

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L' INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : Automatique

Par :

Hakima HAMRI

Thème

**Contribution à la commande des systèmes à
événements discrets soumis à des contraintes
temporelles**

Devant le jury :

Said DJENNOUNE	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Président
Redouane KARA	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Rapporteur.
Ahmed MAIDI	<i>Professeur, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Examineur
Djamel BENAZZOUZ	<i>Professeur, Université M'Hamed Bougara Boumerdes</i>	Examineur
Latéfa GHOMRI	<i>MCA, Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen</i>	Examineur
Said AMARI	<i>HDR, Université Paris 13, France</i>	Invité

ANNÉE : AVRIL 2017

Avant propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens à exprimer, en premier lieu, ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse Monsieur Redouane Kara, professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour sa patience et ses multiples conseils très précieux. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité, son respect et ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail. Un grand merci Monsieur Kara...

Je témoigne toute ma reconnaissance à Monsieur Saïd Amari, Maître de conférence HDR à l'université Paris 13 pour sa patience et les nombreuses discussions enrichissantes que j'ai pu avoir avec lui et de m'avoir accueilli dans son équipe au sein de l'institut de génie mécanique et productique de Paris 13. Je tiens à le remercier pour son aide tout au long de mon travail et pour avoir aussi accepté de faire partie de jury de cette thèse.

Je tiens à remercier, Monsieur Saïd Djennoune, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Mes sincères remerciements vont également à Monsieur Ahmed Maldi, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Monsieur Djamel Benazzouz, Professeur

à l'université de Boumerdès, et Mme Latéfa Ghomri, Maitre de conférence classe A à l'université Abou Bakr Belkaid Tlemcen, de m'avoir honoré de leur présence dans ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créée.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de cette thèse.

C'est avec un grand plaisir et une grande reconnaissance que je remercie mes parents, mes frères, mes soeurs, mon fiancé, ma belle famille et tous mes amis(es) de m'avoir encouragé tout au long de ce travail.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modèles algébriques des graphes d'événements temporisés et temporels	5
1.1 Introduction	5
1.2 Réseaux de Petri	6
1.2.1 Franchissement des transitions	8
1.2.2 Principales propriétés	10
1.2.3 Les sous classes des réseaux de Petri	11
1.3 Les graphes d'événements P-temporisés	12
1.3.1 Fonctionnement au plus tôt	13
1.4 Modélisation des graphes d'événements P-temporisés	13
1.4.1 Modèle dateur dans l'algèbre $(\max,+)$	14
1.4.2 Modèle compteur dans l'algèbre $(\min,+)$	16
1.4.3 Modèle dateur d'un GE P-temporisé dans l'algèbre standard [14] . .	17
1.4.4 Modèle compteur d'un GE P-temporisé dans l'algèbre standard [14]	19
1.5 Les graphes d'événements P-temporels	20
1.5.1 Fonctionnement au plus tôt	21
1.6 Modélisation des graphes d'événements P-temporels	22
1.6.1 Modèle des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre des dioïdes	22
1.6.2 Modèle des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre stan- dard [14]	23

1.6.3	Modèle implicite des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard [15]	25
1.7	Conclusion	28
2	Commande prédictive des GE P-temporels	31
2.1	Introduction	31
2.2	Commande prédictive	32
2.2.1	Principe de base	32
2.3	Ensemble convexe	33
2.4	La fonction de Lyapunov et les inégalités linéaires matricielles	35
2.4.1	Fonction de Lyapunov	35
2.4.2	Les inégalités linéaires matricielles LMIs	36
2.5	Commande prédictive en boucle ouverte à horizon fini des graphes d'événements P-temporels	36
2.5.1	La construction du modèle	36
2.5.2	La trajectoire du référence	37
2.5.3	Formulation du problème de commande	39
2.6	Commande prédictive à horizon infini des GE P-temporels en utilisant l'approche LMI	43
2.6.1	Principe de l'approche	44
2.6.2	Formulation du problème de commande	45
2.7	Application à un réseau du transport	53
2.7.1	Généralités	53
2.7.2	Modélisation du réseau	54
2.7.3	Commande prédictive à horizon fini	58
2.7.4	Commande prédictive en utilisant l'approche LMI	61
2.8	Conclusion	65
3	Commande prédictive multiparamétrique des GE P-temporels	67
3.1	Introduction	67

3.2	Commande prédictive et optimisation paramétrique	68
3.2.1	Programmation quadratique multiparamétrique MPQP	69
3.2.2	Commande prédictive explicite résolue en terme d'un MPQP	69
3.3	$L'(A, B)$ -invariance	70
3.4	Commande prédictive multiparamétrique d'une classe de SEDs	71
3.4.1	Calcul de la séquence de commande	72
3.4.2	Formulation des contraintes paramétriques	74
3.5	Application à un système du transport	76
3.6	Conclusion	95
	Conclusion générale	97
	Abstract	107
	Bibliographie	107

Table des figures

1.1	Exemple d'un réseau de Petri marqué.	7
1.2	Phénomène du partage de ressource dans un graphe d'état.	11
1.3	Exemple d'un graphe d'événements.	12
1.4	Exemple d'un GE P-temporisé.	14
1.5	Exemple d'un GE P-temporisé.	18
1.6	Exemple d'un graphe d'événements P-temporel.	21
1.7	Exemple d'un graphe d'événements P-temporel.	23
1.8	Une partie d'un graphe d'événements P-temporel	25
1.9	Décomposition d'une place d'un graphe d'événements P-temporel.	27
1.10	Exemple d'un graphe d'événements P-temporel avec décomposition d'une place.	27
2.1	Un système de transport avec deux lignes	54
2.2	Graphe d'événements P-temporel de système du transport	55
2.3	La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des tran- sitions	60
2.4	Évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissement	61
2.5	La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissement des tran- sitions	63
2.6	Évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissements des transitions	64

3.1	Le graphe d'événements P-temporel du réseau de transport	77
3.2	Les régions critiques de la séquence de commande PAW.	92
3.3	La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des transitions.	93
3.4	Évolution des temps de séjour des marques dans les places du GE P-temporel en fonction de nombre de franchissements des transitions.	94

Notations

\mathcal{R} :	Un réseau de Petri.
p_i :	Place d'un réseau de Petri.
u_j :	Transition source d'un réseau de Petri.
t_j :	Transition d'un réseau de Petri.
P :	L'ensemble des places d'un réseau de Petri.
T :	L'ensemble des transitions d'un réseau de Petri.
m :	Nombre de places d'un réseau de Petri.
n :	Nombre de transitions d'un réseau de Petri.
\bar{n} :	Nombre de transitions source d'un réseau de Petri.
ε :	L'ensemble des arcs d'un réseaux de Petri.
w_{ij}^- :	Poids de l'arc qui relie p_i à t_j .
w_{ji}^+ :	Poids de l'arc qui relie t_j à p_i .
${}^o t_j$:	L'ensemble des places d'entrées d'une transition t_j .
t_j^o :	L'ensemble des places de sorties d'une transition t_j .
${}^o p_i$:	L'ensemble des transitions d'entrées d'une place p_i .
p_i^o :	L'ensemble des transitions de sorties d'une place p_i .
$M_0(p_i)$:	Le nombre de marques contenues initialement dans la place p_i .
\mathbb{N} :	L'ensemble des nombres entiers.
$M_k(p_i)$:	Marquage d'un réseau de Petri à l'événement k .
W^- :	Matrice d'incidence avant.
W^+ :	Matrice d'incidence arrière.
W :	Matrice d'incidence.

σ :	Séquence de franchissement.
d_i :	Temporisation d'une place.
Q^+ :	Ensembles des nombres rationnels.
R :	Ensembles des nombres réels.
$\theta_j(k)$:	La date de $k^{i\text{me}}$ franchissement de la transition t_j .
\oplus :	opérateur maximum dans l'algèbre $(\max, +)$.
\otimes :	addition dans l'algèbre $(\max, +)$.
\wedge :	opérateur minimum dans l'algèbre $(\min, +)$.
\otimes :	addition dans l'algèbre $(\min, +)$.
A^* :	L'étoile de Kleene de la matrice A .
E^L :	L'inverse à gauche de la matrice E .
λ :	Temps de cycle.
c :	La cyclicité.
μ :	Vecteur unité.
I_n :	matrice identité.
0_n :	matrice nulle.

Introduction générale

Les systèmes à événements discrets sont des systèmes qui évoluent dans le temps par occurrence d'événements. La modélisation est la première étape à franchir lors de l'étude du comportement d'un système à événements discret. Deux types d'approches sont disponibles pour effectuer cette étude du comportement : la simulation et l'analyse par des outils de modélisation mathématique tel que : les files d'attente, les chaînes de Markov, les automates et les réseaux de Petri. Chacun de ces outils vise un problème donné si ce n'est pas une taille de système donné. Nous nous intéressons dans cette thèse à l'outil réseau de Petri. Les réseaux de Petri sont utilisés pour modéliser le comportement dynamique des systèmes à événements discrets. Ils permettent de modéliser les relations de précédences et les interactions structurelles d'événements stochastiques, concurrents, et asynchrones. De plus, leur nature graphique permet une meilleure visualisation des systèmes complexes. Ils sont de nos jours largement utilisés dans la modélisation, l'évaluation des performances et la commande des systèmes à événements discrets à contraintes de temps [1, 2, 3, 4, 5]. Les réseaux de Petri représentent un outil de modélisation hiérarchisé avec un support mathématique bien développé. Ils permettent d'entreprendre l'analyse et la conception de systèmes complexes.

Les systèmes à contraintes de temps de séjour sont très fréquents dans l'industrie [6, 7, 8] et dans les systèmes de transports (Ateliers de galvanoplasties, Systèmes ferroviaires)[9, 10]. Pour cette classe de systèmes, le facteur temps est une composante primordiale. Il affecte les performances et la validité fonctionnelle du système. Le procédé peut se retrouver dans un état interdit si une opération donnée est produite plus tard que prévue. Il est donc

nécessaire de disposer de techniques de vérifications pour assurer un bon fonctionnement et garantir le respect de ces contraintes de temps. Pour répondre à ces besoins, Khansa [11] a introduit les réseaux de Petri P-temporels où un intervalle de temps est associé aux places avec les concepts de mort de marque et de fonctionnement admissible. Les questions de vérification ces propriétés temporelles ont été traitées par plusieurs auteurs qui ont abouti à des résultats importants [12]. Dans notre cas, nous formulons la question en terme d'un problème de commande. En d'autres termes, nous cherchons à calculer des commandes qui permettent de garantir le bon fonctionnement du système.

Nous nous intéressons dans cette thèse à une classe particulière de réseaux de Petri P-temporels à savoir : les graphes d'événements P-temporels. Pour cette classe de systèmes, plusieurs modèles algébriques ont été développés dans la littérature que ce soit dans l'algèbre des dioïdes $(\max,+)$ ou $(\min,+)$ [13] ou dans l'algèbre standard [14, 15]. Dans ce travail, nous avons utilisé le modèle algébrique proposé par Kara [15] dans l'algèbre standard pour modéliser le comportement des graphes d'événements P-temporels. Sous certaines hypothèses, ce modèle devient linéaire invariant discret ce qui permet d'utiliser les concepts très utilisés dans la commande de systèmes linéaires continus.

L'objectif du présent travail est de synthétiser des lois de commande prédictive pour commander une classe des systèmes à événements discrets modélisés par des modèles implicites dans l'algèbre standard.

La commande prédictive fait partie des techniques de commande très avancée dans le domaine industriel [16, 17, 18, 20]. C'est une méthodologie basée sur l'optimisation à chaque pas de calcul sur un horizon glissant d'un certain critère de coût. Une fois le problème d'optimisation est résolu, seule le premier élément de la séquence calculée est appliqué au système [21, 22, 23]. Récemment cette commande a été étendue à la classe des systèmes à événements discrets [24, 25, 26] vu sa simplicité de mise en oeuvre et sa capacité de s'adapter à plusieurs modèles.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à calculer une commande en boucle

ouverte sur un horizon de prédiction fini. Cette commande permet de suivre un comportement 1-périodique tout en respectant les temps de séjour des marques dans les places des graphes d'événements P-temporels. Pour garantir la robustesse et la stabilité de tels systèmes, on s'est penché sur le calcul de commandes en boucle fermée sur des horizons infinis [27]. Sans s'éloigner de principe de la commande prédictive, l'approche proposée par Kothare [28] consiste à minimiser une borne supérieure d'une fonction objective sur un horizon infini. Cette formulation conduit à la résolution d'un problème d'optimisation convexe à base d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). L'approche est choisie vu ses avantages en robustesse et en stabilités du fait de l'existence d'une fonction de Lyapunov comme fonction objective et le concept d'invariance positive. Dans un second temps, le travail a été étendu à la commande prédictive explicite. Cette technique permet de calculer des lois de commande de type affine par morceaux (PWA) sur un horizon de prédiction fini [29].

La thèse est structurée en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous présentons les rappels nécessaires qui concernent l'outil réseaux de Petri ainsi que leurs propriétés et leur principe de fonctionnement. Des modèles algébriques des graphes d'événements P-temporisés et P-temporels sont présentés. On distingue les modèles obtenus dans l'algèbre $(\max, +)$ (resp. $(\min, +)$) basés sur les fonctions dateurs (resp. compteurs), des modèles écrits dans l'algèbre standard et qui s'appuie sur les mêmes fonctions.
- Dans le deuxième chapitre, des rappels sur la commande prédictive, les ensembles polyédraux et les ensembles ellipsoïdaux sont présentés. Ce chapitre est consacré à la commande de systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporels en utilisant l'approche commande prédictive. Une commande prédictive en boucle ouverte est calculée sur un horizon fini, puis des gains de retour d'état sont obtenus sur un horizon infini par la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs. Ces gains permettent de suivre un comportement 1-périodique en ga-

rantissant le respect des contraintes sur la variable de commande. Nous avons montré que le respect des contraintes est assuré par l'inclusion de l'ellipsoïde défini par la fonction de Lyapunov dans le polyèdre des contraintes. Cette inclusion est vérifiée par le calcul de la distance entre les hyperplans qui forment ce polyèdre et l'ellipsoïde en question. L'approche est illustrée sur un système de transport vu comme une classe de systèmes à événements discrets.

- Le troisième chapitre est consacré à la commande des graphes d'événements P-temporels en utilisant la commande prédictive multiparamétrique. Nous avons montré qu'en utilisant le concept d'(A,B)-invariance, la commande prédictive en boucle ouverte sur un horizon fini peut être reformulée sous forme d'une programmation multiparamétrique dont la solution est donnée par des fonctions affines par morceaux (PWA). Les gains de commande calculés permettent de suivre une trajectoire désirée avec respect de contraintes sur la variable de commande et la variable d'état. Cette approche est appliquée à un système de transport en commun.

Chapitre 1

Modèles algébriques des graphes d'événements temporisés et temporels

1.1 Introduction

Les réseaux de Petri (RdPs) sont des modèles très utilisés pour la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes à événements discrets. Ils sont de nos jours utilisés dans divers domaines de l'industrie manufacturière, du transport en commun et des réseaux de télécommunications.

Afin de prendre en considération le facteur temps dans la modélisation des SEDs, différents types de modèles ont été introduits dans la littérature. Les RdPs T-temporisés introduits par Ramchandani [30] permettent de prendre en considération les temporisations au niveau des transitions de réseau de Petri. Le concept a été élargi aux places de RdP par Sifakis [31, 32, 33], on parle ainsi des réseaux de Petri P-temporisés. Les réseaux de Petri P-temporels sont une sous classe des RdPs P-temporisés qui permettent de prendre en considération la contrainte de temps de séjour que l'on rencontre souvent dans l'industrie électrochimique. Ce formalisme a été introduit par Khansa [11, 34]. Il s'agit d'associer des intervalles de temps aux places de réseau de Petri afin de prendre en considération la contrainte temporelle du temps de séjour des marques dans ces places.

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps quelques définitions et forma-

lismes concernant les réseaux de Petri. Ensuite, nous discutons de deux classes importantes des réseaux de Petri qui sont les graphes d'événements P-temporisés et les graphes d'événements P-temporels ainsi que leur représentation dans l'algèbre des dioïdes et dans l'algèbre standard.

1.2 Réseaux de Petri

Un réseau de Petri comporte deux type de noeuds, les places et les transitions. Une place est représentée par un cercle et une transition par un rectangle. Les places et les transitions sont reliées par des arcs. Un arc est orienté, il relie soit une transition à une place ou une place à une transition. On associe à chaque arc un entier positif nommé poids. Dans cette partie, nous rappelons quelques concepts de base concernant les réseaux de Petri qui seront utilisés toute au long de ce travail. Pour plus de détail sur les RdPs voir [35, 36, 37, 38].

Définition 1 (*Un réseau de Petri*)

Formellement un RdP est un quadruplet $\mathcal{R} = (P, T, \varepsilon, w)$, où :

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ est un ensemble fini de m places.
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ est un ensemble fini de n transitions.
- $\varepsilon \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ est un ensemble fini d'arcs.
- $w : \varepsilon \rightarrow \mathbb{N}^+$ est la fonction de poids associée aux arcs.

Quand les poids associés aux arcs sont unitaire le réseau de Petri est ordinaire

- w_{ij}^- est associé au poids de l'arc qui relie la place p_i à la transition t_j .
- w_{ji}^+ est associé au poids de l'arc qui relie la transition t_j à la place p_i .

Une place p_i est dite en amont (en entrée) d'une transition t_j s'il existe un arc orienté de la place p_i vers la transition t_j . Une place p_i est dite en aval (en sortie) d'une transition t_j s'il existe un arc orienté de la transition t_j vers la place p_i .

Dans tout ce travail, l'ensemble des places d'entrées (respectivement de sorties) d'une transition t_j est noté ${}^o t_j$ (respectivement t_j^o). L'ensemble des transitions d'entrées (respectivement de sorties) d'une place p_i est noté ${}^o p_i$ (respectivement p_i^o).

Une transition (respectivement une place) sans places (respectivement transitions) d'entrées est appelée transition (respectivement place) source. Une transition (respectivement une place) sans places (respectivement transitions) de sorties est appelée transition (respectivement une place) puits.

Définition 2 (*RdP marqué*)

Un réseau de Petri est dit marqué si chaque place contient un nombre positif ou nul de marque (jeton) représentée par un point noir dans cette place.

D'une façon formelle, un RdP marqué est représenté par un couple (\mathcal{R}, M) où :

- \mathcal{R} : est un réseau de Petri.
- $M : P \rightarrow \mathbb{N}$

$$p_i \longmapsto M(p_i)$$

$M(p_i)$ est la fonction de marquage associée au nombre de marques contenues dans la place p_i à un instant donné. Le nombre de marques contenues initialement dans la place p_i est noté $M_0(p_i)$.

Exemple 1 Soit le réseau de Petri marqué donné par la Figure 1.1.

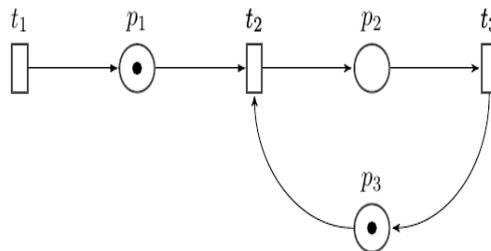


FIGURE 1.1: Exemple d'un réseau de Petri marqué.

Le graphe de la figure 1.1 est composé des éléments suivants :

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ l'ensemble des places.
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ l'ensemble des transitions.
- $M_0(p_1) = M_0(p_3) = 1, M_0(p_2) = 0$.

$M_0 = (1, 0, 1)^T$ est le vecteur de marquage initial.

- $w_{11}^+(t_1, p_1) = w_{22}^+(t_2, p_2) = w_{33}^+(t_3, p_3) = 1.$
- $w_{12}^-(p_1, t_2) = w_{23}^-(p_2, t_3) = w_{32}^-(p_3, t_2) = 1.$

1.2.1 Franchissement des transitions

Une transition t_j est dite franchissable ou tirable si chaque place d'entrée de la transition t_j contient un nombre de marques au moins égal au poids associé à l'arc qui relie cette place à la transition t_j .

Autrement dit, t_j est franchissable si,

$$\forall p_i \in {}^o t_j, \quad M(p_i) \geq w_{ij}^- \quad (1.1)$$

Le franchissement d'une transition consiste à retirer un nombre de marques égal à w_{ij}^- de chaque place d'entrée de la transition t_j et d'ajouter un nombre de marques égal à w_{ji}^+ à chaque place de sortie de la transition t_j .

Après chaque franchissement d'une transition, un nouveau marquage est obtenu.

soit $M_k(p_i)$ le marquage d'un réseau à un instant donné, le franchissement d'une transition t_j conduit à un nouveau marquage noté $M_{k+1}(p_i)$ tel que :

$$M_{k+1}(p_i) = M_k(p_i) + w^+(t_j, p_i) - w^-(p_i, t_j). \quad (1.2)$$

Séquence de franchissement σ

une séquence de franchissement σ est une suite de transitions $t_1 t_2 \cdots t_n$ qui peuvent être franchies successivement à partir d'un marquage donné.

Vecteur caractéristique S

Soit σ une séquence de franchissement réalisable à partir d'un marquage M_i , le vecteur caractéristique S est le vecteur de dimension n (nombre de transitions du RdP) dont chaque élément i correspond au nombre de franchissements de la transition t_j dans la séquence σ .

Matrice d'incidence W

Pour un RdP de n transitions et de m places. La matrice d'incidence W est une matrice de $(m \times n)$ définie comme suit :

$$W = W^+ - W^-, \quad (1.3)$$

- $W^- = [w_{ij}^-]$, avec $[w_{ij}^-] = w^-(p_i, t_j)$ est la **matrice d'incidence avant**, chaque élément de cette matrice correspond au nombre de jetons à enlever de la place p_i en franchissant la transition t_j .
- $W^+ = [w_{ji}^+]$, avec $[w_{ji}^+] = w^+(t_j, p_i)$ est la **matrice d'incidence arrière**, chaque élément de cette matrice correspond au nombre de jetons à rajouter à la place p_i en franchissant la transition t_j .

La connaissance de la matrice d'incidence et du vecteur caractéristique S , pour une séquence de franchissement réalisable à partir d'un marquage initial M_0 , permet de déterminer l'évolution du vecteur de marquage M_k dont l'équation fondamentale est la suivante :

$$M_k = M_0 + W \cdot S \quad (1.4)$$

Reprenons l'exemple de la Figure 1.1. L'évolution du vecteur de marquage est la suivante,

$$\begin{array}{ccc} M_0 & & M_1 & & M_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{franchissement de } t_2} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{franchissement de } t_3} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

on dit que, $M_2 = (0, 0, 1)^T$ est obtenu par le franchissement de la séquence $\sigma = t_2 t_3$ à partir de marquage initial $M_0 = (1, 0, 1)^T$,

$$M_2 = M_0 + W \cdot S,$$

avec,

$$W^+ = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ p_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ p_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, W^- = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ p_2 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2.2 Principales propriétés

Les principales propriétés des réseaux de Petri peuvent être classées en deux catégories. Les propriétés dynamiques qui dépendent du marquage initial et sont liées à l'évolution du réseau (borné, vivant, réinitialisable,..). Les propriétés structurelles ne dépendent pas du marquage initial et sont liées à la structure du réseau.

