_{m=3}^k V^{(m)}(x) \quad (\text{III-29})$$

$(\bullet)^{(k)}$ est un terme d'ordre k

$(\bullet)^{[k]}$ est un terme d'ordre k accumulé incluant x^k

$$\frac{\partial V^{[k]}}{\partial x} = 2x^T X + \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} \quad (\text{III-30})$$

$\frac{\partial V^{(m)}}{\partial x}$ est d'ordre $m-1$

Finalement la solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi est :

$$\begin{aligned} X^{[k-1]}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = X x + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} \\ &= X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III-31})$$

Ø Algorithme des approximations successives

Etape 1 : Initialisation

- Ø Linéarisation du modèle du système non linéaire autour de l'origine.
- Ø Calcul de X , la solution de l'équation de Riccati (III-23), et de γ optimal (voir chapitre 2).
- Ø Initialisation de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} = 2x^T X$$

- Ø Fixer : - Le vecteur tolérance ε
-Le nombre d'itération N

Etape 2 : Calcul des approximations

Ø Calcul des approximations successives, en comparant les coefficients de l'équation suivante

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)}$$

Ø Calcul de la solution approximé de l'équation de Hamilton Jacobi

$$\begin{aligned} X^{[k-1]}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = X x + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} \\ &= X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \end{aligned}$$

Etape 3 : Vérification

Si $X^{[k-1]}(x) - X^{[k-2]}(x) \leq e$

Calculer la commande $u = -g_2^T(x) X^{[k-1]}(x)$

Sinon $k = k + 1$

Si $k \leq N + 3$

Recommencer l'étape 2

Sinon calculer la commande $u = -g_2^T(x) X^{[k-1]}(x)$

Fin

Fin

Une fois la solution approximée de l'inégalité de Hamilton- Jacobi est calculée, on la remplace par sa valeur dans les équations (III-17) et (III-18), pour calculer les matrices A_k et C_k . Par contre B_k fait intervenir dans son expression la solution de la deuxième inégalité de Hamilton-Jacobi (III-20b), dont la solution est inconnue. **Lu** et **Chang**, dans leurs travaux, proposent de considérer B_k égale à son équivalent dans le cas du correcteur linéaire.

III.5. Application de la commande H_∞ non linéaire

Pour mettre en évidence la théorie de la commande H_∞ non linéaire, par simulation, deux applications ont été effectuées sur les deux exemples traités dans le chapitre précédent.

III.5.1. Application de la commande H_∞ non linéaire sur le modèle du pendule inversé

Reprenons le modèle non linéaire du pendule inversé du chapitre 2.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \\
 y &= \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & w_n \end{bmatrix} w \\
 z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ w_u \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \tag{III-32}$$

Nous rappelons que notre objectif est de stabiliser le système et de le maintenir à la position verticale, tout en assurant une bonne rejection des perturbations et une bonne atténuation des bruits.

Pour concevoir la commande H_∞ non linéaire, il y a lieu, dans un premier temps, de linéariser le système autour de l'origine.

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24.1314 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\
 z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \right. \tag{III-33}$$

En utilisant Matlab, on trouve la valeur optimale de g est égale à 53.966015. Et pour nos simulations, nous considérons $g = 55$

la solution de l'équation de Riccati (III-23) est égale à

$$X = \begin{bmatrix} 1.8258 & 1.6660 & 5.3303 & 1.0859 \\ 1.6660 & 2.4959 & 8.6347 & 1.7594 \\ 5.3303 & 8.6347 & 69.6382 & 14.1508 \\ 1.0859 & 1.7594 & 14.1508 & 2.8797 \end{bmatrix} \quad (\text{III-34})$$

La première solution approximative est donnée par

$$X^{[1]}(x) = X x \quad (\text{III-35})$$

Nous avons $f_h^{(2)}(x) = R_h^{(1)}(x) = Q_h^{(3)}(x) = 0$ donc

$$X^{[2]}(x) = X^{[1]}(x) = X x \quad (\text{III-36})$$

La solution d'ordre 3 est donnée par

$$X^{[3]}(x) = X x + X^{(3)}(x) \quad (\text{III-37})$$

où

$$X^{(3)}(x) = [X_1^{(3)} \quad X_2^{(3)} \quad X_3^{(3)} \quad X_4^{(3)}] \quad (\text{III-38})$$

et

$$X_1^{(3)}(x) = 0.1730 x_1 x_3^2 + 0.1300 x_2 x_3^2 + 2.3450 x_3^3 + 0.6160 x_4 x_3^2$$

$$X_2^{(3)}(x) = 0.1250 x_1 x_3^2 + 0.2100 x_2 x_3^2 + 3.9340 x_3^3 + 1.0068 x_4 x_3^2$$

$$X_3^{(3)}(x) = 0.250 x_1 x_2 x_3 + 11.8000 x_2 + 0.2050 x_3 x_2^2 + 98.5000 x_3^3 + 7.0349 x_1 x_3^2 + 1.2260 x_1 x_3 x_4 \\ + 37.5500 x_4 x_3^2 + 2.0140 x_2 x_3 x_4 + 3.9021 x_3 x_4^2 + 0.0800 x_3 x_1^2 + 0.1000 x_4^2$$

$$X_4^{(3)}(x) = 0.6173 x_1 x_3^2 + 1.0000 x_2 x_3^2 + 12.5340 x_3^3 + 3.606 x_4 x_3^2 + 0.2858 x_3 x_4^2 \\ + 0.0509 x_2 x_3 x_4$$

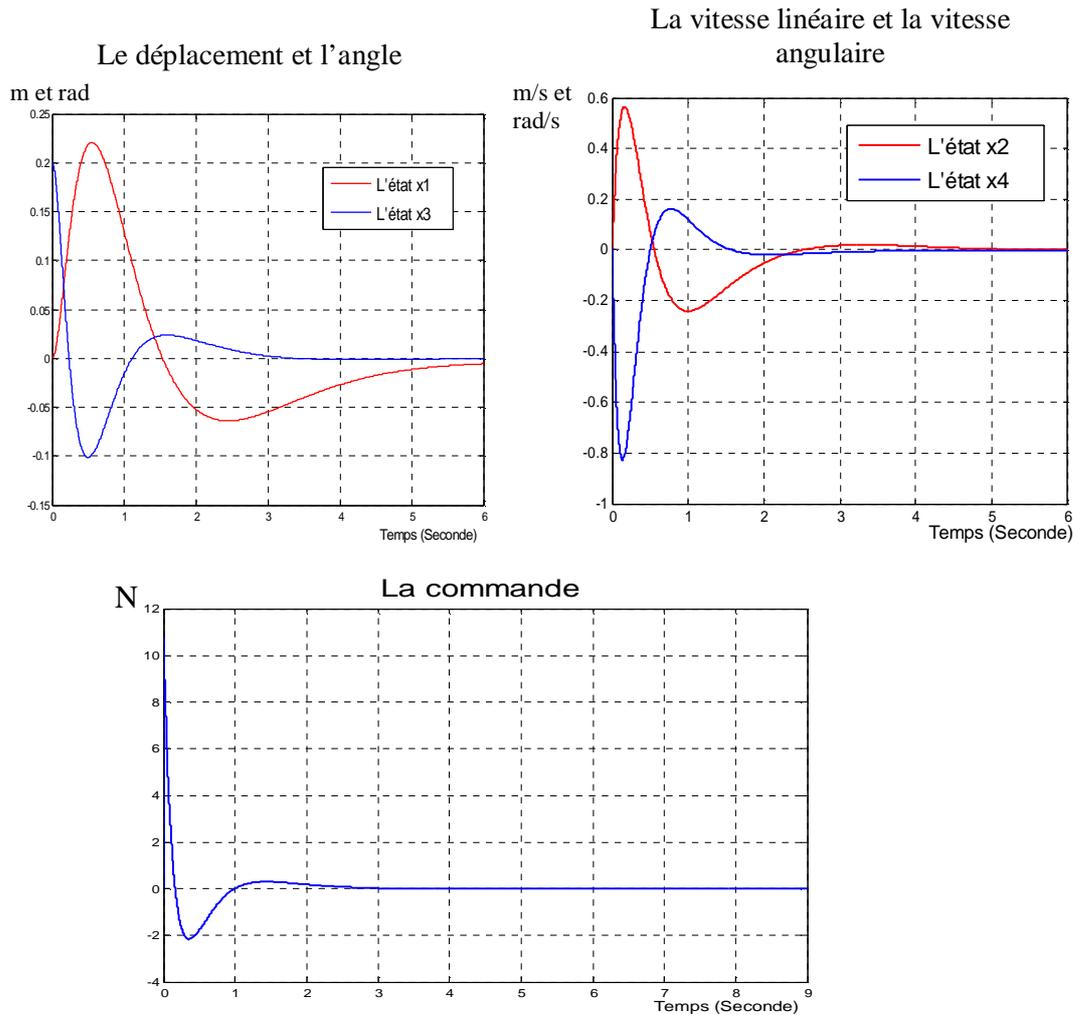
Nous avons

$$f_h^{(4)}(x) = R_h^{(3)}(x) = Q_h^{(5)}(x) = 0$$

$$\text{donc } X^{[4]}(x) = X^{[3]}(x) = X x + X^{(3)}(x) \quad (\text{III-39})$$

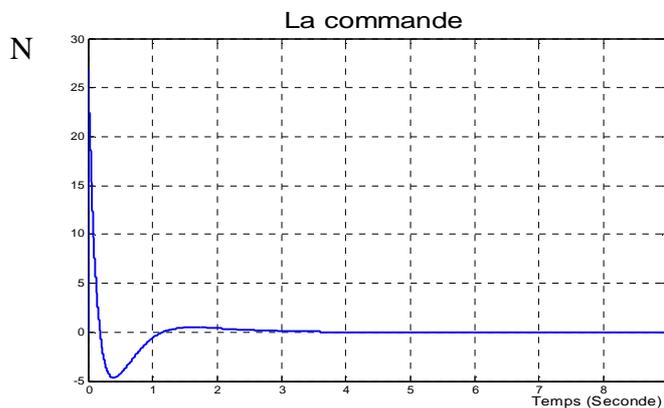
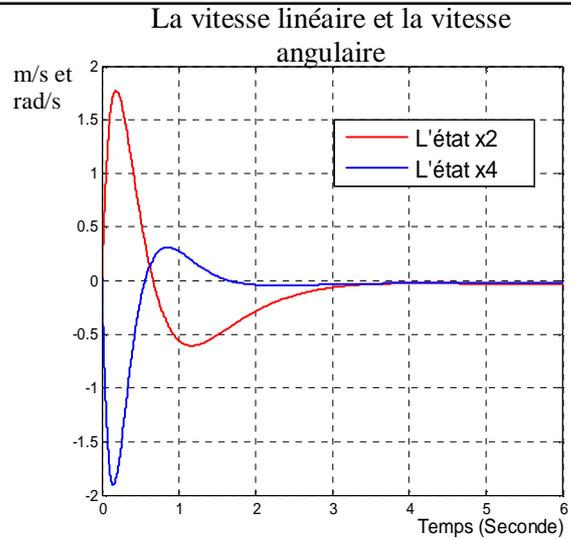
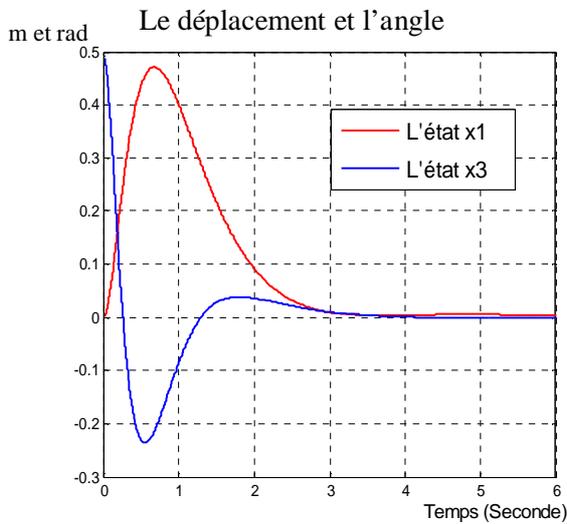
Nous remplaçons la solution approximée de l'équation de Hamilton-Jacobi dans les équations (III-17) et (III-18), pour calculer les matrices A_k , C_k et B_k du contrôleur non linéaire.

Pour les premières simulations, nous considérons, les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et une entrée exogène nulle $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ (d représente les perturbations et n les bruits) les résultats sont, alors, donnés par les figures suivantes :



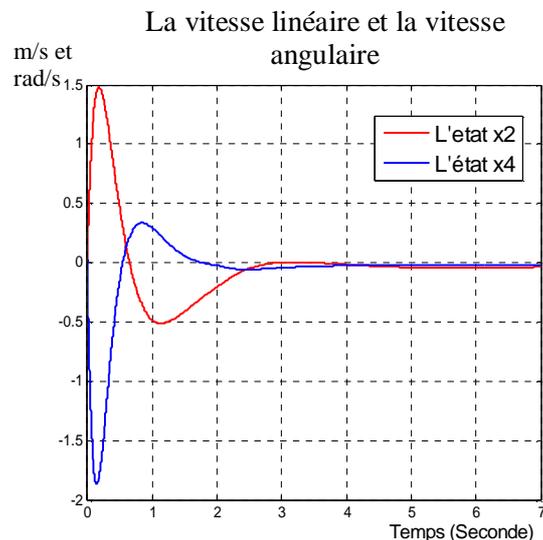
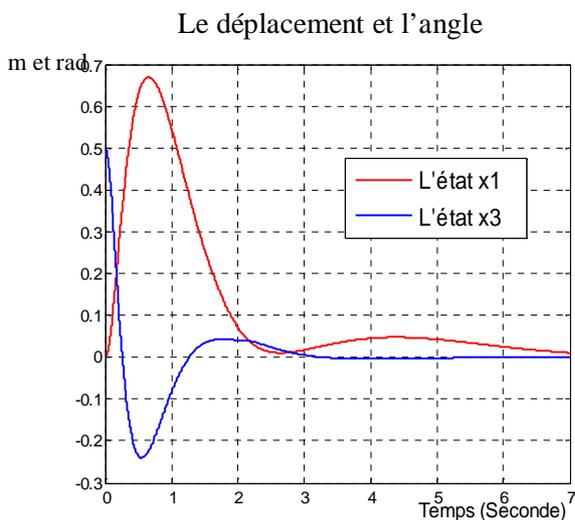
La commande H_∞ non linéaire, calculée par la méthode des approximations successives, pour une perturbation nulle, et pour une valeur initiale $x_3 = q = 0.2 \text{ rad}$, stabilise le système après 6 secondes, puisqu'elle le maintient à la position verticale avec une erreur maximale de 0.22 m sur r et une erreur maximale de 0.1 rad dans le sens négatif des q

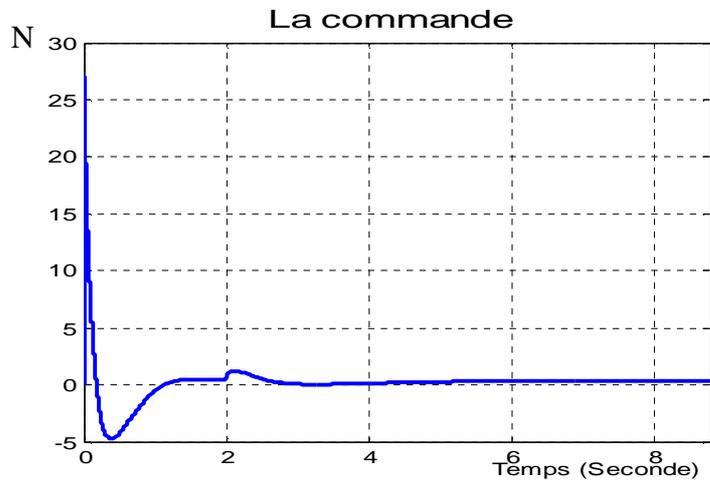
Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène $w = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite à $t=0s$ nous aboutissons aux résultats suivants :



L'effet des perturbations est atténuée et le système s'est stabilisé à l'instant $t=3s$, avec une erreur maximale de 0.46m sur l'état x_1 , et une erreur de 0.22 rad sur l'état x_3 .

Pour les mêmes conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène $w = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite, cette fois ci, à $t=2s$, les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes :

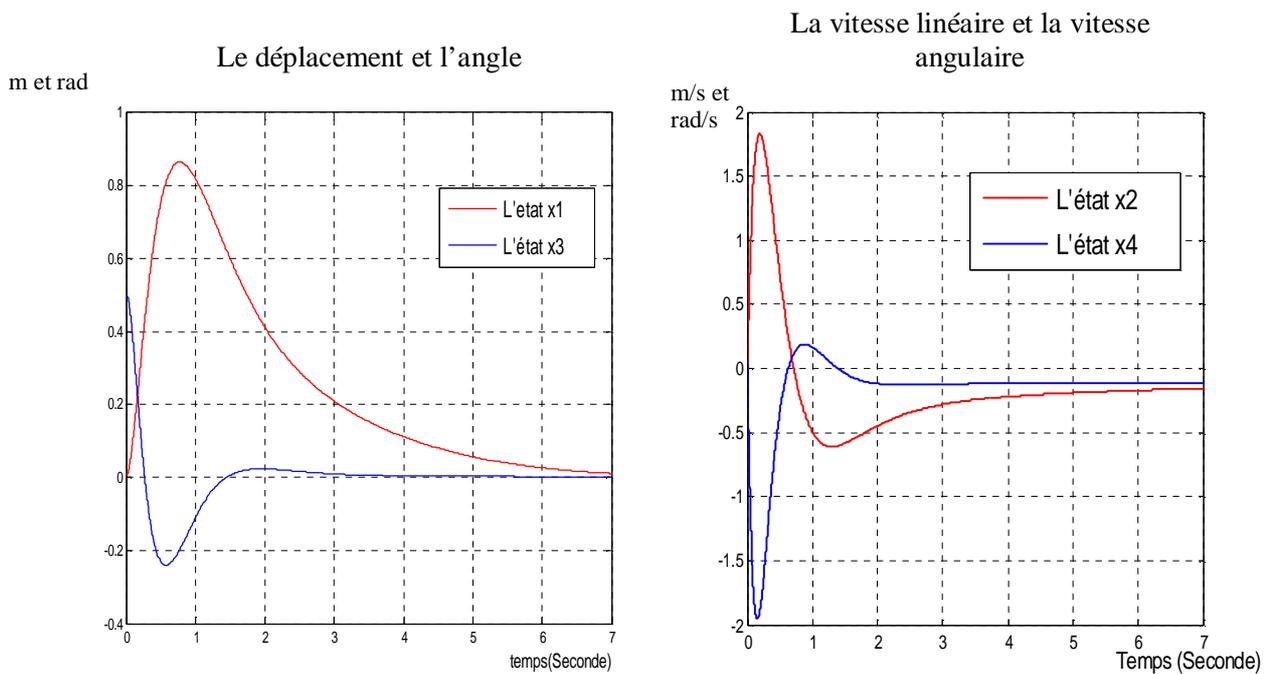


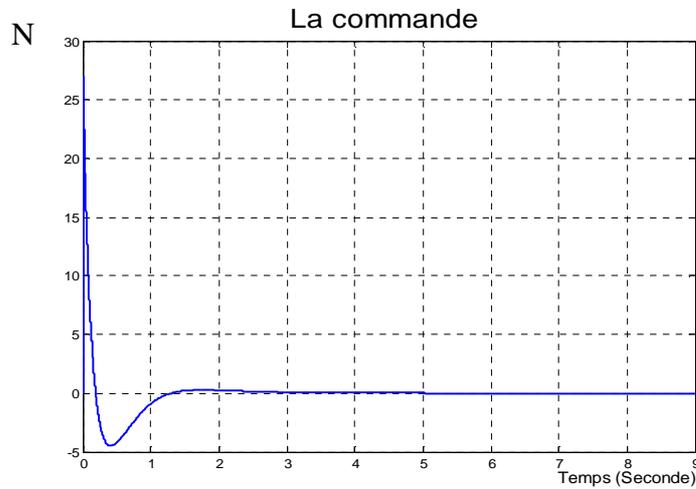


Les erreurs, dans ce cas là, atteignent les valeurs suivantes :

0.68 m pour le déplacement et 0.22 rad pour l'angle. Le système se stabilise à l'instant $t=7s$

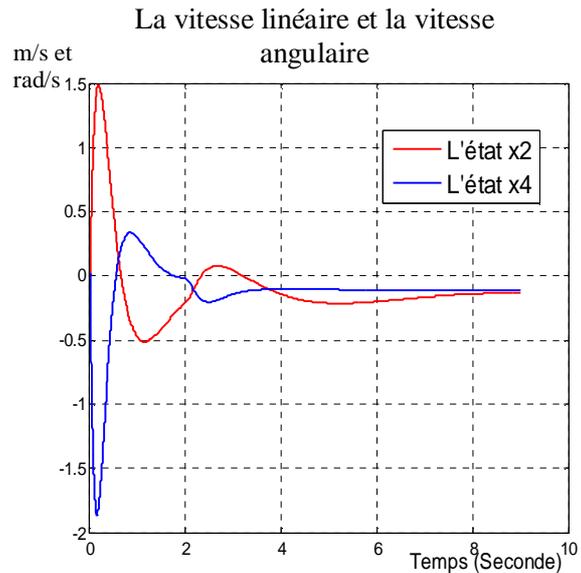
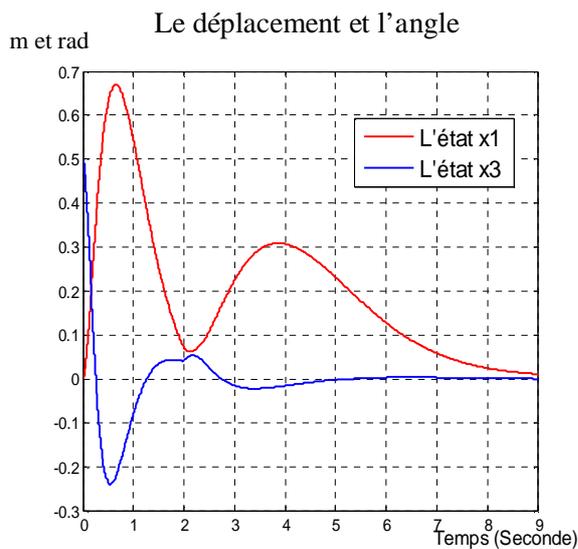
Et pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.15 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite à $t=0s$, nous avons les résultats de simulation suivants:

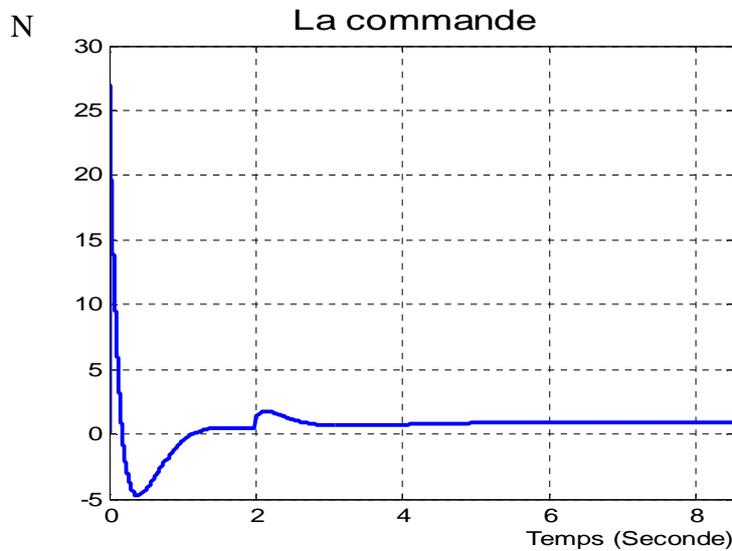




Le système est stabilisé après 7 secondes, et il est maintenu à la position verticale avec une erreur maximale de 0.82 m sur r et une erreur maximale de 0.22rad dans le sens négatif des q

Toujours pour les mêmes conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.15 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite à $t=2s$, les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes





Dans ce cas là le système bouclé prend 9 secondes pour ramener et maintenir les états à 0.

