République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculae des Sciences
Département des Mathématiques

Spécialité
MATHÉMATIQUES
Option
Modélisation Mathématiques

Thème

Quelques espaces fonctionnels pour les E.D.P

Préparé par :
M^r **Cherfi Amirouch.**

Dirigé par :
M^r **Morsli Mohammed.**

Examiner par :

Bedouhene Fazia : professeur à l'U.M.M.T.O
Rahmani Leila : professeur à l'U.M.M.T.O
Challali Nourredine : M.C.A.

Promotion 2015 / 2016

Remerciements

Je tiens a remercier celui qui m'a crée, protégé, aidé et m'a donné la patience et le courage pour pouvoir accomplir entre autre mon mémoire de fin d'études dans les meilleurs conditions en disant "Dieu Merci".

Ce mémoire n'aurait jamais été entreprit ni achevé sans la patiente assistance, les méticuleux contrôles et suivis que m'a prodigué mon promoteur M^r M.Morsli, je tiens a lui exprimer ici toute ma gratitude et ma profonde admiration.

je tiens aussi a remercier :

Rahmani Leila pour l'honneur qu'elle m'a fait de présider le jury et d'évaluer le présent travail.

Bedouhene Faiza pour avoir accepter d'examiner ce travail.

Challali Nourredine pour l'honneur qu'il me fais en assistant a ma soutenance.

Je remercie tous mes enseignants durant mon cursus pour leurs contributions et le temps qu'ils ont consacré pour m'instruire. Qu'ils veuillent apercevoir ici mes termes les plus sincères de remerciements.

AMIROUCH.

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mes très chère parents qui se sont tant sacrifiés pour les besoins de nos études.

A mon frère : Ilyas, mes chères soeurs : Tassadit, Meryem et Lydia, pour leur affectueux soutien moral.

A tout mes amis(es) sans exception.

A tous mes enseignants qui ont contribué de près ou de loin a la réalisation de ce présent travail, merci.

AMIROUCH

Table des matières

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles constituent des models incontournables dans l'étude de nombreux problèmes et phénomènes de la vie courante. Leur élargissement touche tout les domaines de la science et suscite toujours un engouement très fort.
En effet, ce développement du domaine d'intérêt s'est naturellement accompagné d'une sophistication des méthodes mathématiques et outils d'analyse mis en oeuvre. La résolution et l'étude qualitative des équations aux dérivées partielles font appel a un outillage de plus en plus laborieux de l'analyse fonctionnelle $\big($théorie des opérateurs, optimisation, principes de points fixes, $\cdots\big)$ une question fondamentale dans l'étude des équations au dérivées partielles concerne le cadre fonctionnel du modèle, c-à-d, l'espace fonctionnel dans lequel on recherche les solutions.
Une réponse satisfaisante a cette question réside dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev.
En fait, ces espaces constituent le cadre optimal pour l'étude des équations linéaires et peut même s'avérer effectif dans certaines équations non linéaires.
L'efficacité des espaces de Sobolev vient de leurs parfaite adaptation a la formulation dite variationnelle $\big($faible$\big)$ de différents type d'équations.
Une autre approche consiste a transformer la recherche des solutions d'une équation aux dérivées partielles en la solution d'un problème d'optimisation. Dans ce cas, l'équation en question est l'équation d'Euler-Lagrange du problème d'optimisation associé. cette approche dite "de calcul de variations" trouve toute sa signification dans certains problèmes non linéaires. En utilise les méthodes d'optimisation en dimension infinie. La propriété de réflexivité de l'espace fonctionnel cadre et les propriétés de convexité y jouent un role majeur.
Dans certains problèmes dits $\big($fortement non linéaire$\big)$, le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev s'avère inapproprié et l'on peut avoir recours a d'autre espaces fonctionnels.
Les espaces d'Orlicz et Sobolev-Orlicz sont une généralisation naturelle des espaces de Le-

besgue obtenus en substituant la fonction puissance $\left(|t|^p\right)$ par une fonction de Young Φ astreinte a certaines conditions.
Les espaces d'Orlicz et Sobolev-Orlicz sont indiqués dans l'étude des problèmes ou équations fortement non linéaires, c-à-d, présentant des coefficients ou termes a croissance non polynomials.
Toute fois, dans ce genre de situations, la non réflexivité des espaces d'Orlicz (et Sobolev-Orlicz) a nécessité une plus grande sophistication dans l'argumentation et les méthodes, notamment dans l'utilisation des propriétés topologiques en optimisation.
Le présent travail se propose d'exposer les cadres fonctionnels les plus utilisés dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous présentons les résultats essentiels concernant ces espaces notamment ceux intervenants dans l'étude des équation aux dérivées partielles.
Dans le premier chapitre, nous donnons les notions et propriétés de base intervenant dans notre mémoire.
Le deuxième chapitre est consacré a une présentation des espaces de Sobolev. Nous donnons leurs propriétés essentielles et expliquons leurs adaptation naturelle a l'étude de problèmes aux limites linéaires. Dans ce même chapitre nous expliquons avec des exemples simples la formulation d'un problème aux limites en un problème d'optimisation et nous donnons deux version du théorème de point fixe en dimension d'espace finie ou non ainsi qu 'un exemple d'application expliquatif.
Le chapitre (3) est dédié aux espaces d'Orlicz et leurs propriétés essentielles. Enfin, le dernier chapitre introduit les espaces de Sobolev-Orlicz et certaines de leurs propriétés.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Espace normés

Ce chapitre rappelle les notions et outils de base indispensables dans les différents domaines de l'analyse mathématique et ses applications.

Soit E un espace vectoriel sur le corps K. On appelle norme sur E toute application de E dans R_+ notée $\|.\|$, vérifiant pour toute $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.1. *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(E, \|.\|)$*, ou* E *est un espace vectoriel sur* K *et* $\|.\|$ *une norme sur* E*.*

Définition 1.2. *Deux normes* $\|.\|_1$*,* $\|.\|_2$ *sont dites équivalentes dans un e.v.n s'il existe deux nombres réels* $a > 0$ *et* $b > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$ *on ait :*

$$a \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b \|x\|_2 .$$

Définition 1.3. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$*, la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \exists n_0, \forall p, q \geq n_0, \quad \|x_p - x_q\| < \epsilon.$$

Définition 1.4. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x *dans* $(E, \|.\|)$*, si*

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \exists n_\epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \quad \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Définition 1.5. *Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de* E *converge dans* $(E, \|.\|)$.
Un espace vectoriel normé complet est dit "espace de Banach".

Définition 1.6. E' *le dual de* E *est l'espace des formes linéaires continues sur* E. *L'ensemble* $E^{'}$ *est un espace vectoriel muni de la norme :*

$$\|u\|_{E'} = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \left|u\,(x)\,\right|.$$

Définition 1.7. *Soit* E *un espace de Banach,* E' *le dual de* E*, et soit* E'' *le bidual de* E. *On le muni de la norme*

$$\|\xi\| = \sup_{u \in E',\, \|u\| \leq 1} \left|\xi\,(u)\,\right|.$$

On définit $J : E \longrightarrow E''$ *comme suit : Soit* $x \in E$ *fixé, l'application* $u \longrightarrow u\,(x)$ *de* E' *dans* R *est une forme linéaire continue sur* E'*, c-à-d un élément de* E''*, noté* Jx. *On a :*

$$Jx\,(u) = u\,(x) \quad \forall\, x \in E, \;\; \forall\, u \in E'.$$

Il est claire que J *est linéaire, de plus* J *est une isométrie,* $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ *pour tout* $x \in E$. *On a aussi*

$$\|x\|_E = \sup_{\|u\| \leq 1} \left|u\,(x)\,\right|.$$

Définition 1.8. *Soit* E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* E''. *On dit que* E *est réflexif si l'application* $J : E \longrightarrow E''$ *est un isomorphisme algébrique et topologique.*

Remarque 1.1. *Si* E *est un espace de Banach, alors* E *est réflexif si et seulement si :*

$$J\,(E) = E''.$$

1.2 Les espaces L^p

1.2.1 Rappel de quelques résultats d'intégration

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit $\left\{f_n\right\}$ une suite de fonctions dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qui converge pour presque tout $x \in \Omega$ vers f. On suppose qu'il existe une fonction g, Lebesgue mesurable sur Ω, telle que :

$$\left|f_n\,(x)\,\right| \leq g\,(x)\,.$$

Pour tout $n \leq N$ et tout $x \in \Omega$. Alors les fonctions $f_n\,(n = 1, 2, \cdots, n)$ ont des intégrales finies et :

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Lemme de Fatou

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions positives mesurables p.p sur Ω, alors :

$$\int_\Omega \liminf_{n \to \infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx.$$

Le théorème qui suit (de Fubini) est un moyen très utile dans différents calculs sur les intégrales :

Théorème de Fubini

Soit $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}\,(i = 1, 2)$ des ouverts mesurables et posons :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Soit $f(x, y)$ une fonction integrable sur Ω. Alors :

$$\int_{\Omega_1} f(x, y)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} f(x, y)\, dy,$$

existent, de plus :

$$\int_\Omega f(x, y)\, dxdy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x)\, dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x)\, dx \right) dy.$$

1.3 Les classes L_p et quelques inégalités d'intégrales

1.3.1 Notation

Soit $p \in [1, \infty[$ (le cas $p = \infty$ sera traité ultérieurement). Soit Ω un sous-ensemble mesurable de R^n. On note $L_p(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions f mesurables définies p.p sur Ω tel que,

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx,$$

est finie.

On donne les inégalités importante suivantes :

1.3.2 Inégalité de Holder

Soit $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_{p'}(\Omega)$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $\left|fg\right| \in L_1(\Omega)$, de plus :

$$\left|\int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

1.3.3 Inégalité de Minkowski

Soit $p \in [1, \infty[$ et $f, g \in L_p(\Omega)$. Alors $f + g \in L_p(\Omega)$, de plus :

$$\left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

.

1.3.4 Les espaces de Lebesgue

Notation

Dans ce qui suit, on considère une relation d'égalité entre les éléments de L_p. On dit que $f_1 = f_2$ si et seulement si $f_1(x) = f_2(x)$ presque partout dans Ω. Dans le cas ou Ω est un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, on écrit $L_p(a, b)$ au lieu de $L_p\,]a, b[$.

Lemme 1.1. *Soit $p \geq 1$. $L_p(\Omega)$ est un espace vectoriel, posons :*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors : $\|.\|_p$ est une norme sur $L_p(\Omega)$.

Preuve. *On vérifie les axiomes usuels suivants :*

1. *$\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$ p.p. Dans un sens l'implication est triviale, elle reste aussi vérifiée dans l'autre car l'intégrale de Lebesgue d'une fonction f est nulle si et seulement si la fonction f est nulle p.p sur Ω.*
2. *$\|\lambda f(x)\| = |\lambda|\, \|f(x)\|$, on a : $\left(\int_\Omega |\lambda f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\, \|f(x)\|_p$.*
3. *$\|f(x) + g(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p + \|g(x)\|_p$. l'inégalité triangulaire découle directement de l'inégalité de Minkowski.*

.

On résume dans ce qui suit les propriétés essentielles des espaces L_p :

1.3.5 propriétés des espaces L_p

1. $L_p(\Omega)$ est un espace de Banach pour : $1 \leq p \leq \infty$.
2. $L_p(\Omega)$ est un espace réflexif pour : $1 < p < \infty$.
3. $L_p(\Omega)$ est séparable pour : $1 \leq p < \infty$.

On énonce le théorème de Riesz sur la caractérisation des formes linéaires sur $L^p(\Omega)$ suivant :

Théorème 1.1. *(de représentation de Riesz-Fréchet) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Φ un opérateur linéaire sur $L^p(\Omega)$ tel que : $1 < p < \infty$. Alors :*
Il existe un unique $g \in L^{p'}(\Omega)$ tel que : $\Phi(f) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$, de plus :

$$\|\Phi\| = \|g\|_{p'}.$$

Dans ce qui suit on construit le dual $[L_p(\Omega)]'$ de $L_p(\Omega)$:

Dualité

Théorème 1.2. *Soit $g \in L_p(\Omega)$ et posons : $\Phi_g(f) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$ pour toute fonction $f \in L_{p'}(\Omega)$. Alors :*

$$\Phi_g \in [L_p(\Omega)]' \quad et \quad \|\Phi_g\| = \|g\|_{p'}.$$

L'espace $L_\infty(\Omega)$

On note $L_\infty(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f définies p.p sur Ω telle qu'il existe une constante k et un ensemble $E \in \Omega$ avec $\mu(E) = 0$ tel que :

$$|f(x)| \leq k \text{ pour } x \in \Omega - E.$$

On définit sur $L_\infty(\Omega)$ la somme $f+g$ est le produit λf comme précédemment. On a $L_\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel, on définie la semi-norme :

$$N_p(f) = supess\,|f(x)|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés du sup et on prenant compte de la relation d'équivalence $\big(\text{p.p}\big)$ on montre aisément que $N_p(f)$ est une norme sur $L^\infty(\Omega)$. $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach, il n'est pas réflexif.

Chapitre 2

Les espaces de Sobolev

Introduction

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, ils doivent leurs nom au mathématicien russe Sergei Lvovich Sobolev $(1908 - 1989)$. Un espace de sobolev est grosso-modo un espace de Banach de fonctions dérivables autant de fois que l'on veut. Cet espace est muni d'une norme qui mesure la régularité et la taille de ces fonctionnelles.
Hélas, toutes les fonctions intégrables ne sont pas continues, encore moins dérivables.Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle dérivation dite faible (au sens des distributions) en opposition a la dérivation usuelle (forte).Dés lors, toute fonction devient indéfiniment dérivable.
On verra plus loin que ces espaces sont un outil incontournable dans l'étude et la recherche de solutions pour les équations aux dérivées partielles (E.D.P).
En premier lieu, nous introduisons l'espace de Sobolev $(W^{1,p}(I))$ défini sur un intervalle réel I en donnant ses principales propriétés.
Il sera essentiellement question de problèmes aux limites c'est à dire, d'équations aux dérivées partielles dans lesquels les solutions recherchées sont astreintes a des conditions aux bords. Pour cela, on utilise les espaces $\left(W_0^{1,p}(I)\right)$ qui contiennent toutes le fonctions continues sur (I) s'annulant sur le bord (∂I) et nous terminons en définissant les espaces de Sobolev en dimension quelconque et l'approche variationnelle de problèmes homogènes.

