Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie Electrique et Informatique

Département Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Automatique

Option : **Traitement d'image et reconnaissance de formes.**

Thème : # Segmentation d'images texturées à partir des attributs fractals.

Présenté par **: M^{elle} LEHAMEL Malha.**

Mémoire soutenu le :		devant le jury d'examen composé de :
Président :	**DIAF Moussa**	Professeur, UMMTO.
Rapporteur :	**HAMMOUCHE Kamal**	Maître de conférences 'A', UMMTO.
Examinateur :	**DJENNOUNE Saïd**	Professeur, UMMTO.
Examinateur :	**AHMED OUAMER Rachid**	Maître de conférences 'A', UMMTO.
Examinateur :	**HADDAB Salah**	Maître de conférences 'A', UMMTO.

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de laboratoire "Robotique et Vision" Département Automatique de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou UMMTO.

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de mémoire "Kamal Hammouche", maitre de conférences classe A à l'UMMTO pour ses encouragements à me lancer dans l'univers fractal, pour sa disponibilité et sa complémentaire soutien disciplinaire tout au long de ce travail. Ses contributions sont pour beaucoup dans ce travail. Merci Monsieur, merci pour cette énergie.

Nous ne manquerons pas de remercier Monsieur "DIAF Moussa", professeur à l'UMMTO de m'avoir intégré dans son équipe de recherche et de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Nous nous exprimons notre reconnaissance à Monsieur "DJENNOUNE Saïd", professeur à l'UMMTO pour avoir accepter de faire partie du jury d'examen de ce mémoire.

Que Monsieur " AHMED OUAMER Rachid", maitre de conférences classe A à l'UMMTO trouve ici nos sincères remerciement pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de notre mémoire.

Nous exprimons également nos vifs remerciements à Monsieur "HADDAB Salah" maitre de conférences classe A pour sa présence parmi les membres de jury.

Un réel merci à ma petite famille, notamment, à mon père "Belkaçem" pour son aide précieux et qui a attendu longtemps pour ce moment.

Je vaudrais également témoigner ma reconnaissance aux enseignants de la faculté "S.Guermah" pour ses encouragements et "S. Hammouche" pour sa patience.

J'adresse aussi ici une mention spéciale à "M. Arkam" qui m'a apporté leurs conseils et leur soutien et mes amies au grand complet.

Sommaire

Sommaire

Introduction générale……..01

Chapitre 1 : Généralités

1.1 Introduction……03

1.2 Texture……..03

1.2.1 Notion de texture……03

1.2.2 Modèles de la texture……04

1.2.3 Besoin d'analyse de texture……..05

1.2.4 Méthodes d'analyse de textures……..06

1.2.4.1 Méthodes géométriques……..06

1.2.4.2 Méthodes issues du traitement du signal ……..07

1.2.4.3 Méthodes statistiques ……07

1.2.4.4 Méthodes basées sur le modèle……09

1.3 Classification des images ……10

1.3.1 Classification par la méthode bayesienne……..10

1.3.2 Méthode des k plus proches voisins (KPPV)……12

1.3.3 Méthode SVM……..13

1.4 Segmentation……..14

1.4.1 Méthodes de segmentation d'images texturées……..15

1.4.1.1 Approche frontière……15

1.4.1.2 Approche région……16

1.3.3.3 Approches mixtes……..22

1.5 Conclusion……23

Chapitre 2 : Théorie fractale et multifractale

2.1 Introduction……24

2.2 Historique sur les fractals……24

2.3 Formulation du concept de fractal……25

2.4 Objet fractal on non fractal? 25

2.5 Définition d'un objet fractal……26

2.6 Caractéristiques d'un objet fractal……27

2.7 Classification des objets fractals……..27

2.7.1 Fractales déterministes……27

2.7.2 Fractals non déterministes……..31

2.8 Self similarité ou auto-similarité dans les images……33

2.9 Invariance d´echelle - loi de puissance et auto-similarité d'un objet……34

2.10 Méthodes fractales……35

2.11 Types de dimensions fractales……36

2.11.1 Dimension topologique……36

2.11.2 Dimension de Hausdorff……36

2.11.3 Dimension des boites……37

2.11.4 Dimension de capacité……38

2.11.5 Dimension d'autosimilarité ou d'homothétie interne……39

2.13 Notion de codimension……39

2.14 Intérêt de la dimension fractale……40

2.15 Lacunarité……43

2.16 Formalisme multifractale……44

2.16.1 Origine de formalisme multifractal……45

2.17 Conclusion……46

Chapitre 3 : Méthode d'analyse fractale et multifractale

3.1 Introduction……47

3.2 Méthodes de calcul de la dimension fractale d'une image……47

3.2.1 Approche basée sur le comptage des boites……47

3.2.1.1 Méthode de Russel et al……48

3.2.1.2 Méthode de Gangepain et Roques-Carmes……48

3.2.1.3 Méthode de Xu et Weng …… ……..50

3.2.1.4 Méthode de Comptage Différentielle de Boites……52

3.2.1.5 Méthode de Voss……56

3.2.2 Approche basée sur la mesure des surfaces……58

3.2.2.1 Méthode de recouvrement……58

3.2.2.2 Méthode de Prisme Triangulaire (MPT)……59

3.2.2.3 Méthode des isarithmes……60

3.2.3 Approche basée sur le modèle du Mouvement Brownien Fractionnaire……61

3.2.3.1 Méthodes d'estimation du paramètre de Hurst……61

3.2.3.1.1 Méthode de Chen et al……61

3.2.3.1.4 Spectre de puissance de Fourier……63

3.3 Méthode de calcul de la lacunarité……..64
3.3.1 Méthode d'Allain et Cloitre……64
3.3.2 Méthode de Voss……..66
3.3.3 Méthode de Keller, Chen et Crownover……66
3.4 Méthodes d'analyse multifractale……66
3.6 Conclusion……67

Chapitre 4 : Tests et résultats

4.1 Introduction ……..……68
4.2 Validation ……68
4.2.1 Analyse fractale……68
4.2.2 Analyse multifractale……74
4.3 Classification des images texturées……..……76
4.4 Segmentation d'images texturées……80
4.4.1 Image Test ……80
4.4.2 Méthodes d'analyse fractales et multifractale……81
4.4.3 Méthodes d'analyse fractales et multifractale et attributs statistiques d'ordre 1. ……..……87
4.4.4 Images synthétiques……89
4.5 Conclusion ……92
Conclusion générale……93
Bibliographie
Annexes

Introduction générale

Introduction générale

L'analyse des textures joue un rôle important, dans l'interprétation automatique des scènes. Un tel problème est souvent rencontré dans divers domaines tels que l'imagerie médicale, le contrôle de qualité, la télédétection, etc. En effet, l'utilisation seule des niveaux de gris, ne semble pas être en mesure, de conduire à une bonne analyse de certaines images. Beaucoup d'images et plus particulièrement les images naturelles possèdent, des zones texturées non homogène au sens de niveaux de gris, d'où la nécessité d'introduire l'information texturelle. L'étude des propriétés d'une image, se fait alors par le traitement numérique de celle-ci via l'information texturelle. Cette dernière montre que la distribution spatiale et l'organisation des niveaux de gris, d'une image, comportent beaucoup d'informations, qui méritent d'être formaliser par des paramètres quantitatifs, servant à l'identification de la texture.

Plusieurs méthodes de caractérisation de la texture des images ont été ainsi proposées dans la littérature et qu'on peut regrouper essentiellement en quatre catégories : géométriques, statistique, fréquentielle et par modèle. Parmi les nombreux attributs appartenant à la dernière catégorie, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à un attribut nommé dimension fractale. La notion de la dimension fractale est issue d'un domaine plus générale qui est celui de la géométrie fractale.

La géométrie fractale a été introduite par le mathématicien *Benoît Mandelbrot* afin de répondre au réel besoin de la géométrie traditionnelle, dite Euclidienne, qui ne dispose pour décrire le monde, que d'une palette d'outils sommaires comme les courbes, les surfaces et les volumes. Ainsi, l'analyse des structures dessine un monde lisse, calme, aux contours précis qui ne peuvent, plus refléter la réalité de notre monde, et les caractéristiques les plus complexes des phénomènes qui nous entourent !

Il a été cependant remarqué que, les objets de la nature ont un comportement auto-similaire qui dans leurs formes irrégulières ou fragmentées vise à leurs offrir un aspect varié que complexe! C'est ainsi que la géométrie fractale s'est révélée grâce au concept d'auto-similarité ou d'invariance d'échelle afin de décrire de tels objets. En effet, l'invariance au changement d'échelle implique le fait que les objets conservent leur géométrie, à toute échelle d'observation. Dans ce cas, une telle structure peut être étudiée par une loi de type puissance, avec un exposant caractéristique nommé la dimension fractale. Les idées résultantes de cette nouvelle branche, qui est venue compléter la géométrie classique, permettaient aussi de définir le concept de la

lacunarité par *Mandelbrot*. La notion de lacunarité, étroitement liée à celle de la rugosité, propose de caractériser la distribution de la taille des trous dans une surface. L'estimation fractale (dimension fractale et/ou lacunarité) a engendré un large panel de méthodes qui ont été énergiquement appliquées dans bien des domaines parmi lesquels nous pouvons citer les sciences de la terre, la physique, la chimie, la biologie, la médecine, la géographie, l'informatique, le graphisme informatique (création et compression d'images), la compression de sons…

Cette branche d'analyse fractale s'est très vite développée au début des années 90. Elle a pris un autre essor après sa généralisation au formalisme multifractal dont l'hypothèse consiste à remplacer l'hypothèse d'auto-similarité globale par une hypothèse d'auto-similarité statistique locale. Ce qui permettait une analyse plus fine des objets.

Notre intérêt dans ce mémoire est d'utiliser des attributs issus de la géométrie fractale (dimension, lacunarité) ou de l'analyse multifractale en vue d'une classification et d'une segmentation des images texturées.

En classification (reconnaissance des formes), ces attributs seront utilisés pour caractériser une image afin de la reconnaître ou de la discerner des autres images. C'est le cas par exemple de la reconnaissance des visages, des empreintes, des différents types de bois, de tissus, etc.…

Pour ce qui est de la segmentation, les attributs fractals seront utilisés pour caractériser chaque pixel de l'image. Sur la base de ces attributs, les pixels de l'image sont regroupés en régions homogènes où chaque région correspond à un objet ou à une partie d'un objet qui forme l'image.

Nous avons scindé ce mémoire en quatre chapitres. Nous rappelons dans le premier chapitre**,** quelques généralités sur les textures et les méthodes d'analyse proposées dans la littérature, ainsi que les différentes approches de la segmentation d'images. Dans le second chapitre, nous présentons l'origine du formalisme fractal et les différentes formulations de la dimension fractale. Les concepts de lacunarité et de multifractales y sont également introduits. Le troisième chapitre présente une revue des méthodes d'estimation de la dimension fractale, de la lacunarité, de fonction de partition et de spectre des singularités. Le dernier chapitre est consacré à l'application de dix méthodes d'estimation de la dimension fractale, et une méthode de calcul de la lacunarité et une méthode d'analyse multifractale, dans le cadre de la classification et de la segmentation d'images texturées. Nous allons terminer par une conclusion de ce travail et ses perspectives.

Chapitre 1

1.1 Introduction

L'analyse de l'image à travers ses attributs (niveaux de gris ou texture) consiste souvent à extraire un certain nombre de propriétés caractéristiques et à les exprimer sous forme paramétriques. Ces derniers, permettent de décrire, de caractériser, d'analyser et de segmenter les images en question. Selon le cas, l'analyse peut être globale ou locale, la notion de localité prenant toute son importance avec la complexité de l'image. Toute une gamme de méthodes adaptées à la description de texture en terme quantitatif a été proposée. Nous voulons au cours de ce chapitre, mettre le point sur quelques concepts de base de la texture et de la segmentation d'images.

1.2 Texture

1.2.1 Notion de texture

La notion de texture a toujours été rattachée à la notion de perception. Elle renvoie à l'apparence et à la consistance d'un objet. Plus précisément, une texture décrit la structure, l'agencement géométrique de celui-ci. Elle se manifeste par une information visuelle, et se décrite par des termes linguistiques qualitatifs comme la finesse, la granularité, la régularité, le contraste… Les chercheurs se sont efforcés de formaliser les différents aspects visuels par des paramètres mathématiques, pour obtenir des descripteurs quantitatifs.

A la lumière de toutes les études menées, il semble clair qu'il n'existe pas de définition universellement admise, qui permette de caractériser la notion de texture au-delà du fait qu'elle restitue l'état de surface. En effet, toutes les définitions proposées sont, soit trop générales et imprécises, soit trop restrictives pour s'adapter à la diversité des cas rencontrés. Cependant nous retrouvons toujours un critère important, en commun. Il représente la notion d'arrangement spatial des pixels dans une image.

La texture est ainsi définie et étudiée de manières différentes, en fonction de la façon dont on la caractérise. Ainsi on trouve dans la littérature des définitions telles que:
-Une texture est une région d'une image pour laquelle il existe une fenêtre de dimension réduite, telle qu'une observation au travers de celle-ci se traduise par une impression visuelle identique pour toutes les positions envisageables par translation à l'intérieur de la région considérée (Unser. 1984).

-La texture peut être décrite comme une structure hiérarchique à deux niveaux. Le premier concerne la description d'éléments de base ou primitives, à partir desquels est construite la texture. Le second niveau est relatif à la description de l'organisation spatiale de ces primitives, à l'agencement des motifs texturaux entre eux, qui peut satisfaire aussi bien à des lois stochastiques que déterministe (Haralick, R., 1979).
D'après Haralick pour des détails fins (à petite échelle) on observe souvent un objet élémentaire qui constitue la base de la texture, qui peut être régulier ou variable et qui a tendance naturellement à disparaître lorsqu'on observe le champ global de la texture (une haute précision en espace et en fréquence ne peut être atteinte simultanément).
Pour une analyse grossière (à plus grande échelle) la texture apparait comme une juxtaposition plus au moins régulière de motifs. Cette juxtaposition possède ses propres lois statistiques (corrélation, densité de puissance) qui se combinent à celle de motif de base. Une bonne analyse de texture donnera des informations sur ces deux composantes.

1.2.2 Modèles de la texture

Nous pouvons distinguer trois modèles de textures, entre lesquels se positionnent un peu toutes les textures qu'elles soient synthétiques ou naturelles :

- **Les textures régulières**, dans lesquelles la répétition spatiale d'un motif de base appelé « texton » est évidente (Julesz. 1962), dans différentes directions (Fig.1.1). La répétition spatiale de ces motifs obéit à des règles de direction et de placement. Ainsi, une région texturée est constituée par un réseau bidimensionnel répétant le motif original selon une direction et une période particulière. La description du motif élémentaire, les dimensions du réseau et l'orientation du motif suffisent alors pour décrire complètement la texture (Alatas. 1998), Cette famille sera bien décrite par des approches fréquentielles ou structurelles.

Fig.1.1: Exemples de textures régulières.

- **Les textures aléatoires**, pour lesquelles nous ne pouvons déceler aucun motif de base particulier. La distribution des intensités n'est alors l'objet d'aucune régularité apparente d'où le rôle spécifique que joue l'aléatoire dans ce type de texture: (Fig .1.2). Elle sera décrite par des lois statistiques, des moments, une description spectrale en termes de densité de puissance, des propriétés de corrélation ou d'isotropie.

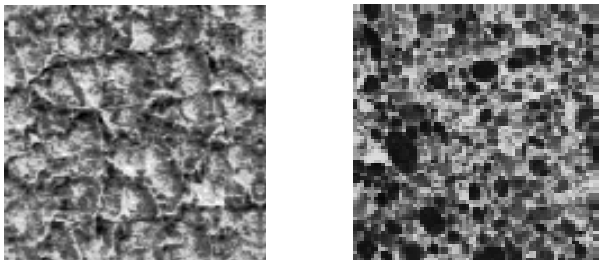


Fig.1.2: Exemples de textures aléatoires.

Nous pouvons facilement voir à partir de ces catégories de textures, qu'il est difficile de donner une définition précise de la texture. Nous avons d'un coté une information structurelle et constructive, et d'un autre coté une information désordonnée et plus difficile à décrire.

1.2.3 Besoin d'analyse de texture

L'analyse de texture d'une image donnée, peut être essentielle pour plus d'une raison. Nous pouvons avoir besoin de trouver différentes régions dans une image, qui sont séparées par leurs textures distinctives. Une telle sorte de segmentation de texture est importante dans l'analyse des images aériennes et des images obtenues par satellite. La segmentation peut aussi être utilisée dans d'autres applications comme la séparation du texte à partir d'une partie restante d'une image. On peut utiliser l'analyse de texture pour déterminer si une texture particulière, connue à priori, est présente ou non dans une image donnée. Ceci est connu comme la classification de texture. Une telle classification a des applications où il est souvent besoin d'égaliser ou de comparer deux textures différentes et d'identifier le degré de similarité, comme pour la biométrie où l'identification de texture est utilisée dans la reconnaissance biométrique utilisant l'iris, les visages, les empreintes, etc. Un autre usage de la classification de texture est dans l'analyse d'images médicales, où le critère de classification aura pour objectif de différencier entre la texture du tissu normal et la structure du tissu anormal.
Une autre application peut être l'extraction ou la construction de surface 3D à partir des variations dans les propriétés texturales d'une image. Une telle application nous aide à

recréer la surface 3D, dont la projection sur une image 2D est la texture donnée. Comme la texture ne peut être complètement décrite en une définition particulière, nous ne pouvons pas non plus trouver juste une seule manière qui nous permettra de caractériser complètement une texture donnée et d'extraire ses traits caractéristiques avec succès pour toutes les différentes applications. En conséquence, il y a différentes approches pour analyser la texture, selon le genre d'application et le type de texture qui doit être analysée.

1.2.4 Méthodes d'analyse de textures

Classiquement, nous distinguons quatre grandes familles d'extraction de caractéristiques textuelles (Strand, Taxt. 1994):

1.2.4.1 Méthodes géométriques

Les méthodes géométriques considèrent la texture comme un ensemble d'éléments de base (primitives géométriques) dont la disposition est organisée grâce à des règles de placement. Elles cherchent donc, à reconnaitre ces primitives géométriques ayant permis de générer les textures ainsi l'extraction de règles de positionnement des différents motifs de la texture. La méthode d'autocorrélation reste l'approche la plus utilisée. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à cette méthode (Fu. 1982).

La fonction d'autocorrélation est un attribut qui donne des renseignements sur la taille des primitives de base constituant une texture. Elle peut être utilisée afin d'évaluer le taux de régularité comme la finesse de la texture présenté dans l'image. Une telle fonction est définie comme suit :

$$R(x,y) = \frac{\sum_{u=0}^{NL}\sum_{v=0}^{NC} I(u,v)I(u+x,v+y)}{\sum_{u=0}^{NL}\sum_{v=0}^{NC} I^2(u,v)} \qquad (1.1)$$

Où : *NL et NC* sont respectivement le nombre de lignes *e*t le nombre de colonnes de l'image.

Cette fonction définit une moyenne de similarité entre pixels pour une distance (x, y) donnée. L'évolution des moyennes de similarité en fonction des distances (x, y) permet de

mesurer la régularité de la texture (elle évolue les relations spatiales entre les primitives de la texture).

- Si la fonction croit et décroit périodiquement avec la distance, alors les primitives sont périodiques.
- Pour des textures régulières, la fonction d'autocorrélation présente des pics et des vallées.
- Pour de grandes primitives, la fonction varie lentement lorsque la distance grandit.
- Pour de petites primitives, la fonction varie rapidement lorsque la distance grandit.

1.2.4.2 Méthodes issues du traitement du signal

Certaines méthodes d'analyse de la texture cherchent à caractériser les différentes fréquences qui la composent. Ces méthodes font généralement appel à des outils ou techniques de traitement du signal et utilisent des bancs de filtre sélectifs en fréquence, en orientation ou en échelle tels que les bancs de filtre de Gabor et les ondelettes.

1.2.4.3 Méthodes statistiques

Les méthodes statistiques se fondent la plupart du temps sur les niveaux de gris des pixels et sur la description statistique de leur arrangement. Elles consistent à extraire à l'aide des outils statistiques, des paramètres texturaux. Selon l'ordre de la méthode qui est donné par le nombre de pixels mis en jeu dans le calcul de paramètres, nous pouvons citer :

1.2.4.3. a Méthodes de premier ordre : L'analyse de texture par les méthodes de premier ordre se fait au niveau de pixels individuels d'une région de l'image à traiter. Les paramètres tels que la moyenne, la variance, l'entropie, etc.… sont calculés à partir de l'histogramme des intensités:

$$Moy = \frac{1}{N}\sum_{i,j} g(i,j) \quad (1.2)$$

$$VAR = \frac{1}{N}\sum_{i,j}(g(i,j) - MOY)^2 \quad (1.3)$$

$$SKEW = \frac{1}{N}\sum_{i,j}(g(i,j) - MOY)^3 \quad (1.4)$$

$$KURT = \frac{1}{N}\sum_{i,j}(g(i,j) - MOY)^4. \quad (1.5)$$

La première équation, donne la valeur moyenne des niveaux de gris appartenant à tous les pixels de la région considérée. Le ($g(i,j)$ représente la valeur du niveau de gris du pixel (i, j), N est un facteur de normalisation qui correspond au nombre total de pixels.
La deuxième équation, calcul la variance. Elle correspond au moment d'ordre 2. Elle mesure la répartition des niveaux de gris autour de la valeur moyenne.
La troisième équation, correspond au moment d'ordre 3 centré autour de la moyenne (le skewness). Ce paramètre mesure la déviation de la distribution des niveaux de gris par rapport à une distribution symétrique. Pour une déviation par les valeurs élevées, le skewness est positif ; alors que pour une déviation vers les basses valeurs, il est négatif.
La dernière équation, correspond au moment d'ordre 4 centré autour de la moyenne (le kurtosis). Il caractérise la forme du sommet de l'histogramme : plus le kurtosis est faible et plus le sommet de l'histogramme est arrondi.

1.2.4.3. b Méthodes de second ordre : Ce type de méthodes prend en considération les interactions entre les niveaux de gris de deux pixels. Parmi elles, nous retiendrons en particulier, la méthode des matrices de cooccurrence (Haralick. 1979). Celle-ci sert de référence à toute nouvelle méthode de caractérisation de textures.
Pour une translation t, la matrice de cooccurrence MC_t d'une image I est définie pour tout couple de niveaux de gris (i,j) par :

$$MC_t(i,j) = card\{(s, s+t)\} \in R^2 \ / \ I(s) = i, I(s+t) = j \qquad (1.6)$$

$MC_t(i,j)$ est donc le nombre de couples de pixels *(s, s+t)* de la région considérée, séparée par le vecteur de translation t et tel que s a pour niveau de gris i et $s+t$ pour niveau de gris j. Pour une image I, quantifiée sur N_g niveaux de gris, la matrice $MC_t(i,j)$ est une matrice de taille ($N_g \times N_g$).
Les matrices de cooccurrence contiennent une masse d'informations trop importante. Quatorze descriptifs des textures prenant en compte l'ensemble de la matrice de MC_t ont été définis par Haralick (Haralick. 1979).

1.2.4.3. c Méthodes d'ordre supérieur : Elles étudient les interactions entre plusieurs pixels. Comme dans le cas des méthodes de second ordre, l'information est extraite à partir des voisinages locaux des pixels de l'image. Les matrices des longueurs de plage constituent un exemple de ce type de méthodes (Galloway. 1975).

Une plage de niveau de gris(ou iso segment) est un ensemble de pixels consécutif, dans une direction donnée, ayant la même valeur de niveau de gris. La longueur d'une plage est le nombre de pixels appartenant à cette plage. A chaque direction, nous pouvons associer une matrice de longueurs de plage $P_\theta = (P_\theta(i,j))$ de dimension $(N_g x\ N_\theta)$. N_g est le nombre de niveau de gris dans l'image et N_θ est la longueur de la corde maximale de direction θ dans la région. L'élément $P_\theta(i,j)$ de cette matrice représente le nombre de plages de longueur j (dans la direction θ) constituées de pixels de niveau de gris i.
Cette méthode permet de déterminer l'ensemble des plages présentes dans l'image et effectue des statistiques sur leurs longueurs. Il s'agit donc de rechercher le nombre maximum de pixels adjacents ayant le même niveau de gris dans une direction. Nous définissons alors des primitives qui ont pour caractéristiques un niveau de gris, une longueur et une direction.
Plusieurs attributs peuvent être extraits à partir des matrices iso- segments.

1.2.4.4 Méthodes basées sur le modèle

Ces méthodes considèrent la texture comme la réalisation d'un processus stochastique stationnaire. Elles se fondent sur la recherche d'un modèle pour décrire ou générer une texture (Woods. 1972). Plusieurs modèles peuvent être utilisés. Les plus connus sont le modèle autorégressif, les modèles Markoviennes et les modèles fractals.
La caractérisation d'une surface fractale s'effectue par sa dimension fractionnaire qui est supérieure à la dimension topologique. La dimension fractale se réfère ainsi à un attribut de texture (Pentland. 1984). Pour une image, elle serait comprise entre 2 et 3 et elle correspond à la notion intuitive de la rugosité, où une dimension proche de 2 indique un paysage à variation de luminosité assez lisse et une dimension proche de 3, des variations très abruptes. Plusieurs méthodes de calcul de la dimension fractale ont été proposées (Voss.1986) (Peleg et al.1984).

L'utilisation de la seule dimension fractale de l'image comme attribut de texture peut s'avérer insuffisante dans certains cas, on lui associe alors un autre attribut appelé lacunarité qui est faible quand la texture est fine et forte pour une texture grossière (Guo et al. 2009) L'approche multifractale qui permet une analyse plus fine de l'image est également utilisée pour l'analyse de la texture (Lévy Véhel. 1992) Le second et le troisième chapitre seront consacrés exclusivement pour expliquer les détails de ce modèle.

Les méthodes d'analyse de la texture sont souvent utilisées pour la classification ou la segmentation des images.

1.3 Classification des images

La classification, d'une manière générale, permet de partitionner un ensemble d'observations en différentes classes, en regroupant dans une même classe les observations présentant les mêmes caractéristiques. On parle de classification des images lorsque les observations correspondent à des images et où chaque image peut être caractérisée par un ensemble d'attributs tels que les attributs de texture ou couleur. La classification des images intervient comme une étape très importante dans des applications de reconnaissance des formes telles que l'identification des images de bois, la reconnaissance des visages, de la parole, des empreintes, etc..... Les méthodes de classification peuvent être divisées en deux catégories selon l'information disponible à priori sur les observations. Lorsque les différentes classes des observations sont connues au préalable, la classification est dite supervisée. Cette catégorie de méthodes est préférable pour la classification des images. En revanche, dans le cas où l'on n'a aucune connaissance *a priori* sur l'appartenance des observations aux classes, on parle de classification non-supervisée ou *clustering,* celle-ci est plus adaptée pour la segmentation des images. Dans un contexte supervisé, on dispose d'échantillons (ensemble d'observations) ou chaque observation est caractérisée par un ensemble d'attributs. L'appartenance de chaque observation de cet échantillon à une classe est connue a priori. Dans ce cas ces observations sont appelées prototypes de la classe. La classification a pour but de définir à partir des prototypes des modèles mathématiques pour chaque classe. Ces modèles peuvent être un simple centre de gravité, une fonction de densité de probabilité ou une surface de séparation entre des classes. Les étapes de caractérisation et de classification des observations prototypes des classes constituent ce qu'on appelle la phase d'apprentissage. Celle-ci se distingue de la phase de décision qui consiste à affecter une nouvelle observation à l'une des classes définie lors de la phase d'apprentissage. Il existe une multitude de méthodes de classification supervisée. Les plus classiques sont la classification optimale de Bayes, la règle des K plus proches voisins (Kppv) et les séparateurs à vaste marge (SVM).

1.3.1 Classification par la méthode bayesienne

Cette méthode de nature statistique, suppose que l'échantillon à analyser est composé de N observations tirées, indépendamment, de K classes C_k où $k = 1, 2, \dots, K$

selon les lois de probabilité conditionnelles $P(X/C_k)$ connues. Par application du théorème de Bayes, il est possible de déterminer la probabilité pour qu'une observation X_q appartienne à la classe C_k. Cette probabilité, appelée aussi probabilité *a posteriori* de la classe C_k, est donnée par la relation :

$$P(C_k/X_q) = \frac{P\left(\frac{X_q}{C_k}\right)P(C_k)}{P(X_q)} \tag{1.7}$$

où $P(X_q)$ désigne la valeur de la fonction de densité sous-jacente à la distribution des observations provenant de l'échantillon au point X_q , et $P(C_k)$ désigne la probabilité *a priori* de la classe C_k de telle sorte que :

$$\sum_{k=1}^{K} P(C_k) = 1 \tag{1.8}$$

$P(X_q/C_k)$ désigne la probabilité conditionnelle de la classe C_k, c'est-à-dire, la fonction de densité de probabilité sous-jacente à la distribution des observations provenant de la classe C_k.

Le problème de classification d'une observation X_q peut être résolu en adoptant la règle de décision suivante :

Décider C_s si : $P(C_s/X_q) > P(C_k/X_q), \forall\, k = 1, 2, \dots, K\ , (k \neq s)$ (1.9)

L'application de la règle de Bayes revient à trouver des fonctions de décision $d_k(X_q)$, $k = 1, 2, \dots, K$, telles que l'observation X_q soit affectée à la classe C_s si et seulement si: $d_s(X_q) > d_k(X_q) \qquad \forall\, k = 1, 2, \dots, K,\ s \neq k$ (1.10)

où $d_k(X_q) = P(X_q/C_k)P(C_k)$ (1.11)

Dans la plus part des cas, la probabilité conditionnelle de la classe C_k est de type gaussienne telle que :

$$P(X_q/C_k) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(X_q - \mu_k)^T \sum_k^{-1}(X_q - \mu_k)\right)}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\sum_k|^{\frac{1}{2}}} \tag{1.12}$$

Dans cette expression, μ_q est le vecteur moyenne de la classe C_k et $\sum_k$ la matrice de covariance de la classe C_k.

Ainsi, les fonctions de décision d_k peuvent être écrites sous la forme :

$$d_k(X_q) = -\frac{1}{2}\log|\Sigma_k| - \frac{1}{2}(X_q - \mu_k)^T \sum_k^{-1}(X_q - \mu_k) + \log[P(C_k)] \quad (1.13)$$

Les probabilités $P(C_k)$ peuvent être estimées par :

$$P(C_k) = \frac{N_{C_k}}{N} \quad (1.14)$$

où N_{C_k} est le nombre d'observations appartenant à la classe C_k et N le nombre d'observations totales. μ_k et $\sum_k$ sont estimés par la moyenne et la variance empirique à partir des prototypes de la classe C_k.

1.3.2 Méthode des k plus proches voisins (KPPV)

Egalement connue sous le nom de K-Nearest Neighbor (K-NN), dans cette méthode, contrairement à la méthode précédente où la probabilité conditionnelle de la classe C_k est choisie à priori (généralement gaussienne), cette probabilité est supposée inconnue, elle est alors estimée de la manière suivante :

Un volume $V(X_q)$ centré sur chaque point X_q des échantillons est déterminé de façon à ce qu'il englobe k observations de l'ensemble d'apprentissage. On dénombre alors le nombre k_i de voisins de X_q appartenant à chaque classe C_k. La densité de probabilité de la classe C_k contenant N_{C_k} points prototypes est alors estimée comme suit :

$$\hat{P}(X_q/C_k) = \frac{k_i}{N_{C_k}V(X_q)} \quad (1.15)$$

En remplaçant $P(C_k)$ par $\frac{N_{C_k}}{N}$ et $P(X_q/C_k)$ par $\hat{P}(X_q/C_k)$ dans la règle de Bayes (Eq. 1.9), on aboutit à la règle suivante :

$$X_q \in C_k \quad si\ P(C_k/X_q) = \max_{i=1,\dots,K}(k_i) \qquad k = \sum_{i=1}^{K} k_i \quad (1.16)$$

Cette règle peut être énoncée comme suit : si les k plus proches voisins d'un point X_q appartiennent en majorité à la classe C_k , alors X_q appartiendra à la classe C_k.

Notons que dans cette méthode, la notion de probabilité est superflue et qu'elle diffère des autres méthodes de classification supervisée car aucun modèle n'est induit à partir

des observations, les données restent simplement en mémoire. C'est la raison pour laquelle, on l'appelle règle de décision KPPV.

1.3.3. Méthode SVM

La méthode SVM ou Machines à Vecteurs Supports (Support Vector Machine) a été proposée en 1995 par Vapnik (Cortes, Vapnik. 1995). Depuis, elle est très activement utilisée dans beaucoup d'applications. Son but est de rechercher une surface capable de séparer au mieux les prototypes de deux classes issus de la base d'apprentissage.

Considérons le cas où l'ensemble d'apprentissage $(X_a, Y_a) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_N, y_N)$

sont linéairement séparables en deux classes C_1 et C_2 telles que $x_i \in R^d$ représente la ième observation caractérisée par un vecteur de d attributs et$y_i \in \{+1, -1\}$. , $y_i = 1\ si\ x_i \in C_1\ et\ y_i = -1\ si\ x_i \in C_2$.

La méthode SVM consiste à chercher un hyperplan qui sépare les données des deux classes. Les points situés sur cet hyperplan satisfait l'équation $w^T x + b = 0$ où $w = [w_1, w_2, \ldots, w_d]$ est le vecteur perpendiculaire à l'hyperplan et b un scalaire appelé bias. Dans le cas ou les observations sont séparables, la méthode SVM consiste à maximiser la marge représentant la distance entre un hyperplan H_1 définit par l'équation $W^T x + b = -1$ et un hyperplan H_2 définit par l'équation $w^T x + b = 1$. Ceci constitue un problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases} minimiser\ f(x) = \frac{1}{2} w^T w \\ sujet\ \text{à}\ g_i(x) = y_i(w^T x_i + b) - 1 \geq 0 \quad i = 1, \ldots N \end{cases} \tag{1.17}$$

En introduisant les multiplicateurs $\lambda_i \geq 0$ de Lagrange, ce problème devient :

$$\begin{cases} \max_{\lambda} -\frac{1}{2} \sum_{i-1}^{p} \sum_{j-1}^{p} \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i x_j + \sum_{i-1}^{p} \lambda_i \quad avec\ les\ constantes\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots N \\ \sum_{i-1}^{N} \lambda_i y_i = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Dont la résolution fournit les valeurs $\bar{\lambda_\iota}$ et par conséquent l'hyperplan optimal définit par la paire $(\bar{w}, \bar{b})$ telles que :

$$\bar{w} = \sum_{i-1}^{P} \bar{\lambda_\iota}\, x_i y_i \quad \text{et}\ \ \bar{b} = y_j - \sum_{i-1}^{P} \bar{\lambda_\iota}\, x_i y_i\, x_j \tag{1.19}$$

Une nouvelle observation x_k est alors affectée une classe selon la règle suivante :

$$Class(x_k) = sign(\sum_{i-1}^{M} \overline{\lambda_i}\, x_i y_i\, x_k + \bar{b} \tag{1.20}$$

Où M est le nombre de vecteurs support correspondant au nombre d'observations dont les valeurs$\overline{\lambda_i} \neq 0$.

