N°d'ordre: ....

République Algerienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LAROMAD

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

BOUMRAR FATIMA

LAMRANI KENZA

La programmation mathématique multi-objectifs floue et stochastique (pseudo) et applications

Soutenue le 2022 devant le jury :

Pr.	OUANES MOHAND	UMMTO	Président du jury
Dr.	AICHE FARID	UMMTO	Examinateur
Dr.	CHEBBAH MOHAMMED	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

Dédicace

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui m'ont toujours comblée de leur amour, leur bonté et leur grande affection. Pour tout leur soutien et les sacrifices dont ils m'ont fait preuve à mon égard qu'Allah les protèges.

À mes chers frères MOHAMMED et MOULOUD.

À mes amies, ma binôme et sa famille.

À toute personne qui m'a aidée par un mot, une idée, ou par un encouragement.

kenza

Dédicace

Je dédie ce modeste travail : À mon cher père Mouloud (que dieu l'accueille dans son vaste paradis)

À ma chère mère et ma grand mère, pour tous leur tendresse et leurs nombreux sacrifices que Dieu les gardes.

À mes chers frères Akli, Rabah, Jugurtha et Ghilas et à mes chères sœurs Souad et Karima pour leur encouragement et leur soutien.

Un spécial dédicace à mon cher oncle Akli Kebaili et sa famille.

À mon oncle kebaili Ali, sa femme Nadia et leur fille.

À mon fiancé Kamel pour l'encouragement et l'aide qu'il m'a toujours accordé et sa famille.

À mes amies, ma binôme et sa famille.

je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

Fatima

Remerciements

بسم الله الرحمان الرحيم

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné suffisamment la santé, la volonté et le courage afin de pouvoir accomplir ce modeste travail.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr CHEBBAH MOHAMMED, on le remercie pour ses précieux conseils, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous remercions également les membres du jury, Mr AICHE FARID et Mr OUANES MOHAND pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Un grand merci à Mr HAMIDI MAHDI, vice doyen de la faculté des sciences UMMTO, pour ses conseils concernant le style d'écriture LATEX, il a grandement facilité notre travail.

Nous apportons aussi nos vifs remerciements aux personnels enseignants qui, par leur enseignement et leur aide ont contribué à notre formation durant toutes notre étude.

Enfin nous tenons à remercier tout ceux qui nous ont apporté, de prés ou de loin, de l'aide et des conseils pour la réalisation de ce travail.

Tizi-Ouzou, le 11 juillet 2022.

Table des matières

Table des matières **vi**

Liste des figures **viii**

Liste des tableaux **ix**

Introduction **1**

1 Introduction aux ensembles flous **3**
Introduction 4
1.1 De l'ensemble classique à l'ensemble flou 4
1.2 Ensembles flous 6
1.2.1 Caractéristiques des ensembles flous 6
1.2.2 Nombre flou 8
1.2.3 Opérations sur les ensembles flous 9
1.2.4 Intervalles flous 10
1.2.5 Comparaison d'intervalles flous 11
1.2.6 Types de nombres flous 12
conclusion 17

2 Programmation linéaire mono-objectif **18**
Introduction 19
2.1 Programme linéaire 20
2.2 Forme d'un Programme linéaire 20
2.2.1 Forme générale 20
2.2.2 forme canonique 20
2.2.3 Forme standard 20
2.2.4 Forme mixte 21
2.2.5 Forme matricielle 21
2.3 Résultat d'une optimisation linéaire 22
2.4 Résolution de problème linéaire 22
2.4.1 Méthode du Simplexe 22
2.4.2 Initialisation de la méthode du simplexe 29

3 Programmation linéaire multi-objectifs **37**

INTRODUCTION . . . 38
3.1 CONCEPTS DE BASE . . . 38
3.1.1 Définitions . . . 40
3.1.2 Points particuliers . . . 41
3.1.3 Notion de dominance et d'efficacité . . . 42
3.1.4 Matrice des gains . . . 45
3.1.5 Caractérisation des solutions efficaces . . . 45
3.2 MÉTHODES DE RÉSOLUTION D'UN PROGRAMME MULTI-OBJECTIFS . . . 47
3.2.1 Méthode du simplexe multi-objectifs . . . 47
3.2.2 Méthode de la somme pondérée . . . 53
3.2.3 La méthode epsilon-contraintes . . . 54
CONCLUSION . . . 55

4 PROGRAMMATION LINÉAIRE FLOUE MULTI-OBJECTIFS (DE LA PROGRAMMATION MONO-OBJECTIF VERS LE MULTI-OBJECTIFS) **56**
INTRODUCTION . . . 57
4.1 PROGRAMMATION FLEXIBLE . . . 57
4.1.1 Programmation linéaire flexible . . . 57
4.2 PROGRAMMATION ROBUSTE . . . 63
4.2.1 Programmation linéaire inexacte (Solster) . . . 64
4.2.2 Résolution d'un programme linéaire robuste (flou) . . . 64
4.3 CHANCE-CONSTRAINED PROGRAMMING WITH FUZZY COEFFICIENTS (PSEUDO STOCHASTIQUE) : . . . 69

5 LOGICIELS MATLAB ,VISUAL XPRESS ET APPLICATION INFORMATIQUE **85**

I LOGICIEL MATLAB **86**
5.1 DÉFINITION DU LOGICIEL MATLAB . . . 87
5.2 DESCRIPTION DE L'INTERFACE MATLAB . . . 87
5.2.1 La barre de titre . . . 87
5.2.2 La barre du menu . . . 88
5.2.3 La barre d'outils . . . 88
5.2.4 La fenêtre de commande . . . 88
5.3 MÉTHODE DE TRAVAIL . . . 89
5.3.1 Édition et sauvegarde des fichiers MATLAB . . . 89
5.3.2 Aide en ligne : . . . 89
5.3.3 CRÉATION DE FICHIERS DE COMMANDE ET DE FONCTIONS UTILISATEUR . . . 90

II VISUAL XPRESS **92**
5.4 QU'EST-CE QUE VISUAL XPRESS ? . . . 93

5.5 Présentation du logiciel 93

Présentation du logiciel **93**
5.6 Les étapes du programme 94
5.7 Application 96

Conclusion générale **98**

Bibliographie **99**

Liste des figures

1.1 Ensemble classique 5
1.2 Ensemble flou 5
1.3 Comparaison entre un nombre flou et un nombre réel 8
1.4 Représentation d'un nombre flou de type L-R 13
1.5 Représentation d'un nombre flou triangulaire 14
1.6 Représentation d'un nombre flou trapézoïdal 15

3.1 Représentation de l'espace de décisions et l'espace des critères 40
3.2 Ensemble convexe 41
3.3 Ensemble non convexe 41
3.4 Le point idéal 41
3.5 Le point anti idéal 42
3.6 Solutions efficaces 43
3.7 Front de Pareto à gauche cas max à droite cas min 44
3.8 Exemple (cas min) 44

4.1 Contraintes du type $A_i\left(x\right)\tilde{\leq}b_i,\ i=\overline{1..m}$ 58
4.2 Contraintes du type $A_i\left(x\right)\tilde{=}b_i,\ i=\overline{1..m}$ 59
4.3 Contraintes du type $A_i\left(x\right)\tilde{\geq}b_i,\ i=\overline{1..m}$ 60

5.1 **La fenêtre principale du logiciel MATLAB**. 89
5.2 **La fenêtre d'édition de fichier.** 90
5.3 **La boîte de dialogue d'ouverture de fichiers** 91
5.4 L'icone Visual Xpress 93
5.5 **Interface de Visual Xpress** 93
5.6 **Icone File** 94
5.7 **L'espace de travail de Visual Xpress** 94

5.8 Icône option /optimiser 95
5.9 Icône solve LP 95
5.10 Icône Solve Globale 96
5.11 La valeur de x_1 96
5.12 La valeur de x_2 97

Liste des tableaux

2.1 Présentation de la forme du tableau du simplexe 26

3.1 Simplexe multi-objectifs 48

Introduction générale

L'optimisation , la recherche opérationnelle et l'aide à la décision sont devenus des atouts importants de la vie de tous les jours. Suite à la seconde guerre mondiale, ces disciplines sont devenus populaires autant dans le monde académique que dans le monde du travail, particulièrement auprès des industries, des sociétés de transports,..., etc. Dernièrement, elle a même commencé à influencer la vie de chaque citoyen. En effet, que l'on s'en aperçoive ou non, la recherche opérationnelle est omniprésente. Que ce soit l'analyse de nos recherches web et le traitement de ces données afin de promouvoir des publicités adaptées, que ce soit la recherche souvent multi-critères d'un itinéraire de déplacement ou la production des biens que l'on consomme, on retrouve la recherche opérationnelle partout.

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'un problème d'optimisation qui se ramène un programme mathématique, les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont généralement imparfaites soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors incertaines, soit parce que nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement, elles sont alors imprécises. C'est ce qui à motivé l'introduction de la programmation floue.

Ces dernières décennies, les secteurs académiques et industriels se sont intéressés de façon croissante à l'optimisation dite multi-critères ou multi-objectifs. On peut cependant se poser la question de ce qu'est l'optimisation et d'autant plus l'optimisation multi-critères. C'est pourquoi, on à présentée l'optimisation mono-objectif et plus particulièrement de la programmation linéaire qui est une branche mathématique appliquée et plus précisément l'optimisation dont l'objectif est minimiser ou maximiser une fonction numérique a plusieurs variables sachant que ces derniers sont liées à des relations appelées contraintes. Suite à cela, nous nous intéresserons plus particulièrement à la notion de critères multiples en présentant les problèmes multi-objectifs de programmation linéaire.

Ce mémoire est organisé comme suit :

— Dans le premier chapitre nous allons introduire la théorie des ensemble flous (définitions, quelques caractéristiques, les opérations de bases dans les ensembles, les nombres et les intervalles flous).

— Le deuxième chapitre traite de la méthode universelle du simplexe pour la résolution des problèmes et ses variantes (la méthode des deux phases, la M-méthode et simplexe dual)

— Au chapitre 3, nous présentons l'optimisation multi-objectifs. Nous introduisons des concepts fondamentaux tels que la formulation du problème, le concept de dominance, d'efficacité, point idéal, point Nadir... Etc. Nous décrivons aussi les principales approches de résolution pour ces problèmes comme la méthode du simplexe multi-objectifs, la méthode d'agrégation... etc

— Le quatrième chapitre concerne la programmation mathématique floue. Les problèmes linéaires flous (flexible, robuste) ont été présentés avec des méthodes de résolution dues à Dubois et nous avons traité quelque exemple sur la programmation linaire multi-objectifs flou.

— Le cinquième chapitre traite la partie implémentation et description générale du logiciel (MATLAB) ainsi que la présentation de quelques résultats obtenus.

— Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale et la bibliographie utilisée.

Introduction aux ensembles flous 1

Introduction

Nous vivons dans un monde où peu de notions sont binaires. Nous côtoyons l'imprécision au quotidien. Par exemple, quand nous disons « Pierre a la trentaine », la connaissance que nous apportons est imprécise. Le besoin de modéliser ce type de connaissances s'est fait sentir et c'est ainsi que dans la seconde moitié du XXe siècle que le professeur Lotfi Zadeh Zadeh.L [1994.] a introduit une logique permettant de formuler de tels énoncés. Cette logique est appelée logique floue et est basée mathématiquement sur la théorie des sous-ensembles flous et utilisée dans des domaines aussi variés que l'automatisme (freins ABS), la robotique (reconnaissance de formes), la gestion de la circulation routière (feux rouges), le contrôle aérien, l'environnement (météorologie, climatologie, sismologie, analyse du cycle de vie), la médecine (aide au diagnostic), l'assurance (sélection et prévention des risques),..ect.

1.1 De l'ensemble classique à l'ensemble flou

La logique classique est un pan des mathématiques relativement bien connu du public. C'est sur son principe que fonctionne les ordinateurs, calculateurs et la plupart des machines numériques. En logique classique, les décisions sont binaires : soit vraies, soient fausses. C'est sur ce point que la logique floue va se distinguer de la logique classique Ferdinand.Piette. [2011.]. En logique floue, une décision peut être à la fois vraie et fausse en même temps, avec un certain degré d'appartenance à chacune de ces deux croyances. Par exemple, Christophe.MARSALA. [2003.] un patient atteint d'hépatite présente généralement les symptômes suivants :

— Le patient a une forte fièvre.

— Sa peau présente une coloration jaune.

— Il a des nausées.

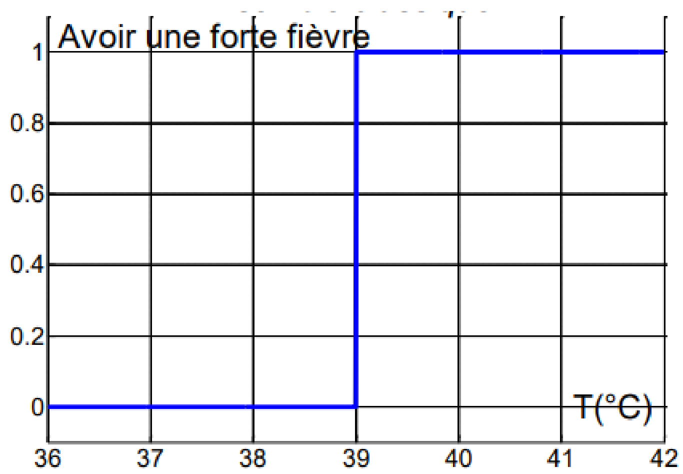


FIGURE 1.1 – *Ensemble classique*

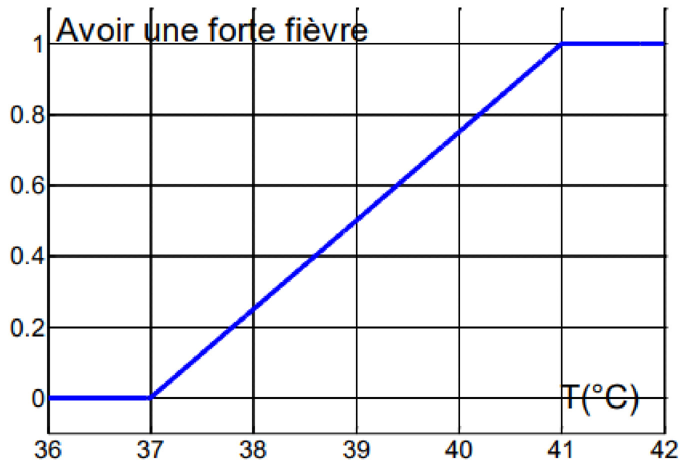


FIGURE 1.2 – *Ensemble flou*

Si le patient à 38,9°C de température

logique classique : Le patient n'a pas de forte fièvre $\Rightarrow$ Le patient n'a pas d'hépatite

logique flou : Le patient a une forte fièvre à 48% $\Rightarrow$ Le patient a une hépatite à x %.

1.2 Ensembles flous

Définition 1.1 *Soit X un ensemble de référence ou univers. Soit x un élément quelconque de X. On dit qu'une partie $\tilde{A}$ de l'ensemble de référence X est un ensemble flou lorsqu'elle est définie de la manière suivante :*

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$$

avec, $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$.

Une partie $\tilde{A}$ d'un ensemble X est usuellement associée à sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Celle-ci s'applique sur les éléments x de X . Elle prend la valeur 0 si x n'appartient pas à $\tilde{A}$ et 1 si x appartient à $\tilde{A}$. En attribuant les éléments x de X un degré d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$, on remarque les trois cas suivants :

— $\mu_{\tilde{A}}(x)$= 0, *lorsque x n'appartient pas à $\tilde{A}$ de façon certaine ;*

— $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$, *lorsque x appartient partiellement à $\tilde{A}$;*

— $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, *lorsque x appartient à $\tilde{A}$ de façon certaine.*

Remarque 1.1 *On utilise souvent le terme d'ensemble flou au lieu de sous-ensemble flou ou vice versa, par abus de langage.*

1.2.1 Caractéristiques des ensembles flous

Kamingu.G [2016.],Aiche.F [2013.],ZIANE.O [2018.]

On définit complètement une partie floue (sous-ensemble flou) par sa fonction d'appartenance qu'on note $\mu_{\tilde{A}}(x)$; la valeur de cette fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}(x)$ est appelée degré d'appartenance de l'élément x au sous-ensemble noté $\tilde{A}$. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de l'ensemble flou peuvent être élu :

— **Le noyau :**
le noyau d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $n(\tilde{A})$ ou $noy(\tilde{A})$ est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent totalement ou de façon certaine à $\tilde{A}$, c'est-à-dire dont le degré d'appartenance à $\tilde{A}$ vaut 1. On a :

$$n(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

— **Le point de croisement :**
le point de croisement d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $C(\tilde{A})$ est le sous-ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance prend une valeur égale à 0,5 :

$$C(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5\}$$

— **Le support :**
le support d'un ensemble flou de X, noté $supp\left(\tilde{A}\right)$ est l'ensemble des éléments appartenant, même très peu, à $\tilde{A}$ c'est-à-dire dont le degré d'appartenance est supérieur strictement à 0. On a :

$$supp\left(\tilde{A}\right) = \{x \in X/\mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

— **La hauteur :**
la hauteur d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $h\left(\tilde{A}\right)$ est le plus fort degré avec lequel un élément de x appartient à $\tilde{A}$, on a :

$$h\left(\tilde{A}\right) = sup\left\{\mu_{\tilde{A}}(x)\,/x \in X\right\}$$

En particulier, si $h\left(\tilde{A}\right)$ = 1, on dit que le ensemble flou est normalisé.

— **La cardinalité :**
la cardinalité d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $\mid \tilde{A} \mid$ est le nombre d'éléments appartenant à $\tilde{A}$ pondéré par leur degré d'appartenance. On a

$$\mid \tilde{A} \mid = \begin{cases} \sum_{x_i \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) & Si\ x_i\ est\ discret \end{cases}.$$

— **Une** $\alpha - coupe$:
Une $\alpha - coupe$ d'un ensemble flou $\tilde{A}$ ou ensemble de niveau α de $\tilde{A}$, noté $\tilde{A}^{\alpha}$, $\alpha \in]0,1]$, est l'ensemble ordinaire des éléments qui appartiennent à $\tilde{A}$ avec un degré au moins égal à α. Il est défini par :

$$\tilde{A}^{\alpha} = \{x \in X/\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

— **Une** $\alpha - coupe$ stricte :
Une $\alpha - coupe$ stricte d'un ensemble flou $\tilde{A}$, noté $\tilde{A}^{\bar{\alpha}}$, $\alpha \in]0,1]$, est l'ensemble ordinaire des éléments qui appartiennent à $\tilde{A}$ avec un degré supérieur strictement à α. Il est défini par :

$$\tilde{A}^{\bar{\alpha}} = \{x \in X/\mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$

— **Ensemble flou convexe :**
Un ensemble flou $\tilde{A}$ est dit convexe si :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)\,x_2) \geq \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x_1)\,, \mu_{\tilde{A}}(x_2)\right\}, x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]\,;$$

Exemple 1.1 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$\tilde{A}$= $\{(x_1, 0.5), (x_2, 0.1)\,, (x_3, 0.8)\,, (x_4, 0.2)\,, (x_5, 0)\,, (x_6, 1)\}$.

— $\sup\left(\tilde{A}\right) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$.

— $h\left(\tilde{A}\right) = \sup \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) = 1$
$\tilde{A}$ est un sous-ensemble normalisé car $h\left(\tilde{A}\right) = 1$

— $\tilde{A}^{0.5} = \{x_1, x_3, x_6\}$

— $\tilde{A}^{\bar{0.5}} = \{x_3, x_6\}$

— $|\tilde{A}| = \Sigma_{x \epsilon X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 2.6$

— $C\left(\tilde{A}\right) = \{x_1\}$
$\tilde{B} = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.1), (x_3, 0.4), (x_4, 0), (x_5, 0.8), (x_6, 0.9)\}$
— $\sup\left(\tilde{B}\right) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$

— $h\left(\tilde{A}\right) = \sup \mu_{\tilde{B}} = 0.9$

— *$\tilde{B}$ n'est pas un sous-ensemble normalisé car $h\left(\tilde{B}\right) \neq 1$*

— $\tilde{B}^{0.4} = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$

— $\tilde{B}^{\bar{0.4}} = \{x_1, x_5, x_6\}$

— $|\ \tilde{B}\ | = \Sigma_{x \epsilon X} \mu_{\tilde{B}}(x) = 2.8$

1.2.2 Nombre flou

Aiche.F [2013.]&Teghem.J [1996.]

Définition 1.2 *Un nombre flou est un sous-ensemble flou $\tilde{A}$, convexe et normalisé sur un référentiel $X(X = \mathbb{R})$*

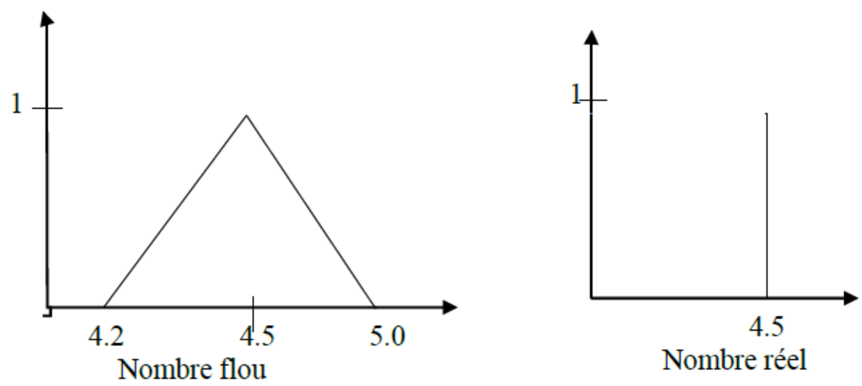


FIGURE 1.3 – *Comparaison entre un nombre flou et un nombre réel*

1.2.3 Opérations sur les ensembles flous

Ambapour.S [2009.]&Meguellati.B [2018.]

Comme dans la théorie des ensembles classique , en théorie des ensembles flous, il existe un certain nombre d'opérations. On étend ces opérations aux fonctions d'appartenance des ensembles flous.

1. **Égalité :**
   On dit que deux ensembles flous $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de X sont égaux, si :
   $$\forall x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$
2. **Inclusion :**
   On dit que $\tilde{A}$ est inclus dans $\tilde{B}$, qu'on note alors $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, si :
   $$\forall x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$$
3. **Le complémentaire :**
   Le complémentaire de $\bar{\tilde{A}}$ d'un sous-ensemble flou $\tilde{A}$ dans X est défini par sa fonction d'appartenance suivante :
   $$\forall x \in X / \mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$
4. **Union :**
   Union de deux sous-ensembles flous : $\tilde{A}$ ou $\tilde{B}$ dans X est définie par sa fonction d'appartenance suivante :
   $$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \{x \in X / \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))\}$$
5. **Intersection :**
   L'intersection de deux sous-ensembles flous : $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ dans X est définie par sa fonction d'appartenance suivante :
   $$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \{x \in X / \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))\}$$

Les propriétés suivantes sont valables pour les sous-ensembles flous.