Définition 3 *Bornitude* une place p_i d'un réseau de Petri est dite k -bornée pour un marquage initial M_0 s'il existe un entier positif k tel que, pour tout marquage accessible à partir de marquage M_0 , le nombre de marques dans la place p_i reste inférieur ou égal à k . Un réseau de Petri marqué est dit k -borné, si toutes les places de ce réseau sont k -bornées. Lorsqu'un réseau est 1-borné, le réseau est dit *sauf*.

Définition 4 *Accessibilité* la vérification de l'accessibilité d'un réseau de Petri marqué consiste à savoir si on peut atteindre un marquage M_k à partir d'un marquage M_0 . Le marquage M_k est accessible à partir de M_0 s'il existe une séquence de franchissement qui mène du marquage M_0 à un marquage M_k .

Définition 5 *Vivacité* une transition t_j est dite vivante, si quel que soit le marquage atteignable on peut construire une séquence de franchissement qui contient la transition t_j . Un RdP est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

Définition 6 *Blocage* un blocage dans un RdP est un marquage pour lequel aucune transition n'est franchissable.

1.2.3 Les sous classes des réseaux de Petri

Les sous classes présentées dans ce travail permettent de prendre en considération les phénomènes de synchronisation, de parallélisme et de concurrence.

Graphes d'états

Un graphe d'état est un réseau de Petri ordinaire marqué où chaque transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie.

Cette classe permet de modéliser les phénomènes de concurrence et de partage de ressources mais pas les phénomènes de synchronisation et de parallélisme.

Exemple 2 La Figure 1.2 est une partie d'un graphe d'état qui modélise un phénomène de partage de ressource.

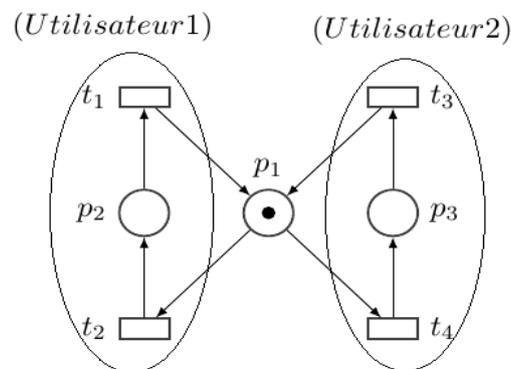


FIGURE 1.2: Phénomène du partage de ressource dans un graphe d'état.

La marque présentée dans la place p_1 représente une ressource mise en commun entre l'utilisateur 1 et l'utilisateur 2. Le franchissement de la transition t_2 entraîne la consommation de la marque de la place p_1 , ce qui rend le franchissement de la transition t_4 , associée à l'utilisateur 2, impossible. Alors le franchissement de la transition t_4 doit attendre une marque qui entre dans la place p_1 par le franchissement de la transition t_1 de l'utilisateur 1.

Graphes d'événements GE

Un graphe d'événements est un réseau de Petri ordinaire où chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.

Cette classe permet de modéliser les phénomènes de synchronisation et de parallélisme mais pas les phénomènes de concurrence ou de partage de ressources.

Exemple 3 *Le graphe de la Figure 1.3 est un graphe d'événements qui modélise un phénomène de parallélisme et de synchronisation.*

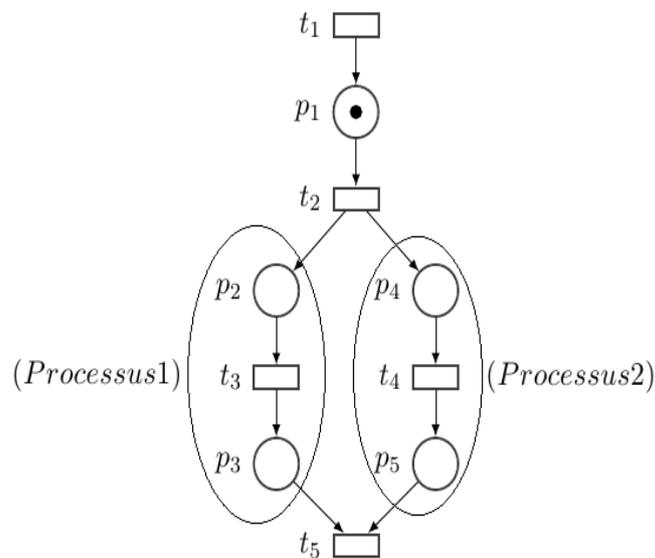


FIGURE 1.3: Exemple d'un graphe d'événements.

Après le franchissement de la transition t_2 qui rajoute une marque à la place p_2 et une autre marque à la place p_4 , les transitions t_3 et t_4 peuvent être franchies en parallèle. Les opérations des deux processus sont aussi en synchronisation. Le franchissement de la transition t_5 ne peut se faire que si la place p_3 de processus 1 et la place p_5 de processus 2 contiennent chacune au moins une marque.

1.3 Les graphes d'événements P-temporisés

Les systèmes à événements discrets sont généralement des systèmes où l'évolution est soumise à des contraintes de temps. L'introduction de ce paramètre dans la modé-

lisation de tels systèmes a donné naissance aux réseaux de Petri temporisés. Un graphe d'événements est dit temporisé si des temporisations sont associées aux places et/ou transitions. Quand la temporisation est associée aux places, le graphe d'événements est dit P-temporisé. Quand la temporisation est associée aux transitions, le graphe d'événements est dit T-temporisé.

Définition 7 *Graphe d'événements P-temporisé*

Un graphe d'événements P-temporisé est représenté par le doublet (\mathcal{R}, d_i) tel que :

- \mathcal{R} est un graphe d'événements marqué.
- $d_i : P \rightarrow \mathbb{Q}^+$ est la temporisation associée à la place p_i , elle représente la durée d'indisponibilité d'une marque après son arrivée dans la place p_i . Autrement dit, d_i est le temps de séjour minimum d'un jeton dans la place p_i avant qu'il participe au franchissement de la transition située en aval.

Dans un graphe d'événements P-temporisé, il n'y a pas de conditions temporelles maximum sur le temps de séjour d'un jeton dans une place.

1.3.1 Fonctionnement au plus tôt

Le fonctionnement au plus tôt d'un graphe d'événements temporisé se base sur le principe que toutes les transitions sont franchies dès que possible. Une transition t_j est validée s'il y a au moins un jeton disponible dans chacune des places en aval. Un jeton dans une place p_i peut participer au franchissement d'une transition t_j située en aval dès que le temps de séjour minimum se termine.

1.4 Modélisation des graphes d'événements P-temporisés

Le comportement d'un graphe d'événements P-temporisé peut être décrit par un modèle linéaire dans l'algèbre $(\max, +)$ ou $(\min, +)$ en fonction de dateurs ou de compteurs. Une autre manière de modéliser a été introduite dans [14]. Il s'agit de modéliser le comportement d'un graphe d'événements P-temporisé par un système d'inéquations dans l'algèbre standard.

1.4.1 Modèle dateur dans l'algèbre $(\max, +)$

Un dateur est une application croissante de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z} \cup (-\infty, +\infty)$ qui associe à chaque transition t_j une fonction $\theta_j(k)$ qui désigne la date à laquelle le $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition t_j se produit.

La mise en équations d'un graphe d'événements temporisé en utilisant les inégalités en dateur décrit le comportement du système par un modèle linéaire dans l'algèbre $(\max, +)$.

Nous présentons ce modèle au travers d'un exemple.

Exemple 4 Soit le graphe d'événements P -temporisé donné par la Figure 1.4

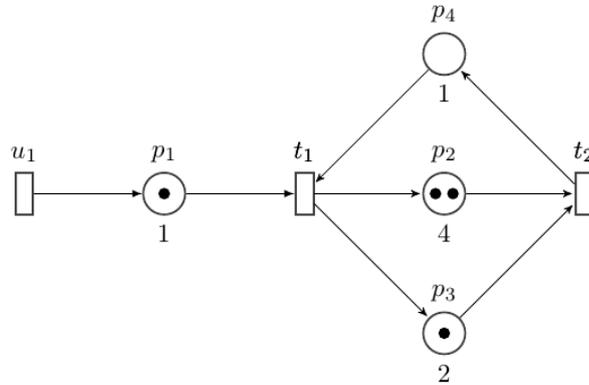


FIGURE 1.4: Exemple d'un GE P -temporisé.

Le graphe de la Figure 1.4 est composé d'une transition source u_1 , de deux transitions internes t_1 et t_2 et de quatre places p_1 , p_2 , p_3 et p_4 temporisées avec $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 2$ et $d_4 = 1$ (respectivement).

Dans la mise en équations, nous suivons les règles générales des conditions initiales. Les jetons situés dans chaque place p_i à $k = 1$ sont disponibles depuis $-\infty$, c'est à dire $\forall k \leq 0$, $\theta_i(k) = -\infty$, ils peuvent contribuer immédiatement aux franchissements des transitions.

Dans cet exemple, aucun jeton n'est présent dans la place p_4 et un seul jeton est présent dans la place p_1 . Selon le fonctionnement au plus tôt, une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. La date de la $k^{\text{ième}}$ activation de la transition t_1 est conditionnée par la date de la $(k - 1)^{\text{ième}}$ activation de la transition u_1 (un jeton est présent dans la place

p_1) et la date de la $k^{\text{ième}}$ activation de la transition t_2 (aucun jeton n'est présent dans la place p_4). Nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(k) \geq 1 + u_1(k-1), \\ \theta_1(k) \geq 1 + \theta_2(k), \\ \theta_2(k) \geq 4 + \theta_1(k-2), \\ \theta_2(k) \geq 2 + \theta_1(k-1). \end{cases}$$

Les inéquations peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(k) \geq \max(1 + u_1(k-1), 1 + \theta_2(k)) \\ \theta_2(k) \geq \max(4 + \theta_1(k-2), 2 + \theta_1(k-1)). \end{cases}$$

Dans les dioïdes $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, (\max, +))$ où $a \oplus b = \max(a, b)$ et $a \otimes b = (a+b)$, $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$, ces équations sont réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(k) \geq 1 \otimes u_1(k-1) \oplus 1 \otimes \theta_2(k) \\ \theta_2(k) \geq 4 \otimes \theta_1(k-2) \oplus 2 \otimes \theta_1(k-1). \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(k-1) \\ \theta_2(k-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(k-2) \\ \theta_2(k-2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k-1)$$

$$\theta(k) \geq A_0 \otimes \theta(k) \oplus A_1 \otimes \theta(k-1) \oplus A_2 \otimes \theta(k-2) \oplus B \otimes u(k) \oplus B_2 \otimes u(k-1)$$

avec,

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

D'une manière générale le système d'inéquations en dateur dans l'algèbre $(\max, +)$ s'écrit comme suit :

$$\theta(k) \geq \bigoplus_{i=0}^L A_i \theta(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^L B_j u(k-j), \quad (1.5)$$

avec, $L = \max(M_0)$ le plus grand marquage initial des places du GE P-temporisé. M_0 est le vecteur de marquage initial des places. L'équation (1.5) est appelée forme implicite en

dateur dans l'algèbre $(\max, +)$.

La forme explicite est donnée par l'équation suivante :

$$\theta(k) \geq \bigoplus_{i=1}^L A_0^* A_i \theta(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^L A_0^* B_j u(k-j). \quad (1.6)$$

Avec A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 .

1.4.2 Modèle compteur dans l'algèbre $(\min, +)$

Un compteur est une application croissante de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z} \cup (-\infty, +\infty)$ qui associe à chaque transition une fonction $\theta(t)$ qui indique le nombre de franchissement des transitions jusqu'à l'instant considéré. Le comportement d'un graphe d'événements temporisé peut être aussi représenté par des équations en compteurs dans l'algèbre $(\min, +)$.

Nous présentons ce modèle au travers de l'exemple de la Figure (1.4). En considérant les fonctions compteurs dans l'algèbre $(\min, +)$, nous obtenons les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(k) \leq 1 + u_1(t-1), \\ \theta_1(k) \leq \theta_2(t-1), \\ \theta_2(k) \leq 2 + \theta_1(t-4), \\ \theta_2(k) \leq 1 + \theta_1(t-2). \end{cases}$$

Le système d'inéquations s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(k) \leq \min(1 + u_1(t-1), \theta_2(t-1)), \\ \theta_2(k) \leq \min(2 + \theta_1(t-4), 1 + \theta_1(t-2)). \end{cases}$$

Dans l'algèbre $(\min, +)$ où $a \oplus b = \min(a, b)$, $a \otimes b = a + b$, ces équations sont réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(k) \leq 1u_1(t-1) \oplus \theta_2(t-1), \\ \theta_2(k) \leq 2\theta_1(t-4) \oplus 1\theta_1(t-2). \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t-1) \\ \theta_2(t-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t-2) \\ \theta_2(t-2) \end{pmatrix} \oplus \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t-3) \\ \theta_2(t-3) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t-4) \\ \theta_2(t-4) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t) \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t-1) \\ \theta(t) \leq A_0 \otimes \theta(t) \oplus A_1 \otimes \theta(t-1) \oplus A_2 \otimes \theta(t-2) \oplus A_3 \otimes \theta(t-3) \oplus A_4 \otimes \theta(t-4) \oplus B \otimes u(t) \oplus B_2 \otimes u(t-1)$$

avec,

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

D'une manière générale le système d'équations en compteur dans l'algèbre $(\min, +)$ s'écrit comme suit :

$$\theta(t) \leq \bigoplus_{i=0}^T A_i \theta(t-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^T B_j u(t-j), \quad (1.7)$$

avec,

$T = \max(d_i)$ est la plus grande temporisation des places du GE P-temporisé. L'équation 1.7 est appelée forme implicite en compteur dans l'algèbre $(\min, +)$.

L'équation explicite est donnée sous cette forme :

$$\theta(t) \leq \bigoplus_{i=1}^T A_0^* A_i \theta(t-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^T A_0^* B_j u(t-j). \quad (1.8)$$

Avec A_0^* est l'étoile de Kleene de la matrice A_0 .

1.4.3 Modèle dateur d'un GE P-temporisé dans l'algèbre standard [14]

La forme générale d'une représentation polyédrique dans l'algèbre standard est la suivante :

$$G \cdot \begin{pmatrix} \theta(k-M) \\ \vdots \\ \theta(k-1) \\ \theta(k) \end{pmatrix} \leq -d. \quad (1.9)$$

Où,

- $\theta_j(k)$ est la date de $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition t_j .
- M est la plus grande composante de vecteur M_0 .
- d est le vecteur des temporisations.
- $G = (G_M G_{M-1} \cdots G_1 G_0)$ contient les poids des arcs entrants et sortants relativement

à chaque place p_i .

- La matrice $G = (G_M G_{M-1} \cdots G_1)$ contient les poids des arcs entrants dans chaque place p_i avec le signe plus.
- La matrice $G = G_0$ contient les poids des arcs sortant dans chaque place p_i avec le signe moins.

D'une manière générale la matrice G est représentée comme suit :

$$G = \begin{matrix} & \theta(k-m) & & & \theta(k) \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_m & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_m \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La matrice G d'un graphe d'événements représente les relations des poids des arcs.

D'où nous pouvons déduire la relation avec la matrice d'incidence W

$$W = \sum_{i=0}^M G_i$$

Exemple 5 Soit le graphe d'événements P-temporisé donné par la Figure 1.5

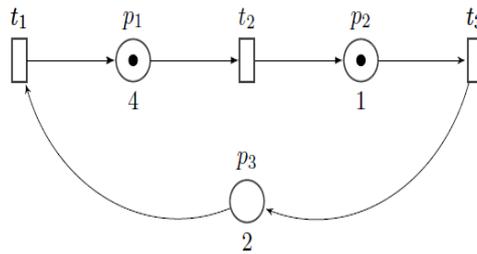


FIGURE 1.5: Exemple d'un GE P-temporisé.

Les équations en dateurs associées au graphe de la Figure 1.5 sont données comme suit :

$$\begin{cases} \theta_2(k) \geq \theta_1(t-1) + 4, \\ \theta_3(k) \geq \theta_2(t-1) + 1, \\ \theta_1(k) \geq \theta_3(k) + 2, \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes aux :

$$\begin{cases} \theta_1(t-1) - \theta_2(k) \leq -4, \\ \theta_2(t-1) - \theta_3(k) \leq -1, \\ \theta_3(k) - \theta_1(k) \leq -2, \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(k-1) \\ \theta_2(k-1) \\ \theta_3(k-1) \\ \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \\ \theta_3(k) \end{pmatrix} \leq - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Toutes les places de GE P-temporisé ont au plus un jeton. d'où la plus grande composante de vecteur M_0 est 1. Le modèle algébrique est donné sous la forme suivante :

$$G \cdot \begin{pmatrix} \theta(k-1) \\ \theta(k) \end{pmatrix} \leq -d$$

avec,

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & & t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1.4.4 Modèle compteur d'un GE P-temporisé dans l'algèbre standard [14]

La forme générale d'une représentation polyédrique en compteur dans l'algèbre standard est donnée sous la forme suivante :

$$F \cdot \begin{pmatrix} \theta(t-d) \\ \vdots \\ \theta(t-1) \\ \theta(t) \end{pmatrix} \leq M_0. \quad (1.10)$$

Où,

- $\theta_j(t)$ est le nombre de franchissement de la transition t_j .
- M_0 est le vecteur de marquage initial des places.
- d est la plus grande composante de vecteur des temporisations des places du GE P-temporisé.
- $F = (F_T F_{T-1} \cdots F_1 F_0)$.

1.5 Les graphes d'événements P-temporels

Les graphes d'événements P-temporels sont une classe des réseaux de Petri P-temporels introduite par Khansa [11] pour modéliser des systèmes à événements discrets dont la contrainte de temps associée aux places appartient à un intervalle de temps bien déterminé.

Définition 8 *Un graphe d'événements P-temporel est représenté par le doublet (\mathcal{R}, IS)*

avec :

- \mathcal{R} : est un graphe d'événements marqué.
- $IS : P \rightarrow \mathbb{Q}^+ \times (\mathbb{Q}^+ \cup \infty)$

$IS_i = [a_i, b_i]$ avec,

$$0 \leq a_i \leq b_i$$

IS_i est l'intervalle de temps de séjour d'une marque dans une place p_i .

Le jeton qui arrive dans une place p_i ne peut participer au franchissement de ses transitions de sortie qu'après avoir séjourné un temps a_i qui correspond à la borne minimale de l'intervalle de temps. Le jeton reste disponible durant $b_i - a_i$ unité de temps. Après un séjour b_i correspond à la borne maximale de l'intervalle de temps, le jeton doit quitter la place p_i . Sinon, le jeton se retrouve dans un état de mort, ce qui peut entraîner un blocage de réseau.

1.5.1 Fonctionnement au plus tôt

Le franchissement d'une transition dans un graphe d'événements P-temporel suit les règles suivantes :

- Toutes les places d'entrées de la transition à franchir doivent contenir au moins un jeton disponible ayant séjourné au minimum a_i unités de temps.
- Le jeton dans la place d'entrée de la transition ne doit pas avoir séjourné plus de b_i unités de temps.

Dans le fonctionnement au plus tôt d'un graphe d'événements P-temporel, une transition est franchie dès que les jetons dans les places en amont sont disponibles.

Exemple 6 Soit le graphe d'événements P-temporel donné par la Figure 1.6

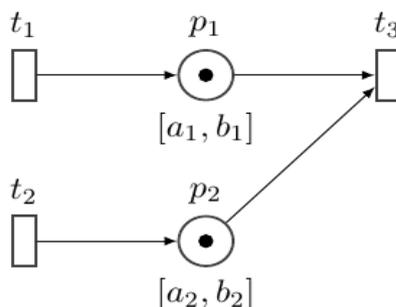


FIGURE 1.6: Exemple d'un graphe d'événements P-temporel.

Soit $\theta_1(k)$ (respectivement $\theta_2(k)$) la date de franchissement de la transition t_1 (respectivement t_2). La date de franchissement de la transition t_3 doit respecter les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \theta_3(k) \geq \theta_1(k-1) + a_1, \\ \theta_3(k) \geq \theta_2(k-1) + a_2, \\ \theta_3(k) \leq \theta_1(k-1) + b_1, \\ \theta_3(k) \leq \theta_2(k-1) + b_2. \end{cases}$$

$$\max((\theta_1(k-1)+a_1), (\theta_2(k-1)+a_2)) \leq \theta_3(k) \leq \min((\theta_1(k-1)+b_1), (\theta_2(k-1)+b_2)) \quad (1.11)$$

1.6 Modélisation des graphes d'événements P-temporels

Pour modéliser le comportement dynamique d'un graphe d'événements P-temporel, différents modèles ont été introduits dans la littérature que ce soit dans l'algèbre $(\max, +)$ ou $(\min, +)$ [13] ou dans l'algèbre standard [14] [15].

1.6.1 Modèle des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre des dioïdes

Pour obtenir le modèle des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre des dioïdes, nous adoptons les mêmes notations utilisées pour la modélisation des graphes d'événements temporisés. Dans les dioïdes $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, (\max, +))$ où $a \oplus b = \max(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$, $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$.

On suppose que les transitions sont franchissables dès qu'elles sont validées. Le fonctionnement est dit au plus tôt. Nous reprenons l'équation (1.11) tirée à partir de graphe de la Figure 1.6,

$$\max((\theta_1(k-1)+a_1), (\theta_2(k-1)+a_2)) \leq \theta_3(k) \leq \min((\theta_1(k-1)+b_1), (\theta_2(k-1)+b_2)) \quad (1.12)$$

A partir de cette équation, nous pouvons écrire une représentation générale pour les GE P-temporels dans l'algèbre des dioïdes en considérant les équations en dateurs comme suit :

$$\bigoplus_{i=1}^n a_i \otimes \theta_j(k - m_i) \leq \theta_i(k) \leq \bigwedge_{i=1}^n b_i \otimes \theta_j(k - m_i), (\theta_2(k-1) + b_2)) \quad (1.13)$$

1.6.2 Modèle des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard [14]

La forme générale d'une représentation polyédrique d'un graphe d'événements P-temporel dans l'algèbre standard est la suivante :

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta(k-M) \\ \vdots \\ \theta(k-1) \\ \theta(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Où,

- $\theta_j(k)$ est la date de $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition t_j .
- M est la plus grande composante du vecteur de marquage initial M_0 .
- a est le vecteur des bornes minimales, b est le vecteur des bornes maximales.
- $G^- = (G_M^- G_{M-1}^- \cdots G_1^- G_0^-)$ contient les poids des arcs entrants et sortants relativement à chaque place p_i .
- $G^+ = (G_M^+ G_{M-1}^+ \cdots G_1^+ G_0^+)$

Cette représentation est illustrée sur l'exemple de la Figure 1.7

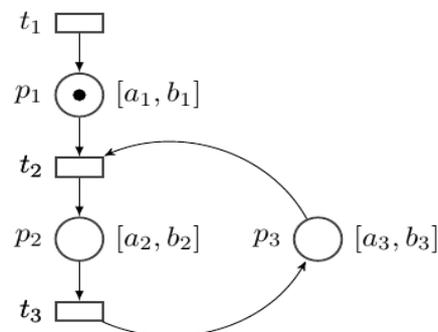


FIGURE 1.7: Exemple d'un graphe d'événements P-temporel.