Lorsque les classes sont non linéairement séparables, les observations x_i subissent la transformation non linéaire $\emptyset(x_i)$ et le problème SVM est posé comme suit:

$$\begin{cases} \max_{\lambda} -\frac{1}{2}\sum_{i-1}^{N}\sum_{j-1}^{N} \lambda_i\lambda_j y_i y_j K(x_i x_j) + \sum_{i-1}^{p} \lambda_i \quad avec\ les\ constantes\ 0 \leq\ \lambda_i \leq C \quad i = 1, \dots N \\ \sum_{i-1}^{N} \lambda_i y_i = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Où C est un paramètre de pénalisation, $K(x_i, x_j) = \emptyset(x_i).\, \emptyset(x_j)$ est une fonction noyau définie par exemple par:

$$K(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.22}$$

L'affectation d'une nouvelle observation est donnée par :

$$Class(x_k) = sign(\sum_{i-1}^{M} \overline{\lambda_i}\ y_i K(x_i, x_k) + \bar{b} \tag{1.23}$$

1.4 Segmentation des images

La segmentation, a pour but la description de l'information contenue dans l'image, en donnant une représentation plus condensée et facilement exploitable. L'image est ainsi décrite en termes de contours et de régions homogènes. La segmentation n'est une fin en soi et sa qualité influe directement sur les résultats obtenus par les traitements situés en aval de l'étape de segmentation.

Le résultat de la segmentation est une image dans laquelle chaque pixel est affecté de l'étiquette correspondant au numéro de la région à laquelle appartient le pixel dans l'image initial.

1.4.1 Méthodes de segmentation d'images texturées

La segmentation fait référence aux notions de différence et de similarité perçues par le système visuel humain. Deux approches couramment qualifies d'approche « frontière » et d'approche « région » sont alors proposées. L'approche région s'attache à faire apparaître des régions homogènes selon un critère (niveaux de gris, couleur ou texture). C'est une approche qui fait référence à des groupements de points ayant des caractéristiques similaires et fait appel à la notion d'homogénéité, alors que l'approche frontière tente de trouver des contours ou frontières de régions présentant une variation rapide du même critère, i.e. une variation brutale de l'intensité lumineuse ou à une discontinuité entre les propriétés de deux ensembles de points connexes. Ces deux approches sont duales en ce sens qu'une région définit une ligne par son contour et qu'un contour fermé définit une région. Elles amènent cependant à des algorithmes différents et ne fournissent pas, en générale, les mêmes résultats.

Certaines méthodes récentes tentent de faire coopérer plusieurs méthodes de segmentation, afin de combiner les avantages de chaque méthode ou d'exploiter leurs complémentarités. Un algorithme de segmentation s'appuie donc sur :

1. la recherche de discontinuités afin de mettre en évidence les contours,
2. la recherche d'homogénéité locale pour définir les régions,
3. ou encore sur la coopération des deux principes (frontière-région).

1.4.1.1 Approche frontière

Les méthodes appartenant à cette approche, sont parmi les méthodes les plus classiques en segmentation d'images. Ces méthodes supposent généralement un modèle *a priori* des discontinuités recherchées et opèrent de manière très localisée. L'approche frontière peut aussi être classée en plusieurs catégories (Cocquerez, Philipp. 1995), à savoir : les méthodes dérivatives, surfaciques, morphologiques, markoviennes et variationnelles. Les trois premières classes sont adaptées aux images qui présentent des régions uniformes au sens des niveaux de gris alors que les méthodes markoviennes peuvent être utilisées pour la détection de frontières dans des images texturées ; elles fournissent des frontières de régions discontinues nécessitant ainsi une tape de post-traitement afin d'assurer la fermeture des contours. En revanche, les techniques variationnelles produisent des contours fermés. Elles prennent en compte l'information globale sur le contour, généralement issue d'un modèle *a priori* de contour.

1.4.1.2 Approche région

Contrairement à l'approche frontière qui recherche les dissimilarités, l'approche région recherche plutôt la similarité. Les méthodes de cette approche fournissent une carte de régions fermées. Cependant la localisation des frontières reste généralement peu précise.

Les méthodes de segmentation en régions font appel à un prédicat d'uniformité (noté P) associé à un critère d'homogénéité.

Zucker dans (Zuker. 1976) propose la définition formelle suivante pour la segmentation :

- Un prédicat d'uniformité P est une fonction logique, définit sur une région R_i de l'image composée de pixels adjacents. Ce prédicat vérifie une propriété d'homogénéité de R_i telle que :

  P ne dépend que des pixels de la région R_i .

- Soient deux régions R_i et R_j de l'image telles que R_j est incluse dans R_i alors :

$$P(R_i) = vrai \Rightarrow P(R_j) = vrai \qquad (1.24)$$

- La segmentation d'une image I basée sur un prédicat d'uniformité P est définit comme une partition $S = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ de I, telle que :

$a)$ $R_i\ est\ connexe\ , \forall i \in \{1, \dots, n\}.$ (1.25)

$b)$ $P(R_i) = vrai, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$ (1.26)

$c)$ $P(R_i \cup R_j) = faux,\ \forall\ (R_i, R_j) \in S,\ R_i \neq R_j.$ (1.27)

L'hypothèse de connexité des régions fait que les algorithmes prennent généralement en compte le voisinage des points. La dernière condition traduit en fait la maximalité de chaque région dans la segmentation. Autrement dit, ces hypothèses expriment le fait que chaque pixel de l'image doit appartenir à une région R_i , que les régions doivent être disjointes et que l'union de ces régions constitue l'image entière. La vérification de ces conditions est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partition d'une image I soit une segmentation. Rien, toutefois, n'implique l'unicité de cette segmentation.

Dans cette approche, on distingue essentiellement trois types de méthodes :

1.4.1.2.1 Méthodes de type croissance des régions : également appelées agrégation de pixels (les pixels forment la base du processus). Ces méthodes intègrent implicitement l'information spatiale dans le processus de segmentation. Les régions sont créées les unes après les autres (critère d'adjacence) avec pour chaque région, une phase d'initialisation et une phase itérative. La phase d'initialisation est la phase du choix d'un nouveau germe (point de départ d'une nouvelle région). La phase itérative est la phase d'agrégation des pixels voisins au germe, autrement dit, une région est construite à partir d'un germe par agrégation de pixels autour de ce germe selon un critère d'homogénéité. Ce germe doit être considéré comme une région, c'est-à-dire satisfaire au critère d'homogénéité (on peut choisir un pixel unique comme germe), (Cocquerez, Philipp. 1995).

Un agrégat est un assemblage hétérogène de substances ou d'éléments qui adhèrent solidement entre eux.

Un prédicat classique d'homogénéité pour une région R peut être par exemple la variance $\sigma^2(R)$ des niveaux de gris de l'image associés aux points de cette région. Un point de l'image appartient à R si sa variance est inférieure à un seuil fixé. Le processus est initialisé par un germe choisi par seuillage sur un attribut simple (comme le niveau de gris). Il s'arrête lorsqu'il n'y a plus de région qui vérifie le prédicat.

Tant qu'il existe des pixels non marqués ***faire***

- Choix d'un (ou de) germe(s) $R_j^{(k=0)}$
- Définition d'un ensemble H de pixels tels que $\forall P \in H$:
  - P est adjacent à au moins un pixel de $R_j^{(k)}$
  - P satisfairt un critère d'homogénéité locale à $R_j^{(k)}$
- ***Si*** $P_{red}\left(H \cup R_j^{(k)}\right)$ ***alors***
  - Marquer tous les pixels de H
  - $R_j^{(k+1)} = R_j^{(k)}$
  - $k = k + 1$
- ***Sinon***
  - $j = j + 1$

Algorithme (1.1) : Algorithme de croissance des régions.

La qualité de la segmentation peut également être un critère de segmentation. Si l'on possède une référence permettant de construire un indicateur global de la qualité de la segmentation, cette mesure peut servir localement pour savoir si une fusion l'accroît significativement (Yakimovsky. 1976). Une telle mesure peut être la probabilité de bonne interprétation des régions et des contours. Il est également possible d'évaluer la qualité de fusion en considérant une région comme homogène si aucune fusion locale ne peut l'améliorer. Ces méthodes peuvent intégrer des informations locales (histogramme local (Kermad et al. 1995) pour être plus robuste à la présence du bruit).

L'agrégation de pixels donne d'assez bons résultats même si la localisation des contours reste moins précise que celle obtenue par les techniques de détection de contours. Notons aussi que les seuils d'agrégation influent beaucoup sur la qualité du résultat.

1.4.1.2.2 Méthodes de type division-fusion "split-merge" : Le processus de segmentation est itératif et alterne deux phases : une phase de division de toutes les régions non homogènes et une phase de fusion de toutes les régions adjacentes de sorte que la région résultante respecte toujours le critère d'homogénéité. En d'autres termes, cette approche consiste à utiliser des propriétés globales pour diviser l'image en zones homogènes puis à fusionner certaines de ces régions grâce à des caractéristiques locales (Gallaadet, Simpson. 1991).

L'algorithme de division-fusion consiste, dans un premier temps, à découper l'image en zones de taille moyenne (le plus souvent en quatre quadrants), puis à parcourir chacune des régions en cherchant si elle vérifie un critère d'homogénéité. Les régions non homogènes sont à leurs tours divisées en sous-blocs. Ce processus de découpage de régions non homogène est poursuivit jusqu'à obtenir que des régions homogènes.

Une étape de fusion permet par la suite de regrouper les zones contigües correspondant à la même région i.e. si deux régions adjacentes peuvent être fusionnées pour former une zone homogène, elles le sont.

Ces méthodes font généralement appel à la théorie des graphes, ainsi elles peuvent être classées selon la structure du graphe utilisé. On retrouve le partitionnement de Voronoï l'arbre quaternaire (les quadtree) et les approches pyramidales (Cocquerez, Philipp. 1995). La figure (1.3) illustre le principe de la segmentation basée sur les quadtree.

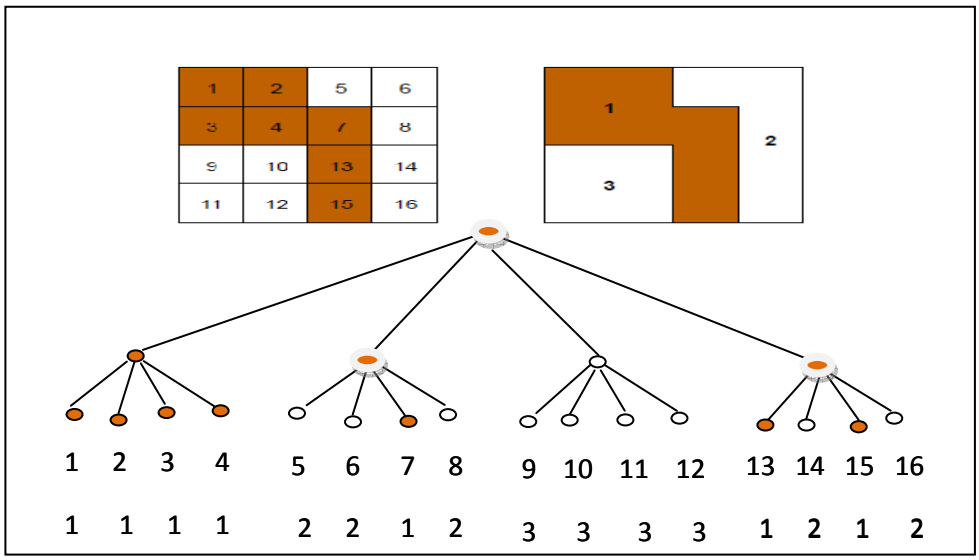


Fig. 1.3 : Algorithme division/ fusion par les quadtree.

1.4.1.2.3 Méthodes de classification

Les pixels sont caractérisés par un ensemble d'attributs qui permettent la mise en évidence de leur organisation spatiale et hiérarchique. L'utilisation d'un outil de classification approprié permet la discrimination des différentes régions. Des classes sont produites de telle sorte que les pixels d'une même classe soient les plus similaires possibles, et les pixels de deux classes distinctes soient les plus différents possibles. Une région est alors formée de pixels connexes appartenant à une même classe.

Il existe plusieurs méthodes de classification non supervisées les plus usuels sont la méthode des K-Means et l'algorithme Fuzzy C-Means (FCM).

- **Méthode des K-Means**

C'est une méthode itérative qui nécessite la connaissance du nombre de classes K(K entier choisi au départ). Elle consiste à affecter à chaque itération, un pixel à la classe la plus proche. Chaque classe est caractérisée par son centreV_k. L'algorithme (1.2) décrit en détail cette méthode.

Données :K classes, centres v de classes, N données, partition initiale

Résultat : Partition finale

- ✓ Initialiser les centres $V(0)$ en choisissant aléatoirement K échantillons parmi les N pixels ;
- ✓ Calculer la partition initiale $U(t=0)$:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad \|x_i - v_j\| = min_k \|x_i - v_k\| \\ 0 & autrement \end{cases}$$

$i = 1, \dots, N \; et \; k = 1, \dots, K; \;\; t = 1;$

(c.à.d. si $i \in C_i$ alors x_i étant le vecteur d'attribut du $i^{ème}$ pixel.)

répéter

Calculer les nouveaux centres $V(t)$ par le calcul des centres

$$v_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_{ij} \, x_i}{\sum_{i=1}^{N} \mu_{ij}}, \qquad k = 1, \dots, K$$

Calculer la nouvelle partition $U(t)$;

$t = t + 1$;

jusqu'à $U(t) \neq U(t-1)$ ***o***ù $t \leq t_{max}$;

Algorithme (1.2) : Algorithme K-Means.

- **Algorithme FCM**

Cet algorithme est une extension de l'algorithme des K-Means en introduisant une notion de floue dans la définition du degré d'appartenance. Son principe est de regrouper des individus dans K classes qui soient le plus homogènes et naturelles possibles. Les groupes obtenus doivent contenir des pixels les plus semblables, et entre groupes différents les individus doivent être le plus différents possible. En fait, la modélisation de l'imprécision s'effectue en considérant des frontières graduelles au lieu de frontières nettes entre les classes. L'incertitude s'exprime par le fait qu'un pixel possède bien des attributs qui l'assignent à une classe qu'à une autre. La classification floue assigne donc, non pas à un pixel une étiquette relative à une classe unique, mais

son degré d'appartenance à chacune des classes. Ces valeurs expriment l'appartenance incertaine d'un pixel à une région et sont appelées degré d'appartenance. Le degré d'appartenance se situe dans l'intervalle $[0,1]$ et les classes obtenues ne sont pas forcement disjointes. Dans ce cas les pixels x_j ne sont plus assignées à une classe unique, mais à plusieurs par l'intermédiaire de degré d'appartenance u_{ij} du vecteur x_j à la classe V. Le but des algorithmes de classification est non seulement de calculer les centres de classe B mais aussi l'ensemble des degrés d'appartenances des vecteurs aux classes.

Si u_{ij} est le degré d'appartenance de x_j à la classe i, la matrice $U_{CxN}[u_{ij}]$ est appelée matrice de C-partitions floues si et seulement si elle satisfait aux conditions :

$$\forall i \in \{1,\dots,K\}, \forall\, j \in \{1,\dots,N\} \quad \begin{cases} u_{ij} \in [0,1] \\ 0 < \sum_{j=1}^{N} u_{ij} < N \end{cases} \tag{1.28}$$

$$\forall\, j \in \{1,\dots,N\} \quad \sum_{j=1}^{N} u_{ij} = 1 \tag{1.29}$$

L'algorithme FCM consiste à minimiser la fonction objectif à minimiser suivante :

$$J(V,U,X) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^{m}\, d^2(x_j, v_i) \tag{1.30}$$

v_i est le centre de la classe i, $d(x_j, v_i)$ est la distance entre l'échantillon x_i et le centre de la classe j.

$m > 1$ est le degré de flou des classes. La résolution du problème aboutit (Eq .1.26) à :

$$v_i = \left(\sum_{k=1}^{N} u_{ik}^{m}\ x_k\right) / \left(\sum_{k=1}^{N} u_{ik}^{m}\right) \tag{1.31}$$

$$u_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{d^2(x_j, v_i)}{d^2(x_j, v_k)}\right)^{2/m-1}\right]^{-1} \tag{1.32}$$

Cette méthode est décrite par l'algorithme suivant :

Données :K classes, centres v des classes, partition initiale,m degré de flou.

Résultat : Partition finale

- ✓ Fixer arbitrairement un nombre de classes K;
- ✓ Initialiser la matrice de degré d'appartenance$U_{KxN}[u_{ij}]$. Cette matrice représente la partition floue des données et doit vérifier la condition de normalisation $\sum_{i=1}^{K} u_{ij} = 1\,, \forall\ j = 1, \dots N$;

Repeter

Calculer les centres de classes

$$v_i = (\sum_{k=1}^{N} u_{ik}^{m}\ \ x_k)/(\sum_{k=1}^{N} u_{ik}^{m}) \qquad i = 1,2, \dots . K$$

Mettre à jour la matrice d'appartenance

$$\mu_{ij} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{1}{d_j^2(x_i, v_j)}\right)(1/m-1)} \qquad i = 1,2, \dots . K \text{ et } \ j = 1,2, \dots . N$$

Calcul de critère de convergence ;

jusqu'à Convergence ;

Algorithme (1. 3) : Algorithme FCM.

La condition d'arrêt n'est pas la stabilisation des centres mais la stabilisation de la matrice d'appartenance.

1.4.1.3 Approches mixtes

Les approches frontières et régions s'appuient sur les informations différentes et complémentaires. Cela a incité plusieurs chercheurs à développer des systèmes de segmentation par coopération de méthodes. On distingue en principe trois types de coopération :

1. La coopération série : donne naissance à des algorithmes de segmentation puissants. Cependant le résultat dépend souvent de l'ordonnancement de la coopération.

2. La coopération parallèle : elle fait appel à trois mécanismes, la fusion, l'adaptation et la correction. Généralement la modélisation utilisée favorise un de ces trois mécanismes, ce qui ne contribue pas d'une manière générale à des résultats très probants.

3. La coopération hybride : permettant de solutionner quelques lacunes des deux coopérations précédentes.

1.5 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre quelques notions sur l'analyse de la texture, la classification et la segmentation d'images. Les méthodes d'analyse de la texture sont très nombreuses et très variés. Elles ont pour but de caractériser une image ou un pixel par un ensemble d'attributs ou signatures. Parmi toutes ces méthodes nous nous somme focalisées sur les méthodes basées sur le modèle et plus particulièrement sur le modèle fractale qui forment l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 2

2.1 Introduction

Curiosité géométrique depuis longtemps, théorie mathématique depuis peu. La géométrie fractale et la théorie multifractale sont des outils précieux pour analyser, comprendre et même prévoir divers phénomènes naturels ou industriels. Ce chapitre donne quelques notions et définitions sur la théorie fractale et multifractale. Il introduit en particulier : le concept de fractal ou objet fractal tout en spécifiant les différentes catégories existantes, l'autosimilarité, l'invariance d'échelle, la notion de dimension fractale et de codimension ainsi que la lacunarité et le formalisme multifractal.

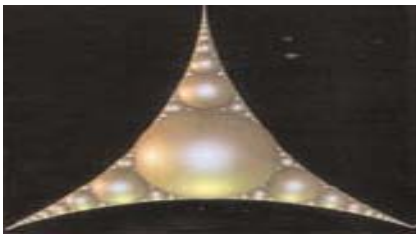
2.2 Historique sur les fractals

Depuis très longtemps, l'homme a été fasciné par des formes géométriques particulières qu'il observa dans la nature et qu'il créa pour décorer ses habitations, ses vêtements, ou encore ses lieux de culte (Fig. 2.1). Par la suite, ces formes ont été étudiées par des mathématiciens. Au milieu de19^{ième} siècle, pour un mathématicien, une courbe est continue et possède une tangente en chacun de ces points sauf sur certains points dits singuliers et elle est de dimension **1**. Tout tracé qui n'entre pas dans ce modèle est pathologique. Vers la fin du 19^{ième} siècle, quelques mathématiciens s'intéressent à des courbes continues sans tangente, vite qualifiées de "monstres" par les contemporains. Et pourtant ceux-ci ne font qu'anticiper ce que l'on va nommer la géométrie fractale, développée et popularisée par Benoît Mandelbrot.

Déjà, en 1890 Giuseppe Peano (1858-1930) exhibe une courbe connue sous le nom de courbe de Peano, qui remplit véritablement tout un carré (Peano. 1890). Helge Von Koch, en 1904, dessina le flacon de neige le plus célèbre de l'histoire des mathématiques qui est un exemple de courbe sans tangente en aucun point (Von Koch. 1904). D'autres exemples d'objets tels que la poussière de Cantor (Cantor. 1884), les triangles et éponges de Sierpinsky, qui sont des créations de l'esprit humain et très éloignées de la nature, faisaient dire à Poincaré, pourtant traducteur de Cantor, que l'on ne devrait pas exhiber ces exemples qui mettent en défaut le raisonnement de nos pères et n'utilisent aucune théorie. Or des mathématiciens, comme Jordan qui essaie de trouver une définition du mot "courbe" mieux adaptée à la diversité des modèles mathématiques ou Cantor qui établit la bijection entre les points d'un segment et ceux d'un carré, montrent la nécessité d'élargir la notion de dimension d'un objet. Dés 1935 une dimension fractionnaire (D) d'environ 1,26 a été attribuée au flacon de Von Koch. Ainsi, la dimension fractale

constitue une généralisation de la notion de dimension entière, propre à la géométrie euclidienne. Par ailleurs, ces objets géométriques douteux n'acquièrent un statut à part entière que dans les années soixante-dix, grâce au mathématicien français Benoit Mandelbrot qui en fait l'objet d'une nouvelle discipline mathématique : la géométrie fractale. En effet, la nature n'est pas analytique, lisse, dérivable, mais elle est plutôt fractale. Ces objets que Cantor, Peano, Von Koch, Sierpinsky etc. ont inventés, décrivent mieux la nature que les fonctions analytiques des physiciens du XIX siècle. La géométrie fractale prend donc le relais et permet d'étudier avec succès, ces objets appelés objets fractals ou encore fractals.

Après Mandelbrot, bien d'autres mathématiciens et informaticiens ont utilisé les possibilités immenses, en termes de calculs et d'imageries, offertes par l'informatique pour développer cette théorie. Les fractales sont toutes définies de façon constructives et itérative. Cela implique que l'on ne peut en présenter que des approximations obtenues grâce à des calculs numériques.



Triangle curviligne bourré de cercles de plus en plus petits (3 siècles avant J.C)

Le carrelage de la cathédrale d'Agnan en Italie (réalisé en 1124)

Fig. 2.1: Exemples anciens sur la géométrie fractale.

2.3 Formulation du concept de fractal

L'adjectif « fractal » a été proposé par Mandelbrot en 1975 (Mandelbrot.1975). Il provient du mot latin « fractus », du verbe « frangere » qui signifie briser, présenter des irrégularités, fragmenter à toutes les échelles ou encore fractionner à l'infini.

2.4 Objet fractal on non fractal ?

Un objet est dit non fractal s'il n' ya pas d'apparition de nouvelles formes chaque fois qu'on zoome une de ses parties (Fig. 2.2). Or dans le cas d'un objet fractal (Fig. 2.3),

une nouvelle forme est apparue à chaque fois qu'une partie de l'objet est zoomée. Cette forme est plus au moins similaire à la totalité de l'objet lui même.

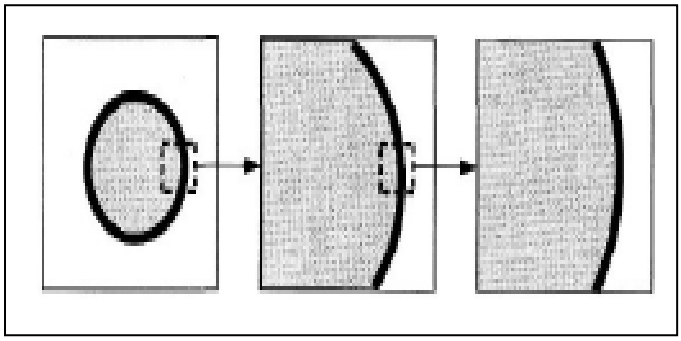


Fig. 2.2: Objet non fractal.

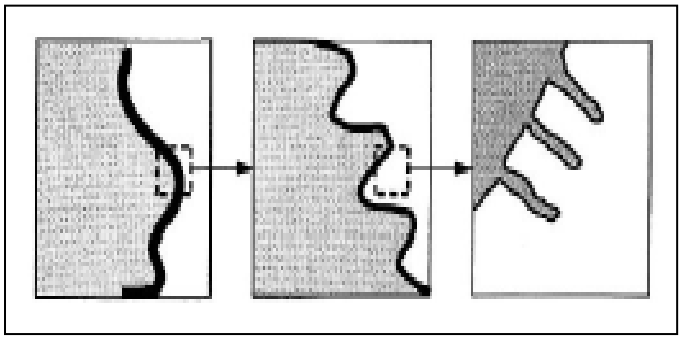


Fig. 2.3: Objet fractal.

2.5 Définition d'un objet fractal

Plus généralement, un fractal désigne un type d'objets dont l'irrégularité à toutes ses échelles d'observation, ne peut pas être caractérisée par une dimension entière, contrairement aux figures géométriques euclidiennes qui possèdent quant à elles des dimensions entières tels que : 0 pour un point, 1 pour une courbe, 2 pour une surface et 3 pour un volume. Les fractalistes considèrent que la question de définition ne devra se poser que lorsque la théorie fractale devienne plus enracinée. Benoit Mandelbrot lui-même s'est longtemps refusé à en fournir une définition et ce n'est qu'en 1982 qu'il a pu donner la définition suivante:

Un ensemble $F/(F \subset \mathcal{R}^n)$ est appelé fractal si sa dimension de Hausdorff-Besicovich notée, $D_{HB}(F)$ (appelée aussi dimension fractale de l'objet (F) notée $D(F)$) est strictement supérieur à sa dimension topologique $D_t\ (F)$:

$$D_{HB}(F) > D_t\ (F) \tag{2.1}$$

Si l'objet (F) est régulier alors la dimension fractale et la dimension topologique coïncident.

Ainsi, pour caractériser des objets et des ensembles fractals, la géométrie fractale se sert de la notion de dimension fractale qui sera abordée en détail dans les sections suivantes.

2.6 Caractéristiques d'un objet fractal

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes (Fisher. 1995):

-Il a des détails plus ou moins similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;

-Il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;

-Il est exactement ou statistiquement auto similaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties.

-Sa dimension de Hausdorff-Besicovich est plus grande que sa dimension topologique, et possède une valeur fractionnaire (valeur non entière).

2.7 Classification des objets fractals

Les fractals sont défini de façon récursive ou itérative, selon la manière avec laquelle elles sont construites. Nous pouvons distinguer deux grandes catégories : les fractals déterministes et les fractals non déterministes (Falconer. 1990), (Hasting, Sugihara, 1994).

2.7.1 Fractales déterministes

Ce sont les fractals dont la construction ne dépend pas du hasard. Elles sont souvent construites géométriquement ou avec des méthodes numériques. Elles sont de trois types :

a) Les systèmes de fonctions itérés (IFS : Iterated Function System) : Ce type de fractals peuvent être décrites par des règles de remplacement géométriques fixes.

L'ensemble de Cantor, le tapis de Sierpinsky, la courbe de Peano, le flacon de Von Koch constituent des exemples, bien connus dans le domaine, appartenant à ce type de fractal.

- **La courbe de Helge Von Koch**

La courbe de Von Koch (Fig. 2.4) constitue un exemple de fractal appartenant à la catégorie des systèmes de fonctions itérées.

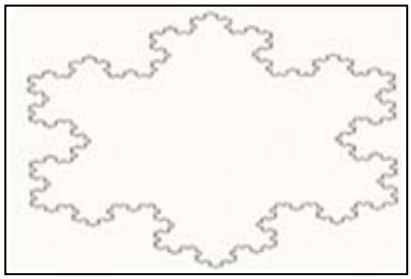


Fig. 2.4: Courbe de *Von Koch*.

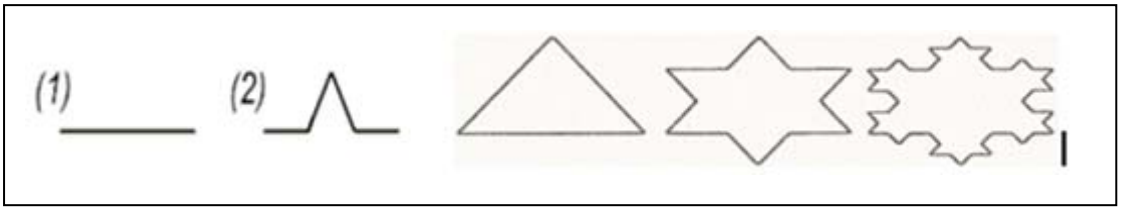


Fig. 2.5 : Etapes de construction de la courbe de *Von Koch*.

Les étapes de sa construction sont illustrées sur la figure (2.5). On démarre au début par un triangle équilatéral de coté l. Chaque coté peut être découpé en trois parties de longueur chacune $(l/3)$. Ensuite la partie centrale de chaque coté du triangle est remplacée par deux segments ayant la même longueur $(l/3)$. En répétant suffisamment longtemps, cette procédure pour chaque segment de nouveau objet ainsi obtenue on arrive à la forme de la figure (2.4). Notons qu'à la première itération, la longueur $\boldsymbol{l}$ de chaque coté du triangle est remplacée par $\frac{4}{3}l$; à la deuxième itération elle devient $\left(\frac{16}{9}\right)l = \left(\frac{4}{3}\right)\cdot(\frac{4}{3})l$. A chaque itération la longueur est multipliée par$\left(\frac{4}{3}\right)$. Au bout de la $k^{ième}$ itération, la courbe de Von Koch a une longueur de $3.\left(\frac{4}{3}\right)^{k}$. Cela signifie que, la longueur de courbe de Koch tend vers l'infini pour un nombre d'itération infini. En pratique, la courbe affichée sur un écran ne varie plus quand le segment élémentaire tombe en dessous de la distance entre deux pixels, on peut ainsi arrêter le processus. Mais dans l'idéal mathématique, on continue indéfiniment. On arrive ainsi à ce qui a

longtemps été considéré comme une monstruosité mathématique, une courbe de longueur infinie inscrite dans un domaine borné. On dit encore que les fractales introduisent un nouveau paradoxe : "le fini peut contenir l'infini".

- **Sierpinsky : Triangle, tapis et autres tétraèdres**

La figure (Fig. 2.6) montre quelques exemples construits par Sierpinsky.

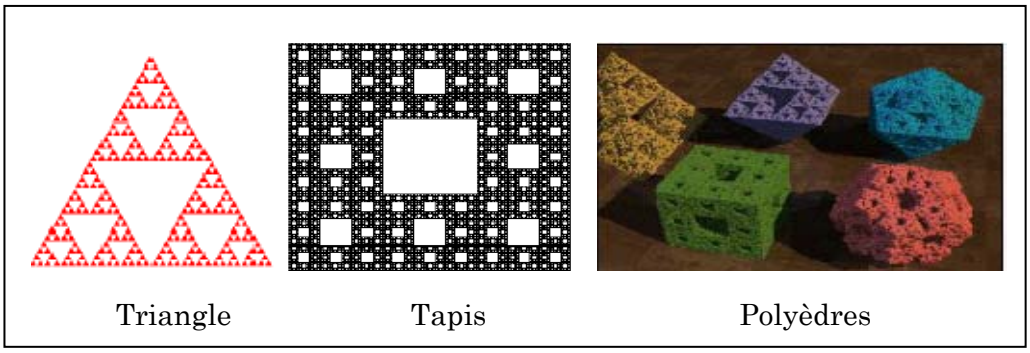


Fig. 2.6 : Ensembles de *Sierpinsky*.

Le triangle de Sierpinsky se construit à partir d'un triangle équilatéral, pour lequel on trace trois segments entre les trois milieux des cotes du triangle, ce qui délimite quatre nouveaux triangles. On enlève ensuite le petit triangle central, on obtient trois petites triangles qui se touchent deux à deux par un sommet dont les longueurs des cotés sont la moitié de celles de départ et dont la surface est divisée par quatre. On répète cette procédure avec chacun des petits triangles obtenus.

Le tapis de Sierpinsky est une fractale de texture poreuse obtenue en divisant un carré en neuf carrés égaux et en supprimant ensuite le carré central. Répétée indéfiniment, cette opération permet de construire une figure dont l'aire est nulle et le périmètre total des trous est infini.

La figure 2.7 montre d'autres exemples de fractales IFS.

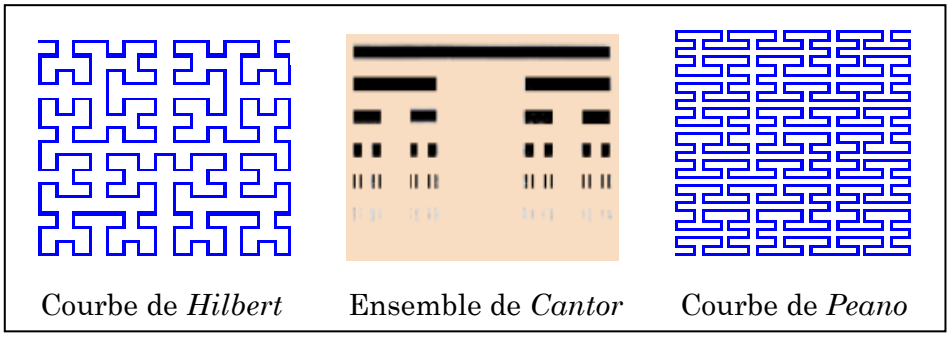


Fig. 2.7 : Quelques exemples de fractales IFS.

b) Fractales réalisées grâce à une suite de points : Sont des fractales définies par une relation de récurrence pour tout les point de l'espace (tel que le plan complexe). Nous retrouvons dans cette catégorie les ensembles de Mandelbrot et celles de Julia.