N°	Propriété	Union	Intersection
1	Commutativité	$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$	$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$
2	Associativité	$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C}$	$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C}$
3	Idempotence	$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$	$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$
4	Distributivité	$\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$	$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$
5	Loi de DeMorgan	$\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}}$	$\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}$
6	Loi d'absorption	$\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$	$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$
7	L'élément absorbant	$\tilde{A} \cup X = X$	$\tilde{A} \cap \emptyset = \emptyset$
8	L'élément neutre	$\tilde{A} \cup \emptyset = \tilde{A}$	$\tilde{A} \cap X = X$
9	Formule d'équivalence (union)/ Formule de différence symétrique (intersection)	$(\bar{\tilde{A}} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \bar{\tilde{B}}) = (\bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B})$	$(\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}) \cup (\bar{\tilde{A}} \cap \tilde{B}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}})$
10	Cardinalité	$\lvert\tilde{A}\rvert + \lvert\tilde{B}\rvert = \lvert\tilde{A} \cap \tilde{B}\rvert + \lvert\tilde{A} \cup \tilde{B}\rvert$	

Exemple 1.2 *Soit un référentiel*

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$\tilde{A}= \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.9), (x_3, 0), (x_4, 0.4)\}$

$\tilde{B} = \{(x_1 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 1), (x_4, 0.8)\}$

- $\tilde{A} \subsetneq \tilde{B}$
- $\tilde{A} \neq \tilde{B}$
- $\bar{\tilde{A}}=\{(x_1, 0.7), (x_2, 0.1), (x_3, 1), (x_4, 0.6)\}$
- $\bar{\tilde{B}} = \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.5), (x_3, 0), (x_4, 0.2)\}$
- $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 0.8)\}$
- $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 0), (x_4, 0.4)\}$

1.2.4 Intervalles flous

Aiche.F [2013.]&Dubois.D [2012.]&Aiche.F [1995.]

Un intervalle flou $\tilde{A}$ est une quantité floue dont la fonction d'appartenance est quasi-concave, on parle alors d'ensemble flou convexe qui obéit à la contrainte : $\forall\, x, y, \forall\, z \epsilon [x, y]$, $\mu_{\tilde{A}}(z) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$ et $\exists\, x \in \mathbb{R}$,$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$

l'$\alpha - coupe$ de $\tilde{A}$ est $\tilde{A}_\alpha$=$\{x / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ est donc un intervalle fermé $[\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ et ces intervalles sont emboîtés $(\tilde{A}_\alpha \subseteq \tilde{A}_\beta \; si \; \alpha \geq \beta)$.

1.2.5 Comparaison d'intervalles flous

Comparaison d'intervalles de nombres réels

Soient $A = [\underline{a}, \bar{a}] et\ B = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ deux intervalles de nombres réels.

Donc $\underline{a}, \bar{a}\ et\ \underline{b}, \overline{b}$ sont des nombres réel tels que $\underline{a} < \bar{a}\ et\ \underline{b} < \overline{b}$. Pour ordonner $A\ et\ B$, nous avons quatre relations $>_i, i = 1, 2, 3, 4$ définies comme suit :

1. $[\underline{a}, \bar{a}] >_1 \left[\underline{b}, \overline{b}\right] \Leftrightarrow \underline{a} > \overline{b}\, (i.e\ \forall x \in A, \forall y \in B, x > y)$
2. $[\underline{a}, \bar{a}] >_2 \left[\underline{b}, \overline{b}\right] \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b}\, (i.e\ \forall x \in A, \forall y \in B, x \geq y)$
3. $[\underline{a}, \bar{a}] >_3 \left[\underline{b}, \overline{b}\right] \Leftrightarrow \bar{a} > \overline{b}\, (i.e\ \forall x \in A, \forall y \in B, x > y)$
4. $[\underline{a}, \bar{a}] >_4 \left[\underline{b}, \overline{b}\right] \Leftrightarrow \bar{a} > \underline{b}\, (i.e\ \forall x \in A, \forall y \in B, x \geq y)$

La relation $>_1$ est la plus forte, $>_4$ est la plus faible, $>_2$ et $>_3$ sont les intermédiaires.

Comparaison d'intervalles flous

Considérons deux intervalles flou $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ dont les fonctions d'appartenance sont respectivement $\mu_{\tilde{A}}$ et $\mu_{\tilde{B}}$.

Dans ce qui suit les abréviations *pos* et *nec* représentent respectivement possibilité et nécessité

— Les relations $>_4$ et $>_1$, c'est-à-dire pour la plus faible et la plus forte, deviennent respectivement la possibilité de $\tilde{A} > \tilde{B}$, noté $pos\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right)$ et la nécessité de $\tilde{A} > \tilde{B}$, notée $nec\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right)$ définies comme suit :

$$pos\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = sup\left(\min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x\right), \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)\right)\right)$$

où $x\ et\ y$ sont des nombres réels tels que $x > y$

$$nec\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = 1 - pos\left(\tilde{A} \leq \tilde{B}\right) = 1 - sup\left(\min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(x\right), \mu_{\tilde{B}}\left(y\right)\right)\right)$$

où $x\ et\ y$ sont des nombres réels tels que $x \leq y$.

— Les relations intermédiaires $>_2$ et $>_3$, deviennent respectivement nécessité de $\tilde{A} > \tilde{B}$,noté $nec_2\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right)$ et la possibilité de $(\tilde{A} > \tilde{B})$, noté $pos_3\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right)$ définies comme suit :

$$pos_3\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = sup\left\{inf\left[\min\left(\mu_{\tilde{A}}\left(u\right), 1 - \mu_{\tilde{B}}\left(v\right) / u > v\right)\right]\right\}$$

$$nec_2\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = inf\left\{sup\left[\max\left(1 - \mu_{\tilde{A}}\left(u\right), \mu_{\tilde{B}}\left(v\right) / u < v\right)\right]\right\}$$

Dans le but de ramener la comparaison d'intervalles flous utilisant possibilité et nécessité à celle de nombres réels, Dubois et Prade ont établi les résultats suivants :

Proposition 1.1 *Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ deux intervalles flous et $\tilde{A}^{\alpha} = [\underline{a}^{\alpha}, \bar{a}^{\alpha}]$, $\tilde{B}^{\alpha} = \left[\underline{b}^{\alpha}, \bar{b}^{\alpha}\right]$, $\tilde{A}^{1-\alpha} = \left[\underline{a}^{1-\alpha}, \bar{a}^{1-\alpha}\right]$ et $\tilde{B}^{1-\alpha} = \left[\underline{b}^{1-\alpha}, \bar{b}^{1-\alpha}\right]$ leurs coupes de niveau.*
Alors on a :
- $pos\left(\tilde{A} \leq \tilde{B}\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \underline{a}^{\alpha} \leq \bar{b}^{\alpha}$
- $nec\left(\tilde{A} \leq \tilde{B}\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \bar{a}^{1-\alpha} \leq \underline{b}^{1-\alpha}$
- $pos_3\left(\tilde{A} \leq \tilde{B}\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \underline{a}^{1-\alpha} \leq \bar{b}^{\alpha}$
- $nec_2\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \underline{a}^{\alpha} \leq \underline{b}^{1-\alpha}$

Proposition 1.2
- $nec\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) \leq pos\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right)$
- $nec\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) > 0 \Rightarrow pos\left(\tilde{A} > \tilde{B}\right) = 1$

1.2.6 Types de nombres flous

Parmi les différentes formes de nombre flous, on a les nombres flous de type L-R , de type triangulaire, de type trapézoïdal .

Nombre flou de type $L - R$

iKebbal.S [2018]& Teghem.J [1996.]

Définition 1.3 *un nombre flou de type L-R s ´il existe deux fonctions L et R et des réels m, n, α et β tels que la fonction d ´appartenance est donnée par :*

$$\mu_{\tilde{A}}\left(x\right) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) \ \text{pour } x \leq m \text{ avec } \alpha > 0 \\ \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) \ \text{pour } x \geq m \text{ avec } \beta > 0 \end{cases}$$

ou :
- *L et R fonctions non croissantes sur* $[0, +\infty[$.

— *L et R fonctions symétriques :* $L(x) = L(-x)$; $R(x) = R(-x)$.

— $L(0) = R(0) = 1$

— *Si l'on ajoute à cette définition que* $L(1) = R(1) = 0$ *, le support du nombre flou est fini. On note :*

$$\tilde{A} = (m; \alpha; \beta)_{L-R}$$

La représentation d'un nombre flou de type L-R est donnée par $(m, n, \alpha, \beta)_{LR}$ *ou bien* $(m - \alpha, m, n, n + \beta)_{LR}$

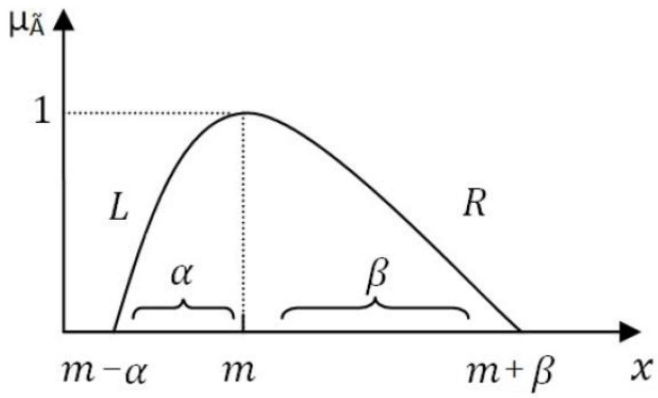


FIGURE 1.4 – *Représentation d'un nombre flou de type L-R*

Nombre flou de type triangulaire

Un nombre flou est dit de type triangulaire noté (a, α, β) si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & si \;\; a - \alpha \leq x \leq a \qquad avec \;\; \alpha > 0 \\ \qquad 1 & si \;\; x = a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & si \;\; a \leq x \leq a + \beta \qquad avec \;\; \beta > 0 \end{cases}$$

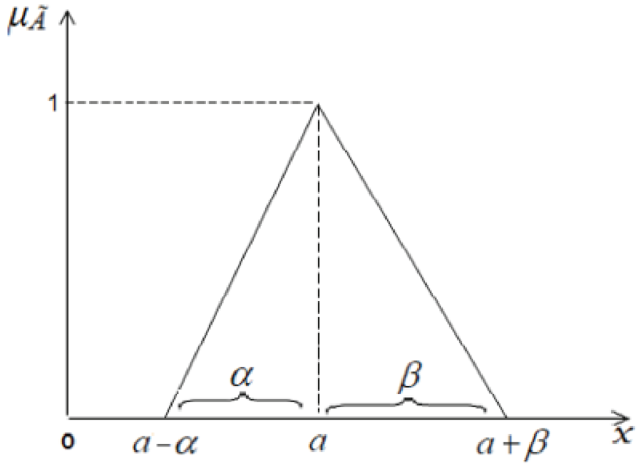


FIGURE 1.5 – *Représentation d'un nombre flou triangulaire*

Opérations sur les nombres flous de type triangulaire

Soient deux nombres flous de type triangulaire $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$:

— $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.

— $-\tilde{A} = -(a, \alpha_1, \beta_1) = (-a, \beta_1, \alpha_1)$

— $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$.

— $\lambda \otimes \tilde{A} \left\{ \begin{array}{c} (\lambda a, \lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) \;\; si\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ \\ (\lambda a, -\lambda\beta_1, -\lambda\alpha_1) \;\; si\lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

Comparaison de deux nombres flous triangulaire

Soient deux nombres flous triangulaires :

$\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$

:

— $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.

— $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, a + \beta_1 \leq b + \beta_2$.

Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou $\tilde{A}$ est un nombre flou trapézoïdal noté $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ si sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L+\alpha}{\alpha} & Si\ a^L - \alpha \leq x \leq a^L \\ 1 & si \quad a^L \leq x \leq a^U \\ \frac{a^U+\beta-x}{\beta} & si \quad a^U \leq x \leq a^U + \beta \end{cases}$$

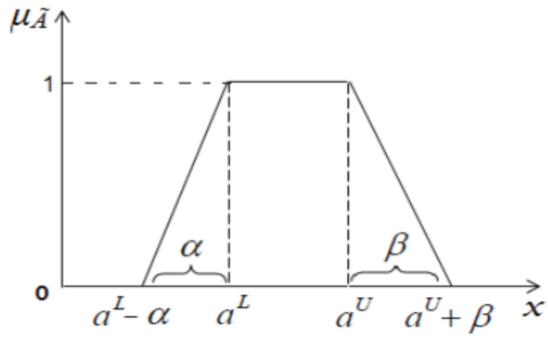


FIGURE 1.6 – *Représentation d'un nombre flou trapézoïdal*

Opérations sur les nombres flous de type trapézoïdal

Soient deux nombres flous de type triangulaire $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et$\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$:
— $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 + \beta_2)$.
— $-\tilde{A} = -(a, \alpha_1, \beta_1) = (-a, \beta_1, \alpha_1)$
— $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$.
— $\lambda \otimes \tilde{A} \begin{cases} (\lambda a^L, \lambda a^U, \lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) & si \quad \lambda \geq 0, \lambda \epsilon \mathbb{R} \\ (\lambda a^U, \lambda a^L, -\lambda\beta_1, -\lambda\alpha_1) & si \quad \lambda < 0, \lambda \epsilon \mathbb{R} \end{cases}$

Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

Soient deux nombres flous de type trapézoïdal $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$

— $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a^L = b^L, a^U = b^U, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$

— $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^U \leq b^U, a^U - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2, a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2$

Un nombre flou trapézoïdal $\tilde{A}$ est dit négatif si et seulement si :

$$a^U + \beta_1 \leq 0$$

Un nombre flou trapézoïdal $\tilde{A}$ est dit positif si et seulement si :

$$a^L - \alpha_1 \geq 0$$

CONCLUSION

Il convient de noter que l'approche où la logique floue permet de caractériser divers problèmes, tant en mathématique qu'en sciences sociales, qui revêtent un certain degré d'incertitude et d'imprécision. Puisque dans la réalité, toute activité humaine comporte soit de l'incertitude soit de l'imprécision entre autre , il s'avère donc important pour des recherches futures, de montrer comment la théorie des ensembles flous peut contribuer à mieux modéliser différents comportements observés dans le monde réel. Par ailleurs, la théorie des ensembles flous a également ouvert un vaste champ de recherche dans le domaine purement scientifique, qui sont utiles dans la formulation de plusieurs problèmes, comme les problèmes de programmations mathématiques floues, qui intéressent tant les mathématiciens que les économistes.

2 Programmation linéaire mono-objectif

Introduction

La programmation linéaire est un cas particulier de la programmation mathématique. Proposée par George Dantzig en 1949 dans sa contribution au projet (Computation of Optimum Program, un projet de recherche de la U.S. Air Force). C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation dans la plupart des domaines, des problèmes de tailles très variées (quelques variables jusqu'à quelques dizaines de milliers) ont été résolus par cette méthode. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans $\mathbb{R}^+$et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans $\mathbb{N}$. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels. Un problème de la programmation linéaire mono-objectif sous forme standard peut se formuler comme suit :

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \longrightarrow (\text{max / min}) \tag{2.1}$$

$$s.c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x = \left(x_j \geq 0\,; j = 1, \dots, n\right) \cdots (3) \tag{2.3}$$

Où c_j , $j = \overline{1..n}$, représentent les coûts ou profit unitaire des différents produits.

Les coefficients c_j et $a_{ij}\left(i = \overline{1..m},\ j = \overline{1..n}\right)$ sont supposés être des nombres réels. En plus on considère que l'entier m est inférieur ou égal à n, tous les nombres $b_i, i = \overline{1..m}$ sont tous positifs ou nuls et le rang du système (2.2) est inférieur ou égal à m

— La fonction z est appelée fonction « objectif ».

— Les contraintes (2.2) sont appelées, contraintes principales,ou fonctionnelles.

— Les contraintes (2.3) sont dites contraintes de non négativité.

2.1 Programme linéaire

Un programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction linéaire (fonction objectif, but, fonction économique,...) de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

2.2 Forme d'un Programme linéaire

Un programme linéaire peut être écrit sous une :Teghem.J [1996.]

2.2.1 Forme générale

$$\max z\,(\min z) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,(\leq, \geqslant, =)\,b_i, & i = 1\ldots m \\ x_j \geq 0 & j = 1\ldots n \end{cases}$$

2.2.2 forme canonique

$$\min(\max)\,(z) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \max(\min)\,(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1\ldots m \\ x_j \geq 0 & j = 1\ldots n \end{cases} \quad ou \quad s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, & i = 1\ldots m \\ x_j \geq 0 & j = 1\ldots n \end{cases}$$

2.2.3 Forme standard

La forme standard d'un modèle de programmation linéaire doit respecter trois conditions :

1. Les contraintes fonctionnelles sont exprimées sous forme d'équations linéaires (=), en ajoutant dans chaque contrainte i ayant un signe $\leq$ une variable d'écart x_{n+i} et soustraire dans chaque contrainte i ayant un singe $\geq$ une variable d'excédent x_{n+i} .
2. Le second membre des contraintes fonctionnelles (b_i) doit être non négatif.
3. Toutes les variables doivent être non négatives.

$$\max(\min) z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, & i = 1\ldots m. \\ x_j \geq 0 & j = 1\ldots n+m. \end{cases} \quad ou \quad s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, & i = 1\ldots m. \\ x_j \geq 0 & j = 1\ldots n+m. \end{cases}$$

2.2.4 Forme mixte

$$\max\,(\min)\;\; z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in \{1, ...m_1\} \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq b_k, & k \in \{1, ...m_2\} \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j = b_r, & r \in \{1, ...m_3\} \\ \\ \quad x_j \geq 0 & , j \in \{1 \ldots n\} \end{cases}$$

2.2.5 Forme matricielle

$$\begin{cases} \max\,(\min)\, z = c^{'} x \\ \\ \quad Ax\,(\leq, =, \geq)\, b \\ \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

avec : $x = x\,(J) = \left(x_j\,, j \in J\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, c = c\,(J) = \left(c_j\,, j \in J\right) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$

$A = A\,(I, J) = \left(a_{ij}\; i \in I,\; j \in J\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$J = \{1, 2, \ldots n\}$:Ensemble des indices de colonne de la matrice A

$I = \{1, 2, \ldots m\}$:Ensemble des indices de linge de la matrice A

On écrit souvent A de la manière suivante :$A = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots & a_j & , \ldots a_n \end{pmatrix},$

Où a_j est un vecteur colonne : $a_j = A\left(I, j\right) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Les problèmes de minimisation et de maximisation sont en fait équivalents puisque :

$$\min\left(z\right) = -\max\left(-z\right) \ \ et \ \ \max\left(z\right) = -\min\left(-z\right)$$

2.3 Résultat d'une optimisation linéaire

— Une solution est une affectation de valeurs aux variables du problème.

— Une solution est admissible si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de non négativité).

— La valeur d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.

— Le domaine admissible D d'un (PL) est l'ensemble des solutions admissibles du problème, peut être :

1. **Vide :** Dans un tel cas le problème est sans solution admissible (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
2. **Borne (et non vide) :** Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
3. **Non borne :** Dans ce cas, selon la fonction objectif choisie, le problème peut posséder des solutions optimales ; il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le (PL) n'admet pas de solution optimale finie.

2.4 Résolution de problème linéaire

Résoudre un programme linéaire (PL) signifie qu'il faut déterminer par exemple les valeurs numériques que doivent prendre les variables de décision qui maximisent ou minimisent la fonction objectif, en respectant les contraintes du problème.

2.4.1 Méthode du Simplexe

La méthode du simplexe est une procédure itérative développée par G.Dantzig Kebbiche.Z [2007.] pour la résolution de problèmes de programmation linéaire avec un nombre quelconque de variables. L'idée générale de cette méthode est d'effectuer une exploration dirigée de l'ensemble des solutions réalisables de base. L'application de la méthode nécessite la connaissance d'une solution réalisable de base, au départ.

La méthode démarre donc d'un point (sommet de départ) et passe au sommet voisin ce passage constitue une itération de l'algorithme du simplexe. L'optimum est atteint lorsqu'on ne peut plus améliorer la valeur de la fonction «objectif». Soit le problème (PL) standard de programmation linéaire (avec maximisation) suivant :

$$maxz\,(x) = z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x = \left(x_j \geq 0\,; j = 1, \ldots, n\right) \tag{2.6}$$

Base et solution de base

— $D = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$ est dit ensemble des solutions réalisables.

— Tout vecteur x vérifiant les contraintes (2.5) et (2.6) est appelé solution réalisable (admissible) du problème.

— Une solution réalisable x^*est dite optimale si :

$$c^{'}x^* = \left\{\max c^{'}x, \forall x \in D\right\}$$

— Une solution réalisable x de (PL) est dite de base si $(n-m)$ de ses composantes sont nulles, et aux autres $\left(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_m}\right)$ correspondent m vecteurs $\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_m}\right)$ de la matrice de condition A linéairement indépendants.

— L'ensemble $J_B = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ est appelé ensemble des indices de base, $J_H = J \setminus J_B$ ensemble des indices hors base.
Autrement dit : Une solution réalisable $x = x\,(J)$ est solution de base si $x_H = x\,(J_H) = 0$ et $det\,(A_B) \neq 0, ou\ A_B = A\,(I, J_B)$

— Une solution réalisable de base x est dite non dégénérée si $x_j > 0, j \in J_B$

.

Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit x une solution de base réalisable de départ et $A_B = A\,(I, J_B)$ la matrice de base associée.

Soit $\bar{x}$ une autre solution réalisable telle que $\bar{x} = x + \Delta x$,
$\Delta z = z\,(\bar{x}) - z\,(x) = c^{'}\bar{x} - c^{'}x = c^{'}(\bar{x} - x) = c^{'}\Delta x$.
On a x et $\bar{x}$ des solutions réalisables :

$$A\bar{x} = b \tag{2.7}$$

$$Ax = b \tag{2.8}$$

$$(2.7) - (2.8) \implies A\bar{x} - Ax = 0$$

$$\implies A(\bar{x} - x) = 0$$
$$\implies A\Delta x = 0$$

$$\implies A_B\Delta x_B + A_H\Delta x_H = 0$$

$$\implies A_B\Delta x_B = -A_H\Delta x_H$$

$$\implies \Delta x_B = -A_B^{-1}A_H\Delta x_H$$

$$\implies \Delta z = c_B^{'}\Delta x_B + c_H^{'}\Delta x_H$$

$$\implies \Delta z = c_B^{'}(-A_B^{-1}A_H\Delta x_H) + c_H^{'}\Delta x_H$$

$$\implies \Delta z = (-c_B^{'}A_B^{-1}A_H\Delta x_H) + c_H^{'}\Delta x_H$$

$$\implies \Delta z = (-c_B^{'}A_B^{-1}A_H + c_H^{'})\Delta x_H$$

On définit :
- Le vecteur $m-$vecteur des potentiels $y^{'} = c_B^{'}A_B^{-1}$
- Le vecteur $n-$vecteur des estimations $\Delta^{'} = y^{'}A - c^{'}$.

$$\Longrightarrow \Delta z = \left(-y^{'} A_H + c_H^{'}\right) \Delta x_H$$

$$\Longrightarrow \Delta z = -\left(y^{'} A_H - c_H^{'}\right) \Delta x_H$$

$$\Longrightarrow \Delta z = \sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j$$

Algorithme de simplexe

Oukacha.B [2005.]

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{gathered} \max z = c^{'} x \\ Ax \left(\leq, =, \geq\right) b \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

Supposons que nous avons obtenu une solution réalisable de base$\{x, A_B\}$, la base correspondante , ainsi que la matrice inverse . Une itération de l'algorithme du simplexe se résume alors dans les étapes suivantes :

— Étape 1 : Calculer le vecteur des potentiels $y^{'} = c_B^{'} A_B^{-1}$.

— Étape 2 : Calculer le vecteur des estimations Δ_j =$y^{'} A -$ $c_j^{'}, j \in J_H$.

— Étape 3 : Si $\Delta_j \geq 0$, alors x est une solution optimale pour le problème , terminer le processus de résolution,
sinon :
Si $\exists j_0 \in J_H, tq\ \Delta_{j_0} < 0$ et le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$,le problème n'admet pas de solution finie
Sinon

1- Calculer l'indicej_o tel que : $\Delta_{j_0} = \min \left\{\Delta_j, \Delta_j < 0, j \in J_H\right\}$

2- Calculer les composantes x_{jj_0}du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$

3- Calculer $\theta^0 = \min \left\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\right\} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} = \theta_{j_1}$

4- Calculer $\bar{x} = (x_B, x_H)$ où $\left\{\begin{array}{c} \bar{x}_B = x_B - \theta^0 l_B \\ \bar{x}_j = x_j = 0 \forall j \in J_H \setminus j_0 \\ \bar{x}_{j_0} = \theta^0 \end{array}\right.$

5- Poser $\bar{J}_B = \{J_B \setminus j_1\} \cup j_0$ et $\bar{J}_H = \{J_H \setminus j_0\} \cup j_1$

— Étape 4 : Poser $x = \bar{x}$ et aller à Étape 1.