La commande H_∞ non linéaire, calculée par la méthode des approximations successives stabilise le système du pendule inversé et atténue l'effet des perturbations puisqu'elle maintient toujours, le pendule à la position verticale, et ceci pour différentes valeurs de perturbations et différentes valeurs initiales.

La seconde application est effectuée sur le modèle non linéaire de la machine synchrone à aimant permanent du chapitre 2.

III.5.2. Application de la commande H_∞ non linéaire sur la machine synchrone

Nous reprenons le modèle non linéaire de la dynamique des erreurs de la machine synchrone du chapitre 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + k(x_e) w \\ z = \begin{pmatrix} C_0 x_e \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (\text{III-40})$$

Nous rappelons que l'objectif de la commande H_∞ non linéaire, c'est d'avoir, tout en imposant une trajectoire angulaire de référence V_r (donnée dans le chapitre 2), une meilleure atténuation des variations des paramètres (donnée dans le chapitre 2), et une bonne poursuite de la trajectoire imposée. Ceci sera réalisé si tous les états de la dynamique des erreurs (ces

états représentent les erreurs dus aux perturbations et aux variations des paramètres) sont ramenés à 0.

L'origine $x_e = 0$ est un point d'équilibre stable lorsque $w = 0$.

Nous linéarisons d'abord le système non linéaire autour de l'origine :

$$\text{système linéaire : } \begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + kw \\ z = \begin{pmatrix} c_0 x_0 \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (\text{III-41})$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_2 & a_{10} & 0 \\ 0 & -a_{10} & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grace au Toolbox control de Matlab, Nous trouvons :

Le g optimal est $g = 3.3310^{-3}$

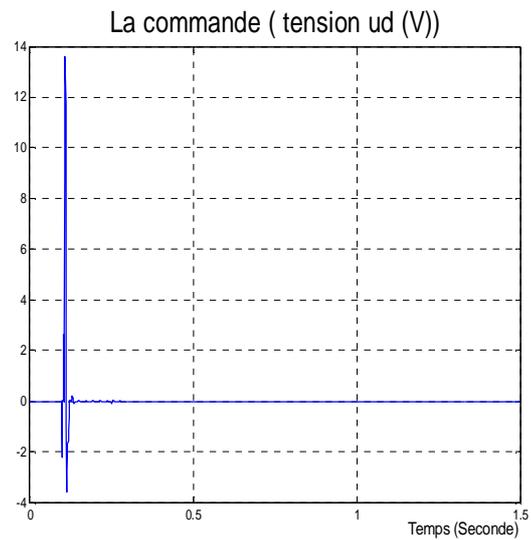
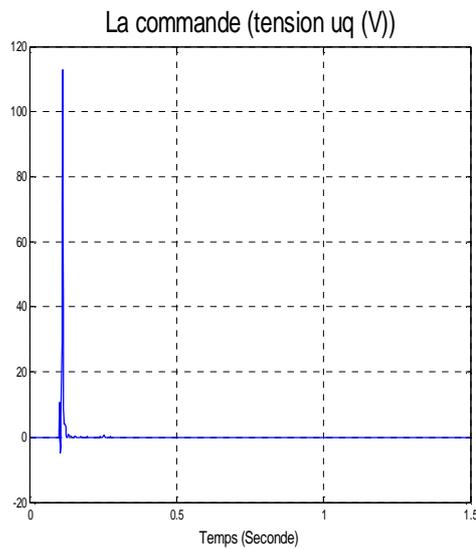
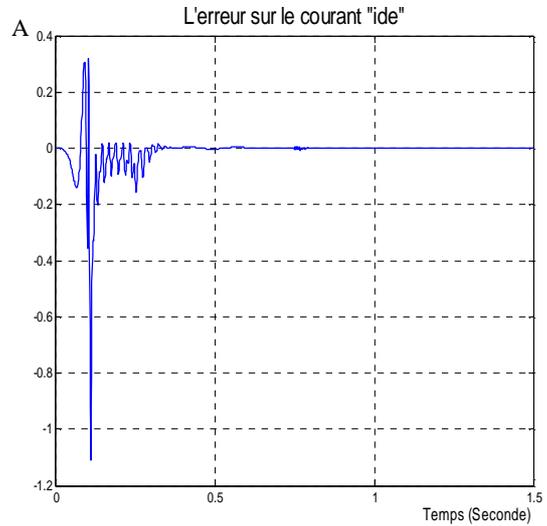
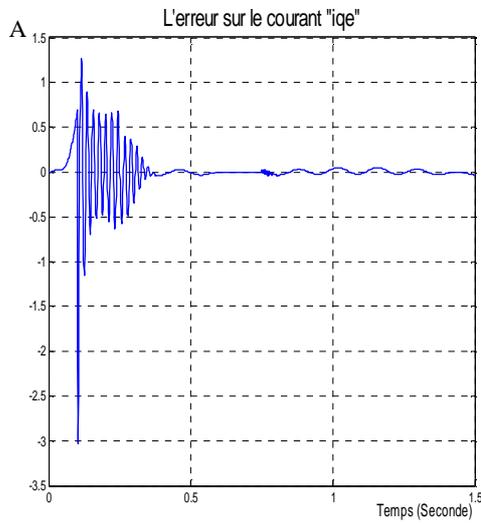
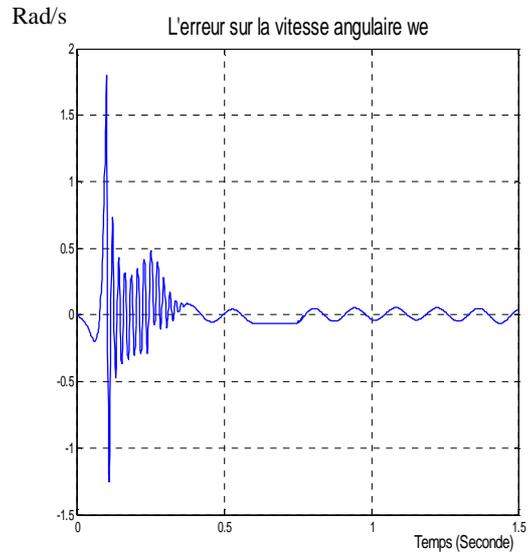
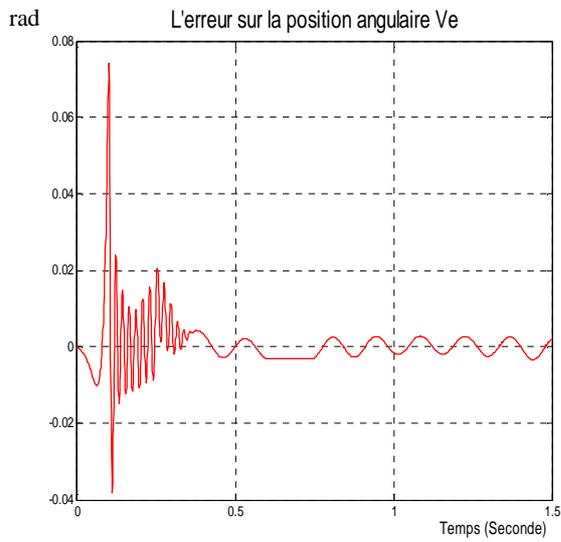
La solution de l'équation de Riccati (III-23) est égale à

$$X = \begin{bmatrix} 2.0010^{-3} & 2.3610^{-6} & 1.8710^{-6} & 0 \\ 2.3610^{-6} & 4.0710^{-9} & 3.0810^{-9} & 0 \\ 1.8710^{-6} & 3.0810^{-9} & 4.4810^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.3310^{-3} \end{bmatrix} \quad (\text{III-42})$$

L'objectif est la poursuite de la trajectoire imposée, et l'atténuation des effets des variations des paramètres (Donnée dans le chapitre 2) appliquées à des moments différents.

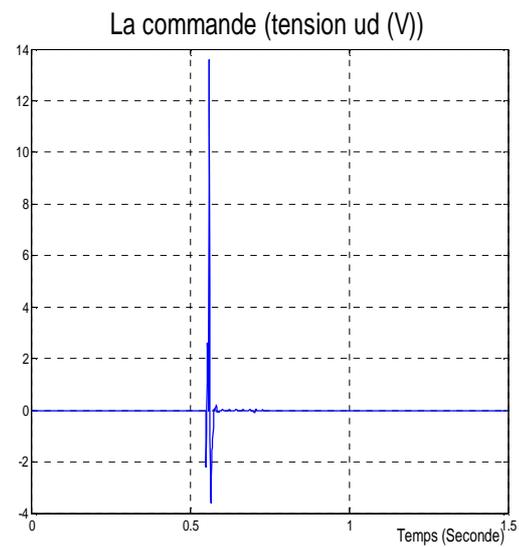
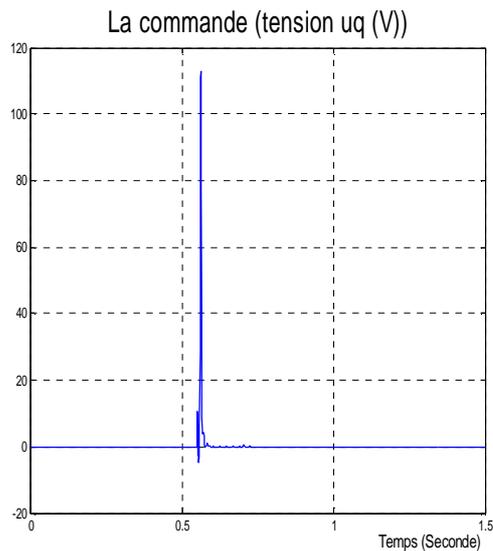
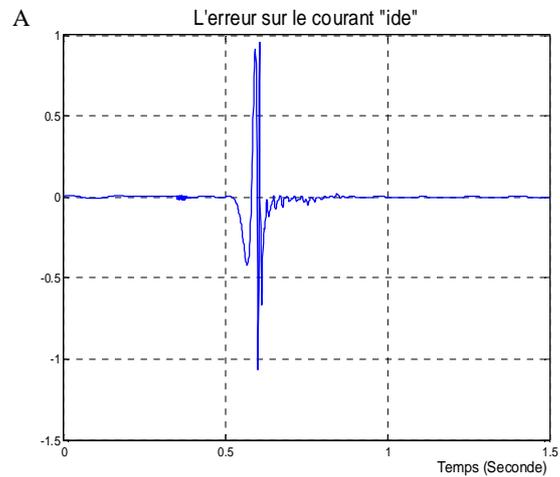
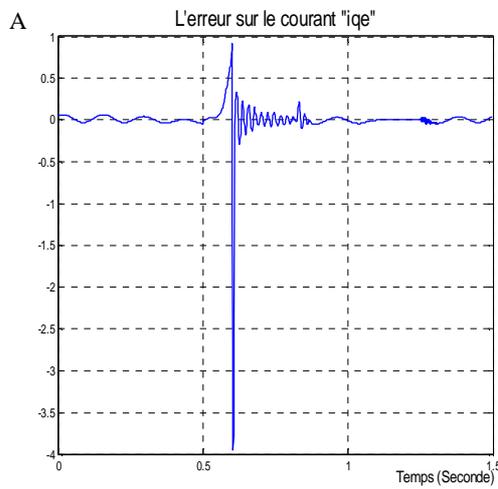
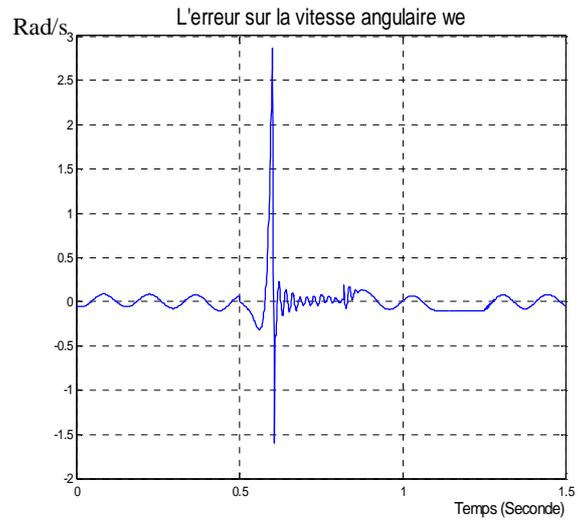
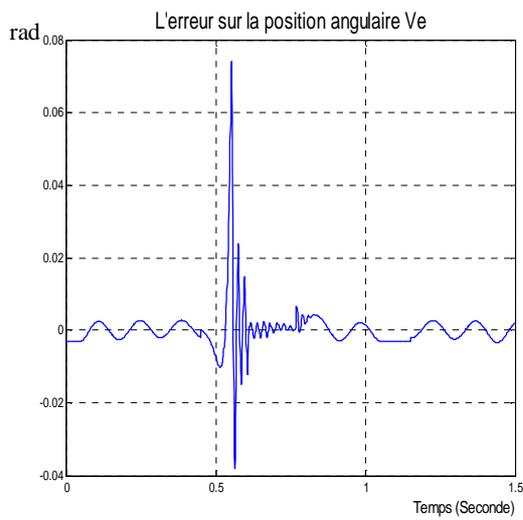
Les résultats de simulation de l'application de la commande H_∞ non linéaire calculée par l'algorithme des approximations successives, sur la dynamique des erreurs de la machine synchrone sont donnés par les figures suivantes :

Pour des paramètres qui varient à $t=0.07s$, nous avons les résultats suivants



L'erreur sur la trajectoire est inférieure à 0.08rad mais cette erreur devient 0.005rad après 0.5 seconde. Tout les autres états tendent vers 0 à l'instant $t=0.38$ seconde.

Pour des paramètres qui varient à $t=0.6s$, nous avons les résultats suivants



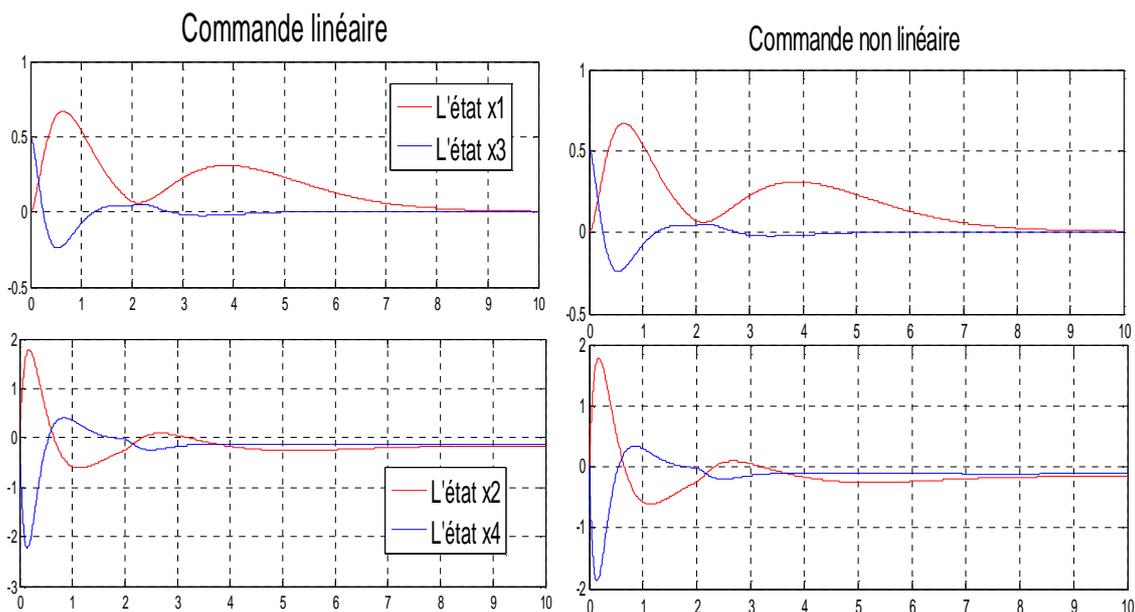
L'erreur sur la trajectoire à un maximum de 0.076 rad à $t=0.6$ seconde. Cette erreur devient 0.005rad à $t=0.87$. Dans ce cas aussi, les autres états sont ramenés à 0.

A partir de ces résultats, nous concluons que l'objectif de la commande H_∞ non linéaire, qui été d'avoir, tout en imposant une trajectoire angulaire de référence V_r , une meilleure atténuation des variations des paramètres est atteint. Ainsi qu'une bonne poursuite de la trajectoire imposée.

A partir des résultats de simulation des deux applications, la robustesse de la commande H_∞ non linéaire est mise en lumière, et cela pour des objectifs de stabilité, de rejet de perturbation et l'atténuation des effets des variations des paramètres.

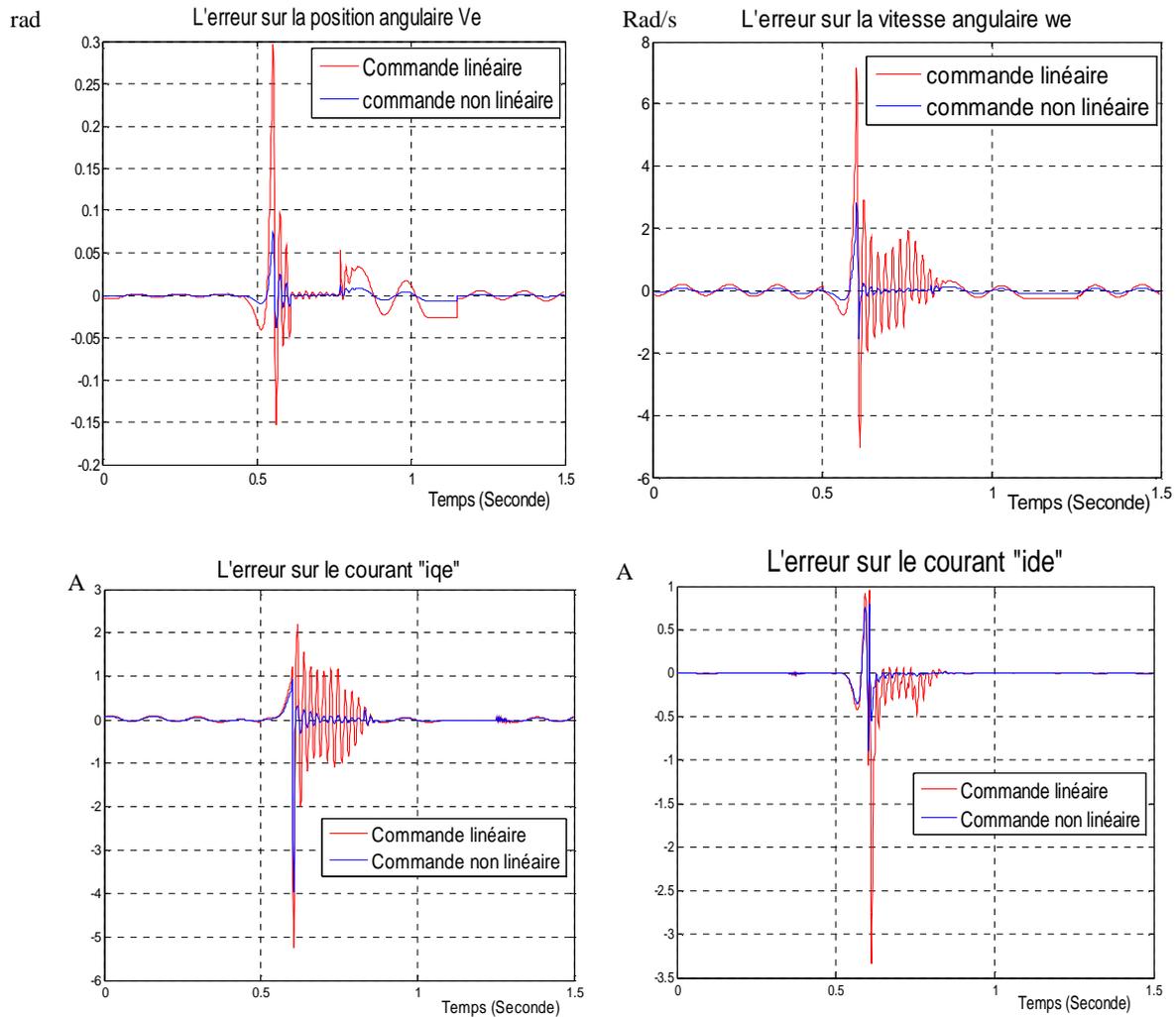
III.5.3. Comparaison des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire

Dans le but de comparer la robustesse des 2 commandes H_∞ linéaire et non linéaire, nous les appliquons au modèle du pendule inversé et ceci pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et une entrée exogène $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.15 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite à $t=2s$, les résultats de simulation des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire sont, alors donnés par les figures suivantes



Les deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire nous donnent les même résultats pour les états x_1 et x_3 , mais la commande H_∞ non linéaire donne de meilleurs résultats pour l'état x_4 .

Toujours dans le but de comparer les deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire, nous effectuons des simulations sur le modèle de la machine synchrone, pour des paramètres qui varient à $t=0.6s$. Les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes.



Les résultats de la commande H_∞ non linéaire sont remarquablement meilleurs que ceux de la commande H_∞ linéaire : l'erreur sur la trajectoire angulaire du cas non linéaire est de 0.07 rad pour une erreur de 0.3rad pour le cas linéaire. L'erreur sur la vitesse angulaire est de 2.8 rad/s dans le cas non linéaire. Cette valeur dépasse 7 rad/s dans le cas linéaire. Les erreurs sur les courants des deux axes sont clairement plus petites dans le cas non linéaire.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'aspect théorique de la commande H_∞ non linéaire, et nous avons présenté la méthode des approximations successives, qui

permet de donner une solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi. Deux applications ont été effectuées, et des tests de robustesse en été faits. Ainsi l'étude effectuée ici nous a permis de mettre en évidence l'intérêt et la robustesse de la commande H_∞ non linéaire. L'étude comparative des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire, permet de dire que la commande H_∞ non linéaire est plus robuste que la commande H_∞ linéaire.