Sous l'hypothèse d'un fonctionnement admissible, nous obtenons les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2(k) - \theta_1(k-1) \geq a_1, \\ \theta_2(k) - \theta_1(k-1) \leq b_1, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \geq a_2, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \leq b_2, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \geq a_3, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \leq b_3, \end{array} \right.$$

Ces équations sont équivalentes au système d'inégalités suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(k-1) - \theta_2(k) \leq -a_1, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \leq -a_2, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \leq -a_3, \\ \theta_2(k) - \theta_1(k-1) \leq b_1, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \leq b_2, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \leq b_3, \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1(k-1) \\ \theta_2(k-1) \\ \theta_3(k-1) \\ \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \\ \theta_3(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

avec,

$$G_1^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_0^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, G_1^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

1.6.3 Modèle implicite des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard [15]

Le comportement dynamique des graphes d'événements P-temporels peut être décrit sous forme d'une représentation implicite dans l'algèbre standard tel qu'il est proposé par Kara [15] dans le théorème suivant :

Théorème 1 [15, 39] *Le comportement dynamique des graphes d'événements P-temporels correspond au vecteur $\theta(k)$ qui satisfait l'équation suivante :*

$$E \cdot \theta(k) = \sum_{\tau=1}^{\tau=l} A_{\tau} \cdot \theta(k - \tau) + q(k) + \mathbb{G} \cdot u(k), \quad (1.15)$$

$$a \leq q(k) \leq b,$$

avec : $E \in \mathbb{Z}^{m \times (n - \bar{n})}$, $A_{\tau} \in \mathbb{Z}^{m \times (n - \bar{n})}$, $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$ (où \bar{n} est le nombre de transition source),

$q \in \mathbb{R}_+^m$, $l = \max(M_0)$ et $\theta_j(k) = \theta_j(0) \forall k \leq 0$,

$\theta_j(k)$ est la date de $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition t_j ,

$u_j(k)$ est la date $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition source u_j ,

M_0 est le vecteur de marquage initial de la place p_i ,

$q_i(k)$ est le temps de séjour d'une marque dans la place p_i pour le $k^{\text{ième}}$ franchissement.

Démonstration

Nous considérons une partie d'un graphe d'événements P-temporel donnée par la Figure 1.8

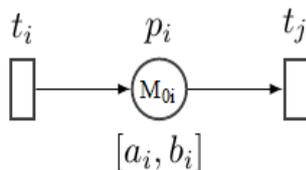


FIGURE 1.8: Une partie d'un graphe d'événements P-temporel

Soit $\theta_j(k)$ la date de $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition t_j . L'activation de la transition

t_j dépend du nombre de jetons initialement présents dans la place p_i . Le franchissement numéro k de la transition t_j est engendré par le franchissement numéro $k - M_{0i}$ de la transition t_i qui dépend aussi de l'intervalle du temps de séjour de la place p_i . Selon le fonctionnement au plus tôt, la transition doit être franchie dès qu'elle est franchissable, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \theta_j(k) \geq \theta_i(k - M_{0i}) + a_i, \\ \theta_j(k) \leq \theta_i(k - M_{0i}) + b_i, \end{cases} \quad (1.16)$$

avec a_i et b_i sont les bornes minimales et maximales respectivement de l'intervalle de temps de séjour des marques dans la place p_i . les inéquations données par l'équation (1.16), peuvent être réécrites comme suit :

$$\theta_j(k) = \theta_i(k - M_{0i}) + q_i, \quad (1.17)$$

avec q_i est le temps de séjour d'une marque dans la place p_i ,

$$a_i \leq q_i \leq b_i.$$

Pour obtenir une représentation d'état implicite, on met dans chaque place au maximum une seule marque. Pour ce faire les places comportant plus d'une marque doivent être décomposées aux places ayant une seule marque. Chaque place contenant M_0 jeton, la décomposition se fera M_0 fois pour avoir M_0 places dans le modèle équivalent du graphe d'événements. Cette transformation est illustrée sur la Figure 1.9.

Le franchissement des transitions d'un graphe d'événements P-temporel dépend de l'intervalle de temps associé aux places, pour que le modèle équivalent préserve les performances du système original, des intervalles de temps nuls sont associés aux places supplémentaires du graphe considéré.

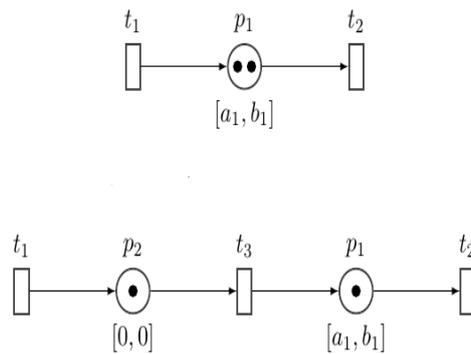


FIGURE 1.9: Décomposition d'une place d'un graphe d'événements P-temporel.

Exemple 7 Nous considérons le graphe d'événements P-temporel donné par la Figure 1.10

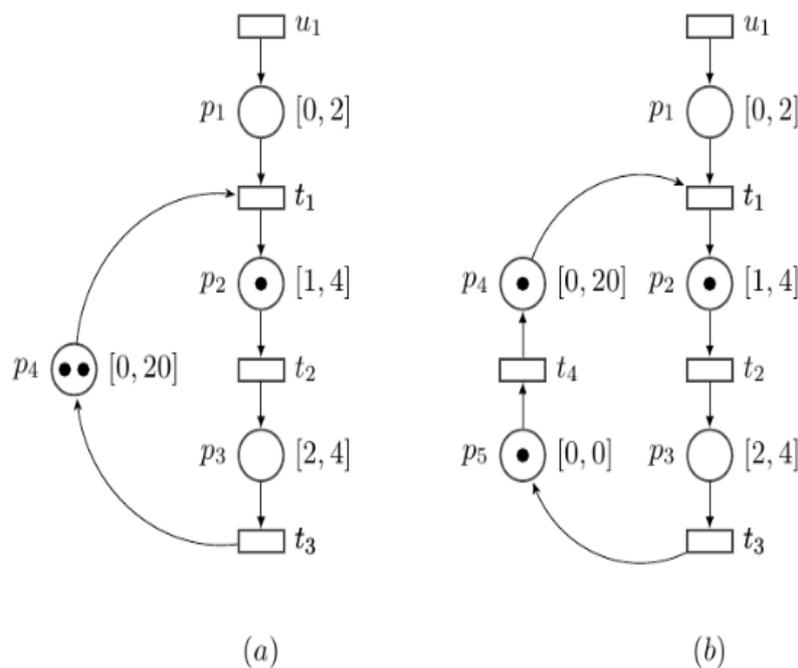


FIGURE 1.10: Exemple d'un graphe d'événements P-temporel avec décomposition d'une place.

La mise en équations dans l'algèbre standard est faite sur le modèle équivalent donné par la Figure 1.10 .(b) dont les équations suivantes sont obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(k) = q_1(k) + u_1(k), \\ \theta_2(k) - \theta_1(k) = q_2(k), \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) = q_3(k), \\ \theta_1(k) = \theta_4(k-1) + q_4(k), \\ \theta_4(k) = \theta_3(k-1) + q_5(k), \end{array} \right. \text{ soumis à } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq q_1(k) \leq 2, \\ 1 \leq q_2(k) \leq 4, \\ 2 \leq q_3(k) \leq 4, \\ 0 \leq q_4(k) \leq 20, \\ 0 \leq q_5(k) \leq 0, \end{array} \right.$$

le modèle implicite est obtenu comme suit :

$$E \cdot \theta(k) = A \cdot \theta(k-1) + q(k) + \mathbb{G} \cdot u(k),$$

avec,

$$a \leq q(k) \leq b,$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, après un rappel de quelques définitions et concepts de base des réseaux de Petri, nous avons présenté deux classes importantes des réseaux de Petri qui sont les graphes d'événements P-temporisés et les graphes d'événements P-temporels. Nous avons montré, comment nous obtenons la représentation linéaire de système que ce soit dans l'algèbre standard ou dans l'algèbre des dioïdes.

Le chapitre suivant sera consacré à la commande des systèmes à événements discrets

modélisés par des graphes d'événements P-temporels dont le comportement est représenté par des modèles linéaires explicites.

Chapitre 2

Commande prédictive des GE P-temporels

2.1 Introduction

La commande prédictive est largement reconnue comme l'une des méthodologies de contrôle les plus puissantes dans l'industrie [16, 17, 19, 20]. Récemment la commande prédictive a été adaptée aux cas des systèmes à événements discrets dans plusieurs travaux. Dans [25], une loi de commande optimale est calculée sur un horizon de prédiction fini pour des SEDs modélisés dans l'algèbre des dioïdes. Puis l'approche a été étendue aux cas des systèmes max-plus linéaires soumis à des perturbations [40] et aux cas de commande pour de tels systèmes sans contraintes [41, 42]. Dans ce dernier, les auteurs ont supposé des conditions suffisantes pour garantir la stabilité en boucle fermée sur un horizon de prédiction fini. L'un des avantages de la commande prédictive est l'utilisation de plusieurs types de modèles, ce qui a permis d'élargir son application dans le domaine des SEDs. Dans [14, 26], l'approche est appliquée sur des SEDs représentés par des réseaux de Petri continus où le modèle est linéaire affine par morceaux. Dans les travaux de Declerck [43, 44], une commande en boucle ouverte est calculée pour stabiliser des SEDs modélisés dans l'algèbre standard.

Dans ce chapitre, nous adaptons ces stratégies aux cas des GE P-temporels modélisés dans l'algèbre standard par des modèles implicites [15]. Dans un premier temps, nous calculons une loi de commande optimale en boucle ouverte sur un horizon de prédiction fini dont l'objectif est de suivre un fonctionnement 1-périodique avec respect de contraintes sur les temps de séjour des jetons dans les places d'un graphe d'événements P-temporel. Puis, nous synthétisons des gains de retour d'état sur un horizon de prédiction infini en utilisant l'approche proposée par Kothare [28]. Dans ce dernier, les auteurs ont développé cette stratégie sur des systèmes incertains soumis à des contraintes symétriques de façon à garantir une stabilité asymptotique avec respect de contraintes. Dans ce chapitre, nous montrerons comment un ensemble de contraintes non-symétriques peut être formulé en termes de contraintes LMIs dans un problème d'optimisation convexe [27]. Les stratégies présentées dans ce chapitre sont illustrées sur un réseau de transport vu comme une classe de systèmes à événements discrets.

2.2 Commande prédictive

La commande prédictive ou commande prédictive à base de modèle "Model Predictive Control" (MPC) est une technique de commande avancée très utilisée dans l'industrie en raison de ses avantages, en particulier sa capacité à traiter les systèmes multi-variables en tenant compte des contraintes sur les variables de commande et/ou les variables d'état. Dans le cas où le modèle utilisé est linéaire, cette stratégie de commande est dite commande prédictive linéaire.

2.2.1 Principe de base

La technique de commande prédictive consiste à utiliser un modèle pour prédire le comportement dynamique du système à commander. En effet, à chaque pas de calcul un retour de l'information est appliqué au système, ce retour est la première commande parmi une séquence de commandes calculées par la résolution d'un problème de commande optimale en boucle ouverte sur un horizon fini. La structure d'une commande prédictive

est basée sur les étapes suivantes :

- Utilisation d'un modèle pour construire les prédictions des états futurs.
- Connaissance de la trajectoire à suivre sur un horizon déterminé.
- Minimisation d'un critère de performance.
- Utilisation d'un algorithme de résolution pour déterminer une séquence optimale de commande.
- Application du premier élément de la séquence de la commande calculée.
- Répétition de la procédure à chaque pas de calcul, selon le principe de l'horizon fuyant.

2.3 Ensemble convexe

Dans cette section, nous définissons les ensembles convexes utilisés tout au long de ce travail tel que hyperplan, polyèdre et ellipsoïde. Ces définitions sont reprises de [45, 46].

Définition 9 Ensemble convexe

Un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tous points $x_1 \in \mathcal{S}$ et $x_2 \in \mathcal{S}$, la condition suivante est vérifiée :

$$\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \mathcal{S}, \forall \alpha \in [0, 1].$$

L'intersection des ensembles convexes est un ensemble convexe. Étant donné \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux ensembles convexes alors $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est également un ensemble convexe.

Définition 10 Hyperplan

Un ensemble $\mathcal{H}(F, c) \subset \mathbb{R}^n$ est un hyperplan défini par :

$$\mathcal{H}(F, c) = \{x \in \mathbb{R}^n, F \cdot x = c\}, \quad (2.1)$$

où $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

D'un point de vue analytique la signification d'un hyperplan est donnée par la solution de l'équation linéaire $F \cdot x = c$.

Définition 11 *Polyèdre*

Un polyèdre $\mathcal{P}(G, g) \subset \mathbb{R}^n$ est défini comme l'intersection d'un nombre fini q de demi-plans :

$$\mathcal{P}(G, g) = \{x \in \mathbb{R}^n, G \cdot x \leq g\}, \quad (2.2)$$

où $G \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $g \in \mathbb{R}^q$, $q, n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 12 *Matrice définie positive*

Une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie positive et notée $P > 0$ si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T P x > 0$. De plus, si l'inégalité n'est pas stricte $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T P x \geq 0$, la matrice P est semi-définie positive et notée $P \geq 0$.

Définition 13 *Ellipsoïde*

Un ensemble ellipsoïdal ou ellipsoïde est défini par :

$$\varepsilon(P, v) = \{x \in \mathbb{R}^n, (x - v)^T P (x - v) \leq 1\},$$

où, $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique et définie positive. Le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est le centre de l'ellipsoïde.

L'ellipsoïde centré à l'origine est défini pour $v = 0$ par :

$$\varepsilon(P) = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T P x \leq 1, P = P^T\}. \quad (2.3)$$

Définition 14 *Distance d'un ellipsoïde à un hyperplan* :

La distance algébrique de l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ à l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ est définie par :

$$\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) = \frac{|c - F \cdot v| - \sqrt{FP^{-1}F^T}}{FF^T}. \quad (2.4)$$

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) > 0$, l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ et l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ n'ont aucun point commun.

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) < 0$, l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$ et l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ se croisent. Leur intersection est un ellipsoïde.

Si $\text{dist}(\varepsilon(P, v), \mathcal{H}(F, c)) = 0$, l'hyperplan $\mathcal{H}(F, c)$ est tangent à l'ellipsoïde $\varepsilon(P, v)$.

Pour l'ellipsoïde $\varepsilon(P)$ centré à l'origine et pour l'hyperplan $\mathcal{H}(F, 1)$ avec $c = 1$, la relation donnée par l'équation (2.4) devient :

$$\text{dist}(\varepsilon(P), \mathcal{H}(F)) = \frac{1 - \sqrt{FP^{-1}F^T}}{FF^T}. \quad (2.5)$$

2.4 La fonction de Lyapunov et les inégalités linéaires matricielles

2.4.1 Fonction de Lyapunov

Définition 15 *Fonction de Lyapunov*

Une fonction continue $V(e(k)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Lyapunov du système donné par l'équation (3.12), si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $V(e(k))$ est définie positive.
2. $V(e(k+1)) - V(e(k)) \leq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Si une telle fonction existe alors le système est stable. De plus si $V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0$, le système est asymptotiquement stable.

Définition 16 *Domaine positivement invariant*

Un domaine non vide fermé $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine positivement invariant du système (3.12) si pour tout état initial $e_0 \in \Omega$, la trajectoire du vecteur de variables d'état reste dans Ω . L'invariance positive de Ω est équivalente à la condition suivante :

$$e(k) \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall e_0 \in \Omega$$

Le domaine Ω pouvant être un polyèdre, un cône ou un ellipsoïde.

Pour toute fonction de Lyapunov V associée au système de l'équation (3.12), on peut faire correspondre un ensemble positivement invariant défini par :

$$\Omega(V, \gamma) = \{e \in \mathbb{R}^n, \quad V(e(k)) \leq \gamma\}, \quad \forall \gamma > 0$$

Les domaines positivement invariants associés aux fonctions de Lyapunov quadratiques sont de types ellipsoïdaux définis par :

$$\Omega(V, \gamma) = \{e(k) \in \mathbb{R}^n, \quad e(k)^T P e(k) \leq 1\}$$

2.4.2 Les inégalités linéaires matricielles LMIs

Définition 17 *Les inégalités linéaires matricielles LMIs :*

Étant donné les matrices symétriques F_0 et $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ et un vecteur $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Une LMI s'écrit comme suit :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

Un ensemble de plusieurs LMIs $F^1(x) \geq 0$, $F^2(x) \geq 0$, $F^l(x) \geq 0$ peut être exprimé comme étant une seule LMI formée par une matrice diagonale $\text{diag}(F^1(x) \geq 0, F^2(x) \geq 0, \dots, F^l(x) \geq 0)$.

Pour la transformation des contraintes non linéaires issues des techniques de Lyapunov à des contraintes linéaires LMIs l'une des méthodes les plus utilisées, vu sa simplicité, est le complément de Schur.

Lemme 1 *Soient trois matrices $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ et $S(x) = S(x)^T$ symétriques et définies positives. La LMI donnée par l'équation (2.6),*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.6)$$

est équivalente à l'inégalité matricielle suivante

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \geq 0,$$

ou équivalente à

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) \geq 0.$$

2.5 Commande prédictive en boucle ouverte à horizon fini des graphes d'événements P-temporels

2.5.1 La construction du modèle

La synthèse d'une loi de commande prédictive se base sur l'existence de modèle du système à commander. Plusieurs structures du modèle existent dans la littérature selon

le type du système à contrôler. Dans ce travail, nous nous limitons au modèle algébrique proposé par Kara [15] décrit dans le chapitre précédent, pour les systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard. La forme implicite du modèle est donnée par l'équation suivante :

$$E \cdot \theta(k) = A \cdot \theta(k-1) + q(k) + \mathbb{G} \cdot u(k), \quad (2.7)$$

avec,

$$a \leq q(k) \leq b,$$

$$\theta(k) = \theta(0) \quad \forall k \leq 0.$$

- $\theta(k)$: est le vecteur associé aux dates du $k^{i\grave{e}me}$ franchissement des transitions.
- $u(k)$: est le vecteur associé aux dates du $k^{i\grave{e}me}$ franchissement des transitions source.
- $q(k)$: est le vecteur des temps de séjour des marques dans les places pour le $k^{i\grave{e}me}$ franchissement.
- a et b : sont respectivement les vecteurs des valeurs minimales et maximales des temps de séjour des marques dans les places.

Le modèle donné par l'équation (2.7) est appelé modèle linéaire implicite à événements discret.

Si la matrice E est du rang plein par les colonnes, le système donné par l'équation (2.7) possède une unique solution donnée sous la forme explicite suivante :

$$\theta(k+1) = E^L A \cdot \theta(k) + E^L \cdot q(k+1) + E^L \mathbb{G} \cdot u(k+1), \quad (2.8)$$

avec E^L est une inverse à gauche de la matrice E .

Le modèle de l'équation (2.8) est appelé modèle linéaire explicite à événements discret.

Où : $\theta(k)$ est la variable d'état, $q(k)$ et $u(k)$ sont les variables de commande.

2.5.2 La trajectoire du référence

Dans ce travail, nous désirons suivre une trajectoire décrite par un comportement périodique. Selon les travaux de [14, 47, 48, 49], tout graphe d'événements fortement

connexe en fonctionnement au plus tôt possède un comportement périodique donné par l'équation suivante :

$$\theta(k + c) = \theta(k) + \lambda \cdot c, \quad (2.9)$$

où :

- c : est la cyclicité.
- λ : est le temps du cycle.

Pour chaque transition du graphe d'événements considéré, les événements successifs sont séparés de même intervalle du temps λ .

Pour $c = 1$ et pour une condition initiale $\theta(0)$ connue, le comportement est appelé 1-périodique donné par l'équation suivante :

$$\theta_z(k + 1) = \theta_z(k) + \lambda \cdot \mu, \quad (2.10)$$

$$u_z(k + 1) = u_z(k) + \lambda \cdot \mu. \quad (2.11)$$

- λ est le temps de cycle. C'est le temps séparant deux franchissements successifs d'une transition.
- μ est un vecteur unité de dimension appropriée.

Remarque 1 Dans tout ce travail, la notation $\theta_z(k)$ est assignée à la variable d'état du modèle décrivant la trajectoire désirée.

Calcul du temps du cycle λ [39]

La trajectoire désirée peut être représentée sous forme de modèle implicite décrivant le comportement du système donné par l'équation (2.7) comme suit :

$$E \cdot \theta_z(k + 1) = A \cdot \theta_z(k) + q_z(k + 1) + \mathbb{G} \cdot u_z(k + 1), \quad (2.12)$$

avec :

- $\theta_z(k)$ est le vecteur des dates désirées de $k^{\text{ième}}$ franchissement de toute transition associée à θ_z à l'événement k .
- q_z est le vecteur associé au temps de séjour désiré des marques dans les places p_i .

- u_z est le vecteur associé aux dates désirées de $k^{\text{ième}}$ franchissement de toute transition source associée à u_z à l'événement k .