- **Ensemble de Mandelbrot**

Cet ensemble a été proposé en 1981 par Benoît Mandelbrot afin de résoudre le problème suivant :

Soit la suite complexe : $Z_{n+1} = {Z_n}^2 + C$. Avec $Z_0 = 0, n \in N$ et C est un nombre complexe quelconque. Suivant la valeur de C, quel comportement la suite va-t-elle avoir ? Est-t-elle possible de se converger, se diverger ou d'être cyclique ? L'idée est de balayer à l'aide d'un programme une région de l'espace des complexes. Pour chaque pixel de l'écran on associe une valeur de C et on calcul le comportement de la suite associée. Si un Z_i possède un module supérieur à deux, c'est que la suite va diverger. On désigne alors le pixel de la couleur **i.** Si au bout d'un nombre d'itérations maximum, le module de Z_i est toujours inférieur à deux, on estime que la suite ne diverge pas et on affiche le pixel en noir. On obtient ainsi l'image de la figure (2.8) ci-dessous. L'ensemble de Mandelbrot est l'objet noir affiché au centre de l'image.

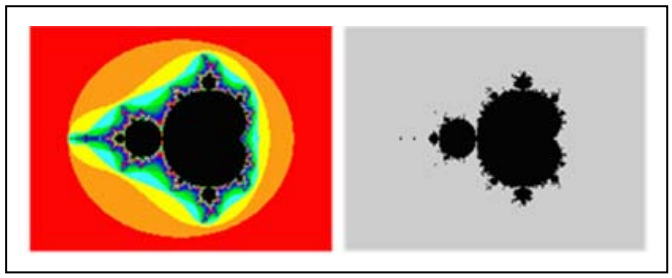


Fig. 2.8 : Ensemble de *Mandelbrot*

- **Ensemble de Julia**

Les ensembles de Julia sont définis par la même suite sauf que le premier terme Z_0 est l'affixe du point courant et, C une constante propre à chaque ensemble de Julia. C'est-à-dire C est fixé pendant tout le calcul de l'image. A chaque valeur de C, correspond donc un ensemble particulier de Julia (Fig. 2.9).

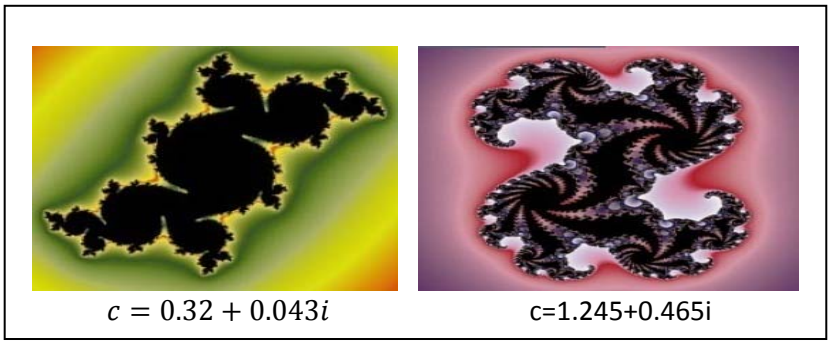


Fig. 2.9 : Ensembles de *Gaston Julia*.

c) Ensembles fractals non uniformes :Une première extension, qui reste dans le cadre déterministe et parfaitement auto-similaire, permet de construire des ensembles fractales non uniformes, en divisant un motif de base en n sous-motifs similaires, mais en utilisant des similitudes de rapports variables $r_i (1 \leq i \leq n)$ pour chacun des sous-motifs. Ces ensembles sont également qualifiés de multifractals (section 2.16). La figure (2.10) montre un exemple d'un ensemble fractal non uniforme.

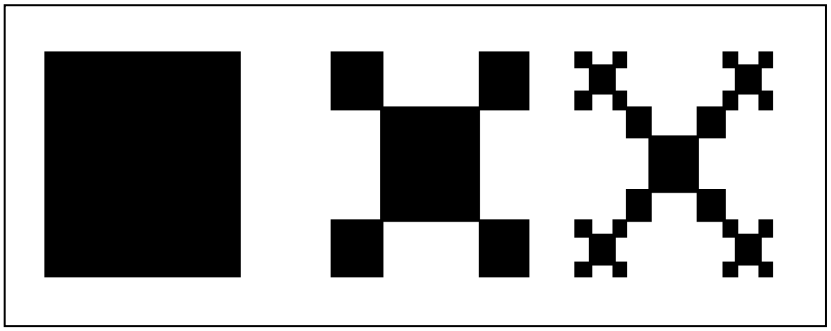
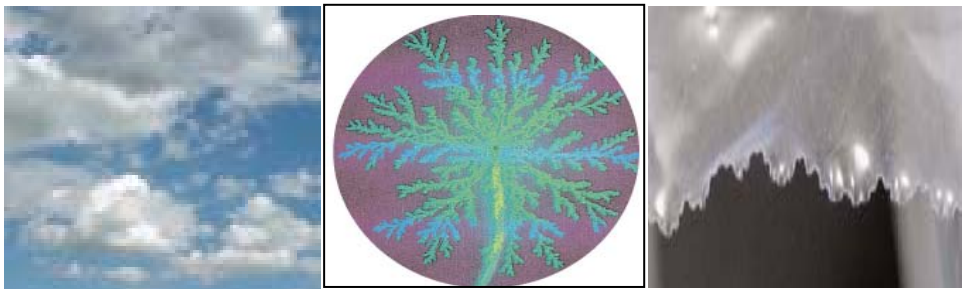


Fig. 2.10 : Exemple de fractal non uniforme.

2.7.2 Fractals non déterministes

Par opposition aux fractales déterministes, il existe des fractales liées au hasard ou à des phénomènes aléatoires (le mode de réplication fait intervenir une composante aléatoire). Elles se présentent sous deux formes :

a) Objets fractals naturels : objets aléatoires ou non déterministes, car le processus dynamique qui permet leurs création varie lui même avec le temps de façon aléatoire. Citant, les vaisseaux sanguins, le paysages fractals (les nuages, les montagnes, les flacons de neige, le chou- fleur). La figure (2.11) montre quelques exemples de fractals naturels.



(a) (b) (c)

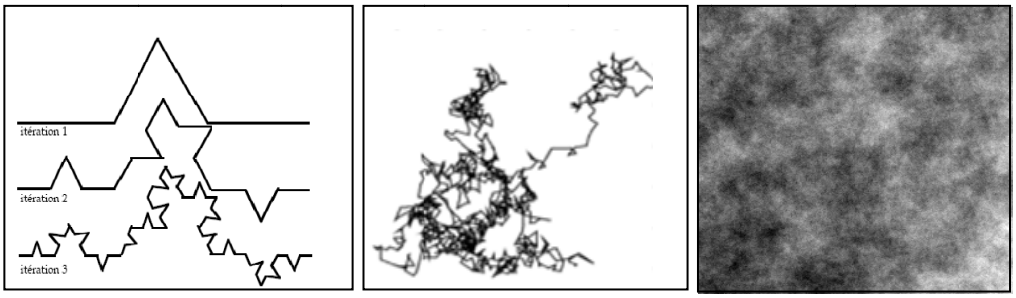
a) Nuage.

b) Digitation visqueuse de Van -Damme analogue au claquage diélectrique.

c) Feuille de plastique déchirée. Des fronces fractales apparaissent spontanément le long du bord créé par la déchirure.

Fig. 2.11 : Exemples de fractals naturels.

b) Ensembles fractals aléatoires : Des fractales irrégulières peuvent être construites par simulation en introduisant des composantes aléatoires dans une procédure de construction élaborée au départ pour générer une fractale. Falconer (Falconer. 1990) a donné un exemple de variantes aléatoires de courbe de Von Koch dont les principes de modification aléatoire sont illustrés sur la figure ci-dessous (2.12.a). Par contre la figure (2.12.b) montre le mouvement aléatoire d'une minuscule particule en suspension, appelée mouvement Brownien. Ce dernier fut décrit pour la première fois, par Robert Brown en 1827 quand il a aperçu dans le fluide situé à l'intérieure des grains de pollen des petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques. Une particule microscopique en suspension dans un liquide parcourt une trajectoire (courbe) aléatoire, aux propriétés géométriques fascinantes (entre deux chocs, la particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante et s'accélère lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi. La figure (2.12.c) montre une image synthétique générée à partir d'un Mouvement Brownien Fractionnaire(FBM).



(a) (b) (c)

a) Courbe de Von Koch.

b) Mouvement Brownien.

c) Image en niveau de gris générée à partir d'un Mouvement Brownien Fractionnaire.

Fig. 2.12 : Exemple de fractals aléatoires.

- **Ensembles fractals auto-affines**

Il existe un autre type de fractales dites fractales auto-affines qui sont construites par des fonctions affines. En effet, les fractales auto-affines constituent une généralisation des fractales autosimilaires. Les similitudes sont remplacées par des fonctions affines quelconques. Il en résulte des rapports de contractions différents suivant la direction de l'espace et des figures géométriques présentent encore une sorte d'auto similarité, mais anisotrope (deux morceaux quelconques d'une fractale de ce type se rassembleront). L'exemple de la figure (2.13) montre un cas de fractale auto-affine.

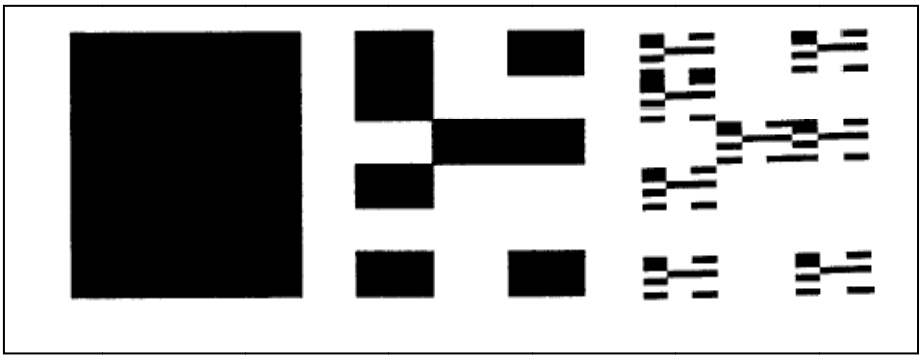


Fig. 2.13 : Exemples de fractale auto-affine.

2.8 Self similarité ou auto-similarité dans les images

La propriété particulière d'une fractale dite auto-similarité (ou encore fractale à homothétie interne) est que chacune de ses parties reproduit sa totalité. La fractale

présente ainsi un aspect identique quelle que soit l'échelle considérée : Nous parlons également d'invariance par dilatation. Pour Hasting et Sugihara (Hasting, Sugihara, 1994), un objet est auto-similaire si c'est l'union des copies de lui-même à différentes échelles où le processus est isotrope ou uniforme en toute direction. Ainsi si l'on prend une loupe ou si on le regarde de très loin, il va avoir toujours la même structure.

Parmi tous les fractales que nous avons présentées précédemment, nous pouvons facilement constater que seules celles construites par des systèmes itérés de fonctions affichent la propriété d'auto similarité. Sur la courbe de Von koch par un exemple, le motif de base est omniprésent, dans toutes les orientations et à toutes les échelles possibles (A chaque échelle, ce motif élémentaire est répété par un procédé récurrent).

Le concept d'autosimilarité est en réalité propre aux objets réels. Citons à titre d'exemple, l'exacte auto-similarité de la courbe de Von Koch qui peut se montrer un modèle intéressant de représentation d'une côte maritime. En effet, un morceau de la côte maritime ressemble à la côte dans son ensemble, mais ne lui est pas rigoureusement identique. Pour s'affranchir de ce problème, la notion d'auto-similarité statistique, est introduite spécifiquement aux fractals aléatoires.

2.9 Invariance d'´echelle - loi de puissance et auto-similarité d'un objet

Le phénomène d'invariance d'échelle (Jacopo. 2003) est associé à l'absence d'´echelle de temps ou d'espace privilégiée: toutes les échelles sont représentées sans distinction d'aucune d'entre elles. En un sens général, un objet est invariant d'´echelle s'il est laissé inchangé par l'action d'une dilatation : il est symétrique pour cette transformation. Cette symétrie est encore appelée auto-similarité et peut se résumer par le fait qu'il existe des transformations impliquant des dilatations qui laisse l'objet invariant. Énoncée ainsi, cette propriété est incomplète car elle nécessite que soit définie la notion d'échelle :

L'´echelle se définit généralement pour un objet, par la taille significative de celui-ci, c.-à-d. la plus petite des dimensions. La notion d'´echelle est directement liée à celle d'une mesure (la notion de la mesure est introduite dans l'annexe A) ou au moins à une grandeur physique. Par conséquent, cette propriété signifie que le changement d'´echelle d'observation, en considérant une partie du signal étudié, ne change pas les statistiques du signal tout entier; autrement dit, le changement d'´echelle conserve l'aspect général de l'objet.

Considérant des échelles plus intuitives de temps ou d'espace, les fréquences par exemple. Il apparait alors que la notion d'invariance d'´echelle est intimement liée aux spectres dits en $1/f$ et peut être associée au concept de fractal (Mandelbrot.1982). Puisqu'il n'existe pas d'´echelle privilégiée et donc aucune fréquence f caractéristique, la puissance spectrale P vérifie une relation de la forme :

$$\forall f,\ \forall a > 0,\ \frac{P(a f)}{P(f)} = g(a) \qquad (2.2)$$

$g(.)$ étant une fonction quelconque.

Ce modèle satisfait l'intuition des comportements en lois d'´echelles : entre deux fréquences caractéristiques, on ne distingue plus de fréquences jouant un rôle privilégié, le spectre étant invariant par une opération de dilatation. Cette analyse simple justifie notamment l'émergence des lois de puissance dans les problèmes à invariance d'échelle : il ressort de cette expression que g, et par conséquent P, suivent une loi de puissance du type $|f|^{-\eta}$. On parle de comportement autosimilaire. Les objets mathématiques fractals (Mandelbrot.1982), par exemple, présentent cette propriété, soit parce qu'ils sont constitués de formes répétées à différentes échelles, soit parce que leurs propriétés présentent une invariance d'´echelle, sans pour autant reproduire la même forme à toutes les échelles.

2.10 Méthodes fractales

La géométrie fractale n'est pas qu'une théorie abstraite. En effet, les fractales se sont révélées adapter à la représentation d'objets naturels complexes : montagnes, nuages, amas galactiques, réseaux hydrographiques, poumons. L'évolution de certains phénomènes dynamiques peut être caractérisée par une figure fractale (les désordres boursiers, les fluctuations des prix du charbon et du blé, …). Par ailleurs, la beauté des fractales en a fait un élément clé de l'infographie. Les fractales servent aussi à compresser des images fixes ou animées. Au prés de ces utilités, nous pouvons alors, divisés les méthodes fractales en imagerie en deux classes:

1) Les méthodes basées sur le Système de Fonctions Itérées (IFS). Les IFS interviennent dans la génération d'objets fractals à forte caractéristique autosimilaire (Annexe A). Ils ont servi à développer des méthodes de compression des images

2) Les méthodes basées sur le calcul de la dimension fractale. La dimension fractale notée, D, d'une image peut être calculée en utilisant les niveaux de gris qui lui

correspondent. C'est une bonne mesure de la structure géométrique d'une image et a été utilisée comme modèle approprié pour la caractérisation de leurs textures.

2.11 Types de dimensions fractales

L'étude des objets irréguliers et en particulier des objets autosimilaires a poussé les mathématiciens à établir des liens entre la notion de mesure et la notion de dimension (le concept dimension est brièvement cité en annexe A). L'idée de la dimension fractale, est de mesurer l'objet à une échelle δ de sorte que toutes les irrégularités de taille inférieur à δ seront ignorées, et voir aussi le comportement de ces mesures quand $\delta \to 0$ (Seuront. 2010).

2.11.1 Dimension topologique

La dimension topologique utilisée en géométrie Euclidienne est associée au nombre de degré de liberté d'un point se déplaçant à l'intérieur d'un objet. Autrement dit, la dimension topologique fait référence à un nombre entier de vecteurs indépendants qui forment la base de cet objet (Godin. 2003). Ainsi, un point est considéré comme un objet de dimension 0, une courbe comme un objet 1D et une surface comme un objet 2D. D'une manière générale, un objet de dimension n est représenté dans un espace euclidien R^n.

2.11.2 Dimension de Hausdorff

Pour les objets fractals, la notion de dimension est beaucoup moins triviale. La plus ancienne définition de la dimension fractale a été proposée en 1919 par Félix Hausdorff (Hausdorff. 1919) et développée en 1935 par Besicovitch (Besicovitch. 1935) Elle est d'ailleurs souvent appelée dimension de Hausdorff- Besicovitch. Elle est basée sur la considération de l'ensemble de tous les pavages possibles (Godin. 2003), (Falconer. 2003).

Soit un ensemble F de points de R^n (Fig.2.14). Un δ recouvrement de F est un recouvrement de F par une famille d'ouverts $\{U_i\}$ (Annexe A), possiblement infinie, où chaque U_i a un diamètre $|U_i|$ inférieur ou égal à δ, avec $|U_i| = \sup_{x,y \in U_i}(|x - y|)$, $|x - y|$ est une distance euclidienne (Annexe A). Nous avons alors:

$$F \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \quad (i \in N) \qquad (2.3)$$

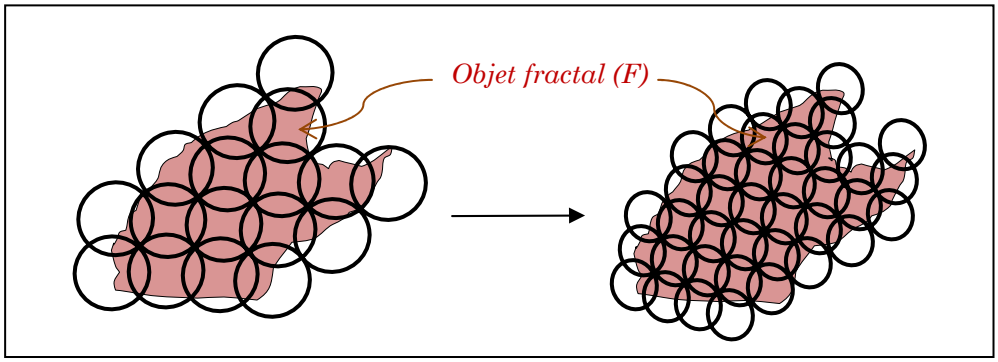


Fig. 2.14 : Dimension fractale selon *Hausdorff*.

Pour tout réel d on défini la quantité :

$$h_{\delta}^{d}(F) = inf\ \{\ \sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^d\ /\ \{U_i\}\quad \text{est un } \delta \text{ recouvrement de } F\ \} \tag{2.4}$$

Cette définition prend en compte tous les δ recouvrements possibles.
On définit la d-mesure de recouvrement de Hausdorff (ou encore la mesure de Hausdorff de dimension d), comme étant :

$$h^{d}(F) = \lim_{\delta \to 0}\quad h_{\delta}^{d}(F) \tag{2.5}$$

2.11.3 Dimension des boites

L'absence de méthodes générales pour le calcul d'un δ recouvrement minimum a conduit les mathématiciens à calculer la dimension fractale par une méthode dite comptage de boites (Box counting) (Godin. 2003). Cette dernière considère un autre type de recouvrement tel que la grille régulière (Fig. 2.15). Elle est également appelée dimension de *Minkowski-Bouligand*.

Soit δ le pas de la grille servant à paver un objet F, nous parlons alors de δ pavage et nous notons $N_{\delta}(F)$ le nombre minimum de pavés de la grille interceptant l'objet F.

A l'instar de la mesure de *Hausdorff*, nous définissons la quantité :

$$b_{\delta}^{d}(F) = inf\{\sum_{pavés\ intersectant\ F}\delta^{d}\ /\delta - pavage\ de\ F\} = N_{\delta}(F) \times\ \delta^{d} \tag{2.6}$$

En réduisant le pas δ de la grille, $b_{\delta}^{d}(F)$ prend alors une nouvelle valeur et lorsque δ tend vers $\boldsymbol{0}$, nous obtenons une approximation de la mesure de l'objet $b^{d}(F)$:

$$b^d(F) = \lim_{\delta \to 0} b_\delta^d(F) = \lim_{\delta \to 0} N_\delta(F) \times \delta^d \qquad (2.7)$$

Contrairement à la d-mesure de recouvrement de Hausdorff (Eq. 2.5), cette quantité n'est donc plus, une mesure (Falconer.1990). Néanmoins comme elle suit une loi de puissance, elle permet de définir une dimension qui coïncide dans de nombreux cas avec la dimension de Hausdorff appelée dimension de boites de l'objet F, notée $D_b(F)$. En effet, quand δ devient suffisamment petit, $N_\delta(F)$ est devenu égale au nombre de points de l'ensemble F, (tout en supposant que $\delta^d \approx 1$) d'où la limite suivante :

$$D_b(F) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log(\delta)}. \qquad (2.8)$$

Cette dimension à la particularité d'être définie à partir du comptage du nombre de pavés réguliers (δ) interceptant l'objet F et non à partir de la mesure de ces pavés. (En pratique, δ doit être plus grand qu'un pixel).

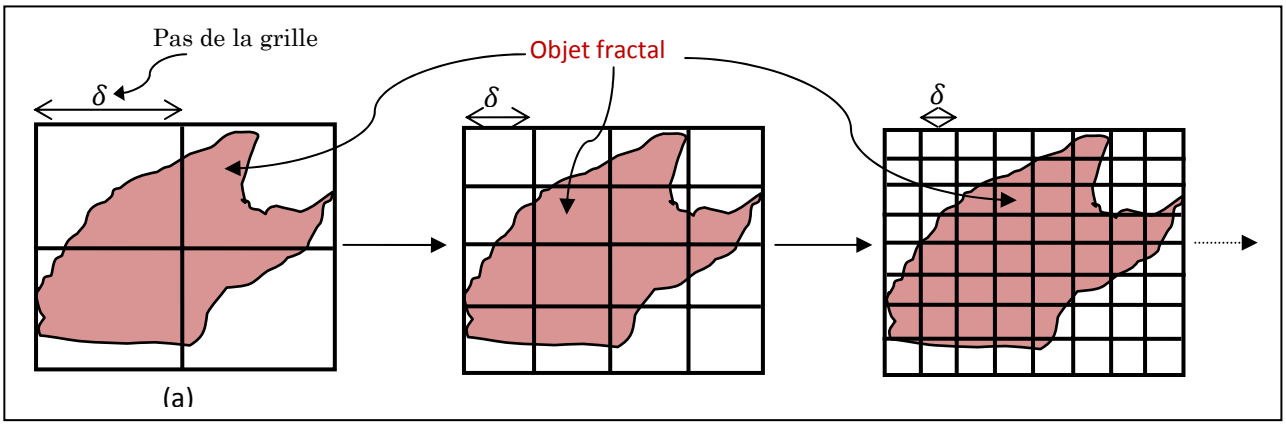


Fig. 2.15 : Grilles de pavés réguliers pour le calcul de la dimension des boites.

2.11.4 Dimension de capacité

La dimension de capacité est obtenue par le remplacement de la grille régulière utilisée pour le calcul de dimension des boites, par des boules ayant le même rayon δ (Fig. 2.16). $N_\delta(F)$ est le nombre minimal de boules de rayon δ, nécessaires pour paver l'objet F. La dimension de capacité notée $D_c(F)$ est alors:

$$D_c(F) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \qquad (2.9)$$

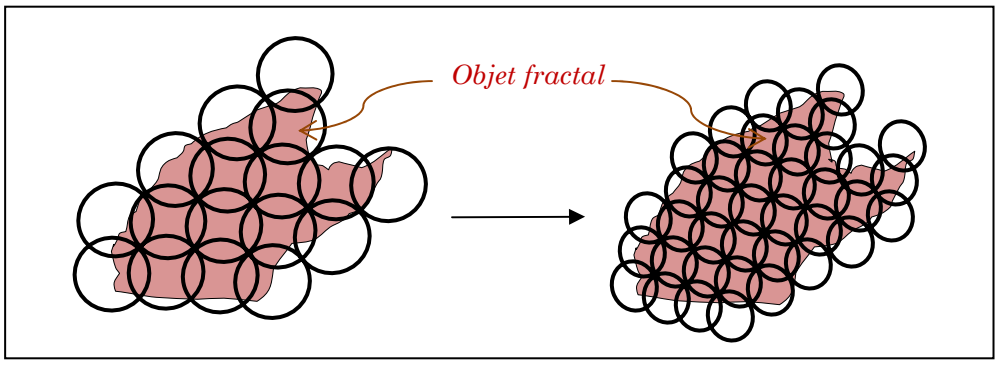


Fig. 2.16 : Dimension de capacité.

2.11.5 Dimension d'autosimilarité ou d'homothétie interne

L'étude des objets fractals est facilitée par leur autosimilarité. L'expression analytique de la dimension fractale d'un objet fractal strictement autosimilaire F (F $\subset$ $\mathcal{R}^n$) est donnée par Benoit Mandelbrot comme suit (Mandelbrot.1977) :

$$1 = N_r \cdot r^D \quad d'où \quad D = \frac{log(Nr)}{log(1/r)} \tag{2.10}$$

D est la dimension d'homothétie interne, N_r est l'union de toutes les copies distinctes (sans chevauchement de copies) qui couvrent parfaitement l'objet (F) et r est le rapport d'homothétie par apport à N_r.

Remarque

La dimension fractale possède la caractéristique suivante (Sandau. 1996) :
Soit deux ensembles $E_1 \, et \, E_2$ dans R^n alors,

$$D\,(E_1 \cup E_2) = max\,(D\,(E_1), D\,(E_2)) \tag{2.11}$$

Cette expression indique que la dimension fractale est obtenue par la région la plus complexe ($E_1 ou \, E_2$) de l'ensemble tout entier ($E_1 \cup E_2$).
Pratiquement, cette principale propriété n'est pas sollicitée à cause de la régression linéaire intervenant dans l'estimation de la dimension fractale.

2.13 Notion de codimension fractale

Quand nous parlons de dimension, nous avons l'idée sur l'information qu'elle réserve sur les propriétés géométrique d'un ensemble (si par exemple la dimension topologique d'un tel objet vaut 2, nous serons certes qu'il s'agit d'une surface). Concernant, la dimension fractale, elle caractérise un objet ou un ensemble fractal.

Soit D_e la dimension euclidienne de R^{De}, support d'un ensemble fractal F. Si D est la dimension fractale de F, nous définissons la codimension (Falconer.1990), (Barnsley.1988), (Feder. 1988), (Mandelbrot.1983) par :

$$C = D_e - D \tag{2.12}$$

Soient N_δ le nombre de boites nécessaires pour paver l'espace R^D tout entier à l'échelle δ et $N_\delta(F)$ le nombre de boites nécessaires pour paver un ensemble fractal F contenu dans R^{De} à la même échelle δ. Soit D_F la dimension fractale de F. En utilisant l'expression précédente :

$$N_\delta \approx \delta^{De}$$

$$N_\delta(F) \approx \delta^{D}$$

On déduit que :

$$\frac{N_\delta(F)}{N_\delta} \approx \delta^{D_e - D} \approx \delta^{-c} \tag{2.13}$$

Cette expression (Eq. 2.13) est celle d'une probabilité définie sur l'ensemble fractal F (Lovejoy, Schertzer. 1992). Elle traduit la probabilité qu'un cube de R^D, à l'échelle δ soit contenu dans F. C'est une notion importante dans l'étude du caractère fractal d'un objet.

2.14 Intérêt de la dimension fractale

De façon intuitive, la dimension fractale indique un certain degré d'occupation de l'espace physique par une forme fragmentée, ramifiée, tortueuse. Elle décrit la complexité d'une forme. Elle caractérise aussi le comportement auto-similaire d'une surface. Cette caractéristique n'est généralement pas acquise par les surfaces naturelles, mais elle est respectée en moyenne par les textures (Keller et al. 1989).Pour tous ces raisons, la dimension fractale est dans la plus part des cas utilisée pour caractériser une texture.

Certains physiciens ont reconnu très tôt l'intérêt des courbes fractales pour décrire les phénomènes naturels. De nombreux travaux ont montrés que la fractalité

était présente dans différents domaines de la physique, de la chimie. Elle est utilisée dans plusieurs études. En agronomie pour l'identification des plantes par exemple, en reconnaissance de la parole, des empreintes, des personnes par l'iris, en diagnostic, en médecine, etc. Cette liste n'est pas exhaustive, cependant, afin de mieux comprendre l'utilité de la dimension non entières, considérons l'exemple de la mesure de la longueur de la cote de Bretagne (Fig.2.17) présentée pour la première fois par Mandelbrot (Mandelbrot.1967) :

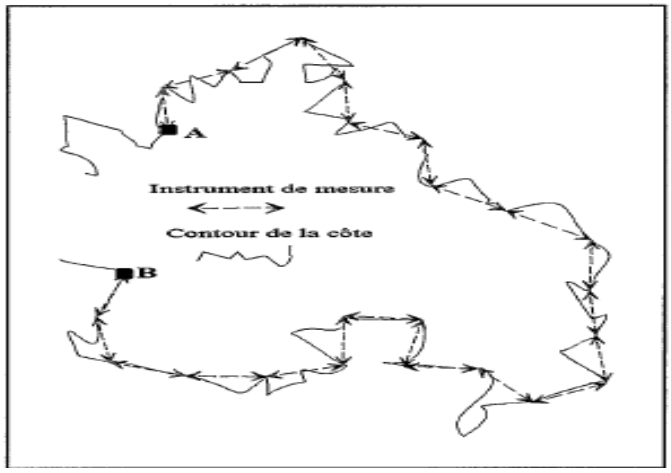


Fig. 2.17 : Une cote littorale.

Pour mesurer la longueur d'une portion de cette côte qui s'étend entre deux points fixes A *et* B (Fig. 2.17), nous devons définir un pas de mesure ε. Pratiquement, cette longueur aura un comportement croissant aussi longtemps que l'on choisira un pas de mesure de taille décroissante.

Considérons une règle de longueur ε. Pour mesurer la longueur de la côte entre les points A *et* B, nous devons disposer cette règle bout à bout depuis le point A jusqu'au point B, en suivant les contours. Si $N(\varepsilon)$ est le nombre de $\boldsymbol{\varepsilon}$ juxtaposés le long de AB, alors la longueur $L(\varepsilon)$ de la côte entre les points A *et* B est le produit de la longueur de la règle et du nombre $N(\varepsilon)$:

$$L(\varepsilon) = \varepsilon \cdot N(\varepsilon) \qquad (2.14)$$

Il est évident que la longueur mesurée dépend de la taille de $\boldsymbol{\varepsilon}$. En effet, si certains détails de la côte sont plus petits que $\boldsymbol{\varepsilon}$, comme c'est le cas sur la figure (2.17) ceux-ci seront ignorés dans l'opération de la mesure et la longueur mesurée comportera une erreur. Cette erreur sera d'autant plus grande que la règle $\boldsymbol{\varepsilon}$ sera trop grande par rapport aux détails de la côte. Par contre si l'on diminue la taille du pas $\boldsymbol{\varepsilon}$, on remarque

que la longueur mesurée croît sans fin. La notion de longueur est donc relative à la résolution de la mesure et elle est différente de la "vraie" longueur. L'importance de l'échelle d'observation (longueur de la jauge (ε)) a été particulièrement mise en évidence dans ce processus de mesure, dans le sens où: la longueur $L(\varepsilon)$ mesurée avec une jauge de mesure plus petite, est plus grande que la longueur obtenue avec une jauge plus grande.

La notion de la mesure perd alors son sens physique et se pose alors le problème de l'obtention d'une mesure exacte de cette longueur ?

En s'inspirant de la loi de Richardson, Mandelbrot a pu résoudre le problème**.** En effet, Richardson avait montré dans ses travaux que la longueur d'une cote valait approximativement

$$L(\varepsilon) \approx F \cdot \varepsilon^{1-D} = \varepsilon \cdot (F \cdot \varepsilon^{-D}) \tag{2.15}$$

$(F \cdot \varepsilon^{-D})$ pourrait être défini comme le nombre d'intervalles de longueur $\boldsymbol{\varepsilon}$ nécessaires pour couvrir la cote entre A *et* B**.** F *et* D étant des constantes, on obtient la relation suivante :

$$N(\varepsilon) = F \cdot \varepsilon^{-D} \tag{2.16}$$

Dans les travaux de Richardson, on note que la constante D **varie** avec la côte et avec la portion de la côte prise en compte, mais cette constante ne dispose d'aucune signification précise. Hausdorff a montré que si $N(\varepsilon) = F \cdot \varepsilon^{-D}$ alors il faut élever $\boldsymbol{\varepsilon}$ à la puissance D avant la multiplication dans la mesure de $N(\varepsilon)$. La longueur de la côte devient alors :

$$L(\varepsilon) = (\varepsilon^{D})(F \cdot \varepsilon^{-D}) = F \tag{2.17}$$

On trouve ainsi une mesure qui ne dépend plus de la taille du pas de mesure et ceci donne alors un sens à la constante F.

Même si $L(\varepsilon)$ ne dépend plus de ε, le problème n'est toujours pas résolu puisque Hausdorff a montré que D ne pouvait pas prendre n'importe quelle valeur et que pour une côte donnée, il existe une valeur unique $\overline{D}$ telle que :

$$si\ D > \overline{D}, L(\varepsilon) = \infty_{\varepsilon \to 0} \quad et \quad si\ D < \overline{D}, L(\varepsilon) = 0_{\varepsilon \to \infty} \tag{2.18}$$

$$si\ D > \overline{D}, L(\varepsilon) = 0_{\varepsilon \to \infty} \quad et \quad si\ D < \overline{D}, L(\varepsilon) = \infty_{\varepsilon \to 0} \tag{2.19}$$

La mesure de la longueur d'une côte irrégulière n'a donc de sens que si l'exposant D est égal à cette valeur $\overline{D}$*:* c'est sa dimension fractale. La notion de longueur n'ayant aucun

sens pour une courbe fractale, c'est davantage la notion de dimension fractale qui devient, pour ce type de courbe, la caractéristique véritablement pertinente.
La valeur de la dimension fractale est alors obtenue de la manière suivante :
Si la courbe est fractale (ligne irrégulière) alors D est indépendante de ε (D est unique et constante), et sa longueur $L(\varepsilon) = F\varepsilon^{1-D}$ est dépendante deε. Dans ce cas, l'ensemble de points $(log(\varepsilon), \log L(\varepsilon))$ trace une droite dont la pente vaut $(1 - D)$.