Présentation de tableau de Simplexe

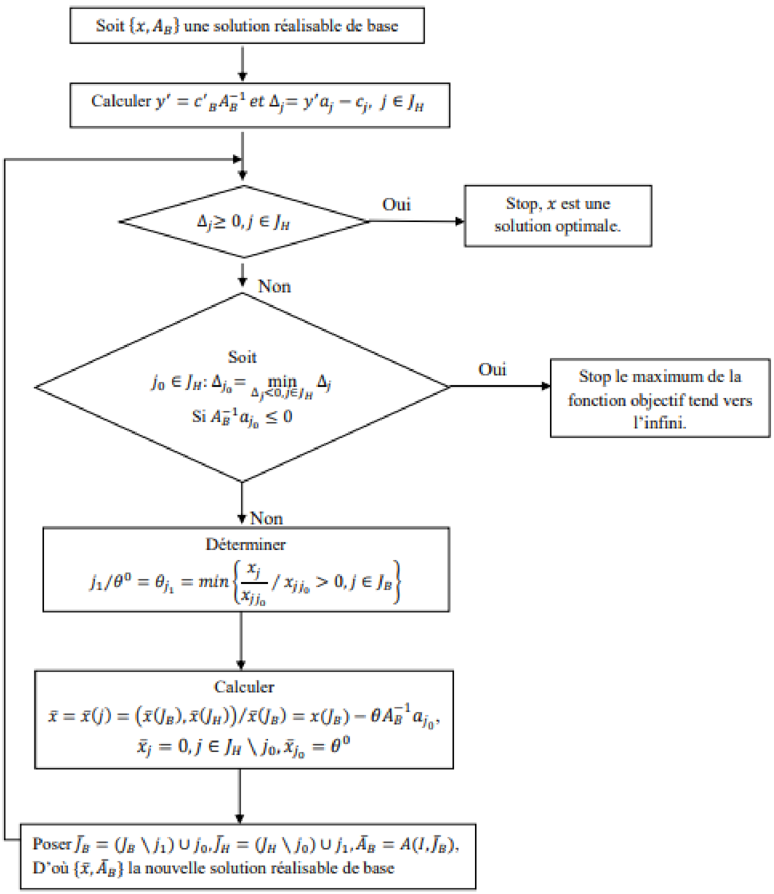
Les tableaux du simplexe sont une autre façon de présenter les calculs algébriques et les opérations que l'on fait sur le système d'équations en effectuant les calculs sur le tableau des coefficients qui porte le nom de tableau Simplexe.Oukacha.B [2005.]

c	Base	b	c_1	c_2	$\dots$	c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	c_{n+3}	$\dots$	c_{n+m}
			x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+3}	$\dots$	x_{n+m}
c_B	x_B	$b_1 = x_1$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	0	0	0
c_{n+1}	x_{n+1}	$b_2 = x_2$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	0	0	0
c_{n+2}	x_{n+2}	$b_3 = x_3$	a_{31}	a_{32}	$\dots$	a_{3n}	0	0	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	0	0	0	$\ddots$	$\vdots$
c_{n+m}	x_{n+m}	$b_m = x_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	0	0	1
z		Δ_j	Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_n	Δ_{n+1}	Δ_{n+2}	Δ_{n+3}		Δ_{n+m}

TABLE 2.1 – *Présentation de la forme du tableau du simplexe*

Organigramme de l'algorithme du simplexe maximisation

Oukacha.B [2005.]



Exemple 2.1 *Soit le problème linaire suivant :*

$$
\max\ 2x_1 + x_2
$$
$$
s.c : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad i = 1, 2 \end{cases}
$$

— *On commence par rendre le problème* (2.1) *sous forme standard, on ajoutant des variables d'écarts* x_3, x_4, x_5

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$s.c\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ *est une solution réalisable de base,*

avec

$A_B = \begin{pmatrix} a_3, & a_4, & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J_B = \{3,4,5\}$, $J_H = \{1,2\}$, $x'_B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$,$x_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Z = c'_B x_B + c'_H x_H = c'_B x_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

Le premier tableau sera construit comme suit :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			2	1	0	0	0
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	5	1	1	1	0	0
0	a_4	6	-2	3	0	1	0
0	a_5	6	2	-3	0	0	1
z=0		Δ_j	-2	-1	0	0	0

Les composantes du vecteur des estimations sont données par : $\Delta_j = c'_B a_j - c_j, j = 1, \ldots, 5.$

$\Delta_j < 0$, *Le critère d'optimalité n'est pas vérifié, donc la solution de départ n'est pas optimale.*

— *L'indice* j_0 *tel que* $\Delta_{j_0} = \{\min \Delta_j, j \in J_H\} = \Delta_1$ *et* $j_0 = 1$,x_1 *entre dans la base*

— *Le paramètre* $\theta^0_{j_1}$ *tel que :* $\theta^0_{j1} = \min\left\{\frac{x_j}{x_{ijj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\right\} = \min\{5,3\} = 3$ *donc* $j_1 = 5$,x_5 *sort de la base.*

La nouvelle base est alors :$\begin{pmatrix} a_3, & a_4, & a_1 \end{pmatrix}$ *et le nouveau tableau du simplexe est :*

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			2	1	0	0	0
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	2	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{-1}{2}$
0	a_4	12	0	0	0	1	1
2	a_1	3	1	$\frac{-3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
z=6		Δ_j	0	-4	0	0	-1

Dans cette deuxième itération on trouve : $z = 6$, $j_0 = 2$, *donc* x_2 *entre dans la base* ,$j_1 = 3$ *donc* x_3 *sort de la base.*

La nouvelle base sera alors : $\begin{pmatrix} a_2, & a_4, & a_1 \end{pmatrix}$ *et le nouveau tableau du simplexe est :*

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			2	1	0	0	0
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	a_2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$
0	a_4	12	0	0	0	1	1
2	a_1	$\frac{21}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
z=$\frac{46}{5}$		Δ_j	0	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Comme toutes les composantes du vecteur des estimations sont positif $\Delta_j > 0$ *l'algorithme s'arrête et la solution unique optimale est* $x^* = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et la valeur de la fonction objectif est* $\frac{46}{5}$.

2.4.2 Initialisation de la méthode du simplexe

Oukacha.B [2005.]

Dans les cas précédemment traités par l'algorithme du simplexe, on a supposé l'existence d'une solution réalisable de base initiale, ce qui n'est pas toujours le cas dans les problèmes de programmation linéaires. Nous verrons dans ce qui suit deux méthodes permettant d'initialiser l'algorithme du simplexe.

Méthode des deux Phases :

Comme son nom l'indique, cette méthode consiste à résoudre un problème de programmation linéaire en deux parties. La première partie, appelée phase I, consiste à résoudre un problème auxiliaire correspondant au problème original en utilisant une fonction objectif artificielle pour cela on minimise la somme des variables artificielles sous les contraintes du programme initial ce qui correspond à :

$$\max \Psi = -\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$
$$s.c \begin{cases} A\left(x_j\right) + x_{n+i} = b_i, & i = 1 \ldots m \\ x_j \geq 0, x_{n+i} \geq 0, j = 1 \ldots n \end{cases}$$

Comme les variables artificielles sont forcément positives ou nulles est atteint quand elles sont nulles (si ce n'est pas le cas, c'est qu'il n'y a pas de solution alors le problème n'est pas réalisable).

La phase II consiste à remplacer la fonction objectif artificielle de la phase I par la vraie fonction objectif à maximiser. On utilise alors la solution réalisable de base obtenue à la fin de la phase I.

— $x_j \geq 0\,; j = 1 \ldots n$ valeur de décision.

— $x_{n+i} \geq 0\,; i = 1 \ldots m$ variable artificielles.

Exemple 2.2 *Soit a résoudre le programme linéaire suivant :*

$$\max z = -x_1 - 4x_2 - x_3$$
$$s.c \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Phase I :

On définit le problème auxiliaire correspondant au problème

$$\max z' = -x_4 - x_5$$
$$s.c \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_5 = 11 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, \end{cases}$$

Initialisation :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			0	0	0	-1	-1
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-1	a_4	9	5	12	2	1	0
-1	a_5	11	3	4	4	0	1
z=-20		Δ_j	-8	-16	-6	0	0

la variable entrante est x_2 et la variable sortante est x_4

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			0	0	0	-1	-1
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
-1	a_5	8	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
z=		Δ_j	$\frac{-4}{3}$	0	$\frac{-10}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

la variable entrante est x_3 et la variable sortante est x_5

m			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			0	0	0	-1	-1
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_2	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{-1}{20}$
0	a_3	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{-1}{10}$	$\frac{3}{10}$
z=0		Δ_j	0	0	0	1	1

l'algorithme s'arrête car $\Delta_j \geqslant 0$

L'optimum est atteint. Une solution de base admissible est donc $x^0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{20} & \frac{12}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}'$

Phase II :

A partir de cette solution de base admissible, on poursuit les itérations en reprenant la fonction objectif initiale $\max z = -x_1 - 4x_2 - x_3$

x			x_1	x_2	x_3
c			-1	-4	-1
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3
-4	a_2	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	1	0
-1	a_3	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
z=$\frac{-19}{5}$		Δ_j	$\frac{-16}{20}$	0	0

la variable entrante est x_1 et la variable sortante est x_2

x			x_1	x_2	x_3
c			-1	-4	-1
c_B	*base*	b	a_1	a_2	a_3
-1	a_1	1	1	$\frac{20}{7}$	0
-1	a_3	2	0	$\frac{-8}{7}$	0
z=-3		Δ_j	0	$\frac{16}{7}$	0

Le critère d'optimalité étant vérifié, la solution courante est optimale pour le problème avec $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $z = -3$.

La méthode de grand M

Cette méthode permet de tenir compte des variables artificielles. On les pénalise en leur affectant un coefficient de valeur très élevée dans la fonction économique ($-M$ pour un problème à maximum, $+M$ pour un problème à minimum). Les pénalités ont pour objet de provoquer l'élimination des variables artificielles au fil des itérations.

Exemple 2.3 *Soit le problème suivant :*

$$\min z = 3x_1 + 10x_2$$
$$s.c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geqslant 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geqslant 14 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\min z = 3x_1 + 10x_2 + Mx_5 + Mx_6$$
$$s.c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_4 + x_6 = 14 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Initialisation :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
c			3	10	0	0	M	M
c_B	*base*	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
M	a_5	10	5	6	-1	0	1	0
M	a_6	14	2	7	0	-1	0	1
z=2M		Δ_j	$7M-3$	$13M-10$	$-M$	$-M$	0	0

la variable entrante est x_2, la variable sortante est x_5.

la nouvelle base sera alors $\begin{pmatrix} a_2 & , a_6 \end{pmatrix}$ *et le nouveau tableau est*

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
c			3	10	0	0	M	M
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
10	a_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0
M	a_6	$\frac{7}{3}$	$\frac{-23}{6}$	0	$\frac{7}{6}$	-1	$\frac{-7}{6}$	1
z=2M		Δ_j	$\frac{23}{6}M - \frac{16}{3}$	0	$\frac{7}{6}M + \frac{5}{3}$	$-M$	$\frac{7}{6}$	0

la variable entrante est x_3 et la variable sortante est x_6.

la nouvelle base sera alors $\begin{pmatrix} a_2 & , a_3 \end{pmatrix}$

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
c			3	10	0	0	M	M
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
10	a_2	2	$\frac{2}{7}$	1	0	$\frac{-1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
0	a_3	2	$\frac{-23}{7}$	0	1	$\frac{-6}{7}$	-1	$\frac{7}{6}$
z=2M		Δ_j	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{-10}{7}$	$-M$	$\frac{-10M}{7}$

le critère d'optimalité est vérifié l'algorithme s'arrête et la solution optimale est

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dual de simplexe

Étant donné le problème primal de programmation linéaire :

$$\max z = c'x$$
$$\begin{cases} Ax = b & & (P) \\ x \geq 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Et son dual

$$\min z = b'y$$
$$\begin{cases} Ay = b & (D) \\ y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Définition 2.1 *De l'ensemble J, choisissons un sous ensemble $J_B \in J$ et soit $A_B = (I, J_B)$ une sous matrice inversible de A. En utilisant la matrice A_B , on construit le vecteur y : $y' = c'_B A_B^{-1}$.*

Le vecteur y est dit plan dual basique et A_B la matrice de base si $A'_H y \geq c_H$ Où $A_H = (I, J_H)$, $J_H = J/J_B$.

Définition 2.2 *Un plan dual basique y est dit non dégénéré si $A'_H y > c_H$. En utilisant un plan dual basique de départ y, on construit les vecteurs suivants :*

$$\delta (J) = A'y - c, x_j = (x_{J_B}, x_{J_H}) = (x_B, x_H), x_{J_B} = x_B = A_B^{-1} b, x_{J_H} = x_H = 0$$

Appelés Coplan et pseudo plan respectivement du problème (P).

Remarque 2.1 *Par construction $\delta (J_B) = 0$ et $\delta (J_H) \geq 0$. Si y est un plan dual basique alors δ et x sont dits basiques.*

Algorithme dual du simplexe

Considérons un plan dual basique y avec sa matrice de base A_B. En utilisant A_B , on calcule le pseudo plan $x = x_B = A_B^{-1} b, x_H = 0$. Si $x_B \geq 0$ Alors x est optimale pour le problème (P), et y optimal du dual (D) sinon, on calcule $x_{j_0} = \min x_j, x_j < 0, j \in J_B$, de la l'indice j_0 doit sortir de la base et la colonne a_{j_0} doit sortir de A_B, c'est à dire, on change de base $A_B \to \bar{A}_B$.

Le changement de base entraîne le changement du plan dual y $(y \to \bar{y})$ qui entraîne aussi le changement du coplan δ $\left(\delta \to \bar{\delta}\right)$. Ce changement de coplan se fera de la manière suivante :

$$\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta, où : \Delta\delta_j = \begin{cases} \sigma, j = j_0, \\ 0, j \in J_B / j_0 \end{cases}$$

Où σ est le pas dual positif ou nul.

$\Delta\delta_j = \sigma x_{jj_0}, j \in J_H$ ou x_{jj_0} est la $j^{éme}$ composante du vecteur $A_B^{-1} a_j$.

Pour que $\bar{\delta}$ soit un coplan, il faut avoir un pas maximal

$$\sigma^0 : \sigma^0 = \min_{x_{j_0 j} < 0, j \in J_H} \left\{ \frac{-\delta_j}{x_{j_0 j}} \right\} = \frac{-\delta j_1}{x_{j_0 j_1}}$$

La nouvelle base sera $\bar{J}_B = (J_B / j_0) \cup j_1, et\ A_B = A\left(I, \bar{J}_B\right)$,

la nouvelle itération débutera avec :

$$\bar{x} = (\bar{x_B}) = \overline{A}_B^{-1} b, \bar{x}_H = 0$$

.

Remarque 2.2 *Les problèmes du type :*

$$\min z = c' x$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

Sont résolus dans la plupart des cas par la méthode duale du simplexe, car en ajoutant des variables d'écart, on obtient facilement la solution de base de départ. Par contre si on utilise la méthode du simplexe, on ajoute des variables d'écart et des variables artificielles et ceci, augmente la dimension du problème.

Exemple 2.4 *Résoudre le problème linéaire suivant :*

$$\min z = 3x_1 + 10x_2$$
$$s.c \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geqslant 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geqslant 14 \\ \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Sous forme standard, on aura :

$$\max z = -2x_1 - x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = -8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1 \ldots 5} \end{cases}$$

D'où $x = \begin{pmatrix} 0 & ,0, & 0 & ,-5 & ,-8 \end{pmatrix}$ *et* $z(x) = 0$.
Soit $A_B = \begin{pmatrix} a_4, & a_5 \end{pmatrix}$, *une telle matrice inversible avec* $J_B = (4,5)$, $J_H = (1,2,3)$.
En utilisant A_B,
on calcule le vecteur des potentiels y : $y\prime c_B A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \end{pmatrix}$, *car* $c_B^{'} = \begin{pmatrix} 0 & ,0 \end{pmatrix}$, *de là* $y\prime A_H = \begin{pmatrix} 0 & ,0 & ,0 \end{pmatrix} \geq c_H^{'} = \begin{pmatrix} -2, & 0 & ,-1 \end{pmatrix}$,
donc y *est un plan dual basique, ce qui veut dire que la matrice* A_B *est de base.*
Le coplan basique initial est donc égale à $\delta = A\prime y - c = -c = \begin{pmatrix} 2 & ,0 & ,1 & ,0 & ,0 \end{pmatrix}$.

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			-2	0	-1	0	0
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_4	-5	-1	-1	1	1	0
0	a_5	-8	-1	2	-4	0	1
		δ_j	2	0	1	0	0
		σ	2	0	$\frac{1}{4}$	0	0

Les composantes du pseudo plan x_B *ne sont pas toutes positives ,donc le critère d'optimalité n'est pas vérifié .*
On a $x_5 = -8 = \min_{x_j<0, j\in J_B} xj$, *donc* a_5 *sort de la base.*
De plus $\sigma_1 = \frac{-\delta_1}{x_{j_1 1}} = \frac{-2}{-1} = 2$
$\sigma 3 = \frac{-\delta_3}{x_{j_1 3}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$
$\min_{x_{j_1 j<0, j\in J_H}} \sigma_j = \frac{1}{4}$

Donc le vecteur a_3 va rentrer dans la nouvelle base à la place de a_5 et on passe à la nouvelle itération

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			-2	0	-1	0	0
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_4	-7	$\frac{-5}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$
0	a_3	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	1	0	$\frac{-1}{4}$
		δ_j	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
		σ	$\frac{7}{5}$	1	0	0	0

donc a_4 sort de la base et sera remplacé par a_2 , qui correspond au pas minimum $\sigma_2 = 1$,
par suite on passe à l'autre itération :

x			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
c			-2	0	-1	0	0
c_B	base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_2	14	$\frac{5}{2}$	1	0	-2	$\frac{-1}{2}$
-1	a_3	9	$\frac{3}{2}$	0	1	-1	$\frac{-2}{4}$
		δ_j					
		σ					

On a les $x_j \geq 0$, donc la solution est optimale.
D'où

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $z(x^*) = 9$.

3 Programmation linéaire multi-objectifs

INTRODUCTION

Dans la plupart des problèmes du monde réel, il ne s'agit pas d'optimiser seulement un seul critère mais plutôt d'optimiser simultanément plusieurs critères et qui sont généralement conflictuels.

L'optimisation multi-objectifs consiste donc à optimiser simultanément plusieurs fonctions. La solution d'un problème multi- objectifs n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connu comme l'ensemble des solutions Pareto optimales par exemple. Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur une composante du vecteur sans dégradation d'au moins une autre composante . Pour les problèmes n'incluant qu'un seul objectif, l'optimum cherché est clairement défini, celui-ci reste à formaliser pour les problèmes d'optimisation multi-objectifs. Prenons le cas d'une personne souhaitant acheter une maison. La maison idéale est celle qui est moins chère avec beaucoup d'espace et bien située si possible, mais cette maison idyllique n'existe pas. Notre acheteur va donc devoir identifier les meilleurs compromis possibles correspondants à son budget. Traditionnellement, Les problèmes multi-objectifs ont été abordés comme problèmes d'optimisation mono-objectif après la combinaison de plusieurs critères dans une simple valeur scalaire. De l'autre côté et pendant les dernières années, il y a eu l'apparition d'un certain nombre de méta-heuristiques multi-objectifs dont le but est d'obtenir un ensemble de solutions de compromis pour des problèmes d'optimisation multi-objectif dans une seule exécution et sans besoin de convertir le problème en mono-objectif au risque que celui-ci perd sa signification. La plupart de ces techniques ont réalisé un grand succès dans l'optimisation des problèmes réels multi-objectifs.Hamad.S [2008.]&Berro.A [2001.]&Siarry.P [2002.]

3.1 CONCEPTS DE BASE

Un problème d'optimisation multi-objectifs (Multi objective Optimisation Problème (MOP)) ou multi-critères est un problème dans lequel nous optimisons simultanément plusieurs fonctions "objectifs" souvent contradictoires et il est défini comme suit :

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))' \rightarrow \max$$

Soumise à :

$$g_i(x) \geq b_i, i = \overline{1..p}.$$
$$h_j(x) = c_j, j = \overline{1..q}\ .$$

Avec :

$$D = \left\{ \begin{array}{c} g_i(x \geq b_i), i = \overline{1..p} \\ h_j(x) = c_j, j = \overline{1..q}\ x\epsilon\mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Un (MOP) peut être formulé comme suit :

$$(MOP) \left\{ \begin{array}{c} \max\{f_1(x) = Z_1(x)\} \\ \vdots \\ \max\{f_k(x) = Z_k(x)\} \\ \\ sc\ x \in D \end{array} \right.$$

Tel que :

— $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{'}$ représente l'action (ou vecteur de décision) avec x_j les variables du problème et n le nombre de ces variables $1 \leq j \leq n$.

— $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))$ est le vecteur de fonctions "objectifs", avec f_i les objectifs (ou critères de décisions) et k le nombre d'objectifs $(k \geq 2)$.

— D est l'ensemble des solutions réalisables qui est formé par l'intersection des contraintes du problème d'optimisation (MOP).

En particulier dans le cas linéaire, le problème d'optimisation multi-objectifs est formulé comme suit :

$$(MOP) \left\{ \begin{array}{c} \max\left\{c^{i'}(x) = Z_i\right\}\ , 1 \leq i \leq k \\ \\ s.c\ x \in D \end{array} \right.$$

Où :

— c_i est un $n-vecteur$ contenant les coefficients de la i^{eme} fonction objectif, $i = \overline{1..k}$.

— $D = \{x\epsilon\mathbb{R}^n / Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ tel que : A est une $m \times n$ matrice réelle et b est un $m-vecteur$ réel.

— Une solution du (MOP) optimise les composantes d'un vecteur $F(x)$ où x est un vecteur de variables de décision $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{'}$.

— À noter que l'ensemble des solutions réalisables D est formé par les contraintes en général.
$(g_i(x) \geq b_i, i = \overline{1..p})$ et $(h_j(x) = c_j(x), j = \overline{1..q})$ qui doivent être satisfaites tout en optimisant $F(x)$.
On se limite aux problèmes de maximisation, puisque la minimisation d'une fonction $F(x)$ peut facilement être transformée en un problème de maximisation
$\min F(x) = -\max(-F(x))$

3.1.1 Définitions

Madani.Bezoui

Définition 3.1 *(espace de décision) Le sous espace de $\mathbb{R}^n$ dans lequel se situe l'ensemble des solutions réalisables $D \subseteq R^n$ est appelé espace de décision.*

Définition 3.2 *(espace de critères)*
Le sous espace des critères de $\mathbb{R}^k$ dans lequel se situe Z_D qui est l'image de D dans $\mathbb{R}^k$ par l'application $F(D)$ il est appelé aussi espace des objectifs.