2.1 Les espaces de Sobolev en dimension 1

Dans ce qui suit on définit les espaces de Sobolev en dimension (1) et on donne les références ([12], [15], [1], [14]) pour l'essentiel des résultats qu'on va énoncer dans ce chapitre. Soit $a < b$ et $I =]a, b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$ $\big($pas forcément borné$\big)$ et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.1. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I)\,;\, \exists\, g \in L^p(I) \;/\; \int_I u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\,\varphi(x)\,dx \;\; \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Tel que $C_c^1(I)$ est l'espace des fonctions de classe C^1 à support compacte $c \subset I$. On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Remarque 2.1. *Quelques points importants concernant cette définition sont à retenir:*

1. *Quand il n'y aura pas confusions a craindre, on écrira $W^{1,p}$ au lieu de $W^{1,p}(I)$.*

2. *Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$, et on dira que g est la dérivée de u au sens des distributions.*

Ceci a un sens, en effet, s'il existe $g_1, g_2 \in L^p(I)$ vérifiant:

$$\begin{aligned} \int u(x)\,\varphi'(x) &= -\int g_1(x)\,\varphi(x) \\ &= -\int g_2(x)\,\varphi(x) \quad \varphi \in C_c^1(I), \end{aligned}$$

alors

$$\int (g_1(x) - g_2(x))\,\varphi(x) = 0 \quad \varphi \in C_c^1(I).$$

Donc on obtient que $g_1(x) = g_2(x) = u'(x)$ presque partout.

3. *On dit que la fonction φ de la définition $W^{1,p}(I)$ est une fonction test.*

Remarquons que l'on pourrait utiliser indifféremment $C_c^\infty(I)$ et $C_c^1(I)$ comme espace de fonctions test.

4. *Si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ et si $u' \in L^p(I)$ est la dérivée au sens usuel de u, alors il est clair que $u \in W^{1,p}(I)$. Ainsi, la dérivée usuelle de u coincide avec sa dérivée au sens des distributions.*

5. *On peut aussi définir l'espace $W^{1,p}(I)$ en terme de distribution: on dit qu'une fonction $u \in L^p$ appartient à $W^{1,p}(I)$ si sa dérivée au sens des distributions $\big($qui existe toujours$\big)$ est aussi dans L^p.*

Exemple 2.1. *Soit $I =]-1, 1[$.*

Montrons que la fonction

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x),$$

appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et que

$$u'(t) = H(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 < x < 1 \\ 0 & si \;\; -1 < x < 0 \end{cases}$$

On a, pour tout $\varphi \in C_c^1(I)$,

$$-\int u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} u(x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 H(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Ainsi, $u' = H$. *Or* H *est bornée sur* I, *et donc* $H \in L^p(I)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.
Ainsi, $u \in W^{1,p}(I)$. *Notons que* H *n'appartient pas à* $W^{1,p}(I)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$, *car sinon on peut montrer que* $H' = 0$ *p.p sur* I, *on aurait*

$$\int_I H(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) - \varphi(1) = \varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

ce qui est clairement absurde.

Remarque 2.2. *Dans l'exemple ci-dessus, on a vu le cas d'une fonction discontinue qui n'appartient pas à* $W^{1,p}(I)$. *Nous verrons plus loin que que si une fonction se trouve dans* $W^{1,p}(I)$, *elle admet alors un représentant continu, ce qui n'était pas le cas de la fonction* H *ci-dessus. En fait, si la dérivée au sens des distributions* f' *d'une fonction* f *n'est pas une distribution régulière associée à une fonction, alors* f *ne peut pas appartenir à* $W^{1,p}(I)$, *comme on l'a vu avec* $f = H$ *et* $f' = \delta_0$ $\big($*la masse de Dirac au point* 0 *la dérivée au sens des distributions de* $H\big)$.

2.1.1 Norme de $W^{1,p}$

Définition 2.2. *L'espace* $W^{1,p}$ *est muni de la norme :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

L'espace H^1 *est muni du produit scalaire*

$$(u,v) = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2},$$

et de la norme induite

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.1. *On a les propriétés suivantes des espaces* $W^{1,p}$.
L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ *est :*

1. *Un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$,
2. *Réflexif pour* $1 < p < \infty$,
3. *Séparable pour* $1 \leq p < \infty$,
4. *Un espace de Hilbert pour* $p = 2$.

2.1.2 Propriétés et caractérisations des fonctions de $W^{1,p}$

Théorème 2.1. *Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors il existe une fonction $\widetilde{u} \in C\left(\overline{I}\right)$ telle que*

$$u = \widetilde{u} \quad p.p.sur \quad I,$$

et

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_x^y u'(t)\,dt \quad \forall\, x, y \in \overline{I}.$$

On utilise les deux Lemmes suivants pour démontrer le théorème ci-dessus :

Lemme 2.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ tel que :*

$$\int f(x)\,\varphi'(x) = 0 \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(I).$$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ presque partout.

Lemme 2.2. *Soit $g \in L^1_{loc}(I)$, pour y_0 fixé dans I on pose*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)\,dt, \quad \forall\, x \in I.$$

Alors $v \in C(I)$ et

$$\int_I v(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(I).$$

Preuve du Théorème

On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\widetilde{u}(x) = \displaystyle\int_{y_0}^x u'(t)\,dt$. Par le Lemme (2.2), on a

$$\int_I \tilde{u}\varphi'(x)\,dx = -\int_I u'(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(I).$$

Ainsi $\displaystyle\int_I (u(x) - \widetilde{u}(x))\,\varphi'(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(I)$. Il résulte du Lemme (2.1) que

$$u(x) - \widetilde{u}(x) = C \quad \text{p.p.}$$

Donc la fonction $\widetilde{u}(x) = u(x) + C$ a les propriétés désirées.

Remarque 2.3. *Le théorème précédent nous dit que les fonctions $W^{1,p}$ sont "en gros" des primitives de fonctions de L^p.*

Définition 2.3. *(Quotient différentiel)*
Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On définit le quotient différentiel par

$$D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Théorème 2.2. *(Caractérisation des fonctions de $W^{1,p}(I)$)*
Soit $u \in L^p(I)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. *$u \in W^{1,p}$,*
2. *Il existe une constante C telle que*

$$\left| \int_I u(x)\varphi'(x)\,dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

3. *Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset I$ $\big($c-à-d $\overline{\omega}$ est compact et $\overline{\omega} \subset I\big)$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \Omega \setminus I)$ on a*

$$\|D_h u\|_{L^p(\omega)} \leq C.$$

De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ dans 2 et 3.

Preuve. $(1) \Longrightarrow (2)$ *: Soit $u \in W^{1,p}$, donc $u' \in L^p$. En utilisant l'inégalité de Holder on obtient directement*

$$\left| \int_I u(x)\varphi'(x)\,dx \right| = \left| \int_I u'(x)\varphi(x)\,dx \right| \leq \|u'\|_{L^p(I)} \|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}.$$

$(2) \Longrightarrow (1)$ *: On considère la forme linéaire $\psi : C_c^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\psi(\varphi) = \int u(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Comme C_c^∞ est un sous-espace dense dans $L^{p'}$ et puisque ψ est continue pour la norme $L^{p'}$, alors on peut prolonger ψ en une forme linéaire continue $\overline{\psi}$ sur $L^{p'}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $g \in L^p$ tel que

$$\langle \overline{\psi}, \varphi \rangle = \int g(x)\varphi(x)\,dx \quad \psi \in L^{p'}.$$

Et donc en particulier

$$\int u(x)\varphi'(x)\,dx = \int g(x)\varphi(x) \quad \psi \in C_c^\infty,$$

d'où $u \in W^{1,p}$ $\big($on pose $\overline{g}(x) = -g(x)\big)$.
$(1) \Longrightarrow (3)$ *: D'après le théorème précédent, on a, pour $x \in \omega$*

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)\,dt = h\int_0^1 u'(x+sh)\,ds.$$

Par conséquent

$$|D_h u(x)| = \left|\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right| \leq \int_0^1 |u'(x+sh)|\, ds.$$

Si $p=\infty$, *alors la conclusion est évidente; supposons donc* $1<p<\infty$.
Appliquant l'inégalité de Holder on obtient

$$|D_h u|^p \leq \int_0^1 |u'(x+sh)|^p\, ds.$$

Donc, par Fubini

$$\int_\omega |D_h u|^p \leq \int_\omega dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p\, ds \leq \int_0^1 ds \int_\omega |u'(x+sh)|^p\, dx.$$

Or, pour $0<s<1$, *on a*

$$\int_\omega |u'(x+sh)|^p\, dx = \int_{\omega+sh} |u'(y)|^p\, dy \leq \int_I |u'(y)|^p\, dy.$$

Ainsi, $\|D_h u\|^p_{L^p(\omega)} \leq \|u'\|^p_{L^p(I)}$. *Il suffit de prendre n-ième racine pour obtenir le résultat.*
$(3) \Longrightarrow (2)$ *: Soit* $\varphi \in C^1_c(I)$, *on choisit* $\omega \subset\subset I$ *tel que Supp* $\varphi \subset \omega$. *Pour* $h \in \mathbb{R}$ *avec* $h < d(\omega, \Omega \setminus I)$, *on a*

$$\int_I [u(x+h)-u(x)]\, \varphi(x)\, dx = \int_I u(x)\, [\varphi(x-h)-\varphi(x)]\, dx.$$

En utilisant (3) *et l'inégalité de Holder, on obtient*

$$\left|\int_I [u(x+h)-u(x)]\, \varphi(x)\, dx\right| \leq C\,|h|\, \|\varphi\|_{L^{p'}(I)},$$

et ainsi

$$\int_I u(x)\, D_h\varphi(x)\, dx \leq C\, \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}.$$

En laissant tendre $h \longrightarrow 0$, *on en déduit que*

$$\left|\int u(x)\, \varphi'(x)\, dx\right| \leq C\, \|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(I).$$

Remarque 2.4. *Le théorème n'est pas vrai pour* $p=1$, *car* $(2) \nRightarrow (1)$. *En effet, on a seulement l'inclusion* $(L^\infty)' \subset L^1$, *et on ne peut appliquer le théorème de Riesz pour le cas* $p=\infty$, *les fonctions* $W^{1,1}$ *sont appelées les fonctions absolument continues, tandis que les fonctions vérifiant* (2) *et* (3) *sont les fonctions à variations bornées* $\big($*éventuellement discontinues*$\big)$ *sur* I.

Corollaire 2.1. *Une fonction de* $L^{\infty}(I)$ *appartient à* $W^{1,\infty}(I)$ *si et seulement s'il existe une constante* C *telle que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \quad p.p. pour \;\; x, y \in I.$$

Preuve. *On applique simplement* (3) $\Longrightarrow$ (1) *du théorème précédent avec* $p = \infty$.*%rems une fonction de* $W^{1,\infty}(I)$ *est aussi appelée lipschitzienne de constante* C*, ainsi* $W^{1,\infty}(I) = C^{0,1}(I)$.

Théorème 2.3. *(Opérateur de prolongement)*
Soit $1 \leq p \leq \infty$. *Il existe un opérateur de prolongement* $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ *linéaire et continue tel que :*
1. $Pu_{|I} = u$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(I)$.
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(I)$.
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ *pour tout* $u \in W^{1,p}(I)$.

Remarque 2.5. *Soit* (u_n) *une suite de* $W^{1,p}$ *tel que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* L^p *et* u_n' *converge vers une certaine limite dans* L^p. *Alors* $u \in W^{1,p}$ *et* $\|u - u_n\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$. *En effet, On suppose que* u_n *converge vers une fonction* a *dans* L^p. *Comme on a* $u_n \in W^{1,p}$,

$$\int_I u_n \varphi = -\int_I u_n' \varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^{\infty}(I).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_I u \varphi = -\int_I a \varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^{\infty}(I).$$

Donc $u \in W^{1,p}$ *et* $u' = a$ *et clairement* $\|u - u_n\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$.

2.2 Théorème de densité et d'injection

Théorème 2.4. *(Densité) Soit* $u \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors, il existe une suite* u_n *dans* $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ *telle que* $u_{n|I} \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(I)$.

Lemme 2.3. *Soit* $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad et \quad (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Preuve. *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$. *On peut supposer que* $I = \mathbb{R}$, *sinon il suffit de prolonger* u *en une fonction de* $W^{1,p}(\mathbb{R})$ *par le théorème de prolongement. On fixe ensuite une fonction* $\zeta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ *telle que* $0 \leq \zeta \leq 1$ *et*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq 1, \\ 0 & si \quad |x| \geq 2. \end{cases}$$

On définit la suite

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right) \quad \textit{pour} \;\; n = 1, 2, \cdots$$

Soit $f \in L^p$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Puisque* $\zeta_n f \longrightarrow f$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a, par le théorème de convergence dominée,* $\zeta_n f \longrightarrow f$ *dans* L^p. *Choisissons une suite régularisante* (φ_n).
Montrons que la suite $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ *converge vers* u *dans* $W^{1,p}$. *Or* $\|u_n - u\|_{L^p} \longrightarrow 0$.
En effet, on écrit

$$u_n - u = \zeta_n [(\rho_n * u) - u] + [\zeta_n u - u],$$

et

$$\|u_n - u\|_{L^p} \leq \|(\varphi_n * u) - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Ensuite, grace au Lemme précédent, on a

$$u_n' = \zeta_n'(\varphi_n * u) + \zeta_n'(\rho_n * u').$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u_n' - u'\|_{L^p} &\leq \|\zeta_n'(\varphi_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n'(\rho_n * u') - u\|_{L^p} \\ &\leq \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|(\rho_n * u') - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où $C = \|\zeta'\|_{L^\infty}$.

Définition 2.4. *(Application compacte)*
Soit A, B *deux espaces vectoriels normés. Une application* $i : A \longrightarrow B$ *est dite compacte si pour toute suite* (a_n) *dans* A *bornée* $\big($*c-à-d qu'il existe une constante* $C > 0$ *tel que* $\|a_n\| \leq C\big)$ *il existe* $b \in B$ *et une sous-suite* a_{n_k} *de* (a_n) *tel que* $i(a_{n_k}) \longrightarrow b$ *dans* B.

Théorème 2.5. *(Théorème d'injection)*
Il existe une constante C $\big($*dépendant seulement de* $\mu(I) < \infty\big)$ *tel que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ *avec injection continue pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.
De plus, lorsque I *est bornée on a*
1. *L'injection* $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ *est compacte pour* $1 < p \leq \infty$ *et*
2. *L'injection* $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ *est compacte pour* $1 \leq q \leq \infty$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du théorème suivant :

Théorème 2.6. *(Ascoli)*
Soit K *un espace métrique compacte et soit* H *un sous-ensemble borné de* $C(K)$.

On suppose que d est uniformément équicontinu, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 \ \ \text{tel que} \ \ d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon \ \ \forall f \in H.$$

Alors H est relativement compact dans $C(K)$.