L'algorithme des approximations successives n'est pas la seule méthode de calcul de la commande H_∞ non linéaire. Dans le chapitre qui suit nous proposons l'étude d'une autre méthode de calcul de la commande H_∞ non linéaire beaucoup plus récente, basée sur les Inégalités Matricielles Non Linéaires (NLMI).

CHAPITRE 4

RESOLUTION DU PROBLEME DE COMMANDE H_{∞} PAR LES INEGALITES MATRICIELLES

Introduction

Les problèmes de commande, d'identification, d'analyse robuste, et de synthèse par retour d'état peuvent être réduits, à des problèmes standards de corps convexe ou quasiconvexe impliquant un outil appelé inégalités matricielles linéaires (LMI).

L'histoire des inégalités matricielles linéaires dans l'analyse des systèmes dynamiques a commencé depuis plus de 100 ans, lorsque Lyapunov a introduit son fameux travail que nous appelons maintenant « théorie de Lyapunov » [Lya47]. Il démontre que l'équation différentielle,

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (\text{IV-1})$$

est stable si et seulement si, il existe une matrice définie positive P tel que :

$$A^T P + PA < 0 \quad (\text{IV-2})$$

La condition $P > 0$, $A^T P + PA < 0$ est appelée l'inégalité de Lyapunov, qui est une forme particulière des inégalités matricielles linéaires LMIs.

Le prochain développement majeure était dans les années 1940, dans l'Union Soviétique, lorsque **Lur'e** et **Postnikov** appliquent la méthode de Lyapunov à des problèmes pratiques d'ingénieur, particulièrement, Problème de stabilité d'un système de commande non linéaire [Lur'e 57]. Bien qu'ils n'aient pas parlé explicitement des inégalités matricielles linéaires, leurs critères de stabilité sont sous la forme des LMIs.

Puis, Dans les années 60, **Yakubovich**, **Popov**, **Kalman** [Yak67], et d'autres chercheurs se succèdent pour réduire la résolution des LMIs, qui a surgi dans le problème de **Lur'e**, en des critères graphiques simples ; en se basant sur le lemme de **Kalman-Yokubovich-Popov** (KYP lemma).

Jusqu'à 1971, les chercheurs ont développés plusieurs méthodes pour résoudre les LMI tel : La méthode graphique et les méthodes basées sur la résolution des équations de Ricatti et de Lyapunov [Will 71].

Au début des années 90, L'optimisation convexe notamment, l'optimisation convexe sous contraintes LMI, s'est fortement développée du fait de l'intérêt de ces problèmes d'optimisation en automatique [Boy94], des forts progrès au niveau de leur résolution

[NES93] et de la puissance de calcul de plus en plus importante pour un cout de plus en plus faible.

Le premier apport important de l'informatique à l'automatique fréquentielle a été la possibilité d'obtenir rapidement des tracés graphiques. Avec l'optimisation convexe, apparaît le second progrès important : synthèse rapide de lois de commande en mettant à profit la puissance de calcul disponible.

IV.1 Définition des Inégalité Matricielle Linéaire « LMI »

Ø Inégalités Matricielles Linéaires

Une inégalité matricielle linéaire est une inégalité de la forme

$$F(x) \stackrel{\Delta}{=} F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \mathbf{f} 0 \tag{IV-3}$$

Où $x \in R^n$ est la variable, et $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 0, \mathbf{L}, n$. L'ensemble $\{x / F(x) \mathbf{f} 0\}$ est convexe (la définition de la convexité est données dans l'annexe D).

Ø Système d'Inégalités Matricielles Linéaires

Un système d'Inégalités Matricielles Linéaires est un ensemble fini d'inégalités matricielles linéaires.

$$F_1(x) \mathbf{f} 0, \mathbf{L}, \text{ et } F_n(x) \mathbf{f} 0 \tag{IV-4}$$

Un système de LMIs peut être écrit sous une seule LMI comme suit

$$F(x) := \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & F_2(x) & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & F_n(x) \end{bmatrix} \mathbf{f} 0 \tag{IV-5}$$

Si les matrices F_i sont diagonales, la LMI $F(x) \mathbf{f} 0$ est un ensemble d'inégalités linéaires

IV.2. Problèmes sous forme LMI

Comme l'ont montré de très nombreux travaux, [Bambang 94], [Chilali 96a], [Geromel 98], [Gupta 96], [Masubuchi 95], et [Boyd 94], ou encore l'ouvrage didactique [El Ghaoui 00], la plupart des problèmes d'analyse pour les systèmes linéaires peuvent être formulés de façon à faire intervenir les LMIs.

Les deux principaux problèmes d'optimisation convexe que l'on va rencontrer dans ce mémoire sont le problème de faisabilité et le problème de minimisation d'une fonction linéaire sous contraintes LMI :

IV.2.1. La faisabilité :

Le test d'existence d'une solution x telle que $F(x) \preceq 0$ est appelé le problème de faisabilité. L'ensemble des variables x satisfaisant une inégalité matricielle s'appelle l'ensemble **faisable**. Suivant que cet ensemble est vide ou non, l'inégalité est dite non faisable ou faisable.

IV.2.2. L'optimisation :

soit $F : s \rightarrow R$, où $s = \{x / F(x) \preceq 0\}$, et R L'ensemble des réels Le problème de déterminer

$$V_{opt} = \inf_{x \in s} F(x) \quad (\text{IV-6})$$

est appelé le problème d'optimisation ayant une contrainte LMI.

Les problèmes d'optimisation convexe sous des contraintes LMI ne sont résolus numériquement de façon efficace que depuis le début des années 90 [NES94, Van96]. Ceci est le résultat d'une progression en optimisation convexe vers la fin des années quatre vingt. Des boites à outils ont été développées dans des logiciels généraux de calcul scientifique (voir par exemple sous SCILAB [NIK95] et sous MATLAB [EL95, Gah 95 Lab 02]) pour traiter cette classe de problème d'optimisation.

IV.3. Toolbox LMI de MATLAB

Il existe en effet des algorithmes numériques efficaces de résolution de cette classe de problèmes d'optimisation fondés sur les méthodes de point intérieur, [Boyd 94], [Nesterov 94]. Dans cette optique, résoudre en pratique un problème ne consiste pas à produire une formule analytique, mais à formuler un problème d'optimisation convexe en utilisant le formalisme LMI. Dans ce cas, la solution optimale est globale et peut être obtenue en temps polynomial en utilisant les différentes boîtes à outils proposées dont certaines offrent des interfaces conviviales avec MATLAB, [Alizadeh 97], [El Ghaoui 95], [Gahinet 95], [Vandenberghe 94], [Wu 96]. Ces outils reposent essentiellement sur la notion d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) ont permis de généraliser les outils les plus récents de programmation linéaire sur le cône des matrices définies positives.

Grâce au toolbox LMI de MATLAB, les solutions des deux problèmes de LMI sont calculées de manière facile et efficace.

IV.3.1. Spécification des LMIs

Dans MATLAB, une LMI est représentée dans un seul vecteur, comprenant la structure et la dimension de la LMI. Le MATLAB-lab touche à tous les systèmes de LMI qui prennent la forme

$$N^T L(X_1, \mathbf{L}, X_K) N + M^T R(X_1, \mathbf{L}, X_K) M \quad (\text{IV-7})$$

où les X_i sont les variables, N et M sont des matrices carrées de même dimension, et $L(\bullet)$ et $R(\bullet)$ sont des matrices symétriques ayant la même structure.

Une LMI de ce type est spécifiée, dans MATLAB, à l'aide des commandes suivantes :

- Ø *lmiedit* : qui fait appel à une interface graphique qui facilite l'implémentation de la LMI.
- Ø *lmivar* : pour spécifier les variables inconnues et leurs structures.
- Ø *lmiterm* : pour spécifier les termes d'une LMI.
- Ø *setlmis* : pour initialiser une LMI.
- Ø *getlmis* : permet d'avoir une représentation interne d'une LMI.

La spécification d'une LMI doit être initiée par la commande *setlmi* et terminée par la commande *getlmi*

IV.3.2. Résolution d'une LMI

Les commandes qui nous permettent de résoudre les LMIs sont :

- Ø *feasp* : permet de calculer une solution du problème de faisabilité.
- Ø *mincx* : permet de calculer une solution du problème d'optimisation.
- Ø *gevp* : permet de calculer une solution du problème de valeur propre généralisée.

IV.4. Utilisation des LMIs dans les commandes H_∞ linéaire et non linéaire

Alors que les méthodes basées sur les équations de Riccati supposent le calcul analytique d'une solution, l'émergence des LMIs modifie la façon de présenter et de résoudre les problèmes en Automatique. Une grande variété des problèmes est envisagée sur cette base de réflexion. Certains résultats ont donné lieu aux publications [Arzelier 00b], [Arzelier 99], [Peaucelle 99c], [Peaucelle 98a].

IV.4.1. Résolution du problème H_∞ standard par les Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)

Apparue plus récemment [Gah94] [GA94] [GI94], la synthèse par LMI fournit une autre façon de résoudre le problème standard. Elle est plus générale, dans la mesure où elle ne nécessite que la seule hypothèse H1 (parmi les hypothèses de la méthode basée sur les équations de Riccati du chapitre 2). Nous limiterons au cas où la condition $D_{yu} = 0$ est vérifiée. Dans le cas contraire, on résout tout d'abord le problème en considérant des mesures fictives \hat{y} correspondant à ce cas, et on modifie à posteriori le correcteur obtenu en effectuant le changement de variable $y = \hat{y} - D_{yu}u$ dans ses équations d'état.

Nous tenons à signaler, qu'à ce jour, les formulations en équation de Riccati ne nous ont pas permis de pousser les résultats aussi loin qu'avec les méthodes LMI. Cependant, les formulations en équation de Riccati nous semblent utiles en tant que méthodes alternatives aux LMI et par leur proximité avec la théorie LQG qui donne un sens physique à un certain nombre de résolutions.

Considérons un système donné par la représentation d'état suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-8})$$

avec $x(t)$ le vecteur d'état du système, $e(t)$ le vecteur d'erreur, $y(t)$ le vecteur de sortie du système, $w(t)$ le vecteur des entrées exogènes et $u(t)$ le vecteur des entrées de commande du système.

La résolution du problème, par la méthode basée sur les LMIs n'est possible que sous l'hypothèse suivante :

H1) (A, B_u) est stabilisable et (C_y, A) est détectable. Cela garantit l'existence d'une loi de commande K qui stabilise le système en boucle fermé.

La résolution du problème H_∞ utilisant les LMIs s'effectue en deux étapes. En premier lieu, la faisabilité du correcteur est testée par le lemme borné réel (connu sous son appellation anglaise : Bounded Real Lemma (BRL)). En deuxième lieu, le correcteur est calculé.

Ø Lemme borné réel (BRL) [Lar09] :

Pour un système linéaire $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\|D + C(SI - A)^{-1}B\|_\infty \leq \gamma$ et $\Re e(\lambda_1(A)) < 0$ (IV-9)

ii) il existe une solution $X \geq 0$ de l'inégalité matricielle linéaire (LMI)

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{IV-10})$$

IV.4.1.1. La faisabilité [GA94]

La faisabilité d'un système de la forme (IV-8) est testée en utilisant le résultat suivant :

Théorème : faisabilité [GA94] :

Sous l'hypothèse H1 et la condition $D_{yu} = 0$, le problème H_∞ standard a une solution si et seulement si deux matrices symétriques R et S existent, vérifiant les trois inégalités matricielles suivantes

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{mw} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A R + R A^T & R C_e^T & B_w \\ C_e R & -g I_{ne} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{ew}^T & -g I_{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{mw} \end{bmatrix} \mathbf{P} 0 \quad (IV-11a)$$

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{ne} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + S A & S B_w & C_e^T \\ B_w^T S & -g I_{mw} & D_{ew}^T \\ C_e & D_{ew} & -g I_{ne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{ne} \end{bmatrix} \mathbf{P} 0 \quad (IV-11b)$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (IV-11c)$$

où N_R et N_S constituent une base des noyaux de $(B_u^T \ D_{eu}^T)$ et $(C_y \ D_{yw})$ respectivement.

Dans cette approche il est possible de calculer le g minimum directement. En effet, au lieu de réduire itérativement la borne supérieure de g , on peut rechercher directement la valeur optimale de g , en résolvant le problème suivant qui est un problème d'optimisation convexe.

$$\min_{R=R^T, S=S^T} g \quad \text{sous les contraintes des LMIs (IV-11)} \quad (IV-12)$$

IV.4.1.2. Réalisation du correcteur

Le correcteur recherché à la forme particulière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y(t) \\ u(t) = C_c(t) \end{cases} \quad (IV-13)$$

Avec $x_c \in R^r$ le vecteur d'état du correcteur, $y(t)$ la sortie du système, et $u(t)$ le vecteur de commande.

La fonction de transfert en boucle fermé $F_b(P, K)$ du système (IV-8) a pour représentation d'état:

$$F_b(P, K) : \left[\begin{array}{cc|c} A & B_u C_c & B_w \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_e & D_{eu} C_c & D_{ew} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] \quad (IV-14)$$

où

$$K : \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array} \right] \quad (IV-15)$$

désigne la représentation d'état du correcteur à synthétiser.

Afin de séparer les matrices du système de celles du correcteur, regroupons ces dernières dans une nouvelle matrice :

$$\Theta : \left[\begin{array}{cc} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array} \right] \quad (IV-16)$$

La représentation d'état du système bouclé devient alors,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cc} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \bar{B} \\ \hline \bar{D}_{eu} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{cc} \bar{C} & \bar{D}_{yw} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B_w \\ 0 & 0_k & 0 \\ \hline C_e & 0 & D_{ew} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & B_u \\ \hline I_k & 0 \\ 0 & D_{eu} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline C_y & 0 \\ 0 & D_{yw} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (IV-17)$$

La relation (IV-17) montre que les matrices de la boucle fermée dépendent de façon affine de la variable du correcteur Θ . Toutes les autres matrices ne comportent que les données du système.

Comme conséquence du BRL, La stabilité de $F_b(P, K)$ et la contrainte de la norme H_∞ peuvent se résumer à l'inégalité matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc} A_{cl}^T X + X A_{cl} & X B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -g I_{m1} & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -g I_{p1} \end{array} \right] \mathbf{p} 0 \quad (IV-18)$$

où $X \in \mathfrak{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ représente la matrice de Lyapunov définie positive $X \mathbf{f} 0$. Les matrices inconnues de l'inégalité (IV-18) sont X et les matrices du correcteur. Par conséquent, (IV-18) n'est pas une LMI, à cause du produit entre les deux variables inconnues. Une telle inégalité

est une « Inégalité Matricielle Bilinéaire », plus connue par son appellation anglaise « Bilinear Matrix Inequality BMI ». Les BMI sont des inégalités difficiles à résoudre [Lar02].

L'inégalité (IV-18) peut être transformée en une LMI en suivant les étapes suivantes :

Ø Une matrice X qui convient peut être obtenue en effectuant une décomposition en valeurs singulières de $I_n - RS$, d'où on déduit deux matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de rang plein vérifiant :

$$M N^T = I_n - R S \quad (IV-19)$$

Qui permettent de déterminer la matrice

$$X = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^\dagger R N \end{bmatrix} \quad (IV-20)$$

Où M^\dagger désigne la pseudo inverse de M ($M^\dagger M = I_r$).

Ø En remplaçant X par sa valeur dans l'inégalité (IV-18) alors cette dernière devient une LMI en A_c, B_c, C_c, D_c , dont la résolution fournit donc le correcteur.

IV.4.1.3. Synthèse avec contrainte sur l'ordre du correcteur

La méthode de résolution exposée dans cette partie conduit à des correcteurs d'ordre égal à celui de la matrice $P(s)$, qui comprend le modèle du système à régler augmenté par les filtres exprimant les objectifs de synthèse. Or, on conçoit aisément que cet ordre, qui peut être très élevé n'est pas forcément nécessaire pour obtenir une commande satisfaisante.

La formulation par LMI permet d'envisager la synthèse H_∞ avec une contrainte sur l'ordre du correcteur. Soit $r \ll n$ l'ordre du correcteur recherché. Il faut déterminer des matrices R et S solutions des LMI (IV-11) et satisfaisant également la contrainte

$$\text{rang} \begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \leq n + r \Leftrightarrow \text{rang} (I_n - R S) \leq r \quad (IV-21)$$

La recherche de correcteur d'ordre réduit solution du problème standard pour une valeur donnée de g amène à considérer le problème suivant :

$$\min_{R=R, S=S^T} \text{rang} (I_n - R S) \quad \text{sous Les LMIs (IV-11)} \quad (IV-22)$$

Le problème de synthèse avec réduction d'ordre est non convexe à cause du produit des deux variables R et S qui intervient dans la dernière contrainte.

Dans la partie qui suit, nous allons présenter une autre méthode de calcul de la commande H_∞ non linéaire, plus récente, qui est la méthode des **Inégalités Matricielles Non Linéaires** (NLMI)

III.4.2. Résolution du problème de commande H_∞ non linéaire via les Inégalités Matricielles Non Linéaires

Devant le succès à la fois sur les aspects théoriques et pratiques de la méthode des LMI pour le calcul de la commande H_∞ , une extension aux systèmes non linéaires a été proposée par [YiPa99] et été développée par [Asep03].

Les inégalités matricielles non linéaires sont des inégalités matricielles dont les éléments qui la constituent sont non linéaires.

III.4.2.1. Méthode des inégalités matricielles non linéaires NLMI [YiPa99] [Asep03]

Cette méthode est plus récente, elle est basée sur des Inégalités Matricielles Non Linéaires. Elle est développée pour une classe particulière des systèmes non linéaires, appelée système non linéaire à paramètres variants (LPVS Linear Parameter variable system), qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B_1(x)w \\ z = C_1(x)x + D_{11}(x)w \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

x est le vecteur d'état du système, z est le vecteur de sortie du système, w est le vecteur des entrées exogènes. La variable « temps » a été ôtée dans le but de simplifier l'écriture.

Avant de parler des résultats sur les NLMI, nous allons parler du Complément de Schur, qui est un résultat primordial pour la résolution des NLMIs.

Ø Complément de Schur

Soit F une fonction telle que
$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-24})$$

où $F_{11}(x)$ est carrée. Alors $F(x) \mathbf{f} 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} F_{11}(x) \mathbf{f} 0 \\ F_{22}(x) - F_{12}F_{11}^{-1}F_{21} \mathbf{f} 0 \end{cases} \quad (\text{IV-25})$$

Tout comme pour le cas linéaire, le problème de commande H_∞ non linéaire n'est soluble que si les conditions de solubilité données dans la partie suivante sont vérifiées.

IV.4.2.2. Conditions de solubilité du problème de commande H_∞ non linéaire [YiPa99] [Asep03]

La commande H_∞ non linéaire est soluble s'ils existent deux fonctions matricielles continues positives définies Y et Z avec $Y, Z : X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tel que

$$\begin{bmatrix} N_B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV-26a})$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Z + ZA & ZB_1 & C_1^T \\ B_1^T Z & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV-26b})$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{IV-26c})$$

où N_B et N_c sont des matrices dont les colonnes forment des bases d'espaces nuls de $B_1(x)$ et $C_1(x)$ respectivement.

Le théorème suivant permet de conclure vis à vis de la faisabilité d'un problème de commande H_∞ non linéaire

Théorème [Asep 03]

Le problème de commande H_∞ d'un système non linéaire est faisable si le problème H_∞ linéaire du même système linéarisé à l'origine est faisable.

Les résultats suivants nous donnent les conditions de stabilité d'un système non linéaire (IV-27), sous forme d'inégalité matricielle non linéaire.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) + K(x)w \end{cases} \quad (\text{IV-27})$$

x est le vecteur d'état du système, z est le vecteur de sortie du système, w est le vecteur des entrées exogènes.

Proposition [Asep03] :

Le système donné par (IV-27) est asymptotiquement stable et a un gain $L_2 \leq g$ s'il existe une fonction positive définie $V: X \rightarrow R^+$ telle que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \gamma^{-1} h^T(x) h(x) & \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) + \gamma^{-1} h^T(x) K(x) \\ \frac{1}{2} g^T(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \gamma^{-1} K^T(x) h(x) & \gamma^{-1} K^T(x) K(x) - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV-28})$$

L'inégalité (IV-28) prend la forme suivante, pour les systèmes de la forme (IV-23)

$$\begin{bmatrix} x^T (A^T P + P A + g^{-1} C^T C) x & x^T (P B + g^{-1} C^T D) \\ (B^T P + g^{-1} D^T C) x & g^{-1} D^T D - g I \end{bmatrix} \mathbf{p} 0 \quad (\text{IV-29})$$

Où $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2 x^T P(x)$ et $P(x) = P^T(x) : X \rightarrow R^{n \times n}$ (IV-30)

Cette dernière inégalité matricielle non linéaire n'est satisfaite que si l'inégalité ci dessous est satisfaite

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + g^{-1} C^T C & P B + g^{-1} C^T D \\ B^T P + g^{-1} D^T C & g^{-1} D^T D - g I \end{bmatrix} \mathbf{p} 0 \quad (\text{IV-31})$$

pour tout x

Théorème [Asep03] [Naj00]

Nous considérons le système donné par l'équation (IV-23)

Pour $P(x) = P^T(x) : X \rightarrow R^{n \times n}$ les deux points suivants sont équivalents

i) $P(x)$ satisfait (IV-31)

ii) $P(x)$ satisfait $\begin{bmatrix} A^T(x)P(x) + P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -gI & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -gI \end{bmatrix} \mathbf{p} 0$ (IV-32)

pour tout x

et s'il existe une fonction V telle que $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ alors le système a un gain L_2 $\mathbf{p} \mathbf{g}$ et

il est asymptotiquement stable.

A partir de ce résultat l'équation (IV-28) peut être écrite comme suit:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) & \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) & h(x)^T \\ \frac{1}{2} g(x)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x} & -gI & K(x)^T \\ h(x) & K(x) & -gI \end{bmatrix} \quad (\text{IV-33})$$

Contrairement aux cas linéaires, ce problème n'est pas de dimension fini, cependant si les matrices qui forment cette NLMI sont bornées, alors on n'a qu'à résoudre un nombre fini des LMIs.

En effet si $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $K(x)$ sont bornées, alors il suffit de considérer des x_i dans l'intervalle de bornéture et on résout des LMIs qui correspondent aux $f(x_i)$, $g(x_i)$, $h(x_i)$ et $K(x_i)$, pour les x_i considérées.

La solution de la NLMI est la solution commune de toute les LMIs.

Ainsi la commande H_∞ basée sur les NLMI est la suivante

$$u = -\frac{1}{2} g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} \quad (\text{IV-34})$$

IV.4.3. Applications de la commande H_∞ basée sur les LMI et NLMI

Dans le but de tester la robustesse des commandes H_∞ linéaire et non linéaire, calculées par les méthodes basées sur les LMIs et NLMIs, nous effectuons les deux applications des chapitres précédents.