La forme implicite donnée par l'équation (2.12) est réécrite du façon à remplacer le terme $\theta_z(k+1)$ par son équivalent, tel qui est donnée par l'équation (2.10). L'équation suivante est obtenue :

$$(E - A) \cdot \theta_z(k) + E \cdot \lambda \cdot \mu - q_z(k) - \mathbb{G} \cdot u_z(k+1) = 0. \quad (2.13)$$

En utilisant l'approche de la programmation linéaire, nous déterminons les inconnues de l'équation (2.13) qui sont : le temps du cycle λ , les dates de franchissement des transitions $\theta_j(k)$ et les temps de séjour des marques dans les places $q_i(k)$. Le programme linéaire est formulé comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser (maximiser) } \lambda \\ \text{soumis à } \left\{ \begin{array}{l} \left((E - A) \quad -\mathbb{I}_n \quad -\mathbb{G} \quad +E \cdot \mu \right) \cdot \begin{pmatrix} \theta_z \\ q_z \\ u_z \\ \lambda \end{pmatrix} = 0, \\ \theta_z \geq 0, \\ a \leq q_z \leq b, \\ 0 \leq u_z \leq \lambda \cdot \mu, \\ \lambda \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (2.14)$$

2.5.3 Formulation du problème de commande

Le modèle explicite décrivant le comportement du système est donné par l'équation suivante :

$$\theta(k+1) = E^L A \cdot \theta(k) + E^L \cdot q(k+1) + E^L \mathbb{G} \cdot u(k+1). \quad (2.15)$$

La trajectoire désirée qui satisfait l'équation (2.15) est donnée sous la forme suivante :

$$\theta_z(k+1) = E^L A \cdot \theta_z(k) + E^L \cdot q_z(k+1) + E^L \mathbb{G} \cdot u_z(k+1). \quad (2.16)$$

Par la soustraction des équations (2.15) et (2.16), le modèle d'erreur entre le modèle du système et celui de la trajectoire désirée est obtenu comme suit :

$$e(k+1) = E^L A \cdot e(k) + E^L \cdot (q(k+1) - q_z(k+1)) + E^L \mathbb{G} \cdot (u(k+1) - u_z(k+1)). \quad (2.17)$$

L'équation (2.17) est réécrite comme suit :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B}1 \cdot (q(k+1) - q_z(k+1)) + \mathbb{B}2 \cdot (u(k+1) - u_z(k+1)), \quad (2.18)$$

avec :

$$\begin{cases} a - q_z \leq (q(k+1) - q_z) \leq b - q_z, \\ 0_{\bar{n}} \leq (u(k+1) - u_z(k+1)) \leq \lambda \cdot \mu_{\bar{n}}, \end{cases} \quad (2.19)$$

- $e(k) = \theta(k) - \theta_z(k)$ est la variable d'état du système d'erreur entre la trajectoire décrivant le comportement réel du système et celui de la trajectoire de désiré.
- $(q(k+1) - q_z(k+1))$ et $(u(k+1) - u_z(k+1))$ sont les variables de commande.
- $\mathbb{A} = E^L A$.
- $\mathbb{B}1 = E^L$.
- $\mathbb{B}2 = E^L \mathbb{G}$.

La forme explicite linéaire de modèle de l'équation (2.18) est la suivante :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+1), \quad (2.20)$$

soumis aux contraintes sur la variable de commande données par l'équation suivante :

$$U_{min} \leq u_c(k+1) \leq U_{max}, \quad (2.21)$$

avec :

$$u_c(k+1) = \begin{pmatrix} q(k+1) - q_z \\ u(k+1) - u_z(k+1) \end{pmatrix}, \quad U_{min} = \begin{pmatrix} a - q_z \\ 0_{\bar{n}} \end{pmatrix}, \quad U_{max} = \begin{pmatrix} b - q_z \\ \lambda \cdot \mu_{\bar{n}} \end{pmatrix}$$

Calcul des prédictions :

La prédiction de l'évolution future du système d'erreur entre la trajectoire réelle et celle désirée est calculée en développant les équations du modèle d'état de l'équation (2.20) comme suit :

$$\begin{cases} e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+1), \\ e(k+2) = \mathbb{A} \cdot e(k+1) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+2), \\ e(k+2) = \mathbb{A}^2 \cdot e(k) + \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot u_c(k+1) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+2), \\ \vdots \\ e(k+N_p) = \mathbb{A}^{N_p} \cdot e(k) + (\mathbb{A}^{N_p-1} \cdot \mathbb{B} + \dots + \mathbb{B}) \cdot u_c(k+N_c), \end{cases}$$

N_p et N_c sont les horizons de prédiction et de commande respectivement.

Sous forme matricielle, nous obtenons l'équation suivante :

$$e(N_p) = \mathbb{A}^{N_p} \cdot e(0) + \sum_{i=1}^{N_p} \mathbb{A}^{N_p-i} \cdot \mathbb{B} \cdot u_c(i). \quad (2.22)$$

Pour k allant de 0 à N_p , l'équation (2.22) est équivalente à :

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot e(0), \quad (2.23)$$

avec :

$$\mathbf{E} = ((e(1), e(2), \dots, e(N_p))^T,$$

$$\mathbf{U} = ((u_c(1), u_c(2), \dots, u_c(N_p - 1))^T,$$

$$\mathbf{A} = (\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{N_p})^T,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & \mathbf{0}_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & \mathbf{0}_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} & \dots & \mathbf{0}_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}^{N_p-1} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^{N_p-2} \cdot \mathbb{B} & \dots & \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

Calcul de la séquence de commande

La commande prédictive peut être vue comme un problème d'optimisation générale où l'on cherche la minimisation du critère de performance sur un horizon de prédiction fini.

$$\min_{u_c(k+i), i=0,1..N_c} J_{N_p}(k), \quad (2.24)$$

Vu la diversité d'algorithmes de commande prédictive, différentes fonctions de coût ont été proposées pour obtenir une loi de commande. L'objectif principal consiste à faire en sorte que la trajectoire future pour l'horizon de prédiction considéré s'approche de la meilleure

façon possible de celle de référence. Dans ce travail, le critère de performance considéré $J_{N_p}(k)$ est une fonction quadratique donnée sous la forme suivante :

$$J_{N_p}(k) = \sum_{i=1}^{N_p} e(k+i)^T Q_c e(k+i) + \sum_{i=1}^{N_c} u_c(k+i)^T R u_c(k+i), \quad (2.25)$$

avec Q_c et R sont des matrices de pondération symétriques et définies positives.

Les horizons de prédiction N_p et N_c définissent l'intervalle de temps où l'on désire que la trajectoire se rapproche de la référence.

Sous forme matricielle, en remplaçant l'équation (2.23) dans le critère donné par l'équation (2.25), nous obtenons un critère qui dépend seulement de la séquence de commande donnée par l'équation suivante :

$$J = \frac{1}{2} U^T H U + f^T U, \quad (2.26)$$

avec,

$$\begin{cases} H = S^T Q_m S + R_m, \\ f^T = e(0)^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot Q_m \cdot S, \\ Q_m = \text{diag}(Q_c, Q_c, \dots, Q_c), \\ R_m = \text{diag}(R, R, \dots, R). \end{cases}$$

Prise en compte des contraintes

La commande prédictive cherche à déterminer une séquence de commande future qui permet de minimiser le critère de performance tout en assurant la vérification des contraintes. Différents types de contraintes sont couramment rencontrés dans l'industrie. Dans ce travail, il s'agit de respecter les temps de séjour minimal et maximal des jetons dans les places de graphe d'événements P-temporel. Les temps de séjour des marques sont inclus dans des intervalles de temps bien déterminés. Mathématiquement, ce type de contraintes sont représentés par un polyèdre ou elles sont appelées aussi contraintes polyédriques.

L'avantage d'utiliser les polyèdres dans la théorie du contrôle est de fait que les polyèdres sont des ensembles convexes qui permettent de formaliser les contraintes linéaires. Une famille d'ensembles polyédraux constitue aussi un ensemble polyédral.

Les contraintes données par l'équation (2.21) sont réécrites sous la forme polyédrique

suivante,

$$\mathcal{P}(G, g) = \{u_c(k) \in \mathbb{R}^{(m+\bar{n})}, G \cdot u_c(k) \leq g\}, \quad (2.27)$$

avec, $G = \begin{pmatrix} I_{m+\bar{n}} \\ -I_{m+\bar{n}} \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \end{pmatrix}$.

Le problème de commande prédictive est formulé en terme de programmation linéaire quadratique donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && J_{N_p}(k) \\ & \text{soumis à} && G \cdot u_c(k) \leq g, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les contraintes à respecter sont formulées en fonction de la séquence de commande sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{G} \cdot U \leq \mathbf{g}, \quad (2.29)$$

avec $U = ((u(1), u(2), \dots, u(N_p-1))^T$ est la séquence de commande, $\mathbf{G} = \text{diag}(G, G, \dots, G)$ et $\mathbf{g} = (g, g, \dots, g)^T$.

La séquence de commande est obtenue en minimisant le critère donné par l'équation (2.26) soumis aux contraintes polyédrales données par l'équation (2.29). Le problème de commande optimale est reformulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && J = \frac{1}{2} U^T H U + f^T U, \\ & \text{soumis à} && \mathbf{G} \cdot U \leq \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le problème d'optimisation de l'équation (2.30) est résolu efficacement en utilisant des Toolbox d'optimisation spécifiques de Matlab.

2.6 Commande prédictive à horizon infini des GE P-temporels en utilisant l'approche LMI

La synthèse d'une loi de commande consiste à trouver des entrées de commande satisfaisant au mieux le cahier des charges selon l'objectif à atteindre. La garantie de stabilité en boucle fermée est l'un des objectifs principaux de commande en automatique.

La commande prédictive consiste à calculer une séquence de commande tout en minimisant un critère de performance sur un horizon fini. La garantie de la stabilité d'une loi de commande calculée par la programmation d'un problème d'optimisation n'est pas toujours triviale. L'une des directions les plus utilisées pour garantir la stabilité d'une commande prédictive est l'utilisation des ensembles invariants. La preuve de stabilité est donnée par le fait que le concept d'invariance positive est lié à l'existence d'une fonction de Lyapunov.

Sans s'éloigner du principe de la commande prédictive, le principe résumé par Kothare [28] consiste à minimiser une borne supérieure de la fonction objective sur un horizon infini avec des restrictions sur l'entrée et la sortie. La formulation ne conduit plus à la résolution d'un problème de programmation quadratique mais se réduit à la résolution d'un problème d'optimisation convexe à base d'inégalités linéaires matricielles.

Les avantages de la méthode sont liés à :

- L'utilisation des horizons infinis de prédictions.
- La simplicité de traitement des systèmes multivariables.
- L'utilisation de programmation convexe où chaque optimum trouvé est un optimum global et unique.
- La garantie de la stabilité du fait de l'existence de la fonction de Lyapunov.

2.6.1 Principe de l'approche

Le principe résumé par Kothare [?] est illustré par le théorème suivant

Théorème 2 *Étant donné un système discret à temps invariant donné par sa représentation d'état,*

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k). \quad (2.31)$$

Une loi de commande stabilisante linéaire donnée par $u(k) = F \cdot x(k)$ avec $F = Y \cdot Q^{-1}$ est obtenue comme solution du problème LMI suivant,

$$\min_{\gamma, Q, Y} \quad \gamma \quad (2.32)$$

$$\gamma \geq 0$$

soumis à

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k)^T \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.33)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q & Q\mathbb{A}^T + Y^T\mathbb{B}^T & QQ_c^{1/2} & Y^TR^{1/2} \\ \mathbb{A}Q + \mathbb{B}Y & Q & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2}Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.34)$$

La loi de commande obtenue permet de stabiliser le système en boucle fermée sans prendre en compte les contraintes.

2.6.2 Formulation du problème de commande

L'objectif de cette section est d'appliquer l'approche proposée par Kothare [28] pour des systèmes incertains à un système à événements discret dont le modèle est décrit par des équations en dateurs dans l'algèbre standard.

Nous rappelons le modèle défini précédemment dans l'équation (2.18),

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B}1 \cdot (q(k+1) - q_z(k+1)) + \mathbb{B}2 \cdot (u(k+1) - u_z(k+1)), \quad (2.35)$$

avec,

$$\begin{cases} a - q_z \leq (q(k+1) - q_z) \leq b - q_z, \\ 0_{\bar{n}} \leq (u(k+1) - u_z(k+1)) \leq \lambda \cdot \mu_{\bar{n}}, \end{cases} \quad (2.36)$$

L'équation (2.35) est réécrite comme suit :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B}1 \cdot u_{c1}(k+1) + \mathbb{B}2 \cdot u_{c2}(k+1), \quad (2.37)$$

avec,

$$\begin{cases} u_{c1min} \leq u_{c1}(k+1) \leq u_{c1max}, \\ u_{c2min} \leq u_{c2}(k+1) \leq u_{c2max}, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\text{et } \begin{cases} u_{c1}(k+1) = q(k+1) - q_z \\ u_{c2}(k+1) = u(k+1) - u_z(k+1) \\ u_{c1min} = a - q_z, \quad u_{c1max} = b - q_z, \\ u_{c2min} = 0_{\bar{n}}, \quad u_{c2max} = \mu_{\bar{n}}. \end{cases}$$

La procédure se base sur la minimisation d'un critère de performance quadratique sur un horizon infini donné par l'équation suivante :

$$J_\infty(k) = \sum_{i=1}^{\infty} (e(k+i|k)^T Q_c e(k+i|k) + u_{c1}(k+i|k)^T R_1 u_{c1}(k+i|k) + u_{c2}(k+i|k)^T R_2 u_{c2}(k+i|k)), \quad (2.39)$$

avec $Q_c > 0$, $R_1 \geq 0$ et $R_2 \geq 0$ sont des matrices de pondération symétriques et définies positives.

Soit une fonction quadratique de Lyapunov donnée par l'équation suivante :

$$\mathbb{V}(e(k|k)) = e(k|k)^T P e(k|k), \quad (2.40)$$

avec $P > 0$, $P = \gamma \cdot Q^{-1}$ est supposée vérifier l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(e(k+i+1|k)) - \mathbb{V}(e(k+i|k)) \leq & -(\sum_{i=1}^{\infty} (e(k+i|k)^T Q_c e(k+i|k) \\ & + u_{c1}(k+i|k)^T R_1 u_{c1}(k+i|k) + u_{c2}(k+i|k)^T R_2 u_{c2}(k+i|k))). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pour tout $k \geq 0$, nous sommes l'inégalité donnée par l'équation (2.41) de $i = 0$ à $i = \infty$ avec $e(\infty) = 0$, nous obtenons :

$$-\mathbb{V}(e(k|k)) \leq -J_\infty(k|k). \quad (2.42)$$

Dans [28], les auteurs ont démontré que la condition donnée par l'équation (2.41) est une limite supérieure de la fonction du coût donnée par l'équation (2.39). Cette limite supérieure peut être minimisée en appliquant une loi de commande en boucle fermée donnée par $u_c(k+i+1|k) = F e(k+i|k)$. Dans ce travail, nous cherchons des gains de commande stabilisants $F1$ et $F2$ tel que :

$$\begin{aligned} F1 &= Y1 \cdot Q^{-1}, \\ F2 &= Y2 \cdot Q^{-1}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec, $F = (F1 \ F2)^T$ et $Y = (Y1 \ Y2)^T$.

En se basant sur le théorème de Kothare [28], l'approche est résumée en trois étapes essentielles données comme suit

1. Supposer un ellipsoïde invariant comme étant un ensemble objectif et vérifier l'inclusion de l'état initial du système dans cet ellipsoïde.

2. Vérifier la contrainte donnée par l'inégalité (2.41) en terme de LMI.
3. Vérifier le respect des contraintes sur les entrées de commande par l'inclusion de cet ellipsoïde dans le polyèdre des contraintes.
1. Nous cherchons un ensemble invariant ellipsoïdal donné par

$\varepsilon(e(k)) = \{e(k) \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n})}, e(k)^T P e(k) \leq \gamma\}$, ou encore équivalent à,

$$\varepsilon(e(k)) = \{e(k) \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}, e(k)^T Q^{-1} e(k) \leq 1\}, \quad (2.44)$$

avec $P = \gamma \cdot Q^{-1}$

La contrainte LMI qui vérifiée l'inclusion de l'état initial $e(k_0)$ dans l'ellipsoïde $\varepsilon(e(k))$ est donnée par la condition suivante,

$e(k_0)$ est inclus dans $\varepsilon(e(k))$ si $e(k_0) \in \varepsilon(e(k))$. Cela revient à vérifier cette inégalité : $e(k_0)^T Q^{-1} e(k_0) \leq 1$ ou d'une manière équivalente à vérifier,

$$1 - e(k_0)^T Q^{-1} e(k_0) \geq 0. \quad (2.45)$$

En appliquant le lemme de Schur à l'équation (2.45), nous obtenons la LMI suivante,

$$\begin{bmatrix} 1 & e(k_0)^T \\ e(k_0) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.46)$$

2. Dans cette étape, nous formulons l'équation donnée par (2.41) sous forme d'une inégalité linéaire matricielle qui va être résolue en terme de contrainte LMI dans le problème d'optimisation convexe. Pour simplifier l'écriture, nous récrivons l'équation (2.41) comme suit,

$$\mathbb{V}(e(k+1)) - \mathbb{V}(e(k)) \leq -(\sum_{i=1}^{\infty} (e(k)^T Q_c e(k) + u_{c1}(k)^T R_1 u_{c1}(k) + u_{c2}(k)^T R_2 u_{c2}(k))), \quad (2.47)$$

$$\text{avec, } \begin{cases} e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B}_1 \cdot u_{c1}(k+1) + \mathbb{B}_2 \cdot u_{c2}(k+1), \\ u_{c1}(k) = F_1 \cdot e(k), \\ u_{c2}(k) = F_2 \cdot e(k), \end{cases}$$

En développant l'équation donnée par (2.47) nous obtenons :

$$(\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2)^T P (\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2) - P + Q_c + F_1^T R_1 F_1 + F_2^T R_2 F_2 \leq 0, \quad (2.48)$$

En multipliant à droite et à gauche par la matrice Q avec Q est supposée symétrique ($Q = Q^T = Q^{-1}$) et avec les notations $Y_1 = F_1 Q$, $Y_2 = F_2 Q$ et $P = \gamma Q^{-1}$, nous obtenons l'équation suivante,

$$(\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2)^T Q^{-1} (\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2) - Q + \gamma Q^T Q_c Q + \gamma Y_1^T R_1 Y_1 + \gamma Y_2^T R_2 Y_2 \leq 0, \quad (2.49)$$

En multipliant cette équation par (-1) , nous obtenons :

$$Q - [(\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2)^T Q^{-1} (\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2) + \gamma Q^T Q_c Q + \gamma Y_1^T R_1 Y_1 + \gamma Y_2^T R_2 Y_2] \geq 0, \quad (2.50)$$

sous forme matricielle, nous obtenons l'équation suivante :

$$Q - \begin{bmatrix} (\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2) & Q_c^{1/2} Q & R_1^{1/2} Y_1 & R_2^{1/2} Y_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 F_1 + \mathbb{B}_2 F_2) \\ Q_c^{1/2} Q \\ R_1^{1/2} Y_1 \\ R_2^{1/2} Y_2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

En appliquant le lemme de Schur à l'inégalité (2.51), nous obtenons la forme LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} Q & Q\mathbb{A}^T + Y_1^T \mathbb{B}_1^T + Y_2^T \mathbb{B}_2^T & Q Q_c^{1/2} & Y_1^T R_1^{1/2} & Y_2^T R_2^{1/2} \\ \mathbb{A}Q + \mathbb{B}_1 Y_1 + \mathbb{B}_2 Y_2 & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} Y_1 & 0 & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} Y_2 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.52)$$

Le problème d'optimisation sans contraintes est formulé comme suit,

$$\min_{\gamma, Q, Y_1, Y_2} \quad \gamma \quad (2.53)$$

$$\gamma \geq 0$$

soumis à

$$\begin{bmatrix} 1 & e(k)^T \\ e(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.54)$$

et

$$\begin{bmatrix} Q & QA^T + Y1^T B1^T + Y2^T B2^T & QQ_c^{1/2} & Y1^T R1^{1/2} & Y2^T R2^{1/2} \\ AQ + B1Y1 + B2Y2 & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 & 0 \\ R1^{1/2} Y1 & 0 & 0 & \gamma I & 0 \\ R2^{1/2} Y2 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.55)$$

3. Vérification du respect des contraintes sur les entrées de commande

Dans l'approche proposée dans [28], la vérification des contraintes sur les entrées de commande se fait par l'inclusion de l'ellipsoïde dans le polyèdre caractérisant ces contraintes qui sont symétriques et données sous la forme d'une norme euclidienne. Dans ce travail les contraintes supposées sont des temps de séjour des marques dans les places des graphes d'événements P-temporels donnés par un intervalle du temps qui est positif et non symétrique. Dans cette section, nous allons démontré comment garantir le respect de cette classe de contraintes dans un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs [27].

Nous désirons calculer des gains stabilisants F_1 et F_2 en appliquant des lois de commande en boucle fermée $u_{c1}(k) = F_1 \cdot e(k)$ et $u_{c2}(k) = F_2 \cdot e(k)$.

$$\text{avec, } \begin{cases} u_{c1min} \leq F_1 \cdot e(k) \leq u_{c1max} \\ u_{c2min} \leq F_2 \cdot e(k) \leq u_{c2max} \\ u_{c1min} = a - q_z, \quad u_{c1max} = b - q_z, \\ u_{c2min} = 0_{\bar{n}}, \quad u_{c2max} = \mu_{\bar{n}}, \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes aux inégalités suivantes,

$$\begin{cases} F_1 \cdot e(k) \leq u_{c1max}, \\ -F_1 \cdot e(k) \leq -u_{c1min}, \\ F_2 \cdot e(k) \leq u_{c2max}, \\ -F_2 \cdot e(k) \leq -u_{c2min}, \end{cases} \quad (2.56)$$

Les inégalités données par l'équation (2.56) déterminent un ensemble convexe donné par

$$\mathcal{P}(G, \rho) = \{e(k) \in \mathbb{R}^{(n-\bar{n})}, G \cdot e(k) \leq \rho\}, \quad (2.57)$$

$$\text{avec, } G = \begin{pmatrix} F_1 \\ -F_1 \\ F_2 \\ -F_2 \end{pmatrix} \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} u_{c1max} \\ -u_{c1max} \\ u_{c2max} \\ -u_{c2max} \end{pmatrix}$$

La vérification de la condition d'inclusion d'ellipsoïde donné par $e(k)^T \cdot Q^{-1} \cdot e(k) \leq 1$ dans le polyèdre donné à l'équation (2.57) revient à calculer la distance entre cet ellipsoïde et les hyperplans qui forment le polyèdre (2.57). Si cette distance est positive, alors l'ellipsoïde est inclus dans le polyèdre.

- Dans un premier temps, nous reformulons les contraintes données par le polyèdre (2.57) sous forme d'un ensemble d'hyperplans comme suit

$$\begin{cases} (F_1)_i \cdot e(k) = (u_{c1max})_i, \\ -(F_1)_i \cdot e(k) = -(u_{c1max})_i, \\ (F_2)_i \cdot e(k) = (u_{c2max})_i, \\ -(F_2)_i \cdot e(k) = -(u_{c2max})_i, \end{cases} \quad (2.58)$$

avec i est l'indice de la $i^{\text{ième}}$ ligne des matrices $F_1, F_2, u_{1max}, u_{1min}, u_{2max}$ et u_{2min} respectivement.