Preuve. *La première étape est de démontrer le théorème (2.2) pour $I = \mathbb{R}$; le cas général s'en déduit grâce au théorème de prolongement.*
Soit $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, si $1 \leq p < \infty$ on pose $G(s) = |s|^{p-1} s$. La fonction $\omega = G(v)$ appartient à $C_c^1(\mathbb{R})$ et

$$\omega' = G'(v)\, v' = p\,|v|^{p-1}\, v'.$$

Puisque $[G(v(x))]' = G'(v(x))\, v'(x)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p\,|v(t)|^{p-1}\, v'(t)\,.$$

Car $\lim\limits_{y\to\infty} G(v(y)) = 0$ puisque $G(v) \in C_c^1(\mathbb{R})$.
Estimons maintenant $|v(x)|^p$. Par l'inégalité de Holder on a

$$|v(x)|^p = |G(v(x))| \leq \int_{\mathbb{R}} p\,|v(t)|^{p-1}\,|v'(t)|\,dt \leq p\left\|v^{p-1}\right\|_{L^{p'}} \|v'\|_{L^p}\,.$$

En se rappelant que $p' = \dfrac{p}{p-1}$, on obtient

$$|v(x)|^p \leq p\,\|v\|_{L^p}^{p-1}\,\|v'\|_{L^p}\,.$$

En utilisant en suite l'inégalité de Young que nous allons voir au chapitre suivant avec p et p' pour obtenir :

$$p\,\|v\|_{L^{p-1}}^{p}\,\|v'\|_{L^p} \leq p\Big[\frac{p-1}{p}\,\|v\|_{L^p}^p + \frac{1}{p}\,\|v'\|_{L^p}^p\Big].$$

En utilisant l'inégalité de $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \leq |a| + |b|$ et $p\dfrac{1}{p} \leq e^{\frac{1}{e}}$, on obtient

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \Big[\,(p-1)\,\|v\|_{L^p}^p + \|v'\|_{L^p}^p\,\Big]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq p^{\frac{1}{p}}\,\|v\|_{W^{1,p}} \\ &\leq C\,\|v\|_{W^{1,p}}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\,\|v\|_{W^{1,p}} \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R})\,, \tag{2.1}$$

où $C = e^{\frac{1}{e}}$ *est une constante universelle.*
La démonstration se termine en raisonnant par densité. On prend $u \in W^{1,p}$*, par le théorème de densité, il existe une suite* $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ *tel que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(\mathbb{R})$*. En appliquant* (2.1)*, on remarque que* (u_n) *est de Cauchy dans* L^∞*. Donc* $u_n \longrightarrow u$ *dans* L^∞ *et on obtient notre inégalité cherchée.*
Nous démontrons maintenant la seconde partie. Pour montrer 1. prenons F *la double unité de* $W^{1,p}(I)$ *avec* $1 < p \leq \infty$*. Pour* $u \in F$ *et grâce à l'inégalité de Holder on obtient*

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)\,dt \right| \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{\frac{1}{p'}} \leq |x - y|^{\frac{1}{p'}} \quad \forall\, x, y \in I.$$

On en déduit alors par le théorème d'Ascoli que F *est relativement compact dans* $C\left(\overline{I}\right)$*. Par linéarité, on obtient que* $W^{1,p}(I)$ *est relativement compact dans* $C\left(\overline{I}\right)$*. La seconde partie se base sur un théorème assez technique dont nous ne parlerons pas ici. Nous admettrons donc la second partie sans démonstration* $\big($*voir []*$\big)$*.*

Corollaire 2.2. *On suppose que* I *n'est pas borné et on prend* $u \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p < \infty$*. Alors on a*

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \quad x \in I.$$

Corollaire 2.3. *(Dérivation d'un produit)*
Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$*. Alors* $uv \in W^{1,p}(I)$ *et*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_x^y u'v = u(x)\,v(x) - u(y)\,v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall\, x, y \in \overline{I}.$$

Corollaire 2.4. *(Dérivation d'un produit de composition)*
Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tel que* $G(0) = 0$ *et soit* $u \in W^{1,p}(I)$*. Alors :*

$$Gou \in W^{1,p}(I) \quad et \quad (Gou)' = (G'ou)\,u'.$$

2.2.1 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 2.5. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$*, on désigne par* $W_0^{1,p}(I)$ *la fermeture de* $C_c^1(I)$ *dans* $W^{1,p}(I)$*, c'est à dire que* $W_0^{1,p}(I) = \overline{C_c^1(I)}$*. Si* $p = 2$*, on note* $W_0^{1,2}(I) = H_0^1(I)$*.*

Remarque 2.6. *On a les propriétés suivantes :*
1. *Sans risque de confusion, on notera souvent* $W_0^{1,p}$ *et* H_0^1 *au lieu de* $W_0^{1,p}(I)$ *et* $H_0^1(I)$.
2. *L'espace* $W_0^{1,p}$ *est muni de la norme induite par* $W^{1,p}$, *l'espace* H_0^1 *est muni de produit scalaire induit par* H^1.
3. *L'espace* $W_0^{1,p}$ *est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour* $1 < p < \infty$. *L'espace* H_0^1 *est un espace de Hilbert séparable.*
4. *On sait par le théorème de densité que* $C_c^1(\mathbb{R})$ *est dense dans* $W^{1,p}(\mathbb{R})$, *et par conséquent* $W_0^{1,p} = W^{1,p}(R)$.

Proposition 2.2. *On a les résultats importants suivants :*

1. $C_c^\infty(I)$ *est dense de* $W_0^{1,p}(I)$.
2. *Si* $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, *alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Théorème 2.7. *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$. *Alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement si* $u = 0$ *sur* (∂I).

Preuve. *Si* $u \in W_0^{1,p}(I)$, *il existe une suite* (u_n) *de* $C_c^1(I)$ *tel que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}(I)$. *Donc, par le théorème d'injection* $u_n \longrightarrow u$ *uniformément sur* $(\overline{I})$ *et par conséquent* $u = 0$ *sur* (∂I).
Réciproquement, soit $u \in W^{1,p}(I)$ *tel que* $u = 0$ *sur* (∂I). *On fixe une fonction* $G \in C^1(R)$ *telle que*

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si \quad |t| < 1, \\ t & si \quad |t| > 2, \end{cases}$$

et

$$|G(t)| \leq t \quad pour\ tout \quad t \in \mathbb{R}.$$

On pose $u = \dfrac{1}{n} G(nu)$ *de sorte que* $u_n' \in W^{1,p}(I)$. *On a d'autre part*

$$Supp\ u_n \subset \left\{ x \in I,\ |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Ainsi, Supp u_n *est un compact inclus dans* (I), *car* $u = 0$ *sur* (∂I) *et* $u(x) \longrightarrow 0$ *quand* $|x| \longrightarrow \infty$, $x \in I$. *Donc* $u_n \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$. *Par la proposition ci-dessus,* $u_n \in W_0^{1,p}$. *Finalement, on vérifie à l'aide du théorème de convergence dominée que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}$.

Remarque 2.7. *Voici deux autres caractérisations des fonctions de* $W_0^{1,p}$ *:*
1. *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $u \in L^p(I)$, *alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement s'il existe une constante* C *telle que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

2. *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* $u \in L^p(I)$, *on définit* $\overline{u}$ *par*

$$\overline{u} = \begin{cases} u(x) & si \;\; x \in I \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement* $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.3. *(Inégalité de Poincaré)*
On suppose que I *est borné. Alors, il existe une constante* C *dépendante de* $\mu(I)$ *tel que :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(I).$$

Les espaces $W^{m,p}(I)$ **et** $W_0^{m,p}(I)$

Définition 2.6. *(L'espace* $W^{m,p}(I)$*)*
Soit $m \geq 2$ *et un réel* $1 \leq p \leq \infty$, *on définit* $W^{m,p}(I)$ *par récurrence :*

$$W^{m,p}(I) = \Big\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \Big\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Une fonction u *appartient à* $W^{m,p}(I)$ *si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre* m *appartiennent a* L_p. *Plus précisément,* $u \in W^{m-1,p}(I)$ *si et seulement s'il existe* m *fonctions* $g_1, \cdots, g_m \in L^p(I)$ *telles que :*

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_i \varphi \;\; \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I), \;\; \forall\, j = 1, \cdots, m.$$

On dénote $D^j\varphi$ *la dérivée à l'ordre* j *de* φ. *On peut considérer* $u' = g_1, u'' = g_2$ *jusqu'à l'ordre* m, *que l'on note aussi* $Du, D^2u, \cdots, D^m u$.
On munit l'espace $W^{m,p}$ *de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

et H^m *du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

Remarque 2.8. *Les notions démontrées précédemment pour* $W^{1,p}(I)$ *restent aussi valables pour* $W^{m,p}(I)$. *En particulier,* $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}\left(\overline{I}\right)$ *avec injection continue.*

Définition 2.7. *(L'espace $W_0^{m,p}(I)$)*
Soit un réel $1 \leq p \leq \infty$ et un entier $m \geq 2$. On définit l'espace $W_0^{m,p}(I)$ comme la fermeture de $C_c^m(I)$. Similairement au théorème précédent, on peut obtenir la définition équivalente suivante :

$$W_0^{m,p}(I) = \Big\{ u \in W^{m,p}(I) : u = Du = \cdots = D^{m-1}u = 0 \quad sur \quad \partial I \Big\}.$$

2.3 Les espaces de Sobolev en dimension n

2.3.1 l'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 2.8. *Soit $(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $1 \leq p \leq \infty$, on défini l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{1,p} = \Big\{ u \in L_p, \exists\, g_1, \cdots, g_n \in L_p \quad tq \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in D, \forall\, i = 1, \cdots, N \Big\}.$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}$ et on note :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \Big\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \Big\},$$

l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

et l'espace H^1 du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

Expliquons cela en disant que : $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont aussi dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Remarque 2.9. *On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque. Si $k > 0$ un entier, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dont les dérivées partielles prises au sens faible $D^\alpha u$ sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in N^n$ vérifiant $|\alpha| \leq k$.*
On donne les propriétés des espace $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leq p < \infty$ et $k \geq 1$.*

1. *$W^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{k,\,p}}$ est un espace de Banach, séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.*
2. *$W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :*

$$(u,v)_{W^{1,\,2}} = \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx + \int_\Omega (\nabla u(x)\,,\nabla v(x))\,dx.$$

Remarque 2.10. *La régularité des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ est un sujet relativement fin. L'analogie avec les espaces de Sobolev de dimension (1) n'est pas toujours vraie. Néanmoins, certains résultats vu en dimension (1) restent valable $\big($caractérisation des fonctions de $W^{1,p}$, le théorème de densité, théorème de prolongement $\big($sous certaines conditions de régularité de $\Omega\big)\cdots\big)$ en dimension quelconque.*
On rappelle dans ce qui suit quelques résultats de cours $\big($Formulation variationnelle$\big)$ utiles pour la recherche des solutions pours les $\big($E.D.P$\big)$.

Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 \leq p \leq \infty$. Alors, il existe $c > 0$ tel que :

$$\|u\|_{W^{1,\,p}} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p}\,,\ \ \forall\, u \in W_0^{1,\,p}(\Omega)\,.$$

Formule de Green

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ $\big(n(x)$ sa normale extérieur$\big)$, u, v deux fonction régulière alors :

$$\int_\Omega \Delta u(x)\,v(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

2.4 Formulation variationnelle de problèmes aux limites

2.4.1 Le problème de Dirichlet homogène

On va utiliser le problème suivant pour introduire la formulation variationnelle d'une classe de problèmes aux limites.

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{sur } \ \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

2.4.2 Formulation variationnelle du problème

Soit u une solution du problème (2.2) tel que $u \in H^2(\Omega)$, et soit $v \in H^1(\Omega)$ quelconque. On multiplie l'équation par v et on intègre sur Ω, On a alors :

$$\int_\Omega -\Delta uvdx + \int_\Omega cuvdx = \int_\Omega fudx.$$

En utilisant la formule de Green, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds + \int_\Omega cuvdx = \int_\Omega fvdx.$$

Supposons que $v = 0$ p.p sur $(\partial\Omega)$ $\big($ce qui est le cas si $v \in H_0^1(\Omega)\big)$. Alors, on obtient le problème suivant :

$$\forall\, v \in V \quad A(u,v) = L(v)\,, \tag{2.3}$$

tel que l'on a :

$$A(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla udx + \int_\Omega cuvdx, \tag{2.4}$$

avec

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \tag{2.5}$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fvdx. \tag{2.6}$$

Déterminer une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie les équations (2.3)-(2.6) est la formulation variationnelle du problème (2.2). Une question légitime se pose : si on Suppose qu'on a résolu ce problème. A-t-on résolu le problème de départ (2.2)? On trouve la réponse dans la proposition qui suit.

2.4.3 Interprétation de la formulation variationnelle

On a le résultat suivant :

Proposition 2.5. *Soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors, u est solution du problème aux limites* (2.2) *si et seulement si elle est solution du problème variationnel* (2.3)-(2.6).