IV.4.3.1. Applications de la commande H_∞ basée sur les LMI et NLMI sur un modèle non linéaire d'un pendule inversé

Nous reprenons le modèle du pendule inversé des chapitres précédents.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \\
 y &= \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & w_n \end{bmatrix} w \\
 z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ w_u \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \tag{IV-35}$$

Notre objectif est de stabiliser le système de pendule inversé et de le maintenir à la position verticale. Pour se faire nous appliquons les commandes H_∞ calculées par les méthodes des LMIs et NLMIs respectivement, par simulation, sur le système de ci dessus, pour différentes conditions initiales et perturbations et cela dans le but de tester la robustesse de ces commandes.

Nous commençons par le calcul de la commande H_∞ linéaire via les LMIs ; pour cela nous linéarisons le système autour de l'origine.

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24.1314 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} w \\
 y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\
 z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \right. \tag{IV-36}$$

Avec la commande *hinflmi* , la faisabilité du problème est vérifiée, et le contrôleur central H_∞ est directement donné.

La commande est alors $u = 14.6506 x_1 - 0.3407 x_2 + 1.7661 x_3 - 245.6366 x_4$

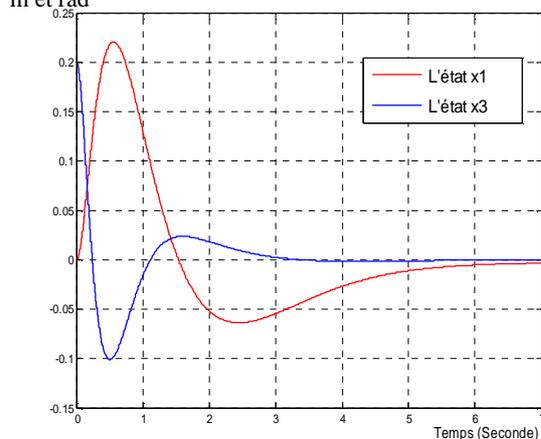
Pour le calcul de la commande H_∞ non linéaire via les NLMIs, nous commençons par construire la NLMI (IV-33) qui permet de résoudre ce problème.

Les fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $K(x)$ du pendule inversé, sont bornées, alors il suffit de considérer un intervalle de bornéture pour les θ . Soit $\theta_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cette intervalle de bornéture ; nous considérons quelques valeurs des θ : Soit $\theta_i = \left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{5}, 0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$ et nous construisons les LMIs en fonction des $f(\theta_i)$, $g(\theta_i)$, $h(\theta_i)$ et $K(\theta_i)$, qui correspondent aux θ_i considérées.

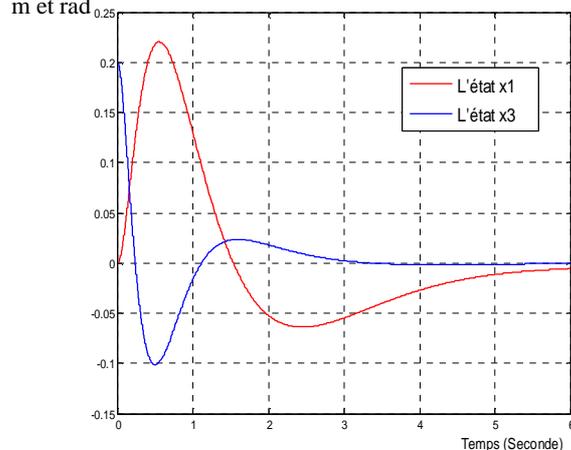
La solution commune de toutes ces LMIs est la solution de la NLMI que nous utiliserons pour calculer le contrôleur en la remplaçant dans (IV-34).

L'application, des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire calculées, sur le modèle du pendule inversé pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène nulle, aboutie aux résultats suivants :

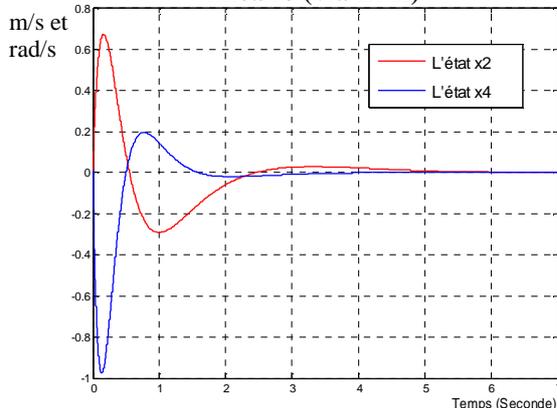
Le déplacement et l'angle dans le cas de commande linéaire (via LMI)



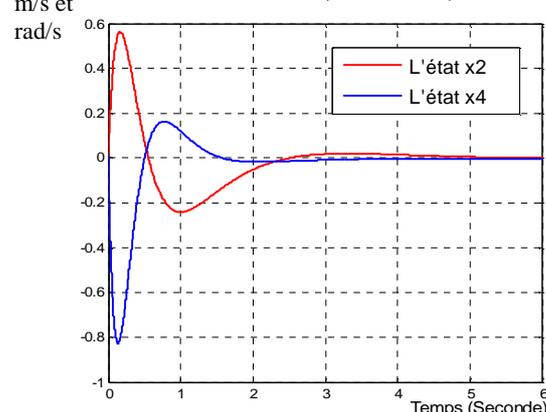
Le déplacement et l'angle dans le cas de commande non linéaire (via NLMI)



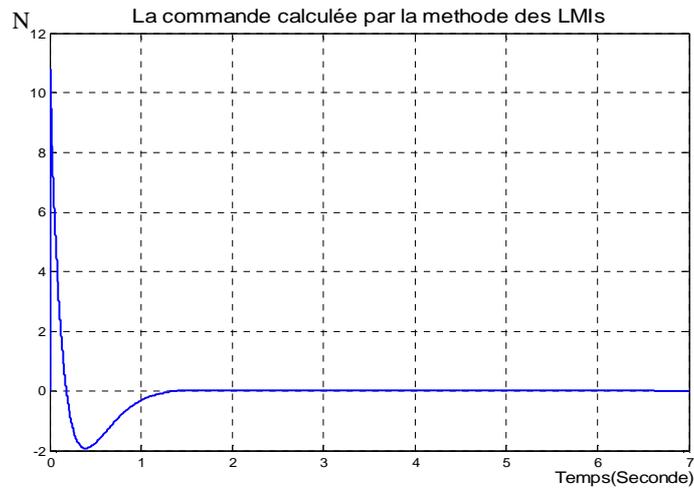
La vitesse linéaire et la vitesse angulaire dans le cas de commande linéaire (via LMI)



La vitesse linéaire et la vitesse angulaire dans le cas de commande non linéaire (via NLMI)



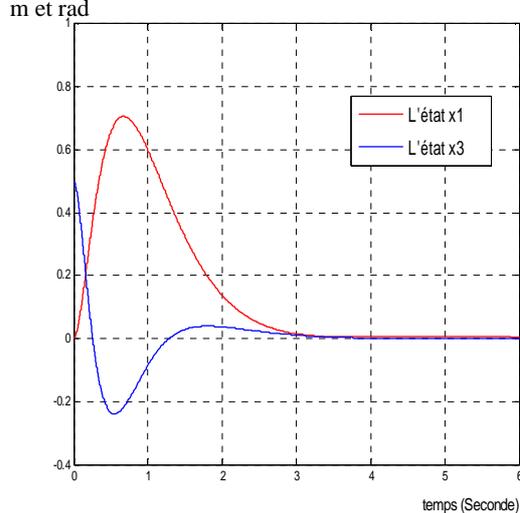
La commande représente la force qu'il faut appliquée pour maintenir le pendule à la position verticale. Elle est donnée par la figure suivante



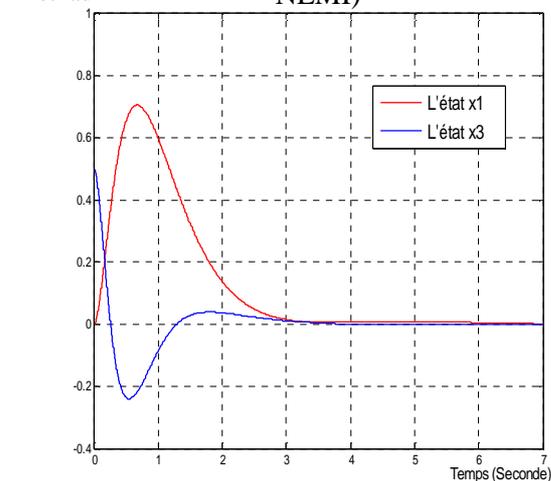
Les deux commandes, aboutissent aux mêmes résultats pour les états x_1 et x_3 . Effectivement la valeur maximale du déplacement est de 0.22m pour les deux commandes. Et la valeur maximale de l'angle est de 0.1 rad aussi pour les deux commandes. Mais pour les états x_2 et x_4 , la commande non linéaire abouti a de meilleurs résultats que la commande linéaire : pour l'état x_2 : 0.68 m/s cas linéaire \rightarrow 0.58 m/s cas non linéaire
 pour l'état x_4 : 0.99 rad/s cas linéaire \rightarrow 0.81 rad/s cas non linéaire

Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, L'application des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire donne les résultats suivants :

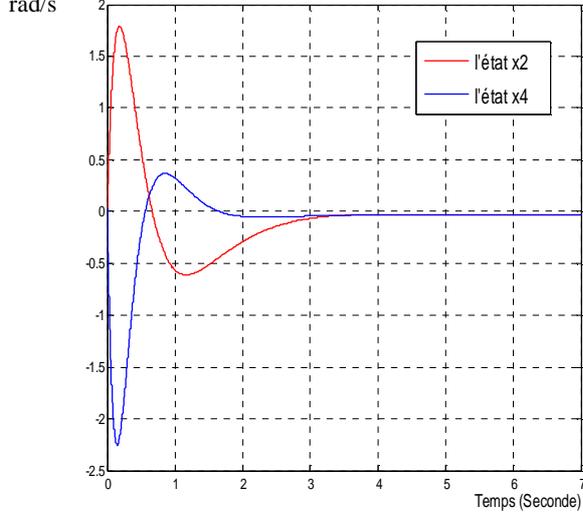
Le déplacement et l'angle dans le cas de commande linéaire (via LMI)



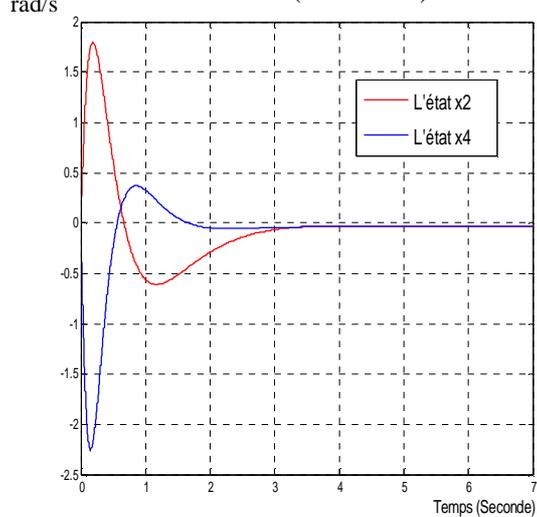
Le déplacement et l'angle dans le cas de commande non linéaire (via NLMI)



La vitesse linéaire et la vitesse angulaire dans le cas de commande linéaire (via LMI)



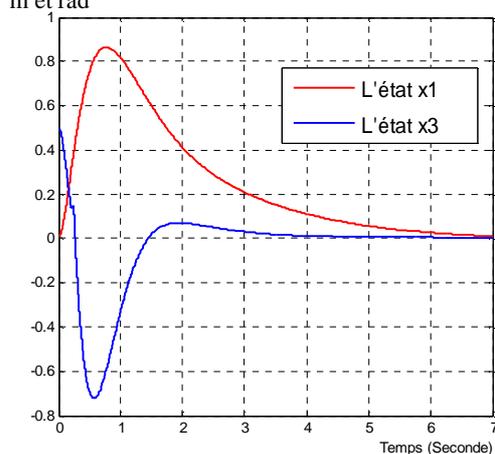
La vitesse linéaire et la vitesse angulaire dans le cas de commande non linéaire (via NLMI)



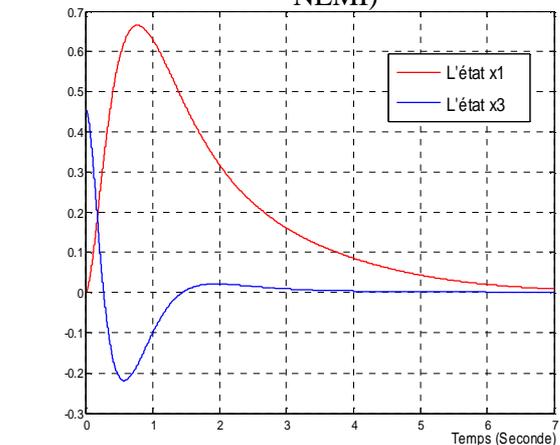
Nous avons les valeurs maximales dans le cas de commande linéaire sont égales aux valeurs maximales dans le cas non linéaire (déplacement maximal=0.7m et l'angle maximal =0.22rad).

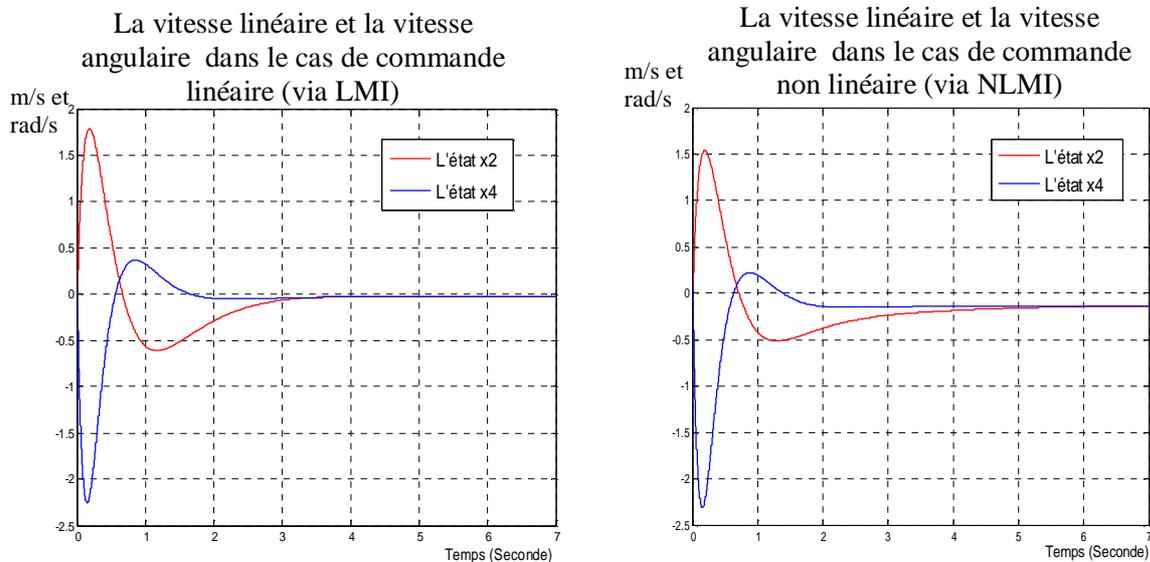
L'application, cette fois, est faite pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour la perturbation $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.15 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, nous avons les résultats de simulation suivants :

Le déplacement et l'angle dans le cas de commande linéaire (via LMI)



Le déplacement et l'angle dans le cas de commande non linéaire (via NLMI)





La commande non linéaire aboutie à de meilleurs résultats que ceux de la commande linéaire :

Nous avons : pour le déplacement : 0.88m (cas linéaire) et 0.67 m (cas non linéaire)

Pour l'angle : 0.7rad (cas linéaire) et 0.21 rad (cas non linéaire)

Pour la vitesse linéaire : 1.8 m/s (cas linéaire) et 1.5 m/s (cas non linéaire)

Pour la vitesse angulaire : 2.2 rad/s (cas linéaire) 2.2 rad/s (cas non linéaire)

D'après les résultats de simulation de cette application, les deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire, calculées par les méthodes basées sur les LMI et NLMI respectivement ; stabilisent le système et atténuent l'effet des perturbations puisqu'elles maintiennent toujours, le pendule à la position verticale. La commande H_∞ non linéaire aboutie à deux meilleurs résultats que la commande H_∞ linéaire.

IV.4.3.2. Application sur un moteur synchrone

Nous reprenons le modèle non linéaire de la machine synchrone du chapitre 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + k(x_e) w \\ z = \begin{pmatrix} C_0 x_e \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (IV-37)$$

Nous rappelons que l'objectif est d'avoir, tout en imposant une trajectoire angulaire de référence V_r , une bonne poursuite de celle-ci et une meilleure atténuation des variations des paramètres. Ceci sera réalisé si tous les états de la dynamique des erreurs (ces états

représentent les erreurs dus aux perturbations et aux variations des paramètres) sont ramenés à 0.

Nous commençons par le calcul de la commande H_∞ linéaire via les LMIs ; pour cela nous linéarisons le système autour de l'origine.

$$\text{système linéaire : } \begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + k w \\ z = \begin{pmatrix} C_0 x_0 \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (\text{IV-38})$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_2 & a_{10} & 0 \\ 0 & -a_{10} & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec la commande *hinflmi* , la faisabilité du problème est vérifiée, et le contrôleur central H_∞ est directement donné.

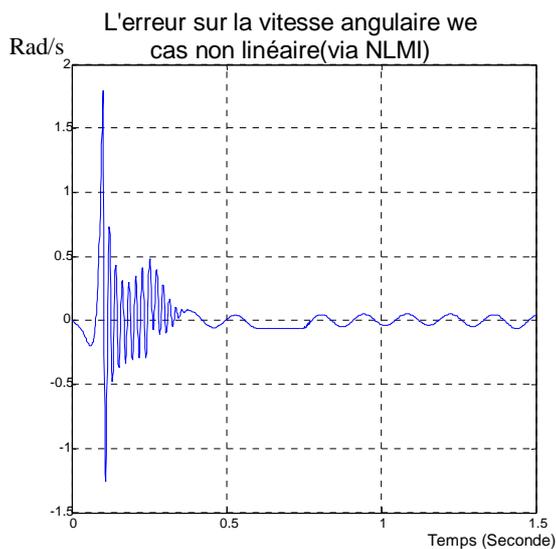
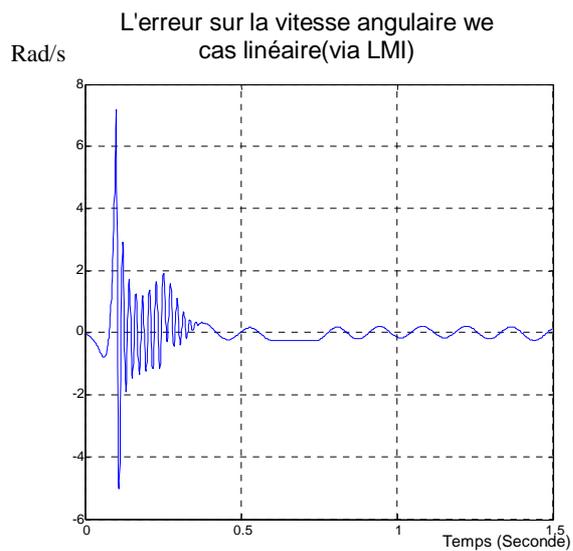
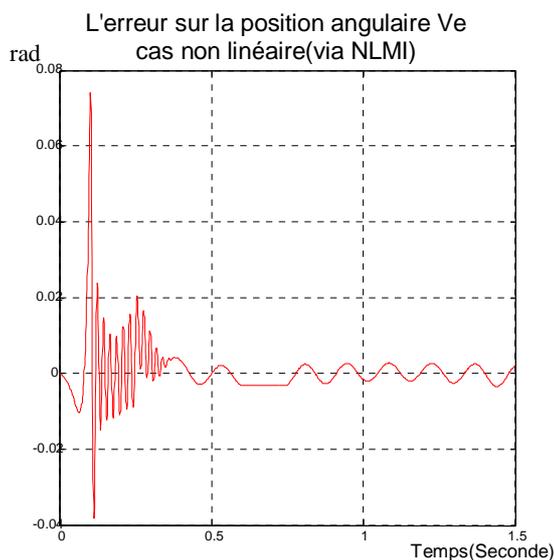
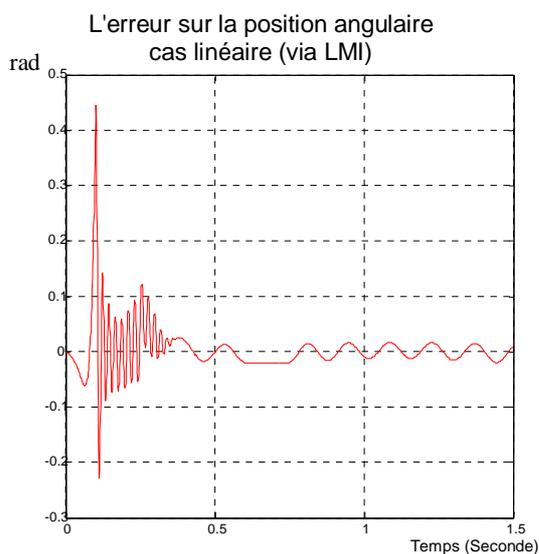
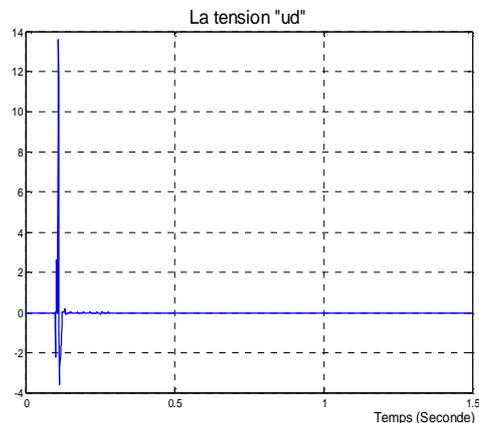
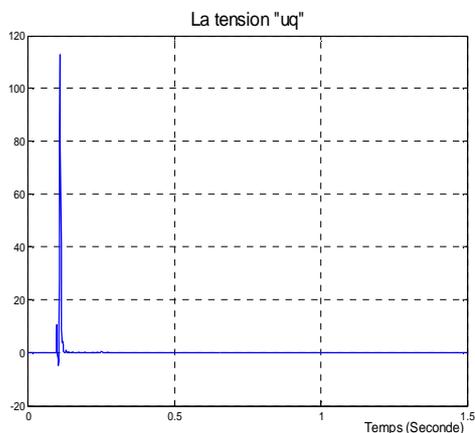
La commande H_∞ est $u = \begin{bmatrix} ud \\ uq \end{bmatrix}$ où