Si la courbe n'est pas fractale (ligne bien droite) alors $D = 1$ et quelque soit ε, sa longueur est F (F la vraie longueur de la ligne).

Ainsi, la dimension fractale permet de distinguer une ligne droite d'une ligne brisée, courbée, chose qu'on ne peut pas obtenir avec la dimension euclidienne ou topologique.

2.15 Lacunarité

Parallèlement à la dimension fractale, la lacunarité est une autre mesure fractale multi-échelle capable de caractériser la texture d'un objet. Elle caractérise la distribution de la taille des trous dans une texture à une échelle donnée. Une image à faible lacunarité est homogène et invariante par translation. Tandis que la variété de trous dans une image à lacunarité élevée est grande. Il est aussi important de savoir que si une image est hétérogène à des petites échelles, elle peut être tout à fait homogène lors de son examen à des échelles plus grandes et vice versa (Guo et al. 2009).
Si nous observons les textures comme des surfaces à niveaux de gris, nous comprenons aisément que deux surfaces qui présentent un même encombrement peuvent néanmoins être distinctes par la présence, la forme et la densité de trous qu'elles contiennent, et c'est précisément ces caractéristiques qui font de la mesure de lacunarité un très bon estimateur de rugosité de surface.
Mandelbrot et Van Ness (Mandelbrot.1968), ainsi que Voss (Voss. 1986) ont montré que des textures différentes peuvent partager une dimension fractale. Ainsi la lacunarité seule ou une combinaison de la dimension fractale et la lacunarité sont souvent utilisés comme des outils appropriés pour la segmentation d'images (Keller et al. 1989), (Dong. 2000).

Sur la figure (3.20), deux exemples de fractals de mêmes dimensions sont présentés : elles possèdent la même propriété d'auto similarité bien qu'elles n'aient qu'une très faible ressemblance, surtout en termes de la rugosité de surface. La mesure de lacunarité permet de distinguer ces deux ensembles : la surface de forte rugosité possède

une lacunarité faible, et inversement, la surface la plus lisse possède une caractéristique lacunaire élevée.

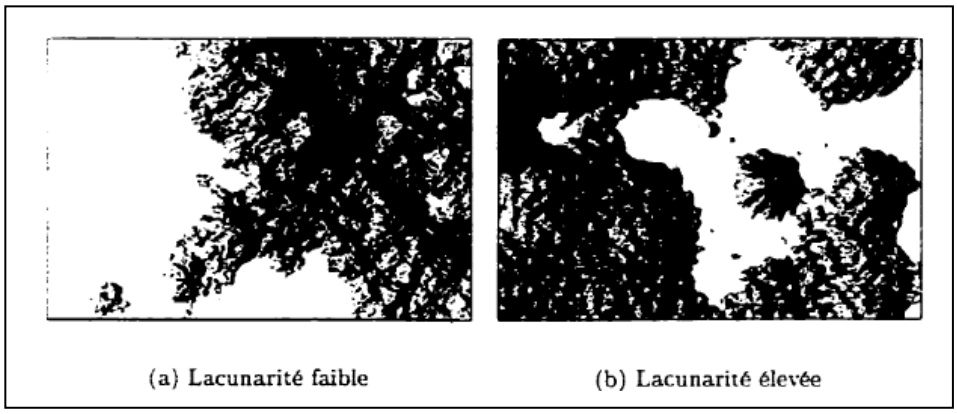


Fig.2.18 : Deux surfaces de même dimension et de rugosité différente.

La lacunarité notée Λ a été introduit par *Mandelbrot* (Mandelbrot.1983) comme suit :

$$\Lambda = E\left\{\left(\frac{Ma}{E(Ma)} - 1\right)^2\right\} \qquad (2.20)$$

Ma est la masse d'un ensemble fractal (le nombre de pixel), E{.} la valeur moyenne de la quantité qui se trouve à l'intérieur des crochets. Quelques méthodes de calcul de la lacunarité dans une image seront décrites dans le prochain chapitre.

2.16 Formalisme multifractale

Le comportement auto-similaire des fractals ne suffit pas à décrire, de manière précise et détaillée, la structure et le contenu local des images naturelles (Ruderman. 1997), (Ruderman, Bialek. 1994). Ceci est dû essentiellement au fait que ce comportement revient à assigner le même exposant d'échelle à tous les pixels de l'image. La généralisation à la notion de multifractal revient essentiellement à considérer les ensembles multifractals comme une hiérarchie d'ensembles dont chacun a sa propre dimension fractale. Ainsi le formalisme multifractal fournit une relation d'échelle qui requiert une famille, éventuellement infinie de dimensions, plutôt qu'une seule dimension comme dans le cas de la géométrie fractale. En effet, un ensemble multifractal est composé de sous-ensembles iso-fractals, et chacun des sous-ensembles se révèle être un ensemble fractal s'il exhibe la même structure géométrique à différentes échelles. L'idée de départ, est d'analyser la régularité locale du signal puis de mesurer la taille des

ensembles de points de même régularité: C'est la notion de dimension qui est définie. Pour une image il s'agit, plus précisément, d'assigner le même exposant d'échelle aux pixels de même régularité locale. Il est parfois très avantageux de considérer la répartition géométrique ou statistique des pixels ayant un exposant donnée.

Avec le développement d'outils numériques, l'analyse multifractale a trouvé de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'astrophysique, la géophysique, la biologie, le traitement d'image ou les télécommunications.

2.16.1 Origine du formalisme multifractal

Le formalisme multifractal a été formalisé initialement par G. Parisi et U. Frisch (Parisi, Frisch. 1985). Il devait à l'origine permettre d'étudier la complexité des signaux obtenus par des enregistrements très précis de la vitesse d'un écoulement en turbulent et d'introduire une méthode pour les classifier. Les signaux ainsi mesurés paraissent non seulement très irréguliers mais leur irrégularité semble aussi varier brutalement d'un point à l'autre. Ces observations sont en contradiction avec la théorie de la turbulence homogène et isotrope introduite par Kolmogorov en 1941 (Kolmogorov. 1941), selon laquelle la vitesse de l'écoulement devrait avoir partout la même irrégularité. Le formalisme multifractal est ainsi issu de la rencontre de la théorie de la mesure, de la théorie des systèmes dynamiques et de la physique statistique : Les concepts habituels de la thermodynamique (pression, température, énergie libre, entropie, ...) sont transposés dans le langage des systèmes dynamiques. Le concept de spectre des singularités apparait en 1986 dans les travaux de Halsey et al (Halsey et al. 1986) sur les mesures invariantes d'attracteurs étranges de certains systèmes dynamiques. Il s'avère que le spectre des singularités d'une mesure singulière (Halsey et al. 1986) (Bohr, Tèl. 1988) est intimement relié à celui des dimensions généralisées de Renyi, introduit quelques années auparavant (Grassberger, Procaccia. 1983) (Grassberger et al. 1983). A la suite de ces travaux, le formalisme multifractal est désormais lié à l'estimation du spectre des singularités d'un objet multifractal.
Les fractales non uniformes sont qualifiés de multifractales : La structure de la figure (2. 10) est plus complexe que les objets fractals. Un objet multifractal est aussi invariant par dilatation, cependant le facteur d'échelle dépend de détail observé.

2.17 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre les outils fondamentales de la théorie fractale et multifractale. Il ressort de cette étude que la notion fractale est riche et au même temps fascinante qui peut être utile dans beaucoup de domaines.

La dimension fractale représente, indépendamment de l'échelle d'observation, la complexité géométrique de la surface, en tant qu'objet supposé rigoureusement fractal, tandis que la lacunarité représente un paramètre de forme dépendant de l'échelle d'observation. Quant au spectre multifractal, il fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'une image : la première (description locale) est obtenue via l'exposant de *Hölder*($h \approx \alpha$) et la seconde (description globale) grâce au spectre multifractal $f(\alpha)$. Ceux-ci caractérisent de façon géométrique et statistique la répartition des singularités sur le support de la mesure (l'image).

Chapitre 3

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons évoqué que la théorie fractale peut être, propice à la description des textures à travers l'attribut dimension fractale et(ou) lacunarité. Certaines textures sont semi-fractale, anisotrope et non homogène d'où l'introduction d'une approche dite multifractale qui permet la généralisation de concept dimension fractale à celui de spectre multifractal.

Ce chapitre a pour but de présenter à des fins d'analyse des textures, les différentes techniques d'estimation de la dimension fractale, de la lacunarité et de spectre multifractale.

3.2 Méthodes de calcul de la dimension fractale d'une image

L'attribut dimension fractale peut être exprimé par des relations d'échelles entre les structures géométriques et l'échelle d'analyse de ces structures. Plusieurs techniques de calcul de la dimension fractale sont proposées dans la littérature (Guo et al. 2009), (Lopes, Betrouni. 2009), (Pleshanov et al.2010), (Quevedo et al. 2002), (Sun et al. 2006), (Zhou, Lam. 2005). Lopez et Petrouni (Lopes, Betrouni. 2009) les ont classées en trois grandes approches.

- Approche basée sur le comptage des boites.
- Approches basée sur la mesure des surfaces.
- Approches basée sur le Mouvement Brownien Fractionnaire(FBM).

3.2.1 Approche basée sur le comptage des boites

Dans ce type d'approche, le calcul nécessite d'utiliser soit la dimension de la similitude interne (Eq. 3.1) ou bien la dimension des boites (Eq. 3.2).

Dimension de la similitude interne : $D = \frac{\log\ (Nr)}{\log\ (1/r)}$ (3.1)

Dimension des boites : $D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log\ (N_\delta)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}$ (3.2)

Contrairement aux objets strictement autosimilaires, le calcul de la formule d'homothétie interne (Eq.3.1) n'est pas direct pour le cas d'un objet fractal naturel (Chaudhuri et al. 1993). La cause principale de toute contrainte rencontrée dans ce type

de calcul est due au caractère statistique de leur autosimilarité. Pour que cette équation devienne satisfaisante, plusieurs méthodes ont été proposées.

3.2.1.1 Méthode de Russel et al

C'est la méthode la plus simple et la plus populaire car elle s'applique sur une image binaire. Elle a été proposée par Russel et al en 1980 (Russel et al. 1980). Elle consiste à partitionner l'image d'entrée I, en carrés réguliers de longueur δ (Fig. 3.1). L'image d'entrée est une image binaire qui peut être obtenue par un seuillage d'une image en niveau de gris. Le nombre minimal $N(\delta)$, de carrés de coté δ , nécessaires, pour couvrir complètement l'objet de l'image est égal au nombre de carrés qui contient au moins un pixel de niveau de gris supérieur au seuil choisie.

Cette méthode présente cependant plusieurs limitations, du fait qu'elle nécessite l'utilisation d'une image binaire. Elle est sensible à la taille des cubes et elle n'est valide que pour les images auto-similaires.

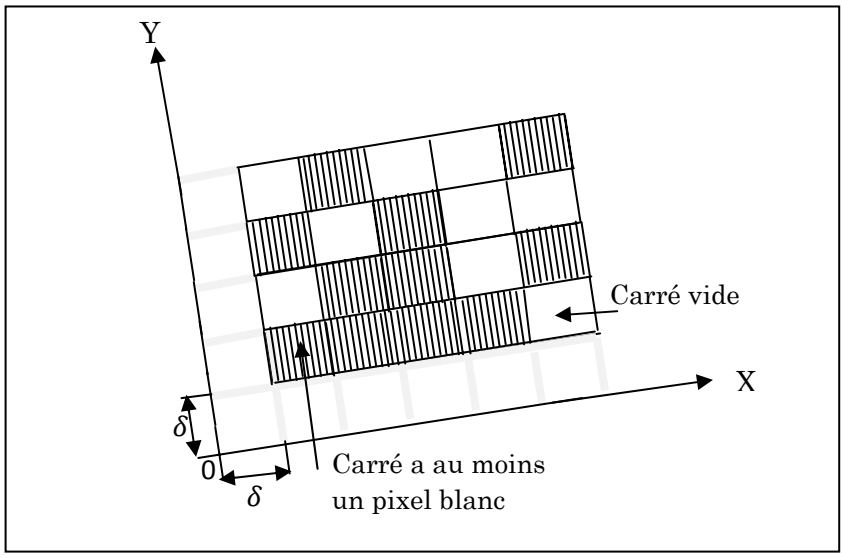


Fig. 3.1 : Comptage de boites selon *Russel et al.*

3.2.1.2 Méthode de Gangepain et Roques-Carmes

La méthode précédente a été étendue pour les images en niveau de gris par Gangepain et Roques-Carmes en 1986 (Guo et al. 2009). Elle porte le nom de Reticular Cell Counting (RCC).

L'image de taille (M × M) pixels est représentée dans un espace 3D. Ce dernier peut être partitionné en cubes de taille L × L × L′ sachant que, L′ est un intervalle à valeur entière pris dans la direction (OZ) des niveaux de gris. Si G est le plus grand niveau de gris de l'image, alors :

$$L' = \left\lfloor L \times \frac{G}{M} \right\rfloor \quad (3.4)$$

La fonction $\lfloor . \rfloor$ considère la plus grande valeur entière inférieure ou égale à la quantité qui se trouve entre les crochets.

Supposant, que cet espace est recouvert par un cube de taille L_{max} (Fig.3.2). Par analogie avec le principe utilisé pour le calcul de la dimension de la similitude interne, pour que le nombre N_L de cubes de taille L nécessaires pour couvrir cet objet, soit un nombre minimum, il faut que L vérifie la relation suivante :

$$L = r \times L_{max} \quad (3.5)$$

Comme $N_r = 1/r^D$, alors :

$$N_L = \left[\frac{L_{max}}{L}\right]^D \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) signifie que :

$$N_L \propto L^{-D} \quad (3.7)$$

Notons que, pour une image à niveaux de gris et pour une taille donnée L , N_L est le nombre total de cubes qui contient au moins un seul niveau de gris. Cette méthode est jugée rapide, mais lorsqu'une image possède des niveaux de gris très élevés, ces derniers seront largement gradués au long de l'axe des intensités (Les cubes ont quasiment le même nombre de pixels). Par conséquent la dimension fractale estimée par cette technique est presque souvent limitée à 2,5 environ (Sarkar, Chaudhuri.1992).

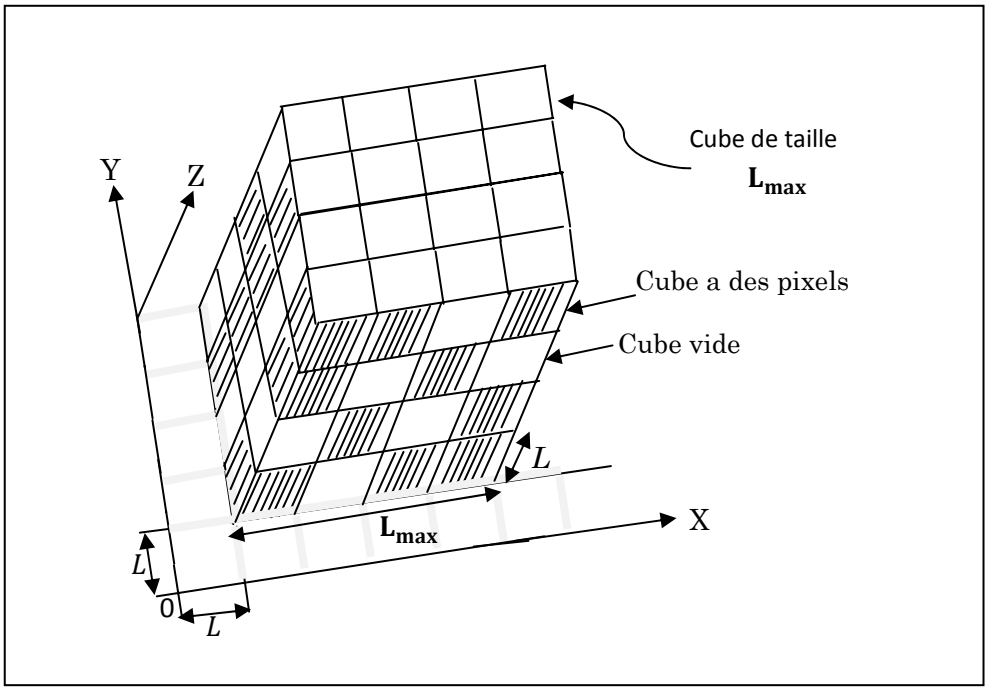


Fig. 3.2 : Comptage de boites selon *Gangepain et Roques- Carmes.*

3.2.1.3 Méthode de Xu et Weng

Cette méthode a été proposée dans le cadre d'analyse des images de corrosion (Xu, Weng. 2006).

Considérant une image de $M \times N$ pixels tel que M et N sont de forme 2^n avec n un entier. La division en r_d intervalles similaires, permet de construire $(r_d \times r_d)$ pavés dont la taille de chacun d'eux est de $(M/r_d) \times (N/r_d)$ (Fig. 3.5).

Pour les différentes valeurs de r_d , $r_d = 2, 4, 8, \ldots, 2^n$, le nombre de pavé $N(r_d)$ interceptant la surface de l'image est calculée comme suit :

Soit H la valeur moyenne des niveaux de gris de toute l'image et $H_{(l,k)}$ la valeur moyenne des niveaux de gris du $(l,k)^{ième}$ pavé de la grille de cette image. Si $(H_{(l,k)} < H)$ c'est-à-dire le pavé est plus foncé que l'image, alors le pavé en question est pris pour le calcul du nombre de grilles interceptant l'image. La dimension fractale (D_{2d}) est estimée à l'aide de l'équation (3.1).

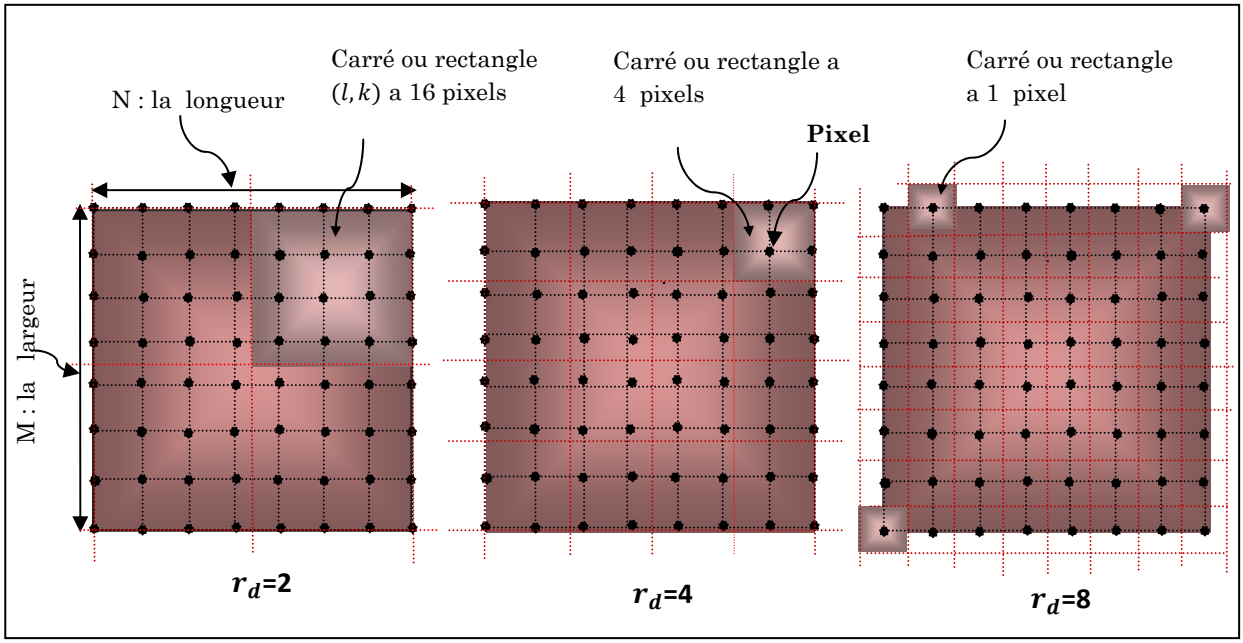


Fig. 3.3 : Principe de la méthode de Xu et Weng.

Dans une autre version (Xu, Weng. 2006), la troisième dimension qui représente l'axe des nivaux de gris de $G = 256 = 2^8$ nivaux est à son tour divisée en r_d intervalles. L'image, considérée comme une surface 3D, est alors partitionnée en $(r_d \times r_d \times r_d)$ cubes de tailles $(M/r_d) \times (N/r_d) \times (G/r_d)$ (Fig.3.6). En appliquant le principe de la méthode décrite précédemment sur chaque cube pour obtenir le nombre $N(r_d)$ de cubes interceptant la surface de l'image, puis en recommençant la même procédure, pour les différentes valeurs de r_d , $r_d = 2, 4, 8, \ldots, 2^8$, on peut estimer la dimension fractale (D_{3d}) de l'image à l'aide de l'équation (3.1).

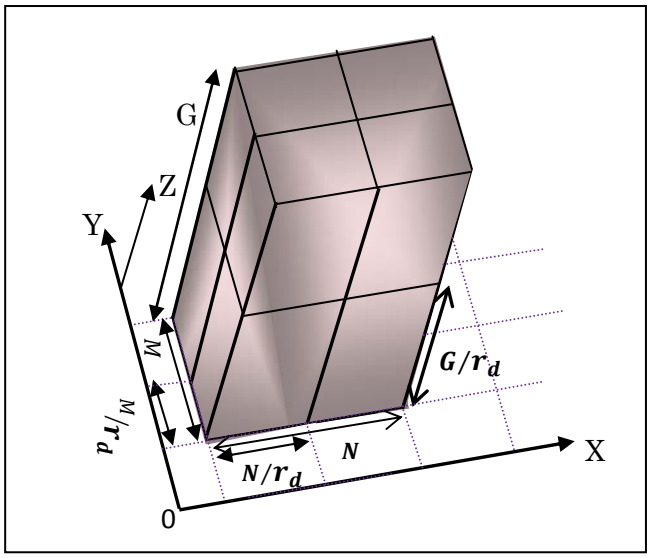


Fig. 3.4 : Méthode de Xu et Weng en considérant l'image en 3D.

3.2.1.4 Méthode de Comptage Différentielle de Boites

Dans le but de surmonter la contrainte rencontrée par la méthode de comptage de boites (méthode de Russel), Sarkar et Chaudhuri ont proposé en 1992 la méthode dite Comptage Différentielle de Boites (CDB) (Sarkar, Chaudhuri. 1992).

Soit, $(M \times M)$ une image en niveaux de gris représentée dans un espace (o, x, y, z) tel que (o, x, y) est le plan des positions des pixels et (o, z) est l'axe des positions des niveaux de gris. Soit G le plus grand niveaux de gris de l'image.

Le plan (o, x, y) est partitionné en pavés réguliers (non chevauchés) de taille $(s \times s)$, s est un entier tel que :

$$\left(\frac{M}{2}\right) \geq s > 1 \tag{3.8}$$

Le rapport de partitionnement est alors : $r = \frac{s}{M}$.

Des cubes de taille $(s \times s \times s')$ où $G/s' = M/s$ sont empilés sur chaque pavé (l, k), de la grille pour qu'ils soient alignés verticalement le long de l'axe des intensités et prenant de bas en haut des étiquettes chiffrées comme suit : 1, 2, 3,…. Il existe ainsi sur chaque pavé de la grille, une colonne quadratique comme le montre la figure (3.5).

Soit $n_r(l\,, k)$ le nombre de cubes nécessaires pour contenir une portion de l'objet correspondant au $(l, k)^{ième}$ pavé de la grille tel que :

$$n_r(l, k) = l' - k' + 1 \tag{3.9}$$

l', (Respectivement k') est le numéro de la boite cubique qui a le niveau de gris maximal (respectivement le niveau de gris minimal), dans la colonne quadratique considérée.

Dans l'exemple de la figure (3.5), nous avons $s = s' = 3$ et $n_r\,(l, k) = 6 - 1 + 1 = 6$ cubes.

Le nombre total N_r de cubes nécessaires pour recouvrir tout l'objet est donné comme suit:

$$N_r = \sum_{l,k} n_r\,(l, k) \tag{3.10}$$

N_r est calculé pour les différentes valeurs de $\boldsymbol{s}$ ou de $\boldsymbol{r}$. La dimension fractale peut être alors estimée en utilisant l'équation (3.1).

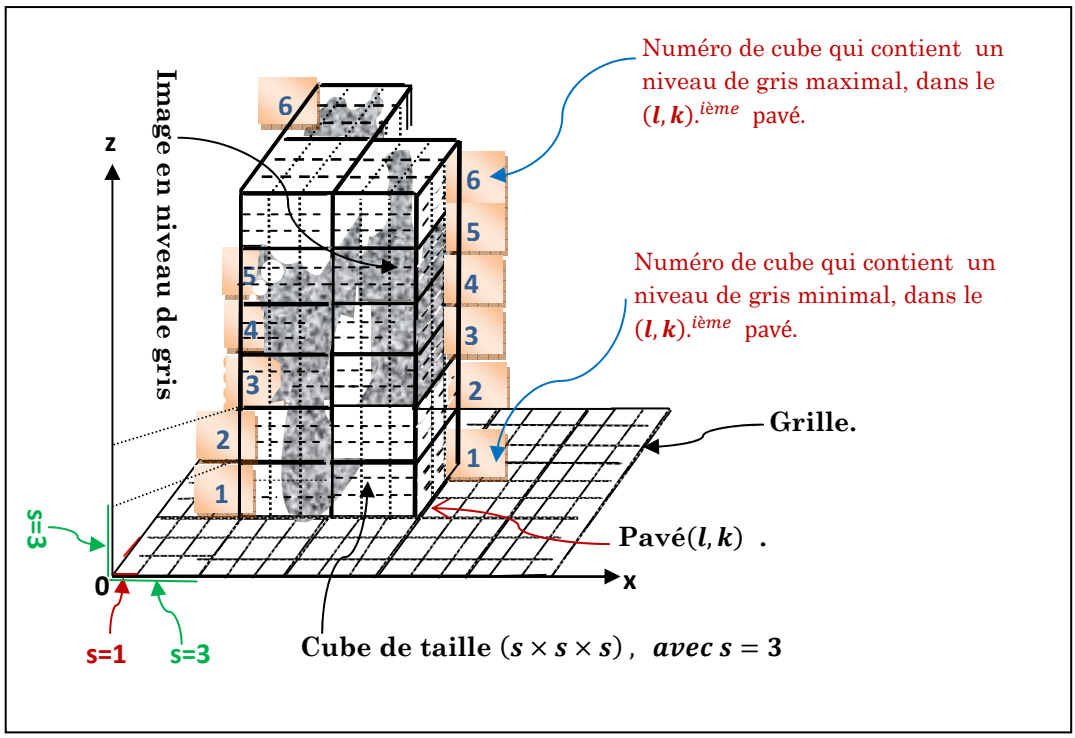


Fig.3.5 : Technique de comptage différentielle de boites (CDB).

Tso et Mather (dans (Sun et al. 2006)) ont montré que l'application de cette méthode dans le domaine de la télédétection, ne donne pas de résultats satisfaisants. De plus, l'altitude des cubes (s') a une grande influence sur le nombre minimal de cubes nécessaires pour couvrir un objet fractal. En effet s' augmente lorsque s augmente car $s' = (s \times G)/M$. Ce phénomène peut produire une erreur lors du calcul de nombre de cubes de chaque bloc ($n_r(l,k)$) et par conséquent le nombre total N_r (Li et al. 2009).

En effet, si on considère deux pixels A *et* B appartenant au même pavé (même bloc). La méthode (CDB) construit sur ce pavé une colonne à base des cubes ayant les mêmes dimensions. Supposant que la taille de chaque cube est $3x3x3$, alors les pixels A *et* B sont assignés respectivement au cube numéro 2 et 3 (Fig. 3.6). Dans ce cas, il faut deux cubes pour couvrir ces pixels alors qu'en réalité il ne faut qu'un seule cube puisque la distance entre ces deux pixels suivant la direction (oz) est inférieure à 3. Cette quantité produit alors une erreur lors du calcul de la quantité totale N_r, puisque cette dernière ne sera pas égale au nombre minimum (optimum) de cubes qui peuvent couvrir l'objet.

Afin d'éviter ce problème, une version améliorée de la méthode de Comptage Différentielle des Boites a été proposée. Celle-ci consiste à choisir $r = s$ tel que $\left(\frac{M}{2}\right) \geq s >$

1 et $s' = \frac{s}{\alpha}$ où α est un entier supérieur ou égal à 1. Pour que le nombre $n_s(l,k)$ i.e $n_r(l,k)$ soit optimal, il faut attribuer une grande valeur pour α afin d'avoir des cubes d'altitude s' très fine. $n_r\,(l,k)$ prend alors la forme suivante :

$$n_r\,(l,k) = \begin{cases} ceil\left[\dfrac{(l'-k')}{s'}\right] \; si\; (l \neq k). \\ 1 \;\; si \;\; (l = k). \end{cases} \tag{3.11}$$

La fonction $ceil(.)$ permet d'arrondir la valeur x au plus petit entier supérieur ou égal à x. La dimension fractale D peut être déduite à partir de nuage de points $\left(\log\left(\frac{1}{r}\right), log(N_r)\right) = \left(\log\left(\frac{1}{s}\right), \log\,(N_s)\right)$.

Considérant l'exemple précédant. Pour $\alpha = 1$, on aura $s' = s = 3$ et $n_r\,(l,k) = \left[\frac{(3-2)}{3}\right] = 1\; cube$.

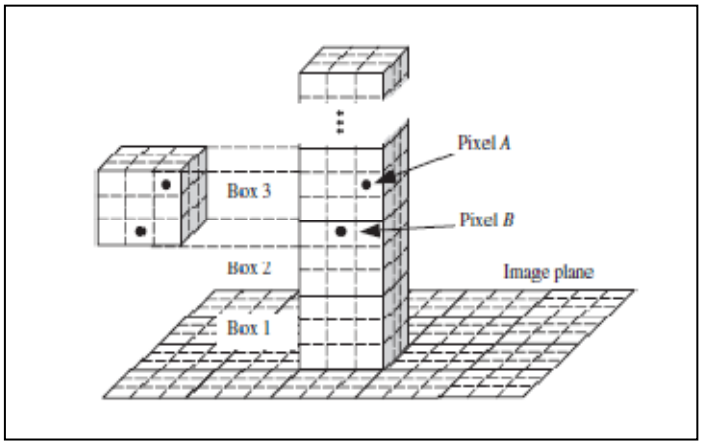


Fig.3.6. Deux pixels appartenant à deux cubes différents d'altitude 3 alors que leur distance suivant (oz) est inférieure à 3.

Le choix du nombre et des valeurs de s constitue un autre problème. En effet, le nombre de paramètres peut influencer sur la valeur de D. Dans ce cas, la solution proposée dans (Pleshanov et al.2010) se définit comme suit.

Pour une image de taille$(M \times M)$, prenant pour $\left(\frac{M}{2}\right) \geq s > 1$, des cubes de taille $(s \times s \times s')$ tel que :

$r = s,\; s = 2^g,\; g = 1, 2, \ldots, \log(M) - 1,\; G/s' = M/s$ (G est le nombre de niveau de gris total de l'image) et $(D = -B)$ tel que B est la pente de la droite de régression $(\log(s)\,, \log(N_s)$.

D'autres modifications de la méthode de Comptage Différentielle de Boites ont été apportées dans (Cheng. 1999), (Du, Yeo. 2002), (Jin et al. 1995), (Lee, Hsieh. 2010). L'une

d'elles a été proposée par Jin et al en 1995 (Jin et al. 1995), elle est connue sous le nom de Relative Differential Box Counting (RBCD). Le nombre $n_s(l,k)$ est calculé comme suit :

$$n_s(l,k) = g_{max}(l,k) - g_{min}(l,k) \tag{3.12}$$

Où: $g_{max}(l,k)\ et\ g_{min}(l,k)$ sont respectivement le niveau de gris minimal et le niveau de gris maximal des pixels du pavé de taille (sxs) et de coordonnées (l,k) (Fig 3.7).

Dans ce cas, le nombre N_s de cubes nécessaires pour couvrir tout l'objet est estimé comme suit :

$$N_s = \sum_{l,k} ceil\left[\frac{M \times (n_s(l,k))}{s \times G}\right] \tag{3.13}$$

G étant le niveau de gris maximal de l'image.

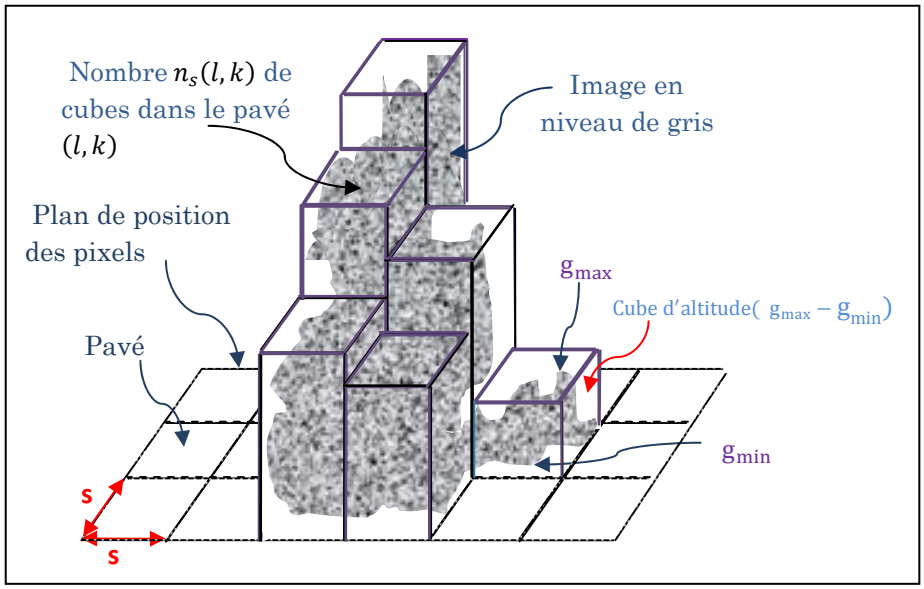


Fig.3.7 : Nombre N_s de cubes qui couvre l'image.