Preuve. *Nous avons déjà montré que u est solution de* (2.2) *implique forcément que u est solution de* (2.3)-(2.6)*, montrons la réciproque.*
Soit $u \in V$ solution de (2.3) *et* (2.6). *Comme l'équation* (2.3) *est vérifiée pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, elle est en particulier vraie pour toute fonction $v \in D(\Omega)$ $\big($espace*

des fonctions $C_c^{\infty}(\Omega)\big)$. *Ce qui nous permet d'interpréter* (2.3) *au sens des distributions. Ainsi, pour toute fonction* v *de* $D(\Omega)$, *on a :*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} cuv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Chaque élément apparaissant dans l'équation est une distribution, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} > + < cu, v >=< f, v > .$$

Par définition de la dérivée au sens des distributions, on a :

$$-\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v > + < cu, v >=< f, v > .$$

On a donc,au sens des distributions :

$$-\Delta u + cu = f.$$

On retrouve donc l'équation (2.2) $\big($*mais en un sens faible*$\big)$. *Mais de l'égalité précédente, on déduit que* $\Delta u \in L^2(\Omega)$ *et que l'égalité a donc lieu dans* $L^2(\Omega)$ *et donc p.p. Quand à la condition aux limites, elle est naturellement satisfaite,* $u = 0$ *p.p sur* $(\partial\Omega)$ *puisque* $u \in H_0^1$. *Nous énonçons maintenant un théorème fondamental d'analyse fonctionnelle, très utile dans les questions d'existence de solution de problèmes aux limites.*

2.4.4 Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire noté $(.,.)$ et de la norme associée $\|.\|$. On se donne le problème suivant :
Trouver $u \in H$ telle que pour tout $v \in H$, on ait :

$$\forall\, v \in V, \;\; A(u, v) = L(v) . \tag{2.7}$$

Et on impose les conditions suivantes :
1. L est linéaire continue, c-à-d, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\, v \in H, \quad |L(v)| \leq C \|v\|_H .$$

2. A est une forme bilinéaire continue définie sur$H \times H$, à valeurs dans R, c'est à dire qu'il existe une constante M telle que :

$$\forall\; (u, v) \in H \times H, \; |A(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H . \tag{2.8}$$

3. A est coercive, c'est à dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $v \in H$

$$A(v,u) \geq \alpha \|v\|_H^2 .$$

On peut maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.8. *(de Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert réel, A une forme bilinéaire continue et coercive sur H et L une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème variationnel (2.7). De plus, il existe une constante C telle que :*

$$\|u\| \leq C \|L\|_{H'} .$$

Preuve. *Le théorème de Riesz permet de définir une application linéaire A telle que :*

$$A(u,v) = (A(u), v),$$

et un vecteur f tel que,

$$L(u) = (f, u).$$

De sorte que le problème est équivalent à :

$$A(u) = f.$$

On montre maintenant que A est injectif et surjectif. L'injéctivité vient du fait que :

$$\begin{aligned} \alpha \|v\|^2 &\leq A(v,v) \\ &\leq A(v,v) \\ &\leq (A(v), v). \end{aligned}$$

Montrons maintenant la surjectivité. Soit F l'image de H par A. F est un sous espace fermé de H. En effet, si $A(x_n)$ est une suite convergente, alors c'est une suite de Cauchy. Ceci implique que (x_n) est de Cauchy. Elle converge donc vers un élément x. Alors par continuité de A, $A(x_n)$ converge vers $A(x)$ et F est fermé. On a donc $H = F \bigoplus F^{\perp}$ $\big($utiliser le théorème de projection sur un sous espace vectoriel fermé$\big)$. Maintenant, soit $x \in F^{\perp}$. Alors, $\forall\, y \in H$,

$$(A(y), x) = (Ay, x) = 0.$$

Donc, en particulier

$$\alpha \|x\|^2 \leq A(x,x) = 0.$$

D'ou $x = 0$ et $F = H$.c-à-d A est surjéctive.

2.4.5 Résolution du problème de Dirichlet homogène

Nous allons vérifier que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. L'espace $H = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ induite par l'espace $H^1(\Omega)$, mais aussi, d'après l'inégalité de Poincaré, pour la norme réduite $|.|_{H_0^1(\Omega)} = \left(f_\Omega |\nabla .|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ c'est donc cette norme que l'on choisit. La forme L est continue. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$|L| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_p} \|f\|^2 (\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où C_p désigne la constante de l'inégalité de Poincaré. Étudions la continuité de la forme bilinéaire A. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, d'abord dans $L^2(\Omega)$ puis dans $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\left|\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On a également,

$$\Big|\int_\Omega cuvdx\Big| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où :

$$|A(u,v)| \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Reste à étudier la coercivité de A On a :

$$A(v,v) = |v|^2_{H_1^0(\Omega)} + \int_\Omega cv^2 dx.$$

Si $c \geq 0$ alors A est coercive. On peut être un peu plus précis. On pose $c^-(x) = c(x)$ si $c(x) \leq 0, c^-(x) = 0$ sinon. On a alors,

$$A(v,v) \geq \left(1 - C_p \left\|c^-\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc si $1 - C_p \|c^-\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$, alors la forme A est coercive et on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram. On a donc le théorème suivant :

Théorème 2.9. *Supposons que $f \in L^2(\Omega), c \in L^\infty(\Omega)$. Alors si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1. $c \geq 0$ *p.p sur* Ω.
2. $\|c^-\|_{L^\infty}(\Omega) < \dfrac{1}{C_p}$.

Alors le problème variationnel (2.3)-(2.6) *admet une unique solution dans l'espace* $H_0^1(\Omega)$. *On a par ailleurs* $\Delta u \in L^2(\Omega)$. *De plus, u vérifie l'équation* (2.2) *p.p dans* Ω *et la condition aux limite p.p sur* $(\partial\Omega)$. *Enfin, il existe une constante positive* C_0 *telle que :*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.9}$$

et le problème dépend continûment de la donnée f.

Preuve. *L'existence, l'unicité, la régularité et le lien avec le problème aux limites ont déjà été établis. Il reste à montrer l'inégalité* (2.9). *On utilise le fait que*

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq A(u,u) = L(u) \leq \sqrt{C_p} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Ce qui montre le résultat avec $C_0 = \sqrt{\dfrac{C_p}{\alpha}}$.

2.5 Calcul de variations et EDP élliptiques non-linéaires

On se donne le problème qui consiste à résoudre sur un domaine régulier borné Ω :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cela est équivalent à minimiser sur H_0^1 la formule :

$$J(v) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2\right) - f(v),$$

c'est a dire que les solutions du problème aux limites sont aussi des points critiques pour J, et comme J est strictement convexe, alors il y'a un point critique unique pour J. Nous allons exploiter ce lien dans cette partie et nous nous restreindrons aux méthodes de minimisation pour les EDP's qui apparaissent comme équation de point critique (Euler-Lagrange) de fonctionnelles d'énergie. Nous abordons aussi les méthodes de point-fixe pour l'existence de solutions a certains problèmes non-linéaires.

2.5.1 Méthode direct de calcul des variations

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $p \in]1,\infty[$ et considérons le problème suivant :

$$\inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u) \quad \text{avec} \quad J(u) = \int_\Omega (F(\nabla u(x)) + G(u(x)))\,dx. \tag{2.10}$$

Théorème 2.10. *Supposons que F et G sont continues, et que G est minorée, de plus il existe $A>0$ et $G\in\mathbb{R}$ tels que F vérifie* $\big($*la condition de coercivité*$\big)$ *:*

$$F(z)\geq A|z|^{p}+B,\ \ \forall z\in\ R^{d}.$$

Et de plus F est convexe sur R^d. Alors (2.10) *possède au moins une solution.*

Preuve. *Soit $(u_n)_n$ une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $J(u_n)\longrightarrow\inf$ (2.10). Il résulte de l'hypothèse de coercivité et du fait que G est minorée que $\|\nabla u_n\|$ est bornée et donc, avec l'inégalité de Poincaré on en déduit que (u_n) est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. Comme $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif, on peut supposer que (u_n) converge faiblement vers $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est faiblement fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$, on a $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$. L'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ étant compacte, on peut supposer que $u_n\longrightarrow u$ dans L^p p.p, et on a $\nabla u_n\rightharpoonup\nabla u$ dans L^p. Le lemme de Fatou et le fait que G est minorée permettent de déduire que*

$$\liminf\int_{\Omega}G(u_n)\geq\int_{\Omega}G(u).$$

Le même argument montre que $v\in W^{1,p}(\Omega)\longrightarrow\displaystyle\int_{\Omega}F(\nabla v)$ est sci pour la topologie forte de $W^{1,p}(\Omega)$, comme F est convexe, cette fonctionnelle est convexe et donc sci aussi pour la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega)$. On a donc :

$$\liminf\int_{\Omega}F(\nabla u_n)\geq\int_{\Omega}F(\nabla u).$$

Ceci permet d'en conclure que u est solution de (2.10).
Revenant au problème de départ (2.10) *et supposons maintenant que F et G soient C^1 et qu'il existe une constante C telle que ∇F et G vérifient les condition de croissance :*

$$|\nabla F(z)|\leq C\left(|z|^{p-1}+1\right),\ \forall z\in\mathbb{R}^{d}.$$

Et, si $p\leq d$:

$$|G'(u)|\leq C\left(|u|^{q-1}+1\right),\ \forall u\in\ R.$$

Avec $q>1$ tel que $W^{1,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$.

Alors on énonce ici le théorème d'equivalence entre solution du problème (2.10) et celle de l'équation d'Euler- Lagrange :

Théorème 2.11.

$$-div\left(\nabla F(\nabla u)\right)+G'(u)=0\ \ \ dans\ \ \Omega, u/_{\partial\Omega}=0. \tag{2.11}$$

c'est à dire que :

$$\int_{\Omega} \nabla F(\nabla u) . \nabla \varphi + \int_{\Omega} G'(u) \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) . \tag{2.12}$$

Preuve. *Soit* $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $0 \leq \epsilon \leq 1$, *on a :*

$$\frac{1}{\epsilon}(J(u+\epsilon\varphi) - J(u)) . \tag{2.13}$$

On a d'abord $\eta_\epsilon = \epsilon^{-1}(F(\nabla u + \epsilon \nabla \varphi) - F(\nabla u))$ *p.p quand* $\epsilon \longrightarrow 0$. *Par ailleurs, l'inégalité des accroissements finis et l'hypothèse de croissance sur* ∇F *donnent :*

$$|\eta_\epsilon| \leq |\nabla \varphi| \sup_{[\nabla \nabla u + \epsilon \nabla \varphi]} |\nabla F| \leq C |\nabla| (\nabla u + \nabla \varphi)^{p-1} \in L^1.$$

Avec le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\Omega} \eta_\epsilon = \int_{\Omega} \nabla F(\nabla u) \nabla \varphi.$$

De la même manière, on aura

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (G(u+\epsilon\varphi) - G(u)) = \int_{\Omega} G'(u) \varphi,$$

et donc en passant a la limite dans (2.13) *,on en déduit :*

$$\int_{\Omega} \nabla F(\nabla u) . \nabla \varphi + \int_{\Omega} G'(u) \varphi \geq 0.$$

Changeant φ *en* $-\varphi$, *on obtient que l'inégalité précédente est en fait une égalité, ce qui permet de conclure.*

Les hypothèses de croissance sur les dérivées sont importantes. Sans elles, il se pourrait qu'il existe des minimiseurs qui ne soient pas solutions de l'equation d'Euler-Lagrange.

On énonce maintenant deux théorèmes très puissants d'existence de point fixe en dimension finie et infinie.

Théorème 2.12. *(Brouwer) Soit* C *une partie convexe compacte de* $\mathbb{R}^d$ *et soit* $f :\longrightarrow C$ *continue, alors il existe* $\overline{x}$ *tel que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Preuve. *On va prouver le résultat dans le cas* $C = \overline{B}^d$ *et on déduit le cas général en remarquant que tout convexe compact est homéomorphe a une boule euclidienne de dimension finie.*

Supposons par l'absurde que f *soit une application continue de* $\overline{B}^d$ *dans elle même sans point fixe.*

$$\inf \left\{ \|x - f(x)\|, x \in \overline{B}^d \right\} > 0. \tag{2.14}$$

L'inégalité restant satisfaite pour les fonctions suffisamment uniformément proches de f, *on peut en outre supposer que* f *est de classe* C^1 $\big($*en régularisant par convolution*$\big)$. *Pour* $x \in \overline{B}^d$ *soit* $g(x)$ *l'intersection de* S^{d-1} *avec la demi droite*$\Big\{ x + \lambda (f(x) - x), \lambda \geq 0 \Big\}$. *Avec* (2.14),$g$ *est bien définie et de classe* C^1. *par construction* g *envoi*$\overline{B}^d$ *sur* S^{d-1} *et* $g(x) = x$ *pour tout* $x \in S^{d-1}$, *ce qui contredit la conclusion du théorème* (2.14).

En dimension infinie, le théorème du point fixe de Schauder est très utile pour les EDP's non linéaires et s'énonce comme suit :

Théorème 2.13. *(Schauder) Soit* C *une partie convexe fermée bornée d'un espace de Banach* E *et* f *continue telle que* $f(C)$ *soit relativement compact, alors il existe* $\overline{x} \in C$ *tel que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Preuve. *Comme* C *est relativement compacte, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* N_ϵ *et des points* $x_1^\epsilon, \cdots, x_N^\epsilon$ *de* C *tels que :*

$$f(C) \subset \cup_{i=1}^{N_\epsilon} B(f(x_i^\epsilon, \epsilon)).$$

Soit E_ϵ *le sous espace vectoriel engendré par* $\Big\{ f(x_1^\epsilon), \cdots, f\left(x_{N_\epsilon}^\epsilon\right) \Big\}$. *Notons* $B^c(f(x_i^\epsilon), \epsilon)$ *le complémentaire de* $B(f(x_i^\epsilon), \epsilon)$ *et posons pour tout* $x \in C$ *et* i *:*

$$\alpha_i^\epsilon(x) = \frac{d(f(x), B^c(f(x_i^\epsilon), \epsilon))}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N_\epsilon} d(f(x), B^c f(x_i^\epsilon))}.$$

De sorte que $\alpha_i^\epsilon(x) > 0$ *ssi* $\|f() - f(x_i^\epsilon)\| < \epsilon$. *Soit* $C_\epsilon = C \cap E_i$ *et pour* $x \in C_\epsilon$, *posons*

$$f_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \alpha_i^\epsilon(x) f(f(x_i^\epsilon)),$$

par convexité de C, $f_\epsilon(C) \subset C_\epsilon$ *et* f_ϵ. *Comme* E_ϵ *est de dimension finie et* C_ϵ *est convexe compact dans* E_ϵ, *on déduit du théorème de Brouwer qu'il existe* $x_\epsilon \in C_\epsilon$ *tel que* $x_\epsilon = f_\epsilon(x_\epsilon)$. *Par construction, pour chaque* ϵ, x_ϵ *appartient a l'enveloppe convexe fermée de* $f(C)$, $\overline{co}(f(C))$. *Grace au lemme ci-dessous*(2.15), $\overline{co}(f(C))$ *est compact, en prenant* $\epsilon = \dfrac{1}{n}, x_n = x_{\epsilon,n}$, *on peut donc quitte a passer par une suite extraite, supposer que* x_n *converge vers* $\overline{x} \in \overline{co}(f(C)) \subset C$. *Montrons que* $\overline{x}$ *est un point fixe de* f. *Pour tout* n, *on a :*

$$f(\overline{x}) - f_{\epsilon_n}(x_n) = \sum_{i=1}^{N_{\epsilon n}} \alpha_i^{\epsilon_n}(x_n)(f(\overline{x}) - f(x_n) + f(x_n)). \tag{2.15}$$

Dans la somme précédente il n' y a que des termes tels que $\|f(x_n) - f(x_i^{\epsilon_n})\| < \epsilon_n$ *et donc*

$$\|f(\overline{x}) - f_{\epsilon_n}(x_n)\| \leq \|f(\overline{x}) - f(x_n)\| + \epsilon_n.$$

Ceci implique que $f_{\epsilon_n}(x_n)$ *converge vers* $f(\overline{x})$*. On en déduit donc que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$ *en passant a la limite dans* $f_{\epsilon_n}(x_n) = x_n$*.*
On signal que l'on a utilisé le lemme suivant dans la démonstration du théorème de Schauder ci-dessus.