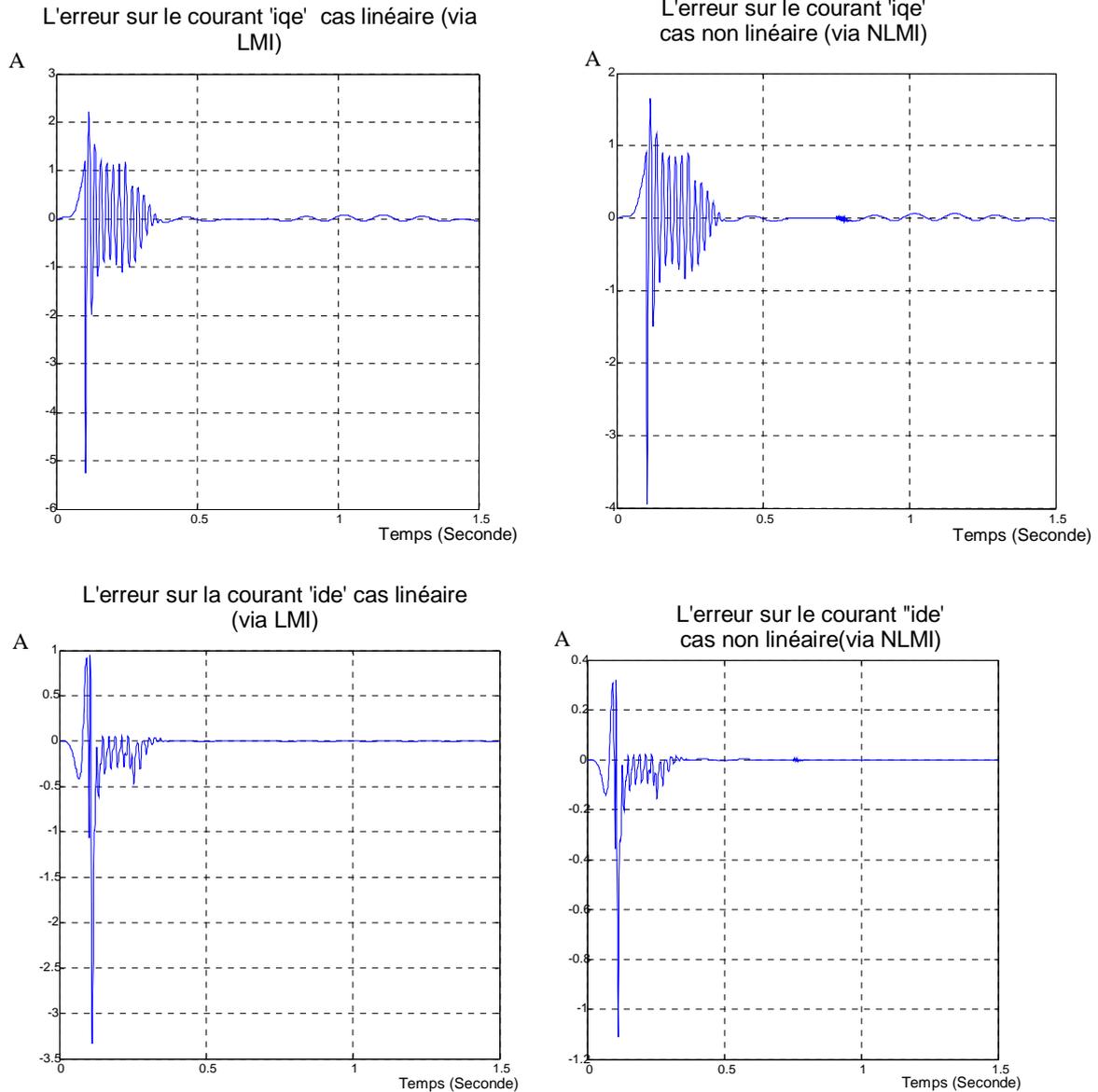
$$ud = -1.8752e-006 x_1 - 3.0829e-009 x_2 - 4.4843e-009 x_3 + 1.9676e-019 x_4;$$

$$uq = 2.7339e-020 x_1 + 2.5102e-019 x_2 + 1.9676e-019 x_3 - 0.0031 e-006 x_4;$$

Pour le calcul de la commande H_∞ non linéaire via les NLMIs, nous commençons par considérer un intervalle de bornéture pour les V_{ei} . Soit $V_{ei} \in [-0.1 \ 0.1]$ cette intervalle de bornéture ; nous considérons quelques valeurs des V_{ei} est pour chaque'une de ces valeurs, nous construisons les LMIs qui correspondes. La solution commune de toutes ces LMIs nous permet de calculer le contrôleur en la remplaçant dans (IV-34) .

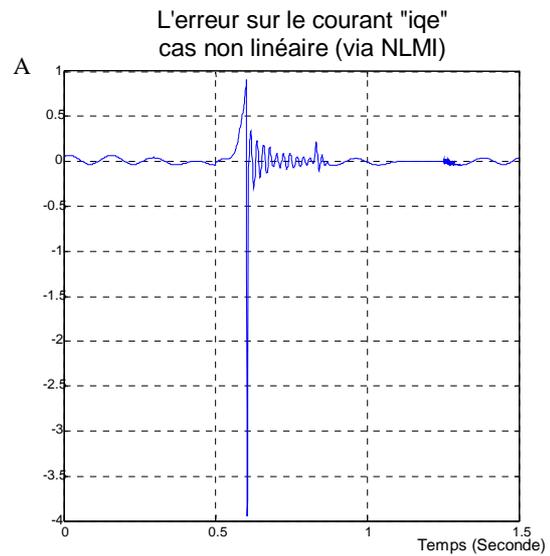
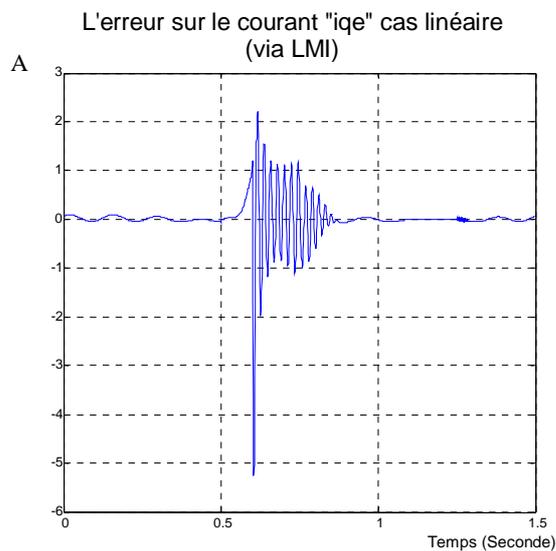
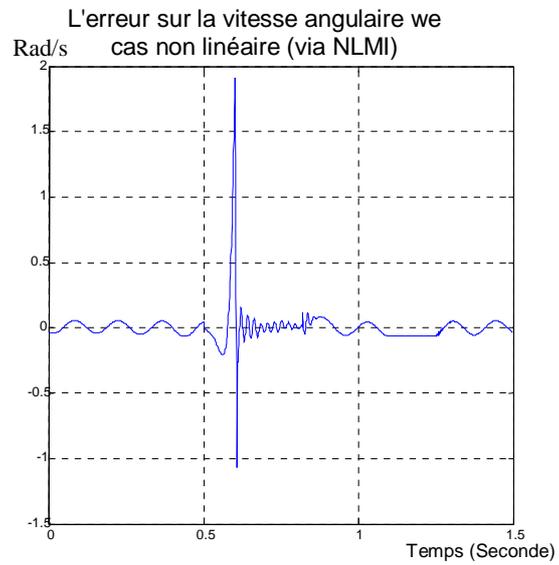
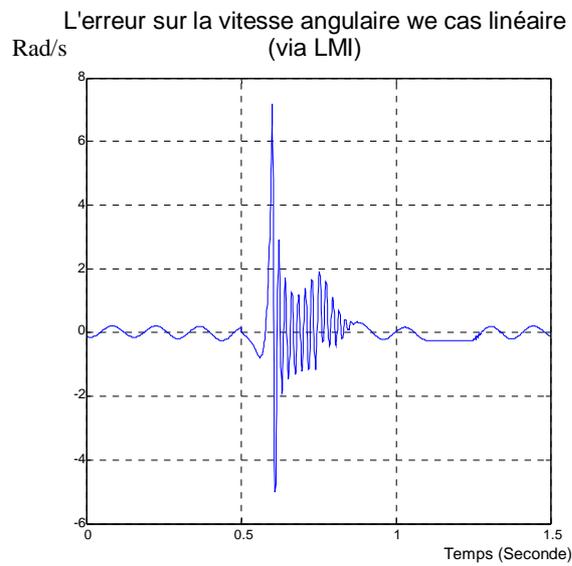
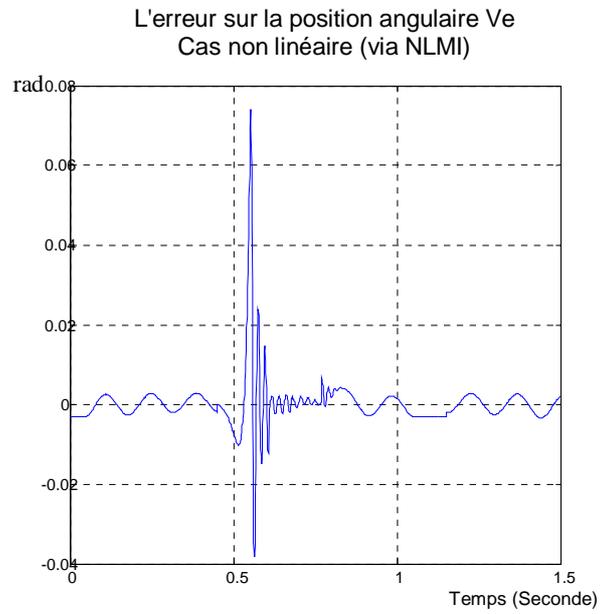
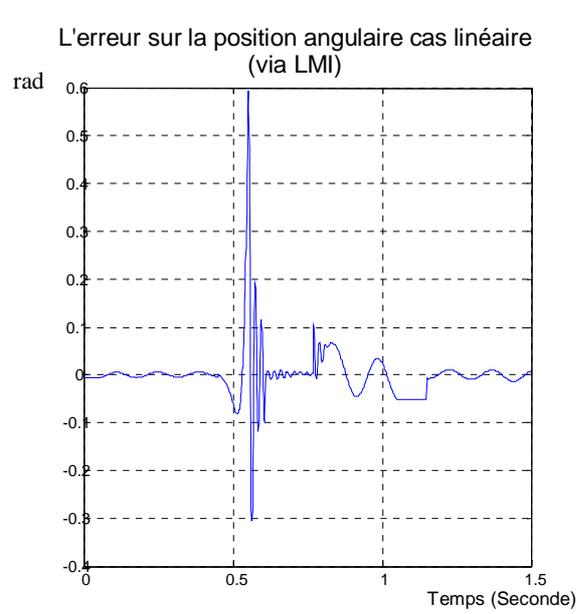
Les résultats de simulation de l'application des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire sur la dynamique des erreurs de la machine synchrone pour des paramètres qui varient à $t=0.07s$, sont donnés par les figures suivantes :

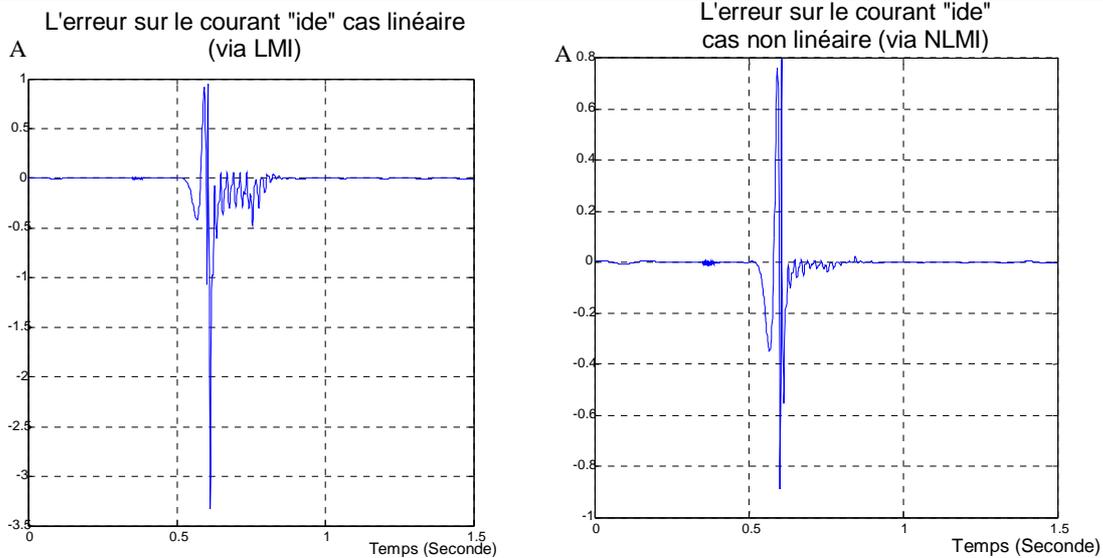




Tous les états sont amenés à zéro. L'erreur sur la trajectoire angulaire est d'ordre 0.3 rad, dans le cas linéaire, et d'ordre 0.073 rad, dans le cas non linéaire, ce qui signifie que la trajectoire imposée est suivit dans les deux cas.

Pour des paramètres qui commencent à varier à $t=0.6s$, L'application des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire donne les résultats suivants :





L'erreur sur la trajectoire angulaire est d'ordre 0.6 rad, dans le cas linéaire, et d'ordre 0.073 rad, dans le cas non linéaire, ce qui signifie que la trajectoire imposée est suivie dans les deux cas. Tous les états sont amenés à zéro à l'instant $t=0.87$ seconde.

A partir des résultats de simulation des deux commandes, la robustesse des commandes H_∞ linéaire et non linéaire, calculées via les LMI et NLMI, est mise en lumière, et cela pour des objectifs de stabilité, de rejet de perturbation et l'atténuation des effets des variations des paramètres. Les résultats de la commande H_∞ non linéaire sont visiblement meilleurs que ceux de la commande H_∞ linéaire.

IV.4.3.3. Etude comparative

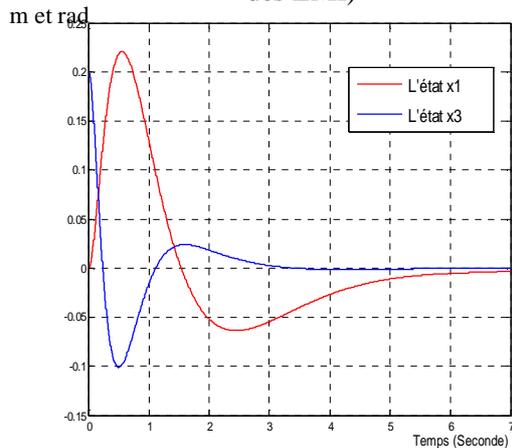
Dans cette partie, nous comparons les résultats de simulation de l'application de la commande H_∞ linéaire calculée par les deux méthodes présentées dans ce mémoire, ainsi que les résultats de simulation de l'application de la commande H_∞ non linéaire calculée par les deux méthodes suivantes : l'algorithme des approximations successives et la méthode basée sur les NLMI.

La première chose à remarquer, c'est que la méthode basée sur les LMI est plus générale, dans la mesure où elle ne nécessite que l'hypothèse qui garantit l'existence d'une loi de commande qui stabilise le système en boucle fermée.

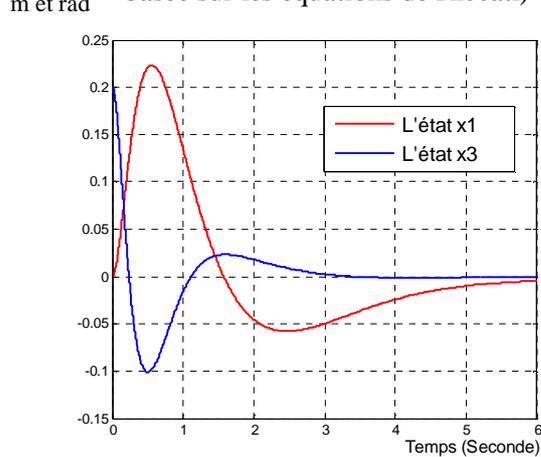
Ø Cas linéaire

Nous commençons par le cas linéaire. Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et une entrée exogène nulle, les résultats de simulation de l'application des commandes H_∞ linéaires calculées par les méthodes basées sur les équations de Riccati et LMI, respectivement, sur le modèle du pendule inversé ; sont donnés par les figures suivantes :

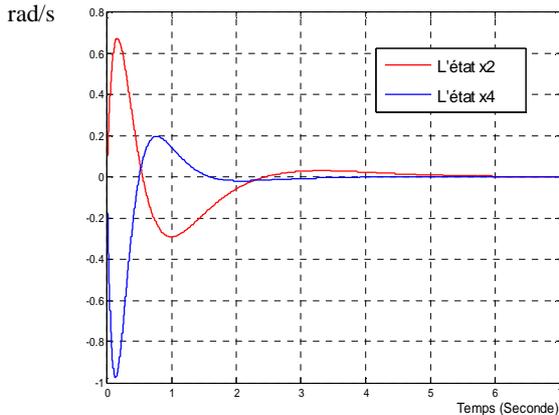
Le déplacement et l'angle (Méthode des LMI)



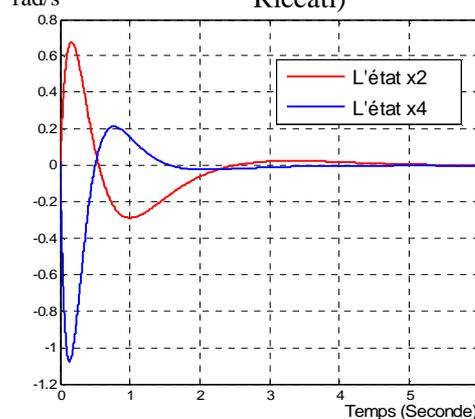
Le déplacement et l'angle (Méthode basée sur les équations de Riccati)



La vitesse linéaire et la vitesse angulaire (Méthode des LMI)

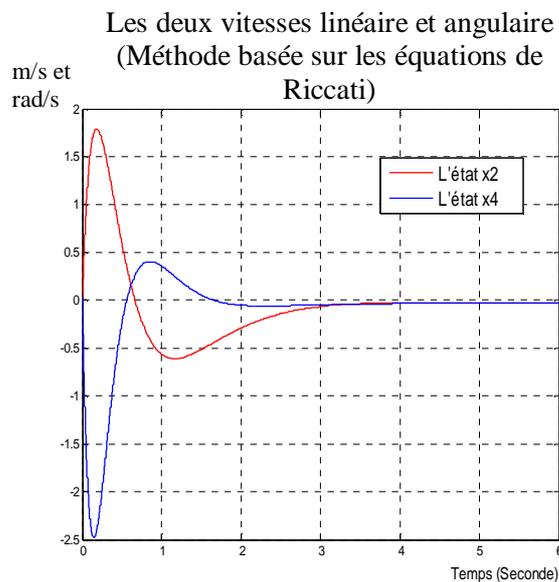
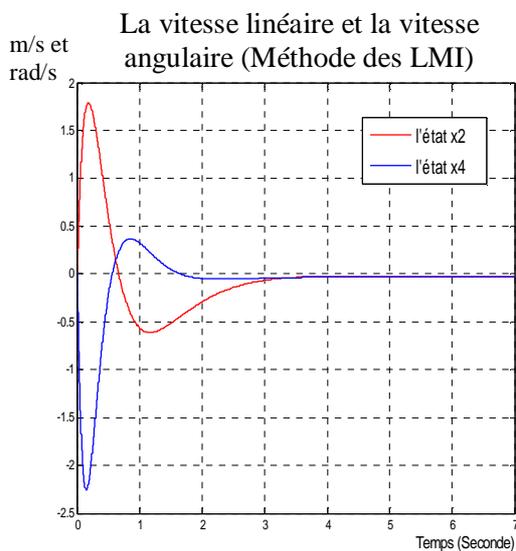
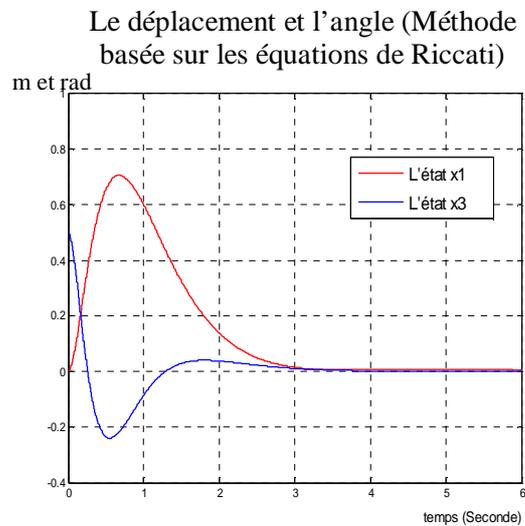
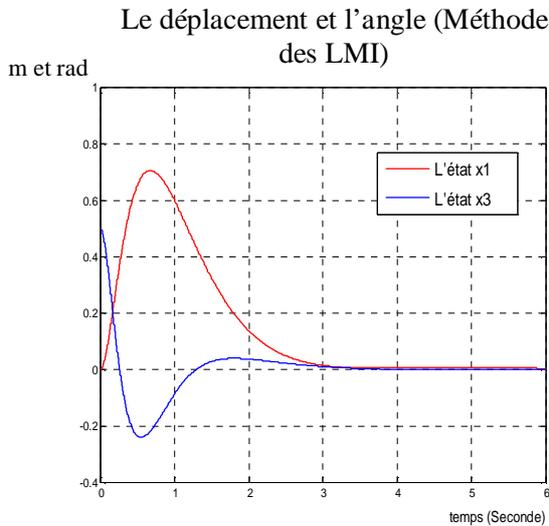


Les deux vitesses linéaire et angulaire (Méthode basée sur les équations de Riccati)



Les résultats de simulation de l'application des commandes H_∞ linéaires calculées par les méthodes basées sur les équations de Riccati et LMI, respectivement, sur le modèle du pendule inversé, pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour l'entrée exogène

$w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, sont donnés par les figures suivantes :



Les deux commandes aboutissent aux mêmes résultats, avec une légère différence pour l'état x_4 qui représente la vitesse angulaire (-1rad/s dans le cas de la méthode des LMI et -1.07rad/s dans le cas de la méthode basée sur les équations de Riccati, pour la première simulation. -2.25rad/s dans le cas de la méthode des LMI et -2.5rad/s dans le cas de la méthode basée sur les équations de Riccati, pour la deuxième simulation)