- La distance d'un ellipsoïde à un hyperplan est donnée par l'équation (2.4), pour un ellipsoïde centré à l'origine $v = 0$ et des hyperplans dont $c_i = (u_{c1max})_i, c_i = -(u_{c1min})_i, c_i = (u_{c2max})_i$ et $c_i = -(u_{c2min})_i$, nous obtenons l'ensemble

d'inégalités suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{c1max})_i - \sqrt{(F_1^T)_i Q^{-1}(F_1)_i} \geq 0, \\ (-u_{c1min})_i - \sqrt{-(F_1^T)_i Q^{-1}(-F_1)_i} \geq 0, \\ (u_{c2max})_i - \sqrt{(F_2^T)_i Q^{-1}(F_2)_i} \geq 0, \\ (-u_{c2min})_i - \sqrt{-(F_2^T)_i Q^{-1}(-F_2)_i} \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.59)$$

L'équation (2.59) est équivalente à,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{c1max})_i \geq \sqrt{(F_1^T)_i Q^{-1}(F_1)_i}, \\ (-u_{c1min})_i \geq \sqrt{-(F_1^T)_i Q^{-1}(-F_1)_i}, \\ (u_{c2max})_i \geq \sqrt{(F_2^T)_i Q^{-1}(F_2)_i}, \\ (-u_{c2min})_i \geq \sqrt{-(F_2^T)_i Q^{-1}(-F_2)_i}. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Dans ce travail, nous avons $u_{c1max} \geq 0$, $(-u_{c1min}) \geq 0$, $u_{c2max} \geq 0$ et $(-u_{c2min}) \geq 0$ ce qui nous permet de réécrire l'équation (2.60) comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{c1max})_i^2 \geq (F_1^T)_i Q^{-1}(F_1)_i, \\ (-u_{c1min})_i^2 \geq (F_1^T)_i Q^{-1}(F_1)_i, \\ (u_{c2max})_i^2 \geq (F_2^T)_i Q^{-1}(F_2)_i, \\ (-u_{c2min})_i^2 \geq (F_2^T)_i Q^{-1}(F_2)_i, \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Cette équation est équivalente à,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{c1max})_i^2 - (Y_1^T)_i Q^{-1}(Y_1)_i \geq 0, \\ (-u_{c1min})_i^2 - (Y_1^T)_i Q^{-1}(Y_1)_i \geq 0, \\ (u_{c2max})_i^2 - (Y_2^T)_i Q^{-1}(Y_2)_i \geq 0, \\ (-u_{c2min})_i^2 - (Y_2^T)_i Q^{-1}(Y_2)_i \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.62)$$

avec $F_1 = Q^{-1} Y_1$ et $F_2 = Q^{-1} Y_2$ En appliquant le lemme de Schur dans l'équation (2.62), nous obtenons les contraintes LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} (b - q_z)_i^2 & (Y_1^T)_i \\ (Y_1)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.63)$$

$$\begin{bmatrix} (q_z - a)_i^2 & (Y_1^T)_i \\ (Y_1)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.64)$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda \cdot \mu_{\bar{n}})_i^2 & (Y_2^T)_i \\ (Y_2)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} (0_{\bar{n}})_i & (Y_2^T)_i \\ (Y_2)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.66)$$

Le problème de commande prédictive à horizon infini en boucle fermée soumis à des contraintes sur les entrées de commande revient à trouver les matrices Y_1 , Y_2 et Q qui sont solution du problème d'optimisation convexe formulé comme suit

$$\min_{\gamma, Q, Y_1, Y_2} \quad \gamma \quad (2.67)$$

$$\gamma \geq 0$$

soumis à

$$\begin{bmatrix} 1 & e(k)^T \\ e(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA^T + Y_1^T B_1^T + Y_2^T B_2^T & QQ_c^{1/2} & Y_1^T R_1^{1/2} & Y_2^T R_2^{1/2} \\ AQ + B_1 Y_1 + B_2 Y_2 & Q & 0 & 0 & 0 \\ Q_c^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 & 0 \\ R_1^{1/2} Y_1 & 0 & 0 & \gamma I & 0 \\ R_2^{1/2} Y_2 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} (b - q_z)_i^2 & (Y_1^T)_i \\ (Y_1)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.70)$$

$$\begin{bmatrix} (q_z - a)_i^2 & (Y_1^T)_i \\ (Y_1)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.71)$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda \cdot \mu_{\bar{n}})_i^2 & (Y_2^T)_i \\ (Y_2)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} (0_{\bar{n}})_i & (Y_2^T)_i \\ (Y_2)_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.73)$$

2.7 Application à un réseau du transport

Les réseaux de transport sont soumis à des phénomènes de synchronisation, de correspondance et de l'occurrence, pour cela ces systèmes peuvent être vus comme une classe des SEDs [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56] dont l'évolution est dépendante de l'occurrence d'événements comme par exemple départ ou arrivée d'un bus dans un arrêt .

2.7.1 Généralités

Dans cette partie, nous rappelons quelques généralités sur les systèmes de transport et les principaux éléments qui les décomposent en se limitant sur les éléments physiques cités au cours de ce travail qui sont l'infrastructure et les entités de transport. Cette partie est inspirée des travaux de Nait-Sidi Moh [57].

1. **L'infrastructure** : L'infrastructure d'un réseau de transport décrit le réseau routier physique dont les éléments principaux sont
 - **Arrêt** : un espace ou endroit où les véhicules s'arrêtent pendant un certain temps fini. Ce temps peut être assigné soit au temps permettant aux passagers de descendre ou de monter, soit au temps permettant aux véhicules de faire un demi-tour ou au temps de repos des véhicules. Selon ces objectifs opérationnels, il existe plusieurs types d'arrêts.
 - **Un Arrêt simple** : où les passagers montent ou descendent.
 - **Un Arrêt de correspondance ou point d'échange** : s'effectue au moins entre deux lignes, où les passagers font un échange de bus d'une ligne à une autre ligne différente.
 - **Un Arrêt de retournement** : ce sont en général les arrêts de départ ou d'arrivée des lignes où les véhicules y font demi-tour.
 - **Tronçons** : ou un trajet est la distance séparant deux arrêts. Un tronçon se caractérise par sa longueur et la vitesse de déplacement des véhicules.
 - **Une ligne** : une ligne est composée d'un ensemble fini d'arrêts et de tronçons, elle peut être plus ou moins complexe selon le type d'arrêt qui la compose, elle se

caractérise par le temps entre ces arrêts.

- **Un itinéraire** : un itinéraire d'un passager est le trajet qu'il suit de son point de départ à son point de destination. Ce trajet est une suite alternée d'arrêts et de tronçons d'une ligne ou de plusieurs lignes.

2. **Les entités de transport** : les entités de transport sont les éléments physiques permettant de réaliser la tâche de transport comme les bus, tramway, trains, les personnes qui conduisent et les passagers. La qualité de transport se caractérise selon le type de ces entités.

Dans ce travail, nous présentons un réseau composé de deux lignes, un arrêt de correspondance, deux arrêts de retournement et quatre tronçons. L'objectif est de minimiser le temps d'attente des passagers dans l'arrêt de correspondance et le temps de voyage d'un passager qui suit un itinéraire partant de l'arrêt de départ de la ligne 1 à l'arrêt d'arrivée de la ligne 2. Ce réseau est illustré par la Figure 2.1 ,

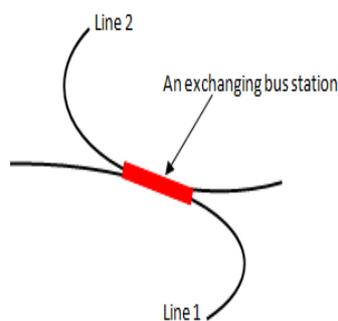


FIGURE 2.1: Un système de transport avec deux lignes

2.7.2 Modélisation du réseau

Le réseau de transport est modélisé par un graphe d'événements P-temporel donné par la Figure 2.2,

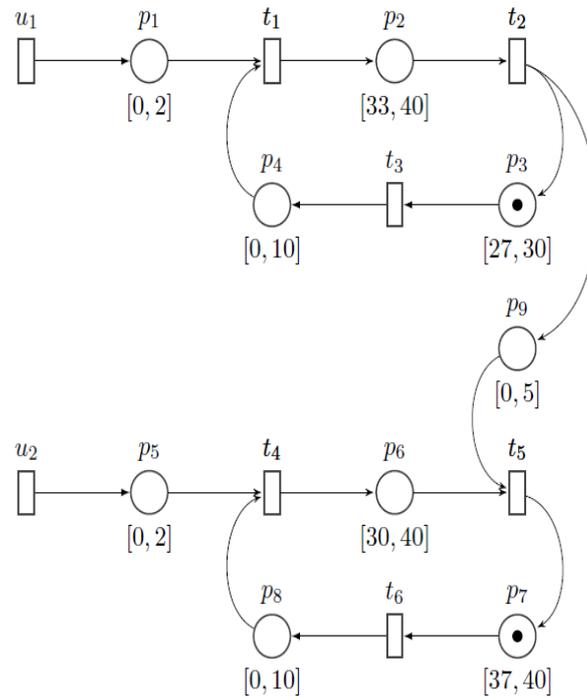


FIGURE 2.2: Graphe d'événements P-temporel de système du transport

Interprétation du graphe

La modélisation du système de transport est faite de la manière suivante

- $u_1, p_1, t_1, p_2, t_2, p_3, t_3$ et p_4 : se sont les éléments de la ligne 1.
- $u_2, p_5, t_4, p_6, t_5, p_7, t_6$ et p_8 : se sont les éléments de la ligne 2.
- u_1 (respectivement u_2) : représente un ordre de départ de bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2).
- p_1 (respectivement p_5) : représente un ordre de départ de bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2) en attente d'exécution.
- t_1 (respectivement t_4) : représente le départ des bus de leurs arrêts de retournement.
- p_2 (respectivement p_6) : représente le tronçon entre l'arrêt de départ de ligne 1 (respectivement ligne 2) et l'arrêt de correspondance.
- t_2 : représente l'arrivée de bus de la ligne 1 à l'arrêt de correspondance.
- t_5 : représente le départ de bus de ligne 2 de l'arrêt de correspondance.
- p_9 : représente la correspondance entre les deux lignes.
- p_3 (respectivement p_7) : représente le tronçons effectuer par le bus de la ligne 1 (respec-

tivement ligne 2) de l'arrêt de correspondance à l'arrêt de retournement.

- t_3 (respectivement t_6) : représente l'arrivée de bus de la ligne 1 (respectivement de la ligne 2) à l'arrêt de retournement.
- p_4 (respectivement p_8) : représente les bus dans leurs arrêts de retournement en attente pour effectuer une nouvelle tournée.
- Les jetons dans les places présentent soit un ordre de départ en attente d'exécution, soit un bus effectuant une tournée, soit des passagers en correspondance.
- les intervalles de temps sont désignés selon le rôle de la place auquel sont associés. un intervalle de temps associé à une place représente soit le temps d'exécution d'un ordre de départ, soit le temps d'un trajet, soit le temps d'effectuer une correspondance.

Initialement les bus sont du retour vers leurs arrêts de départ et se sont représentés par un jeton dans la place p_3 pour le bus de la ligne 1 et un jeton dans la place p_7 pour le bus de la ligne 2. Le franchissement de la transition u_1 (respectivement u_2) rajoute un jeton à la place p_1 (respectivement p_5). Ce jeton est associé à un ordre de départ en attente d'exécution. Le franchissement de la transition t_1 (respectivement t_4) enlève un jeton de la place p_1 (respectivement p_5), un jeton de la place p_4 (respectivement p_8), ce qui veut dire que l'ordre de départ de bus de la ligne 1 (respectivement de la ligne 2) est exécuté dès que le bus est prêt pour effectuer une tournée et rajoute un jeton à la place p_2 (respectivement p_6), ce jeton est associé au bus allant de la station de départ vers la station de correspondance. Le franchissement de la transition t_2 enlève un jeton de la place p_2 donc le bus de la ligne 1 est arrivé à la station de correspondance, rajoute un jeton à la place p_3 qui représente le bus en retour vers sa station de retournement, ce qui veut dire que ce bus quitte cet arrêt dès qu'il dépose les passagers et rajoute un jeton à la place p_9 qui représente les passagers effectuant une correspondance. Le franchissement de la transition t_5 enlève un jeton de la place p_6 donc le bus de la ligne 2 est arrivé à la station de correspondance, enlève un jeton de la place p_9 donc le bus a récupéré les passagers déposés par le bus de la ligne 1. Cette synchronisation veut dire que le départ de bus de ligne 2 de la station de correspondance est conditionné par l'arrivée de bus de la ligne 1, le franchissement de la transition t_5 ajoute un jeton à la place p_7 qui représente

le bus en retour vers sa station de retournement. Le franchissement de la transition t_3 (respectivement t_6) enlève un jeton de la place p_3 (respectivement p_7) donc, le bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2) est arrivé à sa station de retournement et ajoute un jeton à la place p_4 (respectivement p_8) qui représente le bus en attente pour effectuer une nouvelle tournée.

En modélisant le graphe d'événements par des équations en dateur écrites dans l'algèbre standard, nous obtenons les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(k+1) = q_1(k+1) + u_1(k+1), \\ \theta_2(k+1) - \theta_1(k+1) = q_2(k+1), \\ \theta_3(k+1) = \theta_2(k) + q_3(k+1), \\ \theta_1(k+1) - \theta_3(k+1) = q_4(k+1), \\ \theta_4(k+1) = q_5(k+1) + u_2(k+1), \\ \theta_5(k+1) - \theta_4(k+1) = q_6(k+1), \\ \theta_6(k+1) = \theta_5(k) + q_7(k+1), \\ \theta_4(k+1) - \theta_6(k+1) = q_8(k+1), \\ \theta_5(k+1) - \theta_2(k+1) = q_9(k+1). \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons le modèle implicite suivant :

$$E \cdot \theta(k+1) = A \cdot \theta(k) + q(k+1) + \mathbb{G} \cdot u(k+1),$$

$$\text{avec, } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 37 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \\ q_4(k+1) \\ q_5(k+1) \\ q_6(k+1) \\ q_7(k+1) \\ q_8(k+1) \\ q_9(k+1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 40 \\ 30 \\ 10 \\ 2 \\ 40 \\ 40 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La trajectoire désirée est donnée par :

$$E \cdot \theta_z(k+1) = A \cdot \theta_z(k) + q_z + u_z(k+1),$$

$$\text{avec, } q_z = \begin{pmatrix} 1.3393 \\ 33 \\ 28.8249 \\ 6.9145 \\ 2 \\ 31.7393 \\ 37 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \theta_z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 61.8249 \\ 1.2607 \\ 33 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Le modèle d'erreur est donné par $e(k) = \theta(k) - \theta_z(k)$,

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+1),$$

$$\text{avec, } \begin{cases} \mathbb{A} = E^L \cdot A, \\ \mathbb{B} = (E^L \quad E^L \cdot \mathbb{G}), \\ 0_{\bar{n}} \leq u(k+1) - u_z \leq \lambda \cdot \mu_{\bar{n}}, u_c(k+1) = \begin{pmatrix} q(k+1) - q_z \\ u(k+1) - u_z \end{pmatrix}. \end{cases}$$

2.7.3 Commande prédictive à horizon fini

La séquence de commande optimale qui permet de stabiliser le système en boucle ouverte avec respect de contraintes est calculée en minimisant le critère quadratique donné

par

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \frac{1}{2}e(k+1)^T Q_c e(k+1) + u_c(k+1)^T R u_c(k+1), \\ & \text{soumis à } \quad \quad \quad G \cdot u_c(k+1) \leq g, \end{aligned}$$

avec $N_p = 6$ est l'horizon de prédiction et $N_c = 4$ est l'horizon de commande. $Q_c = I_6$ et

$$R = I_{11} \text{ sont les matrices de pondérations. } G = \begin{pmatrix} I_{11} \\ -I_{11} \end{pmatrix} \text{ et } g = \begin{pmatrix} b - q_z \\ \lambda \cdot \mu_{\bar{n}} \\ q_z - a \\ 0_{\bar{n}} \end{pmatrix} \text{ sont les}$$

matrices des contraintes. $\lambda = 68$ est le temps de cycle. $\bar{n} = 2$ est le nombre des transitions sources.

Sous forme matricielle le problème d'optimisation est reformulé comme suit,

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \frac{1}{2}U^T H U + f^T U, \\ & \text{soumis à } \quad \quad \quad \mathbf{G} \cdot U \leq \mathbf{g}, \end{aligned}$$

avec, $H = S^T Q_m S + R_m$, $Q_m = I_{36}$, $R_m = I_{44}$, $f^T = e(0)^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot Q_m S$,

$$U = (u_c(1), u_c(2), u_c(3), u_c(4))^T,$$

$$e(0) = (-z_0), \mathbf{A} = (\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^6)^T,$$

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}^5 \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^4 \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^3 \cdot \mathbb{B} & (\mathbb{A}^2 \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{B}) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix},$$

et $\mathbf{g} = (g, g, g, g)^T$.

Les résultats de simulation sont illustrés dans les Figures 2.3 et 2.4 ,

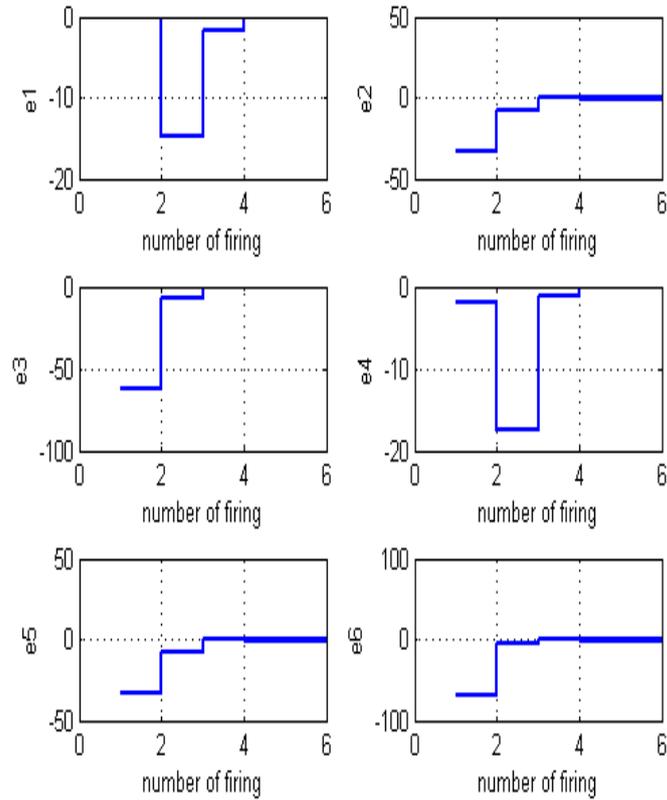


FIGURE 2.3: La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des transitions

La Figure 2.3 représente la variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissement des transitions, nous remarquons que chaque erreur de date de franchissement tend vers zéro, ce qui veut dire que les dates de franchissement des transitions du système sont celles qui sont désirées. Cette figure montre que la séquence de commande calculée assure le suivi de trajectoire du système considéré.

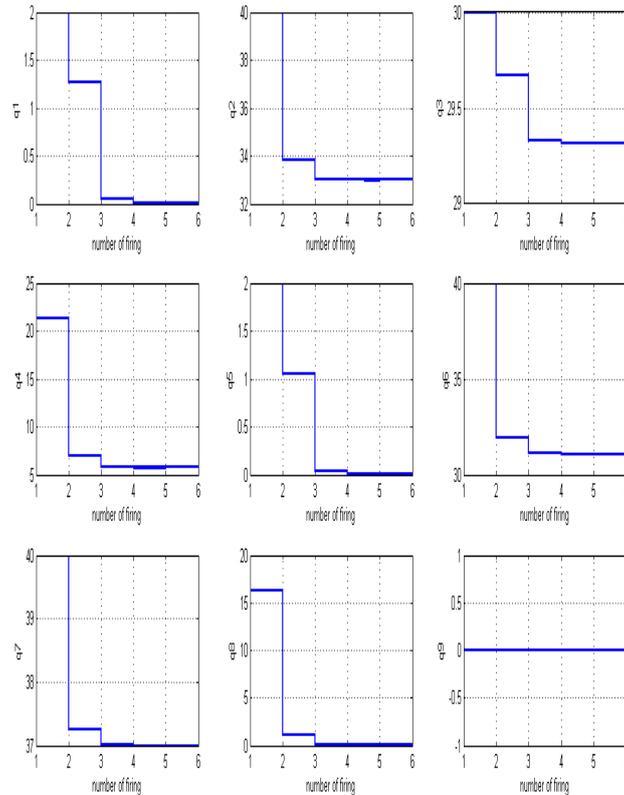


FIGURE 2.4: Évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissement

La Figure 2.4 représente l'évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissements des transitions, nous remarquons que pour chaque place le temps de séjour de la marque reste dans l'intervalle de temps associé à cette place et se stabilise à la valeur de temps de séjour désirée. Cette figure montre que la séquence de commande calculée assure le respect des contraintes sur les entrées de commande.