Cheng (Cheng. 1999) a proposé d'utiliser une fenêtre glissante de taille $(r \times r)$, centrée sur chaque pixel de coordonnés (i,j) d'une image de taille $(M \times M)$. Il détermine ensuite $n_r(i,j)$ et N_r de la même manière que dans la méthode de CDB.

Quant à Du et Yeo (Du, Yeo. 2002), ils combinent la méthode de Jin et al (Jin et al. 1995) avec celle de Cheng (Cheng. 1999) de la manière suivante :

Un pavé de taille $(r \times r)$, est déplacé et centré sur les pixels (i,j) de la fenêtre de voisinage de taille $(M \times M)$ avec $r < M$. Le nombre $n_r(i,j)$ est déterminé comme suit :

$$n_r(i,j) = g_{max}(i,j) - g_{min}(i,j) \quad (3.14)$$

$g_{max}(i,j)\ et\ g_{min}(i,j)$ sont respectivement les niveaux de gris maximal et minimal des pixels situés dans la fenêtre de voisinage $(r \times r)$. La contribution de tous les cubes est alors :

$$N_r = \sum_{i,j} ceil\left[\frac{M}{g}(n_r(i,j)/r\right] \quad (3.15)$$

Une autre modification proposée récemment par Lee et Hsieh (Lee, Hsieh. 2010) consiste à calculer $n_r(l,k)$ (avec $r = s/M$) de la façon suivante :

$$n_r(l,k) = 2\left(\frac{\sigma\ (l,k)}{s'}\right) + 1 \quad (3.16)$$

où $\sigma(l,k)$ est l'écart type des niveau de gris des pixels situés dans une boite de coordonnées (l,k). Il mesure le degré de la dispersion des niveaux de gris.

$$\sigma(l,k) = \sqrt{\frac{\sum_{i,j}(g(i,j)-m)^2}{N}} \quad (3.17)$$

N est le nombre de pixels situés dans le pavé $(l,k), g(i,j)$ est le niveau de gris d'un pixel du pavé $(l,k), m$ est le niveau de gris moyen des pixels du pavé (l,k).

3.2.1.5 Méthode de Voss

Cette méthode est basée sur une notion probabiliste. Elle a été proposée par Voss en 1986 (Voss. 1986). L'image est considérée comme une surface dans l'espace R^3. Le but est de trouver le nombre moyen N_L de cubes de taille fixe L, nécessaires pour paver cette surface.

Soit un cube de taille L, centré sur un point arbitraire $Q(x,y,z(x,y))$ de la surface et $P(m,L)$ la probabilité de trouver m niveaux de gris $(m \neq 0)$ à l'intérieur de ce cube. Nous avons donc :

$$\forall\ L:\ P(m,L) = \frac{n(m,L)\times m}{M}, \text{soit} \quad n(m,L) = \frac{M}{m}\ P(m,L) \quad (3.18)$$

où $n(m,L)$ est le nombre moyen de cubes de taille fixe L, contenant m points (m prend des valeurs différentes) sur l'ensemble des M pixels qui composent la surface de l'image. Supposant que ce cube est centré sur chaque point de la surface de l'image (Fig 3.8) tout en calculant à chaque fois m, dans ce cas le total de toutes les probabilités calculées devant être 1 c'est-à-dire :

$$\sum_{m=1}^{N} \boldsymbol{P(m,L)} = \mathbf{1} \qquad (\mathbf{3.19})$$

N est le nombre de points possibles dans le cube ($N = L^2$).

Ainsi le nombre de cubes N_L disjoints nécessaires pour recouvrir toute la surface est :

$$N_L = \sum_{m=1}^{N} n(m,L) = \sum_{m=1}^{N} \frac{M}{m} P(m,L) = M \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} P(m,L) \qquad (3.20)$$

N_L peut être exprimé indépendamment de la taille de l'image M d'où :

$$N_L = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} P(m,L) \qquad (3.21)$$

C'est le nombre de cubes qu'il faut pour paver cette surface.

Comme $N_L \propto L^{-D}$, donc en faisant varier la taille de la fenêtre de comptage, nous pouvons estimer la dimension fractale de l'image par la relation (3-2):

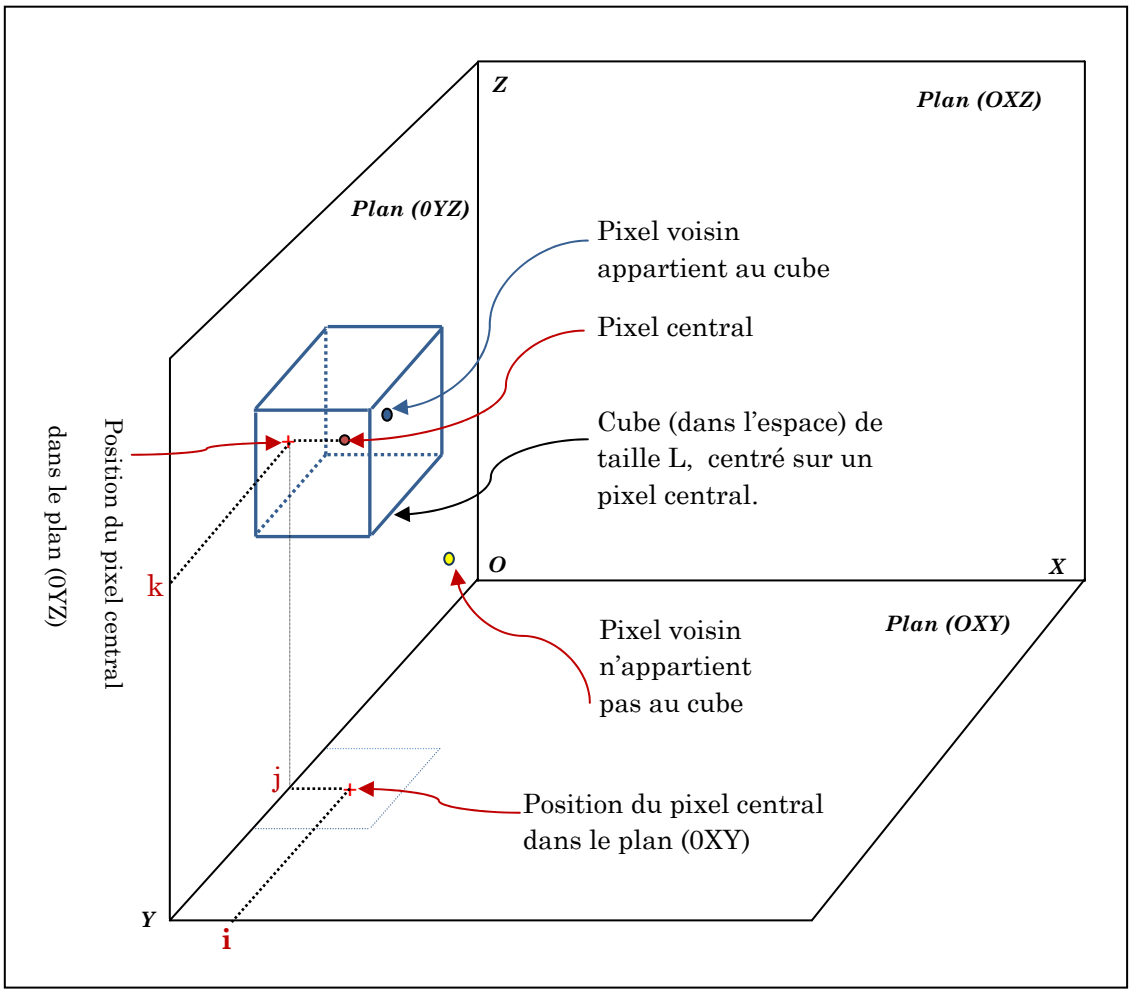


Fig.3.8. Principe de la méthode de *Voss*.

Une version améliorée de la méthode de Voss a été proposée par Keller et al en 1989 (Keller et al. 1989). Ils ont noté que dans la méthode de *Voss*, une dimension proche de 2 est légèrement surestimée et une dimension proche de 3 est difficilement sous-estimée. Ils ont alors suggéré d'estimer la surface fractale entre le pixel central du cube et leurs voisins, par une interpolation linéaire. La surface interpolée se coupe avec le cube et le nombre m de points qui se trouvent à l'intérieur puis le nombre $N(L)$ de cubes nécessaires pour paver toute la surface est calculé selon la formule de $Voss : N_L = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} P(m, L)$.

Cette méthode prend un temps de calcul important, mais elle donne un résultat très satisfaisant. La valeur seuil de la dimension fractale obtenue par cette méthode est estimée à 2.75 environ (Sarkar, Chaudhuri. 1992).

3.2.2 Approche basée sur la mesure des surfaces

Cette approche consiste à utiliser des éléments structurants (carré, triangle) et des opérateurs morphologiques (dilatation, érosion). Parmi les méthodes les plus utilisées, nous citons :

3.2.2.1 Méthode de recouvrement

Cette méthode a été développée par Peleg et al en 1984 (Peleg et al. 1984). Ils considèrent la surface de l'image, dont le niveau de gris $g(i,j)$, représente la troisième dimension d'un espace $3D$. Tous les pixels situés à une distance s par rapport à la surface $g(i,j)$, couvre cette dernière par une couverture nommée « blanket » d'épaisseur $2s$. Cette couverture est déterminée par deux surfaces (définies par l'érosion et la dilatation de $g(i,j)$: une surface maximale (u_s) et une surface minimale (b_s), tel que :

Au début $(s = 0)$, on considère $\mu(i,j,0) = b(i,j,0) = g(i,j)$. Ensuite on détermine pour différentes valeurs des s $(s = 1,2,3, \dots)$ les surfaces maximales et minimales comme suit :

$$\mu(i,j,s) = max\{\mu(i,j,s-1) + 1,\ max_{|(m,n)-(i,j)|\leq 1}\ \mu(m,n,s-1)\} \quad (3.22)$$
$$= \mu(i,j,s-1) \oplus B\ .$$
$$= g(i,j) \oplus sB\ .$$

$$b(i,j,s) = min\{b(i,j,s-1) - 1, \quad min_{|(m,n)-(i,j)|\leq 1} \; b(m,n,s-1) \; \} \qquad (3.23)$$
$$= b(i,j,s-1) \ominus B \,.$$
$$= g(i,j) \ominus sB \,.$$

Où $\boldsymbol{B}$ est un élément structurant. $\oplus$ et $\ominus$ sont respectivement les opérateurs de dilatation et d'érosion.

L'expression $|(m,n) - (i,j)| \leq 1$ exprime la distance entre les deux points de coordonnées (i,j) et (m,n). Puisqu'elle est inférieure ou égale à 1 alors (m,n) sont les 4 ou 8 points voisin de (i,j).

Les deux surfaces $\mu(i,j,s)$ et $b(i,j,s)$ sont ainsi obtenues par des opérations de dilatation et d'érosion avec un élément structurant de taille s. La distance entre $\mu(i,j,s)$ et $\mu(i,j,s-1)$ dans les deux directions horizontale et verticale est au minimum 1.

La surface A_s de cette couverture est égale au volume V_s divisé par son épaisseur $2s$:

$$A_s = V_s/2s \qquad (3.24)$$

A partir de deux valeurs successives de s , on déduit la surface A_s :

$$A_s = (V_s - V_{s-1})/2 \qquad (3.25)$$

En adoptant l'idée de *Mandelbrot,* on peut appliquer la loi de puissance suivante :

$$\boldsymbol{A_s = Fs^{2-D}} \qquad (3.26)$$

La pente $P = (2 - D)$ de la droite de régression obtenue par le nuage de points($\log(s), \log(A_s)$) donne suivant module d'estimation (Fig. 3.1), la valeur de la dimension fractale $D = (2 - P)$ de la surface $g(i,j)$.

3.2.2.2 Méthode de Prisme Triangulaire (MPT)

La méthode de prisme triangulaire a été introduite par Clarke en 1986 (Clarke. 1989) de la façon suivante :

Dans une image en niveau de gris, représentée dans un espace (O,X,Y,Z), chaque quatre pixels adjacents du plan (O,X,Y) constituent un carré (fenêtre d'analyse). Soit $abcd$ ce carré de coté s et de centre e (Fig. 3.9.a). L'idée est alors de calculer la surface du prisme triangulaire de chaque fenêtre d'analyse de taille fixe $\boldsymbol{s}$, puis de calculer la surface A_s qui correspond au totale des surfaces de tous les prismes triangulaires obtenus.

La procédure se répète pour différentes tailles $\boldsymbol{s}$, et la pente P de la droite de regression de l'ensemble de points ($\log s'$, $\log A_s$) avec $s' = s^2$ permet de déterminer la dimension fractale D de l'image suivant l'équation (3.3) (i.e. $D = (2 - P)$).

Un prime triangulaire (Fig. 3.9.b) est obtenu en reliant les quatre niveaux de gis A, B, C, D ayant respectivement les positions a, b, c, d (angles de la fenêtre d'analyse) avec la valeur moyenne E correspondante (E est affecté à la position e du centre du carré). Sa surface représente la somme des surfaces des quatre triangles $DEA, AEB, BEC,$ et CED qui le forme.

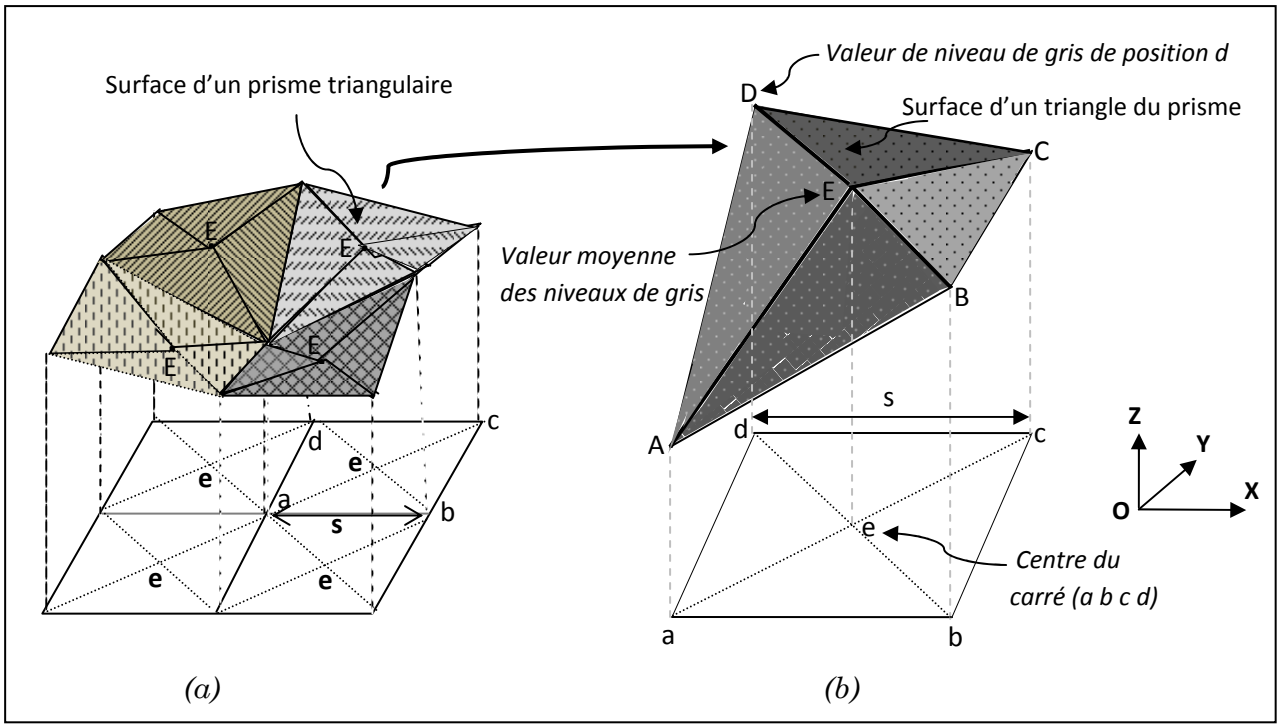


Fig.3.9: Principes de la méthode des prismes triangulaires.

L'algorithme de Clarke a été modifié par Jaggi et al (Jaggi et al. 1993). Il s'agit d'utiliser la taille s de la fenêtre d'analyse dans la phase de la régression($\log(s)$), puisque l'utilisation du carré de s ($log\ s' = \log(s^2)$ permet de sous- estimer la dimension fractale de l'image. Cette idée a été prouvée qu'elle est valide mathématiquement et fiable expérimentalement par Lam et al (Lam et al. 2002) ainsi que Zhao (Zhao. 2001), par conséquent :

$$\text{Log}\, A_s = a + (2 - D)\, \text{Log}\, s \tag{3.27}$$

3.2.2.3 Méthode des isarithmes

Une isarithme peut être considérée comme une courbe constituée de points ayant des valeurs identiques. Une ligne de contour est également assimilée à une isarithme. Ainsi, en géométrie fractale, la complexité des isarithmes ou de lignes de contours est utilisée pour approximer la complexité d'une surface d'une image en niveau de gris. La méthode des isarithmes (Zhou, Lam. 2005) consiste à construire une série de contours en reliant les pixels ayant des niveaux de gris identiques. La dimension fractale de chaque isarithme est déterminée puis la moyenne des dimensions fractales de tous les isarithms est calculée ($D_{isarithms}$). La dimension fractale de la surface d'une image ($D_{surface}$) est donnée par :

$$D_{surface} = D_{isarithms} + 1 \tag{3.28}$$

3.2.3 Approche basée sur le modèle du Mouvement Brownien Fractionnaire(FBM)

Cette approche, consiste à introduire le modèle FBM (Annexe B). La dimension fractale(D) d'une surface FBM est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{D = 3 - H} \tag{3.29}$$

Où H est le coefficient de Hurst, appelé aussi exposant de rugosité.

La quantification de la notion intuitive de rugosité d'une surface ou d'une texture, en utilisant ce modèle (FBM) est obtenue par des méthodes permettant d'estimer l'attribut H.

3.2.3.1 Méthodes d'estimation du paramètre de Hurst

Plusieurs méthodes de calcul du paramètre H d'une image en niveaux de gris, suivant le modèle FBM, ont été proposées.

3.2.3.1.1 Méthode de Chen et al

Chen et al (Chen et al.1989) ont proposés la méthode suivante :

L'image $(M \times M)$, est représentée dans un espace tridimensionnel (O, X, Y, Z), tel que $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, indique la position du pixel, dans le plan (O, X, Y) et $g(x, y)$ son niveau de gris.

La distance ($\Delta \boldsymbol{r}$) entre deux positions $(x_1, y_1)\ et\ (x_2, y_2)$ d'une pair de pixel est définie comme suit :

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3.30}$$

$(\Delta g_{\Delta r})$ est la valeur absolue de la différence entre les deux niveaux de gris $g(x_2, y_2)$, $g(x_1, y_1)$:

$$\Delta g_{\Delta r} = |g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)| \tag{3.31}$$

Comme il a été indiqué dans l'annexe B, la texture d'une image à niveau de gris peut être modélisée par un FBM. Ainsi $\Delta g_{\Delta r}$ possède une valeur moyenne qui est proportionnelle à $(\Delta r)^{2H}$ (Garding. 1988) :

$$E\{[g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)]^2\} = \sigma^2 (\Delta r)^{2H} \quad o\grave{u}\ \log\left(E\left\{(\Delta g)^2_{\Delta r}\right\}\right) = 2H.log(\Delta r) + 2.log\ \sigma. \tag{3.32}$$

tel que σ^2 est la variance, $E\{.\}$ est l'espérance de $F(x)$(Annexe B).

Cette équation est simplifiée par Chen et al (Chen et al.1989). Elle est réécrite comme suit :

$$\log\left(E\{\Delta g_{\Delta r}\}\right) = H.log(\Delta r) + 2.log\sigma \tag{3.33}$$

Puisque σ est une constante, alors H est la pente de l'équation linéaire des points de coordonnées($log(\Delta r)$, $\log\left(E\{\Delta g_{\Delta r}\}\right)$).

Cet algorithme peut être appliqué sur des images en niveau de gris $(M \times M)$ en utilisant la formule suivante :

$$id_{(\Delta r)} = \frac{\sum_{x_1=0}^{M-1} \sum_{y_1=0}^{M-1} \sum_{x_2=0}^{M-1} \sum_{y_2=0}^{M-1} \left|g(x_2, y_2) - g(x_1, y_1)\right|}{P} \tag{3.34}$$

Chen et al (Chen et al.1989), ont proposé d'utiliser la distance entre le couple $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ en respectant la formule suivante :

$$d \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < d + 1 \quad (d\ est\ un\ \ entier\ non\ nulle). \tag{3.35}$$

Il s'agit par exemple d'affecter à la distance 1, l'information relative à échelle $\sqrt{2}$ (car $1 \leq \sqrt{2} < 2$) et à la distance 2, les informations relatives aux échelles $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ (car : $(2 \leq \sqrt{5} < 3)$, $(2 \leq \sqrt{8} < 3)$).

Cette méthode prend un temps de calcul important. Plusieurs modifications ont été alors proposées. Wu et al (Wu et al. 1992) ont proposés un algorithme qui consiste à utiliser uniquement les directions verticale ou horizontale et où, $id_{(\Delta r)}$ est calculé de la manière suivante :

$$id_{(\Delta r_k)} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x,y+k)| + \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x+k,y)|}{2M(M-k)} \qquad (3.36)$$

Une autre modification a été proposée par Chen et al (Chen et al.1998). Il s'agit d'utiliser les directions : horizontale, verticale, diagonale et diagonale asymétrique pour lesquelles $id_{(\Delta r)}$ est définie comme suit :

$$id_{(\Delta r_k)} = \begin{bmatrix} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x,y+k)|/M(M-k) \\ +\sum_{y=0}^{M-1}\sum_{x=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x+k,y)|/M(M-k) \\ +\sum_{x=0}^{M-k-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x+k,y+k)|/(M-k)^2 \\ +\sum_{x=0}^{M-k-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}|g(x,M-y)-g(x+k,M-(y+k))|/(M-k)^2 \end{bmatrix}/4 \qquad (3.37)$$

Comme il a été remarqué que dans la méthode de Chen et al (Chen et al. 1989), la distance entre deux pixels selon la diagonale ou la diagonale asymétrique vaut $\sqrt{2k}$ et non k. Un autre algorithme basé sur la combinaison de la méthode de Wu et al (Wu et al. 1992) et celle de Chen et al (Chen et al. 1998) a été proposé dans (Chen et al. 2005). $id_{(\Delta r_k)}$ est définie par l'équation suivante :

$$id_{(\Delta r_k)} = \begin{bmatrix} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x,y+k)|/M(M-k) \\ +\sum_{y=0}^{M-1}\sum_{x=0}^{M-k-1}|g(x,y)-g(x+k,y)|/M(M-k) \\ +\sum_{x=0}^{M-k-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}\left|g(x,y)-g(x+k/\sqrt{2},y+k/\sqrt{2})\right|/(M-k/\sqrt{2})^2 \\ +\sum_{x=0}^{M-k-1}\sum_{y=0}^{M-k-1}\left|g(x,M-y)-g(x+k/\sqrt{2},M-\left(y+k/\sqrt{2}\right))\right|/(M-k/\sqrt{2})^2 \end{bmatrix}/4$$

(3. 38)

3.2.3.1.4 Spectre de puissance de Fourier

Cette méthode a été initialement présentée par Pentland en 1984 (Pentland en 1984), elle est basée sur l'analyse spectrale de Fourier du modèle de mouvement brownien fractionnaire. En effet, Voss (Voss. 1985) a montré que la puissance spectrale de Fourier $P(w_x, w_y)$ d'un mouvement brownien fractionnaire $g(x, y)$ (surface (2D)) est décrite par la loi de puissance suivante :

$$P(w_x, w_y) \propto \frac{1}{(\sqrt{{w_x}^2+{w_y}^2})^{\beta}} \tag{3.39}$$

Où w_x, w_y sont des fréquences spatiales dans les directions respectivement x, y.

Dans ce cas, la pente β peut être estimée à l'aide de nuage de points $(\log\left(\sqrt{{w_x}^2 + {w_y}^2}\right), \log(P(w_x, w_y)))$ et la dimension fractale D peut être déduite à l'aide de l'équation suivante (Peitgen, Saupe. 1988) :

$$D = \frac{8 - \beta}{2} \tag{3.40}$$

Notons que, l'utilisation de la transformée de *Fourier*, prolonge le temps du calcul.

3.3 Méthode de calcul de la lacunarité

Comme cela a été dit dans le premier chapitre, à l'instar de la dimension fractale, la lacunarité constitue un attribut fractal très important. Elle permet de mesurer la distribution de trous dans l'image. Plusieurs méthodes de calcul de la lacunarité ont été proposées.

3.3.1 Méthode d'Allain et Cloitre

L'algorithme d'Allain et Cloitre, proposé en 1991, permet de déterminer la lacunarité des images binaires. Il est basé sur la technique de glissement de boite (Allain, Cloitre. 1991). Dans cet algorithme, un élément structurant carré (boite) de coté L est centrée sur le premier pixel de l'image $(M \times M)$, tel que $L \leq M$. Cette boite est translatée (glissée) horizontalement sur toute l'image vers la droite, avec un pas de 1(Fig. 3.14. a). Ainsi, à la fin de cette opération, l'élément structurant atteint $(M - L + 1)$ positions possibles et une distribution de masse $n(m, L)$ est déterminée. Cette dernière représente le nombre de boites de coté L et de masse m . La masse étant le nombre de pixels contenus dans une boite.

En divisant la quantité $n(m,L)$ par le nombre total de boites de rayon L, nous obtenons la distribution de probabilité $p(m,L)$ qui correspond à la fréquence d'occurrence d'une boite de masse m et de coté L.

Pour analyser les propriétés d'une telle distribution, une méthode classique consiste à étudier ses moments statistiques d'ordre $q, q \in N^*$ notés $Z(q,L)$ tels que :

$$Z(q,L) = \sum_{m} m^{q} p(m,L) \tag{3.41}$$

On s'intéresse uniquement aux deux premiers moments $q = 1$ et $q = 2$. La lacunarité à l'échelle L est définie comme étant le moment relatif d'ordre 2 (rapporté à la moyenne) :

$$\Lambda(L) = \frac{Z^2(q,L)}{(Z^1(q,L))^2} \tag{3.42}$$

La lacunarité est définie comme une fonction de L , par conséquent elle est dépendante de l'échelle. Afin de mieux interpréter le comportement de $\Lambda(L)$, nous pouvons noter que :

$$Z^1(q,L) = \bar{s}(L) \quad et \quad Z^2(q,L) = s^2(L) + \bar{s}^2(L) \tag{3.43}$$

Où $\bar{s}(L)$ est la moyenne, notée μ et $s^2(L)$ est la variance, notée σ^2 , des masses par boite.

$$\Lambda(L) = \frac{s^2(L)}{\bar{s}^2(L)} + 1 = \frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1 \tag{3.44}$$

Au vue de ces définitions, on s'attend à observer les propriétés suivantes :

- Les objets possédants les collections de trous les plus homogènes ont une lacunarité plus petite puisque la variance des masses est plus faible (Fig. 3.14.b).
- La lacunarité décroitre avec l'augmentation de L. En effet, lorsque L devient suffisamment grand, toutes les boites contiennent le quasi totalité de l'objet et par conséquent ont sensiblement la même masse. Ce qui a pour effet de faire tendre la variance vers **0** et donc la lacunarité vers **1**.

Par ailleurs, Plotnick et al, qui utilisent cette définition dans (Gardner. 1993) et (Plotnick. 1995) pour faire de l'analyse de texture suggèrent que c'est la variation de la lacunarité en fonction de l'échelle qui contient l'information significative sur la texture de l'image, autrement dit la lacunarité est considérée comme descripteur de la texture d'une image en fonction de l'échelle.

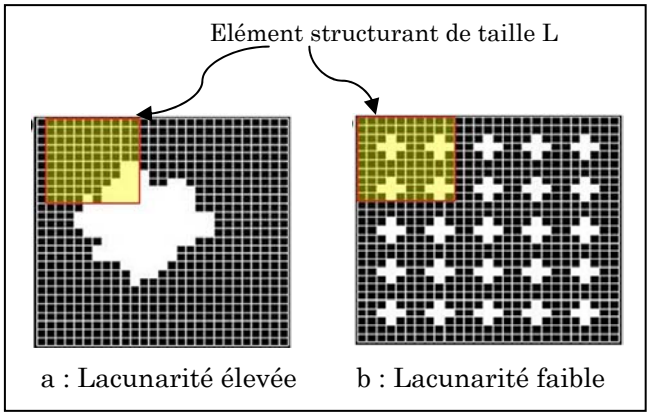


Fig . 3.12 : Mesure de la lacunarité selon Allain et Cloitre

3.3.2 Méthode de Voss

Les paramètres utilisés dans la méthode de Voss (1986) afin d'estimer la dimension fractale d'une image en niveau de gris peuvent aussi être introduites pour le calcul de la lacunarité. Selon Voss, cette dernière est définie comme suit (Voss. 1986).

$$\Lambda(L) = \frac{M^2(L) - (M(L))^2}{(M(L))^2} \tag{3.45}$$

où $M(L) = \sum_{m=1}^{N} m\,P(m,L)$ et $M^2(L) = \sum_{m=1}^{N} m^2\,P(m,L)$.

3.3.3 Méthode de Keller Chen et Crownover

La lacunarité définie par Voss fournit des résultats de segmentation médiocres si des boites de petites dimensions sont utilisées. Keller, Chen et Crownover ont décrit en 1989 une autre méthode qui permet d'obtenir de bons résultats sur des ensembles de petite taille (Keller et al. 1989). Il est défini comme suit :

$$\Lambda(L) = \frac{M(L) - N(L)}{M(L) + N(L)} \tag{3.46}$$

$$avec \quad N(L) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} P(m,L) \qquad \text{et} \qquad M(L) = \sum_{m=1}^{N} m\, P(m,L)$$

3.4 Méthodes d'analyse multifractale

Plusieurs méthodes d'approximation de spectre multifractal ont été proposées. Ces méthodes se déclinent en trois classes : celles dites de « comptage de boîtes », celles basées sur les « ondelettes » et celles basées sur la morphologie mathématique. Dans notre travail nous ne retenons que la première approche. Les méthodes de cette classe sont définies sur le même principe que les méthodes de calcul de la dimension fractale présentées dans la section (3.2.1). L'image est maillée avec différentes tailles de boîtes s et une mesure μ_i est calculée pour chaque cube(*ième cube*) par les différentes méthodes à savoir, la méthode basée sur le CDB, celle basée sur RDCB, le glissement de boites, etc.

3.6 Conclusion

L'analyse d'objet fractale peut être abordée via l'analyse fractale qui permet la détermination d'attributs dimension fractale et lacunarité ou par l'analyse multifractale qui favorise la détermination des signatures multifractales différentes à travers le spectre des singularités, la fonction de partition, la fonction d'échelle, et les dimensions généralisées.

Ce chapitre nous a permis de constater que les approches basées sur le calcul de la dimension fractale et la lacunarité sont faciles à développer, mais elles présentent entre autre l'inconvénient de ne pas rendre compte de la diversité des comportements locaux.
On conçoit aussi, qu'une approche multifractale permet d'imaginer des modèles plus proches de la réalité pour des phénomènes naturels complexes, dont l'hétérogénéité spatiale est reconnue, mais d'une façon beaucoup moins simple que celle qui consiste à caractériser une structure par une dimension fractale unique.

Chapitre 4

4.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre les résultats de classification et de segmentation d'images texturées basées sur l'analyse fractale et multifractale. L'analyse fractale concerne le calcul de la dimension fractale et (ou) les attributs de lacunarité et l'analyse multifractale retient un ensemble de paramètres ou signatures multifractals, tirés du spectre des singularités, du spectre de Legendre, de la fonction de partition, et des dimensions généralisées.

Nous avons implémenté plusieurs méthodes de calcul de la dimension fractale (D). Six d'entre elles (Russel et al, Sarkar et Chaudhuri, Lee et Hsieh, Gangepain et Roques-Carmes, Voss, Xu et Weng 2D, Xu et Weng 3D) appartiennent à l'approche basée sur le comptage des boîtes, deux autres (Wu et al, Chen et al) font partie des méthodes basées sur le modèle du Mouvement Brownien Fractionnaire et une méthode (Peleg et al) appartenant à la classe des méthodes par mesure des surfaces. Le calcul de la lacunarité par la méthode de Voss a été également implémenté. Pour ce qui est du calcul des attributs multifractals, nous nous sommes basé sur la méthode de Chaudhuri et Sarkar (Chaudhuri, Sarkar.1995) et les travaux de Xia (Xia et al. 2010).

Notons que toutes les méthodes présentées dans notre travail ont été implémentées sous l'environnement Borland C++ version 6 sur un micro ordinateur portable Acer, ayant une fréquence de 1.4 GHZ, une mémoire vive (RAM) de 2 Go et un disque dur de 160 Go.

4.2 Validation

4.2.1. Analyse fractale

Nous allons présenter dans ce paragraphe l'estimation de la dimension fractale fournie par les méthodes implémentées sur des images artificielles, synthétisées à partir du modèle de Mouvement Brownien Fractionnaire dont le coefficient de Hurst H est connu à priori. Notons que ce coefficient est lié à la dimension fractale d'une image par la relation $D = 3 - H$. La figure (4.1) montre quelques images synthétiques ayant des coefficients de Hurst H allant de 0.1 à 0.9.

A l'échelle logarithmique, la figure (4.2) montre la droite de régression de nuage de points obtenue par chaque méthode sur la 3ième image ($H_3 = 0.3$) de la figure (4.1). Selon

l'approche choisie, la pente a de cette droite représente, soit la valeur de la dimension fractale D $(c.à.d\ D = a)$ (approche comptage des boîtes), soit le coefficient de Hurst $H(c.à.d: H = a)$ dont $D = 3 - H$ (approche Mouvement Brownien Fractionnaire), ou bien la pente elle-même (a) dont $D = 2 - a$ (approche mesure des surfaces).
A l'échelle linéaire, cette figure présente aussi la courbe de la lacunarité de la même image (la 3ième image ($H = 0.3$)) ainsi que la 7ième image($H = 0.7$)).

Le tableau (4.1) regroupe pour les différents coefficients de Hurst $H\,(D_{théo})$, les valeurs des D_{est} estimées par chaque méthode et l'écart quadratique entre ces valeurs et les valeurs théoriques (réelles) ($E = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N=10}(D_{est} - D_{théo})^2$.
La figure (4.3) montre comment varié la dimension fractale estimée par chaque méthode en fonction de la dimension fractale réelle.