Lemme 2.4. *Soit* E *un espace de Banach et* K *une partie relativement compacte de* E*, alors* $\overline{co}(K)$ *est compact.*

En guise d'application on introduit la section suivante :

2.6 Resolution d'un problème modèle par une méthode de point fixe :

En application des théorèmes de point fixe, nous nous intéressons dans cette section a un problème d'équations aux dérivées partielles élliptiques non linéaire. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction de $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Le problème consiste a trouver une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f(u)$ au sens de $D'(\Omega)$.
Pour mettre ce problème sous forme d'un problème de point fixe, on commence par énoncer un résultat d'existence et d' unicité linéaire.

Proposition 2.6. *Soit* $g \in H^{-1}(\Omega)$*. Il existe un unique* $v \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $-\Delta v = g$ *au sens de* $D'(\Omega)$*. Cette fonction* v *est l'unique solution du problème variationnel :*

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega \nabla v \nabla w dx = (g, w)\,.$$

De plus, l'application $g \longrightarrow (-\Delta)^{-1} g = v$ *est continue de* $H^{-1}(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$*.*
Il est facile d'établir l'existence est l'unicité d'après ce qu'on a vu un peu plus haut, quand a la continuité de $-\Delta^{-1}$ *on prend* $v = w$ *dans la formulation variationnelle et on utilise l'inégalité de Poincaré.*
Dans le problème modèle apparaît au second membre de l'équation un terme de la forme $f(u)$ *dont nous n'avons pas encore précise le sens. C'est l'objet du théorème de Carathéodory, introduit par un lemme. On note* $\sim$ *la relation d'équivalence de l'égalité presque partout des fonctions mesurables.*

Lemme 2.5. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^0(\mathbb{R})$*. Pour tout couple de fonctions mesurables* u_1 *et* u_2 *sur* Ω*, si* $u_1 \sim u_2$ *alors* $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$*.*

Preuve. *Notons d'abord que si une fonction* u *est mesurable alors* $f \circ u$ *l'est aussi, puisque* f *est continue. Supposons que* $u_1 \sim u_2$*, i.e.,* $u_1 = u_2$ *presque partout dans* Ω *alors,* $f(u_1(x)) = f(u_2(x))$*, c'est-a-dire* $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$*.*

Théorème 2.14. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^0(\mathbb{R})$ *telle que* $|f(t)| \leq a+b|t|$. *On définit pour toute classe d'équivalence de fonctions mesurables sur* Ω *la classe d'équivalence* $f(u) = f \circ u$ *comme au lemme precedent. Alors, l'application* $u \longrightarrow f \circ u$ *envoie* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *et est continue pour la topologie forte.*

Preuve. *Si* $u \in L^2(\Omega)$, *alors :*

$$\int_\Omega |f(u)|^2 \, dx \leq 2a^2 mes(\Omega) + 2b^2 \|.\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty,$$

donc $f(u) \in L^2(\Omega)$.

Montrons que l'application ainsi définie est continue de $L_2(\Omega)$ *dans* $L_2(\Omega)$. *Soit* u_n *une suite convergente dans* $L_2(\Omega)$ *vers une limite* u. *Soit* u'_n. *une sous suite de* u_n. *Extrayons une nouvelle sous-suite* u''_n *qui converge presque partout, vers* u, $u''_n(x) \longrightarrow u(x)$, *et telle qu'il existe une fonction* $g \in L^2(\Omega)$ *telle que :* $|u_n(x)| \leq g(x)$ *presque partout* $\big($*c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue*$\big)$.

Nous avons donc $|f(u''_n(x)) - f(u(x))|^2 \longrightarrow 0$ *presque partout puisque* f *est continue et* $|f(u'') - f(u)|^2 \leq 4a^2 + 4b^2 g^2 + 2|f(u)|^2$. *Le second membre de cette inégalité est une fonction de* $L^1(\Omega)$ *qui ne dépend pas de* n''.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour en déduire que :

$\int_\Omega |f(u''_n) - f(u)|^2 \, dx \longrightarrow 0$, *c'est a dire que* $f(u_{n''}) \longrightarrow f(u)$ *dans* $L^2(\Omega)$.

Nous avons montré que de toute sous-suite $f(u'_n)$, *nous pouvons extraire une sous-suite qui converge vers* $f(u)$ *dans* $L^2(\Omega)$. *L'unicité de cette limite implique que c'est la suite entière* $f(u_n)$ *qui converge.*

Remarque 2.11. *Le théorème de Carathéodory est en fait plus général. Par exemple, soit* A *un borélien de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f A.R \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que :*

$$\begin{cases} f(.,s) & \text{est mesurable sur } A \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, \\ f(x,.) & \text{est continue sur } R \text{ pour presque tout } x \in A, \end{cases}$$

$\big($*une telle fonction est dite fonction de Carathéodory*$\big)$. *On suppose qu'il existe des exposants* $1 \leq p, q < \infty$, *une fonction* $a \in L^q(A)$ *et une constante* $b \geq 0$ *tels que :*

$$|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{p/q} \quad \forall x, s.$$

Alors l'application $u \longrightarrow f(u)$ *définie par* $f(u)(x) = f(x, u(x))$ *est continue de* $L^p(A)$ *dans* $L^q(A)$.

Nous pouvons maintenant attaquer le problème modèle.

Théorème 2.15. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Il existe au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u = f(u)$ au sens de $D'(\Omega)$.*

Preuve. *On donne une des deux démonstrations utilisant le théorème de point fixe de Schauder.*

1. *On prend comme espace de Banach de base $E = L^2(\Omega)$. D'après le théorème* (2.6.1), *si $v \in E$ alors $f(v) \in E$.*

Posons $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T : E \longrightarrow E$ est continue. En effet, elle est composée d'applications continues :

$$L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)^{-\Delta^{-1}} \longrightarrow H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

$$v \mapsto f(v) \mapsto T(v) \mapsto T(v).$$

Vérifions que tout point fixe de T est une solution de notre problème. Soit donc $u \in L^2(\Omega)$ tel que $T(u) = u$. Comme $T(u) = (-\Delta)^{-1}(f(u))$, on en déduit d'abord que $u \in H_0^1(\Omega)$. D'autre part, par définition de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$, $(-\Delta)T(u) = f(u)$ au sens de $D'(\Omega)$ et donc u est solution du problème modèle $\big($et réciproquement$\big)$.

Pour appliquer le théorème de Schauder, il faut encore choisir un convexe. Nous prenons ici $C = \left\{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M\right\}$ ou M est une constante a choisir $\big($on prend ici : $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ en utilisant l'inégalité de Poincaré$\big)$. L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, donc C qui est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, est relativement compact dans E. De plus, c'est un fermé de E. En effet, si $v_n \in C$ converge vers $v \in E$ dans E, alors v_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et contient donc une sous-suite v'_n. qui converge faiblement vers un element $L^2(\Omega)$, lequel ne peut être que v. De plus, la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la norme implique que :

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n' \to \infty} \|v'_n\|_{H_0^1(\Omega)},$$

c'est à dire $v \in C$. Par consequent, C est compact dans E.

Nous allons choisir la constante M pour que $T(C) \subset C$. Il s'agit d'un problème d'estimation de $T(v)$. $T(v)$ est solution du problème variationnel :

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla T(v) \nabla w dx = \int_\Omega f(v) w dx.$$

En prenant $w = T(v)$ dans l'équation précédente, il vient :

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|f\|_\infty \int_\Omega |T(v)|\, dx,$$

puisque $|f(v)\,T(v)|\,\|f\|_{L^\infty(R)}\,|T(v)|$. *Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous en déduisons que :*

$$\|\nabla T(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(R)}\, mes\,(\Omega)^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_Ω *telle que pour tout* $z \in H^1_0(\Omega)$, $C_{(\Omega)}\,\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$. *Comme* $T(v) \in H^1_0(\Omega)$, *nous obtenons donc, pour tout* v *dans* E,

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\, \|f\|\, L_\infty\, (mes\,(\Omega))^{\frac{1}{2}}\,.$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, *il suffit donc de prendre* $M = C_\Omega\, \|f\|\, L_\infty\, (mes\,(\Omega))^{\frac{1}{2}}$ *puisqu'alors,* $T(E) \subset C$.
Les hypothèses du théorème de Schauder, premiere version, sont satisfaites, par conséquent, il existe au moins une solution du problème modèle dans l'ensemble C.

Chapitre 3

Les espaces de Orlicz

Introduction

Si on retourne un moment aux espaces de Lebesgue $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ qu'on a vu précédemment, une fonction u définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ appartient a $L_p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty. \tag{3.1}$$

L'espace $L_p(\Omega)$ est normé par :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Si on pose $\Phi : \Phi(t) = t^p$ on peut réécrire (3.1) et (3.2) respectivement sous la forme :

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|) \, dx < \infty,$$

$$\|u\|_p = \Phi^{-1} \left(\int_\Omega \Phi(|u(x)|) \, dx \right).$$

Φ^{-1} étant la fonction inverse de Φ : $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}$.
On peut nous demander maintenant si c'est possible de remplacer la fonction Φ ci-dessus par une fonction plus générale.On définie les fonctions de Young.

3.1 Les fonctions de Young

Définition 3.1. *La fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite fonction de young, si*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) \, ds, \quad t \geq 0,$$

tel que $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\varphi(0) = 0$.
2. $\varphi(s) \geq 0$ *pour tout* $s \geq 0$.
3. φ *est continue a droite en tout point* $s \geq 0$.
4. φ *est non décroissante.*
5. $\lim_{s \to \infty} \varphi(s) = \infty$.

Les propriétés des fonctions de Young sont données dans le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Une fonction de Young* Φ *est continue, non négative, et convexe sur* $[0, \infty[$ *et vérifie*

$$\Phi(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t \to \infty} \Phi(t) = \infty, \tag{3.3}$$

et

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0, \tag{3.4}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty. \tag{3.5}$$

Preuve. *La continuité, non négativité et la monotonie de* Φ *sont simples a établir d'après les propriétés de* φ. *Concernant la convexité, on prend* $\lambda \in]0, 1[$ *et* $0 \leq s \leq t$, *on doit prouver que :*

$$\Phi(\lambda s + (1 - \lambda) t) \leq \lambda \Phi(s) + (1 - \lambda) \Phi(t). \tag{3.6}$$

On a

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda s + (1 - \lambda) t) &= \int_0^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r)\, dr \\ &= \int_0^s \varphi(r)\, dr + \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r)\, dr \\ &= \lambda \int_0^s \varphi(r)\, dr + (1 - \lambda) \int_0^s \varphi(r)\, dr + \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r)\, dr. \end{aligned}$$

Puisque φ *est croissante continue a droite, on a*

$$\int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r)\, dr \leq (1 - \lambda)(t - s)\, \varphi(\lambda s + (1 - \lambda) t),$$

$$\int_{\lambda s + (1-\lambda)t}^{t} \varphi(r)\, dr \geq \lambda (t - s)\, \varphi(\lambda s + (1 - \lambda) t).$$

En comparant les deux dernières inégalité on aura :

$$\lambda \int_s^{\lambda s + (1-\lambda)t} \varphi(r)\, dr \leq (1 - \lambda) \int_{\lambda s + (1-\lambda)t}^{t} \varphi(r)\, dr,$$

c'est a dire

$$\begin{aligned}\int_s^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)\,dr &= \lambda\int_s^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)\,dr+(1-\lambda)\int_s^{\lambda s+(1-\lambda)t}\varphi(r)\,dr\\ &\le (1-\lambda)\int_s^t\varphi(r)\,dr.\end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.6) *on aura*

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda s+(1-\lambda)t) &\le \lambda\int_0^s\varphi(r)\,dr+(1-\lambda)\int_s^t\varphi(r)\,dr+(1-\lambda)\int_0^s\varphi(r)\,dr\\ &= \lambda\int_0^s\varphi(r)\,dr+(1-\lambda)\int_0^t\varphi(r)\,dr=\lambda\Phi(s)+(1-\lambda)\Phi(t),\end{aligned}$$

donc on a vérifié (3.6).
De plus

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\Phi(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(s)\,ds=\varphi(0)=0.$$

Remarque 3.1. *En utilisant la convexité de la fonction de Young* Φ *:*

$$\Phi(\alpha t+(1-\alpha)s)\le\alpha\Phi(t)+(1-\alpha)\Phi(s), \tag{3.7}$$

avec $0\le\alpha\le 1$ $s,t\ge 0$ *et en posant* $s=0$ *on aura*

$$\Phi(\alpha t)\le\alpha\Phi(t). \tag{3.8}$$

Soit $\beta\ge 1$ *alors pour* $\alpha=\dfrac{1}{\beta}$ *et* $t=\beta s$*, nous obtenons*

$$\Phi\left(\frac{1}{\beta}\beta s\right)\le\frac{1}{\beta}\Phi(\beta s)\quad i.e\ \ \Phi(\beta t)\ge\beta\Phi(t). \tag{3.9}$$

Remarque 3.2. *Les fonctions de Young sont étudiées en Détail dans [3].Elles sont aussi appelées N-fonctions dans certains papiers citons quelqu'uns en guise de référence pour l'essentiel des résultats et théorèmes de ce chapitre* $\big($*[7],[3], [4], [5]*$\big)$*, il est démontré dans [3] que : Si* Φ *est continue,croissante et convexe dans* $[1,\infty[$ *et si* (3.4) *et* (3.6) *sont réalisées alors* Φ *est une fonction de Young. La définition de fonction de Young peut être légèrement modifié en remplaçant les conditions* (2) *et* (3) *de la définition par :*

1. $\varphi(s)\ge 0$ *pour* $s>0$.
2. $\varphi(s)$ *est continue a gauche en tout point* $s>0$.

En général, après cette modification, tous les résultats sur les espaces d'Orlicz restent valides.

Exemple 3.1. *On donne quelques exemples :*

1. *Pour* $\varphi(t) = t^{p-1}$, *avec* $p \geq 1$ *nous avons :* $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$.
2. *Pour* $\varphi(t) = e^t - 1$ *nous avons* $\Phi(t) = e^t - t - 1$.
3. *Pour* $\varphi(t) = 2te^{t^2}$ *nous avons* $\Phi(t) = e^{t^2} - 1$.

Lemme 3.2. *Puisque la fonction de Young* $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est continue et strictement croissante, alors elle admet une fonction inverse a droite notée* Φ^{-1}.