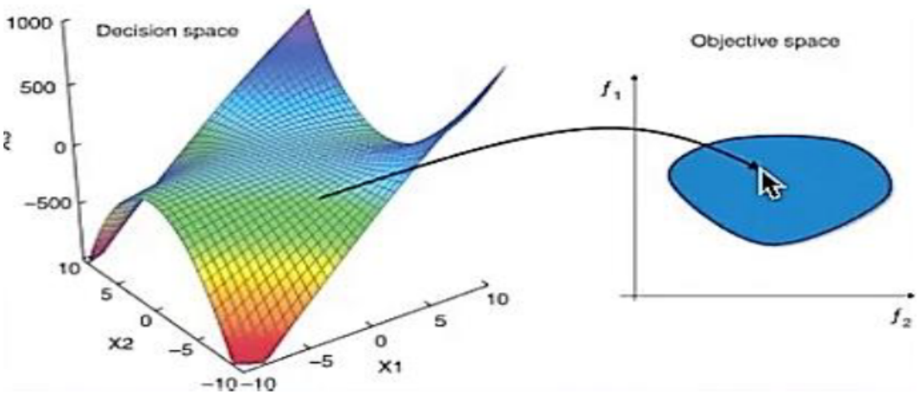


FIGURE 3.1 – *Représentation de l'espace de décisions et l'espace des critères*

Définition 3.3 *(convexité)*
Un problème d'optimisation multi-objectifs est dit convexe si toutes les fonctions objectifs sont convexes et l'ensemble des solutions réalisables est convexe. L'ensemble D est dit convexe si tout segment joignant deux points quelconques de D est inclus dans D.
$x \in D$ *et* $y \in D \Longleftrightarrow [x, y] \subset D$

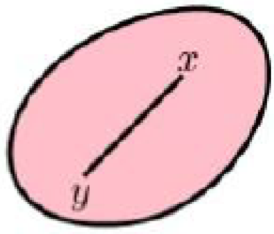


FIGURE 3.2 – *Ensemble convexe*

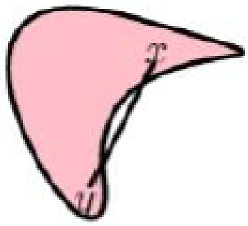


FIGURE 3.3 – *Ensemble non convexe*

3.1.2 Points particuliers

Le point idéal,le point anti-idéal, point de référence et le point nadir. Pour les trouver il faut résoudre des problèmes mono-objectif Madani.Bezoui

Point idéal :

C'est le vecteur $\bar{Z} = (\max Z_1(x), \max Z_2(x), ..., \max Z_k(x)), x \in D$.Ce point est généralement non réalisable car sinon les critères ne seront pas contradictoires.

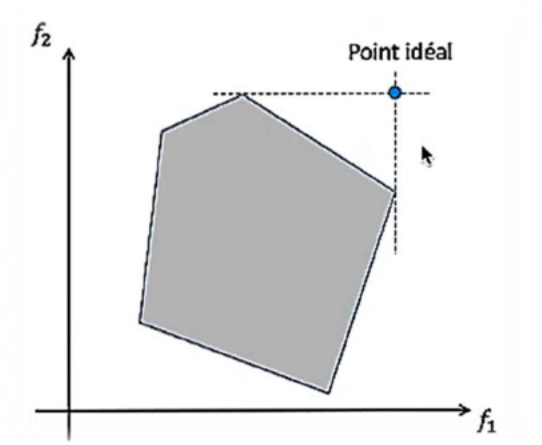


FIGURE 3.4 – *Le point idéal*

Dans cet exemple l'intersection des droites perpendiculaire de est appelé point idéal.

Point anti-idéal :

C'est le vecteur défini par :$\underline{Z} = (\min Z_1(x), \min Z_2(x), ..., \min Z_k(x))'$.
Le point anti-idéal n'est pas réalisable en général $\underline{Z} \notin Z_D$.

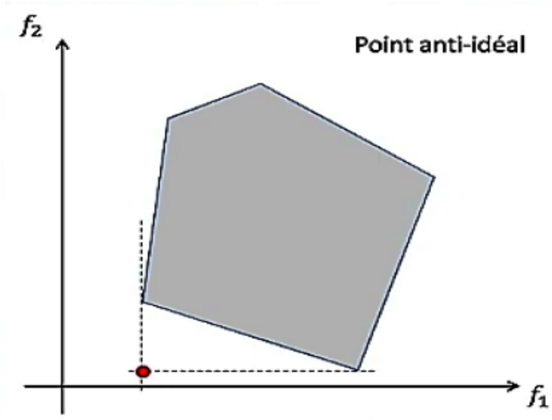


FIGURE 3.5 – *Le point anti idéal*

Point nadir :

Le point Nadir est défini comme la pire solution efficace, il s'écrit comme suit : $V_j = \min_{x(p)} f_i(x) ; \forall i, j = \overline{1..k}$ tel que p est l'ensemble des solutions efficaces.

Vecteur de référence :

C'est un vecteur $Z^{*'} = \left(Z_1^*, Z_2^*, ..., Z_k^*\right)'$ dont les coordonnées sont les valeurs souhaitables que l'on doit atteindre.

3.1.3 Notion de dominance et d'efficacité

On sait qu'un problème multi-objectifs n'admet pas de solution optimale du fait que les critères sont contradictoires, il faut donc redéfinir la notion d'optimalité connue dans le mono-objectif pour qu'elle soit applicable pour le multi-objectifs .

En résolvant un (MOP) on obtient une multitude de solutions , on définit alors la notion de dominance.

Définition 3.4 *On dit que un vecteur $X = (x_1, x_2, ...x_k)'$ domine $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)'$ si :*

— *X est au moins aussi bon dans tous les objectifs que Y.*

— *X est strictement meilleur que Y en au moins un objectif .*

Définition 3.5 *(dominance forte)*
Soient deux vecteurs X et Y . On dit que X domine fortement Y si et seulement si :

$$x_i \geq y_i \ \forall i = \overline{1..n}$$

et on note :

— $X > Y$ *Si X domine fortement Y*

— *X est meilleur que Y .*

Définition 3.6 *(dominance faible)*
Soient deux vecteurs X et Y . On dit que X domine faiblement Y si et seulement si :

$$x_i \geq y_i \ \forall i = \overline{1..n}$$

Exemple 3.1 *Soient* $X = (4, 3, 2, 5)$,$Y = (4, 2, 2, 1)$
— $X \geq Y$
Soient $W = (5, 6, 3, 2)$,$Z = (3, 2, 1, 1)$
— $W>Z$

Définition 3.7 *(Pareto optimale)*
Une solution réalisable $x^* \in D$ *est dite efficace (ou Pareto optimale) si et seulement s'il n'existe aucun point* $x \in D$ *telle que :* $Z_i\,(x) \geq Z_i\,(x^*)$, $\forall\ i \in \{1...k\}$ *et* $Z_j\,(x) > Z_j\,(x^*)$*pour au moins un indice* $j \in \{1...k\}$ *.*

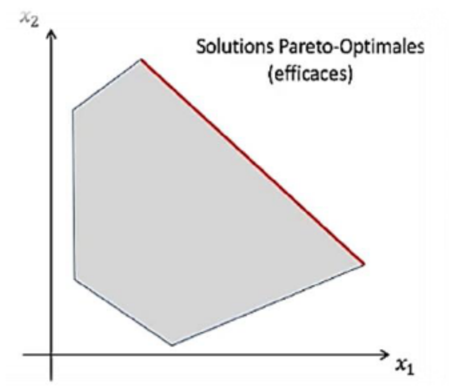


FIGURE 3.6 – *Solutions efficaces*

Définition 3.8 *(efficacité forte)*
Une solution $x^* \in D$ *est dite fortement efficace s'il n'existe aucun vecteur* $x \in D$ *tel que* $x \neq x^*$ *et* $Z_i\,(x) \geq Z_i\,(x^*)$.
Une solution est fortement efficace si son vecteur critère est fortement non dominé.

Définition 3.9 *(efficacité faible)*

Une solution $x^* \in D$ est dite faiblement efficace, s'il n'existe aucun vecteur $x \in D$ tel que $Z(x) > Z(x^*)$.

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère est faiblement dominé.

Définition 3.10 *(Front de Pareto)*
Le front de Pareto est l'ensemble des solutions Pareto optimales qui sont composées des points qui ne sont pas dominés par aucun autre.

C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominé.

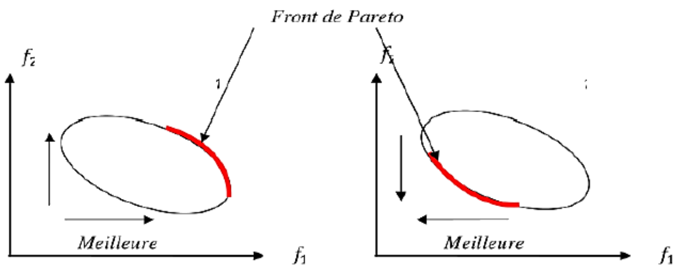


FIGURE 3.7 – *Front de Pareto à gauche cas* max *à droite cas* min

Exemple 3.2 *(dominance et d'optimalité au sens de Pareto)*

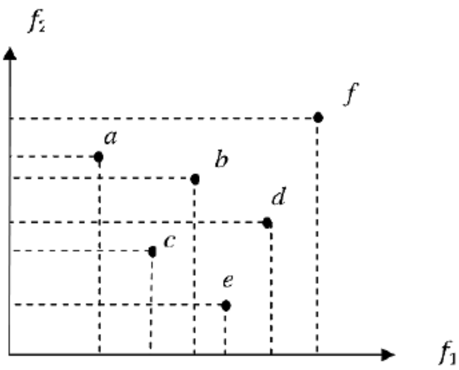


FIGURE 3.8 – *Exemple (cas min)*

On considère les six vecteurs de décisions suivants :
$a = (a_1, a_2)\,; b = (b_1, b_2)\,; c = (c_1, c_2)\,; d = (d_1, d_2)\,; e = (e_1, e_2)\,; f = (f_1, f_2)$, *tels que :*
Soit la fonction objective $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]'$

La représentation graphique de l'image de ces six vecteurs par la fonction F est fournie dans la FIGURE 3.8. Dans cet exemple on peut écrire :

— *f : est dominé par tous les autres vecteurs.*

— *b : est dominé uniquement par c.*

— *d : est dominé par c et e .*

— *a, c et e : ne sont dominés par aucun vecteur.*
Par conséquent les vecteurs $\{a, c, e\}$ sont Pareto optimaux .
Donc le front de Pareto est l'ensemble : $\{a, c, e\}$

3.1.4 Matrice des gains

Madani.Bezoui La matrice carrée de dimension k suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1k} \\ Z_{21} & \bar{Z}_{22} & \dots & Z_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & \bar{Z}_{kk} \end{bmatrix}$$

Où :
$\bar{Z}_i = \max_{x \in D} Z_i(X) = Z_i(\bar{X}_j) \forall i, j = \overline{1..k}$,
Avec $Z_{ij} = Z_i(\bar{X}_j), \forall i, j = \overline{1..k}$
est appelée matrice des gains.

3.1.5 Caractérisation des solutions efficaces

Nous présentons quelques caractéristiques qui permettent de tester l'efficacité d'une solution réalisable :

Théorème 3.1 *(Théorème d'Eker et Wendell)*
Soit $x^* \in D$ un vecteur de décision donné et $\tilde{x}$ un vecteur quelconque de D
x^* est efficace pour $(MOP) \Longleftrightarrow x^*$
est solution optimale de problème auxiliaire

$$(P_{\tilde{x}}) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \\ x \in D \\ f_i(x) \leq f_i(\tilde{x}), \ \forall i = \overline{1..k} \end{cases}$$

Exemple 3.3 *Soit le problème suivant :*

$$(P)\begin{cases}\min\left(-3x_1-x_2,x_1+2x_2\right)\\ 3x_1-x_2\leq 6\\ x_2\leq 2\\ x_1,x_2\in\mathbb{R}_+\end{cases}$$

$f_1\left(x\right)\leq f_1\left(\tilde{x}\right)=f_1\left(1,1\right)\Rightarrow -3x_1-x_2\leq -4$

$f_2\left(x\right)\leq f_2\left(\tilde{x}\right)=f_2\left(1,1\right)\Rightarrow x_1+2x_2\leq 4$

En résolvant $(P_{\tilde{x}})$ par la méthode du simplexe, sa solution optimale $x^*=(2,1)'$. Donc x^* est efficace pour (P)

Théorème 3.2 *(Théorème de Benson)*
Soit le problème uni-critère suivant :

$$(P_\epsilon\left(x^*\right))\begin{cases}\max\theta=\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i\\ x\in D\\ f_i\left(x\right)+\epsilon_i=f_i\left(x^*\right);\forall i=\overline{1..k}\\ \epsilon_i\geq 0;\forall i=\overline{1..k}\end{cases}$$

Soit x^* une solution réalisable donnée, alors :

1. *x^* est efficace pour le problème $(MOP)\Longleftrightarrow$ la valeur optimale de la fonction "objectif " est nulle dans $(P\left(x^*_\epsilon\right))$.*
2. *Si $\theta_{opt}\neq 0$ pour la solution $\tilde{x}$ de $(P_\epsilon\left(x^*\right))$: $\tilde{x}$ est efficace pour (MOP)*

Exemple 3.4 *Soit le problème multi-objectifs (MOP) suivant :*

$$(MOP)\begin{cases}\min\left(x_1-2x_2;-x_1+4x_2;2x_1+x_2\right)\\ -2x_1+x_2\leq 0\\ x_1\leq 3\\ x_2\leq 2\\ x_1,x_2\in\mathbb{R}_+\end{cases}$$

Vérifions si la solution réalisable $x^1=(0;0)$est efficace en utilisant le test de Benson :

$$(P_\epsilon(x^*))\begin{cases} \max\theta = \epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3 \\ -2x_1+x_2\leq 0 \\ x_1\leq 3 \\ x_2\leq 2 \\ f_1(x)+\epsilon_1 = f_1\left(x^1\right) \Longleftrightarrow x_1-2x_2+\epsilon_1=0 \\ f_2(x)+\epsilon_2 = f_2\left(x^1\right) \Longleftrightarrow -x_1+4x_2+\epsilon_2=0 \\ f_3(x)+\epsilon_3 = f_3\left(x^1\right) \Longleftrightarrow 2x_1+x_2+\epsilon_3=0 \\ x_1,x_2,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\geq 0 \end{cases}$$

la solution optimale de $(P_\epsilon(x^*))$ *est* $x_1 = 0, x_2 = 0, \epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 0, \epsilon_3 = 0$ $\Rightarrow\theta_{opt}=0\Rightarrow x^1=(0,0)'$ *est efficace pour* (MOP)

3.2 Méthodes de résolution d'un programme multi-objectifs

3.2.1 Méthode du simplexe multi-objectifs

La méthode du simplexe multicritères consiste à générer un premier point efficace à partir d'une solution de base réalisable, puis à énumérer tous les autres points efficaces cependant cette méthode ne teste pas toutes les bases car certaines sont dominées de manière évidente.

Étant donné le problème :

$$(MOP)\begin{cases} \max Z_1 = c'^1x = f_1(x) \\ \max Z_2 = c'^2x = f_2(x) \\ \vdots \\ \max Z_k = c'^kx = f_k(x) \\ Ax=b, x\geq 0 \end{cases}$$

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n, Ax=b, x\geq 0\}$$

Le tableau du simplexe (en considérant séparément chaque objectif) est donné par le tableau ci-dessus .

Dans ce tableau, on suppose sans perte de généralité que les m premières variables sont dans la base, soient :

J_B=Ensemble des indices basiques

J_H = Ensemble des indices hors base.

					C^1	C_1^1	....	C_m^1	C_{m+1}^1	....	C_j^1	....
					C^2	C_1^2	....	C_m^1	C_{m+1}^2	....	C_j^2	....
					$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$	
					C^k	C_1^k	....	C_m^k	C_{m+1}^k	....	C_j^k	....
C_B^1	C_B^2	C_B^j	C_B^k	base	B	a_1	....	a_m	a_{m+1}	....	a_j	....
C_1^1	C_1^2	C_1^j	C_1^k	a_1	b_1	1		0	x_{1m+1}	....	x_{1j}	....
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		0 $\vdots$ 0 $\vdots$	$\ddots$	0 $\vdots$ 0 $\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
C_m^1	C_m^2	C_m^j	C_m^k	a_m	b_m	0		1	x_{mm+1}	....	x_{mj}	....
						0	0	0	Δ_{m+1}^1		Δ_j^1	
						$\vdots$	0	0	Δ			
						0	0	$\vdots$	Δ_{m+1}^i	....	Δ_j^1	....
						$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$			
						0	0	0	Δ_{m+1}^k	....	Δ_j^k	....

Table 3.1 – *Simplexe multi-objectifs*

$$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = c'^1 b \\ Z_0^2 = c'^2 b \\ \vdots \\ Z_0^k = c'^3 b \end{pmatrix}$$

Le test d'efficacité

Théorème 3.3 *Soit $x \in D$ est efficace (respectivement faiblement efficace) pour le (MOP) (linéaire).*

Si et seulement s'il existe : $\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^k / \sum_{j=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \right\}$

Respectivement $\exists\ \lambda \in \bar{\Lambda} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^k / \sum_{j=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$ tel que $\bar{x}$ maximise le problème des sommes pondérées donné par :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \max \lambda' c' x \\ \\ s.c\ x \in D \end{cases}$$

Théorème 3.4 *Si D possède un point efficace, alors au moins un point extrême de D est efficace.*

Preuve

Soit $\bar{x}$ un point efficace de D , d'après le théorème 3.3 il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que

$$\lambda' c' \bar{x} = \max \lambda' c' x \; , x \in D$$

Comme une fonction linéaire atteint son maximum en un point extrême, donc $\bar{x}$ est extrême efficace.

Théorème 3.5 *soit $x \in D$ un point extrême associé à une base efficace B alors x est efficace .*

Preuve

Puisqu'il existe un $\lambda \in \Lambda$ pour lequel B est une base optimale par le théorème 3.4, x est efficace.

Théorème 3.6 *Soient B et $\bar{B}$ deux bases efficaces adjacentes obtenues à partir d'un pivot efficace, et soient x et $\bar{x}$ les points extrêmes associés à B et $\bar{B}$ respectivement.*

Alors l'arête $(x, \bar{x})$ est efficace.

Théorème 3.7 *Soit (x, v) une arête efficace infinie de D , alors x est un point extrême associé à une base efficace B .*

De la théorie de simplexe uni-critère on a :

1. $\triangle_j^i = \sum_{r \in j_B} c_r'^i x_{rj} - c_j^i, j \in J_H, \forall i = \overline{1..k}$ *et* $Z_0^i = \sum_{r \in j_B} c_r'^i b_r, \forall r = \overline{1..k}$.
   Si : $\triangle_j^i \geq 0, \forall j \in J_H$ *:*
   alors $x^0 = (b, 0)(b \in \mathbb{R}^{m+}, 0 \in \mathbb{R}^{n-m})$ *est une solution maximale pour le critère i .*
2. *si on introduit la* j^{eme}*variable dans la base nous obtenons une nouvelle solution* x_1 *et un nouveau vecteur* $\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \triangle_j$ *ou :*

$$\hat{Z}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Z}_0^1 \\ \hat{Z}_0^2 \\ \vdots \\ \hat{Z}_0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0^1 \\ Z_0^2 \\ \vdots \\ Z_0^k \end{pmatrix} - \theta_j \begin{pmatrix} \triangle_j^1 \\ \triangle_j^2 \\ \vdots \\ \triangle_j^k \end{pmatrix}$$

$\theta_j = \min \left\{ \frac{b_r}{x_{rj}} / x_{rj} > 0 \right\}, \forall j \epsilon J_H, r \in J_B$

Remarque 3.1

1. *Soit* $\mathring{x}$ *une solution basique réalisable.*
   S'il existe un $j \in J_H$ *tel que tous les* $\triangle_j^i \leq 0$ *avec au moins une inégalité stricte et si* $\theta_j > 0$ *, alors la solution courante* $\mathring{x}$ *est dominée.*

   En effet : Si on introduit la j^{eme} *variable à la base ,on obtient un point extrême* x^1 *adjacent pour lequel :*$\hat{Z}_0 \geq Z_0$*, avec au moins une inégalité stricte car :* $\theta_j \triangle_j \leq 0$ *donc*

$$\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \triangle_j \leq Z_0$$

S'il existe un $j \in J_H$ *tel que* $\triangle_j^i \geq 0$ *avec au moins une inégalité stricte et si de plus* $\theta_j > 0$*, alors l'introduction de la* j^{eme} *variable de la base mène à une solution dominée.*

En effet : si on introduit la variable j *à la base, on aura un nouveau point extrême* x^1 *pour lequel*

$$\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \triangle_j \leq Z_0$$

avec au moins une inégalité stricte.

2. *soit* x *une solution basique réalisable s'il existe* $j_1, j_2 \in J_H$ *, tel que :*

$\theta_{j_1}\Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2}\Delta_{j_2}$ *avec au moins une inégalité stricte, alors l'introduction de la variable d'indice* j_2 *dans la base conduit à une solution dominée par celle résultant de l'introduction de la variable d'indice* j_1.

En effet :$\theta_{j_1}\Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2}\Delta_{j_2}$ *avec au moins une inégalité stricte ,cela implique que* $Z_0 - \theta_{j_2}\triangle_{j_2} \leq Z_0 - \theta_{j_1}\triangle_{j_1}$ *Avec au moins une inégalité stricte.*

Résumé de la méthode

1. S'il existe un indice $i \epsilon \{1..k\}$ tel que $\triangle_j^i \geq 0$, $\forall j \in j_H$, alors le i^{eme} critère est à son maximum et la solution basique correspondante est non dominée à condition qu'il n'existe pas de colonne k avec $\triangle_k^i = 0, \forall k \in j_H$

2. D'après la remarque précédente, seules les colonnes (variables) non comparables à zéro et les variables $j, k \epsilon J_H$ tel que : $\theta_k \Delta_k$ incomparable à $\theta_j \Delta_j$ sont admissibles pour une introduction dans la base.

Dans ce cas, on ne peut pas dire si la solution correspondante $\bar{x}$ est dominée ou pas. Pour cela, on considère le test dit de dominance énoncé par le théorème :

Théorème 3.8 *(test de dominance)*

Soit le problème :

$$\max v = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$$

$$c'x - \delta = c'\bar{x}$$

$$x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$$

$$\delta \in \mathbb{R}^n \delta \geq 0, \bar{x} \in D$$

Alors :

— $\bar{x}$ *est efficace si et seulement :* $\max v = 0$.

— $\bar{x}$ *est dominée si et seulement si :* $\max v > 0$

Exemple 3.5 *Soit le problème :*

$$\begin{array}{c} \max Z_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ \max Z_2 = x_1 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{3.1}$$

$$(3.1) \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \max Z_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ \max Z_2 = x_1 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 400 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 500 \\ x_j \geq 0; \forall j = 1 \ldots 4 \end{cases} \end{array}$$

$x_1 = (0, 0, 400, 500)^{'}$ *est une solution de base réalisable associé a la base*
Le tableau de simplexe initial est :

			C^1	0.4	0.3	0	0
			C^2	1	0	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	400	1	1	1	0
0	0	a_4	500	2	1	0	1
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = 0 \\ Z_0^2 = 0 \end{pmatrix}$	Δ^1	-0.4	-0.3	0	0
			Δ^2	-1	0	0	0

Il n'existe pas un $i \in \{1.2\}$ *tel que o* $\Delta_j^i \geq 0 \ \forall j \in J_H = \{1..2\}$ *donc aucun objectif n'est à son maximum.*

$\Delta_1 \begin{pmatrix} -0.4 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow x^1 = (0, 0, 400, 500)$ *est dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{400}{1}, \frac{500}{2}\right\} = 250$*(atteint pour* $r = 4$*)*

$\theta_2 = \min\left\{\frac{400}{1}, \frac{500}{1}\right\} = 400$ *(atteint pour* $r = 3$*)*

$$\begin{cases} \theta_1\Delta_1 = 250 \begin{pmatrix} -0.4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -250 \end{pmatrix} \\ \\ \theta_2\Delta_2 = 400 \begin{pmatrix} -0.3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_1\Delta_1$ *est incomparable a* $\theta_2\Delta_2$

Introduisons a_1 dans la base à la place de a_4, on aura alors le tableau suivant :

			C^1	0.4	0.3	0	0
			C^2	1	0	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	150	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$
0.4	1	a_1	250	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1^1 = 100 \\ Z_1^2 = 250 \end{pmatrix}$	Δ^1	-0.4	-0.1	0	0.2
			Δ^2	0	$\frac{1}{2}\uparrow$	0	$\frac{1}{2}$

Il existe un $i = 2$ tel que tel que $\Delta_j^i > 0$ $\forall j \epsilon J_H$ ce qui implique que le deuxième critère est à son maximum.
Le point extrême $x^2 = (250, 0, 150, 0)$ est non dominé.
$\theta_2 = \min\left\{\frac{150}{0.5}, \frac{250}{0.5}\right\} = 300$ *(atteint pour $r = 3$).*

$\theta_4 = \min\left\{\frac{250}{0.5}\right\} = 500$ *(atteint pour $r = 1$).*

$$\begin{cases} \theta_2\Delta_2 = 300\begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 150 \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4\Delta_4 = 500\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\theta_2\Delta_2 < \theta_4\Delta_4$

Donc a_2 rentre dans la base et a_3 sort de la base d'après la remarque, dressons alors le 3^{eme} tableau du simplexe :

			C^1	0.4	0.3	0	0
			C^2	1	0	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	
0.3	0	a_2	300	0	1	2	-1
0.4	1	a_1	100	1	0	-1	1
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1^1 = 130 \\ Z_1^2 = 100 \end{pmatrix}$		0	0	0.2	0.1
				0	0	-1	1

$\Delta^1 \geq 0$, *alors le premier objectif est à son maximum et puisqu'il n'existe pas de colonne k telle que $\Delta_k^1 = 0$ avec $k \in J_H$ alors $x^3 = (100, 300, 0, 0)$ est non dominée.*

$\theta_3 = \min\left\{\frac{300}{2}\right\} = 150$ *(atteint pour $r = 2$).*

$\theta_4 = \min\left\{\frac{100}{1}\right\} = 100$ *(atteint pour $r = 1$).*

$$\begin{cases} \theta_3\Delta_3 = 150\begin{pmatrix} 0.2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -150 \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4\Delta_4 = 100\begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On remarque que $\theta_3\Delta_3$ est incomparable à $\theta_4\Delta_4$. Puisque l'introduction de a_3 dans la base conduit à une base déjà explorée, donc on introduira a_4.