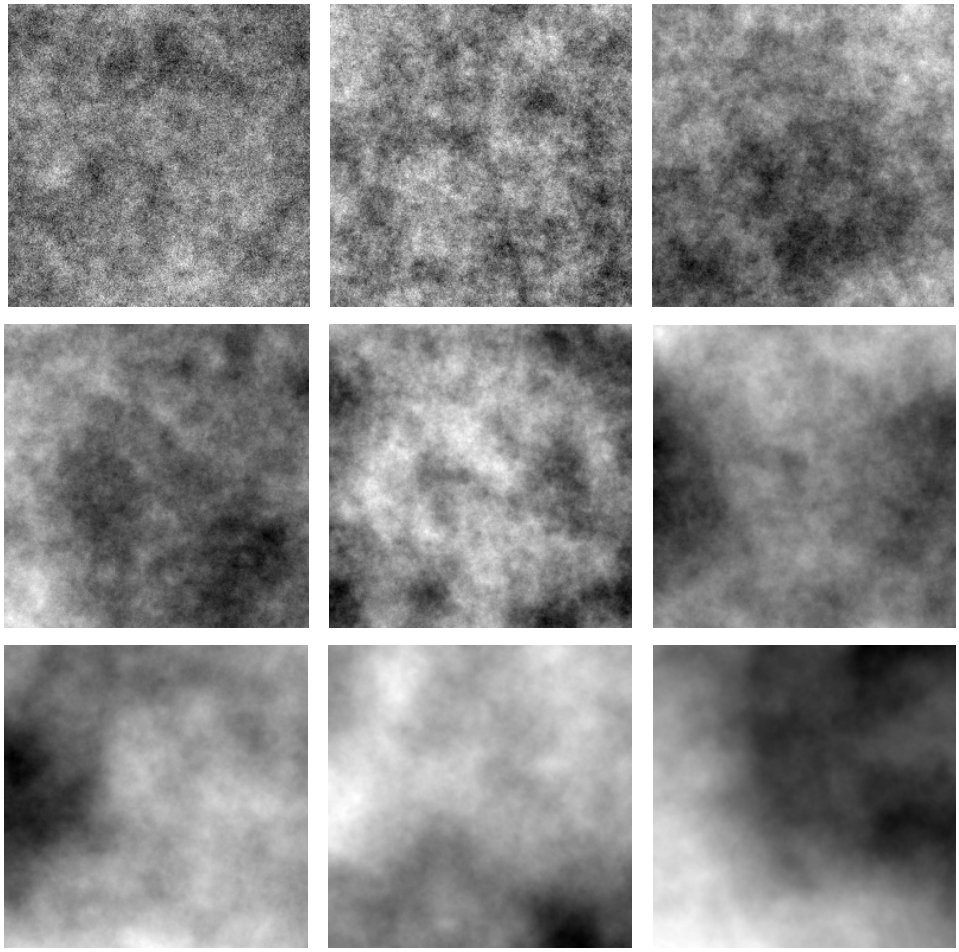
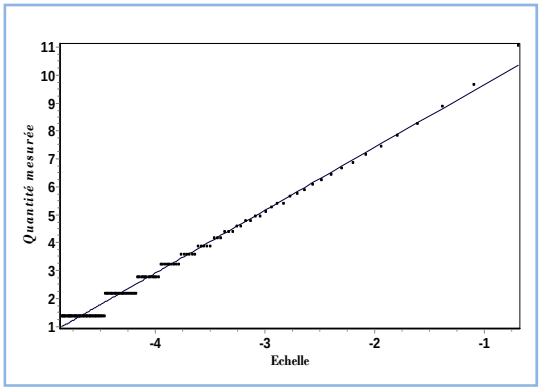
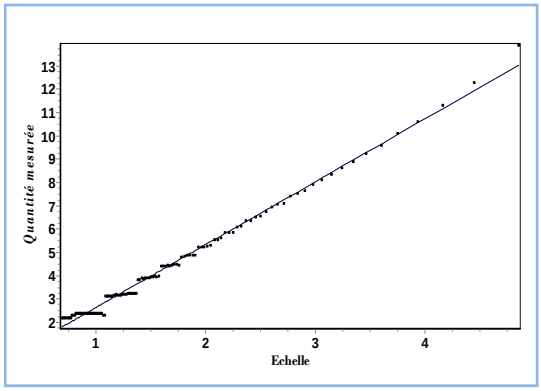


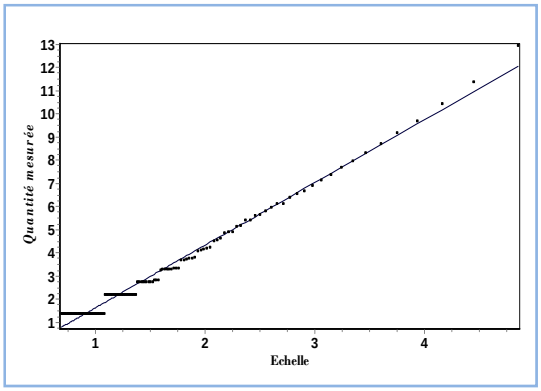
Fig. 4.1 : Images artificielles synthétisées à partir d'un Mouvement Brownien Fractionnaire avec un coefficient de Hurst allant de 0.1 (haut à gauche) à 0.9 (bas à droite).



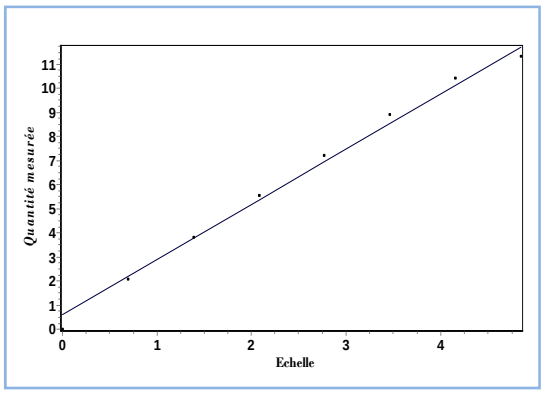
Russel et al (S=50), D=2.2546



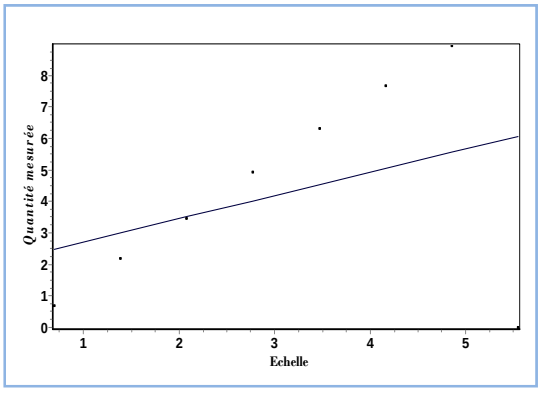
Sarkar et Chaudhuri, D=2.6973



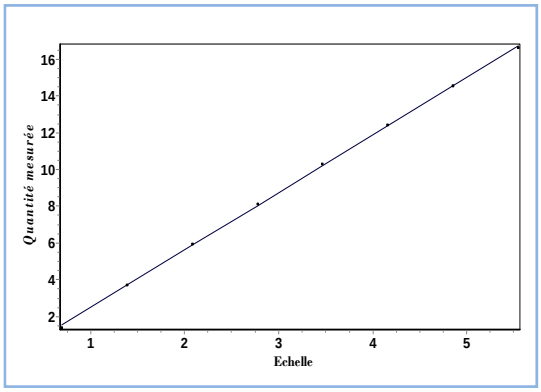
Lee et Hsieh, D=2.7046



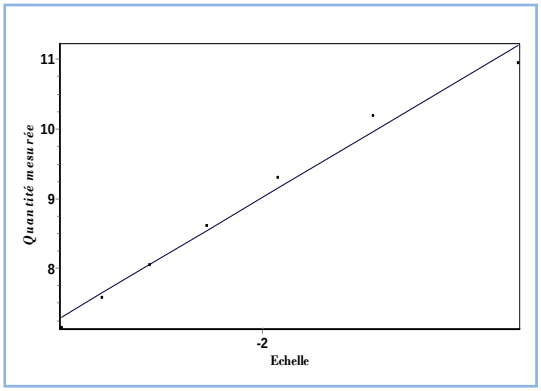
Gangepain et Roques-Carmes, D=2.2846



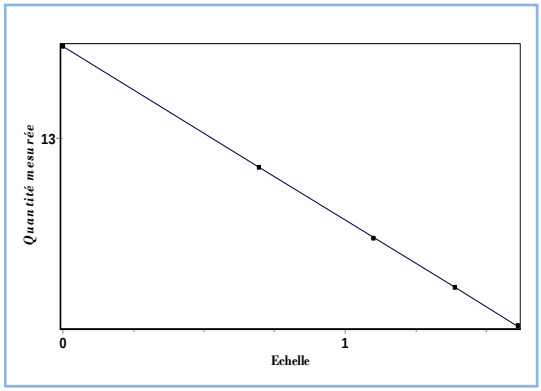
Xu et Weng-2D, D=0.7368



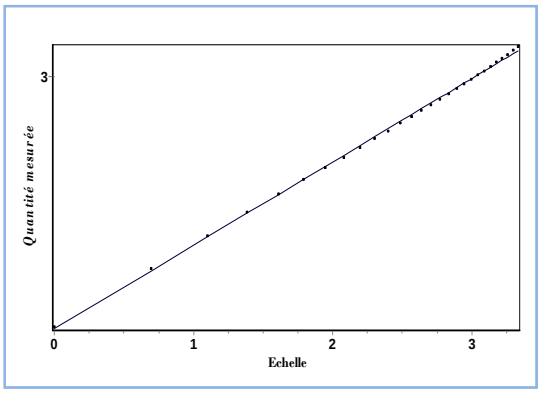
Xu et Weng-3D, D=3.1336



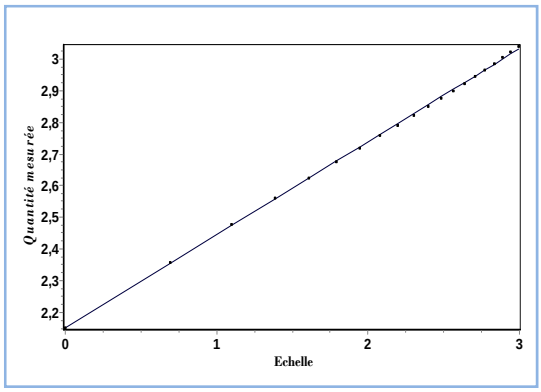
Voss, D=2.4181



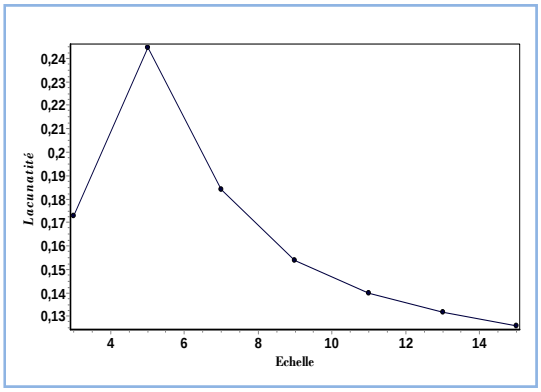
Peleg et al, D=2.7660



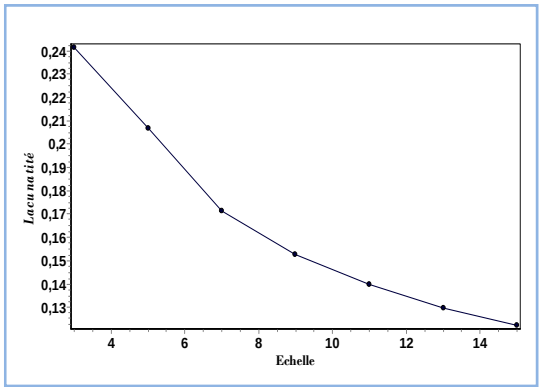
Wu et al, D=2.6999



Chen et al, D=2.7062



Lacunarité selon Voss (H=O.3)



Lacunarité selon Voss (H=O.7)

Fig. 4.2 : Pente de la droite de régression obtenue par chaque méthode de calcul de D pour $H = 0.3$ et les courbes de lacunarité pour $(H_3 = 0.3) et\ (H = 0.7)$.

Méthode de calcul de la Dimension fractale	Coefficient de Hurst et dimension fractale théorique									
	H	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	$D_{théo}$	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1
Russel et al (S=150)	D_{est}	2,1809	2,0771	1,9745	1,9384	1,9474	2,0044	2,0143	2,0052	2,0268
	E	0,5192	0,5333	0,5290	0,4570	0,3152	0,1691	0,0870	0,0450	0,0166
Russel et al (S=100)	D_{est}	2,2534	2,2417	2,2166	2,2084	2,1866	2,1793	2,1704	2,1604	2,1269
	E	0,4180	0,3118	0,2338	0,1540	0,0993	0,0546	0,0180	0,0041	0,0095
Russel et al (S=50)	D_{est}	2,2555	2,2554	2,2549	2,2542	2,2508	2,2483	2,2377	2,2373	2,2318
	E	0,4153	0,2965	0,1980	0,1195	0,0620	0,0230	0,0046	0,0015	0,0175
Sarkar et Chaudhuri	D_{est}	2,7504	2,6753	2,6103	2,5396	2,4780	2,3848	2,3394	2,2681	2,2181
	E	0,0228	0,0161	0,0092	0,0049	0,0020	0,0013	0,0031	0,0062	0,0160
Lee et Hsieh	D_{est}	2,8467	2,7526	2,6801	2,6230	2,5537	2,4673	2,3657	2,3139	2,2230
	E	0,0034	0,0045	0,0023	0,0025	0,0051	0,0088	0,0080	0,0166	0,0178
Gangepain et Roques-Carmes	D_{est}	2,3224	2,3047	2,2868	2,2588	2,2313	2,1973	2,1513	2,1155	2,0685
	E	0,3336	0,2452	0,1706	0,1164	0,0722	0,0412	0,0227	0,0077	0,0018
Xu et Weng-2D	D_{est}	1,5294	1,2698	1,3127	1,3671	1,2902	1,6756	1,5430	1,1874	1,3736
	E	2,3533	2,8428	2,3893	2,0405	1,9343	0,9490	1,0367	1,5569	1,1188
Xu et Weng-3D	D_{est}	3,1625	3,1572	3,1410	3,1426	3,1370	3,1315	3,1231	3,1126	3,0911
	E	0,0689	0,1276	0,1945	0,2945	0,4059	0,5355	0,6777	0,8332	0,9825
Voss	D_{est}	1,9889	2,1679	2,3061	2,4066	2,5148	2,6232	2,6857	2,6893	2,6375
	E	0,8318	0,4069	0,1608	0,0434	0,0067	0,0599	0,1531	0,2409	0,2914
Peleg et al	D_{est}	3,0481	2,8966	2,7695	2,6408	2,5314	2,4207	2,3112	2,2283	2,1268
	E	0,0219	0,0094	0,0049	0,0017	0,0012	0,0006	0,0011	0,0018	0,0029
Wu et al	D_{est}	2,9019	2,8045	2,7117	2,6088	2,5163	2,4087	2,3125	2,2393	2,1425
	E	0,0001	0,0004	0,0009	0,0003	0,0013	0,0008	0,0025	0,0044	0,0061
Chen et al	D_{est}	2,9009	2,8009	2,7100	2,6022	2,5084	2,4086	2,3073	2,2335	2,1360
	E	3,718E-05	0,0001	0,0002	7,1776	0,0004	0,0004	0,0015	0,0024	0,0041

Tableau 4.1 : Valeurs des D estimée par chaque méthode et leurs écarts avec les valeurs théoriques.

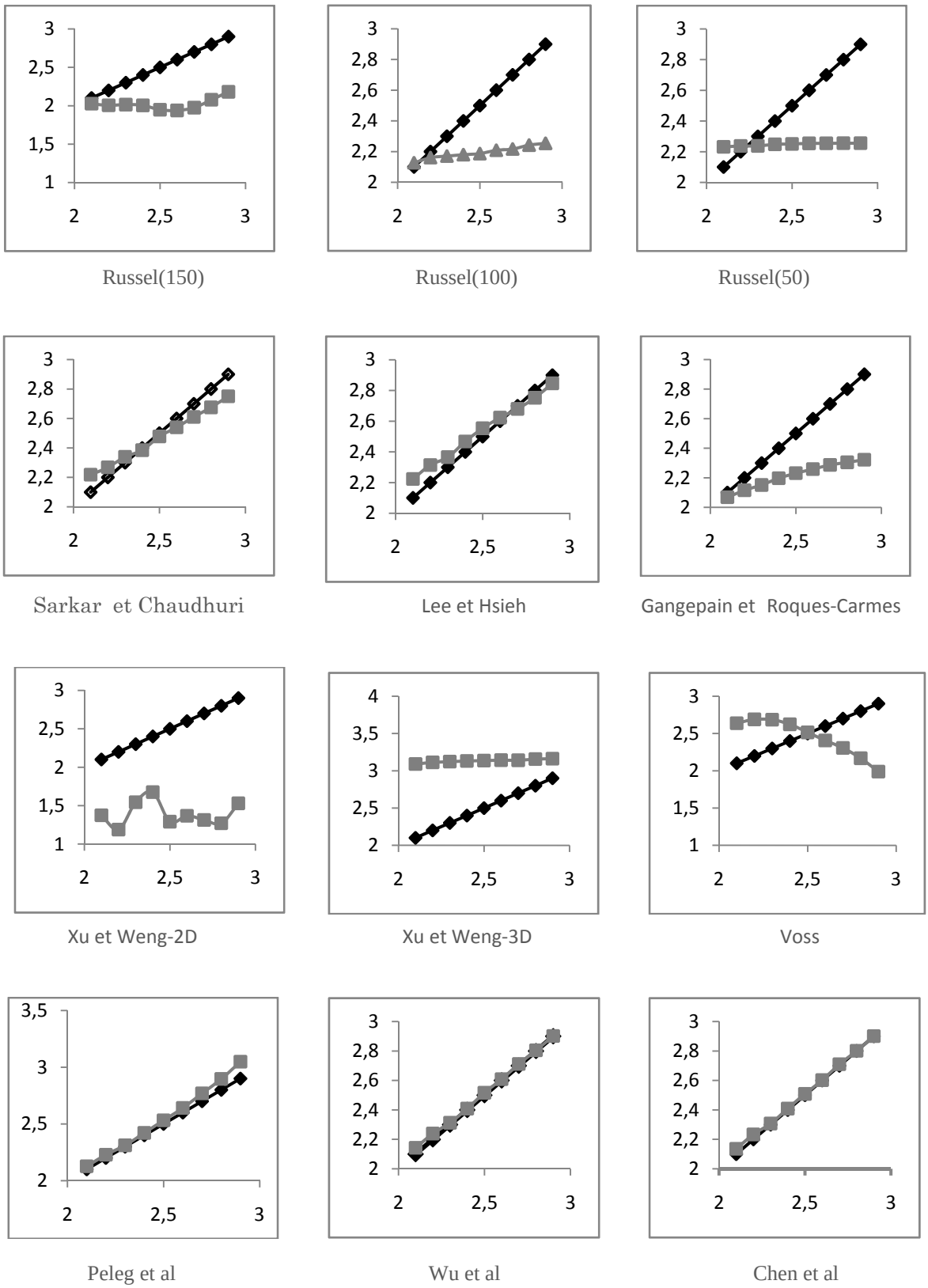


Fig. 4.3 : Courbe de variation de la dimension fractale estimée en fonction de la dimension fractale théorique.

Interprétation

D'après le tableau 4.1 et la figure 4.3, quelque soit le coefficient de Hurst considéré, la valeur de la dimension fractale estimée par la méthode de Peleg et al, Wu et al, Chen et al, Sarkar et Chaudhuri ainsi que Lee et Hsieh, est très proche de la dimension théorique. Tandis que les erreurs quadratiques moyennes obtenues par les trois premières méthodes sont assez petites comparant avec les deux autres.

La méthode de Gangepain et Roques-Carmes et celle de Russel et al (pour les différentes valeurs de seuil S), montrent leur efficacité quand la dimension réelle est très proche de deux. Dans ce cas les erreurs quadratiques moyennes obtenues sont plus au moins proches de celles obtenues par les cinq premières méthodes. Contrairement à la méthode de Xu et Weng 3D, la faiblesse de ces deux méthodes est bien remarquée en se rapprochant de trois.

Concernant la méthode de Voss, la dimension fractale estimée est plus proche de la dimension fractale réelle quand la valeur de H vaut 0.5 (D=2.5) et moins proche de la valeur réelle ailleurs. En dehors de H=0.5 qui est caractérisé par une erreur quadratique moyenne de même ordre que les cinq premières méthodes, les erreurs quadratiques moyennes calculées sont plus grandes.

Quelque soit H, la courbe des dimensions fractales estimées par la méthode de Xu et Weng 2D, est loin de la courbe des dimensions fractales réelles, ses erreurs quadratiques moyennes sont aussi plus élevées ce qui montre alors sa faiblesse.

En toute généralité, l'erreur d'évaluation de la dimension fractale à l'aide de l'approche «Comptage des boites » est plus grande que celle obtenue par les deux autres approches. En effet, ce sont les boites positionnées sur les bords de l'image qui engendrent l'erreur.

4.2.2 Analyse multifractale

Nous présentons maintenant les fonctions multifractales à savoir la courbe de la fonction de partition $X(q,r)$ pour respectivement $q = 2\ et\ q = -2$, le spectre de la fonction d'échelle $\tau(q)$ ainsi que la courbe des dimensions généralisées $D_g(q)$ pour q allant de -50 à +50, et enfin le spectre des singularités $f(\alpha)$. La figure (4. 4) montre les courbes obtenues sur une image synthétique donnée sur la même figure.

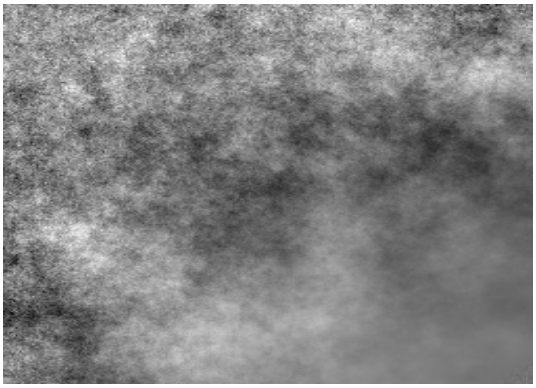
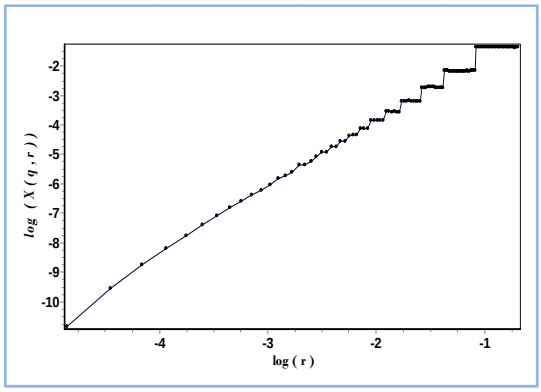
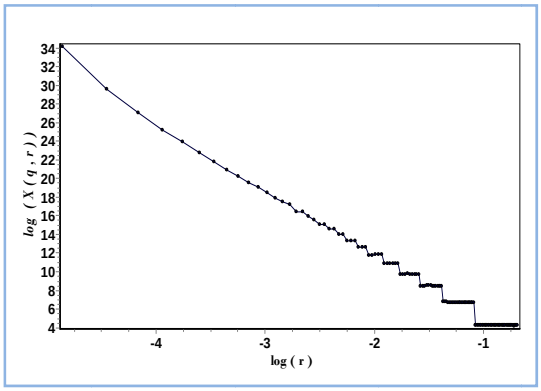


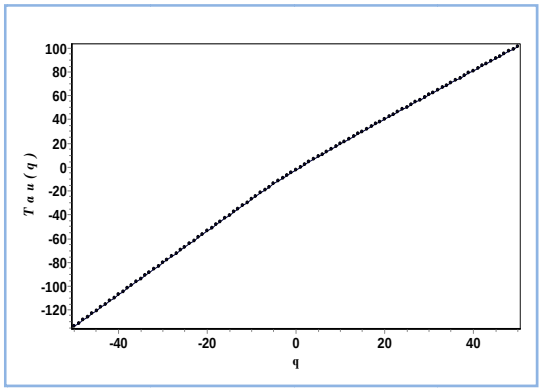
Image synthétique



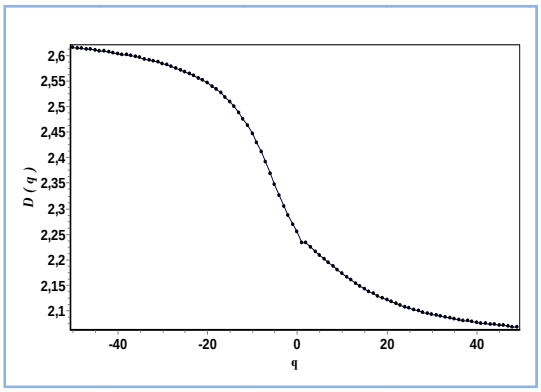
Fonction de partition ($q = 2$)



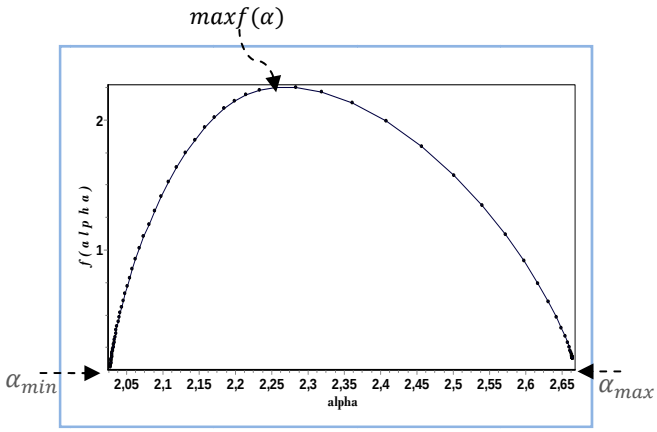
Fonction de partition ($q = -2$)



Fonction d'échelle ($\tau(q)$)



Dimensions généralisées$D_g(q)$



Spectre des singularités ($f(\alpha)$)

Fig. 4.4 : Courbes multifractales d'une image synthétique obtenues par la méthode de Chaudhuri et Sarkar.

4.3 Classification des images texturées

Nous allons dans ce paragraphe comparer les différentes méthodes implémentées dans le cadre de la classification des images texturées. Pour cela, nous avons utilisé deux bases d'images de texture. La première base contient 10 textures différentes (10 classes), tirées à partir des images de l'album de Brodatz. Il s'agit des textures D112 ,D74, D54, D35, D26, D24, D20, D11, D5 et D4 (Fig. 4.5). Celles-ci se diffèrent par leurs aspects microscopique et macroscopique ayant des propriétés différentes. Chaque classe de texture contient 30 images de taille (64×64), ce qui nous donne au total une base de N=300 échantillons notée $Xr = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. Chaque image est ensuite caractérisée par la dimension fractale calculée par l'une des méthodes implémentées.

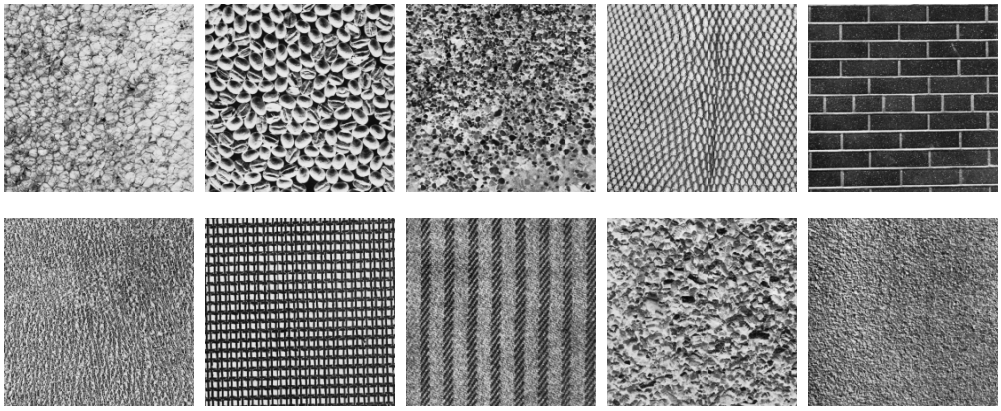
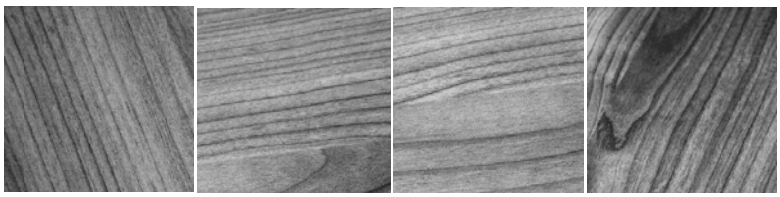
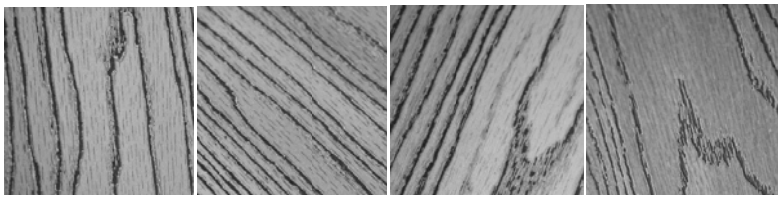


Fig. 4.5: Base d'images synthétiques (Brodatz). De gauche à droite et de haut en bas (D112, D74, D54, D35, D26, D24, D20, D11, D5, D4).

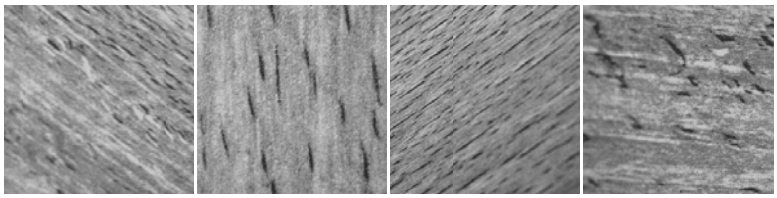
La deuxième base (Fig. 4.6) contient trois types de texture correspondant à trois types de bois, tirées de la base Ponce [http://www-cvr.ai.uiuc.edu/ponce grp]. Cette base contient initialement 25 classes de texture. Chaque texture est représenté par 40 images de taille 640x480. Parmi ces images, nous avons sélectionné toutes les images de bois. Celles ci sont réparties en 3 classes de 40 images chacune. A partir de chaque image de bois, nous avons extrait 5 images de tailles 256x256. Chaque classe de texture est alors représentée par 200 images de taille (256×256), ce qui nous donne au total une base de N=600 échantillons notée $X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$.



Texture1



Texture 2



Texture3

Fig. 4.6 : Base d'images réelles (bois).

L'ensemble des échantillons X est ensuite divisé en deux sous ensembles : un sous ensemble noté X_a réservée à l'apprentissage et un autre noté X_t réservé au test. Ces deux ensembles sont disjoints et ont la même taille, soit $N_a = N_t = \frac{N}{2}$. L'ensemble X_a constitue la base d'apprentissage, il est utilisé pour construire la règle de décision, tandis que l'ensemble test X_t est utilisé pour évaluer les performances de la règle de décision. Les deux règles de décision employées sont K- plus proches voisins (KPPV) et SVM. Pour évaluer les performances de ces deux classifieurs, nous avons déterminé le taux de classification à partir des observations de la base de test :

$$T_B(\%) = \frac{Nombre\ d'images\ bien\ classées}{N_t}$$

Quelques résultats de la classification des images de la base test sont répertoriés dans les tableaux 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5.

Méthode de calcul de D	**sans lacunarité**		**avec lacunarité**	
	KPPV	SVM	KPPV	SVM
Russel et al (S=150)	46.66	51.33	64.66	73.33
Russel et al (S=100)	72.66	62	86	92
Russel et al (S=50)	67.33	67.33	88	90.66
Sarkar et Chaudhuri	69.33	70	81.33	84
Lee et Hsieh	48	62.66	90.66	92.66
Gangepain et Roques-	36.66	51.33	78.66	85.33

Carmes				
Xu et Weng-2D	22	14.66	69.33	64
Xu et Weng-3D	41.33	46	81.33	84.66
Voss	67.33	64.66	82	86
Peleg et al	57.33	62	88.66	92.66
Wu et al	54.66	65.33	85.33	88.66
Chen et al	66	65.33	88	92

Tableau 4.2 : Taux de la classification (%) des différentes méthodes de calcul de la dimension fractale avec ou sans attributs de lacunarité obtenus sur des images de Brodatz.

	KPPV	SVM
Lacunarité selon Voss	64	69.3333
Multifractal (Chaudhuri et Sarkar)	84.67	90

Tableau 4.3 : Taux de la classification (%) des images de Brodatz avec les attributs de lacunarité et multifractals.

Méthode de calcul de D	**sans lacunarité**		**avec lacunarité**	
	KPPV	SVM	KPPV	SVM
				Matrice de confusion
Russel et al (S=150)	43	48.66	80.33	87 90 0 10 0 96 4 25 0 75
Russel et al (S=100)	45.33	49	84.33	88.33 85 0 15 2 96 2 15 1 84
Russel et al (S=50)	38	38.33	78	84 67 0 33 1 99 0 14 0 86
Sarkar et Chaudhuri	39.66	43	78	83 66 0 34 1 97 2 14 0 86
Lee et Hsieh	36	45	78.66	83 66 0 34 1 97 2 14 0 86
Gangepain et Roques-Carmes	35.66	48	80	86 78 0 22 0 94 6

				14 0 86
Xu et Weng-2D	38	39.33	78	83
				66 0 34 1 97 2 14 0 86
Xu et Weng-3D	45	47.33	83	84.33
				79 0 21 1 98 1 22 2 76
Voss	41.66	46.33	78	83
				66 0 34 1 97 2 14 0 86
Peleg et al	45.66	47.66	82	90
				90 0 10 0 98 2 18 0 82
Wu et al	36.33	39.66	78	83
				66 0 34 1 97 2 14 0 86
Chen et al	31	29.66	78	83
				66 0 34 1 97 2 14 0 86

Tableau 4.4 : Taux de la classification (%) des différentes méthodes de calcul de la dimension fractale avec ou sans attributs de lacunarité obtenus sur des images de bois.