3.2 Fonctions complémentaires

Définition 3.2. *Soit* Φ *une fonction de Young générée par la fonction* φ *:*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

On définie une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *par*

$$\psi(t) = \sup\Big\{s \geq 0;\ \varphi(s) \leq t\Big\}.$$

On pose

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds.$$

La fonction Ψ *est alors appelée fonction complémentaire à la fonction de Young* Φ.

Remarque 3.3. *La fonction* ψ *est bien définie, et vérifie les mêmes propriétés que* φ. *Si* φ *est continue et strictement croissante dans* $[0, \infty[$ *alors* ψ *est la fonction inverse* φ^{-1} *et vice versa, dans le cas général* φ *et* ψ *sont mutuellement inverse l'une de l'autre.Par conséquent, si*Ψ *est complémentaire a* Φ *alors* Φ *est complémentaire a* Ψ. *Les deux fonctions de Young* Ψ *et* Φ *sont liées par la relation*

$$\Psi(v) = \sup\Big\{uv - \Phi(u), u \geq 0\Big\} \quad v \in \mathbb{R}_+. \tag{3.10}$$

D'ou découle l'inégalité suivante :

(Inégalité de Young)

Soit Φ,Ψ une paire de fonctions de Young complémentaires. Alors, pour tout u, v $\in [0, \infty[$ on a

$$uv \leq \Psi(u) + \Phi(v) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}_+. \tag{3.11}$$

Remarque 3.4. *L'égalité dans* (3.11) *est vraie seulement si*

$$u = \varphi(v) \quad et \quad v = \psi(u). \tag{3.12}$$

Remarque 3.5. *Pour* $p \geq 1$*, la fonction complémentaire de* $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$ *est donnée par* $\Psi(t) = \dfrac{t^q}{q}$ *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Pour $\Phi(t) = e^t - t - 1$*, la fonction complémentaire est donnée par*

$$\Psi(t) = (1+t)\log(1+t) - t.$$

3.3 Classes d'Orlicz

Définition 3.3. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* Φ *une fonction de Young. On note :* $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *L'ensemble de toutes les fonctions mesurables définies p.p sur* Ω *tel que :*

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)\,dx < \infty. \tag{3.13}$$

L'ensemble $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *s'appelle classe d'Orlicz. Nous utilisons la notation*

$$|||u|||_{(\Phi)} = \int_\Omega \Phi(|u(x)|)\,dx. \tag{3.14}$$

Remarque 3.6. *Notons que classe d'Orlicz* $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *n'est pas en général un espace vectoriel car, si on considère* $N = 1, \Omega =]0,1[$ *et* $\Phi(t) = e^t$*, alors, la fonction* $u(x) = -\dfrac{1}{2}\log x$ *appartient a* $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *,mais la fonction* $v(x) = -\log(x) = 2u(x)$ *n'appartient pas a* $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$.

Proposition 3.1. La classe d'Orlicz $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ est un ensemble convexe.

Preuve. *Soit* $u_1, u_2 \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *et* $\alpha \in]0,1[$*, alors d'après la convexité et la monotonie de* Φ *on a*

$$\int_\Omega \Phi(|\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x)|)\,dx \leq \alpha \int_\Omega \Phi(|u_1(x)|)\,dx + (1-\alpha)\int_\Omega \Phi(|u_2(x)|)\,dx < \infty.$$

Théorème 3.1. *Soient* Φ *et* Ψ *une paire de fonction de Young complémentaires,* $u \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *et* $v \in \widetilde{L}_\Psi(\Omega)$*, alors*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq |||u|||_{(\Phi)} + |||v|||_{(\Psi)}. \tag{3.15}$$

En conséquence de quoi $|u.v| \in L_1(\Omega)$.

Preuve. *Il suffit pour cela de prendre* (3.11) *telle que :* $u = |u(x)|$ *et* $v = |v(x)|$ *et d'intégrer sur* Ω.

Remarque 3.7. *Il advient de* (3.11) *et* (3.12) *que l'égalité occur dans*(3.15) *si :*

$$|v(x)| = \varphi(|u(x)|) \quad et \quad |u(x)| = \psi(|u(x)|).$$

3.4 Espaces d' Orlicz

Définition 3.4. *Soit Φ une fonction de Young, l'ensemble $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ de toutes les fonctions mesurables u définies presque partout sur Ω tel que :*

$$\|u\|_{\Phi} = \sup\left\{ \int_{\Omega} |u(x)\, v(x)|\, dx;\ v \in \widetilde{L}_{\Phi}(\Omega) \quad et \quad |||v|||_{(\Psi)} \leq 1 \right\} < \infty, \tag{3.16}$$

est dit espace d'Orlicz.

Remarque 3.8. *On écrit $\sup_v$ au lieu de $\sup_{v,\, |||v|||_{(\Psi)} \leq 1}$ dans les démonstrations suivantes afin d'alléger les écritures.*

Théorème 3.2. *L'ensemble $L_{\Phi}(\Omega)$ est un espace vectoriel et l'application $\|.\|_{\Phi} : L_{\Phi}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$ est une norme sur $L_{\Phi}(\Omega)$, appelée norme d'Orlicz.*

Preuve. *Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u, w \in L_{\Phi}(\Omega)$, alors :*

$$\|cu\|_{\Phi} = \sup_{v} \int_{\Omega} |cu(x)\, v(x)|\, dx = |c| \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)\, v(x)|\, dx = |c|\, \|\Phi\|_{\Phi} < \infty.$$

Ce qui veut dire que $cu \in L_{\Phi}(\Omega)$, de plus :

$$\begin{aligned} \|u+w\|_{\Phi} &= \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x) + w(x)| \,.\, |v(x)|\, dx \\ &\leq \sup_{v} \int_{\Omega} |u(x)| \,.\, |v(x)|\, dx + \sup_{v} \int_{\Omega} |w(x)| \,.\, |v(x)|\, dx \\ &= \|u\|_{\Phi} + \|v\|_{\Phi} < \infty. \end{aligned}$$

On aura donc montré que $u+w \in L_{\Phi}(\Omega)$ et l'inégalité triangulaire pour la norme d'Orlicz, donc $L_{\Phi}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Pour prouver que $\|.\|_{\Phi}$ est une norme, il reste a montrer que :

1. $\|u\|_{\Phi} = 0$ *si et seulement si $u = 0$ p.p dans Ω.*

Il est triviale que si $u = 0$ p.p alors $\|u\|_{\Phi} = 0$.

Soit maintenant $\|u\|_{\Phi} \neq 0$ et Ω_1 un sous-ensemble de Ω tel que $0 < \mu(\Omega_1) < \infty$ nous avons :

$\lim_{t \to 0} \Psi(t) = 0$ *puisque Ψ est une fonction de Young. Alors, $\exists\, k \geq 0$ telle que $\Psi(k) < \dfrac{1}{\mu(\Omega_1)}$.*

Si on définit v par :

$$v(x) = \begin{cases} k & si \quad x \in \Omega_1 \\ 0 & si \quad x \in \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

Alors :

$$|||v|||_{(\Psi)} = \int_{\Omega} \Psi\, |v(x)|\, dx = \int_{\Omega_1} \Psi(k)\, dx < 1.$$

De la définition (3.16) *de la norme d'Orlicz on a :*

$$\|u\|_{\Phi} \geq \int_{\Omega} |u(x)|\, v(x)\, dx = k \int_{\Omega_1} |u(x)|\, dx,$$

$\|u\|_{\Phi} \leq 0 \Longrightarrow u(x) = 0$ *pour presque tout* $x \in \Omega_1$.
Puisque on a pris un $\Omega_1 \subset \Omega$ *arbitraire alors,* $u(x) = 0$ *p.p dans* Ω.

Remarque 3.9. *De la formule* (3.16)*, on a* $\forall\, v$ *tq* $|||v|||_{(\Psi)} \leq 1$ *:*

$$\|u\|_{\Phi} \leq |||u|||_{(\Phi)} + |||v|||_{(\Psi)} \leq |||u|||_{(\Phi)} + 1.$$

Par conséquent, si $u \in \widetilde{L}_{(\Phi)}(\Omega)$ *on a :* $\|u\|_{\Phi} < \infty$ *et ainsi*

$$\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega) \subset L_{\Phi}(\Omega). \tag{3.17}$$

Remarque 3.10. *La norme d'Orlicz* $\|.\|_{\Phi}$ *est monotone dans le sens ou, si* $u, v \in L_{\Phi}(\Omega)$ *et* $|u(x)| \leq |w(x)|$ *pour presque tout* $x \in \Omega$ *alors :*

$$\|u\|_{\Phi} \leq \|v\|_{\Phi}.$$

Remarque 3.11. *S'il existe* $c > 0$ *telle que* $cu \in \widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$*, alors :* $u \in L_{\Phi}(\Omega)$.
En effet en vertu de ce qu'on a vu précédemment : $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega) \subset L_{\Phi}(\Omega)$ *donc on a* $cu \in L_{\Phi}(\Omega)$.
Or, celui-ci est un espace vectoriel : donc $c^{-1}(cu) \in L_{\Phi}(\Omega)$ *i.e* $u \in L_{\Phi}(\Omega)$.

Dans le lemme suivant on donne La forme explicite de la constante c mentionnée un peut plus haut :

Lemme 3.3. *Soit* Φ *une fonction de Young et* $u \in L_{\Phi}(\Omega)$ *telle que* $\|u\|_{\Phi} \neq 0$*, alors :*

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{1}{\|u\|_{\Phi}} |u(x)|\right) dx \leq 1. \tag{3.18}$$

Preuve. *Pour* $u \in L_{\Phi}(\Omega)$*, on a :*

$$\int_{\Omega} |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \begin{cases} \|u\|_{\Phi} & si \quad |||u|||_{(\Psi)} \leq 1 \\ \|u\|_{\Phi}\, |||v|||_{(\Psi)} & si \quad |||v|||_{(\Psi)} > 1 \end{cases}$$

La première partie de l'inégalité ci-dessus découle directement de la définition de la norme d'Orlicz. La seconde est assurée grace à l'inégalité $\Psi(\beta t) \leq \beta \Psi(t)$*; en prenant* $t = |v(x)|$*, et* $\beta = \dfrac{1}{|||v|||_{(\Psi)}}$ *et en intégrant sur* Ω *on aura :*

$$\int_{\Omega} \Psi\left(\frac{1}{|||v|||_{(\Psi)}} |v(x)|\right) dx \leq \frac{1}{|||v|||_{(\Psi)}} \int_{\Omega} \Psi(|v(x)|) = 1.$$

Par la définition de la norme d'Orlicz, on a :

$$\int_\Omega |u\,(x)|\,\frac{|v(x)|}{|||v|||_{(\Psi)}}dx \leq \|u\|_\Phi.$$

Ce qui prouve la deuxième partie de l'inégalité.

Supposons que $u \in L_\Phi(\Omega)$ *est bornée et que* $u(x) = 0$ *pour:* $x \in \Omega - \Omega_0$ *avec*$(\mu(\Omega_0) < \infty)$.*Si on prend :*

$$v(x) = \varphi(\frac{1}{\|u\|_\Phi}|u(x)|).$$

Alors, v *et* $\Psi(|v(x)|)$ *sont aussi bornées, donc elles sont intégrables sur* Ω_0*; de plus elles appartiennent a* $L_1(\Omega)$ *par ce qu'elles sont nulles en dehors de* Ω_0.

$$\int_\Omega \frac{1}{\|u\|_\Phi}|u(x)v(x)|dx = \int_\Omega \Phi(|\frac{u}{\|u\|_\Phi}|)dx + \int_\Omega \Psi(|v(x)|)dx.$$

Alors on a de l'égalité ci-dessus et (2) (écrit pour $\frac{u}{\|u\|_\Phi}$,v*) que :*

$$\max(|||v|||_\Psi, 1) \geq \int_\Omega \Phi(\frac{1}{\|u\|_\Phi}|u(x)|)dx + |||v|||_{(\Psi)}.$$

Si $|||v|||_{(\Psi)} > 1$*, on a nécessairement :*

$$\int_\Omega \Phi(\frac{1}{\|u\|_\Phi}|u(x)|)dx + |||v|||_\Psi = 0.$$

Si $|||v|||_{(\Psi)} \leq 1$*, alors :*

$$\int_\Omega (\frac{1}{\|u\|_\Phi}|u(x)|)dx + |||v|||_\Psi \leq 1,$$

et on a prouvé le résultat.

Soit maintenannt $u \in L_\Phi(\Omega)$ *arbitraire. On définie une suite d'ensembles* Ω_n *de* Ω*, telle que :* $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ *par :*

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega_n et |u(x)| \leq n \\ n & x \in \Omega_n \;\; et \;\; |u(x)| > n \\ 0 & \;\; x \in \Omega - \Omega_n. \end{cases}$$

de la première partie de la preuve on a :

$$\int_\Omega \Phi(\frac{1}{\|u_n\|}|u_n(x)|)dx \leq 1,$$

de plus, $|u_n(x)| \leq |u(x)|$ *pour presque tout* $x \in \Omega$*, et vu que* $\|\|_\Phi$ *est croissante :*
$\|u_n\|_\Phi \leq \|u\|_\Phi$ $\forall n \in N$ *ainsi :*

$$\frac{|u_n(x)|}{\|u\|_\Phi} \leq \frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|_\Phi} \quad et \quad \Phi(\frac{|u_n(x)|}{\|u\|_\Phi}) \leq \Phi(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|_\Phi}),$$

et puisque $\|.\|_\Phi$ est croissante, par conséquent :

$$\int_\Omega \Phi(\frac{1}{\|u_n\|}|u(x)|)dx \leq 1.$$

Les suites $\{|u_n(x)|\}_{n=1}^\infty$ et $\{\Phi(|u_n|)/\|u\|_\Phi\}_{n=1}^\infty$ sont non décroissantes, alors d'après le théorème de Bepo-Lévi *on a :*

$$\int_\Omega \Phi(\frac{1}{\|u\|_\Phi}|u(x)|)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Phi(\frac{1}{\|u\|_\Phi}|u_n(x)|)dx \leq 1,$$

d'ou le résultat.
On a vu l'inégalité de Holder :

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p\|v\|_{p'}.$$

Le théorème suivant donne une inégalité analogue dans $L_\Phi(\Omega)$

Théorème 3.3. *Soit Φ, Ψ deux fonctions de Young complémentaires, si $u \in L_\Phi(\Omega)$ et $v \in L_\Psi(\Omega)$, alors $|uv| \in L_1$ et:*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_\Phi.\|v\|_\Psi$$

Preuve. *Pour $\|v\|_\Psi = 0$ l'inégalité est triviale. Sinon, on applique le lemme (3,3), l'inégalité suit alors de la définition de la norme d'Orlicz:*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx = \|v\|_\Psi \int_\Omega |u(x)\frac{v(x)}{\|v\|_\Psi}|dx \leq \|u\|_\Phi.\|v\|_\Psi$$

Théorème 3.4. L'espace d'Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ est un espace de Banach.