Dressons alors le 4^{eme} tableau de simplexe :

			C^1	0.4	0.3	0	0
			C^2	1	0	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0.3	0	a_2	400	1	1	1	0
0	0	a_4	100	1	0	-1	1
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1^1 = 120 \\ Z_1^2 = 0 \end{pmatrix}$	Δ^1	-0.1	0	0.3	0
			Δ^2	-1	0	0	0

Il n'existe pas un $i \in \{1.3\}$ tel que $\Delta_j^i \geq 0$ donc aucun objectif n'est à son maximum.

$\Delta_1 \begin{pmatrix} -0.1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow x^4 = (0, 400, 0, 100)$ *est dominé.*

Finalement, en considérant le problème initial 3.1 seuls les points extrêmes $x^2 = (250, 0)$ et $x^3 = (100, 300)$ sont non dominés avec :

$Z\left(x^{2*}\right) = \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \end{pmatrix}$ *et* $Z\left(x^{3*}\right) = \begin{pmatrix} 130 \\ 100 \end{pmatrix}$

On a recensé deux solutions efficaces.

Conclusion :

La méthode du simplexe multicritères nous apporte clarté et précision dans toutes ses étapes donc facilite l'application, cependant en pratique, elle peut être non efficace, car la solution désirée peut être sur arête et non un point extrême efficace.

3.2.2 Méthode de la somme pondérée

C'est l'une des premières approches utilisées pour résoudre les problèmes multi-objectifs (MOP) . Elle consiste à transformer un problème multi-objectifs en un problème mono-objectif, comme étant la somme pondérée des différentes fonctions "objectif" du problème initial. En affectant à chaque objectifs un poids qui représente l'importance relative que le décideur attribue à l'objectif. Cette méthode est la plus simple des méthodes d'optimisation multi-objectifs. La transformation que l'on effectue est la suivante :

$$(P_\lambda)\begin{cases}\max \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)_i \\ x \in D\end{cases}$$

— D : représente le domaine réalisable.

— $\lambda_i \geq\ 0; i = 1..k;\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

λ_i : appelé le poids, est une pondération associée au critère, cette pondération permet d'exprimer des préférences sur les critères de décisions.

Théorème 3.9 *Toute solution optimale du problème (P_λ) est une solution Pareto optimale pour le problème (MOP) si seulement si tous les λ_i sont strictement positifs $i = 1..k$.*

Si le problème (MOP) est concave (en particulier linéaire) si (x^*) est solution Pareto optimale de (MOP) alors $\exists\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ avec $(\lambda_i > 0, i = 1 \ldots k)$ chaque (x^*) est solution optimale de (P_λ) .

Remarque 3.2 *Les résultats obtenus dans la résolution du problème mono-objectif paramétrique (P_λ) dépendent largement des paramètres choisis pour le vecteur de poids λ. Aussi, les différents poids λ_i doivent être choisis en fonction des préférences associées aux différents objectifs. Le principal avantage de cette approche réside dans le fait qu'elle garantit l'optimalité Pareto de la solution trouvée.*

3.2.3 La méthode epsilon-contraintes

Cette méthode consiste à maximiser un objectif f_i pour $i\epsilon\ \{1...k\}$ tout en considérant que tous les $(k-1)$ objectifs $f_j\ i \neq j$ doivent être supérieurs à certaine valeur $\epsilon \in \mathbb{R}^{k-1}$.

En général, le choix de l'objectif f_i à maximiser (décider par le décideur) est celui que le décideur souhaite maximiser en 1^{er} priorité

Le problème peut s'écrire :

$$(P_\epsilon) = \begin{cases} \max f_i(x) \\ x \in D \\ f_j(x) \geq \epsilon_j, \forall i \neq j, j = \overline{1..k} \end{cases}$$

la perturbation des valeurs seuils ϵ_j permet de générer un ensemble des solution efficace .

Théorème 3.10 *La solution optimale pour le problème (P_ϵ) est Pareto optimale pour (MOP).*

Théorème 3.11 *Un point $x^* \in D$ est efficace pour le (MOP) si seulement si :*
x^* est solution optimale de (P_ϵ) pour chaque $i\epsilon\ \{1..k\}$ où $\epsilon_j = f_i(x^*)$.

Remarque 3.3

— *Les paramètres ϵ_j sont choisis par le décideur.*

— *En faisant varier les ϵ_j dans les deux méthodes, on peut générer un sous-ensemble de l'ensemble Pareto du (MOP).*

Exemple 3.6 *Résolution du problème (MOP) suivant avec la méthode $\epsilon -$ contraintes en considérant le critère 3 comme prioritaire et $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) = (1,3)$.*

$$(MOP)\begin{cases} \min f(x) = (f_1(x) = -3x_1 + x_2; f_2(x) = x_1 + 2x_2; f_3(x) = 2x_1 + x_2) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

$$(P_\epsilon)\begin{cases} \min f_{i=3}(x) \\ x \in D \\ f_j(x) \leq \varepsilon_j, \forall j \neq 3 \left(j = \overline{1.3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 \\ x_2 \leq 2 \\ f_1(x) \leq \epsilon_1 \Rightarrow -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ f_2(x) \leq \epsilon_2 \Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

En résolvant (P_ϵ) par le simplexe, sa résolution optimale $x^* = (x_1, x_2) = (0,0)^{'}$.
Donc d'après le théorème 3.10, est Pareto-optimale pour le problème (MOP).

CONCLUSION

Dans les trente dernières années, la plupart des travaux réalisés dans le domaine de la recherche opérationnelle ont porté sur la programmation linéaire multi objectifs. Les raisons principales de cet intérêt sont d'une part le développement de la programmation linéaire mono-objectif en recherche opérationnelle et la facilité relative de traiter de tels problèmes, et d'autre part l'abondance de cas pratiques pouvant être formulés sous cette forme.

4 PROGRAMMATION LINÉAIRE FLOUE MULTI-OBJECTIFS (DE LA PROGRAMMATION MONO-OBJECTIF VERS LE MULTI-OBJECTIFS)

Introduction

En programmation linéaire mono-objectif ou multi-objectifs, on peut se trouver face à des situations où les données sont incertaines ou imprécises de nature floue et des cas où les contraintes et/ou les objectifs ne sont pas des impératifs stricts. Aiche.F [2013.]

On distingue deux cas entre autre :

— Le cas où les inégalités (ou égalités) sont relaxées, on parlera du programme flexible.

— Le cas où les données imprécises sont représentées par des ensembles flous on parlera de programmation robuste.Kacher.F [2006.]

4.1 Programmation flexible

4.1.1 Programmation linéaire flexible

Kacher.F [2006.]

Décision dans un environnement flou

La décision qui doit satisfaire l'objectif et les m contraintes est donc représentées par un ensemble flou, l'intersection de ces derniers et dont la fonction d'appartenance est μ_D telle que :

$$\mu_D(x) = \min\left(\mu_i\left(x\right)/i = \overline{0..m}\right)$$

La meilleure décision est déterminée par la résolution du problème suivant :

$$\max\left(\mu_D\left(x\right)/x \in X\right) = \max\left\{\min\left(\mu_i\left(x\right)/i = \overline{0..m}\right)/x \in X\right\}.$$

Résolution d'un programme linéaire flexible

Aiche.F [2013.] Kebbal.S [2018] Kacher.F [2006.]

Considérons le programme linéaire flexible suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \widetilde{\max} Z = c'x \\ sc \\ A_i x \tilde{\theta} b_i, \quad i = \overline{1..m} \\ x \geq 0 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

$\tilde{\theta} \in \left\{\tilde{\leq}, \tilde{=}, \tilde{\geq}\right\}$ sont les versions flexibles de $\leq, =, \geq$ respectivement.

La notation $\sim$ désigne le fait que l'objectif et les contraintes ne sont pas des impératifs stricts.

Selon Zimermann, le programme (4.1) peut s'interpréter comme suit :

$x \in (\mathbb{R}^+)^n$ telle que :

$$\begin{cases} c'x \tilde{\leq} Z_0 \\ sc \\ A_i x \tilde{\theta} b_i, \quad i = \overline{1..m} \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Z_0 : est une valeur fixée.

L'objectif flou et les contraintes flous peuvent être représentés par les ensembles flous respectifs U_0 et U_i, $i = \overline{1..m}$ dont les fonctions d'appartenance sont respectivement μ_0 et μ_i, $i = \overline{1..m}$ définies selon que $\tilde{\theta}$ est $\tilde{\leq}$,$\tilde{=}$, ou $\tilde{\geq}$ comme suit :

— $\tilde{\theta}$ est $\tilde{\leq}$:

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 \quad si\ A_i \leq b_i \\ 1 - \frac{b_i - A_i x}{d_i} \quad si\ b_i \leq A_i x \leq b_i + d_i \\ 0 \quad si\ A_i x > b_i + d_i \\ i = \overline{1..m} \end{cases}$$

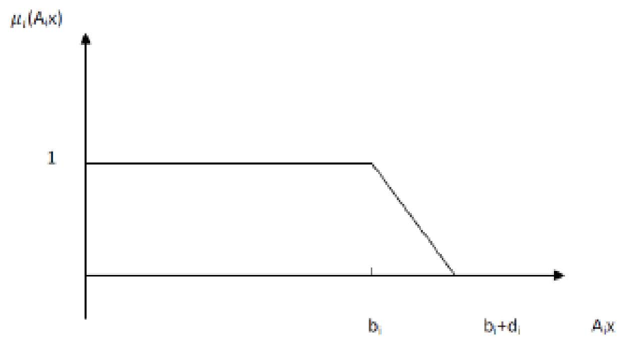


FIGURE 4.1 – *Contraintes du type* $A_i(x) \tilde{\leq} b_i$, $i = \overline{1..m}$

— $\tilde{\theta}$ est $\tilde{=}$:

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 \quad si\ A_i x = b_i \\ \\ 1 - \frac{A_i x - b_i}{d_i} \quad si\ b_i < A_i x \le b_i + d_i \\ \\ 1 - \frac{b_i - A_i x}{d_i} \quad si\ b_i - d_i \le A_i x \le b_i \\ \\ 0 \quad si\ A_i x > b_i + d_i,\ A_i x < b_i - d_i \\ i = \overline{1..m} \end{cases}$$

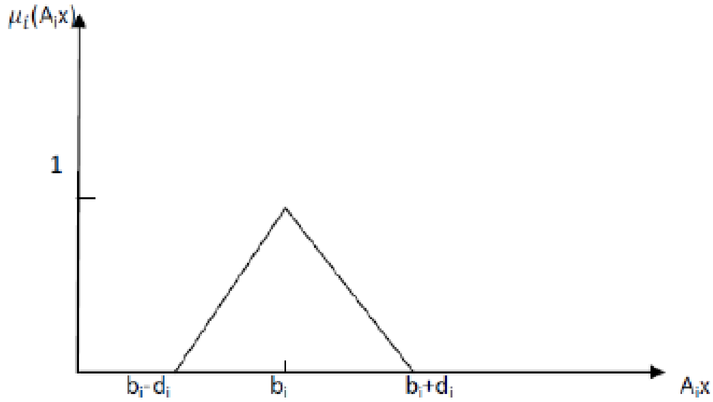


Figure 4.2 – *Contraintes du type* $A_i(x) \tilde{=} b_i,\ i = \overline{1..m}$

— $\tilde{\theta}$ est $\tilde{\geq}$:

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 \quad si\ \ A_i x \ge b_i \\ \\ 1 - \frac{b_i - A_i x}{d_i} \quad si\ \ b_i - d_i \le A_i x \le b_i \\ \\ 0 \quad si\ \ A_i x < b_i - d_i \\ \\ i = \overline{1..m} \end{cases}$$

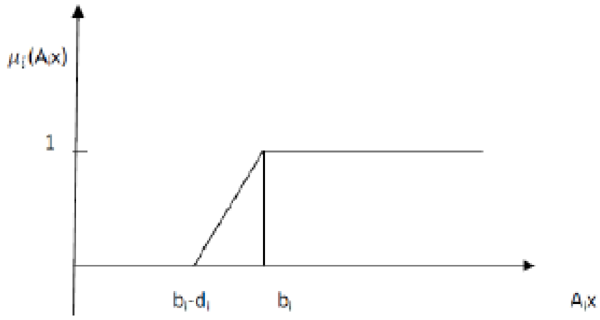


FIGURE 4.3 – *Contraintes du type $A_i(x) \tilde{\geq} b_i,\ i = \overline{1..m}$*

Remarque 4.1 *La méthode flexible joue un rôle identique à la fonction objectif et aux contraintes, on détermine la fonction d'appartenance de la fonction objectif de la même manière que les contraintes. Il faut fixer un objectif à atteindre et le degré de satisfaction.*

Méthode d'agrégation des degrés de satisfaction

Il s'est basé sur le principe d'agrégation de Bellman et Zadeh pour déduire une fonction objectif finale à maximiser. Cette fonction exprime le degré total de satisfaction $\mu_D(x) = \min\left(\mu_i(x) / i = \overline{0..m}\right)$.

Chercher la solution qui réalise le meilleur degré de satisfaction. La solution optimale est alors déterminée par résolution du problème déterministe :

$$\max_{x \geq 0} \left(\mu_D(x)\right)$$

Qui est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z = \lambda \\ \quad S.c \\ \lambda \leq \mu_i(x) \\ \qquad\qquad\quad ,\ i = \overline{0..m} \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 4.1 *On considère le programme flexible suivant :*

$$\left\{\begin{array}{c} \widetilde{\max}\ Z = x_1 + 3x_2 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 \tilde{\geq} -4 \\ \\ 5x_2 \tilde{\leq} 2 \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right. \tag{4.3}$$

On détermine les fonctions d'appartenance de l'objectif et des contraintes sachant que l'objectif n'excède la valeur $Z_0 = 4$ et que les écarts de tolérance de l'objectif et des contraintes sont respectivement $d_0 = 1$, $d_1 = 2$ $d_2 = 3$.

Selon Zimermann, le programme devient :

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 \tilde{\leq} 4 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 \tilde{\geq} -4 \\ \\ 5x_2 \tilde{\leq} 2 \\ \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Transformation de l'objectif :

$$\mu_0(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 \quad si\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ \\ 1 - \frac{x_1+3x_2-4}{1} \quad si\ 4 \leq x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ \\ 0 \quad si\ x_1 + 3x_2 > 5 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \mu_0(x) = \left\{\begin{array}{c} 1 \quad si\ \ x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ \\ -x_1 - 3x_2 + 5 \quad si\ \ 4 \leq x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ \\ 0 \quad si\ \ x_1 + 3x_2 > 5 \end{array}\right.$$

Transformation de la 1ère contrainte :

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ 1 - \frac{-4-2x_1+x_2}{2} & si\ \ -6 \leq 2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 0 & si\ \ 2x_1 - x_2 \leq -6 \end{cases}$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ \frac{2x_1-x_2+6}{2} & si\ \ -6 \leq 2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 0 & si\ 2x_1 - x_2 \leq -6 \end{cases}$$

Transformation de la 2ème contrainte :

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 5x_2 \leq 2 \\ 1 - \frac{5x_2-2}{3} & si\ \ 2 \leq 5x_2 \leq 5 \\ 0 & si\ \ 5x_2 > 5 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 5x_2 \leq 2 \\ \frac{-5x_2+5}{3} & si\ \ 2 \leq 5x_2 \leq 5 \\ 0 & si\ \ 5x_2 > 5 \end{cases}$$

Le problème déterministe $\left(P^D\right)$ *associé à* (4.3) *est :*

$$\left(P^D\right) = \begin{cases} \max \lambda \\ SC \\ \lambda \leq \frac{-x_1-3x_2+5}{1} \\ \lambda \leq \frac{2x_1-x_2+6}{2} \\ \lambda \leq \frac{-5x_2+5}{3} \\ 0 \leq \lambda \leq 1\,, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$
(P^D) = \begin{cases}
\max \lambda \\
SC \\
\lambda + x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\
2\lambda - 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
3\lambda + 5x_2 + x_5 = 5 \\
\lambda + x_6 = 1 \\
x_j \geq 0, j = \overline{1..6},\ \lambda > 0
\end{cases}
$$

Résolution du problème (P^D) par la méthode du simplexe.

c			0	0	0	0	0	0	1	θ_j
c_b	$base$	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ	
0	x_3	5	1	3	1	0	0	0	1	5
0	x_4	6	-2	1	0	1	0	0	2	3
0	x_5	5	0	5	0	0	1	0	3	$\frac{5}{3}$
0	x_6	1	0	0	0	0	0	1	1	1
		Δ_j	0	0	0	0	0	0	-1	
0	x_3	4	1	3	1	0	0	-1	0	
0	x_4	4	-2	1	0	1	0	-2	0	
0	x_5	2	0	5	0	0	1	-3	0	
1	λ	1	0	0	0	0	0	1	1	
		Δ_j	0	0	0	0	0	1	0	

Infinité de solutions optimales d'après l'algorithme.

4.2 Programmation robuste

La programmation robuste couvre des problèmes où les coefficients des contraintes sont des données imprécises et l'inégalité (égalité) est remplacée par inclusion $\subseteq$ .Luhandjula.M.K. [2004.] Kebbal.S [2018]

4.2.1 Programmation linéaire inexacte (Solster)

Un programme linéaire inexact est un programme de la forme :

$$(P_{S_0})\begin{cases} Z = \max c'x \\ \\ x_1K_1 + x_2K_2 + \ldots + x_nK_n\,[\subseteq]\,K \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1\ldots n \end{cases}$$

Où : (K_j) ; $j = 1\ldots n$ et K sont des ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$; $\subseteq$ est l'inclusion entre ensemble et + représente l'addition ensembliste, elle est définie comme suit : Soient A et B deux ensembles, alors $A + B = \{a + b, a \in A \quad et \quad b \in B\}$.

4.2.2 Résolution d'un programme linéaire robuste (flou)

Un programme linéaire inexact est un programme de la forme

$$(P_R)\begin{cases} \max c'x \\ \\ S.C \\ x_1 \odot \tilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \tilde{A}_2 \oplus \ldots \oplus x_n \odot \tilde{A}_n\,[\subseteq]\,\tilde{b} \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1\ldots n \end{cases}$$

Où : $(\tilde{A}_j)$, $j = 1\ldots n$ sont des sous-ensembles flous de $\mathbb{R}$ et « $\oplus$» addition des ensembles flous et $[\subseteq]$ inclusion entre ensembles flous. On représente l'ensemble des contraintes de (P_R) par :

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n \quad / x_1 \odot \tilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \tilde{A}_2 \oplus \ldots \oplus x_n \odot \tilde{A}_n\,[\subseteq]\,\tilde{b} \quad / x \geq 0\right\}$$

Théorème 4.1 Bierlaire.M [2006.]
On dit que $x_0 \in E$, est optimal pour (P_R) , si et seulement si $x_0 \in E$ est optimal pour le programme suivant :

$$(P_{R_1})\begin{cases} Z = \max c'x \\ \\ x_1\tilde{A}_1^{\alpha} + x_2\tilde{A}_2^{\alpha} + \ldots + x_n\tilde{A}_n^{\alpha}\,[\subseteq]\,\tilde{b}^{\alpha},\ \ \alpha \in [0,1] \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1\ldots n \end{cases}$$

(P_{R_1}) est un programme semi-infini, c'est-à-dire un programme avec une infinité de contraintes. En supposant que les images des fonctions d'appartenances des sous-ensembles flous sont discrètes et finies, on obtient un programme linéaire avec un nombre fini de contraintes comme suit :

Proposition 4.1 *Luhandjula.M.K. [2004.]*
Si

$Im\mu_{\tilde{A}_j} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < 1$, alors :

$$x \in E = \left\{x \in \mathbb{R}^n \quad / x_1 \odot \tilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \tilde{A}_2 \oplus \ldots \oplus x_n \odot \tilde{A}_n \, [\subseteq] \, \tilde{b} \quad / x \geq 0\right\}$$

Si et seulement si

$$x \in E' = \left\{x_1 \tilde{A}_1^{\alpha_K} + x_2 \tilde{A}_2^{\alpha_k} + \cdots + x_n \tilde{A}_n^{\alpha_K} \subseteq \tilde{b}^{\alpha_k}, \qquad k = 1 \ldots p, \quad x_j \geq 0, j = 1 \ldots n\right\}$$

Cas des nombres flous

Aiche.F [2013.]

Si les composantes $\tilde{a}_{ij}$ de $\tilde{A}$ et $\tilde{b}_i$ de $\tilde{b}$ sont des nombres flous dont les ensembles de niveau respectifs sont des intervalles compacts.

Alors, le programme (P_{R_1}) s'écrit sous la forme suivante

$$(P_{R_2}) \begin{cases} Z = \max c'x \\ \left[\underline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}, \overline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1}\right] x_1 + \left[\underline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}, \overline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1}\right] x_2 + \ldots + \left[\underline{\tilde{a}}_{1n}^{\alpha_1}, \overline{\tilde{a}}_{1n}^{\alpha_1}\right] x_n \, [\subseteq] \left[\underline{\tilde{b}}_1^{\alpha_1}, \overline{\tilde{b}}_1^{\alpha_1}\right] \\ \left[\underline{\tilde{a}}_{21}^{\alpha_2}, \tilde{a}_{21}^{\alpha_2}\right] x_1 + \left[\underline{\tilde{a}}_{22}^{\alpha_2}, \overline{\tilde{a}}_{22}^{\alpha_2}\right] x_2 + \ldots + \left[\underline{\tilde{a}}_{2n}^{\alpha_2}, \overline{\tilde{a}}_{2n}^{\alpha_2}\right] x_n \, [\subseteq] \left[\underline{\tilde{b}}_2^{\alpha_2}, \overline{\tilde{b}}_2^{\alpha_2}\right] \\ \vdots \\ \left[\underline{\tilde{a}}_{m1}^{\alpha_p}, \overline{\tilde{a}}_{m1}^{\alpha_p}\right] x_1 + \left[\underline{\tilde{a}}_{m2}^{\alpha_p}, \overline{\tilde{a}}_{n2}^{\alpha_p}\right] x_2 + \ldots + \left[\underline{\tilde{a}}_{mn}^{\alpha_p}, \overline{\tilde{a}}_{mn}^{\alpha_p}\right] x_n \, [\subseteq] \left[\underline{\tilde{b}}_m^{\alpha_0}, \overline{\tilde{b}}_m^{\alpha_p}\right] \\ x_j \geq 0, j = 1 \ldots n, \quad k = 1 \ldots p \end{cases}$$

Où :

— $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k} = \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) \geq \alpha_k\right\}$.