Classifieur		KPPV	SVM
Lacunarité selon Voss	Taux de classification (%)	78	83
	Matrice de confusion	63 0 37 0 98 2 27 0 73	66 0 34 1 97 2 14 0 86
Multifractal (Chaudhuri et Sarkar)	Taux de classification(%)	86.33	88.67
	Matrice de confusion	90 2 8 2 91 7 15 7 78	94 0 6 4 90 6 15 3 82

Tableau 4.5 : Résultats de la classification des images de Bois avec les attributs de lacunarité et multifractals

Interprétation

Les résultats de la classification consignés dans les tableaux 4.2 à 4.5 montrent clairement que les signatures multifractales donnent de meilleurs résultats par rapport à l'attribut dimension fractale ou aux attributs de lacunarité pris individuellement. Cependant, l'utilisation des attributs de lacunarité conjointement avec la dimension fractale donnent de meilleurs taux de classification par rapport à l'utilisation seule de la dimension fractale ou à l'utilisation seule d'attributs de la lacunarité ou multifractals.

Ces résultats affichent également la supériorité de la méthode de classification SVM par rapport à la méthode KPPV.

Dans la première base, les méthodes d'estimation de la dimension fractale de Lee et Hsieh, de Peleg et al, de Chen et al ainsi que celle de Russel et al affichent un meilleur taux de classification par rapport aux autres méthodes. Cependant, les performances de la méthode de Russel et al sont conditionnées par la valeur du seuil. Quant à la deuxième base, le meilleur taux de classification est assigné à la méthode de Peleg et al.

4.4 Segmentation d'images texturées

Nous allons présenter dans ce paragraphe les principaux résultats de segmentation.

Rappelons que pour segmenter une image, nous avons déterminé un ensemble d'attributs fractals pour chaque pixel. Ensuite, nous avons appliqué la méthode de classification K-means afin de regrouper les pixels en zones homogènes. Le calcul d'attributs fractals pour un pixel se fait par l'une des méthodes de calcul de la dimension fractale (l'une des dix méthodes précédentes) et (ou) la lacunarité, en utilisant des pixels situés à l'intérieure d'une fenêtre de voisinage de taille $(2W + 1)^2$, centrée sur le pixel en question.

Afin d'évaluer d'une manière objective la performance des différentes méthodes, nous avons utilisé le taux de classification comme critère d'évaluation.

4.4.1 Images Tests

Le taux de classification est basé sur des connaissances a priori disponibles sur l'image à savoir le nombre de régions de textures contenues dans l'image et la classe d'appartenance de chaque pixel à une classe de texture. Il est déterminé par le rapport entre le nombre de pixels bien classés et le nombre total des pixels de l'image. Pour cela, nous avons utilisé une image synthétique tirée de l'album de BRODATZ (Fig.4.7). Elle est composée de deux textures à savoir D92 : peau de porc (partie gauche) et D34 : filet (partie droite). La taille de cette image est de (159*151) codée en 8 bits. La texture D92 est plus au moins fine et difficilement discernable à l'œil nu, par contre, la texture D34 présente une macro- texture.

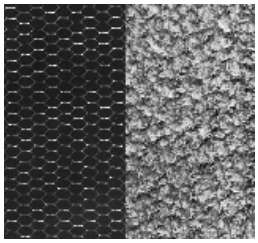


Fig. 4.7 :Images Tests.

4.4.2 Méthodes d'analyse fractales et multifractale

Les tableaux (4.6), (4.7) et (4.8) regroupent respectivement les taux de classification de l'image test, obtenus par chaque méthode d'estimation de D, par la méthode de calcul des attributs de lacunarité et celle qui permet d'estimer les attributs multifractals, en fonction de la taille de la fenêtre de voisinage.

Méthode de calcul de D	Taille de la fenêtre de voisinage W			
	W=4	W=6	W=8	W=12
Russel et al (S=150)	89,39	95,41	94,81	95,57
Russel et al (S=100)	94,87	95,52	94,74	95,28
Russel et al (S=50)	96,25	96,81	95,22	95,07
Sarkar et Chaudhuri	62,30	73,08	92,84	96,60
Lee et Hsieh	86,84	86,82	87,80	93,80
Gangepain et Roques-Carmes	93,82	96,61	95,06	94,36
Xu-Weng-2D	62,75	62,55	62,32	61,53
Xu-Weng-3D	83,53	82,76	65,98	70,51
Voss	**96,41**	**97,37**	**97,15**	96,59
Peleg et al	91,05	96,13	96,95	**97,33**
Wu et al	70,65	73,61	64,81	77,07
Chen et al	93,24	96,35	91,59	69 ,01

Tableau 4.6 : Résultats de la segmentation(%) de l'image test en utilisant l'attribut dimension fractale D.

Méthode de calcul de la lacunarité	Taille de la fenêtre de voisinage W			
	W=4	W=6	W=8	W=12
Lacunarité selon Voss	95,75	**97,13**	96,07	94,54

Tableau 4.7 : Résultats de la segmentation(%) de l'image test en utilisant les attributs de lacunarité.

Méthode de calcul d'attributs multifractals	Taille de la fenêtre de voisinage W			
	W=7	W=8	W=10	W=12
Chaudhuri et Sarkar	83,39	**93,36**	83,85	63,78

Tableau 4.8 : Résultats de la segmentation(%) de l'image test en utilisant les attributs multifractals.

La figure (4.8) donne un aperçu sur les images segmentées pour une taille de la fenêtre de voisinage W=8.

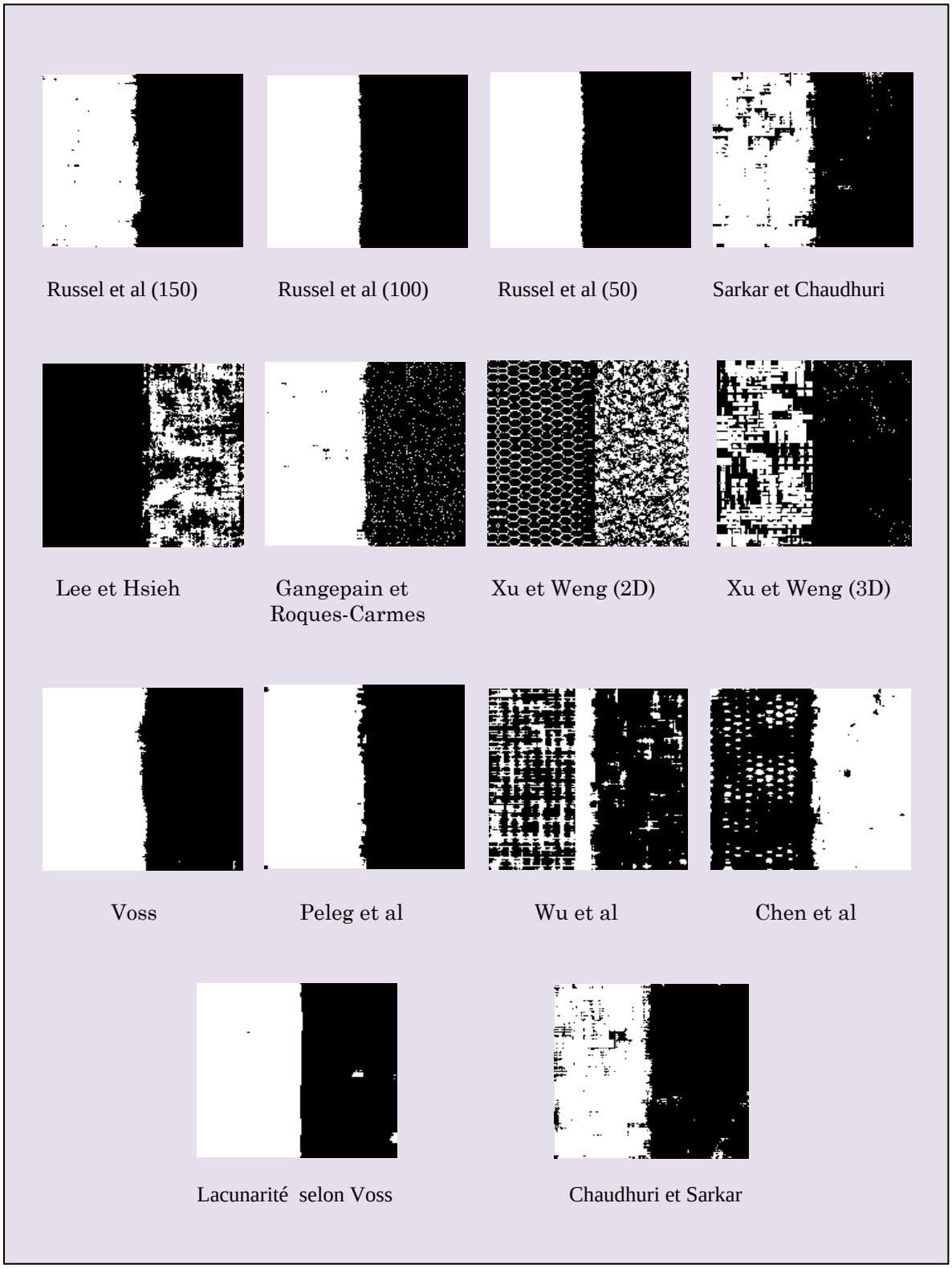


Fig. 4.8 : Images segmentées (W=8).

Le tableau (4.9) regroupe les taux de classification de l'image test, obtenus par l'association de la dimension fractale D et de lacunarité, en fonction de la taille de la fenêtre de voisinage.

Méthode de calcul de D	Taille de la fenêtre de voisinage (W)			
	W=4	W=6	W=8	W=12
Russel et al (S=150)	96,16	97,74	97,22	95,64
Russel et al (S=100)	97,03	97,87	96,75	95,17
Russel et al (S=50)	97,30	97,87	97,02	96,23
Sarkar et Chaudhuri	94,60	97,19	96,40	95,53
Lee et Hsieh	95,92	97,32	96,86	94,91
Gangepain et Roques-Carmes	96,80	97,72	97,07	95,15
Xu-Weng-2D	92,39	96,82	96,48	94,65
Xu-Weng-3D	95,75	96,73	96,08	94,71
Voss	97,65	97,86	97,58	96,20
Peleg et al	96,41	97,71	97,49	95,59
Wu et al	95,80	96,82	96,88	95,38
Chen et al	97,13	97,89	97,13	94,94

Tableau 4.9 : Résultats de la segmentation de l'image test en utilisant l'attribut D **et** les attributs de la lacunarité.

Les figures (4.9) et (4.10) montrent quelques exemples d'images segmentées obtenues avec respectivement (W=8) et (W=12).

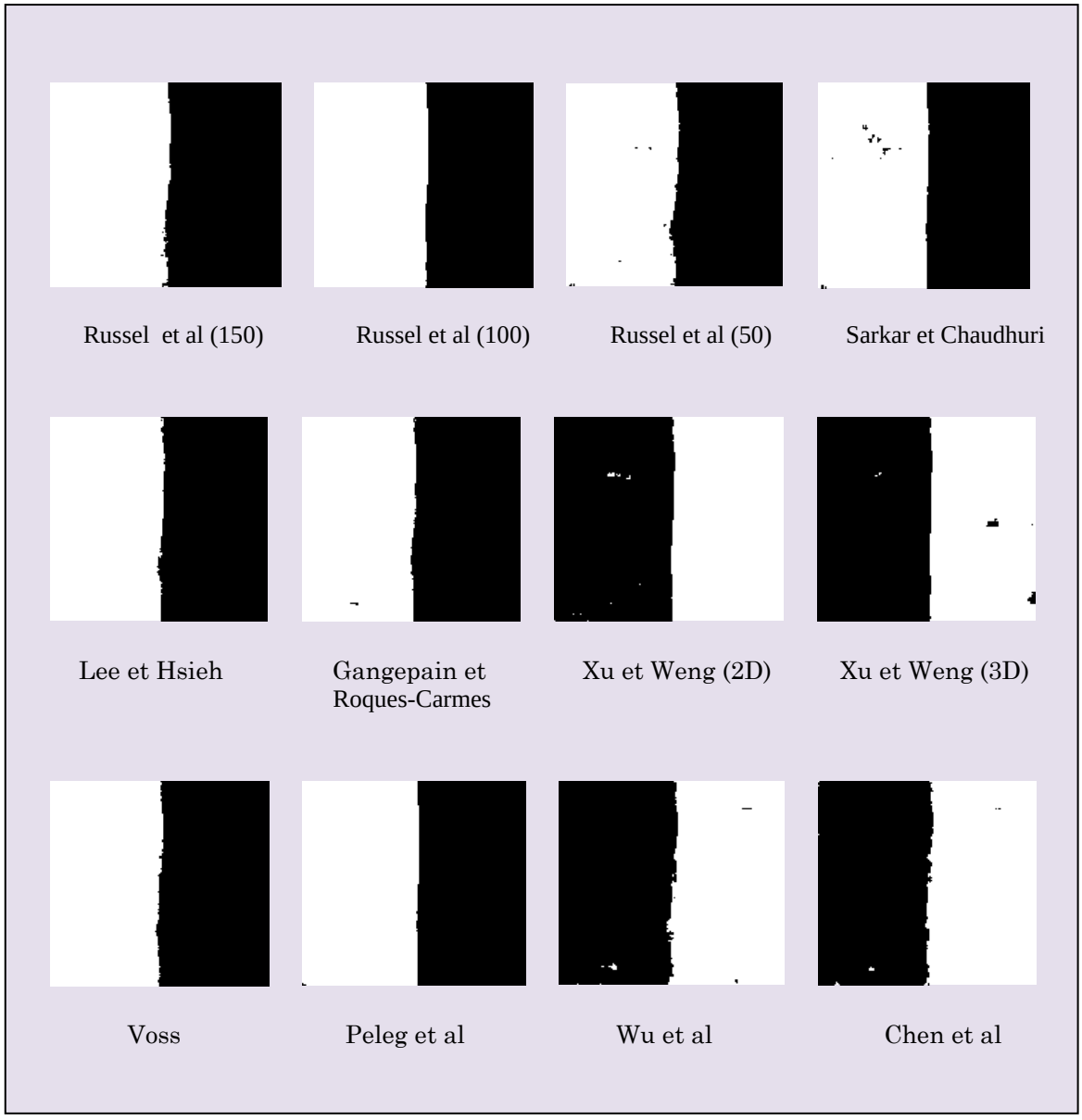


Fig. 4.9 : Images segmentées (W=8).

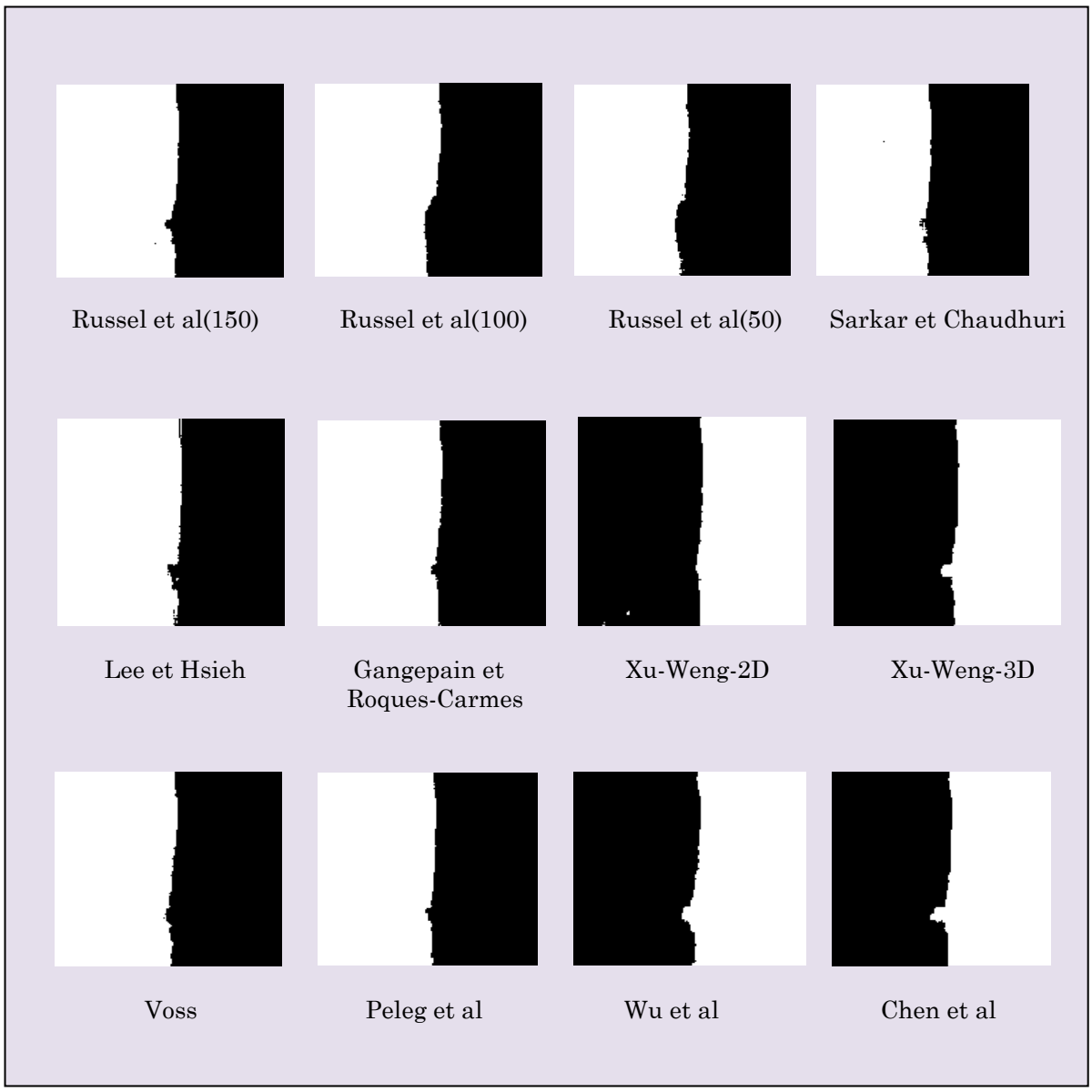


Fig. 4.10 : Images segmentées (W=12).

Interprétation

Les résultats affichés dans les tableaux 4.6, 4.7 et 4.8 montrent que la taille de la fenêtre de voisinage influence sur le résultat de la segmentation et ce quelque soit la méthode d'estimation de la dimension fractale considérée. L'utilisation seule d'attribut dimension fractale indique que la méthode de Russel et al, de Sarkar et Chaudhuri, de Gangepain et Roques-Carmes, de Voss, ainsi que de Peleg et al affichent un meilleur résultat par rapport aux autres méthodes. Les résultats obtenus avec les signatures multifractales sont moins bons que ceux obtenus avec la dimension fractale ou les attributs de lacunarité car le nombre d'attributs multifractals est élevé et que certains de ces attributs peuvent être non pertinents. Dans ce cas un choix d'attributs est plus que nécessaire. L'utilisation conjointe d'attribut dimension fractale et des attributs de

lacunarité améliore d'une façon efficace la qualité de la segmentation par rapport à l'utilisation seule de la dimension fractale ou l'utilisation seule des attributs de la lacunarité.

4.4.3 Méthodes d'analyse fractales et multifractale et attributs statistiques d'ordre 1.

Nous allons à présent combiner l'attribut dimension fractale et les attributs multifractals avec d'autres attributs fournis par d'autres méthodes d'analyse de la texture telle que celle basée sur les statistiques d'ordre 1. Les attributs statistiques d'ordre 1 sont rappelés dans le chapitre 1. Les tableaux (4.11) et (4.12) regroupent les taux de classification de l'mage test obtenus par cette association d'attributs.

Méthode de calcul de D			
Russel et al (S=150)	Russel et al (S=100)	Russel et al (S=50)	Sarkar et Chaudhuri
97.68	95.78	96.75	95.25
Lee et Hsieh	Gangepain et Roques-Carmes	Xu-Weng-2D	Xu-Weng-3D
95.90	95.93	94.99	95.57
Voss	Peleg et al	Wu et al	Chen et al
95.27	**97.42**	96.32	96.63

Tableau 4.11 : Résultats de la segmentation(%) de l'image test en combinant l'attribut dimension fractal et les statistiques d'ordre 1 (W=8).

Méthode de calcul D'attributs multifractals	Taille de la fenêtre de voisinage W		
	W=7	W=8	W=10
Chaudhuri et Sarkar	95.86	95.90	**96.19**

Tableau 4.12: Résultats de la segmentation(%) de l'image test en combinant les attributs multifractals et les statistiques d'ordre 1.

La figure (4.11) donne quelques images segmentées.

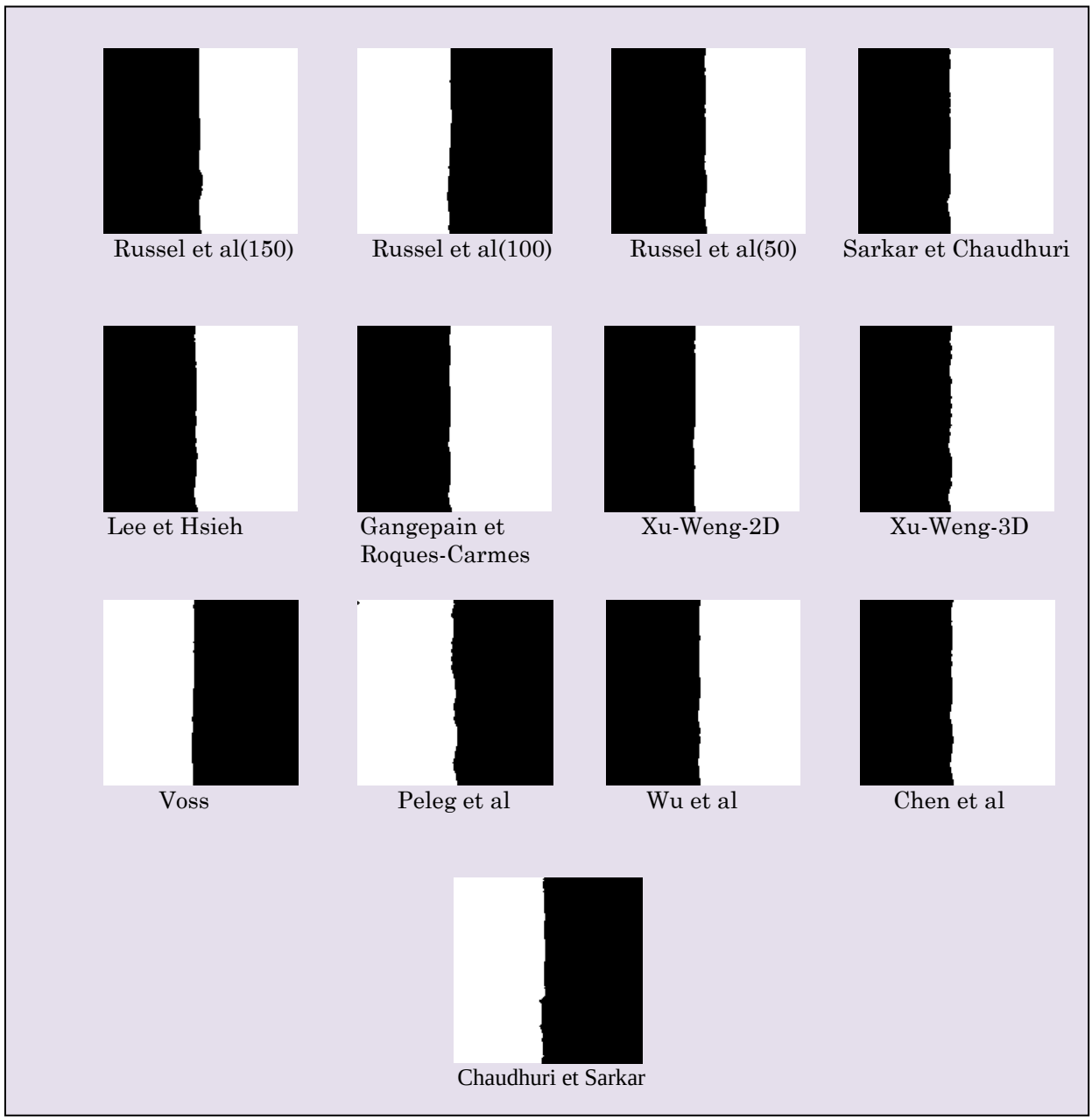


Fig. 4.11 : Images segmentées (W=8).

Interprétation

L'utilisation conjointe de l'attribut dimension fractale avec les attributs statistiques améliore d'une façon efficace la qualité de la segmentation par rapport à l'utilisation seule de la dimension fractale ou l'utilisation seule des attributs de la lacunarité et surtout des attributs multifractals. Cependant, ces résultats restent comparables à ceux obtenus par l'association de la dimension fractale et des attributs de lacunarité.

4.4.4 Images synthétiques

Les figures (4.12) et (4. 13) montrent quelques images synthétiques ainsi que leurs segmentations par les différentes méthodes d'estimation de la D en les combinant avec la méthode d'analyse basée sur les statistiques d'ordre 1. Ces images contiennent différentes textures.

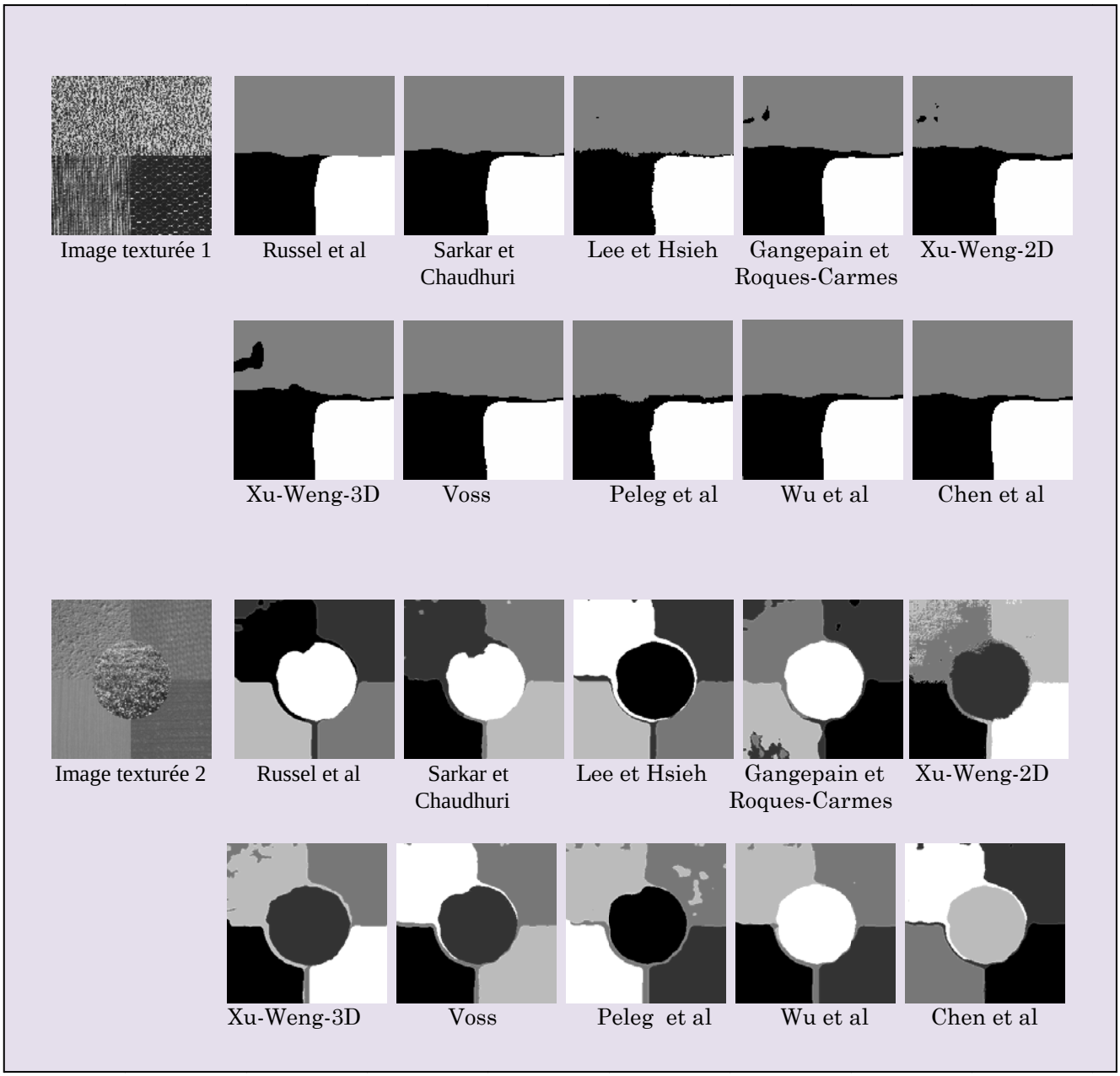


Fig. 4.12 : Images synthétiques (1 et 2) segmentées par les différentes méthodes d'estimation de la dimension fractale et les statistiques d'ordre1.

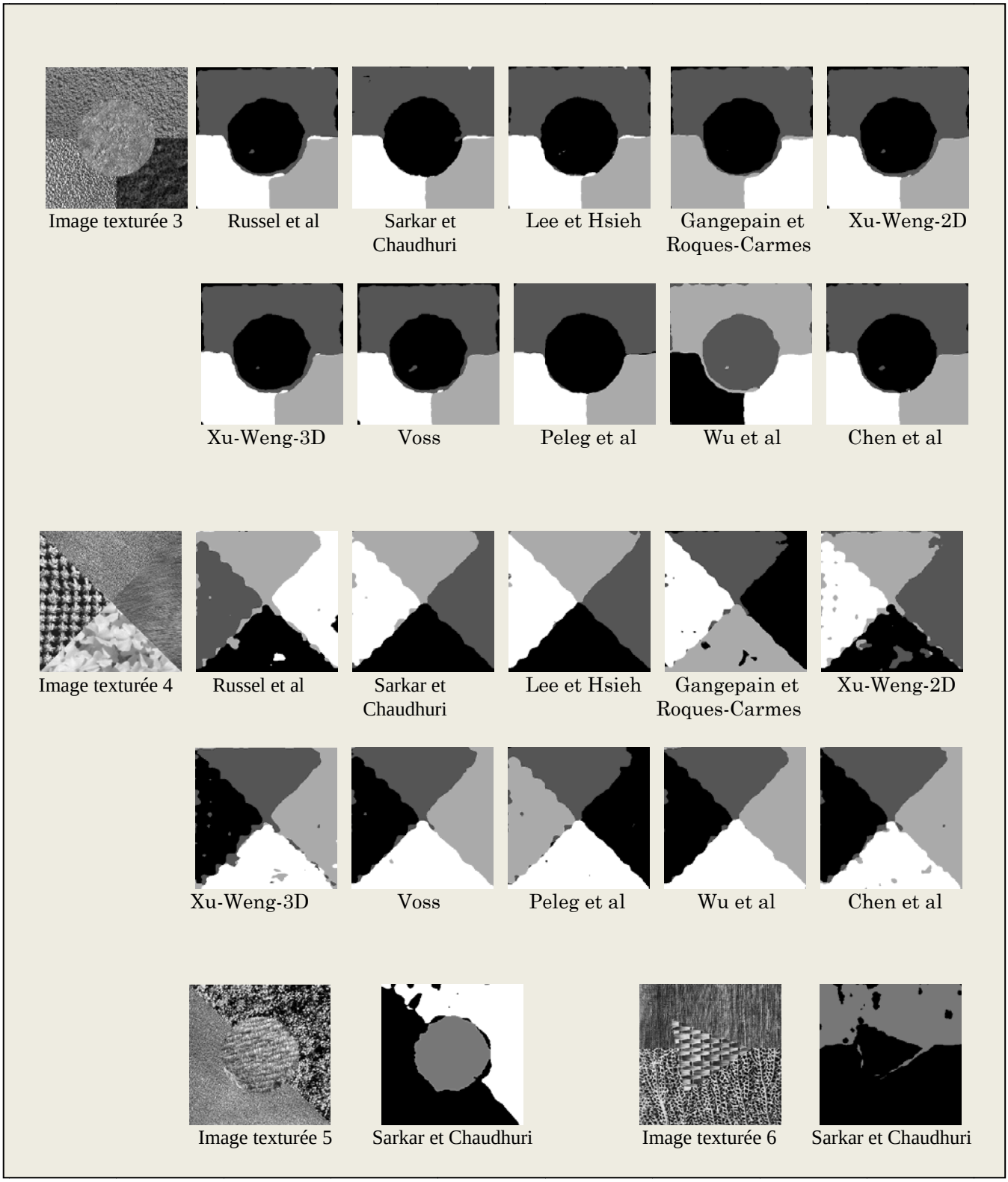


Fig. 4.13 : Images synthétiques (3, 4, 5 et 6) segmentées par les différentes méthodes d'estimation de la dimension fractale et les statistiques d'ordre1.

La figure (4. 14) montre quelques images synthétiques ainsi que leurs segmentations obtenus par les attributs multifractals associés à ceux basés sur les statistiques d'ordre 1.