2.7.4 Commande prédictive en utilisant l'approche LMI

Des gains de commande en boucle fermée ont été synthétisés en résolvant un problème d'optimisation convexe donné par l'équation (2.67) soumis à des contraintes LMIs données par les équations (2.46), (2.52), (2.70), (2.71), (2.72) et (2.73). Pour la résolution

de tels problèmes, plusieurs outils existent dont nous citons par exemple YALMIP [58], CVX [46] et LMI Matlab toolbox [59]. Dans ce travail, nous avons utilisé le toolbox CVX, un outil pour la résolution des problèmes d'optimisations convexes [60] [61]. Les résultats numériques de cette optimisation sont donnés par les matrices F et Q suivantes,

$$F = \begin{pmatrix} -0.0006 & -0.0020 & -0.0062 & -0.0008 & -0.0020 & -0.0067 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0004 & -0.0013 & -0.0039 & -0.0005 & -0.0013 & -0.0042 \\ 0.0007 & -0.0040 & -0.0214 & 0.0029 & -0.0032 & -0.0208 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0007 & -0.0023 & -0.0071 & -0.0009 & -0.0023 & -0.0076 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1.8808 & 0.0317 & 0.0073 & 0.0012 & -0.0024 & -0.0127 \\ 0.0317 & 1.8244 & 0.0122 & 0.0064 & -0.0026 & 0.0119 \\ 0.0073 & 0.0122 & 1.2741 & -0.0163 & 0.0216 & -0.2887 \\ 0.0012 & 0.0064 & -0.0163 & 1.8816 & 0.0264 & 0.0089 \\ -0.0024 & -0.0026 & 0.0216 & 0.0264 & 1.8484 & -0.0030 \\ -0.0127 & 0.0119 & -0.2887 & 0.0089 & -0.0030 & 1.2741 \end{pmatrix} \cdot 10^4,$$

La simulation des gains de commande calculés nous a permis de visualiser la Figure 2.5 et la Figure 2.6,

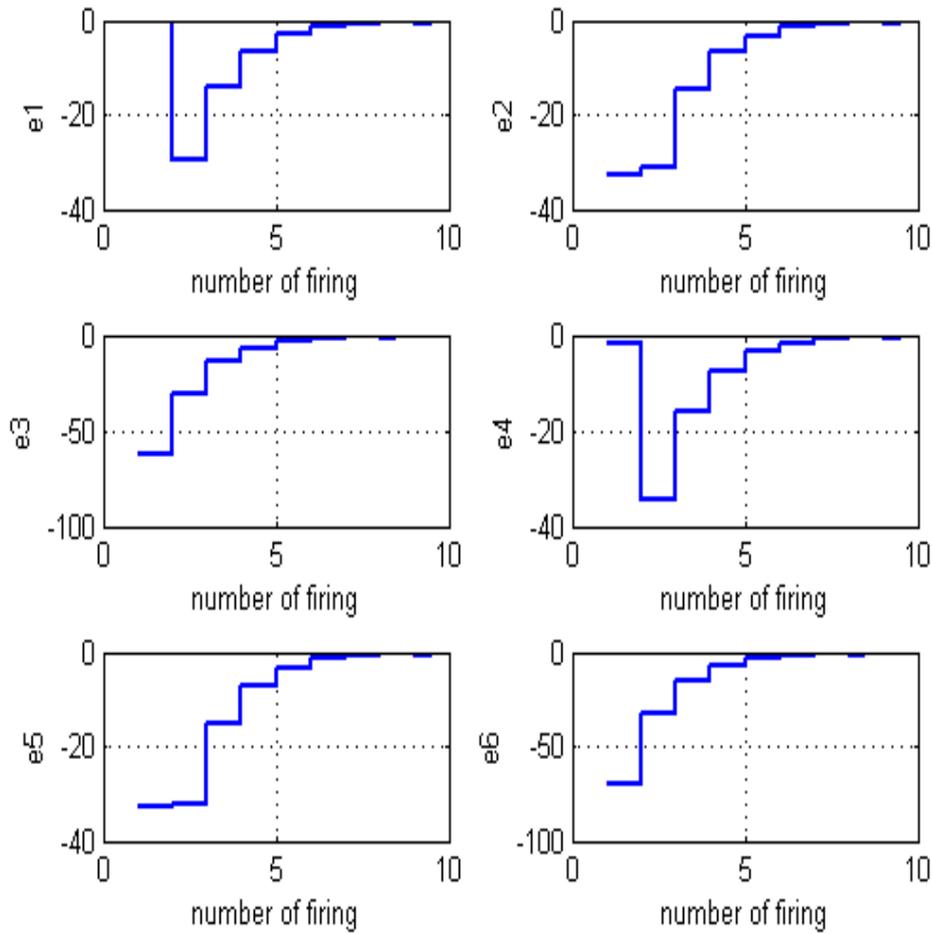


FIGURE 2.5: La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissement des transitions

La Figure 2.5 représente la variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des transitions, les gains de commande synthétisés en utilisant l'approche LMI assurent la stabilité asymptotique du système et le suivi de comportement 1-périodique considéré.

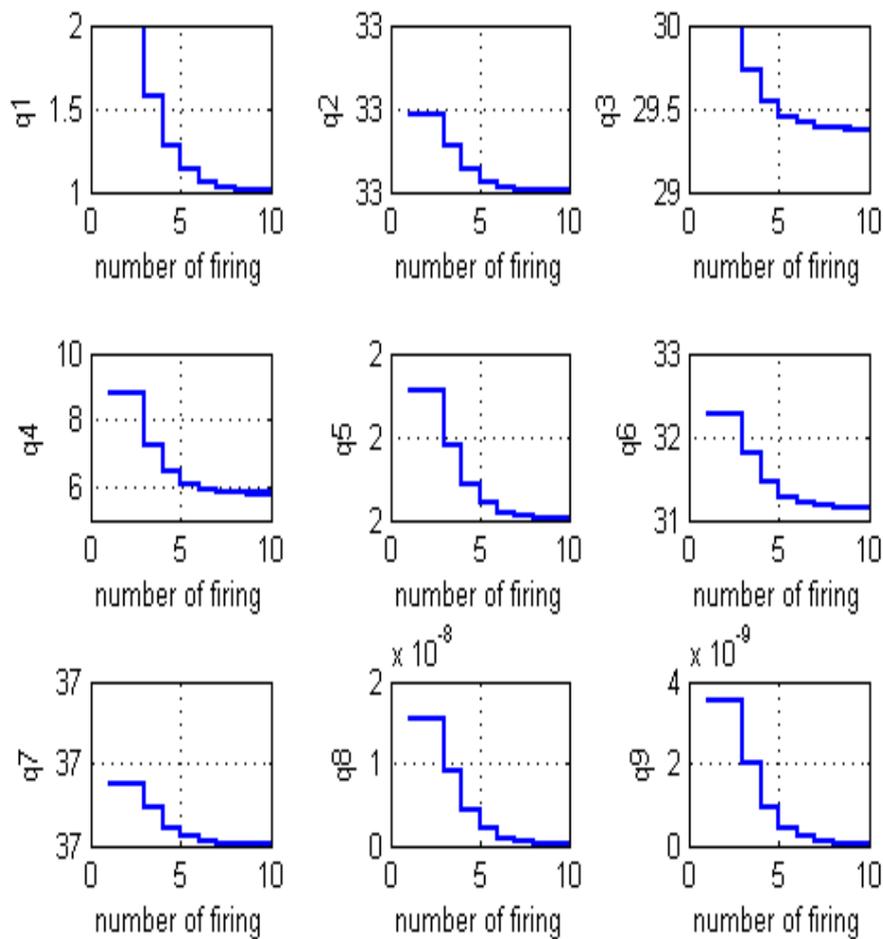


FIGURE 2.6: Évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissements des transitions

La Figure 2.6 représente l'évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissements des transitions. Cette figure montre que les gains de commande synthétisés assurent le respect des contraintes des temps de séjour de graphe d'événements P-temporel.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, deux stratégies de commande prédictive ont été adaptées pour le calcul des lois de commande stabilisantes pour un système à événements discret modélisé par des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard en garantissant le respect des contraintes sur les entrées de commande. Une séquence de commande optimale sur un horizon de prédiction fini est calculée, cette loi de commande assure le suivi d'une trajectoire désirée avec respect de contraintes sur les temps de séjour des marques dans les places du graphe d'événements P-temporel. Puis des gains de retour d'état sont synthétisés sur un horizon de prédiction infini en utilisant l'approche LMI de façon à garantir une stabilité asymptotique avec respect de contraintes. Ce problème est résolu en terme d'une optimisation convexe. Une application de ces stratégies de commande est illustrée sur un réseau de transport.

Chapitre 3

Commande prédictive

multiparamétrique des GE P-temporels

3.1 Introduction

La commande prédictive explicite est une approche géométrique basée sur la programmation quadratique multiparamétrique (MPQP). Il s'agit d'un développement relativement récent qui représente un domaine de recherche actif [62, 63]. C'est une technique d'optimisation qui permet de déterminer la solution optimale d'un problème d'optimisation comme étant une fonction explicite de certains paramètres variables. La solution d'un problème de commande prédictive explicite est une loi de commande en boucle fermée affine par morceau PWA [64, 65] synthétisée en utilisant l'approche des polyèdres paramétrés [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72]. La commande prédictive a été récemment utilisée pour la synthèse de contrôleur pour les SEDs que se soit dans l'algèbre standard [27] ou dans le formalisme max-plus [25, 40, 41]. Une loi de commande optimale est calculée sur un horizon de prédiction fini pour les systèmes max-plus linéaires. Declerck [43, 44] propose une technique pour modifier la commande de telle sorte que la contrainte de causalité soit satisfaite. La commande prédictive a été aussi utilisée pour commander des SEDs modélisés par des réseaux de Petri continus [25, 26, 73]. L'avantage d'introduire la commande prédictive explicite dans le cadre des SEDs, c'est le fait d'avoir une formulation explicite

de la loi de commande en fonction des variables d'états.

L'objectif de cette section est de synthétiser une loi de commande optimale pour une classe des SEDs en utilisant l'approche géométrique de la commande prédictive sur un horizon de prédiction fini [29]. Considérant un graphe d'événements P-temporel où la dynamique est décrite par des équations en dateur dans l'algèbre standard, l'utilisation du concept d'(A,B)-invariance nous a permis de formuler les contraintes paramétriques. Cette approche conduit à une programmation quadratique multiparamétrique qui est résolue en utilisant le toolbox MPT de Matlab.

Nous commençons ce chapitre par un rappel des notions de base de la programmation quadratique multiparamétrique et le concept d'(A,B)-invariance. Dans un second temps, nous formulons le problème du suivi de trajectoire par une commande prédictive en terme de programmation quadratique multiparamétrique. Nous terminons la section par une application sur un réseau du transport.

3.2 Commande prédictive et optimisation paramétrique

La commande prédictive consiste à résoudre un problème d'optimisation où une séquence de commande optimale est calculée en ligne à chaque pas de calcul. En utilisant l'approche multiparamétrique, la loi de commande est calculée hors ligne. Elle est dite commande prédictive explicite où l'entrée de commande est la variable d'optimisation. La variable d'état est définie comme étant un vecteur de paramètres.

L'objectif d'une optimisation paramétrique est de trouver la meilleure solution et les paramètres qui lui sont associés au sens d'un certain critère. Un problème d'optimisation paramétrique est généralement résolu en terme de programmation linéaire ou quadratique multiparamétrique. Quand la programmation dépend d'un seul paramètre, la programmation est dite paramétrique et quand elle dépend d'un vecteur de paramètres, la programmation est dite multiparamétrique.

3.2.1 Programmation quadratique multiparamétrique MPQP

La programmation quadratique multiparamétrique consiste à minimiser un critère quadratique en fonction d'un certain paramètre variable sur un domaine fermé. La formulation générale d'un MPQP est donnée par :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \frac{1}{2} z^T \cdot H \cdot z \\ & \text{soumis à} && G \cdot z \leq W + S \cdot x, \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec $z \in \mathbb{R}^s$ est une variable d'optimisation, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des paramètres. $H \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

3.2.2 Commande prédictive explicite résolue en terme d'un MPQP

La commande optimale sous contraintes peut être reformuler comme un problème de programmation multiparamétrique. En partant du principe de la commande prédictive, une séquence de commande optimale est calculée hors ligne sur un horizon de prédiction fini en minimisant un critère quadratique soumis aux contraintes paramétriques. Un problème de commande prédictive explicite est formulé généralement comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \sum_{i=1}^{N_p} x(k+i|k)^T Q x(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_c} u(k+i|k)^T R u(k+i|k), \\ & \text{soumis à} && D \cdot x(k) + L \cdot u(k) \leq M, \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec N_p est l'horizon de prédiction et N_c est l'horizon de commande.

Ce problème peut être reformulé sous forme paramétrique comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \frac{1}{2} U^T H U + x_0(k)^T \cdot F U, \\ & \text{soumis à} && \mathbf{G} \cdot U \leq W + S \cdot x_0(k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec U est la séquence de commande, $H = H^T > 0$ est une matrice symétrique définie positive, $x_0(k)$ est le vecteur des paramètres.

En appliquant la transformation

$$z = U + H^{-1} \cdot F^T \cdot x_0(k).$$

Le problème donné par (3.3) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \frac{1}{2} z^T H z, \\ & \text{soumis à} && \mathbf{G} \cdot z \leq W + S \cdot x_0(k), \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec $S = H + \mathbf{G}H^{-1}F^T$, $x_0(k)$ est le vecteur des paramètres. Le problème donné par (3.4) est un problème de programmation quadratique multiparamétrique dont la solution est une fonction affine par morceau $u(k+1) = K_i x(k) + k_i$ définie sur un ensemble de régions polyédrique $CR_i(H, h) = \{x(k) \in \mathbb{R}^m, H \cdot x(k) \leq h\}$ tel que pour chaque région une loi de commande par retour d'état est calculée [74].

La première méthode pour résoudre un problème de programmation multiparamétrique est proposée par Bemporad [64, 65], la méthode proposée consiste à construire les régions critiques autour du voisinage du paramètre considéré en utilisant les conditions d'optimalités de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) tel que l'espace des paramètres est exploré comme une région, pour cette raison la méthode est dite géométrique. Dans ce travail, la résolution est faite en utilisant le toolbox MPT de Matlab.

L'implémentation en ligne de la commande prédictive explicite doit suivre les étapes suivantes :

1. Mesurer le vecteur des paramètres courants $x(k)$.
2. Recherchez dans la table des régions critiques la région contenant $x(k)$.
3. Utiliser la loi de commande par retour d'état correspondante à cette région.
4. réitérer la procédure.

3.3 L'(A, B)-invariance

Le concept d'invariance positive joue un rôle important dans la théorie de commandes des systèmes linéaires sous contraintes. L'invariance positive d'un domaine fermé non vide de l'espace d'état relativement à un système dynamique linéaire implique que toutes les trajectoires du système restent dans ce domaine quelque soit l'état initial pris dans ce domaine. Un domaine non vide fermé de l'espace d'état relativement à un système dynamique linéaire est (A, B)-invariant ou invariant contrôlé si il existe une loi de commande qui forcent les trajectoires à rester dans ce domaine dans le future. Un domaine (A, B)-invariant est un domaine susceptible d'être rendu positivement invariant au moyen d'une loi de commande.

Définition 18 [75] Un domaine non vide $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est dit (A, B) -invariant par rapport un système linéaire donné par la représentation d'état

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k+1),$$

si $\forall x_0 \in \Omega$, il existe une séquence de commande $(u(0), u(1), \dots, u(k))$, $k \in \mathbb{N}$, tel que les trajectoires futures du vecteur d'état restent dans Ω .

$L(A, B)$ -invariance de Ω est équivalente à la condition suivante :

$$\forall x_0 \in \Omega, \exists u \in \mathbb{R}^m : (A \cdot x(k) + B \cdot u(k)) \in \Omega.$$

Définition 19 Le plus grand domaine admissible en un pas :

soit le domaine Ω donné par le polyèdre convexe suivant

$$\Omega(G, g) = \{x \in \mathbb{R}^n, G \cdot x \leq g\}, \quad (3.5)$$

Pour toute instant k donnée, l'admissibilité en un pas du vecteur d'état à l'instant suivant est caractérisée par la contrainte suivante :

$$G \cdot A \cdot x(k) + G \cdot B \cdot u(k) \leq g, \quad (3.6)$$

3.4 Commande prédictive multiparamétrique d'une classe de SEDs

Soit le modèle linéaire explicite décrivant le comportement d'un système à événements discret modélisé par un graphe d'événements P-temporel décrit par des équations en dateur dans l'algèbre standard donné par l'équation suivante :

$$\theta(k+1) = E^L A \cdot \theta(k) + E^L \cdot q(k+1) + E^L \mathbb{G} \cdot u(k+1). \quad (3.7)$$

$$a \leq q(k+1) \leq b$$

La trajectoire désirée satisfait (3.7) est donnée comme suit :

$$\theta_z(k+1) = E^L A \cdot \theta_z(k) + E^L \cdot q_z(k+1) + E^L \mathbb{G} \cdot u_z(k+1). \quad (3.8)$$

A partir des équations (3.7) et (3.8), nous obtenons le modèle décrivant l'erreur ($\theta(k) - \theta_z(k)$) entre le modèle du système et celui de la trajectoire désirée.

Le modèle d'erreur est donné par l'équation suivante :

$$e(k+1) = E^L A \cdot e(k) + E^L \cdot (q(k+1) - q_z(k+1)) + E^L G \cdot (u(k+1) - u_z(k+1)). \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) est réécrite sous la forme suivante :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B}1 \cdot (q(k+1) - q_z(k+1)) + \mathbb{B}2 \cdot (u(k+1) - u_z(k+1)), \quad (3.10)$$

avec :

$$\begin{cases} a - q_z \leq (q(k+1) - q_z) \leq b - q_z, \\ 0_{\bar{n}} \leq (u(k+1) - u_z(k+1)) \leq \lambda \cdot \mu_{\bar{n}}, \end{cases} \quad (3.11)$$

- $e(k) = \theta(k) - \theta_z(k)$ est la variable d'état du système d'erreur.
- $(q(k+1) - q_z(k+1))$ et $(u(k+1) - u_z(k+1))$ sont les variables de commande.
- $\mathbb{A} = E^L A$.
- $\mathbb{B}1 = E^L$.
- $\mathbb{B}2 = E^L G$.

La forme linéaire explicite est donnée par l'équation suivante :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+1). \quad (3.12)$$

soumis aux contraintes sur la variable de commande et la variable d'état données par :

$$\begin{cases} U_{min} \leq u_c(k+1) \leq U_{max}, \\ e_{min} \leq e(k+1) \leq e_{max}, \end{cases} \quad (3.13)$$

avec,

$$u_c(k+1) = \begin{pmatrix} q(k+1) - q_z \\ u(k+1) - u_z \end{pmatrix}, U_{min} = \begin{pmatrix} a - q_z \\ 0_{\bar{n}} \end{pmatrix}, U_{max} = \begin{pmatrix} b - q_z \\ \lambda \cdot \mu_{\bar{n}} \end{pmatrix}, e_{min} = 0_{n-\bar{n}}, e_{max} = \lambda \cdot \mu_{n-\bar{n}} \text{ et } \mathbb{B} = (\mathbb{B}1 \quad \mathbb{B}2).$$

3.4.1 Calcul de la séquence de commande

L'objectif de cette section est de trouver une séquence de commande optimale qui permet de suivre un comportement 1-périodique tout en assurant la stabilité du système

et le respect des contraintes sur la variable de commande et la variable d'état.

La commande prédictive consiste à déterminer une séquence de commande optimale en minimisant une fonction objective souvent de nature quadratique sur un horizon de prédiction fini donné comme suit :

$$J_{N_p}(k) = \sum_{i=1}^{N_p} e(k+i|k)^T Q_c e(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_c} u_c(k+i|k)^T R u_c(k+i|k). \quad (3.14)$$

Le vecteur de la variable d'état $e(k)$ et le vecteur de la variable de commande $u_c(k)$ sont soumis aux contraintes polyédriques données par :

$$\mathcal{P}(G, g) = \{u_c(k) \in \mathbb{R}^{m+\bar{n}}, \quad G \cdot u_c(k) \leq g\}, \quad (3.15)$$

et

$$\Omega(L, l) = \{e(k) \in \mathbb{R}^{m-\bar{n}}, \quad L \cdot e(k) \leq l\}, \quad (3.16)$$

où $G = \begin{pmatrix} I_{m+\bar{n}} \\ -I_{m+\bar{n}} \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} I_{n-\bar{n}} \\ -I_{n-\bar{n}} \end{pmatrix}$ et $l = \begin{pmatrix} e_{max} \\ -e_{min} \end{pmatrix}$.

Le vecteur des états prédits s'écrit en fonction des variables de commande futures comme suit :

$$e(N_p) = \mathbb{A}^{N_p} \cdot e(0) + \sum_{i=1}^{N_p} \mathbb{A}^{N_p-i} \cdot \mathbb{B} \cdot u_c(i), \quad (3.17)$$

Sous forme matricielle l'équation (3.17) est équivalente à :

$$\mathbf{E} = S_c \cdot U + A_0 \cdot e(0), \quad (3.18)$$

avec, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N_p) \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_c(1) \\ u_c(2) \\ u_c(3) \\ \vdots \\ u_c(N_c) \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{A}^2 \\ \mathbb{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbb{A}^{N_p} \end{pmatrix}$,

$$S_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & 0_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} & \cdots & \cdots & 0_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & 0_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} & \cdots & 0_{(n-\bar{n}) \times (m+\bar{n})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}^{N_p-1} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^{N_p-2} \cdot \mathbb{B} & \cdots & \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

En remplaçant la formule donnée par l'équation (3.18) dans la fonction objective donnée

par l'équation (3.14), nous obtenons un critère qui dépend uniquement de la séquence de commande comme suit :

$$J = \frac{1}{2} U^T H U + e(0)^T \cdot F U, \quad (3.19)$$

$$\text{avec } \begin{cases} H = S_c^T Q_c S + R_m, \\ F = (A^T \cdot Q_m \cdot S)^T, \\ Q_m = \text{diag}(Q_c, Q_c, \dots, Q_c), \\ R_m = \text{diag}(R, R, \dots, R). \end{cases}$$

3.4.2 Formulation des contraintes paramétriques

En utilisant le concept d'(A,B)-invariance, l'admissibilité du vecteur des contraintes sur la variable d'état à un événement k par rapport au système donné par l'équation (3.12), est caractérisée par l'équation suivante :

$$L \cdot \mathbb{A} \cdot e(k) + L \cdot \mathbb{B} \cdot u_c(k) \leq l. \quad (3.20)$$

L'ensemble des contraintes de problème de commande est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} L_e \cdot e(k) + L_u \cdot u_c(k) \leq l, \\ L \cdot e(k) \leq l, \\ G \cdot u_c(k) \leq g, \end{cases} \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{cases} L_e = L \cdot \mathbb{A}, \\ L_u = L \cdot \mathbb{B}. \end{cases}$$

L'ensemble des contraintes donné par l'équation (3.21) est réécrit comme suit :

$$H_u \cdot u_c(k) \leq H_e \cdot e(k) + h, \quad (3.22)$$

$$\text{avec } H_u = \begin{pmatrix} L_u \\ 0_{\bar{n}+m} \\ G \end{pmatrix}, H_e = \begin{pmatrix} -L_e \\ -L \\ 0_{n-\bar{n}} \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} l \\ l \\ g \end{pmatrix}.$$

Sur un horizon de prédiction de commande N_c , nous développons la contrainte donnée

par l'équation (3.22). Les inégalités suivantes sont obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_u \cdot u_c(1) \leq H_e \cdot e(1) + h, \\ H_u \cdot u_c(2) \leq H_e \cdot e(2) + h, \\ H_u \cdot u_c(2) \leq H_e \cdot (\mathbb{A}e(1) + \mathbb{B}u_c(1)) + h, \\ H_u \cdot u_c(2) \leq H_e \mathbb{A} \cdot e(1) + H_e \mathbb{B}u_c(1) + h, \\ H_u \cdot u_c(3) \leq H_e \cdot e(3) + h, \\ H_u \cdot u_c(3) \leq H_e \cdot (\mathbb{A}e(2) + \mathbb{B}u_c(2)) + h, \\ H_u \cdot u_c(3) \leq H_e \mathbb{A}^2 \cdot e(1) + H_e \mathbb{A} \mathbb{B}u_c(1) + H_e \mathbb{B} \cdot u_c(2) + h, \\ H_u \cdot u_c(N_c - 1) \leq H_e \mathbb{A}^{N_c - 1} \cdot e(1) + \dots + \dots + H_e \mathbb{B} \cdot u_c(N_c - 1) + h, \end{array} \right.$$

ces équations sont réécrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_u \cdot u_c(1) \leq H_e \cdot e(1) + h, \\ H_u \cdot u_c(2) \leq H_e \cdot e(2) + h, \\ H_u \cdot u_c(2) \leq H_e \cdot (\mathbb{A}e(1) + \mathbb{B}u_c(1)) + h, \\ H_u \cdot u_c(2) - H_e \mathbb{B}u_c(1) \leq H_e \mathbb{A} \cdot e(1) + h, \\ H_u \cdot u_c(3) \leq H_e \cdot e(3) + h, \\ H_u \cdot u_c(3) \leq H_e \cdot (\mathbb{A}e(2) + \mathbb{B}u_c(2)) + h, \\ H_u \cdot u_c(3) - H_e \mathbb{A} \mathbb{B}u_c(1) - H_e \mathbb{B} \cdot u_c(2) \leq H_e \mathbb{A}^2 \cdot e(1) + h, \\ H_u \cdot u_c(N_c - 1) - \dots - \dots - H_e \mathbb{B} \cdot u_c(N_c - 1) \leq H_e \mathbb{A}^{N_c - 1} \cdot e(1) + h. \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\mathbf{G}_u \cdot U \leq \rho + \mathbf{H}_e \cdot e(k), \quad (3.23)$$

avec,

$$\mathbf{G}_u = \begin{pmatrix} H_u & O & \dots & \dots & O \\ -H_e \mathbb{B} & H_u & O & \dots & O \\ -H_e \mathbb{A} \mathbb{B} & -H_e \mathbb{B} & H_u & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -H_e \mathbb{A}^{N_c - 1} \mathbb{B} & -H_e \mathbb{A}^{N_c - 2} \mathbb{B} & \dots & -H_e \mathbb{B} & H_u \end{pmatrix}, \mathbf{H}_e = \begin{pmatrix} H_e \\ H_e \mathbb{A} \\ \vdots \\ H_e \mathbb{A}^{N_c} \end{pmatrix}, \text{ et } \rho = \begin{pmatrix} h \\ h \\ \vdots \\ h \end{pmatrix},$$

$U = (u_c(1), u_c(2), u_c(3), \dots, u_c(N_c))^T$ est le vecteur de la séquence de commande à calculer. Le problème de commande prédictive sur un horizon de prédiction fini sous contraintes

sur la variable de commande et la variable d'état est formulé sous forme d'un problème de programmation quadratique multiparamétrique donné par :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \frac{1}{2}U^T H U + e(k)^T \cdot F \cdot U, \\ & \text{soumis à} && \mathbf{G}_u \cdot U \leq \rho + \mathbf{H}_e \cdot e(k), \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec $e(k)$ est le vecteur des paramètres d'optimisation.