— $\underline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k} = \inf \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) \geq \alpha_k\right\}$.

— $\overline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k} = \sup \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) \geq \alpha_k\right\}$.

— $\tilde{b}_{ij}^{\alpha_k} = \left\{ x \in \mathbb{R} \quad / \mu_{\tilde{b}_i}(x) \geq \alpha_k \right\}$.

— $\underline{\tilde{b}}_{ij}^{\alpha_k} = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \quad / \mu_{\tilde{b}_i}(x) \geq \alpha_k \right\}$.

— $\overline{\tilde{b}}_{ij}^{\alpha_k} = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \quad / \mu_{\tilde{b}_i}(x) \geq \alpha_k \right\}$.

Remarque 4.2 *Kebbal.S [2018]*

Puisque $\tilde{a}_{ij}$ de et $\tilde{b}_i$ sont des nombres flous donc ce sont des ensembles flous convexes normalisés de $\mathbb{R}$. Les ensembles $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k}$ et $\tilde{b}_i^{\alpha_k}$ sont des convexes dans $\mathbb{R}$, et par hypothèse $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k}$ et $\tilde{b}_i^{\alpha_k}$ sont compacts.

Par conséquent : $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k} = \left[\underline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k}, \overline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k} \right]$,$\tilde{b}_i^{\alpha_k} = \left[\underline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k}, \overline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k} \right]$

Exemple 4.2 *En posant $\alpha = 0.6$ et en utilisant l'algorithme du simplexe, on trouve la solution optimale du problème*

$$\max Z_1 = 3x_1 + x_2$$

$$\max Z_2 = x_1 + 3x_2$$

$$S.C \begin{cases} \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\alpha}_2 x_2 \subseteq \tilde{b} \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Sachant que :
$\tilde{\alpha}_1 = \{(2/0.4), (1/0.9), (5/0.2), (5/0.7)\}$.

$\tilde{\alpha}_2 = \{(1/0.3), (3/0.6), (-2/0.1), (4/0.8)\}$.

$\tilde{b} = \{(5/0.6), (2/0.1), (4/0.2), (-3/0.7)\}$.
On aura :

$$\max Z_1 = 3x_1 + x_2$$

$$\max Z_2 = x_1 + 3x_2$$

$$S.C \begin{cases} [1,5]\, x_1 + [3,4]\, x_2 \subseteq [-3,5] \\ \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z_1 = 3x_1 + x_2$$

$$\max Z_2 = x_1 + 3x_2$$

$$\Rightarrow \quad S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq -3 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z_1 = 3x_1 + x_2$$

$$\max Z_2 = x_1 + 3x_2$$

$$\Rightarrow \quad S.C \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1 \dots 5 \end{cases}$$

Initialisation :

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	3	1	0	0
			C^2	1	3	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	3	-1	-3	1	0
0	0	a_4	5	5	4	0	1
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = 0 \\ Z_0^2 = 0 \end{pmatrix}$	Δ^1	-3	-1	0	0
			Δ^2	-1	-3	0	0

Les composantes du vecteur des estimations sont données par : $\Delta_j = c'_B a_j - c_j, j = 1, \dots, 5.$

Il n'existe pas un $i \in \{1.2\}$ *tel que* $\Delta_j^i \geq 0 \ \forall j \in J_H = \{1.2\}$ *donc aucun objectif n'est à son maximum.*

$\Delta_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow x^1 = (0, 0, 3, 5)$ *est dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{5}{5}\right\} = 1$*(atteint pour* $r = 4$*)*

$\theta_2 = \min\left\{\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}$ *(atteint pour* $r = 4$*)*

$$\begin{cases} \theta_1\Delta_1 = 1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \theta_2\Delta_2 = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} \\ \frac{-15}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_1\Delta_1$ est incomparable a $\theta_2\Delta_2$
Introduisons a_1 dans la base à la place de a_4, on aura alors le tableau suivant :

		x		x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	3	1	0	0
			C^2	1	3	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	4	0	$\frac{-11}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
3	1	a_1	1	1	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = 3 \\ Z_0^2 = 1 \end{pmatrix}$	Δ^1	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
			Δ^2	0	$\frac{-11}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Il existe un $i = 1$ tel que tel que $\Delta_j^i > 0$ $\forall j \epsilon J_H$ ce qui implique que le premier critère est à son maximum.

Le point extrême $x^2 = (1,0,4,0)$ est non dominé.

$\theta_2 = \min\left\{\frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{4}$ *(atteint pour $r = 1$).*

$\theta_4 = \min\left\{\frac{5}{4}, 5\right\} =$ *(atteint pour $r = 3$).*

$$\begin{cases} \theta_2\Delta_2 = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-11}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{-11}{4} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4\Delta_4 = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_2\Delta_2$ est incomparable a $\theta_4\Delta_4$
Introduisons a_2 dans la base à la place de a_1, on aura alors le tableau suivant :

		x		x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	3	1	0	0
			C^2	1	3	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	$\frac{27}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$
1	3	a_2	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = \frac{5}{4} \\ Z_0^2 = \frac{15}{4} \end{pmatrix}$	Δ^1	$\frac{-7}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
			Δ^2	$\frac{11}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$

Il existe un $i = 2$ *tel que tel que* $\Delta_j^i > 0\ \forall j \epsilon J_H$ *ce qui implique que le deuxième critère est à son maximum.*

Le point extrême $x^3 = \left(0, \frac{5}{4}, \frac{9}{5}, 0\right)$ *est non dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{27}{11}, 1\right\} = 1$ *(atteint pour* $r = 2$*).*

$\theta_2 = \min\left\{\frac{27}{3}, 5\right\} = 5$ *(atteint pour* $r = 2$*).*

$$\begin{cases} \theta_1 \Delta_1 = 1 \begin{pmatrix} \frac{-7}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_2 \Delta_2 = 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_1 \Delta_1 < \theta_4 \Delta_4$

Donc a_1 *rentre dans la base et* a_3 *sort de la base d'après la remarque, cella conduit a une base déjà explore l'introduction de la colonne* a_4 *en base conduit a une solution dominée*

donc le processus s'arrête.

Conclusion nous avons deux solution efficaces .

4.3 Chance-constrained programming with fuzzy coefficients (pseudo stochastique) :

Dubois Dubois.D [1987.] a montré que la méthode «Chance- constrained programming» peut être appliquée aux contraintes en présence d'intervalle flous. Cette dernière permet de transformer les contraintes floues en des contraintes déterministes équivalentes, par exemple :

Dubois a remplacé dans « Chance-constrained programming» due à Charnes et Cooper Coper.W [1959.], probabilité par :

— Possibilité.

— Nécessité.

Compte tenu des relations existantes entre possibilité et nécessité (définies dans chapitre 1) à savoir que nécessité d'un ensemble flou est inférieure à sa possibilité, il a été déduit que les contraintes résultantes du deuxième cas sont plus fortes que celles résultant du premier, donc on distingue entre les deux comme suit :

1. **Contraintes faibles** :

$$(P_p)^{'} \begin{cases} \max cx \\ \\ pos(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b_i}) \geq \alpha_i,\ i = \overline{1..m} \\ \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1..n} \end{cases}$$

2. **Contraintes fortes :**

$$(P_n)^{'} \begin{cases} \max cx \\ \\ nec(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b_i}) \geq \alpha_i,\ i = \overline{1..m} \\ \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1..n} \end{cases}$$

Néanmoins, pour les deux autres possibilités notées pos_3 et nec_2, les contraintes suivantes sont intermédiaires :

— Avec pos_3 :

$$(P_{p3})^{'} \begin{cases} \max cx \\ \\ pos_3(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b_i}) \geq \alpha_i,\ i = \overline{1..m} \\ \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1..n} \end{cases}$$

— Avec nec_2 :

$$(P_{n2})^{'} \begin{cases} \max cx \\ \\ nec_2(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b_i}) \geq \alpha_i,\ i = \overline{1..m} \\ \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1..n} \end{cases}$$

Remarque 4.3 *D'après les préliminaires on a : soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ deux ensembles flous d'un même référentiel X quel que soit $\alpha \in]0,1]$, on a :*

— $(\tilde{A} + \tilde{B})^{\alpha} = \tilde{A}^{\alpha} + \tilde{B}^{\alpha}$.

— $(\lambda \tilde{A})^{\alpha} = \lambda \tilde{A}^{\alpha}$.

En vertu des propriétés de *pos*,*nec*,pos_3 et nec_2 qui consistent à transformer les inégalités entre ensemble flous en inégalités entre nombres réels Dubois.D [1987.] les contraintes ci-dessus énumérées peuvent s'écrire sous formes linéaires déterministes comme suit :

1. Cas des contraintes faibles :

$$\left(P_p^c\right)'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \underline{\tilde{a}_{ij}^{\alpha_i}} x_j \leq \overline{\tilde{b}}_i^{\alpha_i} & , \quad i = \overline{1..m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1..n} \end{cases} \quad \text{Où } \tilde{a}_{ij}^{\alpha_i} = [\underline{\tilde{a}_{ij}^{\alpha}}, \overline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha}]\ \tilde{b}_i^{\alpha} = [\underline{\tilde{b}}_i^{\alpha}, \overline{\tilde{b}}_i^{\alpha}].$$

2. cas de contraintes fortes :

$$\left(P_n^c\right)'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \overline{\tilde{a}}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \underline{\tilde{b}}_i^{1-\alpha_i} & , \quad i = \overline{1..m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1..n} \end{cases} \quad \text{ou } \tilde{a_{ij}}^{1-\alpha_i} = [\underline{a}_{ij}^{1-\alpha}, \overline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha}]$$

$\tilde{b}_i^{1-\alpha} = [\underline{\tilde{b}}_i^{1-\alpha}, \overline{\tilde{b}}_i^{1-\alpha}]$

3. cas des contraintes intermédiaires :

- En utilisant $pos3$:

$$\left(P_{p3}\right)' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \overline{\tilde{a}}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \overline{\tilde{b}}^{\alpha_i} & , \quad i = \overline{1..m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1..n} \end{cases}$$

- En utilisant $nec2$:

$$\left(P_{n2}\right)'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \underline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \underline{\tilde{b}}^{1-\alpha_i} & , \quad i = \overline{1..m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1..n} \end{cases}$$

Exemple 4.3 *Résoudre le programme linéaire flou suivant :*

$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ \max 4x_1 + x_2 \\ s.c \begin{cases} \tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{5} \\ \tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{4} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.4}$$

$\tilde{m}, m = 1, 2, 4, 5$ *sont des intervalles flous dont la fonction d'appartenance :*

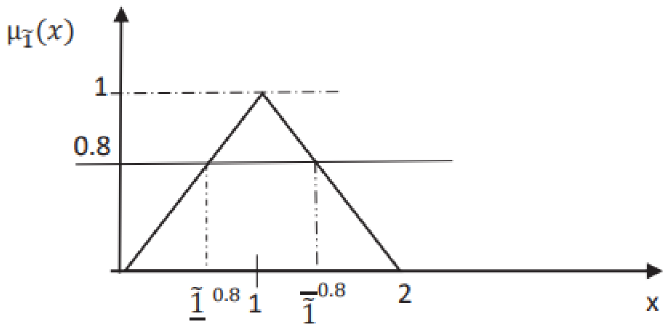
$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq m-1 \\ x-(m-1) & si\ x \in]m-1, m] \\ -x+m+1 & si\ x \in]m, m+1] \\ 0 & si\ x > m+1 \end{cases}$$

On a pour

— $m = 1$:

$$\mu_{\tilde{1}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ x & si\ x \in]0, 1] \\ -x+2 & si\ x \in]1, 2] \\ 0 & si\ x > 2 \end{cases}$$

On trace le graphe pour obtenir $\underline{\tilde{1}}^{\alpha}$ *et* $\overline{\tilde{1}}^{\alpha}$ *avec* $\alpha = 0.8$ $\tilde{1}^{\alpha} = \left[\underline{\tilde{1}}^{\alpha}, \overline{\tilde{1}}^{\alpha}\right]$



pour déterminer $\underline{\tilde{1}}^{0.8}$ *on a* $x \in]0, 1]$

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations : $y = x$ *et* $y = 0.8$

$\underline{\tilde{1}}^{0.8} = 0.8$.

pour déterminer $\overline{\tilde{1}}^{0.8}$ *on a* $x \in]1, 2]$ *:*

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations :

$y = -x + 2$ *et* $y = 0.8$

$-x + 2 = 0.8$

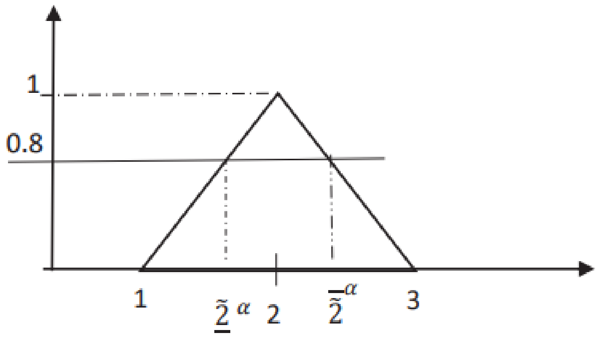
donc $x = 1.2$

d'où $\overline{\tilde{1}}^{0.8} = 1.2$, $\tilde{1}^{0.8} = [0.8, 1.2]$

— $m = 2$:

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 1 \\ x-1 & si\ x \in]1,2] \\ -x+3 & si\ x \in]2,3] \\ 0 & si\ x > 3 \end{cases}$$

On trace le graphe pour obtenir $\underline{\tilde{2}}^{\alpha}$ *et* $\overline{\tilde{2}}^{\alpha}$ *avec* $\alpha = 0.8$,$\tilde{2}^{\alpha} = \left[\underline{\tilde{2}}^{\alpha}, \overline{\tilde{2}}^{\alpha}\right]$



pour déterminer $\underline{\tilde{2}}^{0.8}$*on a* $x \in]1,2]$ *:*

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x - 1$*et* $y = 0.8$ *qu'on peut déterminer comme suit :*

$$x - 1 = 0.8 \Rightarrow x = 1.8$$

d'où :$\underline{\tilde{2}}^{0.8} = 1.8$

pour déterminer $\overline{\tilde{2}}^{0.8}$ *on a* $x \in]2,3]$ *:*

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations

$y = -x + 3$ *et* $y = 0.8$

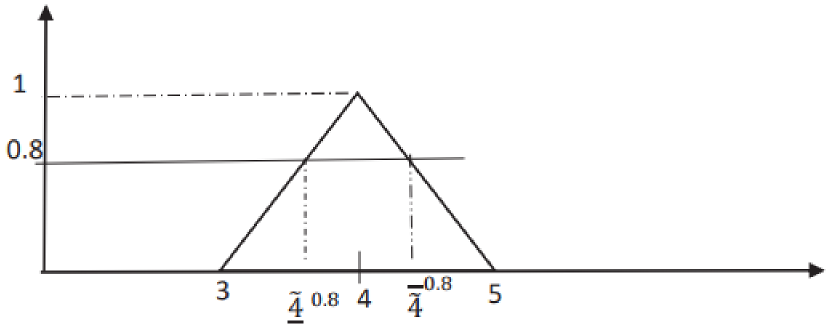
d'où $x = 2.2$

d'où $\overline{\tilde{2}}^{0.8} = 2.2$ *et donc* $\tilde{1}^{0.8} = [1.8, 2.2]$

— $m = 4$

$$\mu_{\tilde{4}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 3 \\ x-3 & si\ x \in]3,4] \\ -x+5 & si\ x \in]4,5] \\ 0 & si\ x > 5 \end{cases}$$

On trace le graphe pour obtenir $\underline{\tilde{4}}^{\alpha}$ *et* $\overline{\tilde{4}}^{\alpha}$ *avec* $\alpha = 0.8$,$\tilde{4}^{\alpha} = \left[\underline{\tilde{4}}^{\alpha}, \overline{\tilde{4}}^{\alpha}\right]$



pour déterminer $\underline{\tilde{4}}^{0.8}$ *on a* $x \in]3,4]$
C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations
$y = x - 3$ *et* $y = 0.8$
qu'on peut déterminer comme suit :

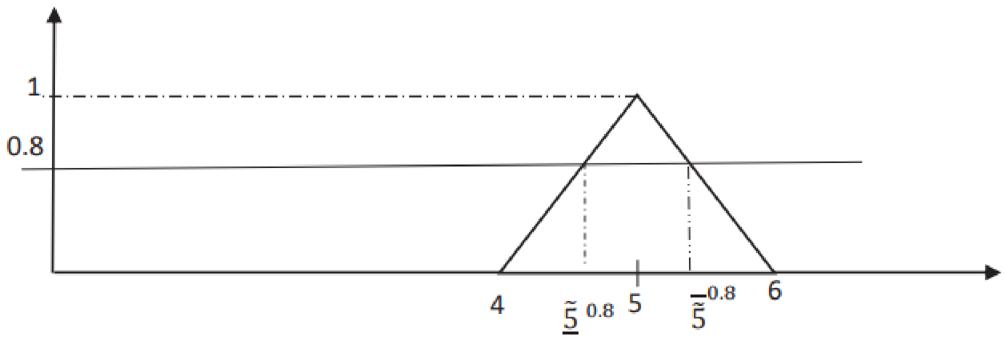
$$x - 3 = 0.8 \Rightarrow x = 3.8$$

d'où : $\underline{\tilde{4}}^{0.8} = 3.8$
pour déterminer $\overline{\tilde{4}}^{0.8}$ *on a* $x \in]4,5]$ *:*

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations
$y = -x + 5$ *et* $y = 0.8$ *d'où* $x = 4.2$
d'où $\overline{\tilde{4}}^{0.8} = 4.2$ *et donc* $\tilde{4}^{0.8} = [3.8, 4.2]$
— $m = 5$

$$\mu_{\tilde{5}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 4 \\ x - 4 & si\ x \in]4,5] \\ -x + 6 & si\ x \in]5,6] \\ 0 & si\ x > 6 \end{cases}$$

On trace le graphe pour obtenir $\underline{\tilde{5}}^{\alpha}$ *et* $\overline{\tilde{5}}^{\alpha}$ *avec* $\alpha = 0.8$ *,*$\tilde{5}^{\alpha} = \left[\underline{\tilde{5}}^{\alpha}, \overline{\tilde{5}}^{\alpha}\right]$



pour déterminer $\underline{\tilde{5}}^{0.8}$ *on a* $x \in]4,5]$

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x - 4$ *et* $y = 0.8$ *qu'on peut déterminer comme suit :*

$$x - 4 = 0.8 \Rightarrow x = 4.8$$

d'où : $\underline{\tilde{5}}^{0.8} = 4.8$

pour déterminer $\overline{\tilde{5}}^{0.8}$ *on a* $x \in]5,6]$ *:*

C'est l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = -x + 6$ *et* $y = 0.8$ *d'où* $x = 5.2$

d'où $\overline{\tilde{5}}^{0.8} = 5.2$ *et donc* $\tilde{5}^{0.8} = [4.8, 5.2]$

— ***Pour les contraintes fortes, en appliquant nécessité on calcule :***

$\tilde{1}^{1-\alpha}$,$\tilde{2}^{1-\alpha}$,$\tilde{4}^{1-\alpha}$,$\tilde{5}^{1-\alpha}$, $\alpha = 0.8$

1. $\tilde{1}^{1-\alpha} = [\underline{\tilde{1}}^{1-\alpha}, \overline{\tilde{1}}^{1-\alpha}] \Rightarrow \tilde{1}^{1-0.8} = [\underline{\tilde{1}}^{0.2}, \overline{\tilde{1}}^{0.2}]$
   $\underline{\tilde{1}}^{0.2} = 0.2$ *et* $\overline{\tilde{1}}^{0.2} = 1.8$, $\tilde{1}^{0.2} = [0.2, 1.8]$

2. $\tilde{2}^{1-\alpha} = [\underline{\tilde{2}}^{1-\alpha}, \overline{\tilde{2}}^{1-\alpha}] \Rightarrow \tilde{2}^{1-0.8} = [\underline{\tilde{2}}^{0.2}, \overline{\tilde{2}}^{0.2}]$
   $\underline{\tilde{2}}^{0.2} = 1.2$ *et* $\overline{\tilde{2}}^{0.2} = 2.8$, $\tilde{2}^{0.2} = [1.2, 2.8]$

3. $\tilde{4}^{1-\alpha} = [\underline{\tilde{4}}^{1-\alpha}, \overline{\tilde{4}}^{1-\alpha}] \Rightarrow \tilde{4}^{1-0.8} = [\underline{\tilde{4}}^{0.2}, \overline{\tilde{4}}^{0.2}]$
   $\underline{\tilde{4}}^{0.2} = 3.2$ *et* $\overline{\tilde{4}}^{0.2} = 4.8$, $\tilde{4}^{0.2} = [3.2, 4.8]$

4. $\tilde{5}^{1-\alpha} = [\underline{\tilde{5}}^{1-\alpha}, \overline{\tilde{5}}^{1-\alpha}] \Rightarrow \tilde{5}^{1-0.8} = [\underline{\tilde{5}}^{0.2}, \overline{\tilde{5}}^{0.2}]$
   $\underline{\tilde{5}}^{0.2} = 4.2$ *et* $\overline{\tilde{5}}^{0.2} = 5.8$, $\tilde{5}^{0.2} = [4.2, 5.8]$

— *En appliquant possibilité, On aura le programme suivant :*

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} pos\left(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{5}\right) \geq 0.8 \\ \\ pos\left(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{4}\right) \geq 0.8 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \left(P_1^p\right)$$

Qui s'écrit en utilisant les propriétés de possibilités comme suit :

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} pos\underline{\left(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2\right)^{0.8}} \leq \bar{\tilde{5}}^{0.8} \\ \\ pos\underline{\left(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2\right)^{0.8}} \leq \bar{\tilde{4}}^{0.8} \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \left(P_1^p\right)$$

Et :

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} \underline{\tilde{1}}^{0.8} x_1 + \underline{\tilde{2}}^{0.8} x_2 \leq \bar{\tilde{5}}^{0.8} \\ \\ \underline{\tilde{2}}^{0.8} x_1 + \underline{\tilde{1}}^{0.8} x_2 \leq \bar{\tilde{4}}^{0.8} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \left(P_1^n\right)$$

En remplaçant $\underline{\tilde{1}}^{0.8}$,$\underline{\tilde{2}}^{0.8}$,$\bar{\tilde{5}}^{0.8}$,$\bar{\tilde{4}}^{0.8}$ pour leurs valeurs déterminer ci-dessus, on obtient le programme linéaire $\left(P_1^d\right)$ suivant :

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} 0.8x_1 + 1.8x_2 \leq 5.2 \\ \\ 1.8x_1 + 0.8x_2 \leq 4.2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \left(P_1^d\right)$$

Pour résoudre $\left(P_1^d\right)$ *on applique la méthode du simplexe multi objectif :*
Transformons le programme sous forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3,x_4

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} 0.8x_1 + 1.8x_2 + x_3 = 5.2 \\ \\ 1.8x_1 + 0.8x_2 + x_4 = 4.2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \left(P_1^d\right)$$

On trace le 1er tableau :

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	5.2	0.8	1.8	1	0
0	0	a_4	4.2	1.8	0.8	0	1
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = 0 \\ Z_0^2 = 0 \end{pmatrix}$	Δ^1	-1	-2	0	0
			Δ^2	-4	-1	0	0