Preuve. *Soit $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $L_\Phi(\Omega)$, c.a.d:*

$$\exists n_0 \in N \quad tq \quad \forall v \in L_\Psi(\Omega); |\|v\||_{(\Psi)} \leq 1, \forall n,m > n_0 : \int_\Omega |u_m(x) - u_n(x)|.|v(x)|dx < \epsilon \tag{3.19}$$

Soit Ω_n une suite de sous ensembles disjoints de Ω, avec: $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ telle que $\Omega = \cup_{n=1}^\infty \Omega_n$. On choisi $k > 0; \Psi(k) = \frac{1}{\mu(\Omega_1)}$ et une fonction v telle que:

$$v(x) = \begin{cases} k & si\ x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

Alors:

$$|||v|||_{(\Psi)} = \int_{\Omega} \Psi(|v(x)|)dx = \int_{\Omega_1} \Psi(k)dx = \Psi(k).\mu(\Omega_1)$$

En utilisant cette fonction v dans (3.19) nous obtenons:

$$\int_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)|.|v(x)|dx < \frac{\epsilon}{k} \quad pour \quad n,m > n_0$$

Cela ségnifie que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de cauchy dans $L_1(\Omega_1)$. puisque cet espace est complet alors $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge dans $L_1(\Omega_1)$ vers u, et donc il éxiste une sous-suite $\{u_{n,1}\}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui convérge vers la même fonction u , presque partout dans Ω_1.

On utilise le mème procédé pour Ω_2 et $\{u_{n,1}\}$ pour obtenir une sous-suite $\{u_{n,2}\}$ de $\{u_{n,1}\}$ qui convèrge presque partout vers une foction (notons la aussi u) dans $L_1(\Omega_2)$. On répete le procédé pour obtenir une suite de sous-suites $\{u_n\} \supset \{u_{n,1}\} \supset \{u_{n,2}\}$...
Et chaque sous-suite converge vers u sur Ω_k presque partout.
Remplaçons u_m par $u_{m,m}$ dans (3.19), on aura $u_{m,m}$ converge vers $u(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, et d'apres le lemme de Fatou

$$\int_{\Omega} \liminf_{m\to\infty} |u_{m,m} - u_n|.|v(x)|dx = \int_{\Omega} |u(x) - u_n(x)||v(x)|dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} |u_m - u_n|.|v(x)|dx \leq \epsilon$$

et donc:

$$\int_{\Omega} |u(x) - u_n(x)||v(x)|dx \leq \epsilon$$

C'est à dire: $\|u_n - u\|_{\Phi} \leq \epsilon$ pour $v \in \widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$: $|||v|||_{(\Psi)} \leq 1$ et $n \geq n_0$, ceci ségnifie cela: $u_n - u \in L_{\Phi}(\Omega)$ et par conséquent aussi $u = u_n - (u_n - u) \in L_{\Phi}(\Omega)$ d'ailleurs:

$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\Phi} = 0$. *Cela veut dire que la suite $u_n(x)$ converge en norme vers u.*

3.5 La norme de Luxembourg

L'évaluation de la norme d'Orlicz ($\|.\|_{\Phi}$) d'une fonction donnée nécessite la connaissance de l'expression de Ψ qui n'est, en général, pas évidente a calculer. Une autre norme *équivalente à* $\|.\|_\Phi$ *dans* $L_\Phi(\Omega)$ *qui fait intérvenir uniquement des térmes en* Φ*, a été introduite par (W. A. J. Luxemburg).*

Définition 3.5. *Soit* Φ *une fonction de Young et* $u \in L_\Phi(\Omega)$*, la quantitée:*

$$|\|u\||_\Phi = \inf\{k > 0 \quad tq \quad \int_\Omega \Phi(\frac{1}{k}|u(x)|)dx \leq 1\}$$

$|\|u\||_\Phi$ *est appellée norme de Luxemburg de u.*

Remarque 3.12. *du Lémme (3.3) il découle que* $\forall u \in L_\Phi(\Omega)$:

$$|\|u\||_\Phi \leq \|u\|_\Phi \quad et \quad \int_\Omega \Phi(\frac{1}{|\|u(x)\||_\Phi}|u(x)|)dx \leq 1$$

Proposition 3.2. *Soit* Φ *et* Ψ *une paire de fonctions de Young complémentaires* $u \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$,$v \in \widetilde{L}_\Psi(\Omega)$ *alors:*

$$\int_\Omega |u(x).v(x)|dx \leq 2|\|u\||_\Phi|\|u\||_\Psi$$

Preuve. *On a les deux Cas:*

1. *Si* $|\|u\||_\Phi|\|v\||_\Phi = 0$*, alors:*$u = 0$ *ou* $v = 0$ *p.p sur* Ω*; elle est triviale.*
2. *Supponsons maintenant que* $|\|u\||_\Phi|\|v\||_\Psi > 0$*, alors:*

$$\frac{|u|}{|\|u\||_\Phi}\frac{|v|}{|\|v\||_\Phi} \leq \Phi\Big(\frac{|u|}{|\|u\||_\Phi}\Big) + \Phi\Big(\frac{|v|}{|\|v\||_\Phi}\Big)$$

Donc:

$$\frac{1}{|\|u\||_\Phi|\|v\||_\Phi}\int_\Omega |u.v|dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|u|}{|\|u\||_\Phi}\Big)dx + \int_\Omega \Psi\Big(\frac{|v|}{|\|v\||_\Phi}\Big)dx \leq 2$$

d'ou le résultat

Théorème 3.5. *La norme de Luxembourg* $|||u|||_\Phi$ *et la norme de Orlicz* $|||u\|_\Phi$ *sont équivalentes, ie:*

$$\forall u \in L_\Phi(\Omega), |||u|||_\Phi \leq \|u\|_\Phi \leq 2|||u|||_\Phi$$

Preuve. *La première partie se déduit de la remarque (3.5.1) et on applique l'inégalité de la remarque (3.4.2) pour* $w = \frac{u}{|||u|||_\Phi}$*:*

$$\|w\|_\Phi \leq |||w|||_{(\Phi)} + 1 \leq 2$$

Puisqu'on a:$|||w|||_{(\Phi)} = \int_\Omega \Phi(\frac{u}{||||u|||_\Phi}|)dx \leq 1$ *(voir la remarque (3.5.1))*
Le resultat suit directement et:

$$\|w\|_\Phi \leq |||w|||_{(\Phi)} + 1 \leq 2$$

Lemme 3.4. *Soit* $u \in L_\Phi(\Omega)$*, alors:*

1. $|||u|||_{(\Phi)} \leq |||u|||_\Phi$ *si* $|||u|||_\Phi \leq 1$
2. $|||u|||_{(\Phi)} \geq |||u|||_\Phi$ *si* $|||u|||_\Phi \geq 1$

Preuve. *Deux cas occurent:*

1. *En Substutuant* $\alpha = |||u|||_\Phi < 1$ *et* $t = \frac{u}{|||u|||_\Phi}$ *dans* (3.7) *et en intégrant l'inégalité sur* Ω*, utilisons un résultat de la remarque (3.5.1) pour obtient:*

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx = \int_\Omega \Phi(|\alpha t|)dx \leq |||u|||_\Phi \int_\Omega \Phi\Big(\frac{1}{|||u|||_\Phi}|u(x)|\Big)dx \leq |||u|||_\Phi$$

2. *De la même manière, utilisons* $\beta = |||u|||_\Phi - \epsilon$ *et* $t = \frac{|u(x)|}{|||u|||_\Phi - \epsilon}$ *(*$\epsilon > 0$ *suffisement petit) dans* (3.8) *pour* $|||u|||_\Phi > 1$ *, afin d' obtenir:*

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx \geq (|||u|||_\Phi - \epsilon) \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|u(x)|}{|||u|||_\Phi - \epsilon}\Big)dx > |||u|||_\Phi - \epsilon$$

Ou la dérnière inégalité suit de la définition de la norme de Luxembourg. Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire donc (3.4.2) est prouvé.

Corollaire 3.1. *Soit Φ,Ψ deux fonctions de Young complémentaires, alors:*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \le \|u\|_\Phi |||v|||_\Psi \quad et \quad \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \le |||u|||_\Phi \|v\|_\Psi$$

pour tout $u \in L_\Phi(\Omega)$ et $v \in L_\Psi(\Omega)$.

3.6 La Δ_2 condition

Nous allons étudier une classe très importante de fonctions de Young.

Définition 3.6. *Une fonction de Young Φ est dite satisfaire la Δ_2 condition,(on ecrit $\Phi \in \Delta_2$), si $\exists k > 0$ et $T \ge 0$ telles que:*

$$\Phi(2t) \le k\Phi(t) \quad \forall t \ge T$$

Exemple 3.2. *La fonction $\Phi(t) = ct^p$ avec $c \ge 0$, $p > 1$ satisfait la Δ_2 condition; $T = 0$ et $k = 2^p$.*

3.7 convergence dans les espaces de Orlicz

La convergence usuelle dans les espaces de orlicz peut etre introduite grace a la norme d'Orllicz $\|.\|_\Phi$, on a:

$$u_n \to u \quad dans \quad L_\Phi(\Omega) \quad i.e \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\Phi = 0$$

On peut aussi définir la Φ-convergence.

Définition 3.7. *une suite $\{u_n\}$ dans $L_\Phi(\Omega)$ converge au sens de la Φ-convergence vers $u \in L_\Phi(\Omega)$ si:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx = 0$$

Remarque 3.13. *la convergence dans* $L_\Phi(\Omega)$ *implique la* Φ*-convergence, l'équivalence n'est vraie que si* Φ *vérifie la* Δ_2*-condition.*
Le lemme suivant illustre bien cela:

Lemme 3.5. *Soit* $\Phi \in \Delta_2$ *avec (t=0 si* $\mu(\Omega) = \infty$*). Alors,* u_n *converge vers* u *dans* $L_\Phi(\Omega)$ *si et seulement si* u_n *converge vers* u *au sens de la* Φ*-convergence.*

Preuve. *L'implication est vraie dans un sens, reste a vérifié que la* Φ*-convergence implique la convergence dans* $L_\Phi(\Omega)$*. Soit* $u_n, u \in L_\Phi(\Omega)$ *et supposons que est réalisée. On se donne un* $\epsilon > 0$ *on choisit un* $m \in N$ *tel que:* $\epsilon > c2^{-m}$*, avec* $c = 2$ *si* $\mu(\Omega) < \infty$ *et* $c = 2 + \Phi(t) + \mu(\Omega)$ *si* $\mu(\Omega) = \infty$*. Alors on choisit* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *tel que:*

$$\int_\Omega \Phi(|u_n - u|)dx \leq \frac{1}{k^n} \quad \textit{pour} \quad n \geq n_0$$

pour $n \geq n_0$ *et on utilise la formule pour* $w = u_n - u$ *nous aurons:*

$$\|u_n - u\|_\Phi \leq c2^{-m} < \epsilon \quad \textit{pour} \quad n \geq n_0$$

Lemme 3.6. *Soit* $u \in L_\phi(\Omega)$*, alors* $u(x)$ *est un nombre fini pour presque tout* $x \in \Omega$*.*
Preuve. *soit*

$$\Omega_n = \{x \in \Omega, |u(x)| > n\}$$

alors $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ *pour* $n \in N$ *et* $\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0$ *si on considère la suite dans* $L_\Phi(\Omega)$ *par:*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_n \\ u(x), & x \in \Omega - \Omega_n \end{cases}$$

alors, on a:

$$\lim_{n\to\infty} |||u_n - u|||_{(\Phi)} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx = 0$$

Corollaire 3.2. *Chaque fonction* $u \in L_\Phi(\Omega)$ *peut etre approchée par une suite de fonction mesurables bornées a support compacte au sens de la* Φ*-convergence.*

Corollaire 3.3. *si* $\mu(\Omega_n) = \infty$ *l'ensemble de toutes les fonctions mesurables bornées a support compacte sur* Ω *est un sous ensemble dense dans* $L_\Phi(\Omega)$ *au sens de la* Φ*-convergence.*
Dans ce qui suit on assume que Ω *est un ouvert non vide de* R^n *tel que* $\mu(\Omega) < \infty$*. Alors*

on peut introduire un autre espace de fonctions.