En appliquant la transformation

$$z = U + H^{-1} \cdot F^T \cdot e(k),$$

le problème d'optimisation donné par l'équation (3.24) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \frac{1}{2}z^T H z, \\ & \text{soumis à} && \mathbf{G}_u \cdot z \leq \rho + S \cdot e(k). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le problème optimal formulé par l'équation (3.25) est un problème de programmation quadratique multiparamétrique avec $e(k)$ est le vecteur de paramètres. La matrice S est donnée par $S = H_e + \mathbf{G}_u H^{-1} F^T$. La séquence de loi de commande obtenue par la résolution de (3.25) est une fonction affine par morceau donnée comme suit :

$$u_c(k+1) = K_i e(k) + k_i \quad \text{si} \quad e(k) \in \Omega_i.$$

Dans ce travail, le problème de programmation quadratique multiparamétrique (3.25) est résolu en utilisant le toolbox Matlab Multi-Parametric Toolbox (MPT) [76].

3.5 Application à un système du transport

Dans cette section, nous appliquons les résultats précédents à un réseau du transport composé de deux lignes et un arrêt de correspondance. L'objectif est de minimiser le temps d'attente des passagers dans l'arrêt de correspondance et le temps de voyage d'un passager qui suit un itinéraire de l'arrêt de départ de la ligne 1 à l'arrêt d'arrivée de la ligne 2. Le réseau est modélisé par un graphe d'événements P-temporel donné par la figure

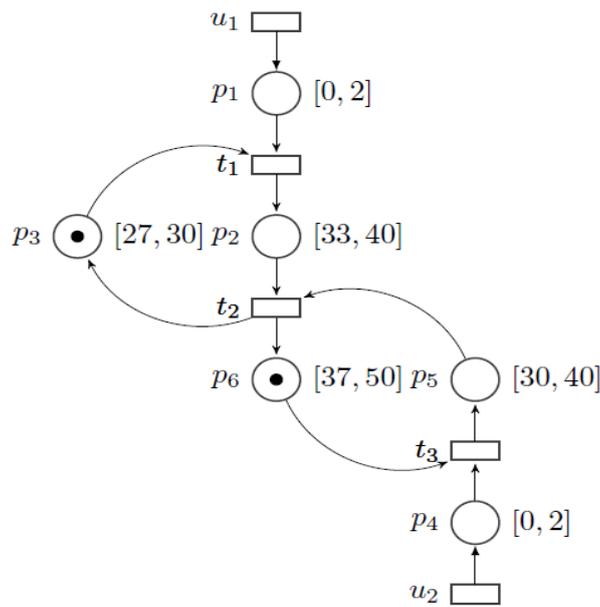


FIGURE 3.1: Le graphe d'événements P-temporel du réseau de transport

- u_1 , p_1 , t_1 , p_2 , t_2 et p_3 : se sont les éléments de la ligne 1.
- u_2 , p_4 , t_3 , p_5 , t_2 et p_6 : se sont les éléments de la ligne 2.
- u_1 (respectivement u_2) : représente un ordre de départ de bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2).
- p_1 (respectivement p_4) : représente un ordre de départ de bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2) en attente d'exécution.
- t_1 (respectivement t_3) : représente le départ des bus de leurs arrêts de retournement.
- p_2 (respectivement p_5) : représente le tronçon entre l'arrêt de départ de ligne 1 (respectivement ligne 2) et l'arrêt de correspondance.
- t_2 : représente l'arrêt de correspondance entre les deux bus.
- p_3 (respectivement p_6) : représente le tronçons de route du bus de la ligne 1 (respectivement ligne 2) de l'arrêt du correspondance à l'arrêt du retour.
- Les jetons dans les places présentent soit un ordre de départ en attente d'exécution, soit un bus effectuant une tournée, soit des passagers en correspondance.
- Les intervalles du temps sont désignés selon le rôle de la place auxquelles elles sont associées. Un intervalle du temps associé à une place représente soit le temps d'exécution d'un ordre de départ, soit le temps d'un trajet, soit le temps pour effectuer une corres-

pondance.

Initialement les bus sont de retour vers leurs arrêts de départ et sont représentés par un jeton dans la place p_3 pour le bus de la ligne 1 et un jeton dans la place p_6 pour le bus de la ligne 2. Le franchissement de la transition u_1 (respectivement u_2) rajoute un jeton à la place p_1 (respectivement p_4). Ce jeton est associé à un ordre de départ en attente d'exécution. Le franchissement de la transition t_1 (respectivement t_3) enlève un jeton de la place p_1 (respectivement p_4), un jeton de la place p_3 (respectivement p_6) ce qui veut dire que l'ordre de départ de bus de la ligne 1 (respectivement de la ligne 2) est exécuté dès que le bus est prêt pour effectuer une tournée et ajoute un jeton à la place p_2 (respectivement p_5), ce jeton est associé au bus allant de la station de départ vers la station de correspondance. Le franchissement de la transition t_2 enlève un jeton de la place p_2 (respectivement p_5) donc le bus de la ligne 1 et le bus de la ligne 2 sont arrivés à la station de correspondance, rajoute un jeton à la place p_3 (respectivement p_6) qui représente les bus en retour vers leurs stations de retournement après avoir effectué la correspondance. En modélisant le graphe d'événements par des équations en dateur dans l'algèbre standard, nous obtenons les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(k+1) = q_1(k+1) + u_1(k+1), \\ \theta_2(k+1) - \theta_1(k+1) = q_2(k+1), \\ \theta_1(k+1) = \theta_2(k) + q_3(k+1), \\ \theta_3(k+1) = q_4(k+1) + u_2(k+1), \\ \theta_2(k+1) - \theta_3(k+1) = q_5(k+1), \\ \theta_3(k+1) = \theta_2(k) + q_6(k+1). \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons le modèle implicite suivant,

$$E \cdot \theta(k+1) = A \cdot \theta(k) + q(k+1) + \mathbb{G} \cdot u(k+1),$$

$$\text{avec } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 27 \\ 0 \\ 30 \\ 37 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \\ q_4(k+1) \\ q_5(k+1) \\ q_6(k+1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 40 \\ 40 \\ 2 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

La trajectoire désirée est donnée par,

$$E \cdot \theta_z(k+1) = A \cdot \theta_z(k) + q_z + u_z(k+1),$$

$$\text{avec, } q_z = \begin{pmatrix} 1.34 \\ 33 \\ 35.2 \\ 2 \\ 31.54 \\ 37 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 27 \\ 0 \\ 30 \\ 37 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 40 \\ 40 \\ 2 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ et } \theta_{z0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 1.45 \end{pmatrix}.$$

Le modèle d'erreur est donné par

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u_c(k+1),$$

avec $\mathbb{A} = E^L \cdot A$, $\mathbb{B} = (E^L \quad E^L \cdot \mathbb{G})$ et $e(k) = \theta(k) - \theta_z(k)$ est la variable d'état du modèle d'erreur soumis aux contraintes sur la variable de commande et la variable d'état :

$$\begin{cases} 0_{n-\bar{n}} \leq e(k+1) \leq \lambda \cdot \mu_{n-\bar{n}}, \\ \begin{pmatrix} a - q_z \\ 0_{\bar{n}} \end{pmatrix} \leq u_c(k+1) \leq \begin{pmatrix} b - q_z \\ \lambda \cdot \mu_{\bar{n}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

La séquence de commande est obtenue en utilisant les paramètres de la commande prédictive, qui sont l'horizon de prédiction $N_p = 7$, l'horizon de commande $N_c = 4$, les matrices de pondérations $Q_c = I_7$, $R = I_4$ et le temps de cycle de la trajectoire désirée $\lambda = 67$.

Dans cet exemple, le problème MPQP est résolu en utilisant le toolbox MPT de Matlab [?], la solution est une fonction affine par morceau PWA définissant les lois de commande $u_c(k+1) = K_i e(k) + k_i$ sur des régions $CR_i(H, h) = \{e(k) \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}, H_i \cdot e(k) \leq h_i\}$ avec i est l'indice de la région. Pour chaque région une séquence de loi de commande en boucle

fermée est calculée sur un horizon de prédiction. Les lois de commande obtenues pour chaque région sont données comme suit :

$$RC1 = \left\{ \begin{array}{l} u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l} q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0583 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.0583 & 0 \\ 0 & -0.0972 & 0 \\ 0 & -0.0615 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \\ \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \end{array} \right. \\ \\ u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l} q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0298 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.0298 & 0 \\ 0 & -0.0391 & 0 \\ 0 & -0.0238 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \\ \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \end{array} \right. \\ \\ u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l} q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0095 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0095 & 0 \\ 0 & -0.0118 & 0 \\ 0 & -0.0073 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \\ \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \end{array} \right. \\ \\ u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l} q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0015 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0015 & 0 \\ 0 & -0.0020 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \\ \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{si,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 6.52 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$RC2 = \left\{ \begin{array}{l}
 u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.0992 & 0 \\ 0 & -0.1182 & 0 \\ 0 & -0.0915 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ -0.0000 \\ 0.2667 \\ 0.1369 \\ 0.1958 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0360 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.0360 & 0 \\ 0 & -0.0463 & 0 \\ 0 & -0.0281 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0401 \\ -0.0000 \\ 0.0401 \\ 0.0469 \\ 0.0279 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0110 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0110 & 0 \\ 0 & -0.0135 & 0 \\ 0 & -0.0084 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0097 \\ -0.0000 \\ 0.0097 \\ 0.0113 \\ 0.0070 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0017 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0017 & 0 \\ 0 & -0.0022 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0000 \\ 0.0013 \\ 0.0016 \\ -0.0001 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

$$\text{si, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 6.74 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -6.52 \end{bmatrix}$$

$$RC3 = \left\{ \begin{array}{l}
u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.1334 & 0 \\ 0 & -0.1334 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ -0.0000 \\ 0.4968 \\ 0.2393 \\ -1.0810 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0549 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.0549 & 0 \\ 0 & -0.0684 & 0 \\ 0 & -0.0413 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.1674 \\ -0.0000 \\ 0.1674 \\ 0.1958 \\ 0.1167 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0156 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0156 & 0 \\ 0 & -0.0189 & 0 \\ 0 & -0.0117 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -0.0000 \\ 0.0404 \\ -0.0000 \\ 0.0404 \\ 0.0473 \\ 0.0292 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0030 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0053 \\ 0.0000 \\ 0.0053 \\ 0.0067 \\ -0.0006 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \quad \text{si,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 7.3614 \\ 0 \\ 0 \\ 67.0000 \\ 67.0000 \\ -6.7425 \end{bmatrix}$$

$$RC4 = \left\{ \begin{array}{l}
 u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.1723 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0.0000 \\ 0.7834 \\ -2.0000 \\ -1.0810 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0701 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.0701 & 0 \\ 0 & -0.0862 & 0 \\ 0 & -0.0519 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.2794 \\ -0.0000 \\ 0.2794 \\ 0.3268 \\ 0.1947 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0156 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0156 & 0 \\ 0 & -0.0189 & 0 \\ 0 & -0.0117 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0674 \\ -0.0000 \\ 0.0674 \\ 0.0790 \\ 0.0488 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0028 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0028 & 0 \\ 0 & -0.0036 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0089 \\ 0.0000 \\ 0.0089 \\ 0.0113 \\ -0.0010 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

$$\text{si, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 18.6727 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -7.3614 \end{bmatrix}$$

$$RC5 = \left\{ \begin{array}{l}
u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.1773 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 0.8772 \\ -2.0000 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.0867 & 0 \\ 0 & -0.0945 & 0 \\ 0 & -0.0641 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0.0000 \\ 0.5897 \\ 0.4826 \\ 0.4230 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0217 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0217 & 0 \\ 0 & -0.0261 & 0 \\ 0 & -0.0161 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.1140 \\ -0.0000 \\ 0.1140 \\ 0.1336 \\ 0.0825 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0031 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0031 & 0 \\ 0 & -0.0040 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0150 \\ 0 \\ 0.0150 \\ 0.0190 \\ -0.0017 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \text{ si, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 19.1787 \\ 0 \\ 0 \\ 67.0000 \\ 67.0000 \\ -18.6727 \end{bmatrix}$$

$$RC6 = \left\{ \begin{array}{l}
u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.1813 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 0.9539 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.1005 & 0 \\ 0 & -0.1005 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 0.8557 \\ 0.5982 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0295 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0295 & 0 \\ 0 & -0.0353 & 0 \\ 0 & -0.0218 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.2641 \\ -0.0000 \\ 0.2641 \\ 0.3096 \\ 0.1911 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0041 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0041 & 0 \\ 0 & -0.0053 & 0 \\ 0 & 0.0004 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0347 \\ 0 \\ 0.0347 \\ 0.0441 \\ -0.0040 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \text{ si, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 20.7064 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -19.1787 \end{bmatrix}$$

$$RC7 = \left\{ \begin{array}{l}
u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & -0.1906 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 1.1464 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.1158 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 1.1724 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0357 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0357 & 0 \\ 0 & -0.0425 & 0 \\ 0 & -0.0262 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.3908 \\ 0 \\ 0.3908 \\ 0.4582 \\ 0.2829 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0049 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0049 & 0 \\ 0 & -0.0063 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0513 \\ 0 \\ 0.0513 \\ 0.0653 \\ -0.0060 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right.
\end{array} \right. \text{si, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq$$

$$\begin{bmatrix} 25.5293 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -20.7064 \end{bmatrix}$$

$$RC8 = \left\{ \begin{array}{l}
u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ -8.0810 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
\\
u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.1158 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 1.9651 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
\\
u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0443 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0443 & 0 \\ 0 & -0.0526 & 0 \\ 0 & -0.0325 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.6124 \\ 0 \\ 0.6124 \\ 0.7179 \\ 0.4433 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
\\
u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0061 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0061 & 0 \\ 0 & -0.0078 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.0805 \\ 0 \\ 0.0805 \\ 0.1023 \\ -0.0093 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array} \quad \text{si,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq \begin{bmatrix} 43.8471 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -25.5293 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 RC9 = & \left\{ \begin{array}{l}
 u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ -8.0810 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.1485 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 2.0337 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0497 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0497 & 0 \\ 0 & -0.0550 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.8473 \\ 0 \\ 0.8473 \\ 0.8240 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0079 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0079 & 0 \\ 0 & -0.0101 & 0 \\ 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.1605 \\ 0 \\ 0.1605 \\ 0.2042 \\ -0.0186 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\text{si, } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq$$

$$\begin{bmatrix} 43.8624 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -43.8471 \end{bmatrix}$$

$$RC10 = \left\{ \begin{array}{l}
 u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ -8.0810 \\ -2.0000 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.1517 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 2.1759 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0604 & 0 \\ 0 & -0.0604 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 1.3180 \\ 1.0605 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0091 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0091 & 0 \\ 0 & -0.0116 & 0 \\ 0 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.2118 \\ 0 \\ 0.2118 \\ 0.2695 \\ -0.0245 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad \text{si,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq$$

$$\begin{bmatrix} 47.7329 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -43.8624 \end{bmatrix}$$

$$RC11 = \left\{ \begin{array}{l}
u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ -8.0810 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
\\
u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & -0.1566 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 2.4086 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
\\
u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0685 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 1.7050 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right. \\
\\
u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0108 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0108 & 0 \\ 0 & -0.0138 & 0 \\ 0 & 0.0012 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.2958 \\ 0 \\ 0.2958 \\ 0.3762 \\ -0.0343 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
\end{array} \right.
\end{array} \right. \quad \text{si,} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq$$

$$\begin{bmatrix} 57.7930 \\ 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ -47.7329 \end{bmatrix}$$

$$RC12 = \left\{ \begin{array}{l}
 u_c(1) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(1) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.0979 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ -8.0810 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1708 & 0 \\ 0 & 0.1708 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(2) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(2) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0143 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ -8.0810 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0249 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(3) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(3) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & -0.0846 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} -1.4943 \\ 0 \\ 2.6306 \\ -2 \\ -1.0810 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right. \\
 \\
 u_c(4) = \left\{ \begin{array}{l}
 q(4) - q_z = \begin{bmatrix} 0 & -0.0133 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0133 & 0 \\ 0 & -0.0169 & 0 \\ 0 & 0.0015 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) + \begin{bmatrix} 0.4376 \\ 0 \\ 0.4376 \\ 0.5566 \\ -0.0507 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right. \text{si, } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e(k) \leq$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 67 \\ 67 \\ 67 \\ -57.7930 \end{bmatrix}$$

La commande par retour d'état est synthétisée sur douze régions critiques données par la Figure 3.2

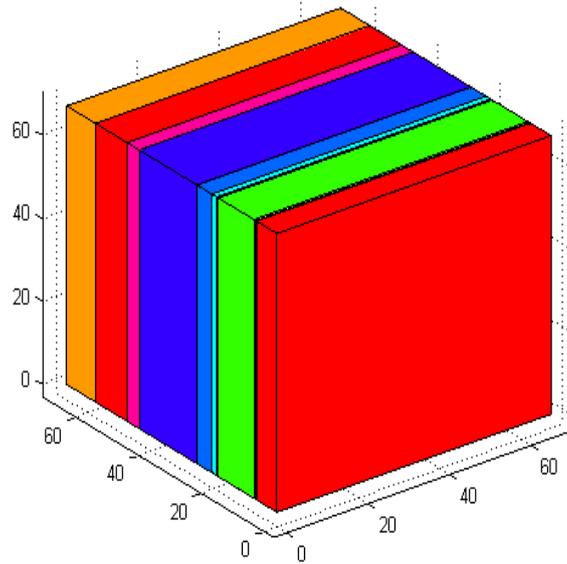


FIGURE 3.2: Les régions critiques de la séquence de commande PAW.

Les résultats du simulation de problème de commande optimale sont illustrés sur la Figures 3.3 et la Figure 3.4.

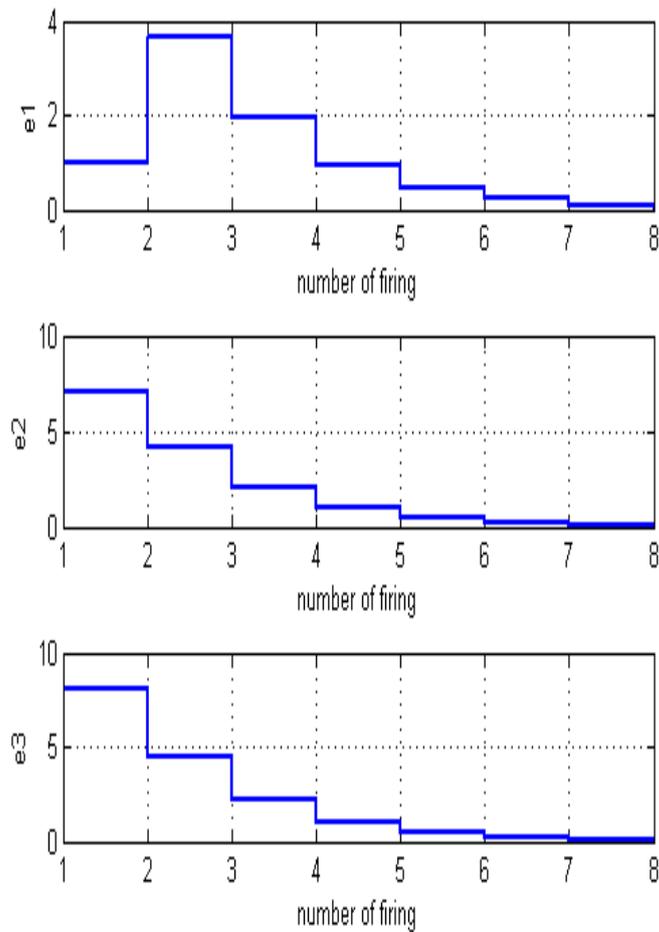


FIGURE 3.3: La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des transitions.