Il n'existe pas un $i \in \{1.2\}$ *tel que o* $\Delta_j^i \geq 0 \; \forall j \in J_H = \{1.2\}$ *donc aucun objectif n'est à son maximum.*

$\Delta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow x^1 = (0, 0, 5.2, 4.2)$ *est dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{5.2}{0.8}, \frac{4.2}{1.8}\right\} = \frac{4.2}{1.8}$*(atteint pour* $r = 4$*)*

$\theta_2 = \min\left\{\frac{5.2}{1,8}, \frac{4.2}{0.8}\right\} = \frac{5.2}{1.8}$ *(atteint pour* $r = 3$*)*

$$\begin{cases} \theta_1\Delta_1 = \frac{4.2}{1.8}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4.2}{1.8} \\ \frac{-16.8}{1.8} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_2\Delta_2 = \frac{5.2}{1.8}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10.4}{1.8} \\ \frac{-5.2}{1.8} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_1\Delta_1$ *est incomparable a* $\theta_2\Delta_2$

Introduisons a_1 *dans la base à la place de* a_4*, on aura alors le tableau suivant :*

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	$\frac{6}{1.8}$	0	$\frac{2.6}{1.8}$	1	$\frac{-0.8}{1.8}$
1	4	a_1	$\frac{4.2}{1.8}$	1	$\frac{0.8}{1.8}$	0	$\frac{1}{1.8}$
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z^1 = \frac{4.2}{1.8} \\ Z^2 = \frac{16.8}{1.8} \end{pmatrix}$	Δ^1	0	$\frac{2.8}{1.8}$	0	$\frac{1}{1.8}$
			Δ^2	0	$\frac{-1.4}{1.8}$	0	$\frac{4}{1.8}$

Il existe un $i = 1$ *tel que tel que* $\Delta_j^i > 0 \ \forall j \epsilon J_H = \{2, 4\}$ *ce qui implique que le premier critère est à son maximum.*

Le point extrême $x^2 = \left(\frac{4.2}{1.8}, 0, \frac{6}{1.8}, 0\right)$ *est non dominé.*

$\theta_2 = \min\left\{\frac{6}{2.6}, \frac{4.2}{0.8}\right\} = \frac{6}{2.6}$ *(atteint pour* $r = 3$*)*

$\theta_4 = \min\{4.2\} = 4.2$ *(atteint pour* $r = 1$*)*

$$\begin{cases} \theta_2 \Delta_2 = \frac{6}{2.6} \begin{pmatrix} \frac{2.8}{1.8} \\ \frac{-1.4}{2.6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16.6}{4.68} \\ \frac{-8.4}{6.76} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4 \Delta_4 = 4.2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1.8} \\ \frac{4}{1.8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4.2}{1.8} \\ \frac{16.8}{1.8} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_2 \Delta_2$ *est un comparable* $\theta_4 \Delta_4$

Donc a_2 *rentre dans la base et* a_3 *sort de la base d'après la remarque, dressons alors le* 3^{eme} *tableau de simplexe :*

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
2	1	a_2	$\frac{6}{2.6}$	0	1	$\frac{1.8}{2.6}$	$\frac{-0.8}{2.6}$
1	4	a_1	$\frac{6.12}{4.68}$	1	0	$\frac{-0.8}{2.6}$	$\frac{3.24}{4.68}$
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z^1 = \frac{27.72}{4.68} \\ Z^2 = \frac{35.28}{4.68} \end{pmatrix}$	Δ^1	0	0	$\frac{2.8}{2.6}$	$\frac{0.36}{4.68}$
			Δ^2	0	0	$\frac{-1.4}{2.6}$	$\frac{11.52}{4.68}$

Il existe un $i = 1$ *tel que tel que* $\Delta_j^i > 0 \ \forall j \epsilon J_H = \{3, 4\}$ *ce qui implique que le premier critère est à son maximum.*

Le point extrême $x^3 = \left(\frac{6.12}{4.68}, \frac{6}{2.6}, 0, 0\right)$ *est non dominé.*

$\theta_3 = \min\left\{\frac{6}{1.8},\right\} = \frac{6}{1.8}$*(atteint pour* $r = 2$*)*

$\theta_4 = \min\left\{\frac{6.12}{3.24}\right\} = \frac{6.12}{3.24}$ *(atteint pour* $r = 1$*)*

$$\begin{cases} \theta_3\Delta_3 = \frac{6}{1.8}\begin{pmatrix} \frac{2.8}{2.6} \\ \frac{-1.4}{2.6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15.6}{4.68} \\ \frac{-8.4}{4.68} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4\Delta_4 = \frac{6.12}{3.24}\begin{pmatrix} \frac{0.36}{4.68} \\ \frac{11.52}{4.68} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2.2032}{15.1632} \\ \frac{70.5024}{15{,}1632} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_3\Delta_3$ *est un comparable* $\theta_4\Delta_4$

Donc a_4 *rentre dans la base et* a_1 *sort de la base , on aura alors le tableau suivant :*

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
2	1	a_2	$\frac{13.25}{4.68}$	$\frac{1.44}{3.24}$	1	$\frac{2.6}{4.68}$	0
0	0	a_4	$\frac{6.12}{3.24}$	$\frac{4.68}{3.24}$	0	$\frac{-1.44}{3.24}$	1
		$Z_0 = \begin{pmatrix} Z^1 = \frac{26.5}{4.68} \\ Z^2 = \frac{13.25}{4.68} \end{pmatrix}$	Δ^1	$\frac{-0.36}{3.24}$	0	$\frac{5.2}{4.68}$	0
			Δ^2	$\frac{-11.52}{3.24}$	0	$\frac{2.6}{4.68}$	0

Il n'existe pas un $i \in \{1.2\}$ *tel que o* $\Delta_j^i \geq 0\ \forall j \in J_H = \{1,3\}$ *donc aucun objectif n'est à son maximum.*

$\Delta_1 \begin{pmatrix} \frac{-2.8}{1.8} \\ \frac{-1.4}{1.8} \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow x^4 = \left(0, \frac{13.25}{4.68}, 0, 0\frac{6.12}{3.24}\right)$ *est dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{42.93}{6.7392}, \frac{6.12}{4.68},\right\} = \frac{6.12}{4.68}$*(atteint pour* $r = 4$*)*

$\theta_3 = \min\left\{\frac{13.25}{2.6}\right\} = \frac{13.25}{2.6}$ *(atteint pour* $r = 2$*)*

$$\begin{cases} \theta_1\Delta_1 = \frac{6.12}{4.68}\begin{pmatrix} \frac{-0.36}{3.24} \\ \frac{-11.52}{3.24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2.2032}{15.1632} \\ \frac{-70.5024}{15.1632} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_3\Delta_3 = \frac{13.25}{2.6}\begin{pmatrix} \frac{5.2}{4.68} \\ \frac{2.6}{4.68} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{68.9}{12.168} \\ \frac{13.25}{4.68} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_1\Delta_1 < \theta_3\Delta_3$

Donc a_1 *rentre dans la base et* a_4 *sort de la base, Puisque l'introduction de* a_1 *dans la base* *conduit à une base déjà explorée.*

Finalement, En considérant le problème initial seuls le point extrême $x^2 = \left(\frac{4.2}{1.8}, 0, \frac{6}{1.8}, 0\right)$ *et* $x^3 = \left(\frac{6.12}{4.68}, \frac{6}{2.6}, 0, 0\right)$ *est non dominé avec :* $Z\left(x^{2*}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4.2}{1.8} \\ \\ \frac{16.8}{1.8} \end{pmatrix}$

$Z\left(x^{3*}\right) = \begin{pmatrix} \frac{27.72}{4.68} \\ \\ \frac{35.28}{4.68} \end{pmatrix}$

On a recensé deux solutions une solution efficace.

— *En appliquant nécessité, on aura le programme suivant :*

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} nec\left(\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq \tilde{5}\right) \geq 0.8 \\ \\ nec\left(\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq \tilde{4}\right) \geq 0.8 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_2^n)$$

Qui s'écrit, en utilisant les propriétés de nécessité, comme suit :

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} \overline{\tilde{1}x_1 + \tilde{2}x_2}^{0.2} \leq \underline{\tilde{5}}^{0.2} \\ \\ \overline{\tilde{2}x_1 + \tilde{1}x_2}^{0.2} \leq \underline{\tilde{4}}^{0.2} \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_2^n)$$

et :

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} \overline{\tilde{1}}^{0.2} x_1 + \overline{\tilde{2}}^{0.2} x_2 \leq \underline{\tilde{5}}^{0.2} \\ \\ \overline{\tilde{2}}^{0.2} x_1 + \overline{\tilde{1}}^{0.2} x_2 \leq \underline{\tilde{4}}^{0.2} \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \left(P_2^d\right)$$

En remplaçant $\bar{\tilde{1}}^{0.2}, \bar{\tilde{2}}^{0.2}$ $\underline{\tilde{5}}^{0.2}, \underline{\tilde{4}}^{0.2}$ *pour leurs valeurs déterminer ci-dessus, on obtient le programme linéaire :*

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} 1.8x_1 + 2.8x_2 \leq 4.2 \\ 2.8x_1 + 1.8x_2 \leq 3.2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre $\left(P_2^d\right)$ *on applique la méthode du simplexe multi objectif :*
Transformons le programme sous forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3,x_4

$$\max x_1 + 2x_2$$
$$\max 4x_1 + x_2$$

$$s.c \begin{cases} 1.8x_1 + 2.8x_2 + x_3 = 4.2 \\ 2.8x_1 + 1.8x_2 + x_4 = 3.2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

— *On trace le 1er tableau :*

x				x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	4.2	1.8	2.8	1	0
0	0	a_4	3.2	2.8	1.8	0	1
	$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = 0 \\ Z_0^2 = 0 \end{pmatrix}$		Δ^1	-1	-2	0	0
			Δ^2	-4	-1	0	0

Il n'existe pas un $i \in \{1.2\}$ *tel que o* $\Delta_j^i \geq 0\ \forall j \in J_H = \{1.2\}$ *donc aucun objectif n'est à son maximum.*

$\Delta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow x^1 = (0, 0, 4.2, 3.2)$ *est dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{4.2}{1.8}, \frac{3.2}{2.8}\right\} = \frac{3.2}{2.8}$*(atteint pour* $r = 4$*)*

$\theta_2 = \min\left\{\frac{4.2}{2,8}, \frac{3.2}{1.8}\right\} = \frac{4.2}{2.8}$ *(atteint pour* $r = 3$*)*

$$\begin{cases} \theta_1\Delta_1 = \frac{3.2}{2.8}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3.2}{2.8} \\ \frac{-12.8}{2.8} \end{pmatrix} \\ \theta_2\Delta_2 = \frac{4.2}{2.8}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_2\Delta_2 < \theta_1\Delta_1$

Introduisons a_2 *dans la base à la place de* a_3*, on aura alors le tableau suivant :*

x				x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
2	1	a_2	$\frac{4.2}{2.8}$	$\frac{1.8}{2.8}$	1	$\frac{1}{2.8}$	0
0	0	a_4	$\frac{1.4}{2.8}$	$\frac{4.6}{2.8}$	0	$\frac{-1.8}{2.8}$	1
		$Z_1 = \begin{pmatrix} Z_1^1 = 3 \\ Z_1^2 = 1.5 \end{pmatrix}$	Δ^1	$\frac{0.8}{2.8}$	0	1	0
			Δ^2	$\frac{-7.6}{2.8}$	0	$\frac{1}{2.8}$	0

Il existe un $i = 1$ *tel que tel que* $\Delta_j^i > 0 \ \forall j \epsilon J_H = \{1,3\}$ *ce qui implique que le premier critère est à son maximum.*

Le point extrême $x^2 = \left(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ *est non dominé.*

$\theta_1 = \min\left\{\frac{4.2}{1.8}, \frac{1.4}{4.6}\right\} = \frac{1.4}{4.6}$*(atteint pour* $r = 4$*)*

$\theta_3 = \min\{4.2\} = 4.2$ *(atteint pour* $r = 2$*)*

$$\begin{cases} \theta_1\Delta_1 = \frac{1.4}{4.6}\begin{pmatrix} \frac{0.8}{2.8} \\ \frac{-7.6}{2.8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1.12}{12.88} \\ \frac{-10.64}{12.88} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_3\Delta_3 = 4.2\begin{pmatrix} 4.2 \\ \frac{1}{2.8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 1.5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_1\Delta_1 < \theta_3\Delta_3$

Donc a_1 *rentre dans la base et* a_4 *sort de la base , on aura alors le tableau suivant :*

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
2	1	a_2	$\frac{6}{4.6}$	0	1	$\frac{2.8}{4.6}$	$\frac{-1.8}{4.6}$
1	4	a_1	$\frac{1.4}{4.6}$	1	0	$\frac{-1.8}{4.6}$	$\frac{2.8}{4.6}$
		$Z_1 = \begin{pmatrix} Z_3^1 = \frac{13,4}{4.6} \\ Z_3^2 = \frac{11.6}{4.6} \end{pmatrix}$	Δ^1	0	0	$\frac{3.8}{4.6}$	$\frac{-0.8}{4.6}$
			Δ^2	0	0	$\frac{-4.4}{4.6}$	$\frac{9.4}{4.6}$

Il n'existe pas un $i \in \{1.2\}$ tel que o $\Delta_j^i \geq 0\ \forall j \in J_H = \{3.4\}$ donc aucun objectif n'est à son maximum.

$\Delta_3 \begin{pmatrix} \frac{3.8}{4.6} \\ \frac{-4.4}{4.6} \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow x^3 = \left(\frac{6}{4.6}, \frac{1.4}{4.6}, 0, 0\right)$ *est dominé.*

$\theta_3 = \min\left\{\frac{6}{2.8}\right\} = \frac{6}{2.8}$*(atteint pour $r = 2$)*

$\theta_4 = \min\left\{\frac{1.4}{2.8}\right\} = \frac{4.2}{2.8}$ *(atteint pour $r = 1$)*

$$\begin{cases} \theta_3\Delta_3 = \frac{3.2}{2.8}\begin{pmatrix} \frac{3.8}{4.6} \\ \frac{-4.4}{4.6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12.16}{12.88} \\ \frac{-14.08}{12.88} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4\Delta_4 = \frac{4.2}{2.8}\begin{pmatrix} \frac{-0.8}{4.6} \\ \frac{9.4}{4.6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1.2}{4.6} \\ \frac{14.1}{4.6} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_3\Delta_3$ est un comparable $\theta_4\Delta_4$
Introduisons a_3 dans la base à la place de a_2, on aura alors le tableau suivant :

			x	x_1	x_2	x_3	x_4
			C^1	1	2	0	0
			C^2	4	1	0	0
C_B^1	C_B^2	*Base*	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	$\frac{6}{2.8}$	0	$\frac{4.6}{2.8}$	1	$\frac{-1.8}{2.8}$
1	4	a_1	$\frac{3.2}{2.8}$	1	$\frac{1.8}{2.8}$	0	$\frac{1}{2.8}$
		$Z_1 = \begin{pmatrix} Z_4^1 = \frac{3.2}{2.8} \\ Z_4^2 = \frac{12.8}{2.8} \end{pmatrix}$	Δ^1	0	$\frac{-3.8}{2.8}$	0	$\frac{1}{2.8}$
			Δ^2	0	$\frac{4.4}{2.8}$	0	$\frac{4}{2.8}$

Il existe un $i = 2$ tel que tel que $\Delta_j^i > 0\ \forall j \epsilon J_H = \{2,4\}$ ce qui implique que le deuxième critère est à son maximum.

Le point extrême $x^4 = \left(\frac{3.2}{2.8}, 0, \frac{3.2}{2.8}, 0\right)$ est non dominé.

$\theta_2 = \min\left\{\frac{6}{4.6}, \frac{3.2}{1.8}\right\} = \frac{1.4}{4.6}$*(atteint pour* $r = 3$*)*

$\theta_4 = \min\{3.2\} = 3.2$ *(atteint pour* $r = 1$*)*

$$\begin{cases} \theta_2\Delta_2 = \frac{1.4}{4.6}\begin{pmatrix} \frac{-3.8}{2.8} \\ \frac{4.4}{2.8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1.9}{4.6} \\ \frac{2.2}{4.6} \end{pmatrix} \\ \\ \theta_4\Delta_4 = 3.2\begin{pmatrix} \frac{1}{2.8} \\ \frac{4}{2.8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3.2}{2.8} \\ \frac{12.8}{2.8} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc $\theta_2\Delta_2 < \theta_4\Delta_4$

Donc a_2 *rentre dans la base et* a_3 *sort de la base , Puisque l'introduction de* a_2 *dans la base conduit à une base déjà explorée.*

Finalement, En considérant le problème initial (4.4) *seuls les points extrêmes*

$x^2 = \left(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ *et* $x^4 = \left(\frac{3.2}{2.8}, 0, \frac{3.2}{2.8}, 0\right)$ *sont non dominés avec :*

$Z\left(x^{2*}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ *et* $Z\left(x^{4*}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3.2}{2.8} \\ \frac{12.8}{2.8} \end{pmatrix}$

On a recensé deux solutions efficaces.

5 LOGICIELS MATLAB ,VISUAL XPRESS ET APPLICATION INFORMATIQUE

Première partie

LOGICIEL MATLAB

INTRODUCTION

La programmation informatique est un ensemble d'outils et de techniques permettant de résoudre des problèmes mathématiques par ordinateurs par exemple, elle sert à trouver une solution optimale de n'importe quel type de problème. Le processus de résolution d'un problème mathématique exige un grand nombre de calculs donc il est mieux de l'exécuter par machine. Pour cela on a choisi le logiciel MATLAB qui fournit environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif permettant la mise en œuvre des algorithmes.

5.1 DÉFINITION DU LOGICIEL MATLAB

Le logiciel MATLAB (MATrix LABoratory) est spécialisé dans le domaine du calcul matriciel numérique. Tous les objets définis dans MATLAB les sont donc au moyen de vecteurs et de matrices/tableaux de nombres entre autre. Un ensemble important d'opérateurs et de fonctions de MATLAB de base facilitent leur manipulation et des opérations comme par exemple le produit et l'inversion matricielles (inv), la transposition $\left(^{\prime}\right)$ ou encore le calcul des valeurs propres, font partie de la bibliothèque standard. D'autres fonctions servant à la création et à la manipulation de matrices et de tableaux (diag, rand, ones, zeros, linspace) sont également disponibles en nombre.

L'environnement MATLAB se présente sous la forme d'un espace de travail (Workspace), ou un interpréteur de commandes exécute des opérations et des fonctions de MATLAB. Les sources de celles-ci sont disponibles, écrites en " langage " MATLAB, voir en C ou en Fortran. L'utilisateur peut les modifier, mais en s'inspirant, il peut surtout créer et rajouter ses propres fonctions. Le "langage" MATLAB contient un minimum de structures de programmation (structure itérative, structure conditionnelle, sous-routine) mais reste très rudimentaire. L'avantage est qu'il est très simple et très rapide à programmer, offrant une grande tolérance (syntaxe simple, pas de définition des types, etc.), ce qui permet un gain appréciable en temps de mise au point. L'ingénieur peut par ce moyen être plus efficace dans l'analyse d'un problème, en concentrant ses efforts sur celui-ci et non pas sur l'outil servant à le résoudre.

5.2 DESCRIPTION DE L'INTERFACE MATLAB

5.2.1 La barre de titre

La fenêtre MATLAB est surmontée par une barre de titre, contenant à sa gauche une icône et à sa droit les trois boutons << mise en icône>>, <<minimisation/maximisation>> et <<fermeture>>.

5.2.2 La barre du menu

Contient 5 fenêtres (en général) :

— **File** (fichier) permet d'obtenir l'éditeur de programme ;

— **Edit** (Edition) permet de couper / coller dans la ligne de commande et autre ;

— **Debug** permet l'exécution d'un programme et autres ;

— **Window** (fenêtre) permet le passage aux différentes rubrique du logiciel ;

— **Help** (aide) accède au menu d'aide.

5.2.3 La barre d'outils

La barre d'outils qui est souvent des raccourcis de fonctions contenues dans les menus. De gauche à droite (entre autre) :

— Ouvrir un nouveau fichier dans l'éditeur ;

— Rappeler un ancien fichier dans l'éditeur ; ·

— Couper ;

— Copier ;

— Coller ; ·

— Annuler ;

— Appeler l'aide.

5.2.4 La fenêtre de commande

Elles se divisent en deux zones :

— **La zone historique** : qui ne peut être modifiée, mais dont on peut copier des parties ;

— **La zone de commande éditable** : La zone de commande permet (comme son nom l'indique) de taper une commande qui sera accepté à l'aide de la touche **<return>** ou **<entrée>**.

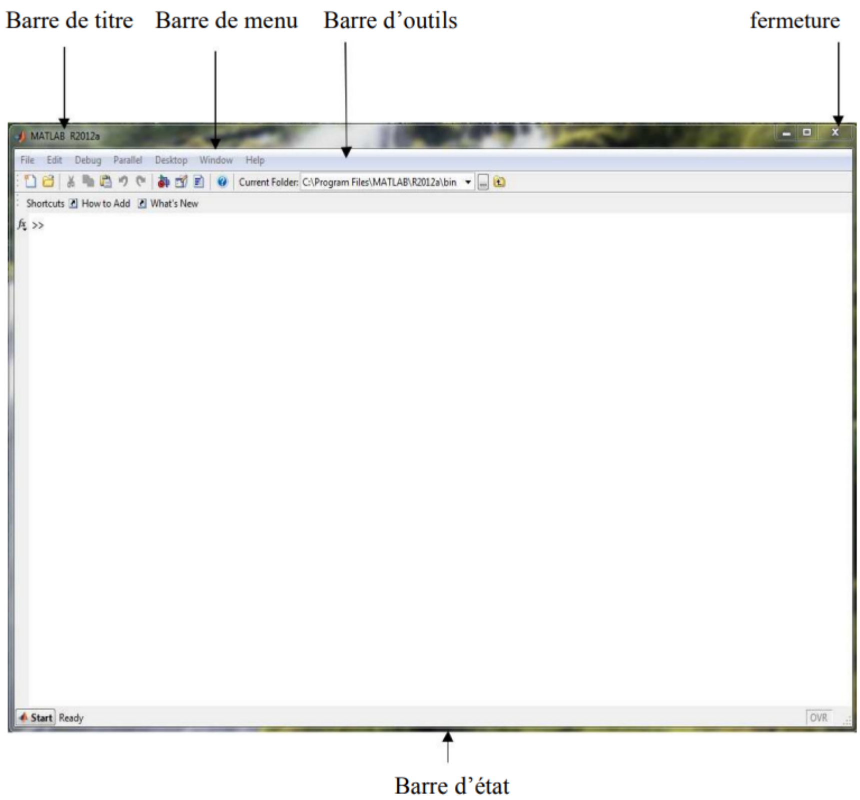


FIGURE 5.1 – *La fenêtre principale du logiciel MATLAB.*

5.3 MÉTHODE DE TRAVAIL

5.3.1 Édition et sauvegarde des fichiers MATLAB

Dans un premier temps, on peut se contenter d'introduire ses commandes une à une au niveau de l'espace de travail ou elles sont interprétées directement. Cependant, par la suite, il est beaucoup plus pratique d´écrire sa séquence de commandes complétée au moyen d'un éditeur, puis de sauvegarder le tout dans un fichier avec l'extension ≪**.m**≫. Cette séquence pourra alors être exécutée dans MATLAB par simple introduction du nom du fichier.

5.3.2 Aide en ligne :

En plus de l'aide de Window, une aide en ligne est disponible pour chaque commande de MATLAB. Il suffit d'introduire : ≪**help nom de commande**≫.

5.3.3 CRÉATION DE FICHIERS DE COMMANDE ET DE FONCTIONS UTILISATEUR

Fichiers de commande ("script files")

Un fichier de commande (script file) est un fichier ASCII d'extension ≪**.m**≫ contenant une suite de commandes MATLAB. Il être exécuté directement en tapant simplement son nom dans l'espace de travail MATLAB.