Définition 3.8. *On note par $B(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables bornées définies sur Ω. L'espace $E_\Phi(\Omega)$ est la fermeture de $B(\Omega)$ dans $L_\Phi(\Omega)$.*
évidement $E_\Phi(\Omega)$ est un espace vectoriel on s'interesse a la connectiion existente entre $L_\Phi(\Omega)$ et $E_\Phi(\Omega)$ et $B(\Omega)$ on a
Lemme 3.7. *On a l'inclusion suivante:*

$$E_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$$

Et si de plus $\Phi \in \Delta_2$ (Φ vérifie la Δ_2-condittion), alors:

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$$

Preuve. *soit $u \in E_\Phi(\Omega)$, alors il existe une fonction $u_0 \in B(\Omega)$ telle que: $\|u - u_0\|_\Phi < \frac{1}{2}$. Ceci ségnifie que $\|2(u - u_0)\|_\Phi < 1$, alors: $|\|2(u - u_0)\||< 1$ i.e $2(u - u_0) \in L_\Phi(\Omega)$ puisque $\mu(\Omega) < \infty$ et $2u_0 \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$,utilisons la convexité de $\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$, on aura:*

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2u_0) + \frac{1}{2}(2u - 2u_0) \in \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$$

On a montré que $B(\Omega)$ est dense dans $L_\Phi(\Omega)$ au sens de la Φ-convergence, puisque $\Phi \in \Delta_2$, on a aussi $B(\Omega)$et aussi dense dans $L_\Phi(\Omega)$ au sens de la convergence au sens de la norme $L_\Phi(\Omega)$,d'ou

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$$

3.8 Dualité

Proposition 3.3. *Soit Φ,Ψ une paire de fonctions de Young complémentaires, v une fonction de $L_\Psi(\Omega)$. Alors, la formule:*

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \tag{3.20}$$

définit une forme linéaire F continue sur $L_\Psi(\Omega)$ et l'on a:

$$\frac{1}{2}\|v\|_\Psi \leq \|F\| \leq \|v\|_\Psi \tag{3.21}$$

ou $\|F\|$ *est la norme de* $F \in |L_\Psi(\Omega)|'$ *(l'espace dual de l'espace de Orlicz).*

Preuve. *D'apres le théorème (3.4.2) nous avons cela:*

$$|F| \leq \|u\|_\Phi \|v\|_\Psi \tag{3.22}$$

Ainsi F *est une forme linéaire bornée sur* $L_\Psi(\Omega)$ *et la deuxième partie est prouvée. La première inégalitée suit de la formule et de la définition de la norme d'Orlicz*

pour

nous avons et

$$\|v\|_\Psi = \sup_{|\|u\||_{(\Phi)} \leq 1} |\int_\Omega u(x)v(x)dx| \leq \sup_{\|F(u)\|_\Phi \leq 2} |F(u)| = \sup_{\|F(2u)\|_\Phi \leq 1} |F(2u)| = 2\|F\| \tag{3.23}$$

Proposition 3.4. *Soit* F *une forme linéaire bornée dans* $E_\Phi(\Omega)$*, il existe alors un unique* $v \in E_\Phi(\Omega)$ *tel que*

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x) \quad u \in E_\Phi(\Omega) \tag{3.24}$$

Preuve. *L'éxistance de* v*.Pour un sous ensemble mesurable* M *de* Ω*, soit* χ_M *la fonction caractéristique de* M*. Posons*

$$v(M) = F(chi_M)$$

Si nous utilisons le lèmme nous avons:

$$|v(M)| = |F(chi_M)| \leq \|F\| \|chi_M\|_\Phi = \|\|\mu(M)\Psi^{-1}(\frac{1}{\mu(M)})$$

Et par conséquence

$$\lim_{\mu(M)\to 0} v(M) = 0$$

$(\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi^{-1}(t)}{t})$ *parceque* $\lim \Psi(t)\frac{\Psi(t)}{t} = \infty$*,*$v$ *est une mesure absolument continue en se qui conserne* μ *la mesure de Lebesque. Le théorème de Radon Nikodym implique l'éxistance d'une fonction* $v \in L_1(\Omega)$ *telle que*

$$v(M) = \int_M v(x)dx \tag{3.25}$$

Si u *est une fonction simple, c'est à dire* $u(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi M_i(x)$*, avec* $M_i subset_\Omega, M_i \bigcap M_j = \emptyset$ *pour* $i \neq j$ *on aura:*

$$F(u) = \sum_{i=1}^m \alpha_i F(\chi M_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v(M_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{M_i} v(x)dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_\Omega v(x)\chi M_i(x)dx = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Soit $u \in E_\Phi(\Omega)$*.Alors, il existe une suite de fonctions* (u_n) *telle que:*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \quad et \quad |u_n(x)| \leq |u(x)|$$

pour preque tout $x \in \Omega$*, par conséquent:*

$$\|u_n\|_\Phi \leq \|u\|_\Phi$$

Et d'ailleurs:

$$\lim_{\to\infty} |u_n v(x)| = |u(x)v(x)|p.p$$

Le lémme de Fatou implique cela:

$$|\int_\Omega u(x)v(x)dx| \leq \sup_{n\in N} \int_\Omega |u_n v(x)|dx = \sup_{n\in N} F(|u_n|sgnv) \leq \|\| \sup_{n\in N} F(|u_n|_\Phi \leq \|F\|\|u\|_\Phi$$

Ainsi $v \in L_\Psi(\Omega)$ *soit maintenant* F_1 *la fonctionnelle qui corréspond a cette fonction* v *par la formule on a*

$$F_1(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u \in E_\Phi(\Omega) \tag{3.26}$$

En raison de on abtiens $F_1(u)$*=*$F(u)$ *pour tout* $u \in E_\Phi(\Omega)$ *l'unicité de* v *est évidente.*

Corollaire 3.4. *D'apres les deux propositions précédentes, utilisons l'isomorphisme donné par on devrait avoir l'iinclusion*

$$(E_\Phi(\Omega))' \subset L_\Psi(\Omega) \subset (L_\Phi(\Omega))'$$

Corollaire 3.5. *Si* $\Phi \in \Delta_2$*, alors d'après le lémme on a*

$$L_\Psi(\Omega) = (L_\Phi(\Omega))'$$

Corollaire 3.6. *Soit* Φ *et* Ψ *des fonctions de Young complémentaires.Alors l'espace d'Orlicz* $L_\Phi(\Omega)$ *est réfléxif si et seulement si* Φ *et* Ψ *satisfont la* Δ_2 *condition.*

Chapitre 4

Espaces de Sobloev-Orlicz

4.0.1 Définitions et propriétés de base

Définition

Soit Ω un ouvert borné de R^N et Φ une fonction de Young, on définit les espaces d'Orlicz-Sobolev d'ordre un générés par Φ et notés $W^1L_\Phi(\Omega)$ et $W^1E_\Phi(\Omega)$ par:

$$W^1L_\Phi(\Omega) = \left\{u \in L_\Phi(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_\Phi(\Omega), \forall i = 1,N\right\}$$

$$W^1E_\Phi(\Omega) = \left\{u \in E_\Phi(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in E_\Phi(\Omega), \forall i = 1,N\right\}$$

Ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,N$, sont les N dérivées partielles d'ordre un, au sens des distributions de u. En identifiant $W^1L_\Phi(\Omega)$ (respectivement $W^1E_\Phi(\Omega)$) à un sous espace de l'espace produit $(L_\Phi(\Omega))^{N+1} \equiv \Pi L_\Phi$ par l'application $P : u \to Pu = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u}{\partial x_n})$, on déduit les propriétés de base de ces espaces a partir de celles correspondantes aux espaces d'Orlicz et sont résumées dans la proposition suivante:

Proposition 4.1. *On a les principales propriétès des Soblev-Orlicz suivantes:*

1. *$W^1L_\Phi(\Omega)$, muni de la norme:$\|u\|_{1,\Phi} = \|u\|_\Phi + \||\nabla u|\|_\Phi$, est un espace de Banach.*
2. *$(W^1E_\Phi(\Omega), \|u\|_{1,\Phi})$ est un espace férmé de $(W^1L_\Phi(\Omega), \|u\|_{1,\Phi})$*
3. *$W^1E_\Phi(\Omega) = W^1L_\Phi(\Omega)$ si et seulement si Φ vérifie la Δ_2 condition.*
4. *$W^1E_\Phi(\Omega)$ est séparable.*
5. *$W^1L_\Phi(\Omega)$ et réflexif si et seulement si Φ et Ψ vérifient la Δ_2 condition.*

Les différentes topologies utilisées sur ces espaces, sont celles induites par la topologie produit de ΠL_Φ, ainsi, en notant $D^iu = u$ pour $i = 0$ et $D^iu = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ pour $i = 1,N$, on définit *de même:*

1. *Quelques normes équivalentes à* $\| \|_{1,\Phi}$ *sont, en particulier:* $\sum_{i=0}^{N} \|D^i u\|_{\Phi}$,$(\sum_{i=0,N} \|D^i u\|_{\Phi}^{2})^{\frac{1}{2}}$
2. *La convergence modulaire: on dit qu'une suite* u_n *de* $W^1L_\Phi(\Omega)$ *est* ρ_Φ*–convergente vers* $u \in W^1L_\Phi(\Omega)$ *si et seulemennt si* $\exists\lambda > 0$ *tel que*
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(\frac{D^i u_n - D^i u}{\lambda})dx \to 0 \forall i = 0,N$$
3. *La topologie* $\sigma(\Pi L_\Phi,\Pi L_\Psi)$: $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $W^1L_\Phi(\Omega)$ *pour*$\sigma(\Pi L_\Phi,\Pi L_\Psi)$ *si et seulement si* $\int_\Omega D^i(u_n - u)v_i dx \to 0 \forall (v_i) \in \prod L_\Psi$
4. *La topologie* $\sigma(\Pi L_\Phi,\Pi E_\Psi)$: $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $W^1L_\Phi(\Omega)$ *pour*$\sigma(\Pi L_\Phi,\Pi L_\Psi)$ *si et seulement si* $\int_\Omega D^i(u_n - u)v_i dx \to 0 \forall (v_i) \in \Pi E_\Psi$

4.0.2 propriétés d'approximation

On note $D(\Omega)$ *l'espace des restrictions à* Ω *des fonctions de* $D(R^n)$. *De la densité de* $D(\Omega)$ *(et de* $D(\overline{\Omega})$ *dans* $E_\Phi(\Omega)$*), on déduit que la fermeture de ces espaces, pour la norme* $\|.\|_{1,\Phi}$ *est nécessairement incluse dans* $E_\Phi(\Omega)$.
Ainsi, pour l'espace $W^1L_\Phi(\Omega)$*, les propriétés d'approximation feront intervenir les topologies faibles.*

Définition 4.1. – *L'espace* $W_0^1E_\Phi(\Omega)$ *est défini comme étant la ferméture de l'espace* $D(\Omega)$ *dans* $W^1E_\Phi(\Omega)$ *pour l'espace de Schwarts* $D(\Omega)$ *pour la norme de* $D(\Omega)$.*Cela veut dire*
$$W_0^1E_\Phi(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|.\|_{1,\Phi}}$$

– *L'espace* $W_0^1L_\Phi(\Omega)$ *est défini comme étant la* $\sigma(\Pi L_\Phi,\Pi E_\Psi)$ *ferméture de l'espace* $D(\Omega)$ *dans* $W^1L_\Phi(\Omega)$
$$W_0^1L_\Phi(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\sigma(\Pi L_\Phi,\Pi E_\Psi)}$$

.

Remarque 4.1. *1. dans le cas ou* $\Phi \in \Delta_2$*, alors* $W_0^1E_\Phi(\Omega) = W_0^1L_\Phi(\Omega)$*, en pariculier pour* $\Phi(t) = |t|^p$*, avec* $1 \leq p < \infty$,$W_0^1E_\Phi(\Omega) = W_0^1L_\Phi(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$.
2. Dans le cas ou Ω *est de classe* C^1*, les fonctions de* $W_0^1E_\Phi(\Omega)$ *(respectivement de* $W_0^1L_\Phi(\Omega)$*), sont les fonctions de* $W^1E_\Phi(\Omega)$*(respectivement de* $W^1L_\Phi(\Omega)$*) qui sont nulles au sens des*

traces sur le bord $(\partial\Omega)$.
Une autre propriété géometrique (plus faible que C^1*), requise sur le bord* $(\partial\Omega)$ *de* Ω*, sera souvent utilisée par la suite.*

Définition 4.2. *On dit qu'un domaine* $\Omega \subset R^n$*, vérifie la propriété du segment, s'il existe un recouvrement localement fini* $(O_i)_{i\in I}$ *de* $(\partial\Omega)$*, et des vecteurs* $(y_i)_{i\in I}$ *correspondants a ce recouvrement, tels que* $\forall x \in \overline{\Omega} \cap O_i$ *et* $\forall t \in]0,1[$ $x + ty_i \in \Omega$.

On a alors les propriétès d'approximation suivantes

Proposition 4.2. *On a le résultat suivant:*

$$\overline{C^\infty(\Omega) \cap W^1E_\Phi(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Phi}} = W^1E_\Phi(\Omega)$$

On suppose que Ω *vérifie la propriété du segment, alors:*

$$\overline{D(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\Phi}} = W^1E_\Phi(\Omega)$$

4.0.3 Systèmes complémentaires

Les espaces de Sobolev-Orlicz étant non refléxifs en général, l'approche variationnelle des problèmes aux limites posés dans ces espaces nécessite un nouveau cadre fonctionnel autre que le cadre habituel, (X,X') *(ou* X *est un espace de banach refléxif et* X' *son dual topologique, appelé systéme complémentaire et défini comme suit:*

Définition 4.3. *Soit* Y *et* Z *deux espaces de Banach dont le produit de dualité est noté* $(.,.)_{Y,Z}$*,* Y_0 *et* Z_0 *deux sous espaces fermés de* Y *et* Z *dans cet ordre, alors* (Y,Y_0,Z,Z_0) *est appelé système complémentaire, si au moyen de* $(.,.)_{Y,Z}$ *le dual* Y_0' *de* Y_0 *est identifié a* Z *et le dual* Z_0' *de* Z_0 *est indentifié a* Y *.*
Les systèmes $(L_\Phi,E_\Phi,L_\Psi,E_\Psi)$*et* $(\Pi L_\Phi,\Pi E_\Phi,\Pi L_\Psi,\Pi E_\Psi)$ *constituent des exemple type de systèmes complémentaires.*
Dans [7] J.P.Gossez développe une méthode permettant de construire un nouveau système complémentaire a partir d'un sous espace fermé E *de* Y *et d'un système cmplémentaire* (Y,Y_0,Z,Z_0) *donné, et ceci dans le but de son application aux espaces de Sobolev-Orlicz, considérès comme sous espaces fermés de* ΠL_Φ*. Ceci donne déja un préavis sur la compléxité de la résultion des E.D.P non linéaire et dépasse largement le cadre de notre mémoire. le lecteur curieux est orienté a une des références ci dessous ([7],[4],...)*

Bibliographie

[1] R. A. Adams. Sobolev spaces*. Academic Press,New York* 1975*.*

[2] A.Cianchi. Continuity propreties of functions from Orlicz-Sobolev spaces and embedding theorems*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. CI. Sci* (4) 1996

[3] M. A. Krasnosel'skii J. B. Rutickii. Convex functions and Orlicz Spaces*. P. Noordhoff, Groningen* 1961*.*

[4] T. K. Donaldson. Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*. J. Funct. Anal* 8 (1971),$52-75$*.*

[5] M. M. Rao and Z. D. Ren. Theory of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker Inc, New-York* 1991*.*

[6] A.Cianchi. A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces *.* Proc. Am.Soc *vol.* 2012*. No.* 140(8)*.*$2825-2834$*.*

[7] J. P. Gossez. Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear elliptic boundary value problems*. vol.* 1954*.*

[8] T. K. Donaldson. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces*. J. Differential equations* 10 1971,$507-528$

[9] R. A. Adams. On the Orlicz-Sobolev imbedding theorem*. J.Funct.Anal.24 (1977),241-257.*

[10] Zaanen. A. C. Linear analysis*. North Holland publ. Co.Amsterdam* 1960*.*

[11] C. Caratheodory. Calculus of variations and partial differential equations of the first order*. Holden-Day Inc.San Francisco, Ca* 1965*.*

[12] H. Brezis. Analyse fonctionnelle:théorie et application*. Masson, Paris* 1983*.*

[13] B. Dacorogna. Direct method in the calculus of variations*. Springer New-York,* 2008*.*

[14] A. Munnier. Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*. Nancy Université, France,* $2007-2008$*.*

[15] M-Th. Lacroix-Sonrier. Distribution, Espaces de Sobolev, Applications*. Ellipses, Paris,* 1998*.*