La Figure 3.3 représente l'évolution de modèle d'erreur entre la trajectoire réel et celle désirée en fonction du nombre de franchissements des transitions du graphe d'événements P-temporel. Toutes les courbes tendent vers zéro ce qui montre que le comportement 1-périodique est atteint.

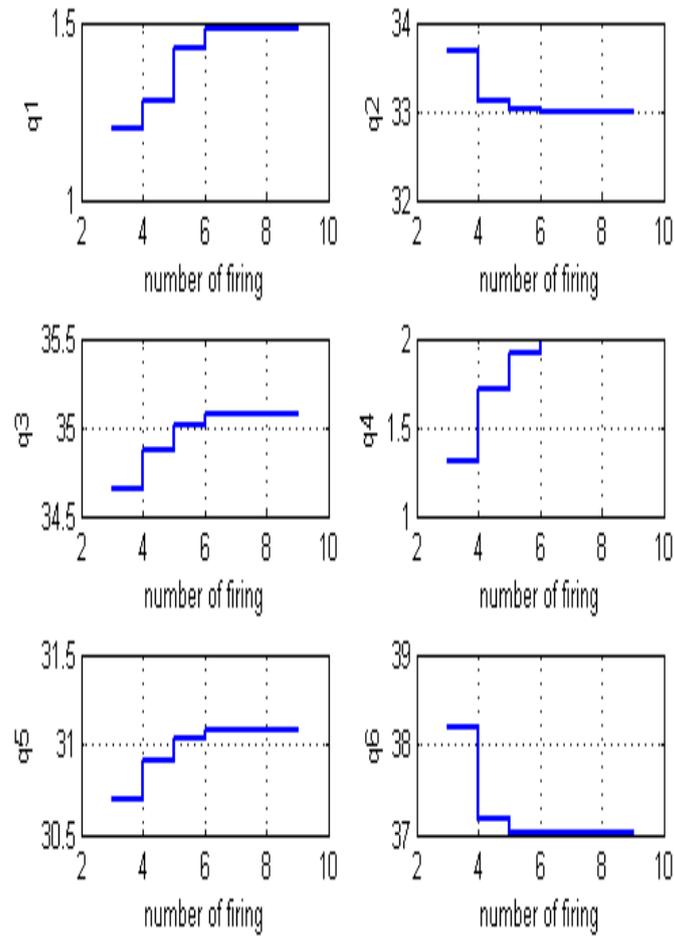


FIGURE 3.4: Évolution des temps de séjour des marques dans les places du GE P-temporel en fonction de nombre de franchissements des transitions.

La Figure 3.4 représente l'évolution du temps de séjour des marques dans les places du graphe d'événements P-temporel en fonction du nombre de franchissements des transitions. Les contraintes sur l'état et sur les temps de séjour des places sont bien respectées comme est montré par les Figures 3.2, 3.3 et 3.4.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche de commande prédictive géométrique est présentée et étendue à une classe de système à événements discret modélisé dans l'algèbre standard en utilisant les équations en dateur. Cette approche est résolue en terme de programmation multiparamétrique. Dans le problème d'optimisation paramétrique les contraintes paramétriques sont construites en utilisant le concept d'(A,B)-invariance. La commande prédictive synthétisée assure la stabilité du système du fait que la contraintes d'(A,B)-invariance est prise en considération dans le problème d'optimisation de la commande prédictive. L'approche est appliquée sur un réseau du transport.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce travail des méthodologies de commande pour une classe de systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard tout en assurant le respect des contraintes du temps de séjour des marques dans les places du graphe d'événements considéré.

Récemment la commande prédictive est largement utilisée dans le cadre de la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des modèles algébriques dans l'algèbre $(\max,+)$. La contribution principale de ce travail est d'étendre les techniques de commande prédictive appliquées pour les systèmes dynamiques continus ou discrets à des systèmes à événements discrets modélisés dans l'algèbre standard. En premier, une séquence de commande en boucle ouverte est calculée sur un horizon fini. La commande calculée nous a permis d'atteindre un fonctionnement 1-périodique en garantissant le respect des contraintes sur les temps de séjour des marques dans les places du graphe d'événements P-temporel.

La garantie de stabilité et de la robustesse d'une commande calculée en boucle ouverte n'est pas toujours triviale. Pour cela, une des directions les plus utilisées est la définition d'ensembles invariants contractifs pour le système à travers des fonctions de Lyapunov de type ellipsoïdales. L'approche proposée par Kothare pour la commande des systèmes incertains est étendue à une classe de systèmes à événements discrets. Des gains de commande en boucle fermée sont obtenus par la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). Les gains assurent une stabilité asymptotique avec respect des contraintes. Nous avons montré que même les

contraintes polyédriques non symétriques peuvent être reformulées sous forme de conditions LMI dans le problème d'optimisation convexe. Finalement, la condition d'inclusion d'un ellipsoïde dans un polyèdre est vérifiée si la distance entre cet ellipsoïde et les hyperplans qui forment ce polyèdre est positive.

Nous avons par la suite élargi la contribution à la commande prédictive explicite. Une commande prédictive est calculée hors ligne sur un horizon fini. En effet, un problème d'optimisation soumis à des contraintes sur la variable de commande et la variable d'état peut être reformulé sous forme d'un problème d'optimisation paramétrique en utilisant le concept d' (A,B) -invariance. Les gains de commandes obtenus sont des fonctions affines par morceaux. Cette approche garantit la stabilité du système avec respect des contraintes temporelles.

Les résultats des méthodologies présentés dans ce travail sont illustrés sur un système du transport vu comme une classe de systèmes à événements discrets. L'objectif est de minimiser le temps d'attente des passagers dans les stations de correspondance.

Les travaux présentés dans cette thèse ont comme perspective les points suivants :

- Généralisation de l'approche commande prédictive à base des contraintes LMIs à des systèmes à événements discrets hybrides.
- Application de cette dernière à des systèmes manufacturiers.
- Calcul de la commande prédictive multi-paramétrique sur des horizons de prédiction infinis.
- étendre l'approche commande prédictive à des systèmes à événements discrets modélisés en compteurs dans l'algèbre standard.

Bibliographie

- [1] Lahaye. S, Cottenceau. B, Correia. A : "Commande de graphes d'événements temporisés avec contraintes de temps critique". Conférence internationale d'Automatique francophone CIFA. Tunisie (2004).
- [2] Atto. A.M, Martinez. C and Amari. S : "Control of Discrete Event Systems with Respect to Strict Duration : Supervision of an Industrial Manufacturing Plant". Computers and Industrial Engineering, Elsevier, 61(4), pp.1149-1159,(2011).
- [3] Amari. S : "Commande des graphes d'événements temporisés sous contraintes temporelles". Thèse de doctorat, Université de Nantes, (2005).
- [4] Amari S. : "Feedback control for a class of discrete event systems with critical time". International Journal of Control. vol.219(66), pp,957-984. (2015).
- [5] Tebani. K, Amari. S and Kara. R : "Closed-loop control of constrained discrete event systems : application to a networked automation system". The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,90(5), pp,1295-1306,(2016).
- [6] Cohen. G, Dubois. D, Quadrat. J.P and Viot. M : "Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des diodes". Rapport de recherche 191, INRIA. Le Chesnay, France. (1983).
- [7] Cohen. G, Dubois. D, Quadrat. J.P and Viot. M : "A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing". IEEE Trans. On Automatic Control, 30(3),pp,210-220.(1985)
- [8] Le Boudec. J.Y and Thiran. P : "Newtork Calculus". Springer- Verlag. <http://ica1www.epfl.ch/PS-files/NetCal.htm>.(2001).

- [9] Houssin. L : "Contribution à l'étude des systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes. Applications aux systèmes de transport". Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Nantes-Angers, France,(2003).
- [10] Collart Dutilleul. S : "Commande Robuste D'ateliers a contraintes de temps de séjour : Application à la galvanoplastie". PHD Thesis.(1997)
- [11] Khansa. W : "Réseaux de Petri P-temporel, Contribution à l'Étude des Systèmes à Événements Discrets". Phd Thesis. Savoie University.(1997).
- [12] Ouerghi. I, Hardouin. L, Morel. J.Y and Bourcerie. M : " Verification and Control of P-temporal Event Graphs". IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation (IMACS 2005), Paris, France, (2005).
- [13] Declerck. P, Guezzi. A and Boimond. J.L : "Cycle Time of P-time Event Graphs". 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO2007), Special Session : From Planning to Control of Manufacturing Systems, Angers, France, 09-12 may (2007).
- [14] Guezzi. A : " Modélisation, analyse de performances et commandes des systèmes à événements discrets". Phd Thesis. Angers University. (2010)
- [15] Kara. R, Becha. T, Collart Dutilleul. S and Loiseau. J.J : "An implicit System for Modelling and Control of Discrete Event System". 5th Symposium on System on Structure and Control Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC, Grenoble, France, February 4-6,pp.84-89. (2013).
- [16] Camacho. E. F and Bordons. C : "Model predictive control". Springer-Verlag, 2nd édition,(2004).
- [17] Richalet. J, Lavielle. G and Mallet. J : "La commande prédictive : Mise en oeuvre et application industrielles". Ediditions Eyrolles, (2005)
- [18] Camacho. E.F and Bordons C : "Model Predictive Control in the Process Industry". Springer. London. (2007).
- [19] Richalet. J : "Pratique de la commande prédictive". Hermes, (1993).

- [20] García.C.E and Morari M. M : "Internal model control, multivariable control law computation and tuning guidelines". *Ind. Engng Chem. Process Des. Dev.*, 24 :484489, (1985).
- [21] Richalet.J , Rault.A, Testud.J and Papon.J : "Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes". *Automatica*, vol. 14, no. 5, pp. 413-428, (1978).
- [22] Boucher. P and Dumur. D : "La commande prédictive". Editions Technip, (1996).
- [23] Mayne. D, Rawlings. J, Rao.C and Scokaert. P : "Constrained model predictive control : stability and optimality". *Automatica*, vol.36, no.6, pp. 789-814, (2000).
- [24] De Schutter. B and Van den Boom. T.J.J : "Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems". *Automatica*, Vol.37(7), pp.1049-1056.(2001).
- [25] Júlvez. J and Boel. R : "A Continuous Petri net Approach for Model Predictive Control of Traffic Systems". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A. Systems and Humans*. Vol.40(4), pp.686-697.(2010)
- [26] Mahulea. C, Giu. A, Recalde. L, Seatzu. C and Silva. M : "Optimal model predictive control of Timed Continuous Petri nets". *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.53(7),pp.1731-1735.(2008).
- [27] Hamri. H, Kara. R and Amari. S : "Model predictive control of P-time event graphs". *International Journal of Systems Science*. 47(16), pp,3792-3802,(2016).
- [28] Kothare. M.V, Balakrishnan. V and Morari. M : "Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities". *Automatica*. V.32.N10, pp, 1361-1379.(1996).
- [29] Hamri. H, Kara. R and Amari. S : "Multiparametric predictive control for a class of Discrete Event Systems". *WODES 2016 the 13th international Workshop on Discrete Event Systems*. Xi'an, China. pp.418-423,(2016).
- [30] Ramchandani. C : " Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets". Ph.D. thesis, MIT, Cambridge, (1974).
- [31] Sifakis. J : "Structural properties of petri nets". In *Mathematical foundation of computer science*, volume 64. J. Windowski (ed), Springer Verlag, (1978).

- [32] Sifakis. J : "Use of Petri nets for performance evaluation in measurings modellings and evaluating computer systems". North Holland, Publ.Co, pp 75-93, (1977).
- [33] Sifakis. J : "Etude du comportement permanent des réseaux de Petri temporisés". Journées AFCET sur les réseaux de Petri, Paris, (1977).
- [34] Khansa. W, Denat.J. P. and Collart-Dutilleul. S : "P-time petri nets for manufacturing systems". In proceedings of WODES '96, pages 94-102, Edimburgh, UK, (1996).
- [35] David. R and Alla. H : "Petri net and Grafcet : tools for modellings discret event systems". Prentice-Hall, London, (1992).
- [36] David. R and Alla. H : "Du Grafcet aux réseaux de Petri". Edition Hermès, Paris, (1992).
- [37] David. R and Alla. H : "Discrete, continuous, and hybrid Petri nets". Springer Verlag.(2005).
- [38] Murata. T : "Petri nets : Properties, analysis and applications". Proceedings of the IEEE, 77(4),pp.541-580,(1989).
- [39] Becha. T, Kara. R, Collart Dutilleul.S and Loiseau. J.J : "Modeling, analysis and control of electroplating line modelled by P-time event graphs". 6th IFAC Conference on Management of Production and Logistics, Center for Information Technology Renato Archer, Fortaleza, Brazil, Vol.6, pp 311-316. (2013).
- [40] Van Den Boom. T.J.J and De Schutter. B : "Model predictive control for perturbed max-plus-linear systems". Systems and Control Letters, 45(5), pp. 21-33.(2002)
- [41] Ion Necoara, Van den Boom. T.J.J and De Schutter. B : "Stabilization of max-plus linear systems using model predictive control : the unconstrained case". Automatica, 44(4),pp.971-981.(2008)
- [42] Xavier, D.H, Joerg, R., Laurent, H., and Bertrand, C : "Modeling and Control for Max-plus Systems with Partial Synchronization". 12th international Workshop on Discrete Event Systems. Ecol Normal Supérieur de cachan, Cachan, France. DOI :10.3182/20140514-3-FR-4046.00025, pp, 105-110.(2014)

- [43] Declerck. P : "Causality Phenomenon and Compromise Technique for Predictive Control of Timed Event Graphs with Specifications Defined by P-Time Event Graphs". 12th international Workshop on Discrete Event Systems. Ecole Normal Supérieure de Cachan, Cachan, France. DOI :10.3182/20140514-3-FR-4046.00045, pp, 99-104.(2014)
- [44] Declerck. P and Guezzi. A : "Predictive control of Timed Event Graphs with specification defined by P-time Event Graphs". Discrete Event Dynamic Systems. Vol.24(3), pp. 261-273.(2014)
- [45] Kurzhanskiy. A.A and Varaiya. P : "Ellipsoidal Toolbox". Electrical Engineering and Computer Science, University of California at Berkeley. Technical report N.UCB/EECS-2006-46.<http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2006/EECS-2006-46.html>.(2006)
- [46] Boyd. V.P, Ghawoui. E.EL, Feron. E and Balakrishnan. V : "Linear Matrix Inequalities in System and Control". SIAM studies in Applied Mathematics 15, Philadelphia.(1994).
- [47] Chrétienne. P : "Analyse des régime transitoire et asymptotique d'un graphe d'événements temporisé". Technique et Science Informatique, pp 127-142, (1985).
- [48] Baccelli. F, Cohen. G, Olsder. G.J and Quadrat J.P : " Synchronization and linearity, An algebra for Discrete Event Systems". Wiley, New York. (1992).
- [49] Cohen. G, Dubois. D, Quadrat. J. P and Viot. M : "Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes". Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France. pp,17-33 (1983)
- [50] Lahaye. S, Houssin. L and Boimond. J. L : "Modelling of urban bus networks in dioids algebra". In Proceedings of POSTA 2003, pages 23-30, Roma, Italy. Springer Verlag. pages 98.(2003)
- [51] Houssin. L, Lahaye. S and Boimond. J. L : "Modelling and control of urban bus networks in dioids algebra". In Proceedings of WODES :2004, Reims, France. pages 99.(2004)

- [52] Heidergott. B and Vries. R : "Towards a $(\max,+)$ control theory for a public transportation networks". *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 11 :371-398.(2001)
- [53] De Vries. R, De Schutter. B and De Moor. B : "On max-algebraic models for transportation networks". In *Proceeding of the International Workshop on Discrete Event Systems (WODES :98)*, Cagliari, Italy, pp. 457-462, Aug. (1998).
- [54] Jiacun. W, Chun. J and Yi. D : "Performance Analysis of Traffic Network Based on Stochastic timed Petri Net Models". pp 77-85 *IEEE*, (1999).
- [55] Nait sidi moh. A, Manier. M.-A, El Moudni. A : "Performance Analysis of a Bus Network Based on Petri Nets and $(\max,+)$ Algebra". In *journal of Systems Analysis Modelling Simulation (SAMS)*, vol.43, Issue 5, pp, 639-669, May (2003).
- [56] Nait sidi moh. A, Manier. M.-A, El Moudni. A : "A $(\max,+)$ algebra modelling approach to control a public transportation network constrained by maximal connection times". In *proceedings of the International Multiconference on Computational Engineering in Systems Application (CESA :03)*, Lille, France, 9-11 July (2003).
- [57] Nait Sidi Moh. A, Manier. M-A, El Moudni. A and Manier. H : "Max-plus algebra modeling for a public transport system". *Cybermatics and Systems : An international Journal*. Vol.36(2),pp.165-180.(2005).
- [58] Löfberg. J : "A toolbox for modeling and optimization in MATLAB". In *proceeding of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan. pp. 284-289. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.(2004)
- [59] Gahinet. P, Nemirovski. A, Laub.A.J and Chilali. M : "LMI Control Toolbox". *User's Guide*. The Math Works Inc. Natick. (1995)
- [60] Grant. M and Boyd. S : "Graph implementation for nonsmooth convex programs". *Recent Advances in Learning and Control (a tribute to Vidyasagar. M)*, Blondel. V, Boyd.S and Kimura. H : editors, Springer. http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html.(2008).

-
- [61] Grant. M, Boyd. S and Ye. Y : "CVX : Matlab software for disciplined convex programming (web page and software)", available at <http://stanford.edu/~boyd/cvx/>.(2008)
- [62] Boucher. P and Dumur. D : " La commande prédictive avancées et perspectives". Hermes Science. (2006).
- [63] Boucher. P, Dumur. D : "La commande prédictive", Editions Technip, Paris, (1996).
- [64] Bemporad. A, Morari. M, Dua V, and Pistikopoulos. E.N : "The explicit linear quadratic regulation for constrained systems". *Automatica*,V.38(1), pp.3-20. (2002).
- [65] Bemporad. A, Filippi. C : "Suboptimal explicit MPC via approximate quadratic programming". *Proceedings IEEE Conference Decision and Control*, Orlando. pp. FrP08-5, (2001).
- [66] Benlaoukli. H, Hovd. M, and Olaru. S : "geometric characterization of robust predictive control strategies". *Control Engineering and Applied Informatics*. V.10, No.4, pp.13-19, (2008).
- [67] Benlaoukli. H, Olaru. S, Niculescu. S and Marinkovic. S : "Commande prédictive des systèmes avec l'entrée affectée par retard variable". *Bucuresti : Academiei Romane*,pp. 55-61. (2009).
- [68] Olaru. S and Dumur. D : "A parameterized polyhedral approach for explicit constrained predictive control". In *43rd IEEE conference on decision and control*, pp.1580-1585. The Bahamas.(2004)
- [69] Olaru. S, Dumur. D : "Explicit constrained model predictive control. The influence of constraints redundancy". *5th IEEE International Conference on Control and Automation*, Budapest, Hongrie, 26-29 Juin (2005).
- [70] Olaru. S, Dumur. D : "Constrained model predictive control. Influence of redundancy in the set of constraints, possible amelioration". *IMACS Conference*, Paris, France, Juillet (2005).
- [71] Olaru. S, Dumur. D : "Analysis of MPC feasible domains using a parameterized polyhedra approach", *International Workshop on Assessment and Future Directions*

- of Nonlinear Model Predictive Control, Freudenstadt-Lauterbad, Allemagne, Août (2005).
- [72] Tondel. P, Johansen. T and Bemporad. A : "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions", Proceedings of the 40th IEEE CDC, (2001).
- [73] Júlvez. J, Dicaiano. S, Bemporad. A and Mahulea. C : "Event-driver model predictive control of timed hybrid Petri nets". International journal of robust and nonlinear control, V.24, pp.1724-1742. (2014).
- [74] Borelli. F : "Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems". Springer-Verlag, (2003).
- [75] Blanchini. F : "Set invariance in control". Automatica. 35(11). pp. 1747-1767.(1999)
- [76] Kvasnica. M, Grieder. P, Baotić. M and Morari. M : "Multi-Parametric Toolbox (MPT)". In Hybrid Systems : Computation and Control, pp.448-462. 2004.<http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>(2004).

Abstract

This work deals with the Control of Discrete Event Systems modelled by P-time Event Graphs. First, the model is obtained by using the dater evolution model written in the standard algebra as proposed by Kara et al. (2013). Then, for the control law, we used the finite-horizon model predictive control. For the closed-loop control, we used the infinite-horizon model predictive control (IH-MPC). The latter is an approach that calculates static feedback gains which allows the stability of the closed-loop system while respecting the constraints on the control vector. The problem of IH-MPC is formulated as a linear convex programming subject to a linear matrix inequality problem. In the second time, a geometric approach of model predictive control is extended to a class of DES. The use of the concept of (A, B) -invariance allows us to obtain the polyhedral parametric constraints. The constrained explicit model predictive control leads to a multiparametric quadratic programming (MP-QP) for which the solution is a feedback Piece-Wise Affine PWA control defined for different feasible regions. Finally, the proposed methodologies are applied to a transportation system.

Keywords : Discrete Event Systems, P-time event graphs, model predictive control, linear matrix inequality (LMI), multiparametric quadratic programming (MP-QP).

Résumé : ce travail traite de la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard tout en assurant le respect des contraintes qui sont les temps de séjour des marques dans les places du graphe d'événements considéré. Dans un premier temps, Une commande prédictive en boucle ouverte est calculée sur un horizon fini, puis des gains de retour d'état sont obtenus sur

un horizon infini par la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs. Ces gains permettent de suivre un comportement 1-périodique en garantissant le respect des contraintes sur la variable de commande. Nous avons montré que le respect des contraintes est assuré par l'inclusion de l'ellipsoïde défini par la fonction de Lyapunov dans le polyèdre des contraintes. Cette inclusion est vérifiée par le calcul de la distance entre les hyperplans de ce polyèdre et l'ellipsoïde en question. Dans un deuxième temps, une approche géométrique du commande prédictive est étendue à cette classe de SED. Nous avons montré qu'en utilisant le concept d'(A,B)-invariance, la commande prédictive en boucle ouverte sur un horizon fini peut être reformulée sous forme d'une programmation multiparamétrique dont la solution est donnée par des fonctions affines par morceaux (PWA). Enfin, les méthodologies proposées sont appliquées à un système de transport.

Mots clés : Systèmes à événements discrets, graphes d'événements P-temporels, inégalités linéaires matricielles (LMI), programmation multiparamétrique.