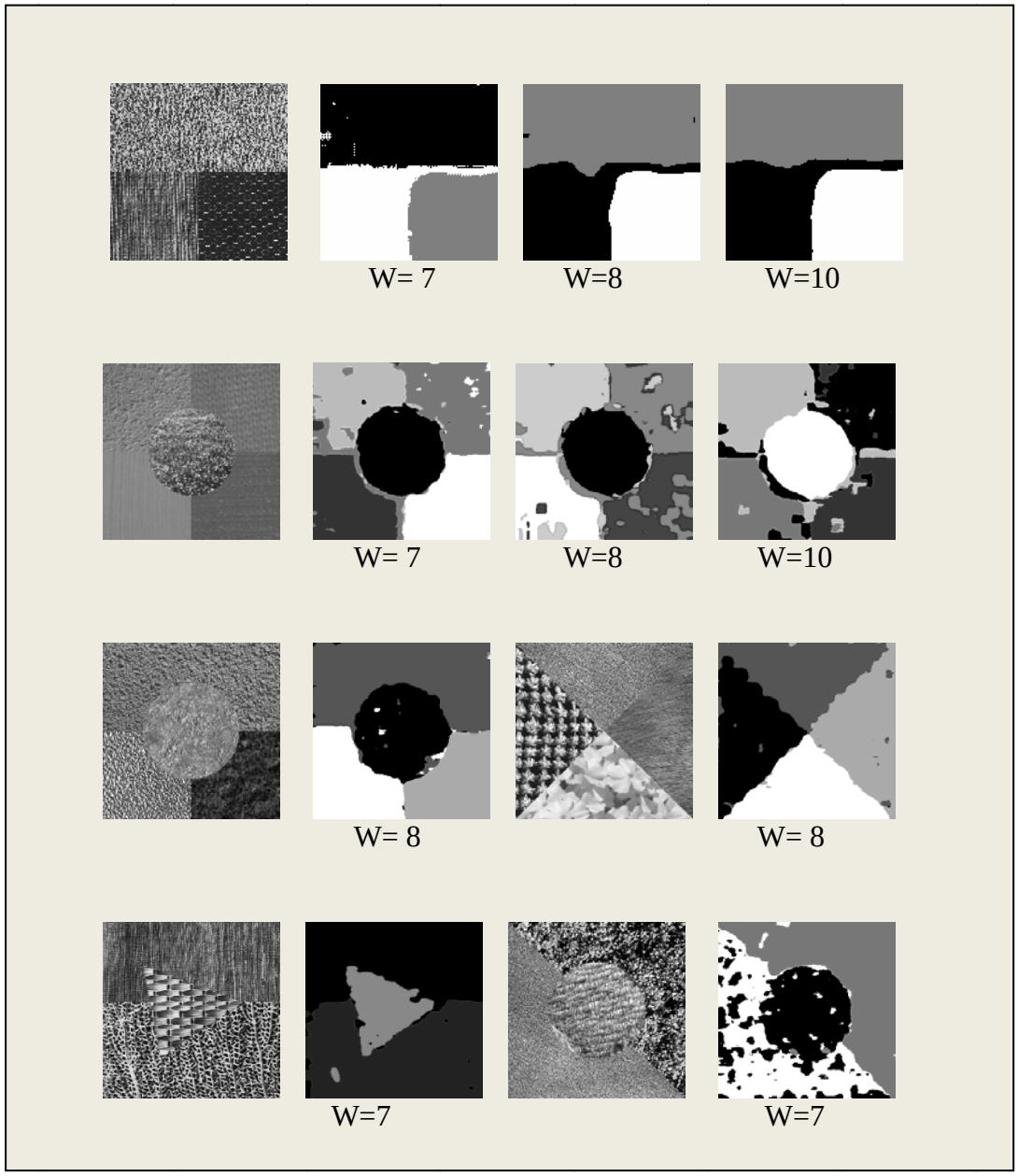


Fig. 4.14 : Images synthétiques segmentées par la méthode de Chaudhuri et Sarkar.

Interprétation

Les figures précédentes montrent que l'association de l'attribut dimension fractale ou attributs multifractals avec les attributs basée sur les statistiques d'ordre 1 donnent des résultats de segmentation satisfaisants.

4.5 Conclusion

Nous avons étudié, dans ce chapitre, différentes méthodes de calcul de la dimension fractale, les attributs de lacunarité et les attributs multifractals dans le cadre de la classification et la segmentation des textures. Les différentes méthodes de calcul de la dimension fractale ont été validées sur des images synthétiques dont la dimension fractale est connue à priori. Les méthodes fondées sur le modèle FBM (Chen et al, Wu et al), mesures des surfaces (Peleg et al) ainsi que le comptage des boîtes (Lee et Hsieh, Sarkar et Chaudhuri, Russel et al) semblent plus précises. Il ressort de cette étude que l'utilisation conjointe de la dimension fractale et les attributs de lacunarité donne de résultats satisfaisant que ce soit en classification ou en segmentation. Ils montrent aussi que l'association de l'attribut dimension fractale ou attributs multifractals avec d'autres attributs issus des autres méthodes d'analyse de la texture permet d'améliorer considérablement les résultats de la segmentation.

Conclusion générale

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire l'analyse d'images à base de la géométrie fractale et de la théorie multifractale. Il ressort de ce travail que le formalisme fractal et multifractal est riche et en même temps fascinant. Il offre des outils intéressants dans beaucoup de domaines.

Le formalisme fractal et multifractal fait appel à des notions fondamentales telles que la notion d'autosimilarité, d'invariance d'échelle, de la dimension fractale, de lacunarité, de fonction de partition, de coefficient de Hölder, de spectre des singularités… etc. La littérature dans ce domaine offre un large panel de méthodes de calcul des signatures fractales et multifractales telles que, la dimension fractale, lacunarité, les gradients de la fonction de partition, les exposants de singularité …etc.

La dimension fractale représente, indépendamment de l'échelle d'observation, la complexité géométrique de la surface, en tant qu'objet supposé rigoureusement fractal, tandis que la lacunarité représente un paramètre de forme dépendant de l'échelle d'observation. Quant aux signatures multifractales, elles présentent un ensemble d'attributs multifractals tels que le $maxf(\alpha)$, les gradients de la fonction de partition obtenus par un choix arbitraire des valeurs de q …etc.
Ces informations (signatures) ont été utilisées dans notre travail comme attributs de texture en analyse d'images. Différentes approches de calcul de la dimension fractale ont été ainsi détaillées et illustrées dans ce mémoire. Dix méthodes de calcul de la dimension fractale à savoir la méthode de Russel et al, Sarkar et Chaudhuri, Lee et Hsieh, Gangepain et Roques-Carmes, Voss, Peleg et al, Wu et al, Chen et al, Xu et Weng 2D, Xu et Weng 3, la méthode de calcul de lacunarité selon Voss et une méthode d'analyse multifractale dont la fonction de partition est calculée à base de la méthode de comptage des boites différentielles de Chaudhuri et Sarkar ont été alors retenues et implémentées sous l'environnement C++ Builder. Ces méthodes ont été validées sur une base d'images synthétiques ayant une dimension fractale connue à priori afin de comparer leurs qualités dans la précision du calcul de la dimension fractale. Dans cette étape la méthode de Sarkar et Chaudhuri, Lee et Hsieh, Peleg et al, Wu et al ainsi que Chen et al se sont avérées plus précises que les autres méthodes. Deux bases d'images, une de brodatz et une autre composée d'images de bois, ont été également utilisées dans le cadre de la classification des images texturées caractérisées par des signatures fractales et

multifractales. Les méthodes de classification supervisée employées sont celles des KPPV et des SVM. Les résultats obtenus dans cette application montrent la supériorité d'attributs multifractals choisis, dans le cas de l'analyse multifractal et d'attribut fractal de Peleg et al combiné avec ceux de la lacunarité, dans le cas de l'analyse fractale.
Les différentes méthodes de calcul de la dimension fractale avec ou sans lacunarité et les signatures multifractales ont été également utilisées pour la segmentation des images texturées synthétiques. Pour cette application, l'attribut fractal de Russel et al, de Peleg et al combinés avec les attributs statistiques d'ordre1 aboutissent à des meilleurs résultats.

Nous pensons que l'utilisation des attributs fractals et multifractals seuls en classification ou en segmentation d'images texturées peuvent aboutir à des résultats plus ou moins médiocres. Leurs combinaisons avec d'autres attributs peuvent s'avérer indispensables dans certaines applications.

Ce travail peut être également enrichi par d'autres méthodes de calcul de la dimension fractale et de lacunarité. Il serait également intéressant de combiner plusieurs méthodes de calcul de la dimension fractale. L'analyse multifractale n'a pas été, complètement, exploitée dans ce mémoire étant donné qu'une seule méthode a été implémentée. D'autres méthodes de calcul des fonctions de partitions peuvent être envisagées.

Bibliographie

Références bibliographiques

Alatas, O., 1998. "Caractérisation de textures par coefficients de réflexion 2-D : application en classification et segmentation," Thèse de Doctorat à l'université Bordeaux I.

Allain, C., Cloitre, M., 1991. "Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets," Physical Review A, vol. 44, pp.

Barnsley, M., 1988. "Fractal everywhere," Accademy Press Proffessional, San Diego, CA, U.S.A.

Besicovitch, A.S., 1935."Mathematische,"Annalen.

Bohr,T.,Tèl,T.,1988. "Direction in chaos," édité par B.L.Hao (World Scientific, Singapour, 1988) vol.2, pp.194.

Chaudhuri, B.B., Sarkar, N., Kundu, P., 1993. " Improved fractal geometry based texture segmentation technique," IEE Proceedings-E, vol. 140, no. 5.

Cantor,G.,1884. "Uber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,"6. Mathematische Annalen, vol. 24, no.4, pp. 453-488.

Cocquerez, J.P., Philipp, S., 1995. " Analyse d'images: filtrage et segmentation," Masson.

Cortes, C., Vapnik, V., 1995. Support Vector Networks. Journal of Machine Learning, vol. 20, pp. 273–297.

Chen, C.C., Daponte, J.S., Fox, M.D., 1989." Fractal feature analysis and classification in medical imaging," IEEE Transactions Medical Imaging, vol. 8, pp. 133-142.

Chen, E.L., Chung, P.C., Chen, C.L., Sai, H.M.,Chang, C.I., 1998. "An automatic diagnostic system for CT liver image classification," IEEE. Transactions Biomedical Engenering, vol. 45, no. 6, pp.94-783.

Chen, D.R., Chang, R.F., Chen, C.J., Ho, M.F ., Kuo, S.J., Chen, S.T., Hung, S.J., Moon, W.K., 2005." Classification of breast ultrasound images using fractal feature," Journal of Chemical Imaging, vol. 29, pp. 235-245.

Cheng, Q., 1999. "The gliding box method for multifractal modeling," Computer. Geoscience, vol. 25, pp. 1073-1079.

Clarke, K.C., 1986."Computation of the Fractal Dimension of Topographical Surfaces Using the Triangular Prism Surface Area Method," Computer. Geoscience, vol. 12, no. 5, pp. 713-722.

Dong, P.L., 2000."Test of a new lacunarity estimation method for image texture analysis,"International Journal of Remote Sensing, vol.17, pp. 3369–3373.

Du, G., Yeo, T.S., 2002. "A novel Multifractal Estimation Method and Its Application to Remote Image Segmentation," IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing, vol. 40, no.4, pp. 980-982.

Dubuc, B., Roques-Carmes, C., Tricot, C., Zucker, S.W., 1987."The Variation Method: A Technique to Estimate the Fractal Dimension of Surface," Proc. SPIE. Visual Commun. Image Processing, vol. 845, pp. 241-248.

Falconer, K., 1990. "Fractal geometry: Mathematical foundations and applications," John Wiley & Sons, England.

Falconer, K., 2003. "Fractal geometry: Mathematical foundations and applications," John Wiley and Sons.

Feder, J., 1988."Fractals," Plenum Press, New York.

47 Feeny, B., 2000." Fast multifractal analysis by recursive box covering," Int J Bifurcation Chaos, 10:2277-87.

Fisher, Y., 1995." Fractal image compression. Theory and application," Springer. New York.

Fu, K.S., 1982. "A syntactic approach to texture analysis," Syntactic Pattern Recognition and Applications, chap. 12, pp. 445-480, prentice Hall.

Fulop,A.,Vicsek,T.,1989."Determination of fractal dimension for geometrical multifractal," Physical Review A, vol. 66, pp. 155-159.

Gallaadet, T., Simpson, J., 1991. " Automated cloud screening of AVHRR imagery using split and merge clustering," Remote Sensing Environment, vol. 38, pp. 77-121.

Galloway, M.M., 1975. "Texture analysis using gray level run lengths," Computer Graphics Image Processing, vol. 4, pp. 172-179.

Gardner, R.H., Plotnick, R.E., O'Neill, R.V., 1993." Lacunarity indices as mesures of landscape texture," Landscape Ecology, vol. 8, pp. 201-211.

Garding, J., 1988." Proprieties of fractal intensity surfaces," Pattern Recognition Letters, vol. 8, pp. 319-324.

Godin, C., 2003. Introduction aux structures multi-échelles. Application à la représentation des plantes," HDR, Université de Montpellier II.

Grassberger,P., Procaccia, I., 1983. Phys. Rev. Letters. vol. 50, pp. 346.

Guo, Q., Shao, J., Ruiz, V.F., 2009." Characterization and classification of tumor lesions using computerized fractal-based texture analysis and support vector machines in digital mammograms," Cars, vol. 4, pp. 11-25.

Haralick, R., 1979. "Statistical and structural approaches to texture," Proceedings of the IEEE, vol. 67, no. 5, pp. 786-804.

Hasting, H., Sugihara, G., 1994. "Fractals : a user's guide for the natural sciences,"Oxford University Press, Oxford, U. K., pp. 248.

Hausdorff, F., 1919."Mathematische,"Annalen.

Jaggi, S., Quattrochi, D.A., Lam, N.S.N., 1993." Implementation and operation of three fractal measurement algorithms for analysis of remote-sensing data," Computers and Geosciences, vol. 19, no. 6, pp.745-767.

Jin, X.C., Hong, S.H., Jayasooriah., 1995." A practical method for estimating fractal dimension," Pattern Recognition Letters, vol. 16, pp. 457-464.

Julesz, B., 1962. "Visual pattern recognition," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 8.

Keller, J., Chen, S., Crownover, R., 1989. "Texture description and segmentation through fractal geometry," Computer Vision Graphics and Image Processing, vol. 45, pp.150-166.

Kermad, C.D., Cchhdi, K., Cario, C., 1995. " Segmentation d'images par multi-seuillage et fusion de regions labellisées minimisant un critère de similarité," Quinzième colloque GRETSI, vol.2, pp. 641, JUAN –LES-PINS.

Kolmogorov, A.N., 1941. C.R. Acad. Sci. USSR. vol. 30, pp. 301.

Lam, N.S.N., Qiu, H.L., Quattrochi, D.A., Emerson, C.W., 2002." An evaluation of fractal methods for characterizing image complexity. Cartography and Geographic Information," Science, vol. 29, no. 1, pp.25-35.

Lee, W.L., Hsieh, K.S., 2010. "A robust algorithm for the fractal dimension of images and its applications to the classification of natural images and ultrasonic liver images," Signal Processing, vol. 90, pp. 1894-1904.

Lévy Véhel, J., Mignot, P., Berroir, J., 1992. "Multifractals, texture and image analysis," Proceedings of the Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 661–664.

Li, J., Du, Q., Sun, C., 2009." An improved box-counting method for image fractal dimension estimation," Pattern Recognition, vol. 42, pp. 2460-2469.

Lopes, R., Betrouni, N., 2009. "Fractal and multifractal analysis," Medical Image Analysis, vol. 13, pp. 634-649.

Lovejoy, S., Schertzer, D., 1992. "Multifractals in geophysics," Lecture notes, AGU-CGU-MSA Spring meeting Canada.

Mandelbrot, B.B.,1967." How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension," Science, vol. 156, PP. 636- 638.

Mandelbrot, B.B., Van Ness, J.W., 1968. "Fractional Brownian motion, fractional noise and applications," SIAM Review, vol.10.pp.422-437.

Mandelbrot, B.B., 1975. "Les objects fractals : forme, hasard et dimension,"Flammarion, Paris, pp. 288.

Mandelbrot, B.B., 1977."Fractals: Form, Chance and Dimension," San Francisco, CA: W.H. Freeman and Company.

Mandelbrot, B.B., 1982. "The Fractal Geometry of Nature," W.H Freeman and company.
Mandelbrot, B.B., 1983." The fractal geometry of nature, Freeman, New York.

Parisi, G., Frisch, U., 1985."Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics," North-Holland.

Peano, G., 1890."Sur une courbe qui remplit toute une aire plane," Mathematische Annalen, vol. 26 pp. 157-160.

Peleg, S., Naor, J., Hartley, R., Avnir, D., 1984." Multiple resolution texture analysis and classification," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.6, no.4, pp. 518-523.

Peitgen, H.O., Saupe, D., 1988. "The science of fractal images", Springer, Heidelberg.

Pentland, A.P., 1984."Fractal-based description of natural scenes," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence., vol. 6, no.6, pp. 661–674.

Pleshanov,V.S., Napryushkin, A.A., Kibitkin, V.V., 2010 "Use of the Theory of Fractals in Image Analysis Tasks," vol. 46, no. 1, pp. 86-97.

Plotnick, R.E., 1995. "Lacunarity analysis: A general technique for analysis of spatial patterns," Physical Review E, vol. 53, pp. 5461-5468.

Quevedo, R., Carlos, L.G., Aguilera, J.M., Cadoche, L., 2002. "Description of food surfaces and microstructural changes using fractal image texture analysis," Journal of Food Engineering, vol. 53, pp. 361-371.

Ruderman, D., Bialek,W., 1994. "Statistics of natural images: Scaling in the woods," Physical Review Letters, vol. 37 , pp. 814.

Ruderman, D., 1997. "Origins of scaling in natural images," Vision Research, vol. 37, no. 23, pp. 3385-3398.

Russel, D.A., Hanson, J.D., Ott, E., 1980. "Dimension of strange attractors," Physical Review Letters, vol. 45, pp. 1175-1178.

Sandau, K., 1996."A note on fractal sets and measurement of fractal dimension," Physica A 233 , pp. 1-18.

Sarkar, N., Chaudhuri, B.B., 1992. "An efficient Differential Box- Counting approach to compute fractal dimension of textural images," Pattern. Recognition Letters, vol. 25, pp. 1035-1041.

Seuront, L., 2010."Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science," CRC Press.

Strand, J., Taxt, T., 1994. " Local frequency features for texture classification," Pattern Recognition, vol. 27, no. 10, pp. 1397–1406.

Sun, W., Xu, G., Gong, P., Liang, S., 2006. " Fractal analysis of remotely sensed images: A review of methods and applications," International Journal of Remote Sensing, vol. 27, no. 22, pp. 4963-4990.

Unser, M., 1984. "Description statistique de la texture," Thèse de docteur en sciences. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.

Voss, R.F., 1985. "Random fractal forgeries. Earnshaw RA(ed) Fundamental algorithms for compter graphics," Springer, Heidelberg, pp. 805-835.

Voss, R., 1986." Random fractals: characterization and measurement in scaling phenomena in disordered systems," R. Pynn and Skjeltorp, Plenum, New York.

Von Koch, H., 1904. "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par construction géométrique élémentaire," Arkiv for Matematik, vol. 1, pp. 681-704.

Wu, C.M., Chen, Y.C ., Hsieh, K.S., 1992."Texture features for classification of ultrasonic liver images," IEEE Transactions Medical Imaging, vol. 11, no 2, pp. 52-141.

Woods, J., 1972. "Two-dimensional discrete Markovian fields," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 18, pp. 232–240.

Xu, S., Weng, Y., 2006. "A new approach to estimate fractal dimensions of corrosion images," Pattern Recognition Letters, vol. 27, pp. 1942-1947.

Yakimovsky, Y., 1976. "Boundary and objet detection in real world images," ACM, vol. 23, no. 4, pp.599-618.

Zhao, W., 2001. "Multiscale analysis for characterization of remotely sensed images," Ph.D. Dissertation, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, USA, pp. 238.

Zuker, S.W., 1976. "Toward a model of texture," Computer Graphics Image Processing, vol.5 ,pp. 190-202.

Zhou, G., Lam, N.S.N., 2005." A comparison of fractal dimension estimators based on multiple surface generation algorithms," Computers and Geosciences, vol. 31, pp. 1260-1269.

Annexes

Annexe A

❖ Théorie de la mesure

En un sens, la géométrie fractale s'appuie sur les bases mathématiques de la théorie des ensembles, comme par exemple la notion de mesure. Cette dernière représente une option mathématique très vaste. Nous allons alors affaiblir nos exigences, nous contentons de la replacer à travers la théorie de la mesure, dans son véritable contexte.

En 1898, *Borel* énonça le concept d'ensemble mesurable de nombres réels et prouva ses principales propriétés. Parmi ceux qui sont continué dans la ligne de *Borel,* nous trouvons *Cantor,* fondateur de la théorie des ensembles. Il prouva que tout ouvert est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, qui permit de mesurer les ouverts et les fermets.

Nous savons que la longueur d'un intervalle sur l'axe des X est la différence des deux nombres qui l'expriment. Il nous vient naturellement à l'idée d'étendre la notion de longueur à des sous ensembles plus compliqués de nombres réels que les intervalles. Par exemple on peut définir la longueur d'un ouvert comme la somme des longueurs des intervalles ouverts qui les composent. La classe des ouverts est cependant encore trop restreinte :

On aimerait construire une fonction $\boldsymbol{\mu}$ qui fasse correspondre à chaque ensemble E d'une collection L d'ensembles de nombre réels, un nombre positif ou nul ou même infini positif $\mu(E)$ appelé **mesure de $\boldsymbol{E}$**.

Idéalement nous aimerions que μ possède les propriétés suivantes :

- $\mu(E)$ est défini pour tout ensemble E de nombres réels.
- Pour un intervalle positif $I, \mu(I) =$ longueur de I et $\mu(\emptyset) = 0$.
- Si $< E_n >$ est une suite d'ensembles disjoints (pour lesquels μ est définie) alors, $\mu(\bigcup_1^\infty E_n) = \sum_1^\infty \mu(E_n)$ (additivité dénombrable).
- μ est invariante sous translation c'est-à-dire que si $\mu(E)$ est défini, $E + y = \{x + y, x \in E\}$ est tel que $\mu(E + y) = \mu(E)$.

❖ Support de la mesure

Le support de la mesure est l'ensemble pour lequel elle est définie, ce support noté *spr* est un fermé.

$$x \in spr \; ssi \; \mu\big(B_r(x)\big) > 0 \quad , r > 0.$$

❖ **Théorie des IFS**

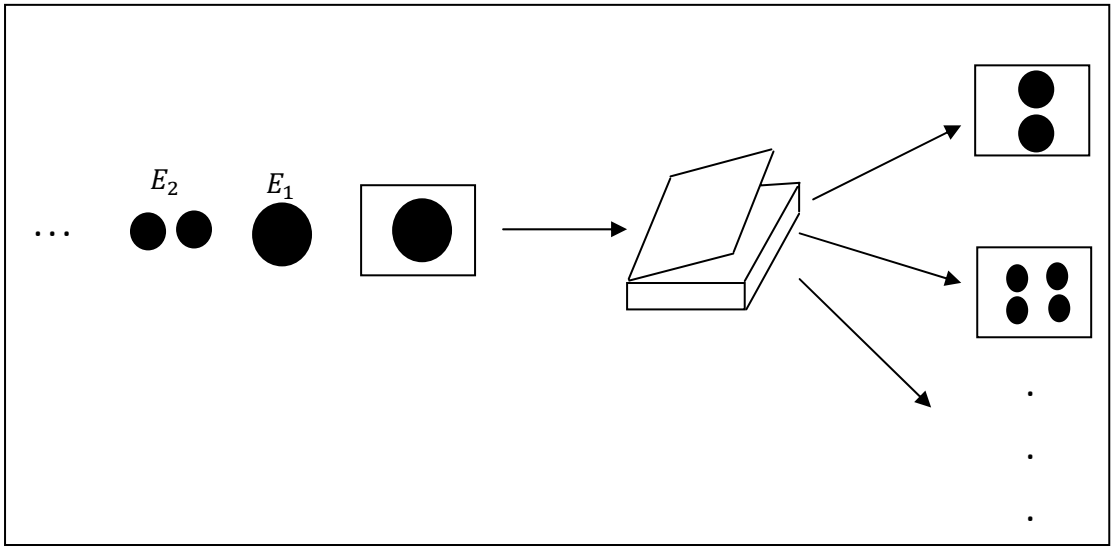
La méthode de système de fonctions itérées (IFS) est souvent illustrée par une photocopieuse spéciale appelée, machine à copie réduites multiples (MCRM) qui possède les caractéristiques suivantes :

L'image à copier est reproduite en plusieurs exemplaires sur la copie.

Chaque exemplaire est une réplique réduite de l'image originale.

La copie obtenue est réintroduite à chaque fois comme entrée (E_i $i = 1, \dots$) de la photocopieuse.

La figure suivante montre l'exemple d'une MCRM qui réduit l'image en entrée de moitié et la reproduit deux fois sur la copie. Le motif résultant du processus n'est pas fonction de l'image d'entrée mais du mode de copie de la photocopieuse.



Exemple d'une MCRM

- **Système de fonctions itérés : IFS**

La structure d'un IFS, est décrite par un ensemble fini de fonctions affines contractantes w_n tel que $n = 1, \dots N$. A chacune d'elles est associée un facteur de contractivité s_n . Le facteur de contraction de l'IFS, noté s est égal à $max\ \{s_n, n = 1, \dots N\}$.

- **Transformation affine**

Une transformation affine $w: R^2 \to R^2$ utilise 2 fonctions pour calculer les nouvelles valeurs $(w(x), w(y))$ des coordonnées x et y de chaque point. C'est une

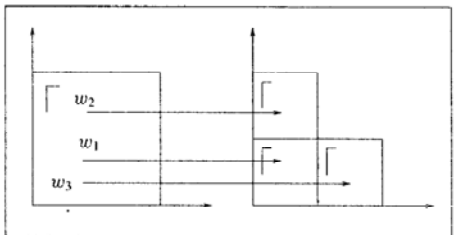
transformation linéaire représentée par une matrice $2 * 2$ ayant les entrées a, b, c, d suivie d'une translation représentée par le vecteur $\binom{e}{f}$:

$$\begin{bmatrix} w(x) \\ w(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

a, b, c, d, e, f sont des nombres réels.

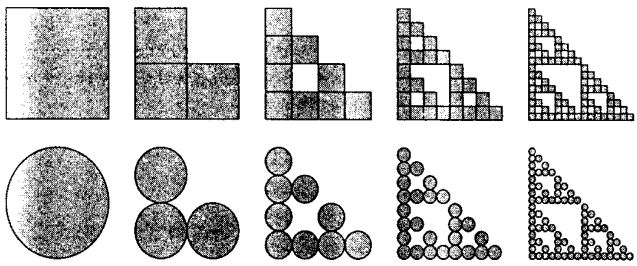
- **Exemple :** Soit les trois transformations suivantes

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Trois transformations dans le plan.

La figure suivante montre l'application de ces trois transformations sur un carré et un cercle.



Application de ces transformations sur un carré et un cercle.

- **Transformation affine contractive**

Une transformation sur un espace métrique (M, d) est dite contractive, s'il existe une constante positive $0 \leq s \leq 1$ telle que :

$$d\big(w(x), w(y)\big) \leq s.d(x,y) \quad \forall x, y \in M$$

Le facteur s est appelé facteur de contractivité de la transformation.

- **Code IFS/objet fractal**

Un IFS est un type d'objets fractals (en niveau de gris) qui sont construits par un algorithme itératif aléatoire. Le principe est d'associer une probabilité comprise entre 0 et 1 à chacune des N transformations w_n définissants un IFS (le total de toutes les probabilités devant être 1) telle que :

$$\forall n, P_n \geq 0 \; et \sum_{n=1}^{N} P_n = 1 \quad avec \quad P_n = [a_n d_n - b_n c_n] \Big/ \sum_{n=1}^{N} [a_n d_n - b_n c_n]$$

$$a_n, b_n, c_n \; et \; d_n \; sont \; les \; coefficients \; de \; la \; transformation \; w_n$$

L'algorithme s'énonce comme suit :

Choisir le point de départ α_0 ainsi que N (nombre de transformation) ;

Pour $n = 1, \ldots N$

faire

Choisir une transformation w_n aves la probabilité P_n

Calculer $\alpha_1 = w_n(\alpha_0)$

Remplacer α_0 par α_1

Afficher le point α_0

fait

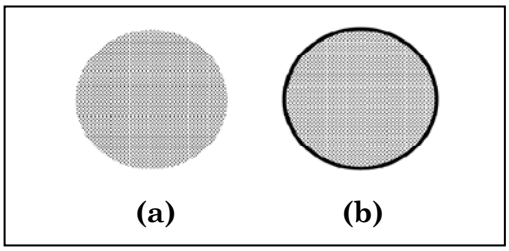
- **Dimension**

La définition de la notion de dimension est le nombre de paramètre à valeur réelle nécessaire pour décrire tous les points dans un espace. Prenant l'exemple d'une ligne, elle est unidimensionnelle puisqu'il suffit d'un seul paramètre pour décrire chacun de ces

points. La dimension est invariable, ainsi un plan par exemple requière deux paramètres en coordonnées rectangulaire (x, y) ou polaire(r, θ).

❖ Ouvert et fermé

Une boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble $B_r(x) = \{y \in M : d(y, x) < r\}$
Une boule fermée de centre x et de rayon r est l'ensemble $B_r(x) = \{y \in M : d(y, x) \leq r\}$.



(a) boule ouverte (b) boule fermée

Soit A sous ensemble. **Un point intérieur de A** est un point x tel que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ $(\varepsilon > 0)$. L'ensemble A est un **ensemble ouvert** si tout ses points sont des points intérieurs.

❖ Distance euclidienne

L'espace métrique (M, d) est un espace M muni d'une fonction réelle $d : M \times M \rightarrow [0, \infty[$ qui mesure la distance entre deux points x et $y \in M$. Dans le cas d'une image, M est choisi en fonction du type d'image à coder (pour une image binaire $M = \{0, 1\}$ et pour une image à niveau de gris $M = \{0, 255\}$). d est une **distance euclidienne** normalisée appelée métrique.

(M, d) satisfait les critères suivants : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$$d(x, y) = d(y, x).$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

La métrique euclidienne dans R: $d(x, y) = |x - y| : x \, et \, y \in M = R$.

La métrique euclidienne dans R^2: $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ *tel que*:

$$\big(x = (x_1, x_2) \ et \ \ y = (y_1, y_2)\big).$$

- **Propriétés**

1) Soit M, S deux espaces métriques. La fonction $h : M \to S$ est une **similitude** si pour tout points x, y dans M : $d\big(h(x), h(y)\big) = r * d(x,y)$ tel que r est un rapport positif de la fonction h .

2) Si (M, d) est un espace métrique et $T \subseteq M$:

- T est aussi un espace métrique muni d'une distance d_T tel que pour tout $x, y \in T : d_T(x,y) = d(x,y)$.

- Le diamètre de l'ensemble T est la plus grande distance séparant deux points $x \ et \ y$ appartenant à T: $diam\ T = sup\{d(x,y): x, y \in T\}$.

Annexe B

❖ Mouvement Brownien Fractionnaire (FBM)

Le Mouvement Brownien Fractionnaire ou Fractional Brownien Mouvement (FBM) de paramètre $H(0 < H < 1)$ est un modèle fractal introduit par *Mandelbrot* et *Van Ness* pour décrire le degré de la rugosité des surfaces naturelles (Mandelbrot.1968). On considère qu'une surface fractale peut être produite par un mouvement aléatoire dans un espace 3D (Mandelbrot.1968).

En effet, cette surface est d'autant plus lisse que H est grande. Ainsi, si H est proche de 1, la surface de l'image en niveau de gris est moins rugueuse. Dans ce cas, la courbe décrivant le FBM qui représente la surface en question, a une forme moins irrégulière puisque D est proche de 2. Dans le cas contraire, plus H est proche de zéro, plus la surface de l'image est rugueuse c'est-à-dire la courbe FBM représentant cette surface, a une forme très irrégulière puisque D est proche de 3. La dimension fractale(D) d'une image en niveau de gris est d'autant plus proche de 3 que la rugosité de sa surface est importante d'où la relation suivante: $D = 3 - H$.

- **Modèle mathématique d'un FBM**

Le processus mathématique qui décrit le Mouvement Brownien Fractionnaire est le suivant (Mandelbrot.1968) :

Si $(0 < H < 1)$ et $B_H(t) = B_H(t, \omega) - \mathrm{B_H}(0, \omega)$ est un mouvement aléatoire qui vérifie l'équation suivante :

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{H}+1/2)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[(\mathrm{t}-\mathrm{s})^{(\mathrm{H}-1/2)} - (-\mathrm{s})^{(\mathrm{H}-1/2)}\right]\mathrm{dB_H}(\mathrm{s},\omega) + \int_{0}^{\mathrm{t}}(\mathrm{t}-\mathrm{s})^{(\mathrm{H}-1/2)}\mathrm{dB_H}(\mathrm{s},\omega)\right\} \quad (3.14)$$

Où $w = 2\pi\delta$, δ est la fréquence.

alors $B_H(t)$ est un Mouvement Brownien Fractionnaire, tel que :

. Γ est la fonction Gamma définie par : $\Gamma(\mathrm{a}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{x}^{\mathrm{a}-1}.\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$, $\mathrm{a} > 0$. Ses principales propriétés sont :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a);$$
$$\Gamma(1) = 1;$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!, \text{ si n est un entier.}$$

- Si $H = 1/2$, $B_H(t)$ est appelé mouvement Brownien ordinaire.

- $B_H(t)$ suit une distribution normale de probabilité, $N(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 0$ (μ est la moyenne, σ^2 *est la variance*) et dont la fonction de densité de probabilité $f(x)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\left(\frac{(x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.1$$

- Il satisfait la relation suivante :

$$P\left(\frac{B_H(t+\Delta t) - B_H(t)}{\|\Delta t\|^H} < x\right) = F(x) \quad (3.16)$$

Où $F(x)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de type gaussien $N(\mu, \sigma)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-s^2}{2\sigma^2}\right)\, ds \quad (3.17)$$

Les équations (3.16) et (3.17) impliquent que (Garding. 1988) :

$$E\left[\left(B_H(t+\Delta t) - B_H(t)\right)^2\right] = \alpha.\|\Delta t\|^{2H} \quad (\alpha \text{ est une constante}) \quad (3.18)$$

Si $\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)$ est de type gaussien $N(\mu, \sigma)$, la variance de $\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)$ est :

$$var\left[\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right] = E[\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)^2] + (E[\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}])^2 \quad (3.19)$$

$E\left[\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)^2\right]$ est le moment d'ordre 2 de $\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)$ *et* $E\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)$ est le moment d'ordre 1 de $\left(\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)$.

Comme $E[\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}] = \mu = 0$ et $var\left[\frac{B_H(t+\Delta t)-B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right] = \sigma^2$, alors l'équation (3.20) s'écrit :

$$E[\left(\frac{B_H(t+\Delta t) - B_H(t)}{\|\Delta t\|^H}\right)^2] = \sigma^2.$$

ce qui implique que : $E[(B_H(t+\Delta t) - B_H(t))^2] = \sigma^2.\|\Delta t\|^{2H}$ (3.21)

De (3.18) et (3.21) nous constatons que $\alpha = \sigma^2$.

Le logarithme de l'équation (3.21), nous donne :

$logE([B_H(t+\Delta t) - B_H(t)]^2) = 2H.log\|\Delta t\| + 2log\sigma$ (3.22)