Fonctions

De nouvelles fonctions peuvent être ajoutées à MATLAB par l'utilisateur. Il suffit de créer un fichier de nom «nom_ de_ function.m» contenant les commandes à exécuter et dont l'entête a le format :

function [liste des arguments de sortie] = nom de fonction (liste des arguments d'entrée).

Contrairement aux fichiers de commande, les variables intervenant dans les fonctions sont locales. Les commentaires documentant les fonctions peuvent être insérés en les faisant précéder du symbole %.

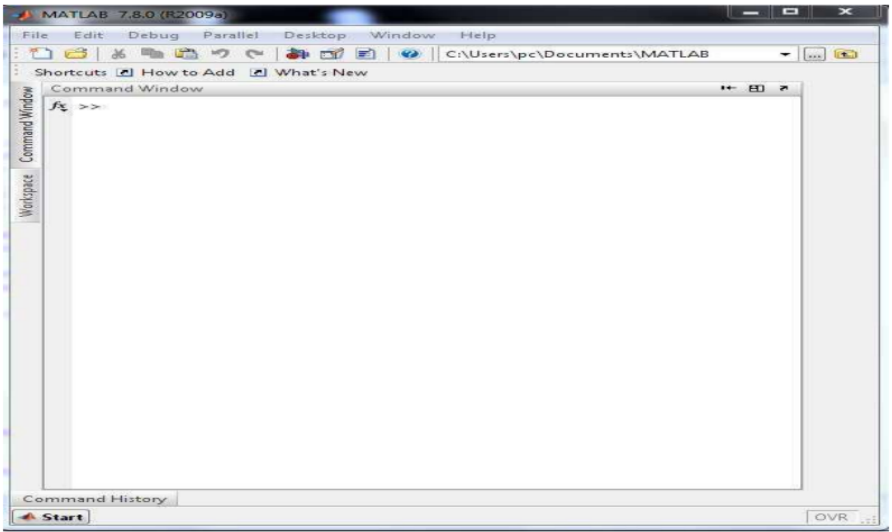


FIGURE 5.2 – *La fenêtre d'édition de fichier.*

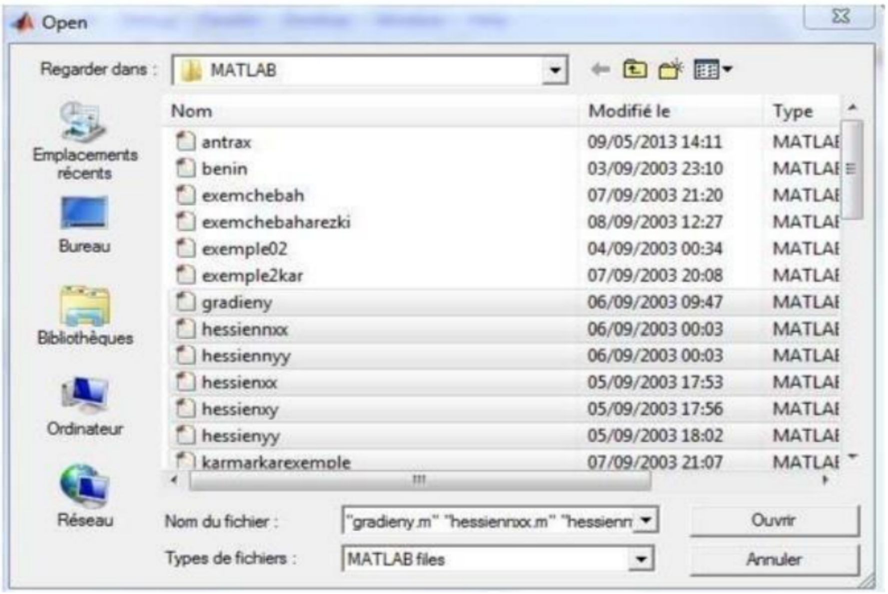


FIGURE 5.3 – *La boîte de dialogue d'ouverture de fichiers*

Deuxième partie

VISUAL XPRESS

5.4 QU'EST-CE QUE VISUAL XPRESS ?

C'est un logiciel simple à utiliser qui comporte un langage de modélisation qui permet d'écrire les programmes linéaires sous une forme symbolique proche de l'écriture mathématique, permet ainsi de modifier les données, enlever ou rajouter des contraintes, comparer deux modèles similaires, analyser la sensibilité des solutions par rapport aux données.

5.5 Présentation du logiciel

Pour commencer, il est conseillé d'installer le logiciel Visual Xpress. Pour démarrer il faut double cliquer sur l'icône ($figure$5.4), l'espace de travail Standard apparaît 5.5

Figure 5.4 – *L'icone Visual Xpress*

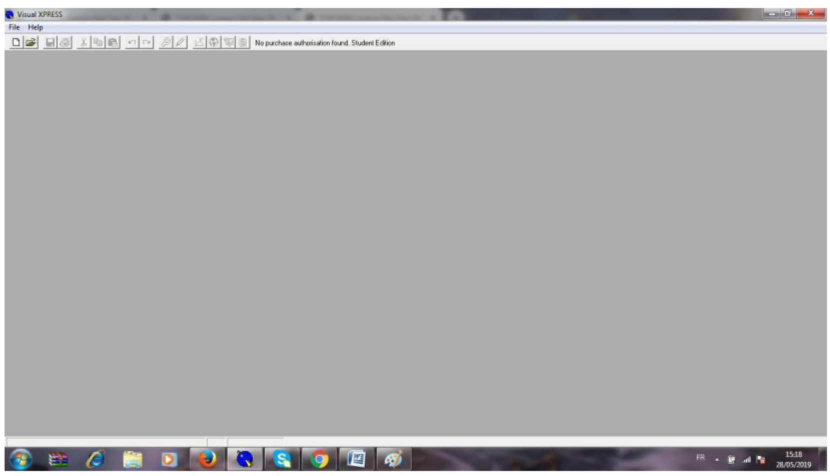


Figure 5.5 – ***Interface de Visual Xpress***

Nous cliquons sur l'icone file et on aura l'interface suivante :

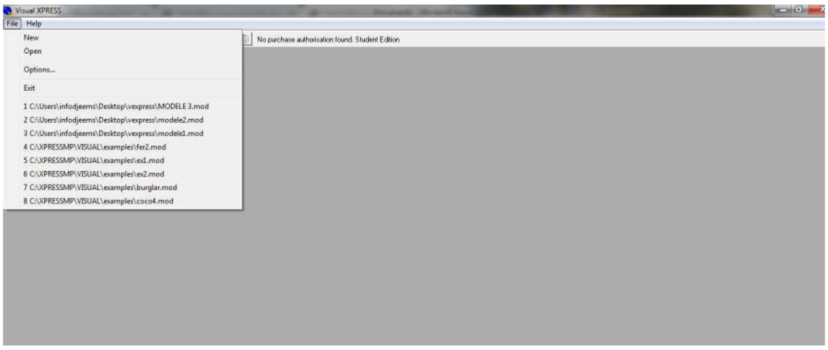


FIGURE 5.6 – ***Icone File***

puis nous cliquons sur new et l'écran de l'espace de travail s'ouvre et on aura l'interface suivante :

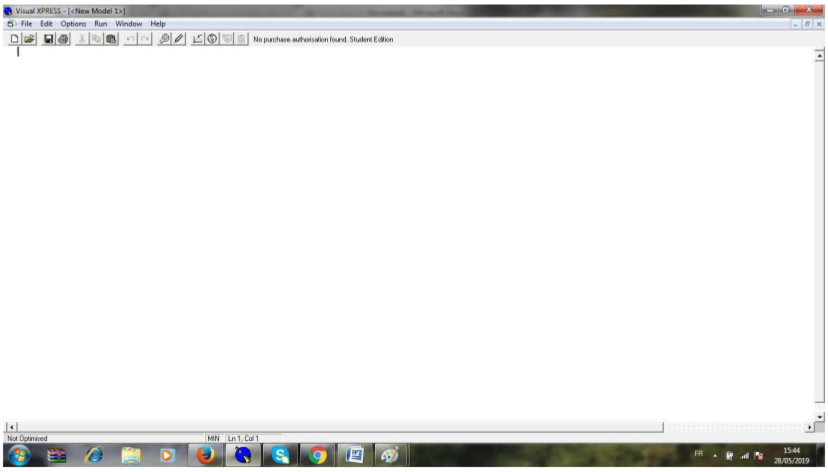


FIGURE 5.7 – ***L'espace de travail de Visual Xpress***

5.6 Les étapes du programme

On saisit notre programme dans l'espace de travail et l'exécution se fera comme suit :

avant d'exécuter un problème chargé dans l'éditeur, il faut désigner le sens de l'optimisation **(MAX ou MIN)** dans **option /optimiser**

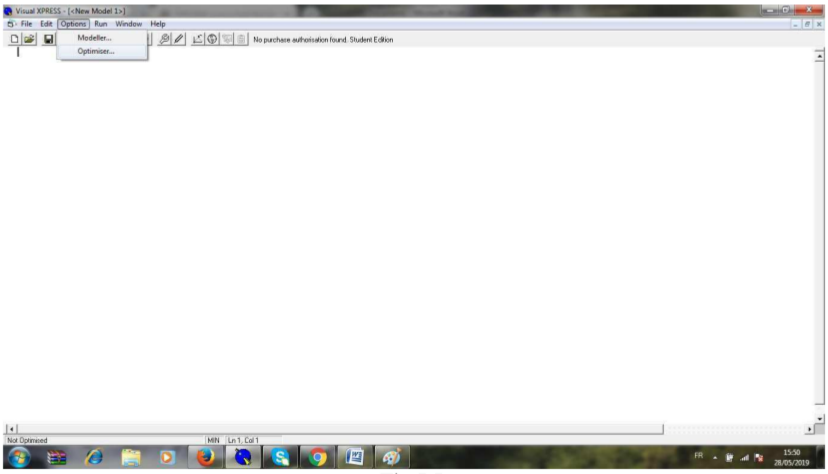


FIGURE 5.8 – *Icône option /optimiser*

On va résoudre le problème linéaire continu avec l'icône **Solve LP** dans le menu **Run/ Solve LP**.

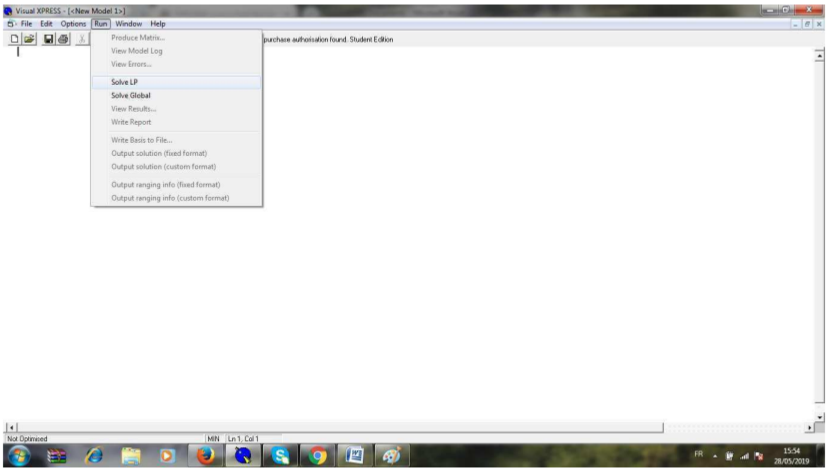


FIGURE 5.9 – *Icône solve LP*

Si le problème linéaire est en nombre entiers, il faut utiliser la commande **Run/ Solve Globale**

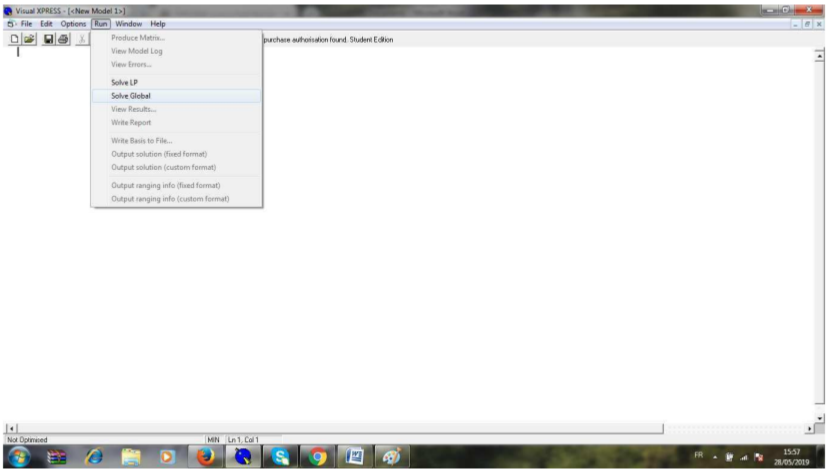


FIGURE 5.10 – *Icône Solve Globale*

5.7 APPLICATION

Résolution de l'exemple 3.6

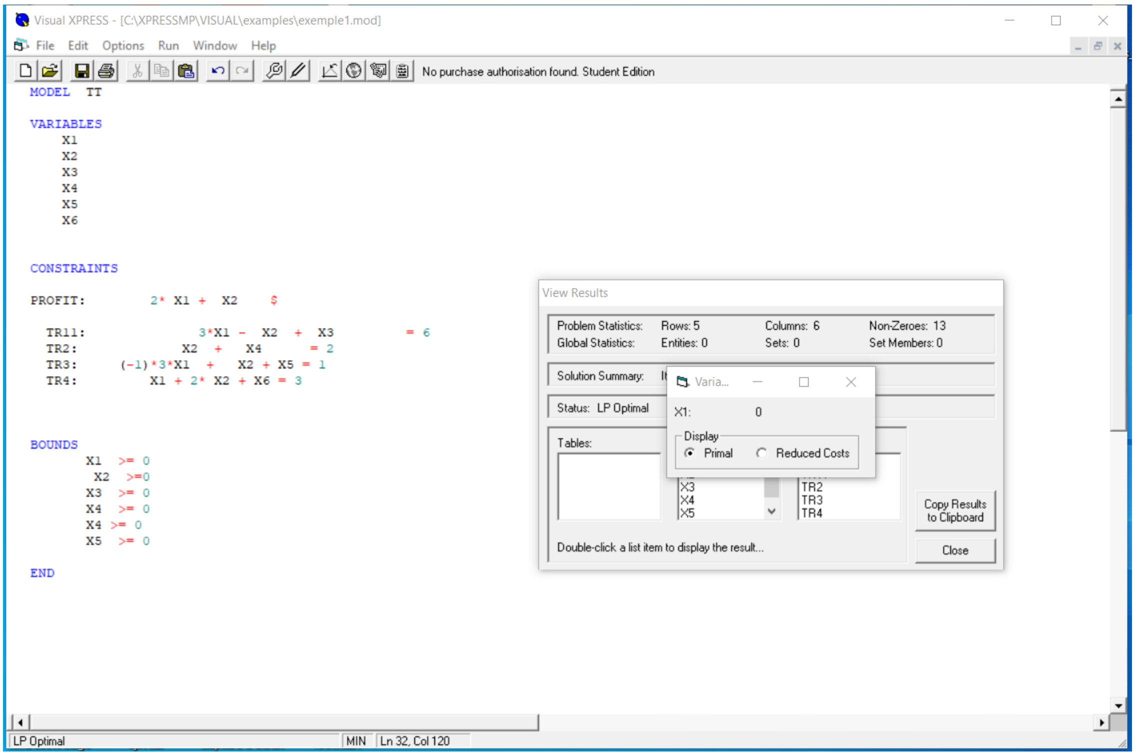


FIGURE 5.11 – *La valeur de* x_1

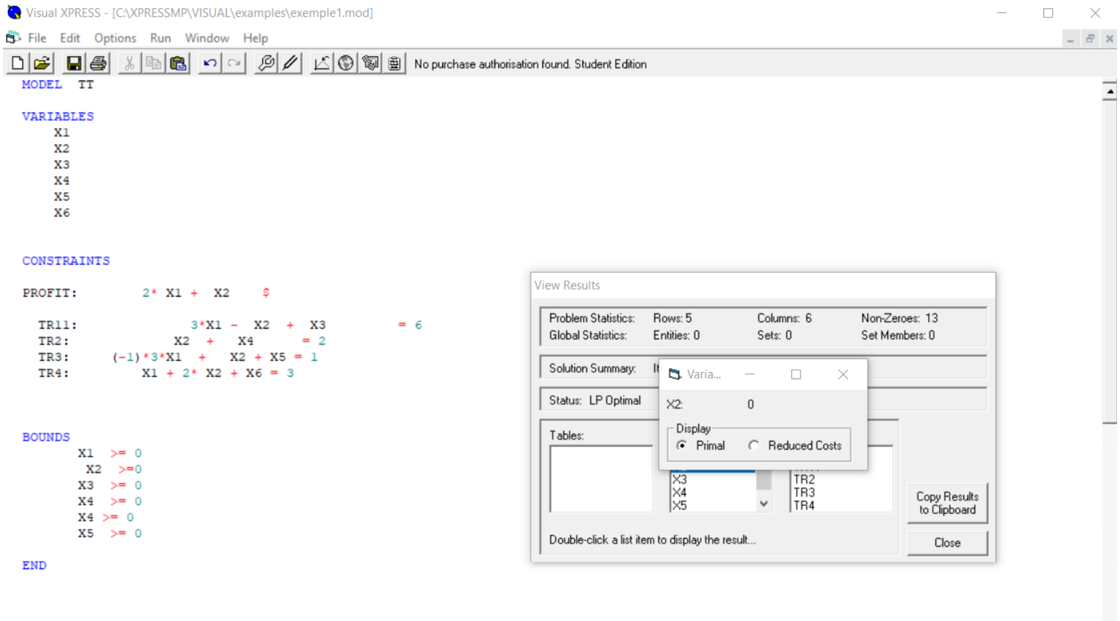


FIGURE 5.12 – *La valeur de x_2*

Conclusion générale

Les problèmes imprécis de nature flou sont considérés difficiles à résoudre, mais après l'apparition des méthodes de résolution, ces problèmes sont devenus faciles à résoudre et cela, en transforment ces problèmes flous en problèmes déterministes. La théorie des ensembles flous apparaît comme un outil bien adapté pour modéliser un concept vague.

Dans ce travail, nous avons abordé les notions de base de la théorie des ensembles flous.

Ensuite, nous avons abordé des programmes linéaires dont la résolution s'est faite par la méthode du simplexe, la méthode duale du simplexe, la méthode des deux phases et la M-méthode.

Puis on a introduit les notions de base concernant l'optimisation multi-objectifs comme la dominance, l'efficacité, les points particuliers. Nous avons étudié trois méthodes de résolution de tels problèmes, la méthode du simplexe multi-critères, la méthode d'agrégation et la méthode epsilon contraintes .

Après avoir rappelé les concepts de base sur la théorie des ensembles flous et les concepts de base sur l'optimisation linéaire multi-objectifs . Nous nous sommes intéressées à la résolution d'un problème linéaire (Fuzzy Linear Programming Problem). Nous avons proposé pour résoudre un programme linéaire flou, deux méthodes : Flexible (fonction caractéristique) et Robuste, et cela en transformant ce programme en un programme linéaire déterministe qui sera résolu par la méthode du simplexe. Puis on a résolu quelques exercices via l'optimisation linéaire multi-objectifs floues,et nous avons terminé avec des applications informatiques sur Visual express.

Notre travail est achevé mais reste ouvert à toute amélioration future tant dans le domaine théorique qu'au domaine pratique.

Bibliographie

Aiche.F. *l'optimisation floue stochastique.* PhD thesis, UMMTO, 1995.

Aiche.F. *la programmation linéaire multi objectif floues Stochastique.* PhD thesis, UMMTO., 2013.

Ambapour.S. *Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo.* PhD thesis, 2009.

Berro.A. *Optimisation Multiobjectif et Stratégie d'évolution en environnement Dynamique.* PhD thesis, université des sciences sociales Toulouse., 2001.

Bierlaire.M. *Introduction à l'optimisation différentiable.* PhD thesis, 2006.

BOUCHON-MEUNIER.Bernadette & Christophe.MARSALA. *Logique floue, principes, aide à la décision.* PhD thesis, Université de Caen, 2003.

Charnes.A & Coper.W. *Chance constrained programming.* PhD thesis, 1959.

Dubois.D. *linear programming with fuzzy data.* PhD thesis, 1987.

Aiche.F & Abbas.M & Dubois.D. *Chance contrained programming with fuzzy stochastic coefficients, fuzzy optimization and decision making.* PhD thesis, 2012.

Ferdinand.Piette. La logique floue : intérêts et limites. *Sciences et Techniques.*, 2011.

Benayad.R & Hamad.S. *Etude st extensions d'Algorithmes de points intérieurs pour la programmation non linéaire.* PhD thesis, USTHB., 2008.

Kacher.F. *Concept d'équilibre pour un jeu non coopératif sous forme normale avec paramètre indéterminés flous.* PhD thesis, UMMTO., 2006.

Kamingu.G. *Théorie des ensembles flous. caractérisation, propriétés et opérations.* PhD thesis, 2016.

Hacour.S & Kebbal.S. *Programmation mathématique floue et applications.* PhD thesis, UMMTO, 2018.

Kebbiche.Z. *Optimisation des coûts carburants Air Algérie.* PhD thesis, Université Ferhat Abbas., 2007.

Luhandjula.M.K. *Fuzzy optimization : An appraisal, Fuzzy Sets and Systems.* PhD thesis, 2004.

Madani.Bezoui. *Optimisation multiobjectifs,Lesson 1 : Concepts de bases*. PhD thesis.

Sifihi.M & Meguellati.B. *Optimisation discrète et application aux problèmes stochastiques.* PhD thesis, UMMTO., 2018.

Aiden.M & Oukacha.B. *Programmation linéaire*. PhD thesis, 2005.

Collette.Y & Siarry.P. *Optimisation multi-objectif.* PhD thesis, 2002.

Teghem.J. *programmation linéaire*. PhD thesis, 1996.

Zadeh.L. *Soft computing and fuzzy logic.* PhD thesis, 1994.

ZIANE.O. *les nombres flous et ses opérations.* PhD thesis, Mohamed BOUDIAFDE & M'SILA., 2018.

ملخص

نظرية المجموعات الغامضة ، ثم قدمنا مفاهيم وأساليب البرمجة الخطية أحادية الهدف ومتعددة الأهداف. ثم كنا مهتمين بحل المسائل الخطية الغامضة ، ثم قمنا بتعميم البرمجة المقيدة بالفرصة باستخدام طريقة المعاملات الغامضة لحل المشكلات الخطية الغامضة متعددة الأهداف مما يجعل من الممكن تحويل القيود الغامضة إلى قيود حتمية مكافئة ثم حلها باستخدام الخوارزمية متعددة الأهداف. البسيط.

Résumé

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à résoudre des problèmes mono-objectif et multi-objectifs flous. En premier lieu nous avons présenté la théorie des ensembles flous, puis on a introduit les notions et les méthodes de programmation linéaire mono-objectif et multi-objectifs. Ensuite nous nous sommes intéressées à résoudre des problèmes linéaires flous puis on a généralisé la méthode Chance-constrained programming with fuzzy coefficients pour résoudre des problèmes linéaires multi-objectifs flous qui permet de transformer les contraintes floues en des contraintes déterministes équivalentes ensuite les résoudre avec l'algorithme de simplexe multi-objectifs.

Abstract

In this work we are interested in solving fuzzy single-objective and multi-objective problems. first we presented the theory of fuzzy sets, then we introduced the concepts and methods of mono-objective and multi-objective linear programming. Then we were interested in solving fuzzy linear problems then generalized the Chance-constrained programming with fuzzy coefficients method to solve fuzzy multi-objective linear problems which makes it possible to transform the fuzzy constraints into equivalent deterministic constraints then solve it with the algorithm multi-objective simplex.