Les résultats de simulation de l'application de la commande H_{∞} linéaire calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati et la méthode des LMI, pour les objectifs cités plus haut, sur une machine synchrone, dont les paramètres varient, à l'instant $t=0.07s$, de la manière suivante

$$C_l = C_{l0} + 0.1C_{nom} \sin \frac{2p}{T} t$$

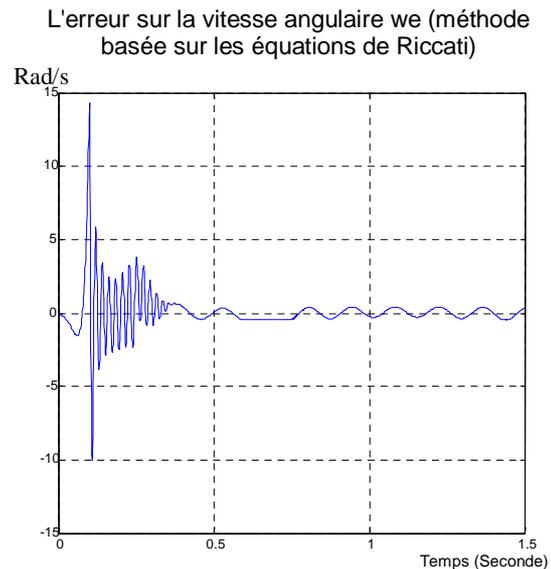
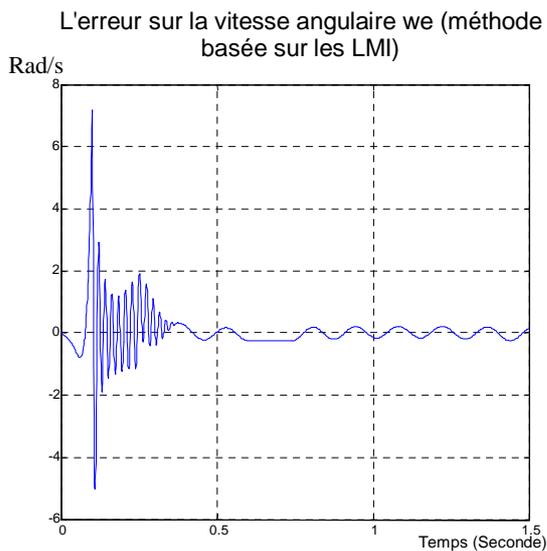
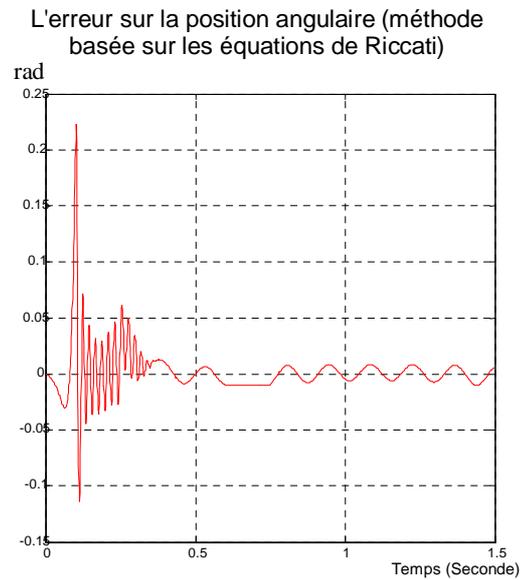
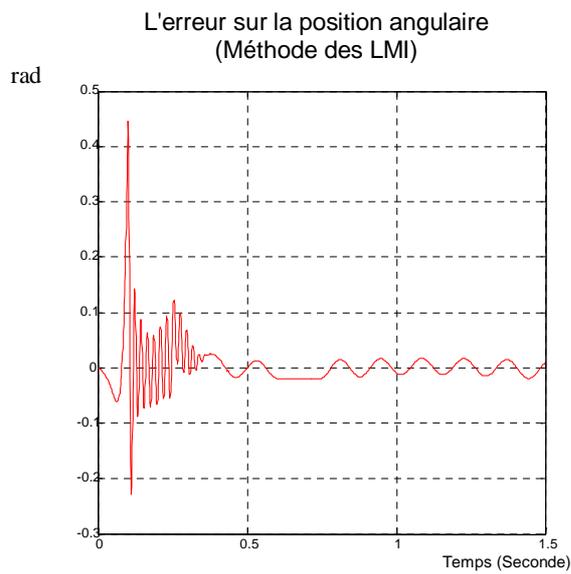
$$J = J_0 \left(1 + 0.6 \sin \frac{W}{2p} t \right)$$

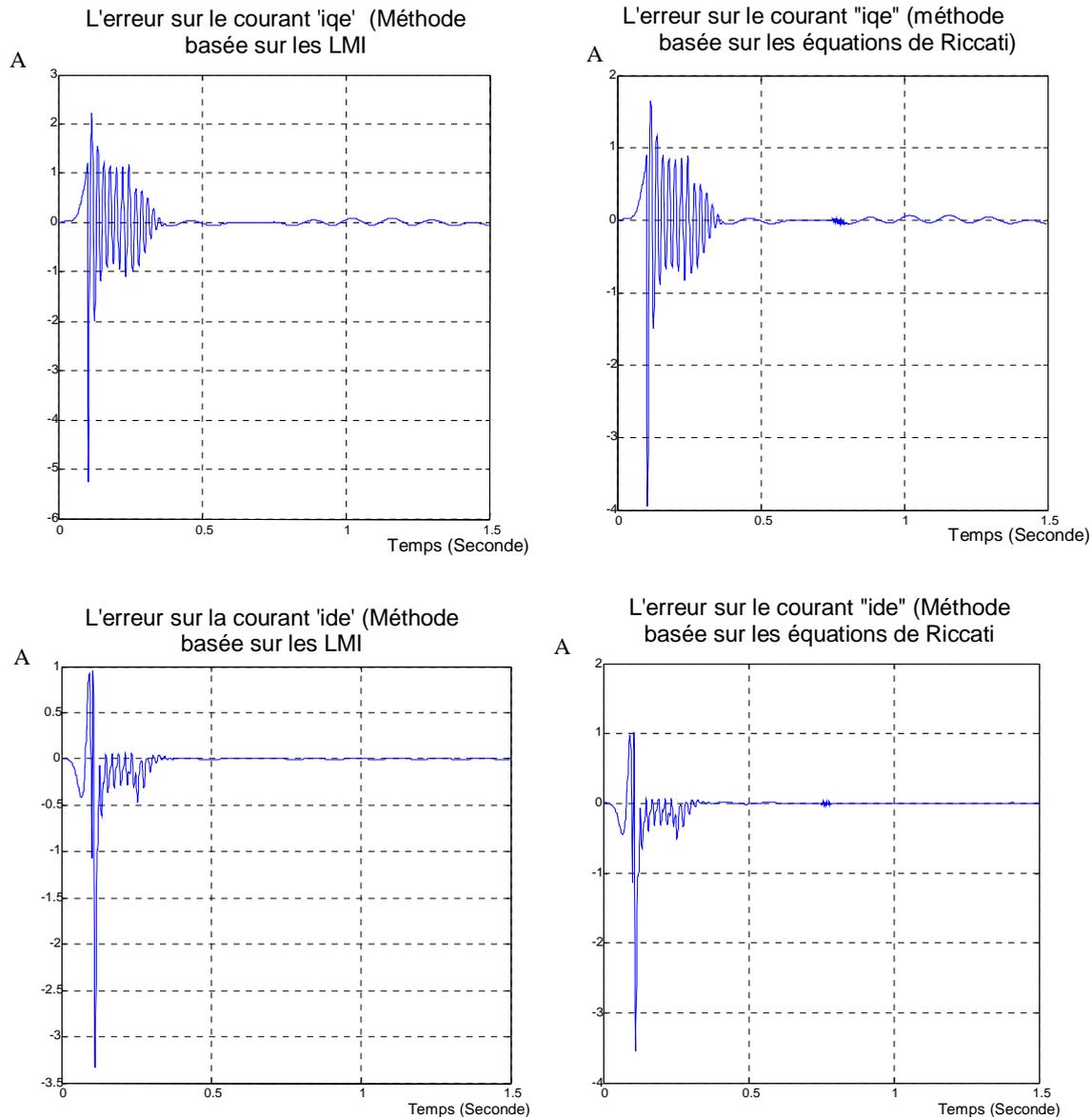
$$f = f_0 (1 + 0.5 \sin 50wt)$$

$$R = R_0 (1 + e^{-t/0.1})$$

$$L = L_0 \left(1 + 0.35 \sin \frac{W}{pp} t \right)$$

sont comme suit:



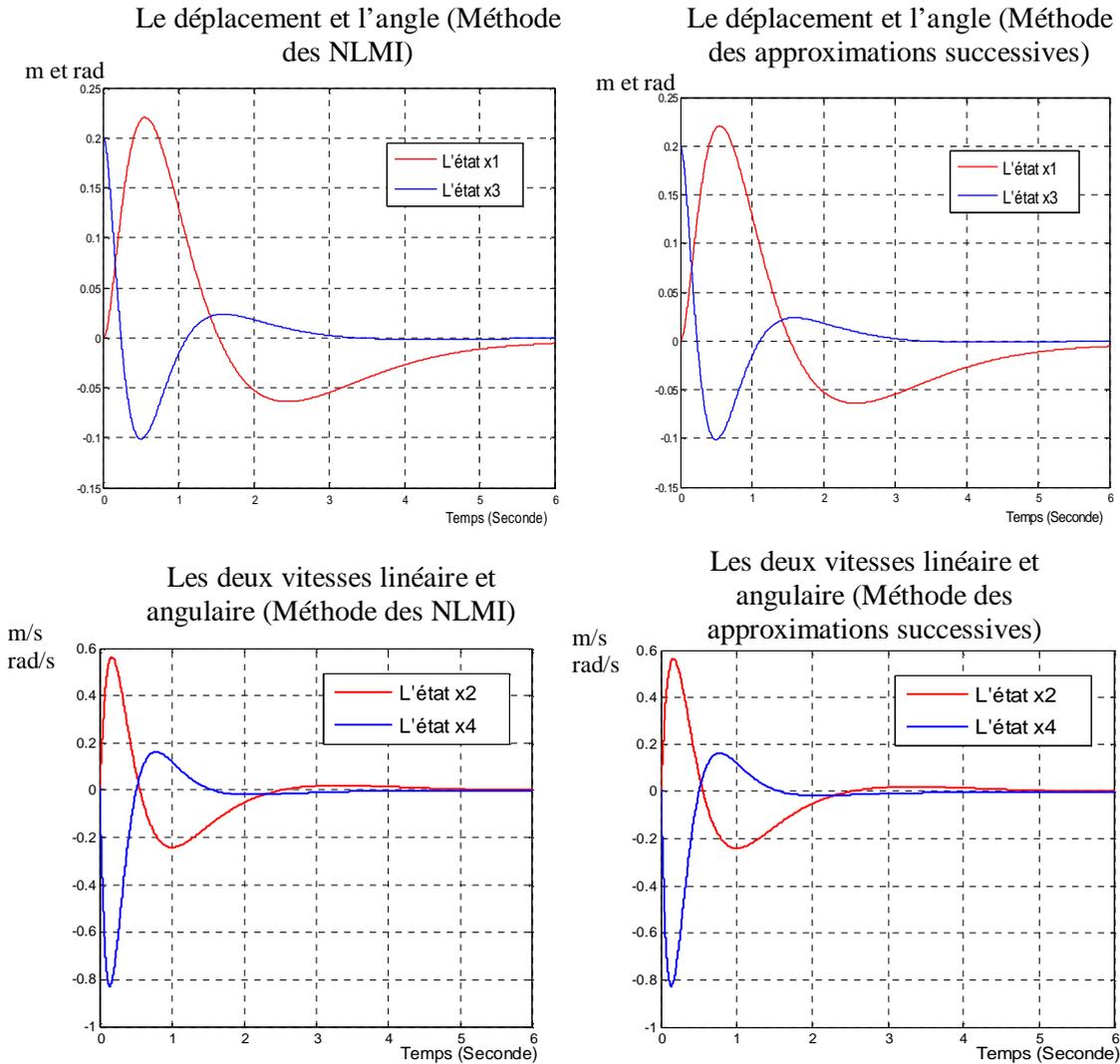


La différence des résultats de simulation de l'application des deux commandes H_∞ linéaires calculées par la méthode basée sur les équations de Riccati et la méthode des LMI est frappante. Mais on ne peut pas conclure vis-à-vis de la meilleur méthode puisque des fois c'est la méthode des LMI qui donne de meilleurs résultats, et des fois c'est la commande basée sur les équations de Riccati qui donne de meilleurs résultats. Mais au moins les deux commandes H_∞ linéaires atteignent les objectifs visés.

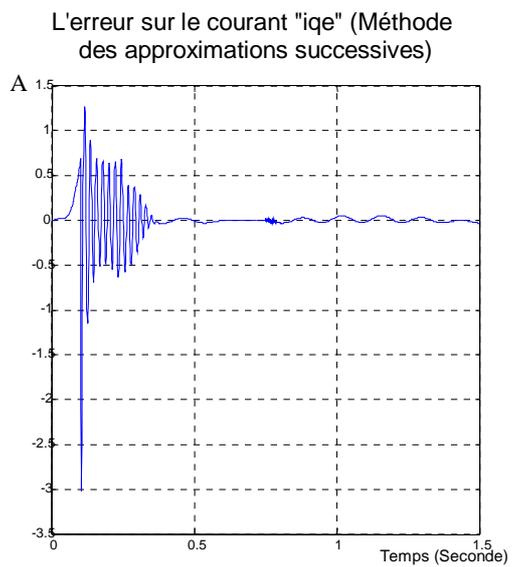
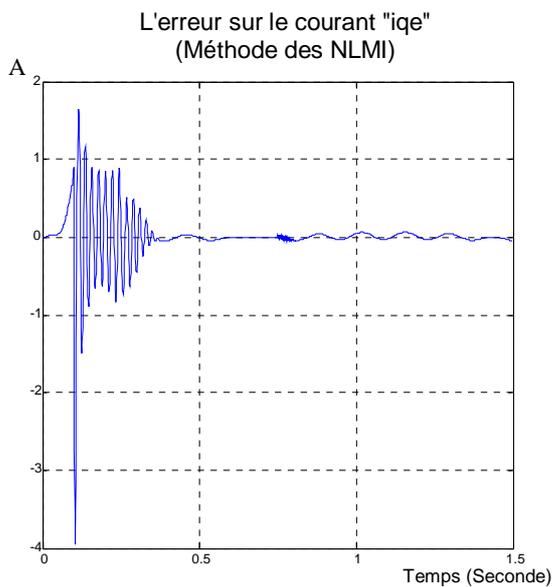
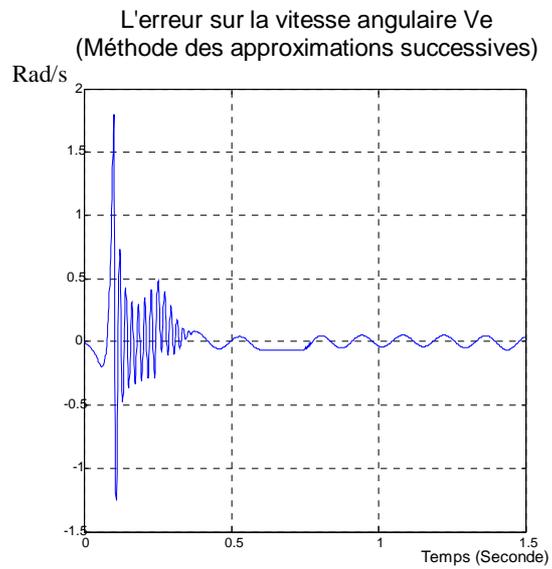
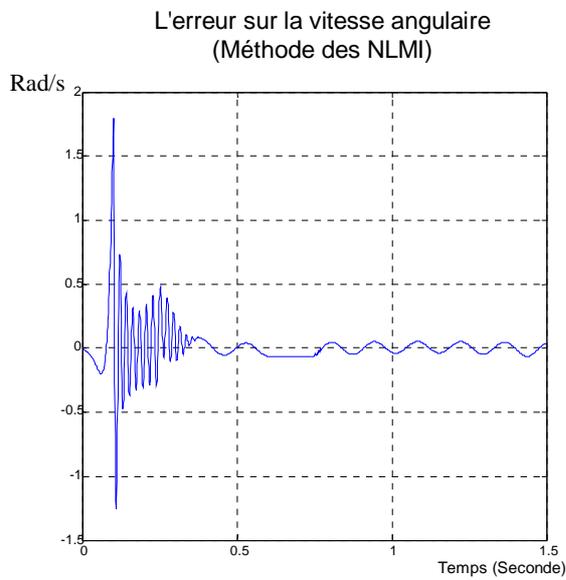
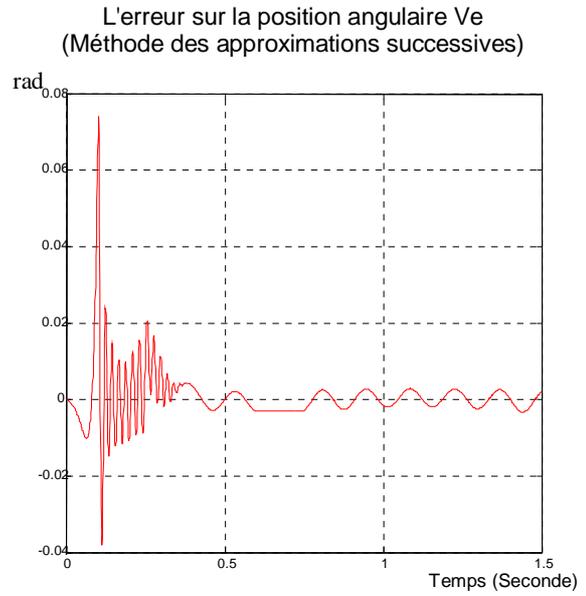
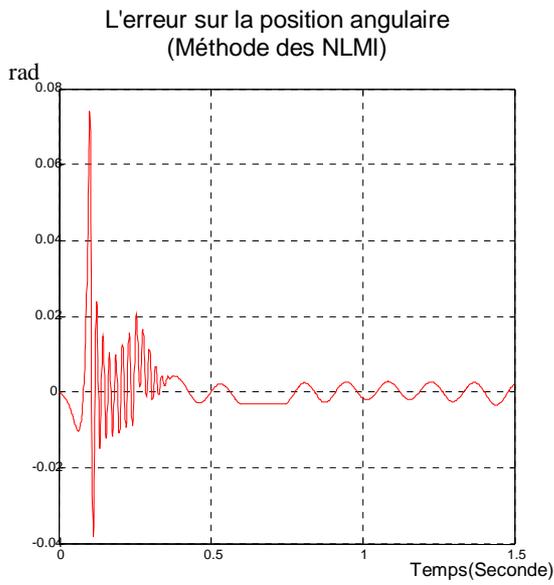
Ø Cas non linéaire

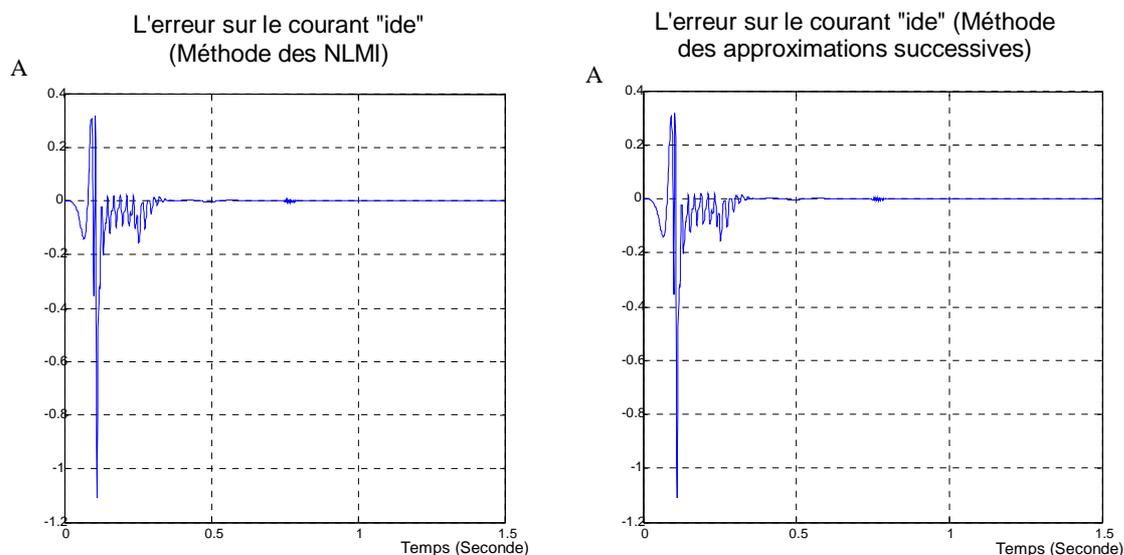
Nous passons maintenant au cas non linéaire. Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et une entrée exogène nulle, les résultats de simulation des commandes H_∞ non linéaires calculées par l'algorithme des approximations successives et la méthode basée

sur les NLMI ; respectivement, appliquées sur le modèle du pendule inversé, sont données par les figures suivantes :



Les résultats de simulation de l'application de la commande H_∞ non linéaire calculées par l'algorithme des approximations successives et la méthode basée sur les NLMI ; respectivement, appliquées sur une machine synchrone, dont les paramètres varient, à l'instant $t=0.07s$, sont données par les figures suivantes :





Les deux commandes H_∞ non linéaires calculées par l'algorithme des approximations successives et la méthode basée sur les NLMI, aboutissent presque aux mêmes résultats. Et ceci pour les deux exemples d'applications.

A partir des résultats de simulation, des trois derniers chapitres, la robustesse de la commande H_∞ linéaire et non linéaire est mise en évidence, et cela pour des objectifs de stabilité, de rejet de perturbation et l'atténuation des effets des variations des paramètres. Mais bien sûr, la commande H_∞ non linéaire aboutie à de meilleurs résultats que la commande H_∞ linéaire. Puisqu'elle ne néglige pas les non linéarités du système.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle vision de la résolution du problème de commande H_∞ par l'intermédiaire des LMI. Ainsi qu'une autre méthode plus récente qui est l'approche des Inégalités Matricielles Non Linéaires appliquée pour calculer la commande H_∞ non linéaire. Ces deux méthodes proposées ont été appliquées pour concevoir des commandes linéaire et non linéaire d'un pendule inversé et d'une machine synchrone à aimant permanent. Des tests de robustesse ont été faits, et ils confirment la robustesse des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude de la commande H_∞ linéaire et non linéaire. Nous avons exposé les notions générales sur la commande robuste, la commande H_∞ linéaire et non linéaire, et les approches les plus utilisées pour la résolution des problèmes de commande H_∞ . Nous avons aussi, présenté, dans ce mémoire un outil de résolution des problèmes de commande H_∞ non linéaire, développé récemment par [YiPa99] [Asep03], qui est l'approche par les Inégalités Matricielles Non Linéaires (NLMI).

Le premier chapitre a été consacré, à l'étude de la commande robuste, en termes d'acquisition des outils de base, à son état de l'art, à la représentation des incertitudes (Structurées et non structurées) et des quatre axes de robustesse (voir stabilité et performance nominale et stabilité et performance robuste).

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la théorie de la commande H_∞ des systèmes linéaires, voir le problème H_∞ standard et sa résolution par la méthode basée sur les équations de Riccati. Nous avons montré par les deux applications qui ont été effectuées, l'une sur un modèle de pendule inversé, et l'autre sur un système de machine synchrone à aimant permanent, que la commande H_∞ linéaire est robuste.

Dans le chapitre trois, nous avons fait la recherche bibliographique sur la commande H_∞ des systèmes non linéaires, en termes de choix de la méthode, ainsi que le contexte de son application. Ceci nous a amenés à dresser un état de l'art des méthodes de commande H_∞ dans le contexte non linéaire, et faire de la simulation de la méthode choisie sur un système de pendule inversé et sur un modèle de machine synchrone à aimant permanent. Des simulations sur les deux systèmes, étudiées dans le deuxième chapitre, ont été effectuées en utilisant la méthode des approximations successives, et des tests de robustesse ont été effectués, ce qui nous a confirmé la robustesse de cette commande.

Le dernier chapitre a été consacré à l'étude de la méthode des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) utilisée dans la commande H_∞ linéaire et la méthode des Inégalités Matricielles Non Linéaires (NLMI) dans le cas de la commande H_∞ non linéaires. Nous les avons appliqués aux exemples traités dans les deux chapitres 2, 3 afin de comparer les résultats, ici aussi des tests de robustesse ont été faits.

Conclusion générale

Les résultats de simulation de ce mémoire, confirment la robustesse de la commande H_∞ linéaire et non linéaire. La commande H_∞ non linéaire abouti à de meilleurs résultats que la commande H_∞ linéaire puisqu'elle considère les non linéarités des systèmes. Une autre conclusion très importante, c'est que la méthode des LMI dans le cas linéaire, réciproquement la méthode des NLMI dans le cas non linéaire donne de très bons résultats.

Les perspectives de ce travail

- Notre travail peut s'étendre et se généraliser à tous les systèmes non linéaires.
- développer un algorithme qui résout directement les NLMI.
- Etendre l'étude de la commande H_∞ non linéaire par les NLMI aux systèmes non linéaires plus généraux
- Des techniques d'intelligences artificielles peuvent être appliquées pour la résolution du problème de commande H_∞ non linéaire.

ANNEXE

Annexe A

A.1. Les normes de signal \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞

A.1.1. La norme \mathcal{L}_2

Pour un signal scalaire $v(t)$ défini pour tout $t > 0$, la norme \mathcal{L}_2 est définie comme la racine carrée de l'intégral de $v(t)^2$,

$$\|v\|_2 = \left(\int_0^\infty v(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

L'interprétation physique de cette norme revient à dire que, si $v(t)$ est un signal de courant ou de tension, $\|v\|_2^2$ est proportionnel à l'énergie totale associée à ce signal. Dans le cas où le signal $v(t)$ est un vecteur $v(t) = [v_1(t) \ \dots \ v_m(t)]^T$, la norme \mathcal{L}_2 devient égale à

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m \|v_i\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^m v_i(t)^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty v(t)^T v(t) dt \right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Rappelons en outre, que la transformée de Laplace du signal $v(t)$ est égale à :

$$V(s) = \int_0^\infty v(t) e^{-st} dt \quad (\text{A.3})$$

où s est la variable complexe de Laplace. Par analogie avec (A.1), on définit la norme \mathcal{L}_2 pour cette transformée de Laplace sur l'axe imaginaire par

$$\|V\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

D'après le théorème de Parseval, les normes \mathcal{L}_2 dans le domaine temporel et fréquentiel sont égales :

$$\|v\|_2 = \|V\|_2 \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas d'un signal vectoriel $v(t) = [v_1(t) \ \dots \ v_m(t)]^T$, la norme \mathcal{L}_2 de la transformée de Laplace $V(t) = [V_1(t) \ \dots \ V_m(t)]^T$ de ce signal devient:

$$\begin{aligned} \|V\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^m \|V_i\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m |V_i(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \\ & \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m V_i(-j\omega) V_i(j\omega) d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m V(-j\omega)^T V(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.1.2. La norme \mathcal{L}_∞

La norme \mathcal{L}_∞ d'un signal $v(t)$ est définie par :

$$\|v\|_\infty = \max_t |v(t)| \quad (\text{A.7})$$

en supposant que le maximum de ce signal existe. Comme ceci n'est pas garanti dans le cas général, la norme \mathcal{L}_∞ est définie, de façon plus correcte, par la plus petite borne supérieure de la valeur absolue du signal :

$$\|v\|_\infty = \sup_t |v(t)| \quad (\text{A.8})$$

A.2. Les normes de système \mathbf{H}_2 et \mathbf{H}_∞

A.2.1. La norme \mathbf{H}_2

Pour un système multivariable stable ayant pour matrice de transfert $G(s) = [g_{ij}(s)]$, la définition de la norme \mathbf{H}_2 est :

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \left(\sum_{ij} \|g_{ij}\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m |g_{ij}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \\ & \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m g_{ij}(-j\omega) g_{ij}(j\omega) d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m G(-j\omega)^T G(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Il est facile d'interpréter la norme \mathbf{H}_2 d'un système de matrice de transfert G à partir des normes \mathcal{L}_2 de ses signaux d'entrée et de sortie. En effet, en considérant les entrées du système l'une après l'autre égales à l'impulsion de Dirac d'amplitude unité, les autres entrées étant nulles, ce qui correspond à une transformée de Laplace du vecteur d'entrée $V(s) = e_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ dans le cas d'une $k^{\text{ème}}$ entrée mise à 1, la sortie du système

$$Z(s) = G(s)e_k \quad (\text{A.10})$$

correspondra au carré de la norme \mathcal{L}_2 suivant:

$$\begin{aligned}\|Z\|_2^2 &= \|Ge_k\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[e_k^T G(-j\omega)^T G(j\omega) e_k] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[G(j\omega) e_k e_k^T G(-j\omega)^T] d\omega\end{aligned}$$

Dans le cas d'un système monovarié, de fonction de transfert $G(s)$, la norme \mathcal{L}_2 de sa sortie, en réponse à une impulsion de Dirac unité appliquée à son entrée, est donnée par :

$$\|Z\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[|G(-j\omega)^T G(j\omega)|] d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \|G\|_2 \quad (\text{A.11})$$

expression similaire à (A.4). $\|G\|_2$ peut donc être interprété ici comme le gain du système, moyenné sur toutes les fréquences.

Donc la norme H_2 est l'énergie en sortie du système lorsqu'on injecte une impulsion de Dirac en entrée, où plus généralement un bruit blanc de densité spectrale uniforme.

A.2.2. La norme H_∞

Considérons d'abord le cas d'un système monovarié, de fonction de transfert $G(s)$. Contrairement à la norme H_2 qui fournit le gain moyen du système, la norme H_∞ est définie par :

$$\|G\|_\infty = \max_\omega |G(j\omega)| \quad (\text{A.12})$$

ou encore, dans le cas où le maximum n'existe pas,

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| \quad (\text{A.13})$$

La norme H_∞ est donc simplement le plus grand facteur par lequel le système amplifie tout signal sinusoïdal appliqué à son entrée.

Une relation entre la norme H_∞ et les normes \mathcal{L}_2 des signaux d'entrée-sortie du système peut être trouvée. Considérons pour cela un signal $v(t)$ de transformée de Laplace $V(s)$ ayant une norme \mathcal{L}_2 bornée. La sortie du système $Z(s) = G(s) V(s)$ possède une norme \mathcal{L}_2 bornée par $\|G\|_\infty \|V\|_2$ parce que :

$$\|GV\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[|G(j\omega)V(j\omega)|] d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 |V(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \sup_{\omega} |G(j\omega)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \|G\|_{\infty} \|V\|_2 \quad (\text{A.14})$$

Par conséquent, pour tout $v \neq 0$,

$$\|G\|_{\infty} \geq \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} \quad (\text{A.15})$$

On montre en fait que la norme H_{∞} peut être caractérisée par :

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} : v \neq 0 \right\} \quad (\text{A.16})$$

La norme H_{∞} fournit donc le facteur maximum dont le système amplifie la norme \mathcal{L}_2 de tout signal d'entrée. C'est pourquoi $\|G\|_{\infty}$ est aussi appelé « gain » du système.

Dans le cas d'un système multivariable, la norme H_{∞} est définie d'une manière analogue.

Pour une matrice de transfert $G(s)$ on définit :

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \|G(j\omega)\| \quad (\text{A.17})$$

La norme matricielle $\|G(j\omega)\|$ est égale à la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ de la matrice

$G(j\omega)$. D'où :

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{A.18})$$

Cette norme est interprétée physiquement de la manière suivante. On sait que si l'on applique à l'entrée du système G un signal sinusoïdal vectoriel, composé de sinusoïdes de même pulsation mais d'amplitudes et de phases différentes, sa sortie est un signal sinusoïdal vectoriel de même pulsation, mais dont les composantes ont des amplitudes et des phases modifiées par G . La norme H_{∞} est donc le facteur maximum dont le système amplifie toute entrée sinusoïdale vectorielle.

Dans le cas d'un signal d'entrée d'énergie \mathcal{L}_2 bornée, par analogie au cas d'un système monovarié la norme H_∞ est donnée par:

$$\|G\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} : v \neq 0 \right\} \quad (\text{A.19})$$

Enfin, notons que dans le domaine temporel, si la sortie du système est $Z(t)$,

$$\|G\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\|Z\|_2}{\|V\|_2} : v \neq 0 \right\} \quad (\text{A.20})$$

La norme H_∞ est, donc, la norme matricielle induite par la norme des fonctions H_2 . Dans le cas linéaire SISO, elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle.

A.3. Interprétations :

La minimisation d'une norme H_∞ correspond à la minimisation du plus grand pic de la valeur singulière, tandis que celle d'une norme H_2 minimise la somme des carrés de toutes les valeurs singulières pour toutes les fréquences possibles. C'est en partie la raison pour laquelle la norme H_∞ intervient en commande robuste, outre le fait qu'elle est un outil pratique pour la représentation des incertitudes du modèle et qu'elle satisfait la propriété multiplicative. Cette dernière propriété, en revanche, n'est pas vérifiée par la norme H_2 . Cependant, la norme H_2 reste un outil mathématique offrant de nombreuses utilités et trouve des applications intéressantes dans le domaine de l'ingénierie.

A.4. Propriétés de la norme H_∞

Considérons le cas d'un système LTI tel que :

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (\text{A.21})$$

où Y, U sont respectivement l'entrée et la sortie du système et $G(s)$ est sa matrice de transfert. La norme H_∞ de ce système est définie par l'équation (A.19).

La norme H_∞ possède deux propriétés :

- la norme H_∞ de la mise en série de deux systèmes, représentés respectivement par les matrices de transfert $G(s)$ et $H(s)$, c'est-à-dire la norme H_∞ du produit des deux matrices de transfert, est inférieure ou égale au produit de leurs deux normes H_∞ :

$$\|G(s)H(s)\|_\infty \leq \|G(s)\|_\infty \|H(s)\|_\infty \quad (\text{A.22})$$

- la norme H_∞ de la matrice de transfert de la mise en parallèle de deux systèmes $G(s)$ et $H(s)$ avec soit une entrée commune, soit une sortie commune, est supérieure ou égale à la plus grande des normes H_∞ de ces deux systèmes :

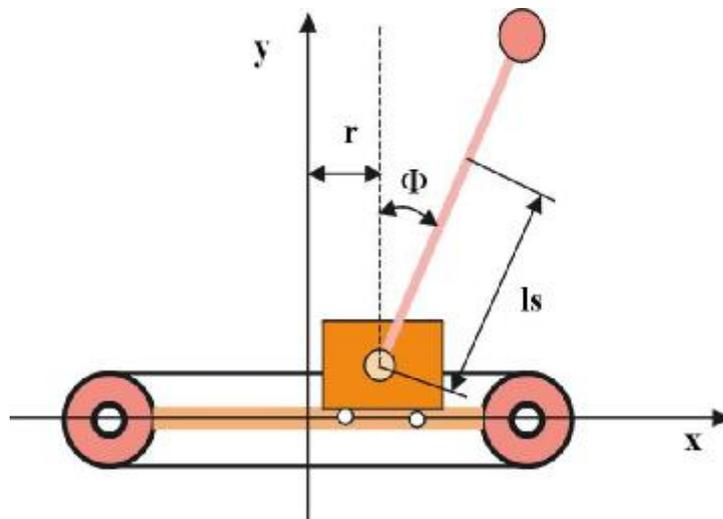
$$\left\| \begin{pmatrix} G(s) \\ H(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq \sup(\|G(s)\|_\infty, \|H(s)\|_\infty) \quad (\text{A.23})$$

$$\|(G(s) \quad H(s))\|_\infty \geq \sup(\|G(s)\|_\infty, \|H(s)\|_\infty) \quad (\text{A.24})$$

Dans le cas d'une synthèse H_∞ , on déduit des deux dernières inégalités que, si la norme H_∞ de la matrice de transfert en boucle fermée $T_{Z\omega}(s)$ satisfait l'inégalité $\|T_{Z\omega}(s)\|_\infty \leq \gamma$, cette inégalité est également satisfaite par toutes les sous-matrices éventuelles de cette matrice de transfert.

Annexe B
B.1. Modèle d'un pendule inversé

Un pendule inversé est un système qui présente des caractéristiques intéressantes permettant d'illustrer quelques problèmes type. Il s'agit d'un système instable parfaitement décrit par un modèle non linéaire obtenu en appliquant les lois de la physique. L'objectif de cette étude est d'illustrer la commande des systèmes non linéaires. Le schéma de principe du système est donné sur la figure suivante



Le système est constitué d'un chariot de masse M solidaire d'une courroie qui peut être entraînée horizontalement à l'aide d'un moteur à courant continu et d'un système à poulies. Une tige d'aluminium avec à son bout une masse (pendule) est reliée au chariot et peut pivoter dans le plan vertical (voir figure). Soit L la distance entre l'axe de rotation de la tige et le centre de gravité du pendule et m la masse du pendule, on appelle q l'angle entre le pendule et la verticale et r la position du chariot par rapport à l'origine qui sera prise entre les deux poulies.

B.2. Modèle mathématique: Modèle dans l'espace d'état

Nous considérons un système de pendule inversé décrit par la dynamique suivante [HuCha98].

$$(J + mL^2)\ddot{q} - mgL\sin q + mL\cos q \ddot{r} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$(M + m)\ddot{r} - mL\dot{q}^2 \sin q + mL\ddot{q} \cos q = f \quad (\text{B.2})$$

$$u = \ddot{r} \quad (\text{B.3})$$

$$J = \frac{1}{3}mL^2 \quad (\text{B.4})$$

$$\ddot{q} = \frac{3g}{4L} \sin q - \frac{3}{4L} \cos q \cdot u \quad (\text{B.5})$$

$$f = (M + m - 0.75m \cos^2 q)u - mL\dot{q}^2 \sin q + 0.75mg \cos q \sin q \quad (\text{B.6})$$

$M = 0.455kg$ est la masse du chariot

$m = 0.21kg$ est la masse de la barre

$L = 0.3048m$ est la longueur de la barre

$g = 9.807m/sec^2$ est l'accélération gravitationnelle

$J = \frac{1}{3}mL^2$ est le moment d'inertie

En définissant le vecteur d'état suivant

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ q \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.7})$$

où $x_1 = r$ est le déplacement

$x_2 = \dot{r}$ est la vitesse linéaire

$x_3 = q$ est l'angle (déplacement angulaire)

$x_4 = \dot{q}$ est la vitesse angulaire

la représentation d'état non linéaire du système de pendule inversé est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ u \\ \dot{q} \\ \frac{3g}{4L} \sin q - \frac{3}{4L} \cos q \cdot u \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs nous aboutissons à :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u \quad (\text{B.9})$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{B.10})$$

C.1. Modèle de la machine synchrone à aimant permanents

Le modèle de la machine synchrone étudiée dans ce mémoire satisfait les hypothèses simplificatrices suivantes

Ø Les hypothèses simplificatrices

Les phénomènes physiques inhérents au fonctionnement du système peuvent être partiellement ou totalement pris en compte dans un modèle.

Plus le nombre d'hypothèses est grand, plus simple sera le modèle. Cela permet une étude et une exploitation plus aisées. Ces simplifications proviennent des propriétés des machines à courant alternatif [Stru2000] [Bas2001].

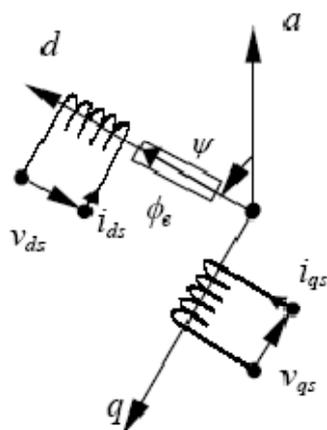
Dans ce but, on adopte les suppositions suivantes :

- La saturation est négligée, il en résulte que les inductances propres et mutuelles sont indépendantes des courants qui circulent dans les différents enroulements ;
- Les f.m.m. sont réparties sinusoïdalement dans l'entrefer de la machine, il y a une symétrie par rapport à l'axe magnétique des enroulements ;
- L'effet d'encochage est négligé ;
- On ne tient pas compte de l'hystérésis et des courants de Foucault dans les parties magnétiques ;

Ø Modèle de PARK

La mise en équation des moteurs synchrones triphasés aboutit à des équations différentielles à coefficients variables. On utilise alors la transformation de Park, qui permet d'un côté, de décrire le comportement du moteur à l'aide d'équations différentielles à coefficients constants, et de réduire le nombre de variables, en passant d'un repère à trois dimensions $(a \ b \ c)$ qui est fixé par rapport au rotor, à un repère à deux dimensions $(d \ q)$ qui tourne, de l'autre côté.

A un système triphasé quelconque (a, b, c) , on associe un système biphasé $(d, q, 0)$ donnant le même champ tournant, les aimants sont représentés par un inducteur au rotor alimenté par une source de courant continu parfaite, comme le montre la figure suivante :



D'après le schéma de cette figure on donne les équations de la machine synchrone relatives au stator et rotor.

$$\begin{aligned}
 \frac{di_d}{dt} &= -\frac{R}{L}i_d + pwi_q + \frac{1}{L}v_d = -a_3i_d + pwi_q + a_5v_d \\
 \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R}{L}i_q - pwi_d - \frac{k_m}{L}w + \frac{1}{L}v_q \\
 &= -a_3i_q - pwi_d - a_4w + a_5v_d \\
 \dot{w} &= \frac{k_m}{J}i_q - \frac{f}{J}w - \frac{C_l}{J} = a_1i_q - a_2w - c \\
 \dot{V} &= w
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

Avec :

- J est le moment d'inertie du moteur ;
- R est la résistance ;
- L est l'inductance ;
- V est la position angulaire ;
- w est la vitesse angulaire mécanique du rotor ;
- f est le coefficient de frottement visqueux ;
- k_m est le couple électromagnétique délivré par le moteur ;
- C_l c'est le couple résistant, ou de charge ;

On peut remarquer que les équations s'expriment en fonction de deux courants l'un est statorique et l'autre est rotorique ; ce qui implique un couplage entre les grandeurs du stator et du rotor. Ce couplage est à la base des non linéarités du moteur synchrone.

C.2. Description du système étudié

Dans cette partie, nous considérons le modèle de *Park* d'une machine synchrone à aimant permanent qui est soumis à des erreurs de la manière suivante :

On pose $V_e = V - V_r$ l'erreur sur la trajectoire ;

et on défini $w_r = \dot{V}_r - k_1 V_e = -k_1 V + \left(\dot{V}_r + k_1 V_r \right)$ comme la référence angulaire ;

sachant que l'erreur sur w est donnée par $w_e = w - w_r$, alors :

$$\dot{V}_e = -k_1 V_e + w_e \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_e &= \mathbf{a}_{10} i_q - \mathbf{a}_{20} w + c_0 - \dot{w}_r + \mathbf{a}_{1v} i_q - \mathbf{a}_{2v} w - c_v \\ &= -V_e - k_2 w_e + \mathbf{a}_{10} i_{qe} + \mathbf{a}_{1v} \left(\frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_{10}} V_e - \frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_{10}} w_e + i_{qe} \right) + \mathbf{a}_{2v} (k_1 V_e - w_e) + \mathbf{a}_{1v} f_1 \frac{1}{\mathbf{a}_{10}} - \mathbf{a}_{2v} \dot{V}_r - c_v \end{aligned}$$

$$\text{avec } f_1 = c_0 + \ddot{V}_r + \mathbf{a}_{20} \dot{V}_r, \quad i_{qe} = i_q - i_{qr} \quad \text{et} \quad i_{qr} = \frac{y}{\mathbf{a}_{10}}$$

La valeur désirée de l'accélération angulaire est donnée par $y = \mathbf{a}_{10} i_{qr} = \mathbf{a}_1 V_e - \mathbf{a}_2 w_e + f_1$

où $\mathbf{a}_1 = k_1^2 - k_1 \mathbf{a}_{20} - 1$ et $\mathbf{a}_2 = k_1 + k_2 - \mathbf{a}_{20}$.

Nous supposons l'erreur suivante $i_{de} = i_d - i_{dr}$, sur le courant i_d , nous obtenons alors la dynamique des erreurs suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_0 x_0 + B_0 u + k(x_e) w \\ z = \begin{pmatrix} C_0 x_e \\ u \end{pmatrix} \\ y = C_2 x_e \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$\text{où } x_e = (V_e \quad w_e \quad i_{qe} \quad i_{de})^T, \quad u = (u_q \quad u_d)^T \quad (\text{C.3})$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -k_2 & a_{10} & 0 \\ 0 & -a_{10} & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$w = \left(a_{1v} \ a_{2v} \ a_{3v} \ a_{4v} \ a_{5v} \ a_{5v} \dot{V}_r \ a_{5v} f \ a_{5v} i_{dr} \ w_9 \ w_{10} \ w_{11} \right)^T \text{ tel que}$$

$$w_9 = a_{1v} f \frac{1}{a_{10}} - a_{2v} \dot{V}_r - c_v, w_{10} = I_1 - a_{3v} f \frac{1}{a_{10}} - a_{4v} \dot{V}_r + a_{5v} I_2$$

$$w_{11} = a_{5v} I_3 - a_{3v} i_{dr}$$

$$k(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & X_1(x_e) & \frac{a_2}{a_{10}} X_1(x_e) & 0 \\ 0 & X_2(x_e) & \frac{a_2}{a_{10}} X_2(x_e) & 0 \\ 0 & 0 & -X_1(x_e) & -i_{de} \\ 0 & 0 & X_2(x_e) & 0 \\ 0 & 0 & X_3(x_e) & X_4(x_e) \\ 0 & 0 & \frac{p}{a_{50}} i_{de} & -\frac{p}{a_{50}} X_1(x_e) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{a_{50} a_{10}} X_2(x_e) \\ 0 & 0 & -\frac{p}{a_{50}} X_2(x_e) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Avec

$$X_1(x_e) = \frac{a_1}{a_{10}} V_e - \frac{a_2}{a_{10}} w_e + i_{qe}$$

$$X_2(x_e) = k_1 V_e - w_e$$

$$X_3(x_e) = \bar{a}_3 V_e + \bar{a}_4 w_e + \bar{a}_5 i_{qe} + x_q(x_e) - \frac{p}{a_{50}} X_2(x_e) i_{de}$$

$$X_4(x_e) = \frac{a_{30} - k_4}{a_{50}} i_{de} + x_d(x_e) + \frac{p}{a_{50}} X_1(x_e) X_2(x_e)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= \frac{1}{a_{50}} \left(-\frac{1}{a_{10}} (a_1 k_1 - a_{30} a_1 - a_2) - a_{40} k_1 \right) \\ \bar{a}_4 &= \frac{1}{a_{50}} \left(-\frac{1}{a_{10}} (a_2 k_2 + a_1 - a_{30} a_2) + a_{40} - a_{10} \right) \\ \bar{a}_5 &= \frac{1}{a_{50}} (-k_3 - a_2 + a_{30}) \\ l_1 &= \frac{1}{a_{50}} \left(\frac{1}{a_{10}} \dot{f}_1 + a_{30} \frac{1}{a_{10}} f_1 + p \dot{V}_r i_{dr} + a_{40} \dot{V}_r \right) \\ l_2 &= \frac{1}{a_{50}} \left(a_{30} i_{dr} - p \dot{V}_r \frac{1}{a_{10}} f_1 + \frac{di_{dr}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Annexe D

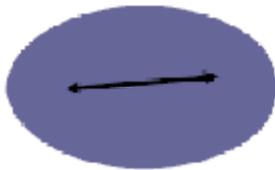
D. Convexité

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

D.1. Ensemble convexe

Un ensemble E est dit convexe si et seulement si pour tout couple de points (x, y) , le segment qui les relie appartient aussi à l'ensemble E

$$\left. \begin{array}{l} x \in E \\ y \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in E \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (\text{D.1})$$



Ensemble convexe



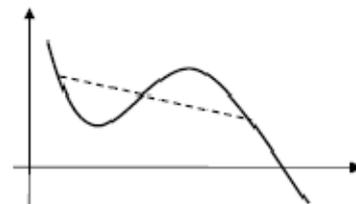
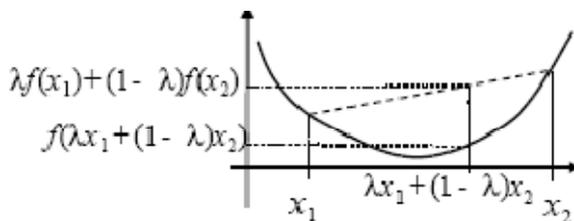
Ensemble non convexe

D.2. fonction convexe

La fonction f est dite convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (x_1, x_2) \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (\text{D.2})$$

c'est - à- dire si le segment passe au dessus de la courbe



Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit :

$$\min_{x \in E} f(x) \quad (\text{D.3})$$

où E est un ensemble convexe et f est une fonction convexe.

De même, une contrainte $f_i(x) \leq 0$ est dite convexe si la fonction f_i est convexe. Un des avantages de la convexité est que toute optimisation d'une fonction convexe définie sur un ensemble convexe peut se traiter localement car toute solution locale devient globale.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

[Lya47] A. M. Lyapunov. Problème général de la stabilité du mouvement, *volume 17 of annals of mathematics studies*. Princeton University Press, Princeton, 1947.

[Bla34] BLACK. H. S., « Stabilized Feedback Amplifiers », *Bell System Technical Journal*, vol. 13, p. 1-18, 1934.

[Nyq32] NYQUIST H., « Regeneration theory », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 11, p. 126- 147, 1932.

[Stru2000] G. Strutzer, “Modélisation et Commande des Moteurs Triphasés », *Ellipses Edition*, Markty. S. A. 2000.

[Bas2001] P.S.Bastiani, “stratégies de commande minimisant les pertes d’un ensemble convertisseur- machine alternative: Application électrique”, *Thèse de Doctorat de l’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*, France, Février 2001.

[Doy82] DOYLE J., WALL J. E., STEIN G., « Performance and Robustness Analysis for Structured Uncertainties », *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, p. 629-636, 1982.

[DoSt 81] DOYLE J., STEIN G., « Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical, Modern Synthesis », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, no 1, p. 4-16 , 1981.

[Saf82] SAFONOV M. G., « Stability Margin of Diagonaly Perturbed Multivariable Feedback Systems », *IEE Proc. Conf. on Decision and Control., Part D*, vol. 129, no 6, p. 251-256, 1982.

[Bod45] BODE H. W., “Network Analysis and Feedback Amplifier Design”, Van Nostrand, New York, 1945.

[Zam 66] ZAMES G., « On the Input-Output Stability of Time Varying Nonlinear Feedback Systems Part I, II », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 11, 1966.

[Saf 80] SAFONOV M. G., *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, MIT Press, Cambridge, 1980.

[FRO 95] FROMION V., « Une approche incrémentale de la robustesse non linéaire ; application au domaine de l'aéronautique », *PhD thesis*, Université de Paris Sud Orsay, janvier 1995.

[FRO 99] FROMION V., SCORLETTI G., FERRERES G., « Nonlinear Performance of a PID controlled missile : a simple explanation », *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, , no 9 , p. 485-518,1999.

[Do79] Doyle J.C., "Robustness of multivariable linear feedback systems" in *Conference Decision and Control*, 1979.

[FRO 01] FROMION V., MONACO S., NORMAND-CYROT D., « The weighted incremental norm approach : from linear to nonlinear H_2 control », *Automatica*, vol. 37, no 10, p. 1585-1592, 2001.

[Zam81] ZAMES G., « Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, no 2, p. 301-320, 1981.

[Doy81] DOYLE J., STEIN G., « Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. AC-26, no 1, p. 4-16, 1981.

[Saf81] SAFONOV M., LAUB A., HARTMANN G., « Feedback Properties of Multivariable Systems : The Role and Use of the Return Difference Matrix », *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 26, no 1, p. 47-67, 1981.

[Yak67] V.A. Yakubovich. The method of matrix inequalities in the stability theory of non-linear control systems, I, II, III. *Automation and Remote Control*, 25-26(4):905-917, 577-592,753-763; April 1967

Bibliographie

[Will 71] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-16(6):621-634, December 1971.

[Van 92] A. J. Van der Schaft, "L₂-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control" *IEEE Trans. Automatic Control* Vol. 37, pp. 770-784, 1992.

[IsAs 92] A. Isidori, A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 37. No. 9, 1992.

[IsKa 95] A. Isidori, W. Kang, "H_∞ Control via Measurement Feedback for Nonlinear Systems," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 40, No. 3, pp.466-472, 1995.

[Is 93] A. Isidori "H_∞ Control via Measurement Feedback for Affine Nonlinear Systems," *International Journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 4, pp 553-572, 1993.

[BaHe 93] J.A. Ball, J.W. Helton and M.L. Walker, "Control for nonlinear systems with output feedback," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 38, pp. 546-559, 1993.

[Ven 05] Venkataramanan Balakrishnan "Linear Matrix Inequalities in Robust Control" West Lafayette, IN 47907-1285 USA, 2005.

[Lar02] Philippe de Larminat « Commande des systèmes linéaires ». *Lavoisier*, 2002.

[Lar09] Edouard Laroche "Commande Robuste ; Analyse de la Robustesse des Systèmes Asservis". *Université de Strasbourg Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg* 3A - Option ISAV.2008-2009.

[GhaNi 00] L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, editors, 'Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control', *Advances in Control and Design*. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[HaSaKo 92] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic, "Nonlinear control via approximate input-Output linearization: the ball and beam example," *IEEE Tran. Automat. Contr.* vol. 37. No. 3, Mar. 1992.

Bibliographie

[Asep 03] Asep Najmurokhman. "On solvability of output feedback Nonlinear H_∞ Control problem using nonlinear matrix inequalities approach ". *Journal of Electrical Engineering and Information Technology*. Vol 1, No. 1, July 2003.

[Gen 00] S.Di Gennaro. "A note on the Nonlinear H_∞ Control for Synchronous Motors". *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp 907-912, December, 2000.

[Van 91] A. J. Van der Schaft, " On a State Space Approach to Nonlinear H_∞ Approach, *System & Control Letters*, Vol. 16, pp. 1-8, 1991.

[DoFrTa 90] John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum, " Feedback control Theory". *Macmillan Publishing Co*, 1990.

[ScWe 04]Carsten Scherer and Siep Weiland "Linear Matrix Inequalities in Control" *Eindhoven University of Technology The Netherlands*, 2004.

[CoTr 04] D. F. Coutinho and A. Trofino "H ∞ Output Feedback Control for a Class of Nonlinear Systems" *Proceeding of the 2004 American Control Conference*. Boston, Massachusetts June 30 -July 2, 2004.

[ChLeFe 94] B.-S. Chen, T . Lee, and J.-H. Feng, "A non-linear H_∞ , control design in robotics systems under parametric perturbation and external disturbance", *Int. J. Control*, vol. 59, no. 12, pp. 439-461, 1994

[PaChYo 98] J. Park, W. Chung, and Y. Youm, " H_∞ Robust motion control of kinematically redundant manipulators", submitted to *Proc. 1998 IEEE / RSJ Int.Conf. Intelligent Robots and Systems*, 1998

[Is 92] A. Isidori, "Feedback control of nonlinear systems", *Int. J. Robust and Nonlinear Control* vol. 2, pp. 291-311, 1992

[PeAnJo 91] I. R. Petersen, B. O. Anderson, and E.A. Jonckheere," A First Principles Solution to the Non-singular H_∞ Control Problem", *Intl. Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 1, pp 171-185 1991.

[**BaHeWa 00**] A. Ball, W. Helton, and L. Walker, "A. J. Van der Schaft, "Nonlinear state-space H_∞ control theory," *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*; 2000.

[**HeJa**] J.W. Helton and M.R. James, "Extending H_∞ Control to Nonlinear Systems" , to appear, SIAM.

[**YaKh 97**] M. J. Yazdanpanah, K. Khorasani, and R. V. Patel, "On the domain of validity of nonlinear H_∞ control," in *Proc. 36th Conf. Decision Contr.*, San Diego, California, pp. 654-655, December 1997.

[**Ya 97**] Yazdanpanah, M.J., *Control of Flexible-Link Manipulators Using Nonlinear H_∞ Techniques*. PhD thesis, Concordia University, Montreal, Canada, August 1997.

[**ShSaKo 97**] E. Shimizu, M. Sampei, and M. Koga. Observer based design of a nonlinear H_∞ output feedback controller for linear systems with nonlinear weights. *The 36th Conference on Decision and Control*, 1997.

[**ImSuYo 94**] J. Imura, T. Sugie, and T. Yoshikawa. Strict H_∞ control of nonlinear systems based on the hamilton- jacobi inequality. *First Asian Control Conference*, pages 189-192, 1994.

[**Ge 96**] D. Georges, "Solutions of nonlinear optimal regulator and H_∞ control problems via galerkin methods," *European Journal of Control*, vol. 2, pp. 211-226, 1996.

[**IsAs 92**] A. Isidori, A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 37. No. 9, 1992.

[**IsKa 95**] A. Isidori, W. Kang, " H_∞ Control via Measurement Feedback for Nonlinear Systems," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 40, No. 3, pp.466-472, 1995.

[**Is 93**] A. Isidori " H_∞ Control via Measurement Feedback for Affine Nonlinear Systems," *International journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 4, pp 553-572, 1993.

[**BaHeWa 93**] J.A. Ball, J.W. Helton and M.L. Walker, "Control for nonlinear systems with output feedback," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 38, pp. 546-559, 1993.

[**HuYaCh 99**] S. S. Hu, P. H. Yang, and B. C. Chang, " A Successive Algorithm for Solving the Hamilton-Jacobi Equations, " *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, June 1999.

[**WiSe 94**] K.A. Wise and J.L. Sedwick, "Successive Approximation Solution of the HJI Equation," *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp.1387-1391, December, 1994.

[**HaSaKo 92**] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic," Nonlinear control via approximate input-Output linearization: the ball and beam example," *IEEE Tran. Automat. Contr.* vol. 37. No. 3, Mar. 1992.

[**JoJo 99**]Jongguuk Yim and Jong Hyeon Park "Nonlinear H_∞ Control of Robotic Manipulator" *1999 IEEE*, 1999 .

[**Di 00**] S.Di Gennaro. "A note on the Nonlinear H_∞ Control for Synchronous Motors". *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp 907-912, December, 2000.

[**DoFr 90**] John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum, " Feedback control Theory". *Macmillan Publishing Co.*1990.

[**WiSe 94**] K.A. Wise and J.L. Sedwick, "Successive Approximation Solution of the HJI Equation," *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp.1387-1391, December, 1994.

[**HuCh 98**] Shr-Shiung Hu and Bor-Chin Chang. "Design of a Nonlinear H_∞ Controller for Inverted Pendulum system" *1998 IEEE Conference on control Applications*. Sept 1998.

[**YaHuJu 00**] Pao-Hwa Yang. Shr-Shiung Hu. J.Y.Juang. "Design of a Nonlinear H_∞ Controller Applied to a Ship Control System ". *2000 IEEE Conference on control Applications*. Sept 25-27, 2000.

Bibliographie

[Ge 00] S.Di Gennaro. "A note on the Nonlinear H_∞ Control for Synchronous Motors". 39th *IEEE Conference on Decision and Control*, pp 907-912, December, 2000.

[Van 91] A. J. Van der Schaft, " On a State Space Approach to Nonlinear H_∞ Approach, *System & Control Letters*, Vol. 16, pp. 1-8, 1991.

[DoFr 90] John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum, " Feedback control Theory". *Macmillan Publishing Co.*1990

[LuDo95] W. M. Lu and J. C. Doyle, "' H_∞ Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization:' *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1668-1775, 1995.

[BoGh] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM books*, 1994.

[GhSc96] L. El Ghaoui and G. Scorletti. "Control of Rational Systems using Linear-Fractional Representations and LMIs:' *Automatica*, vol. 32, no. 9. pp. 1273-1284, 1996.

[HuLu96] . Hung and W.-M. Lu, "Nonlinear Optimal Control: Alternatives to Hamilton-Jacobi Equation:' in *Pmc. 35th IEEE Conf. Decision and Control*, (Kobe), pp. 3942-3947, 1996.

[BOY 94] BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V., *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, vol. 15 *Studies in Appl. Math.*, SIAM, Philadelphia, juin 1994.

[BGF94] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM*, Philadelphia, USA, 1994.

[CAS01] S.T. Clausen, P. Andersen & J. Stoustrup. *Robust control. Course in robust and optimal control, Aalborg University*, Denmark, April 2001.

[DF99] G. Duc & S. Font. *Commande H_∞ et μ -analyse. Hermès*, Paris, 1999.

[GL95] M. Green & D.J. Limebeer. Linear Robust Control. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New-Jersey, 1995.

[Lar96] P. De Larminat. Commande des systèmes linéaires. *Hermès*, Paris, 1996.

[SP96] S. Skogestad & I. Postlethwaite. Multivariable feedback control. *Addison-Wesley*, Canada, 1996.

[Toi98] T.H. Toivonen. Robust control methods. *Lecture notes, Abo Akademi University*, Finland, 1998.

[ZDG95] K. Zhou, J. Doyle & K. Glover. Robust and optimal control. *Prentice Hall, Upper Saddle River*, New Jersey, 1995

[GD88] K. Glover & J.C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems and Control Letters*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.

[Gah92] P. Gahinet. On the same Riccati equations arising in H_∞ control problems. *Rapports de recherche N° 1643*. INRIA, Rocquencourt, Mars 1992.

[NOS95] T. Nakayama, H. Ohmori, A. Sano, & H. Ito. A design of H_∞ stable controller. *Proceedings of the European Control Conference*, 1995.

[BeMc 98] Randal W. Beard, Timothy W. McLain, "A Practical Algorithm for Designing Nonlinear H_∞ Control Laws », *Proceedings of the American Control Conference*. Philadelphia, June 1998.

[El Ghaoui 00] , editeurs L. El Ghaoui et S.-I. Niculescu. Advances in linear matrix inequality methods in control. *Advances in Design and Control*. SIAM, Philadelphia, 2000.

Bibliographie

[Haddad 91] W.M. Haddad et D.S. Bernstein. Robust Stabilization with Positive Real Uncertainty: Beyond the Small Gain Theorem. *Systems & Control Letters*, vol. 17, pages 191–208, 1991.

[Geromel 91] J.C. Geromel, P.L.D. Peres et J. Bernussou. On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems. *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 29, no. 2, pages 381–402, Mars 1991.

[Garcia 95a] G. Garcia et J. Bernussou. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 40, no. 1, 1995.

[Hollot 80] C. Hollot et B. Barmish. Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems. *Dans 18th Allerton Conference on Communication and Computing*, pages 697–706, University of Illinois, Monticello, 1980.

[Bernussou 89] J. Bernussou, J.C. Geromel et P.L.D. Peres. A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems. *Systems & Control Letters*, vol. 13, pages 65–72, Juillet 1989.

[El Ghaoui 96b] L. El Ghaoui et G. Scorletti. Control of Rational Systems using Linear-fractional Representations and Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, vol. 32, no. 9, pages 1273–1284, 1996.

[Khargonekar 90] P.P. Khargonekar, I. R. Petersen et K. Zhou. Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory. *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 35, pages 356–361, 1990.

[Magni 97] J.F. Magni, S. Bennani et J. Terlouw. Robust flight control: A design challenge, volume 224 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin, third revised and enlarged edition, 1997.

[Peaucelle 97] D. Peaucelle. Incertitudes généralisées et stabilité quadratique. *Master's thesis, DEA Automatique et Informatique Industrielle*, Lille I, 1997.

Bibliographie

[Shim 96a] D. Shim. Equivalence Between Positive Real and Norm-Bounded Uncertainty. *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 41, no. 8, pages 1190–1193, 1996.

[Garcia 97] G Garcia, J. Bernussou, J. Daafouz et D. Arzelier. GARTEUR: Robust flight control, volume 224 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapitre Robust Quadratic Stabilization. Springer, London, 1997.

[Feron 96] E. Feron, P. Apkarian et P. Gahinet. Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 41, no. 7, pages 1041–1046, 1996.

[Fu 99] M. Fu et S. Dasgupta. Parametric Lyapunov Functions for Uncertain Systems: the Multiplier Approach. LMI Methods in optimisation, identification and control, *Seminar*, Compiègne, France, Mai 1999.

[Fu 00] M. Fu et S. Dasgupta. Advances in linear matrix inequality methods in control, chapitre 5 Parametric Lyapunov Functions for Uncertain Systems: The Multiplier Approach, pages 95–108. *Advances in Design and Control*. SIAM, 2000. edited by L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu.

[Arzelier 00b] D. Arzelier et D. Peaucelle. Robust Multi-Objective State-Feedback Control for Real Parametric Uncertainties via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *Dans ROCOND*, volume 1, pages 213–218, Prague, Juin 2000.

[Gahinet 96] P. Gahinet, P. Apkarian et M. Chilali. Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty. *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 41, no. 3, pages 436–442, 1996.

[Helmerson 99] A. Helmerson. Parameter-Dependent Lyapunov Functions Based on Linear Fractional Transformations. *Dans 14th IFAC World Congress, Beijing*, P.R. China, Juillet 1999.

Bibliographie

[Iwasaki 99] T. Iwasaki. LPV System Analysis with Quadratic Separator for Uncertain Implicit Systems. LMI Methods in optimisation, identification and control, *Seminar, Compiègne, France, Mai 1999*.

[Kazerooni 86] H. Kazerooni et P.K. Houpt. On the Loop Transfer Recovery. *Int. J. Control*, vol. 43, no. 3, pages 981–996, 1986.

[Lehtomaki 81] N.A. Lehtomaki et N.R. Sandell. Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs. *IEEE Trans. on Automat. Control*, vol. 26, no. 1, pages 75–92, Février 1981.

[Peaucelle 00b] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier et J. Bernussou. A New Robust D-Stability Condition for Real Convex Polytopic Uncertainty. *Systems & Control Letters*, vol. 40, no. 1, pages 21–30, Mai 2000.

[Zhou 96] K. Zhou, J.C. Doyle et K. Glover. Robust and optimal control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[Kharitonov 78] V.L. Kharitonov. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Differential Equations. *Diferentsialnye Uravneniya*, vol. 14, no. 11, pages 1483–1485, 1978.

[Arzelier 00a] D. Arzelier et D. Peaucelle. Quadratic Quaranteed Cost Control for Uncertain Dissipative Models: a Riccati Equation Approach. *Int. J. Control*, vol. 73, no. 9, pages 762–775, 2000.

[Arzelier 98b] D. Arzelier et D. Peaucelle. Quadratic Stability for Uncertain Generalised Models via Dynamic Output Feedback Control: a Riccati equation approach. *Dans Conference on Decision and Control*, pages 4386–4391, Tampa, Fl, USA, D´ecembre 1998.

[Golub 96] G.H. Golub et C.F. Van Loan. Matrix computation. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, third edition edition, 1996.

Bibliographie

[Peaucelle 98a] D. Peaucelle et D. Arzelier. Robust Disk Pole Assignment by State and Dynamic Output Feedback for Generalised Uncertainty Models - An LMI Approach. *Dans Conference on Decision and Control*, pages 1728–1733, Tampa, Fl, USA, D´ecembre 1998.

[Peaucelle 99c] D. Peaucelle, D. Arzelier et D. Henrion. Performance and Synthesis for Systems with H-Dissipative Uncertainty. *Dans 14th IFACWorld Congress*, volume G, pages 449–454, Beijing, China, Juillet 1999.

[Gah94] P. Gahinet. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2396-2400, 1994.

[GI94] P. Gahinet & A. Ignat. Low-order H_∞ synthesis via LMIs. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1499-1500, 1994.

Communications présentées

- [1] **“DESIGN OF A NONLINEAR H_∞ CONTROLLER FOR A PERMANENT MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR”** The International Conference on Electrical Engineering and its Applications ICEEA'08 Sidi Bel-Abbes, Algeria May 20 – 21, 2008.
- [2] **“COMPARISON OF LINEAR AND NONLINEAR H_∞ CONTROL FOR A PERMANENT MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR”** the Fifth International Multi-Conference on systems signals and Devices IEEE SSD'08, Amman- Jordan. 20-23 July 2008.
- [3] **“LINEAR AND NONLINEAR H_∞ CONTROL PROBLEM”** International Symposium on Operational Research, ISOR 2008 . Algiers, Algeria : November 2-6, 2008.
- [4] **“ H_∞ CONTROL OF THE INVERTED PENDULUM SYSTEM”** INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS AND PROCESSING INFORMATION, Guelma, Algeria. May 2-4, 2009.